# FÍSICA PREUNIVERSITARIA

***Teoría y problemas resueltos***

A. Peña

Matemática Abierta

# PRÓLOGO

Al frenar un autobús, sentimos que el cuerpo se inclina hacia delante. La experiencia dura apenas un instante y resulta tan familiar que solemos acomodarnos y seguir el viaje. Estudiar física empieza cuando decidimos detenernos en ella: queremos comprender qué cambia en el movimiento del vehículo, cómo intervienen el asiento y el suelo, y por qué nuestro cuerpo responde de esa manera. Una situación que conocíamos se convierte en un problema que podemos investigar.

He querido que este libro acompañe ese paso de la experiencia a la explicación. Quien se acerca a la física trae muchas ideas sobre el movimiento, el calor o la luz, formadas al observar y actuar en el mundo. Esas ideas ofrecen un punto de partida fértil. Al examinarlas con cuidado, algunas adquirirán una expresión más precisa; otras cambiarán cuando una observación o un argumento nos obliguen a mirar de nuevo. La comprensión se construye en ese trabajo, y cada lector podrá participar en él desde las primeras páginas.

La palabra *preuniversitaria* señala el tramo que recorreremos: recuperaremos herramientas escolares y aprenderemos a usarlas para formular preguntas cada vez más exigentes. Una proporción permitirá comparar velocidades; una gráfica hará visible cómo cambia una magnitud; un balance de energía relacionará situaciones que al principio parecían distintas. El álgebra y la geometría irán encontrando una función concreta en los problemas. Cuando aparezca una expresión nueva, interesará comprender qué cantidades relaciona y qué podemos averiguar con ella.

Una parte del aprendizaje ocurre antes de escribir la primera ecuación. Para estudiar el frenado del autobús necesitamos elegir qué cuerpo observamos y respecto de qué referencia describimos su movimiento. Si después preguntamos cuánto espacio requiere para detenerse, tendremos que considerar su rapidez inicial y decidir cómo representar la acción de los frenos. Suponer una desaceleración constante permite construir un primer modelo. Compararlo con un frenado real nos ayudará a reconocer las condiciones en que esa simplificación resulta útil. Las hipótesis forman parte de la respuesta porque explican cómo hemos pasado de la situación al cálculo.

También forman parte de ella las mediciones. Un tiempo registrado con un cronómetro lleva consigo las posibilidades del instrumento y del procedimiento empleado. Al usarlo en una ecuación debemos conservar ese vínculo con la observación y comunicar una precisión acorde con los datos. Esta atención se aprende desde problemas pequeños: escribir las unidades, estimar un orden de magnitud y preguntarse qué variaciones del resultado serían compatibles con la incertidumbre de las medidas. El número obtenido adquiere sentido al regresar a aquello que queríamos conocer.

Los problemas resueltos están pensados para acompañar la adquisición de esos hábitos. Antes de leer una solución, vale la pena dejar un intento propio sobre el papel, aunque consista en un dibujo o en unas pocas relaciones entre los datos. Al compararlo con el desarrollo del libro podremos reconocer una elección que nos faltaba, una condición que habíamos pasado por alto o un camino diferente que también merezca explorarse. Después, reconstruir la solución con el texto cerrado permitirá comprobar qué parte del razonamiento podemos sostener por nuestra cuenta.

Un resultado inesperado ofrece una ocasión especialmente buena para aprender. Si el tiempo calculado para un trayecto resulta demasiado grande, podemos volver a la conversión de unidades, revisar la distancia o examinar la rapidez supuesta. Si dos procedimientos dan respuestas

diferentes, habrá que localizar las hipótesis de cada uno y seguir sus consecuencias. Esa revisión vuelve más preciso el diagnóstico de una dificultad: una vez que sabemos dónde aparece, podemos trabajar sobre ella. La soltura se irá formando al resolver y revisar problemas con atención.

Las figuras y las experiencias propuestas permiten continuar ese trabajo por otras vías. Un diagrama ayuda a decidir qué interacciones debemos considerar; una gráfica permite comparar una predicción con los datos; una experiencia sencilla nos obliga a precisar qué mediremos y cómo lo haremos. Al estudiar estas representaciones conviene detenerse en sus detalles: el significado de una flecha, la escala de un eje o la posición de un instrumento pueden sostener una parte decisiva de la explicación.

El recorrido guarda una relación cercana con *Matemática preuniversitaria*. Allí se desarrollan recursos para justificar transformaciones y estudiar relaciones entre objetos matemáticos; aquí los emplearemos para construir descripciones de fenómenos y examinar sus predicciones mediante observaciones. Ambos aprendizajes se enriquecen mutuamente. Una ecuación conocida puede adquirir una interpretación física, y una dificultad física puede llevarnos a comprender mejor una relación matemática.

Habrá páginas que pidan volver atrás, rehacer una cuenta o buscar otra manera de representar lo que sucede. Podemos darles ese tiempo. Me gustaría que, a medida que avances, fueras ganando confianza para formular tus propias preguntas y explicar las razones de tus respuestas. El autobús seguirá frenando como antes; tú podrás reconocer en ese instante un movimiento que sabes describir, unas interacciones que sabes identificar y una explicación que puedes compartir.

# CÓMO ESTUDIAR ESTE LIBRO

La física comienza con preguntas acerca del mundo: cuánto tarda una señal en llegar a su destino, por qué cambia el movimiento de un cuerpo o qué información podemos obtener de una medición. Este libro propone aprender a responderlas mediante modelos, explicaciones y problemas resueltos, sin renunciar a la comprensión matemática.

El recorrido comienza con unidades, mediciones e incertidumbre; continúa con álgebra, trigonometría y vectores; construye las ideas de derivada e integral desde la variación y la acumulación; y las aplica al movimiento. Las herramientas de cálculo se enseñan aquí en su sentido físico y operativo: su fundamentación completa corresponde a un estudio posterior de análisis matemático.

Para comenzar conviene manejar sumas, productos, fracciones y decimales. Las potencias y el álgebra se retomarán con mayor amplitud en el capítulo 2; cuando hagan falta antes, explicaremos su uso local. El cálculo diferencial e integral comienza en el capítulo 3, sin presuponer un curso previo de esa materia.

**Método de estudio.** Antes de leer cada solución, intenta representar la situación, identificar las magnitudes, formular las hipótesis y estimar el resultado. Durante la resolución, sigue las unidades y los signos; al terminar, verifica el dominio de validez del modelo. Todas las prácticas propuestas incluyen soluciones para una autocorrección razonada.

**Convenciones de lectura.** Los títulos de los recuadros distinguen ideas fundamentales, problemas resueltos, ejercicios de práctica, advertencias y experiencias de observación. Los títulos permiten reconocer cada función, y el color refuerza esa distinción.

# ÍNDICE GENERAL

**Prólogo** **i**

**Cómo estudiar este libro** **iii**

**1 Medición, magnitudes, dimensiones y modelos físicos** **1**

1.1 De la descripción a la explicación . . . 2
1.2 Las unidades revelan la estructura de las relaciones . . . 3
1.3 La medida y su incertidumbre . . . 4
1.4 Cómo comunicar el resultado y su incertidumbre . . . 5
1.5 Medir exige también saber cuándo falta información . . . 6
1.6 Elegir un modelo es elegir qué importa . . . 8
1.7 Estimar antes de calcular . . . 9
1.8 Un primer problema astronómico . . . 9
1.9 Los gráficos también son relaciones matemáticas . . . 10
1.10 El análisis dimensional puede sugerir una ley . . . 11
1.11 Qué hacer cuando una respuesta parece correcta . . . 12
Ejercicios de práctica . . . 12
Soluciones completas . . . 15
Diagnóstico de salida: antes de estudiar álgebra y vectores . . . 17

**2 Matemáticas para la física: álgebra, trigonometría y vectores** **18**

2.1 La primera disciplina del cálculo: saber qué estamos calculando . . . 19
2.2 Despejar ecuaciones sin perder la física . . . 19
2.3 Dos incógnitas requieren dos relaciones independientes . . . 20
2.4 Proporcionalidad, potencias y escalas . . . 21
2.5 Raíces de ecuaciones cuadráticas . . . 23
2.6 Ángulos, radianes y trigonometría . . . 24
2.7 Vectores: magnitudes que requieren dirección . . . 26
2.8 Sumar vectores y distinguir desplazamiento de recorrido . . . 27
2.9 Dos productos diferentes y sus significados físicos . . . 29
2.10 Rectas, parábolas, circunferencias y gráficas físicas . . . 31
2.11 Identidades, leyes y modelos . . . 33
Ejercicios de práctica . . . 34
Soluciones completas . . . 36
Diagnóstico de salida: puente hacia el capítulo 3 . . . 38

**3 Funciones, variación y acumulación: cálculo físico desde cero 39**
3.1 Lo que necesitamos saber antes de comenzar . . . 40
3.2 Una función describe un modelo . . . 40
3.3 La pendiente nos habla de una variación . . . 41
3.4 La tasa media y su límite . . . 42
3.5 Derivar también permite estudiar aceleraciones . . . 44
3.6 El camino inverso: acumular pequeños desplazamientos . . . 46
3.7 La integral: del dibujo a una expresión general . . . 47
3.8 Cuando los datos son discretos . . . 50
3.9 Una primera ecuación diferencial . . . 51
3.10 Qué hemos justificado y qué queda por demostrar . . . 52
Ejercicios de práctica . . . 53
Soluciones completas de los ejercicios . . . 55
Diagnóstico de salida y puente hacia el capítulo 4 . . . 59

**4 Movimiento en una dimensión 60**
4.1 Antes de medir un movimiento: elegir la referencia . . . 61
4.2 Rapidez, velocidad y aceleración . . . 62
4.3 Tres gráficas que cuentan una misma historia . . . 64
4.4 Movimiento rectilíneo uniforme . . . 66
4.5 Aceleración constante: deducir antes de memorizar . . . 67
4.6 Caída libre y lanzamiento vertical: una misma convención . . . 70
4.7 Movimientos por tramos: conservar la información entre etapas . . . 72
4.8 Qué podemos inferir realmente de las mediciones . . . 74
Ejercicios de práctica . . . 76
Soluciones completas de los ejercicios . . . 78
Diagnóstico de salida . . . 80

**5 Movimiento en dos dimensiones y movimiento relativo 81**
5.1 Una posición necesita dos coordenadas . . . 82
5.2 Reconstruir el movimiento por componentes . . . 84
5.3 Proyectiles: dos movimientos y un solo reloj . . . 86
5.4 Encuentros: coincidir en el espacio y en el tiempo . . . 92
5.5 Movimiento circular: cambiar de dirección es acelerar . . . 94
5.6 Cambiar de observador sin cambiar el suceso . . . 95
5.7 Del modelo a una observación . . . 98
Ejercicios para reconstruir y transferir . . . 99
Soluciones completas de los ejercicios . . . 102
Diagnóstico de salida . . . 105

**6 Leyes de Newton y diagramas de cuerpo libre 106**
6.1 Inercia: qué permanece cuando la fuerza neta es cero . . . 107
6.2 Sumar interacciones y relacionarlas con la aceleración . . . 108
6.3 Elegir el cuerpo y dibujar las fuerzas que recibe . . . 112
6.4 Equilibrio traslacional y condiciones de contacto . . . 114
6.5 Tercera ley: dos fuerzas sobre dos cuerpos . . . 115
6.6 La resultante en un movimiento curvo . . . 117
6.7 Un observador que acelera . . . 118
6.8 Fuerza variable y cantidad de movimiento . . . 119
6.9 Contrastar el modelo con una observación . . . 122
Ejercicios para reconstruir y transferir . . . 123
Soluciones completas de los ejercicios . . . 126
Diagnóstico de salida . . . 130
Lecturas de apoyo . . . 131

**7 Rozamiento, tensiones y sistemas de cuerpos 132**
7.1 Peso, apoyo y movimiento relativo . . . 133
7.2 El rozamiento estático como condición de compatibilidad . . . 133
7.3 Deslizar, frenar y llegar al reposo . . . 134
7.4 Cómo un tirón modifica el apoyo . . . 135
7.5 Elegir ejes sobre una rampa . . . 136

7.6 Un intervalo de fuerzas que conserva el reposo . . . 139
7.7 Cuerdas y poleas: de la longitud a la aceleración . . . 140
7.8 Varios cuerpos y contactos que pueden fallar . . . 143
7.9 Una polea móvil cambia la restricción . . . 145
7.10 Elegir el tirón y contrastar el modelo . . . 145
Ejercicios para reconstruir y transferir . . . 147
Soluciones completas de los ejercicios . . . 150
Diagnóstico de salida . . . 152
Lecturas de apoyo . . . 152

**8 Trabajo, energía y potencia 153**
8.1 Una fuerza actúa a lo largo de un desplazamiento . . . 154
8.2 Del trabajo neto a la energía cinética . . . 155
8.3 Acumular el trabajo de una fuerza variable . . . 157
8.4 Cambiar la dirección sin cambiar la energía cinética . . . 158
8.5 La gravedad y la elección de una energía potencial . . . 159
8.6 Resortes y fuerzas conservativas . . . 160
8.7 Conservar la energía mecánica con hipótesis explícitas . . . 161
8.8 El balance cuando hay rozamiento . . . 162
8.9 Potencia y rendimiento . . . 164
8.10 Qué estados permite un balance de energía . . . 166
Ejercicios para reconstruir y transferir . . . 167
Soluciones completas de los ejercicios . . . 171
Diagnóstico de salida . . . 173
Lecturas de apoyo . . . 173

**9 Cantidad de movimiento, impulso y colisiones 174**
9.1 Cantidad de movimiento y energía cinética . . . 175
9.2 El impulso acumula la fuerza en el tiempo . . . 175
9.3 Elegir el sistema y comprobar el impulso externo . . . 177
9.4 Choques en los que los cuerpos quedan unidos . . . 178
9.5 Colisiones elásticas en una dimensión . . . 179
9.6 Qué información falta en un choque general . . . 181
9.7 Separar etapas y reconocer la energía interna . . . 182
9.8 Conservar momento por componentes . . . 184
9.9 El centro de masa describe el movimiento del conjunto . . . 185
Ejercicios para reconstruir y transferir . . . 188
Soluciones completas de los ejercicios . . . 191
Diagnóstico de salida . . . 194
Lecturas de apoyo . . . 194

**10 Equilibrio, rotaciones y momento angular 195**
10.1 El torque depende de la línea de acción . . . 196
10.2 Equilibrio de un cuerpo extenso . . . 198
10.3 Describir el giro con una sola coordenada . . . 200
10.4 La distribución de masa y el momento de inercia . . . 202
10.5 Del torque a la aceleración angular . . . 203
10.6 Trabajo y potencia de un torque . . . 205
10.7 Rodar combina traslación y rotación . . . 206
10.8 El momento angular y su ley de cambio . . . 208
10.9 Conservar el momento angular sin conservar la energía cinética . . . 209
Ejercicios para reconstruir y transferir . . . 211
Soluciones completas de los ejercicios . . . 214
Diagnóstico de salida . . . 217
Lecturas de apoyo . . . 217

**11 Gravitación, leyes de Kepler y órbitas 218**
11.1 Una ley para la atracción entre masas . . . 219
11.2 El campo gravitatorio y la distancia al centro . . . 220
11.3 Energía potencial con un campo que cambia . . . 222
11.4 Una órbita circular es una caída continua . . . 224

11.5 Escape y lanzamientos que regresan . . . 226
11.6 Elipses y las tres leyes de Kepler . . . 227
11.7 La ley de las áreas nace de un torque nulo . . . 228
11.8 La energía distingue las órbitas . . . 229
11.9 Períodos, observaciones y masas comparables . . . 230
Ejercicios para reconstruir y transferir . . . 232
Soluciones completas de los ejercicios . . . 235
Diagnóstico de salida . . . 237
Lecturas de apoyo . . . 238

**12 Presión, flotación y fluidos 239**
12.1 Densidad y presión: dos cocientes con distinto significado . . . 240
12.2 Cómo cambia la presión con la altura . . . 241
12.3 Pascal y el intercambio entre fuerza y recorrido . . . 243
12.4 Arquímedes: del gradiente de presión al empuje . . . 245
12.5 Conservar la masa de un fluido que circula . . . 248
12.6 Bernoulli: seguir la energía de una corriente . . . 249
12.7 Del depósito al chorro: hipótesis y predicciones . . . 251
Ejercicios para reconstruir y transferir . . . 253
Soluciones razonadas . . . 257
Una experiencia: el alcance de un chorro . . . 258
Diagnóstico antes de avanzar . . . 259

**13 Oscilaciones y movimiento armónico 260**
13.1 La posición de equilibrio y la ley de Hooke . . . 261
13.2 De la fuerza a una ecuación para el movimiento . . . 263
13.3 Amplitud, fase, frecuencia y tiempos de paso . . . 264
13.4 La energía y la geometría del estado . . . 266
13.5 El péndulo y la aproximación de ángulo pequeño . . . 268
13.6 Amortiguamiento: una pérdida que puede calcularse . . . 270
13.7 Forzamiento y resonancia: qué respuesta se maximiza . . . 272
Ejercicios para reconstruir y transferir . . . 274
Soluciones razonadas . . . 277
Una experiencia: medir el período sin confundirlo con la amplitud . . . 279
Diagnóstico antes de avanzar . . . 280

**14 Ondas, sonido, superposición y resonancia 281**
14.1 Una oscilación que se propaga . . . 282
14.2 La rapidez se obtiene del medio . . . 283
14.3 Superposición e interferencia . . . 285
14.4 Reflexión, ondas estacionarias y modos normales . . . 286
14.5 Sonido, timbre y batimientos . . . 288
14.6 Intensidad y niveles en decibelios . . . 289
14.7 Doppler: contar frentes desde una referencia común . . . 291
14.8 Una aplicación: afinar con batimientos . . . 293
Ejercicios para reconstruir y transferir . . . 294
Soluciones razonadas . . . 297
Una experiencia: medir modos y batimientos . . . 299
Diagnóstico antes de avanzar . . . 299

**15 Temperatura, calor y teoría cinética 300**
15.1 Temperatura, equilibrio e intercambio de energía . . . 301
15.2 Escalas y propiedades termométricas . . . 302
15.3 Dilatación y geometría de un cuerpo . . . 303
15.4 Capacidad calorífica y balances de calorimetría . . . 304
15.5 Cambios de fase y estados finales posibles . . . 307
15.6 Cómo y con qué rapidez se transfiere la energía . . . 310
15.7 Temperatura y movimiento microscópico . . . 312
Ejercicios para reconstruir y transferir . . . 314
Soluciones razonadas . . . 317
Una experiencia: medir la respuesta térmica . . . 319

Diagnóstico antes de avanzar . . . 320
**16 Gases, trabajo y principios de la termodinámica 321**
16.1 Describir el estado de un gas . . . 322
16.2 El trabajo al cambiar el volumen . . . 323
16.3 La energía que permanece y la que cruza la frontera . . . 325
16.4 Capacidades caloríficas de un gas ideal . . . 326
16.5 Reconocer y calcular una transformación . . . 327
16.6 Cerrar la trayectoria: ciclos y área neta . . . 330
16.7 Máquinas térmicas, refrigeradores y límites . . . 331
16.8 Entropía y sentido de los procesos . . . 334
Ejercicios para reconstruir y transferir . . . 335
Soluciones razonadas . . . 338
Una experiencia: comparar dos compresiones . . . 340
Diagnóstico antes de avanzar . . . 341
**17 Cargas eléctricas, fuerzas, campos y potencial 342**
17.1 Carga, transferencia y conservación . . . 343
17.2 Conductores, aislantes y polarización . . . 344
17.3 Fuerzas entre cargas puntuales . . . 345
17.4 El campo como propiedad de la configuración fuente . . . 347
17.5 Potencial, energía y trabajo . . . 349
17.6 Leer equipotenciales y predecir movimientos . . . 351
17.7 Capacitancia y energía almacenada . . . 352
17.8 Cambiar el material y combinar capacitores . . . 354
Ejercicios para reconstruir y transferir . . . 355
Soluciones razonadas . . . 358
Una experiencia: observar una redistribución . . . 360
Diagnóstico antes de avanzar . . . 360
**18 Corriente eléctrica y circuitos 361**
18.1 Corriente: seguir la carga que atraviesa una sección . . . 362
18.2 Resistencia, material y temperatura . . . 364
18.3 Fuentes: energía por unidad de carga . . . 366
18.4 Potencia y energía transferida . . . 368
18.5 Reconocer conexiones y reducir una red . . . 369
18.6 Leyes de Kirchhoff y elección de signos . . . 371
18.7 Medir también forma parte del circuito . . . 373
18.8 Límites de operación y decisiones de diseño . . . 375
Ejercicios para reconstruir y transferir . . . 376
Soluciones razonadas . . . 379
Una experiencia: reconstruir conexiones y comprobar lecturas . . . 380
Diagnóstico antes de avanzar . . . 381
**19 Magnetismo e inducción electromagnética 382**
19.1 Campo magnético y fuerza sobre una carga . . . 383
19.2 Trayectorias y campos cruzados . . . 384
19.3 Fuerza sobre conductores y giro de una espira . . . 386
19.4 Campos generados por corrientes . . . 388
19.5 Flujo: orientar una superficie . . . 390
19.6 Faraday y Lenz: responder a un cambio de flujo . . . 391
19.7 Movimiento, generación y balance de energía . . . 394
19.8 Autoinducción y campos que se propagan . . . 396
Ejercicios para reconstruir y transferir . . . 398
Soluciones razonadas . . . 401
Una experiencia: observar el sentido de la inducción . . . 403
Diagnóstico antes de avanzar . . . 403
**20 Óptica geométrica y ondulatoria 404**
20.1 Rayos, reflexión e imagen en un espejo plano . . . 405
20.2 Refracción y reflexión interna total . . . 406
20.3 Espejos esféricos y aumento lateral . . . 408

20.4 Lentes delgadas y convención de signos . . . 410
20.5 Sistemas de lentes y potencia óptica . . . 412
20.6 Interferencia y doble rendija . . . 413
20.7 Difracción y resolución . . . 414
20.8 Dispersión, espectro y color . . . 416
Ejercicios para reconstruir y transferir . . . 418
Soluciones razonadas . . . 421
Una experiencia: localizar una imagen real . . . 423
Diagnóstico antes de avanzar . . . 423

**21 Física del universo: astronomía y astrofísica introductoria 424**
21.1 Distancias y tiempos de viaje de la luz . . . 425
21.2 Paralaje: una distancia a partir de un ángulo . . . 426
21.3 Tamaño angular y resolución de los instrumentos . . . 428
21.4 Órbitas y masas: una aplicación de Kepler . . . 429
21.5 Luminosidad y flujo recibido . . . 431
21.6 Espectro térmico, temperatura y radio . . . 433
21.7 Líneas espectrales y velocidad radial . . . 436
21.8 Reunir observaciones para construir un modelo estelar . . . 437
Ejercicios para reconstruir y transferir . . . 438
Soluciones razonadas . . . 441
Una experiencia: medir un desplazamiento de paralaje . . . 443
Diagnóstico antes de avanzar . . . 443

**22 Primer encuentro con la física moderna 444**
22.1 Escalas y alcance de los modelos . . . 445
22.2 Fotones: energía de la radiación y potencia de un haz . . . 446
22.3 Efecto fotoeléctrico y frecuencia umbral . . . 448
22.4 Potencial de frenado e interpretación de datos . . . 450
22.5 Espectros de líneas y niveles de energía . . . 452
22.6 Núcleos y transformaciones radiactivas . . . 454
22.7 Semivida, actividad y predicción estadística . . . 454
22.8 Conectar mediciones, balances y modelos . . . 457
Ejercicios para desarrollar autonomía . . . 458
Soluciones razonadas . . . 461
Una experiencia: representar una población que se transforma . . . 463
Diagnóstico antes de avanzar . . . 463

**23 Laboratorio de modelización, datos y problemas integradores 464**
23.1 De una pregunta a un procedimiento de medida . . . 465
23.2 Tablas, transformaciones y gráficas fieles . . . 466
23.3 Ajuste lineal, parámetros y residuos . . . 468
23.4 Incertidumbres de magnitudes indirectas . . . 470
23.5 Dimensiones, límites y comparación de modelos . . . 472
23.6 Integración numérica y estudio de convergencia . . . 473
23.7 Una serie observada: calibración de instrumentos . . . 475
23.8 Una conclusión que otra persona pueda reconstruir . . . 477
Ejercicios para desarrollar autonomía . . . 478
Soluciones razonadas . . . 481
Una experiencia: un pequeño estudio reproducible del péndulo . . . 483
Diagnóstico de cierre del recorrido . . . 484

# CAPÍTULO 1

# MEDICIÓN, MAGNITUDES, DIMENSIONES Y MODELOS FÍSICOS


1.1 De la descripción a la explicación 2
1.2 Las unidades revelan la estructura de las relaciones . . . . . 3
1.3 La medida y su incertidumbre 4
1.4 Cómo comunicar el resultado y su incertidumbre . . . . . 5
1.5 Medir exige también saber cuándo falta información . . . 6
1.6 Elegir un modelo es elegir qué importa . . . . . 8
1.7 Estimar antes de calcular . . . 9
1.8 Un primer problema astronómico 9
1.9 Los gráficos también son relaciones matemáticas . . . . . 10
1.10 El análisis dimensional puede sugerir una ley . . . . . 11
1.11 Qué hacer cuando una respuesta parece correcta . . . . . 12
Ejercicios de práctica . . . . . 12
Soluciones completas . . . . . 15
Diagnóstico de salida: antes de estudiar álgebra y vectores . . . . 17


La luz del Sol entra por una ventana y alcanza la mesa en la que estamos leyendo. Para llegar hasta ella ha cruzado el espacio entre el Sol y la Tierra. Podemos preguntarnos cuánto ha durado ese viaje y buscar una respuesta con dos datos: la distancia recorrida y la rapidez de la luz. Una escena cotidiana nos ha llevado a un problema cuya escala cuesta imaginar.

Conocemos una relación parecida por los viajes que hacemos en la Tierra. Si un vehículo mantiene su rapidez, recorrer el doble de distancia le exige el doble de tiempo. Esa relación permite calcular una de las tres cantidades cuando conocemos las otras dos. Para aplicarla a la luz elegiremos un primer modelo: propagación a rapidez constante en el vacío, tomando la distancia Sol–Tierra como longitud aproximada del trayecto. Así podremos relacionar una observación cercana con una distancia astronómica.

La cuenta será breve; preparar sus datos merece atención. La distancia puede venir expresada en kilómetros y la rapidez en metros por segundo. Tendremos que hacer compatibles esas unidades y decidir cuántas cifras podemos sostener con la información disponible. También podremos recorrer el razonamiento en sentido inverso: a partir del tiempo de viaje y de la rapidez, estimar la distancia al Sol. Volveremos a ese problema en la sección «Un primer problema astronómico».

Empezaremos por cantidades que podemos medir cerca de nosotros. La longitud de una mesa o la duración de un recorrido permiten aprender a expresar una medida y examinar su alcance. Ese cuidado nos acompañará cuando los objetos se encuentren demasiado lejos para acercarles una regla.

## 1.1 De la descripción a la explicación

Podemos empezar midiendo la longitud de una mesa con una regla y repetir la medida con una cinta graduada. Para comparar los resultados necesitaremos saber qué extremos se tomaron, qué unidad se empleó y qué detalle permite distinguir cada instrumento. Esas decisiones dan un contenido preciso a la pregunta «¿cuánto mide?». Con el tiempo de un recorrido haremos algo semejante: fijaremos los sucesos de comienzo y de término, y usaremos un reloj para medir la duración entre ambos. Al expresar esas cantidades podremos construir relaciones como la que nos permitirá estudiar el viaje de la luz.

Usaremos potencias de diez para escribir números grandes o pequeños: $10^3 = 1000$ y $10^{-2} = 1/100 = 0{,}01$. Una escritura como $3 \times 10^4$ significa 30 000; en cambio, $3 \times 10^{-4} = 0{,}0003$. Al multiplicar potencias de la misma base sumamos exponentes: $10^3 \times 10^{-2} = 10^{3-2} = 10$. La potencia afecta también a las unidades: $\mathrm{cm}^2$ es la unidad de área de un cuadrado de un centímetro de lado, mientras que $\mathrm{cm}^3$ mide el volumen de un cubo de ese lado.

Una *magnitud física* es una propiedad a la que podemos asignar valores mediante un procedimiento de medición o una definición operativa adecuada. La longitud, el tiempo, la masa y la temperatura son ejemplos. El resultado de una medida combina un número y una unidad: escribir «la mesa mide 1,2» deja una información esencial sin indicar; escribir 1,2 m tiene significado físico.

Al escoger otra unidad cambia el número que expresa la misma longitud:

$$1{,}2\,\mathrm{m} = 120\,\mathrm{cm}.$$

Ambas expresiones describen la longitud de la misma mesa. Hemos expresado una misma magnitud de dos maneras.

| Unidad elegida | Valor numérico |
|---|---|
| Metro | 1,2 |
| Centímetro | 120 |

Una magnitud *escalar* se describe mediante un valor en una escala y su unidad cuando corresponde; ese valor se conserva al cambiar la orientación de los ejes espaciales. La temperatura en grados Celsius, la carga eléctrica y el trabajo proporcionan ejemplos de valores positivos, cero o negativos según la situación. Los desplazamientos, las velocidades y las fuerzas incorporan además información direccional, que desarrollaremos mediante vectores en el capítulo 2.

## 1.2 Las unidades revelan la estructura de las relaciones

Trabajaremos principalmente con el Sistema Internacional de Unidades (SI). Tres unidades nos acompañarán desde el comienzo: el metro ( m), el segundo ( s) y el kilogramo ( kg). Otras magnitudes usan combinaciones de estas unidades. Una rapidez, por ejemplo, puede medirse en metros por segundo, m/s; una aceleración, en $\mathrm{m/s^2}$.

La *dimensión* expresa cómo una magnitud depende de magnitudes básicas, como longitud, masa y tiempo. Para representarla combinamos sus símbolos mediante potencias: una rapidez tiene dimensión $L/T$ y una aceleración, $L/T^2$. La unidad establece la referencia con que expresamos su valor. Una longitud conserva su dimensión $L$ al expresarse en metros o centímetros; un tiempo conserva su dimensión $T$ al expresarse en segundos u horas.

Toda igualdad física entre cantidades de la misma naturaleza debe ser *dimensionalmente homogénea*. Esto significa que ambos lados de una ecuación deben tener la misma dimensión, y que los términos que se suman deben ser compatibles. La suma $3\,\mathrm{m} + 4\,\mathrm{s}$ reúne magnitudes de dimensiones distintas y carece de significado como longitud.

La homogeneidad dimensional permite detectar muchos errores; la validez física de una ecuación requiere además examinar el modelo y contrastar sus predicciones. La relación $d = vt$ posee las dimensiones de una distancia; la expresión $d = 2vt$ también. La elección entre ellas requiere información física sobre la situación particular. Para eso necesitamos comprender el movimiento.

**PROBLEMA RESUELTO 1.1 · Una rapidez expresada en dos sistemas de unidades**

Un automóvil se desplaza con una rapidez constante de 72 km/h. Expresar esa rapidez en m/s y calcular cuántos metros recorre en 15 s.
*Resolución.* Lo que queremos convertir es una razón entre longitud y tiempo. Un kilómetro equivale a mil metros y una hora a 3600 s. Por tanto,

$$72\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 72\frac{1000\,\mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s}} = 20\,\mathrm{m/s}.$$

Ahora sí podemos multiplicar por un tiempo expresado en segundos:

$$d = vt = (20\,\mathrm{m/s})(15\,\mathrm{s}) = 300\,\mathrm{m}.$$

La unidad segundo se cancela, como debe ocurrir si el resultado es una longitud. Una comprobación mental adicional: a 20 m/s el automóvil recorre 200 m en diez segundos y 100 m en otros cinco. La respuesta 300 m es coherente.

| Tiempo (s) | Recorrido (m) |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 5 | 100 |
| 10 | 200 |
| 15 | 300 |

En intervalos iguales de 5 s se recorren 100 m: el modelo es de rapidez constante.

## 1.3 La medida y su incertidumbre

Medir es comparar una propiedad con un patrón por medio de un procedimiento concreto. Si apoyamos una regla sobre una mesa, necesitamos decidir dónde empieza y termina la longitud, cómo alineamos el instrumento y qué graduación puede distinguirse. La resolución del instrumento y el procedimiento empleado limitan las cifras que podemos informar. Por eso una cifra como 1,247391 m puede atribuir al instrumento una precisión excesiva; 1,25 m puede comunicar mejor el alcance de la medición.

La *resolución* indica el menor incremento que el instrumento distingue o muestra. La *precisión* describe la proximidad de resultados obtenidos al repetir una operación en condiciones especificadas; una colección de valores puede ser muy semejante internamente y estar desplazada respecto de un valor de referencia. La *exactitud* se refiere a cuán próximo está un resultado a un valor de referencia aceptado. Un efecto sistemático puede desplazar los resultados de manera constante o predecible al repetir la medición. El *sesgo* es una estimación del error sistemático, obtenida mediante una comparación apropiada con una referencia. Para juzgar la exactitud de una serie con poca dispersión necesitamos contrastarla con un patrón adecuado.

La incertidumbre expresa el margen de conocimiento asociado a la medición. Es una forma explícita de comunicar qué variación de resultados resulta compatible con los datos y con el método utilizado. Las fuentes de incertidumbre pueden ser la calibración, la lectura, las condiciones ambientales, la variabilidad del objeto y el procedimiento. La mitad de una división de una regla *puede* proporcionar una estimación de lectura bajo condiciones apropiadas; las demás fuentes de incertidumbre requieren una evaluación propia.

**PROBLEMA RESUELTO 1.2 · Precisión de una serie y exactitud de sus resultados**

Dos equipos miden repetidamente una longitud cuyo valor de referencia es 2,00 m. El equipo A obtiene 2,01, 2,02 y 2,01 m; el B, 2,11, 2,12 y 2,11 m. ¿Cuál es más exacto? ¿Se distingue claramente cuál es más preciso solo con estos datos?

*Resolución.* Las tres lecturas del equipo A están mucho más cerca de 2,00 m, por lo que sus resultados son más *exactos* respecto de ese valor de referencia. En cambio, la dispersión observable en ambos equipos es la misma: cada serie abarca 0,01 m entre sus extremos. Los datos muestran una precisión repetitiva semejante en ambos grupos. Podría existir un error sistemático en el equipo B. Para identificar la causa de esa diferencia —por ejemplo, una mala calibración o un desplazamiento del cero— necesitamos información adicional sobre el procedimiento.

| Serie (m) | Mínimo / máximo (m) | Rango (m) |
|---|---|---|
| A | 2,01 / 2,02 | 0,01 |
| B | 2,11 / 2,12 | 0,01 |
| Referencia | 2,00 / 2,00 | — |

Las dispersiones coinciden; la separación respecto del patrón es diferente. La tabla resume las tres lecturas de cada equipo.

**Una medición repetida**

Mide cinco veces la longitud de un lápiz utilizando una regla graduada en milímetros. Anota todas las lecturas, la resolución del instrumento y la diferencia entre los valores extremos. Compara esa dispersión con la resolución de la regla: ¿qué información aporta cada una? Si las cinco lecturas coinciden, ¿puedes asegurar que la medición es exacta?

## 1.4 Cómo comunicar el resultado y su incertidumbre

Cuando interpretamos un dato $L = (12{,}34 \pm 0{,}05)\,\mathrm{cm}$ como un intervalo acotado, estamos comunicando que la longitud se encuentra, según el procedimiento y la interpretación adoptada, entre 12,29 cm y 12,39 cm. El símbolo $\pm$ solo es útil si decimos qué representa el margen: una cota instrumental, una desviación estadística, una incertidumbre expandida u otra convención. En este capítulo emplearemos, salvo indicación contraria, *cotas máximas de un intervalo compatible*.

| Lectura de longitud | Centímetros |
|---|---|
| Extremo inferior | 12,29 |
| Centro | 12,34 |
| Extremo superior | 12,39 |

La escritura $L \in [a, b]$ abrevia $a \le L \le b$: ambos extremos están incluidos. En $d/t$, mantener $t > 0$ y aumentar $d$ aumenta el resultado; mantener $d > 0$ y aumentar $t$ lo disminuye. Por ejemplo, recorrer la misma distancia en más tiempo reduce la rapidez media. Esta comparación explica qué extremos debemos elegir para construir las cotas del cociente.

Para sumar dos longitudes positivas con cotas $L_1 \in [a_1, b_1]$ y $L_2 \in [a_2, b_2]$, el total estará entre $a_1 + a_2$ y $b_1 + b_2$. Si los extremos tienen el mismo origen sistemático, debemos conservar esa contribución común al evaluar los márgenes. Para dividir longitudes o tiempos *positivos* acotados, obtenemos cotas seguras tomando los extremos que hacen mínimo y máximo el cociente. En problemas de mayor nivel aprenderemos otros tratamientos estadísticos, que requieren hipótesis adicionales.

**PROBLEMA RESUELTO 1.3 · Una rapidez media con datos acotados**

Un corredor recorre una distancia entre 9,9 m y 10,1 m en un tiempo entre 1,9 s y 2,1 s. Encontrar la rapidez media central y un intervalo conservador compatible con estos datos. *Resolución.* El modelo central, usando 10,0 m y 2,0 s, da 5,0 m/s. Como las cantidades son positivas, el cociente más pequeño se produce con la menor distancia y el mayor tiempo, mientras que el máximo procede del extremo opuesto:

$$\frac{9{,}9\,\mathrm{m}}{2{,}1\,\mathrm{s}} \le v_{\mathrm{media}} \le \frac{10{,}1\,\mathrm{m}}{1{,}9\,\mathrm{s}}, \qquad 4{,}71\,\mathrm{m/s} \lesssim v_{\mathrm{media}} \lesssim 5{,}32\,\mathrm{m/s}.$$

Informar $v = 5{,}000000\,\mathrm{m/s}$ atribuiría a la medición más cifras de las que respalda el procedimiento. Asignar una probabilidad al intervalo requeriría además una distribución estadística. La incertidumbre pertenece a nuestra información sobre la rapidez media, cuya definición física permanece fija.

| **Cota** | **Distancia / tiempo** | **Rapidez (m/s)** |
|---|---|---|
| Inferior | 9,9/2,1 | 33/7 |
| Central | 10,0/2,0 | 5,0 |
| Superior | 10,1/1,9 | 101/19 |

Para cantidades positivas, disminuir el numerador y aumentar el denominador reduce el cociente. Las fracciones conservan las cotas exactas.

Una regla práctica de comunicación consiste en redondear primero la incertidumbre a una o dos cifras significativas según el caso y presentar el valor central en la misma posición decimal. Así, si una evaluación justificó $12{,}34 \pm 0{,}05\,\mathrm{cm}$, esos dos números se leen juntos. Los ceros finales pueden transmitir resolución: 2,50 m puede comunicar una resolución distinta de 2,5 m. Conservamos las cifras que sustenta el procedimiento.

**PROBLEMA RESUELTO 1.4 · Densidad estimada y límites de dos mediciones**

La masa de una muestra homogénea se informa como $(20{,}0 \pm 0{,}2)\,\mathrm{g}$ y su volumen como $(8{,}0 \pm 0{,}1)\,\mathrm{cm}^3$, interpretando los márgenes como cotas. Estimar la densidad y dar un intervalo de valores compatibles.

*Resolución.* La densidad central es $\rho = m/V = 2{,}50\,\mathrm{g/cm}^3$. Como $m$ y $V$ son positivos, sus extremos proporcionan

$$\frac{19{,}8\,\mathrm{g}}{8{,}1\,\mathrm{cm}^3} \le \rho \le \frac{20{,}2\,\mathrm{g}}{7{,}9\,\mathrm{cm}^3}, \qquad 2{,}44\,\mathrm{g/cm}^3 \lesssim \rho \lesssim 2{,}56\,\mathrm{g/cm}^3.$$

El resultado central $2{,}50\,\mathrm{g/cm}^3$ puede acompañarse de estos límites. Si deseamos un solo margen simétrico conservador, $\rho \approx (2{,}50 \pm 0{,}06)\,\mathrm{g/cm}^3$ resume el intervalo con el redondeo indicado. Estas cotas proceden de los extremos compatibles; calcular una desviación estándar o emplear una propagación estadística requeriría otras hipótesis.

| **Cota** | $m$ **(g)** / $V$ **(cm$^3$)** | $\rho$ **(g/cm$^3$)** |
|---|---|---|
| Inferior | 19,8/8,1 | 22/9 |
| Central | 20/8 | 2,50 |
| Superior | 20,2/7,9 | 202/79 |

Las combinaciones extremas producen un recinto seguro para la densidad, sin asignarle probabilidades.

## 1.5 Medir exige también saber cuándo falta información

En una recta elegimos un origen y un sentido positivo. El *desplazamiento* es la posición final menos la inicial; la *velocidad media* es ese desplazamiento dividido por el tiempo transcurrido. La *rapidez media* relaciona la longitud del recorrido completo con el mismo tiempo. Si conocemos las posiciones inicial y final de un automóvil y la duración del viaje, podemos calcular su velocidad media; para reconstruir las posiciones intermedias necesitamos más información. Dos evoluciones muy distintas pueden tener los mismos extremos. Reconocer una *pregunta subdeterminada* consiste en identificar qué datos faltan para decidir entre las respuestas compatibles.

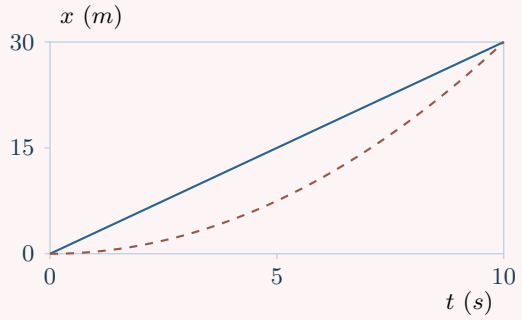
**PROBLEMA RESUELTO 1.5 · Movimientos distintos entre los mismos extremos**

Se observa un vehículo en $x = 0$ cuando $t = 0$ y en $x = 30\,\mathrm{m}$ cuando $t = 10\,\mathrm{s}$. ¿Podemos asegurar que viajó siempre a $3\,\mathrm{m/s}$?

*Resolución.* Sabemos que la velocidad media fue $30\,\mathrm{m}/10\,\mathrm{s} = 3\,\mathrm{m/s}$, pero son compatibles, por ejemplo, dos modelos distintos:

$$x_A(t) = (3\,\mathrm{m/s})t, \qquad x_B(t) = (0{,}3\,\mathrm{m/s^2})t^2, \quad 0 \le t \le 10\,\mathrm{s}.$$

Ambos comienzan en 0 y terminan en 30 m. En el primero la velocidad es constante; en el segundo aumenta con el tiempo. Una medición adicional en un instante intermedio permitiría distinguir estos modelos concretos, pero ni siquiera un número finito de posiciones determina, sin hipótesis suplementarias, una función de movimiento única para todos los instantes.




Línea continua: modelo A. Línea discontinua: modelo B. A los 5 s predicen 15 y 7,5 m, aunque comparten los extremos.

Una estimación de Fermi descompone una cantidad difícil de medir en factores sencillos y declara los supuestos que permiten estimar su escala. Con pocas mediciones podemos obtener así una orientación cuantitativa y reconocer qué datos mejorarían la respuesta.

**PROBLEMA RESUELTO 1.6 · Una estimación de Fermi: latidos a lo largo de una vida**

Estimar cuántos latidos realiza un corazón humano durante una vida de 80 años, suponiendo a efectos de la estimación una frecuencia media de 70 latidos por minuto. El resultado será una estimación de escala basada en los supuestos elegidos.
*Resolución.* Multiplicamos factores correspondientes al mismo período:

$$N \approx 70\frac{\text{latidos}}{\text{min}}\,60\frac{\text{min}}{\text{h}}\,24\frac{\text{h}}{\text{día}} \times 365\frac{\text{días}}{\text{año}}\,80 \text{ años} \approx 2{,}9 \times 10^9 \text{ latidos}.$$

La estimación vale del orden de unos pocos miles de millones. La estimación mantiene fijos los factores elegidos y deja fuera variaciones diarias, edad, salud y cambios vitales; muestra cómo abordar una pregunta de escala enorme descomponiéndola en factores comprensibles.

| **Escala temporal** | **Latidos acumulados** |
|---|---|
| Un minuto | 70 |
| Una hora | 4 200 |
| Un día | 100 800 |
| 80 años de 365 días | $2{,}94336 \times 10^9$ |

Cada fila multiplica la anterior por el número de períodos correspondiente. El último valor es un cálculo auxiliar; la estimación se comunica con pocas cifras.

## 1.6 Elegir un modelo es elegir qué importa

Los objetos reales tienen extensión, el aire ejerce resistencia y las superficies suelen presentar rozamiento. Si intentáramos describir todos esos factores desde el primer minuto, ni siquiera podríamos analizar el trayecto de una pelota lanzada hacia arriba. La física avanza mediante *modelos*: representaciones deliberadamente parciales de la realidad que conservan los rasgos relevantes para una pregunta.

Podemos estudiar la trayectoria de una pelota como si toda su masa estuviera concentrada en un punto. Esa idealización permite concentrarnos en la posición de la pelota cuando su forma y tamaño tienen una influencia despreciable en la pregunta elegida. Al estudiar cómo gira la misma pelota, su forma y distribución de masa adquieren importancia.

De modo semejante, cuando suponemos que un cuerpo se mueve con rapidez constante, estamos afirmando algo sobre la situación analizada. Si la rapidez varía, el uso de $d = vt$ requiere que $v$ sea la rapidez media apropiada al intervalo. Más adelante distinguiremos rapidez instantánea, rapidez media y movimiento con aceleración.

La calidad de un modelo se aprecia en la precisión con que responde la pregunta planteada dentro de un dominio de validez identificable. Un modelo simple puede proporcionar una estimación útil cuando sus supuestos permiten evaluar también el margen de esa respuesta.

## 1.7 Estimar antes de calcular

Una estimación proporciona una primera orientación y evita que aceptemos como razonable cualquier cifra producida por una calculadora. Supongamos que una persona camina 4 km con una rapidez próxima a 1,2 m/s. Sin efectuar todavía una división precisa, sabemos que cuatro kilómetros son cuatro mil metros y que avanzar poco más de un metro por segundo requerirá cerca de una hora.

El cálculo confirma esa intuición:

$$t \approx \frac{4000\,\mathrm{m}}{1{,}2\,\mathrm{m/s}} \approx 3333\,\mathrm{s} \approx 56\,\mathrm{min}.$$

Si hubiéramos obtenido 56 s o 56 h, deberíamos sospechar inmediatamente una conversión incorrecta.

| Tiempo a 1,2 m/s | Distancia |
|---|---|
| 1000 s | 1200 m |
| 3000 s | 3600 m |
| 3333 s | $\approx$ 4000 m |

Las estimaciones también permiten decidir qué datos necesitan medirse con precisión. Si solo pretendemos saber si una caminata durará media hora o toda una tarde, probablemente basta un modelo de rapidez aproximadamente constante. Si queremos programar la llegada de una nave espacial, harán falta hipótesis y datos más específicos.

## 1.8 Un primer problema astronómico

Volvamos a la luz que llegaba a nuestra ventana. Su tiempo de viaje nos permite estimar la distancia que recorrió: en el problema siguiente tomaremos ese tiempo como dato y lo combinaremos con la rapidez de propagación. La misma relación permite hacer el cálculo inverso si conocemos la distancia. Además, la luz recibida trae información del momento en que fue emitida; al observar objetos lejanos accedemos a etapas anteriores de su historia.

**PROBLEMA RESUELTO 1.7 · La distancia al Sol a partir del tiempo de viaje de la luz**

Supongamos que la luz tarda aproximadamente 8 min 20 s en viajar desde el Sol hasta la Tierra. Usando $c \approx 3{,}00 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$ para la rapidez de la luz en el vacío, estimar la distancia recorrida.

*Resolución.* Convertimos primero el tiempo a una sola unidad:

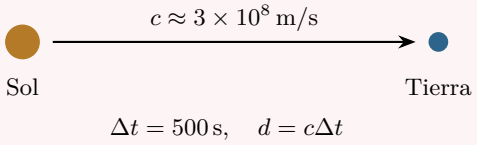
$$t = 8(60\,\mathrm{s}) + 20\,\mathrm{s} = 500\,\mathrm{s}.$$

En el modelo de propagación a rapidez constante, la distancia es el producto de rapidez por tiempo:

$$\begin{aligned} d &= ct \\ &= (3{,}00 \times 10^8\,\mathrm{m/s})(500\,\mathrm{s}) \\ &= 1{,}50 \times 10^{11}\,\mathrm{m} \\ &= 1{,}50 \times 10^{8}\,\mathrm{km}. \end{aligned}$$

El valor corresponde a unos 150 millones de kilómetros. El tiempo suministrado es aproximado; conviene expresar la distancia con una cantidad de cifras acorde con ese dato.

*Control.* Una señal capaz de recorrer 300 000 km en un segundo debe recorrer unos 150 millones de kilómetros en quinientos segundos: el orden de magnitud es correcto. Además, la distancia Sol–Tierra varía durante el año; nuestra estimación corresponde al tiempo de viaje suministrado.




Esquema de propagación entre los puntos de emisión y recepción. Los tamaños y la separación son esquemáticos.

## 1.9 Los gráficos también son relaciones matemáticas

Un gráfico bien construido permite ver regularidades que una tabla puede ocultar. Imaginemos una sustancia homogénea de densidad aproximadamente constante. Si disponemos de varias muestras, esperamos que su masa crezca con el volumen. En una representación de masa $m$ frente a volumen $V$, los puntos aparecerán aproximadamente sobre una recta que pasa por el origen, con ecuación

$$m = \rho V,$$

donde $\rho$ es la densidad del material.

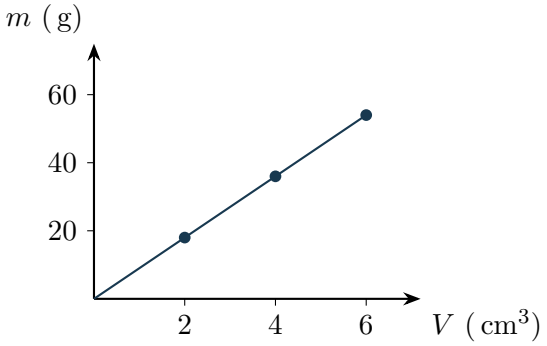



Figura 1.1: Masa y volumen de varias muestras hipotéticas del mismo material. La pendiente de la recta tiene unidades de densidad.

**PROBLEMA RESUELTO 1.8 · Obtener una propiedad física de un gráfico**

En un experimento idealizado, una muestra de volumen $2\,\mathrm{cm}^3$ tiene masa $18\,\mathrm{g}$, mientras que otra de volumen $6\,\mathrm{cm}^3$ tiene masa $54\,\mathrm{g}$. Suponiendo densidad constante, determinar la densidad en $\mathrm{g/cm}^3$ y $\mathrm{kg/m}^3$.
*Resolución.* Como la relación entre masa y volumen es proporcional, el cociente es constante:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{18\,\mathrm{g}}{2\,\mathrm{cm}^3} = 9\,\mathrm{g/cm}^3.$$

Comprobamos la otra pareja: $54/6 = 9$, de modo que los datos son consistentes con nuestro modelo. Para cambiar de unidades debemos convertir también el denominador:

$$1\,\mathrm{g/cm}^3 = \frac{10^{-3}\,\mathrm{kg}}{(10^{-2}\,\mathrm{m})^3} = 10^3\,\mathrm{kg/m}^3.$$

Por consiguiente, $\rho = 9 \times 10^3\,\mathrm{kg/m}^3$. El resultado describe el modelo de las muestras; identificar el material requiere información adicional.

| $V$ **(cm$^3$)** | $m$ **(g)** | $m/V$ **(g/cm$^3$)** |
|---|---|---|
| 2 | 18 | 9 |
| 6 | 54 | 9 |

El volumen y la masa se triplican juntos. El cociente constante coincide con la pendiente del gráfico precedente.

## 1.10 El análisis dimensional puede sugerir una ley

A veces podemos deducir la forma de una relación antes de conocer toda la física que la explica. Consideremos el período $P$ de un péndulo simple y supongamos que, para oscilaciones pequeñas y en un modelo ideal, depende de la longitud $\ell$ y de la aceleración de la gravedad $g$. Intentemos una relación de potencias:

$$P = C\ell^{\alpha} g^{\beta},$$

donde $C$ es una constante sin dimensiones. La dimensión de la izquierda es $T$. A la derecha tenemos

$$[\ell^{\alpha} g^{\beta}] = L^{\alpha}(LT^{-2})^{\beta} = L^{\alpha+\beta}T^{-2\beta}.$$

Los exponentes indican cuántas veces aparece cada dimensión. A la izquierda, $T = L^0T^1$: no aparece longitud y el tiempo tiene exponente uno. Para que ambos miembros coincidan, los exponentes de cada dimensión deben coincidir por separado. Igualar las potencias correspondientes de $L$ y $T$ exige

$$\alpha + \beta = 0, \qquad -2\beta = 1.$$

De $-2\beta = 1$ obtenemos $\beta = -\frac{1}{2}$; sustituir en $\alpha + \beta = 0$ da $\alpha = \frac{1}{2}$. Para cantidades positivas, una potencia de exponente $1/2$ representa una raíz cuadrada: $\ell^{1/2}g^{-1/2} = \sqrt{\ell}/\sqrt{g} = \sqrt{\ell/g}$. La expresión compatible con esas dimensiones es

$$\boxed{P = C\sqrt{\frac{\ell}{g}}.}$$

La determinación de $C$ y la selección de todas las variables relevantes requieren información física adicional. Para un péndulo simple ideal en la aproximación de pequeña amplitud, un análisis dinámico más completo da $C = 2\pi$. Para oscilaciones grandes, el período también depende de la amplitud angular. El análisis dimensional propone una forma que una teoría física puede fundamentar y precisar.

| Condición dimensional | Exponente resultante |
|---|---|
| $-2\beta = 1$ | $\beta = -1/2$ |
| $\alpha + \beta = 0$ | $\alpha = 1/2$ |
| Número $C$ | Indeterminado por dimensiones |

## 1.11 Qué hacer cuando una respuesta parece correcta

Una vez completado un cálculo, conviene formular al menos tres preguntas: ¿la unidad corresponde a la magnitud que me pidieron? ¿el orden de magnitud resulta razonable? ¿respeté las hipótesis del modelo? Si estamos calculando una masa y el resultado termina expresado en m/s, hay un error que puede reconocerse sin repetir ninguna operación. Si la distancia a una estrella resulta menor que la longitud de una sala, probablemente confundimos las unidades. Aplicar una fórmula de rapidez constante a un cuerpo que acelera exige justificar el valor de rapidez elegido, aunque el cálculo algebraico esté bien realizado.

En el péndulo, las dimensiones fijaron la dependencia $\sqrt{\ell/g}$; el modelo de pequeña amplitud aportó el factor $2\pi$ y delimitó cuándo utilizarlo. Unidades, estimación y supuestos intervienen juntos en la interpretación de esa respuesta.

## Ejercicios de práctica

Los problemas siguientes deben intentarse antes de consultar sus soluciones. Cada uno propone un razonamiento específico que da sentido al uso de las fórmulas.

**EJERCICIO 1.1 · Una señal entre la Tierra y la Luna**

La distancia aproximada a la Luna es 384 400 km. Si una señal de radio viaja aproximadamente a 300 000 km/s, ¿cuánto tarda en llegar? Indica si has calculado el viaje de ida o de ida y vuelta.

### EJERCICIO 1.2 · Conversión de magnitudes diferentes

Convierte $54\,\mathrm{km/h}$ a $\mathrm{m/s}$ y $3\,\mathrm{cm}^2$ a $\mathrm{m}^2$. Explica por qué en el segundo caso el factor de escala aparece elevado al cuadrado.

### EJERCICIO 1.3 · Una ecuación sospechosa

Para estimar el tiempo de caída desde una altura $h$ bajo una aceleración de magnitud $g$, alguien propone $t = 2h/g$. Otra persona propone $t = \sqrt{2h/g}$. Determina cuál expresión tiene las unidades correctas de tiempo. ¿Basta esa comprobación para demostrar que describe la caída?

### EJERCICIO 1.4 · El alcance de una medición

Una persona recorre una distancia estimada de $(5{,}0 \pm 0{,}1)\,\mathrm{m}$ en un tiempo de $(4{,}0 \pm 0{,}1)\,\mathrm{s}$. Calcula la rapidez media central y, interpretando los intervalos indicados como cotas compatibles sin suponer ninguna distribución estadística, encuentra una cota inferior y otra superior usando los valores extremos compatibles con la información.

### EJERCICIO 1.5 · De la tabla a una propiedad

Dos muestras de un material homogéneo tienen los pares de valores $(V, m) = (3\,\mathrm{cm}^3, 21\,\mathrm{g})$ y $(7\,\mathrm{cm}^3, 49\,\mathrm{g})$. Calcula la densidad y expresa el resultado en el SI. ¿Qué tendría que pasar con la masa si el volumen se duplicara y la densidad permaneciera constante?

### EJERCICIO 1.6 · Una predicción antes del experimento

En el modelo de péndulo de pequeña amplitud, ¿cómo cambia el período si se cuadruplica la longitud mientras $g$ permanece constante? Explica por qué la respuesta no requiere conocer el valor numérico de la constante $C$.

### EJERCICIO 1.7 · La resolución de una regla

Una regla cuyas divisiones están separadas por $1\,\mathrm{mm}$ se utiliza para leer una longitud de $127\,\mathrm{mm}$. Bajo el supuesto explícito de que el error de redondeo es como máximo media división y no hay errores adicionales, indica el intervalo compatible en milímetros y en metros. ¿Es una incertidumbre universal para toda regla?

### EJERCICIO 1.8 · Otra densidad con cotas

Una masa está entre 49 y 51 g y el volumen entre 19 y $21\,\mathrm{cm}^3$. Calcula la densidad central, el mínimo y el máximo compatibles. Identifica qué hipótesis has utilizado.

### EJERCICIO 1.9 · Precisión frente a exactitud

Un patrón tiene valor 10,0 cm. El grupo A obtiene 9,8, 9,8 y 9,8 cm; el B obtiene 9,9, 10,0 y 10,1 cm. Explica qué grupo tiene menor dispersión y cuál tiene resultados más próximos al patrón en promedio.

### EJERCICIO 1.10 · Una escala enorme

Un haz tarda aproximadamente $2 \times 10^{-8}$ s en cruzar un dispositivo a velocidad $3 \times 10^{8}$ m/s. Estima su longitud y explica la cantidad de cifras que tiene sentido conservar.

### EJERCICIO 1.11 · La misma velocidad media; velocidades distintas

Entre $t = 0$ y $t = 4$ s se proponen $x_1(t) = (2\,\mathrm{m/s})t$ y $x_2(t) = (0{,}5\,\mathrm{m/s^2})t^2$. Verifica que ambas posiciones coinciden al comienzo y al final. Determina la velocidad media en cada caso y compara los desplazamientos del último segundo. ¿Por qué los dos datos extremos no permiten afirmar que ambos movimientos fueron iguales? La velocidad instantánea se estudiará en el capítulo 3.

### EJERCICIO 1.12 · Alcance del análisis dimensional

Suponiendo un período $P$ que depende solo de una longitud $\ell$, una masa $m$ y una aceleración $g$, busca los exponentes en $P = C m^{\alpha} \ell^{\beta} g^{\gamma}$ utilizando dimensiones de masa, longitud y tiempo. ¿Qué información sobre $C$ permanece indeterminada?

### EJERCICIO 1.13 · Pendiente e intercepto de una medición

Una muestra ocupa volúmenes $V = (0, 10, 20, 30)\,\mathrm{cm^3}$ y las lecturas correspondientes de masa son $m = (5, 25, 45, 65)\,\mathrm{g}$. La lectura incluye un recipiente vacío. Representa los datos con volumen en el eje horizontal y lectura de masa en el vertical. Obtén el aumento de masa por unidad de volumen, identifica la masa del recipiente y calcula la masa de la muestra para $V = 15\,\mathrm{cm^3}$. Explica qué representa $m/V$ en estos registros.

### EJERCICIO 1.14 · Estimar una demanda de agua

Un curso reúne 30 estudiantes durante 200 jornadas. Para una primera planificación se adopta un consumo de bebida de 0,5 a 1,0 L por estudiante y jornada. Estima el consumo anual del curso, expresa el intervalo en $\mathrm{m^3}$ e identifica dos datos que permitirían revisar la estimación. Los consumos son supuestos de este ejercicio.

## Soluciones completas

**SOLUCIÓN 1.1.**
La propagación se aproxima por $d = ct$, de donde $t = d/c$. Con las mismas unidades de longitud en numerador y denominador:

$$t = \frac{384\,400\,\text{km}}{300\,000\,\text{km/s}} \approx 1{,}28\,\text{s}.$$

Es el tiempo de *ida*. Si la señal se reflejara de inmediato y regresara por el mismo trayecto, la duración aproximada sería $2t \approx 2{,}56\,\text{s}$. La distancia varía durante la órbita de la Luna, por lo que el cálculo es aproximado.

**SOLUCIÓN 1.2.**
Para la rapidez,

$$54\,\text{km/h} = 54\frac{1000\,\text{m}}{3600\,\text{s}} = 15\,\text{m/s}.$$

Para un área,

$$3\,\text{cm}^2 = 3(10^{-2}\,\text{m})^2 = 3\times10^{-4}\,\text{m}^2.$$

Un centímetro es la centésima parte de un metro, pero un centímetro cuadrado es la diezmilésima parte de un metro cuadrado.

**SOLUCIÓN 1.3.**
El cociente $h/g$ tiene dimensión $L/(LT^{-2}) = T^2$. Por consiguiente, $2h/g$ tiene dimensión $T^2$ y no puede representar directamente un tiempo. En cambio, $\sqrt{2h/g}$ tiene dimensión $T$. Esta segunda expresión supera el control dimensional; su fundamentación requiere una ley física y las hipótesis pertinentes. La fórmula se deduce para un cuerpo soltado desde el reposo que cae verticalmente con aceleración constante de magnitud $g$, despreciando la resistencia del aire y fijando la altura inicial $h$.

**SOLUCIÓN 1.4.**
El valor central es

$$\bar{v} = \frac{5{,}0\,\text{m}}{4{,}0\,\text{s}} = 1{,}25\,\text{m/s}.$$

El cociente será menor con el menor numerador y el mayor denominador, y mayor con el mayor numerador y menor denominador:

$$\frac{4{,}9}{4{,}1}\,\text{m/s} \le \bar{v} \le \frac{5{,}1}{3{,}9}\,\text{m/s}.$$

Redondeando las cotas hacia fuera para no estrechar el intervalo, obtenemos $[1{,}19, 1{,}31]\,\text{m/s}$. Son cotas derivadas directamente de los márgenes especificados, con una interpretación de intervalo compatible.

**SOLUCIÓN 1.5.**
Ambos pares proporcionan la misma razón: $21/3 = 49/7 = 7\,\text{g/cm}^3$. Como $1\,\text{g/cm}^3 = 1000\,\text{kg/m}^3$, la densidad es $7000\,\text{kg/m}^3$. Si $m = \rho V$ con $\rho$ constante, duplicar $V$ duplica $m$; el resultado depende precisamente de esa hipótesis.

**SOLUCIÓN 1.6.**
De $P = C\sqrt{\ell/g}$ se sigue que

$$P' = C\sqrt{\frac{4\ell}{g}} = 2C\sqrt{\frac{\ell}{g}} = 2P.$$

El período se duplica. No es necesario determinar $C$ porque aparece del mismo modo en ambos cocientes; basta mantener el mismo modelo de pequeñas oscilaciones.

**SOLUCIÓN 1.7.**

Con la hipótesis indicada, $L \in [126{,}5, 127{,}5]\,\text{mm}$. Como $1\,\text{mm} = 10^{-3}\,\text{m}$, los extremos en SI son $0{,}1265\,\text{m}$ y $0{,}1275\,\text{m}$. El resultado describe únicamente el redondeo bajo las hipótesis indicadas; la mala alineación, calibración o deformación requieren contribuciones adicionales.

**SOLUCIÓN 1.8.**

Con los puntos medios, $\rho_c = 50/20 = 2{,}50\,\text{g/cm}^3$. Al considerar todos los valores positivos de los intervalos, $\rho_{\text{mín}} = 49/21 \approx 2{,}33\,\text{g/cm}^3$ y $\rho_{\text{máx}} = 51/19 \approx 2{,}6842\,\text{g/cm}^3$. Un intervalo conservador redondeado a centésimas es $[2{,}33, 2{,}69]\,\text{g/cm}^3$. Se emplea el modelo $\rho = m/V$ con masa y volumen positivos y cotas que pueden coexistir; el cálculo utiliza directamente los extremos compatibles.

**SOLUCIÓN 1.9.**

El grupo A tiene dispersión observada nula, pero sus valores se apartan del patrón en $0{,}2\,\text{cm}$. El promedio de B es $10{,}0\,\text{cm}$, igual al patrón; el rango de B mide $0{,}2\,\text{cm}$. Así, A muestra mejor repetibilidad en esta muestra, mientras que B tiene promedio más exacto respecto de la referencia. La dispersión nula describe la repetibilidad de la serie; evaluar el error sistemático exige un contraste con un patrón.

**SOLUCIÓN 1.10.**

Con un modelo de rapidez constante, $d = ct = (3 \times 10^8\,\text{m/s})(2 \times 10^{-8}\,\text{s}) \approx 6\,\text{m}$. Como los datos se proporcionan con una sola cifra significativa, informar muchos decimales carecería de justificación. Se trata de una estimación de escala sustentada en los supuestos declarados.

**SOLUCIÓN 1.11.**

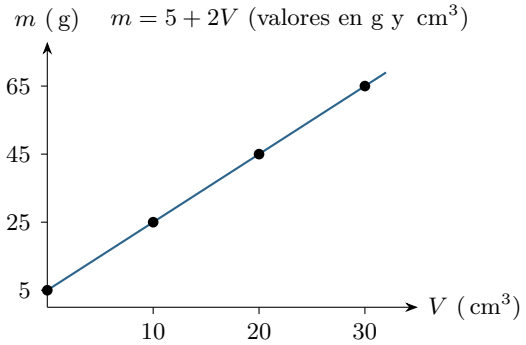
Para ambas funciones $x(0) = 0$ y $x(4\,\text{s}) = 8\,\text{m}$, por lo que sus velocidades medias en el intervalo completo son $2\,\text{m/s}$. En $t = 3\,\text{s}$, sin embargo, $x_1 = 6\,\text{m}$ y $x_2 = 4{,}5\,\text{m}$. Durante el último segundo los desplazamientos son, respectivamente, $2\,\text{m}$ y $3{,}5\,\text{m}$, y sus velocidades medias en ese tramo son 2 y $3{,}5\,\text{m/s}$. Los mismos extremos del intervalo completo admiten movimientos intermedios distintos. En el capítulo 3 calcularemos, además, las velocidades instantáneas finales: 2 y $4\,\text{m/s}$.

**SOLUCIÓN 1.12.**

Usamos $[m] = M$, $[\ell] = L$, $[g] = LT^{-2}$ y $[P] = T$. La expresión propuesta tiene dimensión $M^{\alpha}L^{\beta+\gamma}T^{-2\gamma}$, por lo que $\alpha = 0$, $\beta + \gamma = 0$ y $-2\gamma = 1$. De aquí $\gamma = -1/2$ y $\beta = 1/2$. Obtenemos $P = C\sqrt{\ell/g}$; hallar la constante adimensional $C$ y validar las variables escogidas requiere una descripción física adicional. Para un péndulo simple de pequeña amplitud se encuentra $C = 2\pi$ mediante un modelo dinámico.

**SOLUCIÓN 1.13.**

La pendiente es $\Delta m/\Delta V = 20/10 = 2\,\text{g/cm}^3 = 2000\,\text{kg/m}^3$. La recta de lecturas es $m = 5\,\text{g} + (2\,\text{g/cm}^3)V$. El recipiente aporta $5\,\text{g}$; a $V = 15\,\text{cm}^3$ la muestra tiene $30\,\text{g}$ y la lectura conjunta sería $35\,\text{g}$. El cociente $m/V$ incluye la contribución del recipiente y varía con $V$; en $V = 0$ esa razón queda fuera de su dominio. La densidad de la muestra se obtiene de la pendiente bajo el modelo lineal y tras separar el recipiente.




Los datos construidos siguen una recta de pendiente $2\,\text{g/cm}^3$ y ordenada al origen $5\,\text{g}$. La ordenada corresponde a la masa del recipiente.

**SOLUCIÓN 1.14.**
Hay $30(200) = 6000$ estudiante-jornadas. El intervalo es $[3000, 6000]\,\mathrm{L} = [3, 6]\,\mathrm{m}^3$, con $4{,}5\,\mathrm{m}^3$ al usar el punto medio del supuesto de consumo. La asistencia efectiva y un registro de consumo permiten ajustar la estimación. El resultado corresponde al agua bebida; las demás actividades requieren partidas propias.

## Diagnóstico de salida: antes de estudiar álgebra y vectores

Para avanzar con seguridad, explica por escrito la diferencia entre magnitud, unidad y dimensión; reconoce en qué condiciones una estimación es aceptable; distingue exactitud y precisión; y aprende a identificar cuándo una respuesta exige datos que no conocemos. Las cuestiones 1.3, 1.4, 1.7, 1.9 y 1.11 permiten comprobar estas capacidades.

**Tres controles de transferencia.**

1. Convierte $2{,}5\,\mathrm{g/cm}^3$ al SI y explica el factor usado.
2. Para una distancia $[4{,}8, 5{,}2]\,\mathrm{m}$ y un tiempo $[1{,}9, 2{,}1]\,\mathrm{s}$, encuentra un intervalo conservador de rapidez media, redondeado a centésimas.
3. Si dos movimientos comparten posiciones inicial y final, ¿queda fijada la distancia recorrida? Justifica con un recorrido posible.

**Contraste después del intento.** (1) $2500\,\mathrm{kg/m}^3$: al dividir el factor $10^{-3}$ de masa por $10^{-6}$ de volumen queda $10^3$. (2) Los extremos exactos son $4{,}8/2{,}1$ y $5{,}2/1{,}9$ en m/s; redondeando hacia fuera, $[2{,}28, 2{,}74]\,\mathrm{m/s}$. (3) Un recorrido directo y otro que incluya una ida y vuelta adicional pueden compartir extremos y tener longitudes diferentes. **Criterio para avanzar.** Explica las hipótesis, elige un modelo y revisa las unidades y los órdenes de magnitud de tus resultados. Si falla la conversión, vuelve al problema 1.8; si fallan las cotas, al problema 1.3; si confundes los extremos con la historia completa, al ejercicio 1.11. Repite luego el control con otros datos y explica por qué tu método sigue funcionando.

# CAPÍTULO 2

# MATEMÁTICAS PARA LA FÍSICA: ÁLGEBRA, TRIGONOMETRÍA Y VECTORES


2.1 La primera disciplina del cálculo: saber qué estamos calculando 19
2.2 Despejar ecuaciones sin perder la física . . . . . 19
2.3 Dos incógnitas requieren dos relaciones independientes . . . . 20
2.4 Proporcionalidad, potencias y escalas . . . . . 21
2.5 Raíces de ecuaciones cuadráticas 23
2.6 Ángulos, radianes y trigonometría . . . . . 24
2.7 Vectores: magnitudes que requieren dirección . . . . . 26
2.8 Sumar vectores y distinguir desplazamiento de recorrido . . . 27
2.9 Dos productos diferentes y sus significados físicos . . . . . 29
2.10 Rectas, parábolas, circunferencias y gráficas físicas . . . . . 31
2.11 Identidades, leyes y modelos . 33
Ejercicios de práctica . . . . . 34
Soluciones completas . . . . . 36
Diagnóstico de salida: puente hacia el capítulo 3 . . . . . 38


La matemática ofrece un lenguaje para relacionar magnitudes físicas, detectar contradicciones y anticipar comportamientos. Una ecuación puede ser perfectamente correcta como operación algebraica y, sin embargo, resultar absurda como descripción de la naturaleza. Por eso, antes de calcular, tendremos que preguntarnos qué representa cada símbolo y de dónde proviene la relación que vamos a utilizar.

En un primer curso universitario es frecuente que se trabaje con cantidades que tienen unidades, se proyecten fuerzas sobre ejes, se resuelvan ecuaciones simultáneas y se interpreten gráficas antes de que todas esas operaciones hayan sido ejercitadas con seguridad. Construiremos aquí las herramientas necesarias en el mismo orden en que surgen las dificultades. El capítulo siguiente permitirá emplearlas para entender el cálculo diferencial e integral sin exigir que el lector haya cursado previamente Análisis Matemático.

El álgebra, la trigonometría, las componentes y las gráficas forman el recorrido central de preparación. Los productos escalar y vectorial de la sección 2.9 amplían ese lenguaje hacia trabajo y momento de una fuerza; pueden retomarse cuando se estudien esos temas. Para abordar el cálculo y la cinemática que siguen, es prioritario dominar los despejes, los signos, las componentes y la interpretación de los ejes.

**Una regla para todo el capítulo**

Antes de despejar una incógnita, identifica qué representa cada símbolo y qué unidades debe tener el resultado. Después del cálculo, vuelve a la situación física para interpretarlo.

## 2.1 La primera disciplina del cálculo: saber qué estamos calculando

Imaginemos que queremos calcular el tiempo empleado por una persona en recorrer un pasillo. Sabemos que recorre 18 m a una rapidez aproximadamente constante de 3 m/s. La relación que describe este modelo es $d = vt$. Solo después de identificar la distancia $d$, la rapidez $v$ y el tiempo $t$ tiene sentido despejar:

$$t = \frac{d}{v} = \frac{18\,\text{m}}{3\,\text{m/s}} = 6\,\text{s}.$$

Hemos calculado un tiempo porque las unidades se reducen a segundos. Pero la respuesta depende de una hipótesis física: que la rapidez puede considerarse constante durante ese recorrido. Si la persona se detuvo durante el recorrido, habría que medir el tiempo total: el cociente entre los 18 m y ese tiempo daría la *rapidez media*. El dato de 3 m/s durante la marcha debe acompañarse de información sobre las detenciones para determinar la duración del trayecto.

Conviene distinguir tres objetos: una *cantidad física* (por ejemplo, la masa), su *valor numérico* en una unidad elegida (por ejemplo, 2,5) y su *unidad* (kg). La descripción completa de la magnitud reúne el número y su unidad. En una suma, los sumandos tienen que representar magnitudes compatibles: $3\,\text{m} + 40\,\text{cm} = 3{,}4\,\text{m}$; en cambio, $3\,\text{m} + 4\,\text{s}$ carece de significado como suma física ordinaria. La homogeneidad dimensional es una condición necesaria para aceptar una ecuación; su validez física exige además examinar sus hipótesis y predicciones.

## 2.2 Despejar ecuaciones sin perder la física

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones. Sumar una misma cantidad a ambos miembros, o multiplicarlos por un factor distinto de cero, preserva las soluciones en el dominio considerado. Al dividir por una expresión trabajamos en el dominio donde su valor es distinto de cero. En $x(x-1) = 0$, los casos $x = 0$ y $x = 1$ satisfacen la ecuación; dividir por $x$ conserva el segundo y excluye el primero. Al multiplicar $x - 1 = 0$ por $x$, obtenemos una ecuación que también admite $x = 0$. La equivalencia se preserva si el factor permanece distinto de cero en el dominio considerado. En $d = vt$, dividir por $v$ requiere $v \neq 0$; con $v = 0$, la relación exige $d = 0$ y admite cualquier duración compatible con las demás condiciones del problema.

Por ejemplo, para despejar $t$ en $d = vt$ con $v \neq 0$, dividimos ambos miembros por la misma cantidad: $d/v = vt/v = t$. El cociente $v/v = 1$ explica la cancelación mediante una operación aplicada a ambos miembros. Si aparece una suma, hay que deshacerla antes: de $x = x_0 + vt$ obtenemos primero $x - x_0 = vt$ y luego $t = (x - x_0)/v$.

Las unidades acompañan las operaciones. Por ejemplo, en $F = ma$, al despejar $a$ obtenemos $a = F/m$, cuyas dimensiones son $\text{N/kg} = \text{m/s}^2$. Las letras también se distinguen por su papel: en un problema particular, $m$ puede ser un dato conocido, mientras que $a$ es la incógnita. En otro,

la incógnita puede ser la masa. El signo de igualdad expresa una relación que admite diferentes preguntas.

| En el modelo $d = vt$ | Resultado / condición |
|---|---|
| $18\,\mathrm{m}/3\,\mathrm{m/s}$ | $t = 6\,\mathrm{s}$ |
| $d/v$ | $v \neq 0$ |
| $v = 0$ y $d = 0$ | Tiempo no determinado |

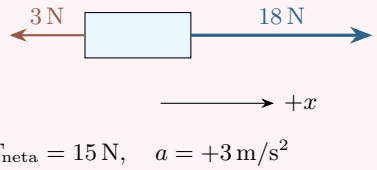
**PROBLEMA RESUELTO 2.1 · Una fuerza neta y una masa desconocida**

Una fuerza horizontal aplicada de 18 N actúa sobre un carrito. Una fuerza resistiva horizontal de 3 N actúa en sentido contrario. Si la aceleración observada es de $3\,\mathrm{m/s^2}$, determinar la masa del carrito, suponiendo válida la segunda ley de Newton para un sistema de masa constante en un marco inercial.

*Resolución.* Elegimos como positiva la dirección de la fuerza aplicada. La fuerza individual de 18 N contribuye a la *resultante*, que es la fuerza que aparece en la ecuación:

$$F_{\text{neta}} = 18\,\mathrm{N} - 3\,\mathrm{N} = 15\,\mathrm{N}, \qquad m = \frac{F_{\text{neta}}}{a} = \frac{15\,\mathrm{N}}{3\,\mathrm{m/s^2}} = 5\,\mathrm{kg}.$$

La ley dada permite identificar la fuerza resultante y despejar la masa; su fundamento dinámico se desarrollará en el capítulo 6. El resultado tiene unidades de masa y es positivo. La resistencia de 3 N es un dato y una idealización específicos de este problema.




$F_{\text{neta}} = 15\,\mathrm{N}, \quad a = +3\,\mathrm{m/s^2}$

Se representan solo las fuerzas horizontales dadas. Las longitudes de las flechas son esquemáticas; los módulos se obtienen de los datos.

## 2.3 Dos incógnitas requieren dos relaciones independientes

A veces una medición por sí sola admite innumerables explicaciones. La relación $m_1 + m_2 = 8\,\mathrm{kg}$ admite muchas distribuciones de las masas $m_1$ y $m_2$; determinar cada una requiere otra condición independiente. Necesitamos otra relación independiente. Dos ecuaciones relacionadas por un factor distinto de cero expresan la misma información.

Para un sistema lineal

$$ax + by = e, \qquad cx + dy = f,$$

podemos eliminar $y$ multiplicando la primera ecuación por $d$, la segunda por $b$ y restándolas. Así obtenemos $(ad - bc)x = de - bf$. La eliminación de $x$ proporciona $(ad - bc)y = af - ce$. Cuando $ad - bc \neq 0$, ambas divisiones están definidas y determinan un único par $(x, y)$. Los coeficientes deben ser números o magnitudes con unidades que permitan esas operaciones. Si $ad - bc = 0$, las ecuaciones requieren examinar su compatibilidad: $x + y = 5$ y $2x + 2y = 10$ admiten infinitos pares; $x + y = 5$ y $2x + 2y = 12$ imponen condiciones incompatibles. En cambio, $x + y = 5$ y $x - y = 1$ permiten sumar para obtener $2x = 6$, y luego $y = 2$. En el problema siguiente las dimensiones de cada ecuación serán diferentes; construiremos magnitudes comparables antes de sumarlas.

**PROBLEMA RESUELTO 2.2 · Dos materiales en un mismo recipiente**

Se mezclan, sin contracción apreciable, dos líquidos cuyas densidades son $2\,\mathrm{g/cm^3}$ y $5\,\mathrm{g/cm^3}$. La mezcla tiene una masa total de $16\,\mathrm{g}$ y un volumen total de $5\,\mathrm{cm^3}$. Encontrar el volumen de cada líquido.

*Resolución.* Sean $V_1$ y $V_2$ los volúmenes. Suponemos que los volúmenes se suman, una aproximación cuya validez depende de la mezcla. Tenemos

$$V_1 + V_2 = 5\,\mathrm{cm^3}, \qquad (2\,\mathrm{g/cm^3})V_1 + (5\,\mathrm{g/cm^3})V_2 = 16\,\mathrm{g}.$$

La primera relación da $V_1 = 5\,\mathrm{cm^3} - V_2$. Sustituimos en la segunda:

$$(2\,\mathrm{g/cm^3})(5\,\mathrm{cm^3} - V_2) + (5\,\mathrm{g/cm^3})V_2 = 16\,\mathrm{g}.$$

De aquí se obtiene $(3\,\mathrm{g/cm^3})V_2 = 6\,\mathrm{g}$, de donde $V_2 = 2\,\mathrm{cm^3}$ y $V_1 = 3\,\mathrm{cm^3}$. *Verificación:* los volúmenes suman $5\,\mathrm{cm^3}$ y las masas son $6\,\mathrm{g}$ y $10\,\mathrm{g}$. Solo después de comprobar las dos restricciones podemos considerar resuelto el problema.

| **Líquido** | $V$ **(cm$^3$)** | $m = \rho V$ **(g)** |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 6 |
| 2 | 2 | 10 |
| Total | 5 | 16 |

La solución satisface simultáneamente la conservación de masa y la aditividad de volúmenes supuesta en el enunciado.

## 2.4 Proporcionalidad, potencias y escalas

Decir que $y$ es directamente proporcional a $x$ significa que existe una constante $k$ tal que $y = kx$ dentro del régimen considerado. La proporcionalidad exige una razón constante: $y = x^2$ aumenta para $x > 0$, pero duplicar $x$ cuadruplica $y$. Análogamente, una proporcionalidad inversa de primer grado adopta la forma $xy = k$, mientras que una relación de cuadrado inverso se expresa como $y = k/x^2$.

Para interpretar un cambio de escala, es útil separar el *factor* de la *diferencia*. Si un valor pasa de 50 a 60, aumenta en 10 unidades, pero el incremento relativo es $10/50 = 20\,\%$. En una relación $y = kx^n$, multiplicar $x$ por $q$ multiplica $y$ por $q^n$. Esta observación permite resolver muchos problemas sin calcular la constante $k$.

| Relación | Factor al duplicar $x$ |
|---|---|
| $y = kx$ | 2 |
| $y = kx^2$ | 4 |
| $y = k/x$ | 1/2 |
| $y = k/x^2$ | 1/4 |

**PROBLEMA RESUELTO 2.3 · La luz de una fuente puntual ideal**

Una fuente pequeña emite luz de manera aproximadamente isotrópica en un medio transparente sin absorción apreciable. A 2 m de ella se mide una irradiancia $E_1$. ¿Qué fracción de $E_1$ se espera a 6 m?

*Resolución.* Para una fuente puntiforme ideal, la misma potencia se reparte sobre esferas de área $4\pi r^2$, de modo que $E(r) \propto r^{-2}$. Por tanto

$$\frac{E_2}{E_1} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \left(\frac{2\,\mathrm{m}}{6\,\mathrm{m}}\right)^2 = \frac{1}{9}.$$

La irradiancia esperada es una novena parte. Cerca de fuentes extensas, en haces dirigidos o en medios con absorción importante, la descripción requiere un modelo que incorpore esas condiciones. El exponente 2 procede de la geometría física de la propagación.

| Radio | Área esférica | Irradiancia |
|---|---|---|
| $r_1 = 2\,\mathrm{m}$ | $A_1$ | $E_1$ |
| $r_2 = 3r_1$ | $9A_1$ | $E_1/9$ |

Al triplicar el radio, la misma potencia se reparte en un área nueve veces mayor. Se supone emisión isotrópica sin absorción.

### Potencias y raíces

La notación $10^n$ permite comunicar órdenes de magnitud sin cadenas de ceros. Para bases positivas, $10^a 10^b = 10^{a+b}$ y $(10^a)^b = 10^{ab}$. Para un radicando real $a \geq 0$, $\sqrt{a}$ es el número $b \geq 0$ que cumple $b^2 = a$. En particular, $\sqrt{x^2} = |x|$. Ese valor absoluto será decisivo para distinguir *módulo* de *componente* de un vector.

### Logaritmos: invertir una escala multiplicativa

El logaritmo decimal responde a la pregunta: «¿A qué potencia debo elevar 10 para obtener este número positivo?». Así, $\log_{10}(100) = 2$. Los logaritmos transforman productos en sumas, $\log(ab) = \log a + \log b$ cuando $a, b > 0$. Sus argumentos deben ser números *adimensionales*: escribir $\log(5\,\mathrm{m})$ requiere especificar una razón con una longitud de referencia.

**PROBLEMA RESUELTO 2.4 · Una diferencia de nivel sonoro**

Para comparar intensidades acústicas se define el nivel $L$, medido en decibelios, mediante la expresión

$$L = 10\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right),$$

donde $I_0$ es una intensidad de referencia positiva. Si $I_2 = 100I_1$, calcular $L_2 - L_1$.
*Resolución.* Restamos expresiones antes de sustituir números:

$$L_2 - L_1 = 10\log_{10}\left(\frac{I_2}{I_1}\right) = 10\log_{10}(100) = 20\,\text{dB}.$$

La intensidad aumentó cien veces. El cambio en decibelios es *logarítmico*. La fórmula define un nivel físico de intensidad; la sonoridad percibida requiere considerar también la respuesta del oyente.

| **Factor** $I_2/I_1$ | $\log_{10}(I_2/I_1)$ | $\Delta L$ **(dB)** |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 |
| 10 | 1 | 10 |
| 100 | 2 | 20 |

Dos pasos multiplicativos de factor diez corresponden a dos incrementos de 10 dB en esta escala.

## 2.5 Ecuaciones cuadráticas y selección de soluciones físicas

Si $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$, las soluciones algebraicas son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{2.1}$$

El discriminante $b^2 - 4ac$ determina si hay dos soluciones reales distintas, una doble o ninguna real. Una solución algebraica puede quedar excluida por las condiciones de un modelo: por ejemplo, una respuesta temporal negativa puede estar fuera del intervalo $t \geq 0$ para el que comenzamos a describir un movimiento. Para interpretar un tiempo negativo debemos examinar el origen temporal: puede representar un instante anterior al elegido como cero.

**PROBLEMA RESUELTO 2.5 · Una misma altura en dos instantes**

Un objeto asciende y desciende según el modelo ideal

$$y(t) = (10\,\mathrm{m/s})t - (5\,\mathrm{m/s^2})t^2,$$

con $t \geq 0$ hasta regresar al nivel de lanzamiento. ¿En qué instantes se encuentra a 3,75 m sobre ese nivel?
*Resolución.* Igualamos la altura indicada a la función y dividimos por $5\,\mathrm{m/s^2}$, cuidando que los términos resultantes conserven las dimensiones de $t^2$:

$$t^2 - (2\,\mathrm{s})t + 0{,}75\,\mathrm{s}^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (t - 0{,}5\,\mathrm{s})(t - 1{,}5\,\mathrm{s}) = 0.$$

Encontramos $t_1 = 0{,}5\,\mathrm{s}$ y $t_2 = 1{,}5\,\mathrm{s}$. Son dos instantes físicos distintos de la misma altura: uno durante el ascenso y otro en el descenso. Sustituir ambos en $y(t)$ devuelve 3,75 m. Este ejercicio anticipa una idea de Cinemática, aunque por ahora solo necesitamos álgebra y la interpretación del dominio.

| Instante (s) | Altura (m) | Rama |
|---|---|---|
| 0,5 | 3,75 | Ascenso |
| 1,0 | 5,00 | Cumbre |
| 1,5 | 3,75 | Descenso |

La tabla sitúa las dos raíces a ambos lados de la cumbre. La gráfica siguiente muestra la misma relación altura–tiempo.

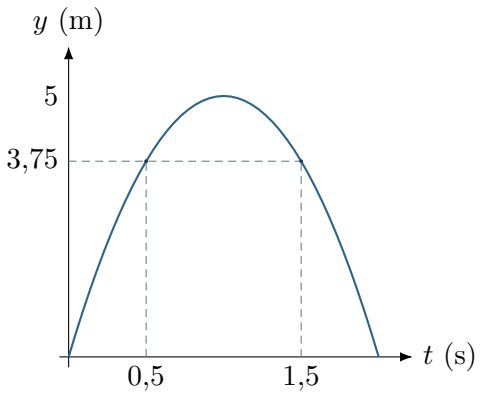



Figura 2.1: La misma altura puede corresponder a dos instantes de un movimiento ideal. Los ejes representan altura y tiempo; cada punto reúne el valor de ambas variables en un instante.

## 2.6 Ángulos, radianes y trigonometría

Un ángulo mide una separación de direcciones. Si dos segmentos delimitan un sector circular de radio $r$ y arco de longitud $s$, el ángulo en *radianes* es $\theta = s/r$. Como dividimos dos longitudes, el radián es adimensional, aunque conservamos el símbolo rad para comunicar qué se está midiendo. Una vuelta completa corresponde a $2\pi\,\mathrm{rad} = 360^\circ$.

En un triángulo rectángulo, para un ángulo agudo $\theta$, definimos

$$\sin\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}, \qquad \cos\theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}.$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta},$$

siempre que el denominador no se anule. Cuando conocemos una tangente y buscamos el ángulo, utilizamos la función inversa arctan, que devuelve un ángulo con esa tangente; hay que revisar el cuadrante porque diferentes ángulos pueden compartir la misma tangente. La circunferencia unitaria extiende las definiciones de seno y coseno a ángulos de cualquier cuadrante: sus valores pueden ser negativos y siempre satisfacen $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

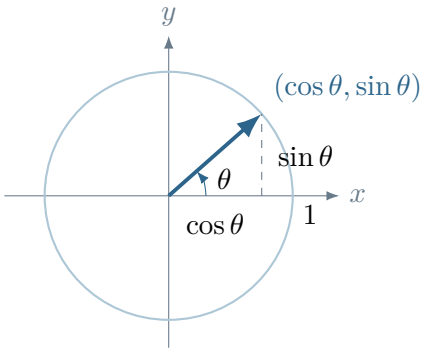


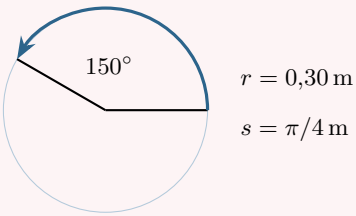

Figura 2.2: Las funciones trigonométricas representan las coordenadas de un punto de la circunferencia de radio 1. La figura está trazada para un ángulo del primer cuadrante, pero la definición vale en los cuatro.

**PROBLEMA RESUELTO 2.6 · Un arco y un ángulo**

Una rueda tiene radio 0,30 m y gira 150°. ¿Qué ángulo ha girado en radianes y qué longitud de arco ha barrido un punto de su borde?
*Resolución.* Convertimos grados mediante $180^\circ = \pi$ rad:

$$\theta = 150^\circ \frac{\pi\,\text{rad}}{180^\circ} = \frac{5\pi}{6}\,\text{rad}, \qquad s = r\theta = (0{,}30\,\text{m})\frac{5\pi}{6} \approx 0{,}785\,\text{m}.$$

El ángulo aparece como una razón geométrica y puede multiplicarse por un radio para producir una longitud. Para usar 150 en la relación $s = r\theta$ debemos convertir primero el ángulo a radianes.




El arco resaltado corresponde a una rotación de $5\pi/6$ radianes. La rueda se representa en vista frontal.

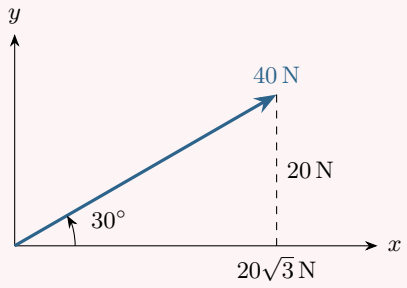
Una fuerza puede representarse mediante una flecha: su longitud representa el módulo y su orientación indica hacia dónde actúa. Sus componentes horizontal y vertical son las dos flechas sobre los ejes cuya suma reproduce la original. El triángulo formado por esas flechas permite aplicar seno y coseno; la sección siguiente precisará el lenguaje vectorial.

**PROBLEMA RESUELTO 2.7 · Una fuerza inclinada**

Una fuerza de magnitud 40 N forma un ángulo de 30° medido en sentido antihorario desde el eje horizontal positivo, en el plano $xy$. Hallar sus componentes horizontal y vertical.
*Resolución.* La componente horizontal es adyacente al ángulo y la vertical es opuesta:

$$F_x = (40\,\mathrm{N})\cos 30^\circ = 20\sqrt{3}\,\mathrm{N}, \qquad F_y = (40\,\mathrm{N})\sin 30^\circ = 20\,\mathrm{N}.$$

La comprobación pitagórica da $\sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 40\,\mathrm{N}$. Ambas componentes son positivas porque la fuerza apunta al primer cuadrante. Si el ángulo se midiera desde el eje vertical, habría que intercambiar las funciones correspondientes; la figura determina la proyección adecuada.




Triángulo de componentes con la misma escala horizontal y vertical. El ángulo se mide desde el eje horizontal positivo.

### Una aproximación que exige cuidado

Para ángulos pequeños medidos en radianes, $\sin\theta \approx \theta$ y $\tan\theta \approx \theta$. La aproximación tiene un error que depende del ángulo: para $\theta = 0{,}1$ rad, por ejemplo, $\sin\theta \approx 0{,}09983$. Usarla con $\theta = 30$ *grados* sin convertirlo a radianes daría un resultado absurdo. El capítulo 3 volverá a las funciones trigonométricas cuando necesitemos derivarlas.

| Para $\theta = 0{,}1$ rad | Valor aproximado |
|---|---|
| $\theta$ | 0,10000 |
| $\sin\theta$ | 0,09983 |
| $\tan\theta$ | 0,10033 |

## 2.7 Vectores: magnitudes que requieren dirección

Algunas magnitudes físicas requieren, además de un módulo, una dirección y un sentido. La masa y la energía son escalares; una fuerza o un desplazamiento requieren además dirección y sentido. En dos dimensiones representamos un vector por el par de sus componentes en ejes cartesianos:

$$\vec{u} = u_x\hat{\imath} + u_y\hat{\jmath} = (u_x, u_y).$$

Aquí $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$ son vectores unitarios perpendiculares, y $u_x, u_y$ son *componentes con signo*. El *módulo* expresa la longitud del vector y toma valores positivos o cero:

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} \geq 0. \tag{2.2}$$

Un vector como $(-3, 4)$ N tiene una componente horizontal negativa y módulo 5 N. El módulo se calcula con las dos componentes. Para un vector distinto de cero, multiplicarlo por un número negativo invierte su sentido y conserva la recta que determina su dirección.

| Componentes de una fuerza | Módulo |
|---|---|
| $(-3, 4)\,\mathrm{N}$ | $5\,\mathrm{N}$ |
| $(3, -4)\,\mathrm{N}$ | $5\,\mathrm{N}$ |

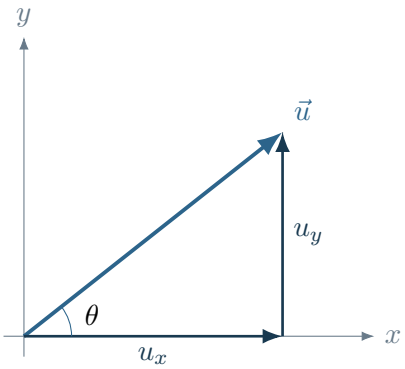



Figura 2.3: Descomposición cartesiana de un vector: su punta puede alcanzarse avanzando primero en horizontal y después en vertical.

Para un vector distinto de cero, de módulo $u$, que forma un ángulo $\theta$ medido desde $+x$, las componentes son $u_x = u\cos\theta$, $u_y = u\sin\theta$. Estas expresiones siguen siendo válidas en otros cuadrantes porque el seno y el coseno incorporan sus signos. El vector cero tiene todas sus componentes iguales a cero; su dirección queda indeterminada. En tres dimensiones añadimos $u_z\hat{k}$ y la norma $\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$. Estas operaciones ofrecen un primer contacto con el álgebra lineal universitaria a través de sus aplicaciones físicas.

## 2.8 Sumar vectores y distinguir desplazamiento de recorrido

La suma de vectores se obtiene sumando componentes homólogas:

$$(u_x, u_y) + (w_x, w_y) = (u_x + w_x, u_y + w_y).$$

Geométricamente podemos trasladar los vectores sin girarlos y poner el origen del segundo en la punta del primero. La flecha desde el punto inicial hasta el final es la resultante. El *desplazamiento* compara las posiciones inicial y final; la *distancia recorrida* considera el trayecto efectivo.

**PROBLEMA RESUELTO 2.8 · Siete kilómetros recorridos, cinco de desplazamiento**

Una persona camina 3 km hacia el este y después 4 km hacia el norte, en dos tramos rectilíneos. Determinar su desplazamiento y la distancia recorrida.
*Resolución.* Elegimos este como $+x$ y norte como $+y$. Los desplazamientos sucesivos son $\vec{d}_1 = (3, 0)\,\text{km}$ y $\vec{d}_2 = (0, 4)\,\text{km}$. Su suma es $\vec{d} = (3, 4)\,\text{km}$, de módulo

$$|\vec{d}| = \sqrt{3^2 + 4^2}\,\text{km} = 5\,\text{km}.$$

La distancia efectivamente recorrida es $3\,\text{km} + 4\,\text{km} = 7\,\text{km}$. Podemos comprobar que el módulo del desplazamiento no supera la longitud total del camino. Esa desigualdad deja de ser útil como cálculo exacto de la distancia si conocemos solo los extremos.

| Tramo | Componentes (km) | Longitud (km) |
|---|---|---|
| Este | $(3, 0)$ | 3 |
| Norte | $(0, 4)$ | 4 |
| Balance | $(3, 4)$ | $\lvert\vec{d}\rvert = 5$ |

La suma de componentes fija el desplazamiento; la distancia suma las longitudes $3 + 4 = 7\,\text{km}$. El diagrama siguiente muestra las direcciones.

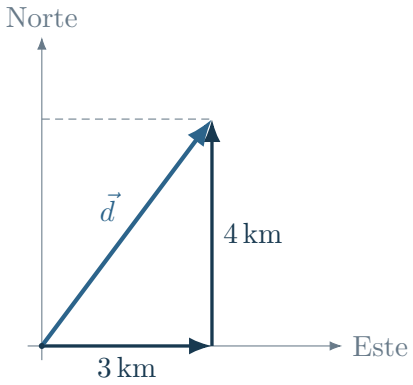
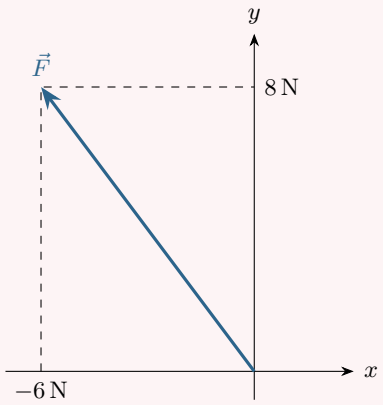



Figura 2.4: La flecha diagonal es el desplazamiento total de 5 km, distinto de los 7 km recorridos a lo largo de los dos tramos rectilíneos.

**PROBLEMA RESUELTO 2.9 · Reconocer el cuadrante antes de calcular el ángulo**

Una fuerza tiene componentes $F_x = -6\,\mathrm{N}$ y $F_y = 8\,\mathrm{N}$. Encontrar su módulo y describir su dirección.
*Resolución.* Su módulo es $|\vec{F}| = \sqrt{36+64}\,\mathrm{N} = 10\,\mathrm{N}$. Como $F_x < 0$ y $F_y > 0$, apunta al segundo cuadrante. El ángulo agudo que forma con el eje horizontal negativo satisface $\tan\alpha = 8/6 = 4/3$, de modo que $\alpha \approx 53{,}13°$. Medido desde $+x$ en sentido antihorario, $\theta = 180° - \alpha \approx 126{,}87°$. La calculadora devuelve el ángulo de una razón, pero interpretar el cuadrante exige mirar los signos.




El vector está en el segundo cuadrante. Los catetos 6 y 8 N determinan una hipotenusa de 10 N.

## 2.9 Dos productos diferentes y sus significados físicos

El *producto escalar* asocia a dos vectores una cantidad escalar. Si los vectores representan magnitudes físicas, sus unidades se multiplican: el producto de una fuerza por un desplazamiento se expresa en $\mathrm{N\,m}$. En componentes cartesianas ortonormales,

$$\vec{u}\cdot\vec{w} = u_x w_x + u_y w_y + u_z w_z = |\vec{u}|\,|\vec{w}|\cos\theta. \tag{2.3}$$

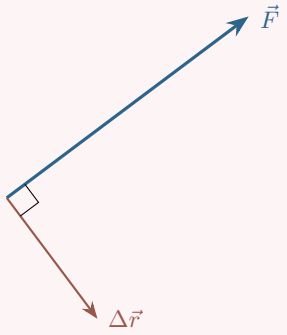
La segunda expresión permite reconocer la componente de un vector en la dirección del otro. Dos vectores no nulos perpendiculares tienen producto escalar cero. El newton, $\mathrm{N} = \mathrm{kg\,m/s^2}$, es la unidad SI de fuerza; el joule, $\mathrm{J} = \mathrm{N\,m}$, es una unidad de energía y trabajo. Usaremos las relaciones que siguen como aplicaciones dadas de los productos de vectores; su interpretación dinámica se desarrollará más adelante. En mecánica, el trabajo de una fuerza *constante* durante un desplazamiento es $W = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$. Su signo importa: una fuerza opuesta al desplazamiento realiza trabajo negativo.

**PROBLEMA RESUELTO 2.10 · Trabajo nulo sin fuerza nula**

Durante cierto desplazamiento $\Delta\vec{r} = (3, -4)\,\mathrm{m}$ actúa una fuerza constante $\vec{F} = (8, 6)\,\mathrm{N}$. Calcular el trabajo de esa fuerza.
*Resolución.* En componentes:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = (8\,\mathrm{N})(3\,\mathrm{m}) + (6\,\mathrm{N})(-4\,\mathrm{m}) = 0\,\mathrm{J}.$$

La fuerza constante es perpendicular al desplazamiento total y su trabajo es cero. Las demás fuerzas tienen sus propias contribuciones al trabajo del recorrido.




Las direcciones $(8, 6)$ y $(3, -4)$ son perpendiculares. Cada flecha tiene su propia escala: fuerza y desplazamiento tienen unidades distintas.

El *producto vectorial* asocia a dos vectores tridimensionales otro vector. Para dos vectores distintos de cero, el ángulo $\theta \in [0, \pi]$ permite expresar su módulo como $|\vec{u} \times \vec{w}| = |\vec{u}|\,|\vec{w}| \sin\theta$. Cuando los factores determinan un plano, el producto tiene dirección perpendicular a ese plano y sentido dado por la regla de la mano derecha. Para vectores paralelos, antiparalelos o con un factor cero, el producto es el vector cero: tiene módulo cero y dirección indeterminada. En el plano $xy$, su expresión por componentes es

$$\vec{u} \times \vec{w} = (u_x w_y - u_y w_x)\hat{k}.$$

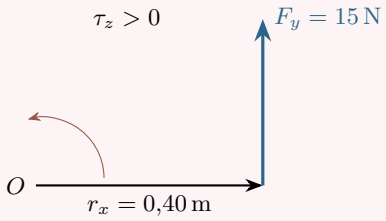
Aunque $\vec{u} \cdot \vec{w}$ y $\vec{u} \times \vec{w}$ contienen los mismos factores iniciales, cada producto construye un objeto matemático distinto y responde a una relación física propia. El primero mide una proyección; el segundo está ligado a la orientación de un área o a un giro.

**PROBLEMA RESUELTO 2.11 · Momento de una fuerza respecto del origen**

Una fuerza $\vec{F} = (0, 15, 0)\,\mathrm{N}$ actúa en el punto $\vec{r} = (0{,}40, 0, 0)\,\mathrm{m}$. Calcular el momento de la fuerza respecto del origen.
*Resolución.* Para esta definición de momento (también llamado torque), $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$:

$$\vec{\tau} = (0, 0, 0{,}40 \cdot 15)\,\mathrm{N\,m} = (0, 0, 6)\,\mathrm{N\,m}.$$

El vector apunta según $+z$: una fuerza hacia $+y$ aplicada en $+x$ favorece una rotación antihoraria vista desde $+z$. Aunque N m y el joule tienen las mismas dimensiones, un momento de fuerza y una energía representan conceptos físicos distintos.




Vista desde $+z$: el sentido antihorario corresponde a torque positivo. Es un esquema geométrico con escalas independientes para posición y fuerza.

## 2.10 Rectas, parábolas, circunferencias y gráficas físicas

Una gráfica organiza relaciones entre magnitudes y permite extraer información cuantitativa. Es un modo de representar una relación entre variables, pero sus ejes determinan su interpretación. La recta $y = mx + b$ tiene pendiente $m$ e intercepto $b$; en un gráfico de posición $x$ frente a tiempo $t$, la pendiente tiene unidades de velocidad, mientras que en uno de masa frente a volumen representa densidad. En una relación cuadrática $y = ax^2 + bx + c$, los valores del eje horizontal importan tanto como la forma de la curva.

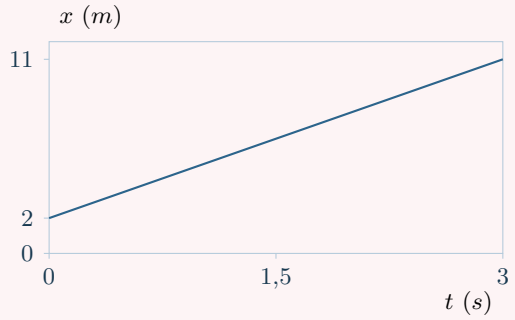
También una circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$ describe un conjunto de puntos; especificar la rapidez requiere información temporal. Una partícula podría moverse sobre la misma circunferencia con rapidez constante, variable o incluso detenerse. La curva en el plano y la *gráfica de una coordenada respecto del tiempo* son objetos distintos, aunque ambos se dibujen usando ejes.

### PROBLEMA RESUELTO 2.12 · La pendiente conserva sus unidades

La coordenada de un móvil registrada en dos instantes es $x(0) = 2\,\text{m}$ y $x(3\,\text{s}) = 11\,\text{m}$. Hallar la pendiente de la recta que une los puntos de la gráfica posición–tiempo e interpretarla.
*Resolución.* La pendiente de la secante es

$$m_{\text{sec}} = \frac{11\,\text{m} - 2\,\text{m}}{3\,\text{s} - 0\,\text{s}} = 3\,\text{m/s}.$$

Es la *velocidad media* sobre el intervalo; las velocidades instantáneas pueden variar durante él. El capítulo 3 estudiará qué ocurre cuando disminuimos el intervalo temporal y cómo obtener una velocidad en un instante a partir de una función.




La recta es la secante entre los dos datos. Su pendiente es $9\,\text{m}/3\,\text{s}$; la posición intermedia real requiere observaciones adicionales.

### PROBLEMA RESUELTO 2.13 · Área bajo una velocidad, antes de aprender integrales

La velocidad de un móvil aumenta linealmente de $4\,\text{m/s}$ a $10\,\text{m/s}$ durante $2\,\text{s}$, sin cambiar de sentido. Estimar el desplazamiento suponiendo que la gráfica velocidad–tiempo es exactamente el segmento recto entre ambos valores.
*Resolución.* La región bajo la recta es un trapecio de bases $4\,\text{m/s}$ y $10\,\text{m/s}$ y altura $2\,\text{s}$:

$$\Delta x = \frac{4 + 10}{2}\,\text{m/s}\,(2\,\text{s}) = 14\,\text{m}.$$

Para entender por qué esta área representa el desplazamiento, podemos dividir el intervalo en dos mitades: por ser una recta, las velocidades de instantes simétricos suman siempre $14\,\text{m/s}$. Su promedio es $7\,\text{m/s}$, que multiplicado por $2\,\text{s}$ da $14\,\text{m}$. La igualdad entre área y desplazamiento extiende la relación $\Delta x = v\Delta t$ de los rectángulos a una velocidad que varía linealmente. Las unidades de longitud comprueban la coherencia dimensional del resultado; demostrar la igualdad requiere el razonamiento físico correspondiente. Si la velocidad fuera negativa, la orientación del área exigiría una precaución adicional. Más adelante aprenderemos a generalizar este razonamiento mediante integrales.

| Región | Área orientada (m) |
|---|---|
| Rectángulo de base 2 s y altura 4 m/s | 8 |
| Triángulo de base 2 s y altura 6 m/s | 6 |
| Trapecio completo | 14 |

Descomponer el trapecio en rectángulo y triángulo permite comprobar su área por un segundo procedimiento.

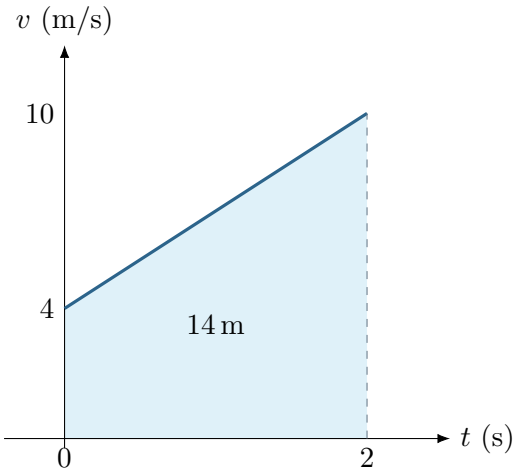



Figura 2.5: El área del trapecio tiene dimensiones de desplazamiento. La figura supone que la velocidad es positiva y cambia linealmente durante el intervalo.

## 2.11 Identidades matemáticas, leyes físicas y condiciones de un modelo

La igualdad $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ es una identidad matemática válida para todo ángulo real. La expresión $F_{\text{neta}} = ma$ representa una ley física bajo determinadas condiciones de aplicación. La relación $v(t) = v_0 + at$ es consecuencia de un modelo de aceleración constante y de una condición inicial. Y $v(0) = 4\,\text{m/s}$ es un dato de una situación particular. Estas proposiciones tienen alcances lógicos distintos, que conviene precisar al leer cada igualdad.

**PROBLEMA RESUELTO 2.14 · Una ecuación dimensionalmente correcta puede estar equivocada**

Alguien propone para la rapidez adquirida por una esfera soltada desde el reposo a través de una diferencia de altura $h$ la fórmula $v = 3\sqrt{gh}$, donde $g$ tiene unidades de aceleración. ¿Basta el análisis dimensional para confirmarla?
*Resolución.* La expresión $\sqrt{gh}$ tiene dimensiones

$$[\sqrt{gh}] = \sqrt{(L/T^2)L} = L/T,$$

por lo que la fórmula propuesta sí presenta unidades de rapidez. Pero cualquier coeficiente numérico adimensional, por ejemplo 2 o $\sqrt{2}$, mantendría esas dimensiones. Para una caída ideal sin resistencia del aire y con aceleración gravitatoria constante, el modelo de aceleración constante, que deduciremos en los capítulos 3 y 4, da $v = \sqrt{2gh}$, no $3\sqrt{gh}$. La homogeneidad dimensional detecta ciertos errores; determinar el coeficiente y validar las hipótesis dinámicas requiere información física adicional.

| Propuesta | Dimensión | Control físico |
|---|---|---|
| $3\sqrt{gh}$ | $L/T$ | Coeficiente no demostrado |
| $\sqrt{2gh}$ | $L/T$ | Caída ideal desde reposo |

Las dimensiones coinciden en ambas filas. El coeficiente exige información física adicional al control de unidades.

## Ejercicios de práctica

Se proponen dieciocho ejercicios inéditos, identificados como B (fundamentos) o C (consolidación). Una cuestión se considera resuelta cuando el estudiante puede explicar el modelo, justificar las operaciones y examinar el resultado. Las soluciones completas aparecen a continuación de los enunciados.

**EJERCICIO 2.1 · Despejar sin olvidar unidades (B)**

La fuerza neta sobre un objeto es $F = ma$. Si $F = 21\,\mathrm{N}$ y $a = 3{,}5\,\mathrm{m/s^2}$, determina $m$ e indica qué condición se necesita para dividir por $a$.

**EJERCICIO 2.2 · Dos corrientes desconocidas (B)**

En un nodo de un circuito, las intensidades positivas $I_1$ e $I_2$ satisfacen $I_1 + I_2 = 5\,\mathrm{A}$ e $I_1 - I_2 = 1\,\mathrm{A}$. Resuelve el sistema y verifica ambas condiciones.

**EJERCICIO 2.3 · Densidad y proporcionalidad (B)**

Un material homogéneo tiene densidad $2{,}7\,\mathrm{g/cm^3}$. ¿Cuál es la masa de un bloque de $350\,\mathrm{cm^3}$? Exprésala también en kilogramos y explicita qué se supone del material.

**EJERCICIO 2.4 · Incremento absoluto y relativo (B)**

La lectura de un sensor pasa de 80 N a 92 N. Calcula el incremento absoluto y porcentual respecto del valor inicial. ¿Sería correcto decir que aumentó «un 12 %»?

**EJERCICIO 2.5 · Una relación de inverso cuadrado (B)**

La irradiancia de una fuente ideal es $E$ a 3 m. ¿Qué irradiancia se espera a 9 m si se mantiene el mismo modelo geométrico del problema 2.3?

**EJERCICIO 2.6 · Decibelios y factores (B)**

En el modelo del problema 2.4, una intensidad pasa de $I_1$ a $100I_1$. Calcula la diferencia de niveles. Explica por qué 20 dB no significa «veinte veces más intensidad». Después invierte la pregunta: ¿qué factor entre intensidades corresponde a un aumento de 10 dB?

**EJERCICIO 2.7 · Dos instantes para un mismo lugar (B)**

La posición ideal de un móvil sobre un eje es $x(t) = (8\,\mathrm{m/s})t - (2\,\mathrm{m/s^2})t^2$ con $t \geq 0$. Encuentra todos los instantes en los que $x = 6\,\mathrm{m}$ y compruébalos sustituyendo.

**EJERCICIO 2.8 · Elegir una raíz admisible (B)**

La altura de un objeto se describe, desde $t = 0$, por $y(t) = 4\,\mathrm{m} + (2\,\mathrm{m/s})t - (5\,\mathrm{m/s^2})t^2$. Calcula el instante positivo en que alcanza el suelo e interpreta la otra raíz.

**EJERCICIO 2.9 · Del grado al radián (B)**

Un arco circular de radio 3 cm subtiende 150°. Determina el ángulo en radianes y la longitud del arco. Expresa esta última en centímetros.

**EJERCICIO 2.10 · Componentes y comprobación (B)**

Una fuerza de módulo 20 N forma 60° con $+x$, en el primer cuadrante. Encuentra $F_x$ y $F_y$ y verifica el módulo.

**EJERCICIO 2.11 · Módulo y orientación de un desplazamiento**

Un desplazamiento es $\vec{d} = (-3, -4)\,\mathrm{m}$. Calcula $|\vec{d}|$ e identifica el cuadrante. ¿Cuál es aproximadamente su ángulo medido desde $+x$ en sentido antihorario?

**EJERCICIO 2.12 · Recorrido y desplazamiento (B)**

Una persona camina primero $\vec{d_1} = (4, 3)\,\mathrm{m}$ y luego $\vec{d_2} = (-4, 0)\,\mathrm{m}$, recorriendo cada tramo rectilíneamente. Encuentra el desplazamiento total, su módulo y la distancia efectivamente recorrida.

**EJERCICIO 2.13 · Producto escalar con unidades (C)**

Una fuerza constante $\vec{F} = (2, 4)\,\mathrm{N}$ acompaña un desplazamiento $\Delta\vec{r} = (3, -1)\,\mathrm{m}$. Calcula el trabajo efectuado por esa fuerza y determina si es positivo, negativo o nulo.

**EJERCICIO 2.14 · El signo de un torque (C)**

Una fuerza $\vec{F} = (20, 0, 0)\,\mathrm{N}$ se aplica en $\vec{r} = (0, 0{,}30, 0)\,\mathrm{m}$. Calcula $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ y explica el signo de su componente $z$.

**EJERCICIO 2.15 · Pendiente y unidades (B)**

En una gráfica posición–tiempo se registran dos puntos $(t, x) = (0\,\mathrm{s}, 2\,\mathrm{m})$ y $(5\,\mathrm{s}, 17\,\mathrm{m})$. Obtén la pendiente de la secante y di qué información adicional necesitarías para asegurar que la velocidad es constante.

**EJERCICIO 2.16 · Dos áreas que se cancelan (C)**

La gráfica de velocidad–tiempo de un móvil corresponde al segmento recto de $v(0) = 6\,\mathrm{m/s}$ a $v(4\,\mathrm{s}) = -6\,\mathrm{m/s}$. ¿Cuál es el desplazamiento? ¿Cuál es la distancia recorrida, suponiendo que solo cambia de sentido cuando la gráfica cruza $v = 0$?

**EJERCICIO 2.17 · Circunferencia y movimiento (B)**

Una partícula está restringida a una circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 25\,\mathrm{cm}^2$. Si en un instante $x = 3\,\mathrm{cm}$, ¿qué valores de $y$ son posibles? ¿Permite esta información calcular su rapidez?

**EJERCICIO 2.18 · Alcance de las dimensiones (C)**

Se proponen $v = C\sqrt{gh}$ y $v = Dgh$ para la rapidez de caída, donde $C$ y $D$ son números adimensionales. Determina qué propuesta es homogénea dimensionalmente y explica si eso permite conocer el valor de $C$.

## Soluciones completas

**SOLUCIÓN 2.1.**
De $F = ma$ despejamos

$$m = \frac{F}{a} = \frac{21\,\mathrm{N}}{3{,}5\,\mathrm{m/s^2}} = 6\,\mathrm{kg}.$$

Dividir por $a$ requiere $a \neq 0$. Si $a = 0$ y $F = 0$, la ecuación por sí sola no determina la masa; si $F \neq 0$, los datos son incompatibles con ese modelo.

**SOLUCIÓN 2.2.**
Sumamos las ecuaciones: $2I_1 = 6\,\mathrm{A}$ y $I_1 = 3\,\mathrm{A}$. Sustituyendo, $I_2 = 2\,\mathrm{A}$. Comprobamos: $3+2 = 5\,\mathrm{A}$ y $3 - 2 = 1\,\mathrm{A}$. Ambas corrientes resultan positivas, como exigía el enunciado.

**SOLUCIÓN 2.3.**
Para un material homogéneo con densidad aproximadamente constante,

$$m = \rho V = (2{,}7\,\mathrm{g/cm^3})(350\,\mathrm{cm^3}) = 945\,\mathrm{g} = 0{,}945\,\mathrm{kg}.$$

Las unidades de volumen se cancelan; si el material no fuera homogéneo, una única densidad podría no bastar.

**SOLUCIÓN 2.4.**
El incremento absoluto es $\Delta F = 92 - 80 = 12\,\mathrm{N}$. El relativo se calcula respecto de $80\,\mathrm{N}$: $12/80 = 0{,}15 = 15\,\%$. La diferencia absoluta de $12\,\mathrm{N}$ se convierte en un incremento relativo al compararla con la fuerza de referencia.

**SOLUCIÓN 2.5.**
Por el modelo $E \propto 1/r^2$ tenemos $E_2/E_1 = (3/9)^2 = 1/9$. La respuesta es $E/9$. El modelo supone propagación isotrópica en un medio con absorción despreciable; un haz láser o un medio absorbente requerirían otra descripción.

**SOLUCIÓN 2.6.**
La diferencia es $\Delta L = 10\log_{10}(100) = 20\,\mathrm{dB}$. La relación entre intensidades es un factor 100, mientras que 20 es el cambio en una escala logarítmica. La escala logarítmica expresa esa razón entre intensidades mediante una diferencia de niveles. Para la pregunta inversa, $10 = 10\log_{10}(I_2/I_1)$ implica $\log_{10}(I_2/I_1) = 1$ y, por definición de logaritmo, $I_2/I_1 = 10^1 = 10$.

**SOLUCIÓN 2.7.**
Sustituimos la posición de 6 m:

$$(8\,\mathrm{m/s})t - (2\,\mathrm{m/s^2})t^2 = 6\,\mathrm{m}.$$

Al dividir por $2\,\mathrm{m/s^2}$ y reorganizar, obtenemos

$$t^2 - (4\,\mathrm{s})t + 3\,\mathrm{s}^2 = 0, \quad (t - 1\,\mathrm{s})(t - 3\,\mathrm{s}) = 0.$$

Por tanto $t = 1\,\mathrm{s}$ y $t = 3\,\mathrm{s}$. En ambos casos, $x = 8 - 2 = 6\,\mathrm{m}$ y $x = 24 - 18 = 6\,\mathrm{m}$ respectivamente; las dos raíces pertenecen al dominio $t \geq 0$.

**SOLUCIÓN 2.8.**
Igualando $y = 0$ y expresando $t$ en segundos, queda la ecuación numérica $4 + 2t - 5t^2 = 0$, o $5t^2 - 2t - 4 = 0$. La fórmula cuadrática da

$$t = \frac{2 \pm \sqrt{84}}{10}\,\mathrm{s} = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{5}\,\mathrm{s}.$$

El instante posterior al inicio es $t = (1 + \sqrt{21})/5\,\mathrm{s} \approx 1{,}117\,\mathrm{s}$. El otro, aproximadamente $-0{,}717\,\mathrm{s}$, pertenece a la prolongación algebraica de la parábola, pero queda fuera del intervalo declarado para este experimento.

**SOLUCIÓN 2.9.**
Convertimos $150^\circ = (5\pi/6)\,\mathrm{rad}$. Para el arco,

$$s = r\theta = (3\,\mathrm{cm})\frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{2}\,\mathrm{cm} \approx 7{,}85\,\mathrm{cm}.$$

La fórmula de arco requiere expresar el ángulo en radianes antes de multiplicarlo por el radio.

**SOLUCIÓN 2.10.**
$F_x = 20\cos 60^\circ = 10\,\mathrm{N}$ y $F_y = 20\sin 60^\circ = 10\sqrt{3}\,\mathrm{N}$. La norma es $\sqrt{10^2 + (10\sqrt{3})^2}\,\mathrm{N} = 20\,\mathrm{N}$; ambas componentes deben ser positivas en el primer cuadrante.

**SOLUCIÓN 2.11.**
$|\vec{d}| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}\,\mathrm{m} = 5\,\mathrm{m}$. Ambas componentes son negativas, luego el vector está en el tercer cuadrante. Su ángulo antihorario desde $+x$ es $180^\circ + \arctan(4/3) \approx 233{,}13^\circ$. El *módulo* es siempre mayor o igual que cero.

**SOLUCIÓN 2.12.**
La suma vectorial es $(4, 3) + (-4, 0) = (0, 3)\,\mathrm{m}$; su módulo es 3 m. La primera trayectoria recta mide $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5\,\mathrm{m}$ y la segunda 4 m, por lo que la distancia recorrida es 9 m. El recorrido depende del camino; el desplazamiento, solo de los extremos.

**SOLUCIÓN 2.13.**
$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = (2\,\mathrm{N})(3\,\mathrm{m}) + (4\,\mathrm{N})(-1\,\mathrm{m}) = 2\,\mathrm{J}$. El trabajo de esta fuerza constante es positivo. Se suman los productos de componentes homólogas.

**SOLUCIÓN 2.14.**
En el plano $xy$,

$$\tau_z = r_x F_y - r_y F_x = -(0{,}30\,\mathrm{m})(20\,\mathrm{N}) = -6\,\mathrm{N\,m}.$$

Así, $\vec{\tau} = (0, 0, -6)\,\mathrm{N\,m}$. El sentido $-z$ se comprueba porque $\hat{\jmath} \times \hat{\imath} = -\hat{k}$.

**SOLUCIÓN 2.15.**
La pendiente de la secante es $(17 - 2)\,\mathrm{m}/(5\,\mathrm{s}) = 3\,\mathrm{m/s}$, interpretable como velocidad media. Para conocer lo ocurrido entre dos puntos necesitamos información intermedia o un modelo adicional. Para asegurar velocidad constante se requiere información sobre todos los instantes del intervalo, o una hipótesis explícita de linealidad del modelo de posición.

**SOLUCIÓN 2.16.**
La velocidad cruza cero a los 2 s. De 0 a 2 s el área positiva es un triángulo de base 2 s y altura 6 m/s, por lo que vale 6 m. De 2 a 4 s el área orientada es $-6$ m. El desplazamiento total es 0 m; la distancia recorrida es $6 + 6 = 12$ m. Un desplazamiento nulo es compatible tanto con el reposo como con un recorrido de ida y vuelta.

**SOLUCIÓN 2.17.**
Sustituyendo $x = 3\,\text{cm}$ obtenemos $y^2 = 25\,\text{cm}^2 - 9\,\text{cm}^2 = 16\,\text{cm}^2$. Por tanto $y = \pm 4\,\text{cm}$. La ecuación fija los puntos de la circunferencia; la rapidez y el sentido del movimiento requieren información temporal.

**SOLUCIÓN 2.18.**
La primera propuesta es homogénea: $[\sqrt{gh}] = \sqrt{(L/T^2)L} = L/T$. La segunda tiene dimensión $L^2/T^2$, no $L/T$, de modo que un $D$ adimensional no la corrige. La primera es dimensionalmente homogénea; para determinar el número $C$ necesitamos una ley física y las hipótesis pertinentes.

## Diagnóstico de salida: puente hacia el capítulo 3

Antes de avanzar, conviene resolver sin mirar las páginas anteriores estas cuatro preguntas y justificar las respuestas: *(i)* ¿Por qué al despejar una ecuación es indispensable conservar las unidades? *(ii)* ¿Cómo distinguirías los 7 km recorridos de los 5 km de desplazamiento del problema 2.8? *(iii)* Si dos puntos de una gráfica posición–tiempo determinan una pendiente de 3 m/s, ¿qué falta para afirmar que esa es la velocidad en cada instante? *(iv)* ¿Qué cambio físico podría quedar oculto al sumar dos áreas de velocidad de signo opuesto?

**Respuestas de control.** En (i), porque las dimensiones forman parte de la igualdad física y permiten detectar operaciones incompatibles. En (ii), la distancia suma longitudes de tramos y el desplazamiento es un vector entre las posiciones extremas. En (iii), falta información de las posiciones intermedias o una hipótesis que garantice que la gráfica es una recta. En (iv), un viaje con ida y regreso puede tener desplazamiento cero y distancia positiva. Las preguntas (iii) y (iv) conducen directamente al problema del capítulo 3: conocer una *tasa instantánea* y calcular una *acumulación*.

# CAPÍTULO 3

# FUNCIONES, VARIACIÓN Y ACUMULACIÓN: CÁLCULO FÍSICO DESDE CERO


3.1 Lo que necesitamos saber antes de comenzar . . . . . 40
3.2 Una función describe un modelo 40
3.3 La pendiente nos habla de una variación . . . . . 41
3.4 La tasa media y su límite . . . 42
3.5 Derivar también permite estudiar aceleraciones . . . . . 44
3.6 El camino inverso: acumular pequeños desplazamientos . . . . 46
3.7 La integral: del dibujo a una expresión general . . . . . 47
3.8 Cuando los datos son discretos 50
3.9 Una primera ecuación diferencial 51
3.10 Qué hemos justificado y qué queda por demostrar . . . . . 52
Ejercicios de práctica . . . . . 53
Soluciones completas de los ejercicios 55
Diagnóstico de salida y puente hacia el capítulo 4 . . . . . 59


En algunos cursos universitarios de física, las derivadas aparecen antes de que el estudiante las haya aprendido en Cálculo I. La matemática puede comenzar por construir rigurosamente los números reales, mientras que la física necesita describir un cuerpo que cambia de posición en cada instante. Ambos recorridos pueden complementarse: aprenderemos el significado y el uso inicial de cada herramienta, precisando qué explicación hemos establecido y qué demostración queda pendiente. Imaginemos un objeto cuya posición se registra cada segundo. Una tabla indica las posiciones en los instantes medidos; describir el movimiento entre ellos requiere información adicional. Si además queremos conocer su velocidad en un instante preciso, aparece una pregunta inesperada: ¿cómo calcular un cambio en un intervalo de tiempo que se hace cada vez más pequeño? Y si conocemos la velocidad en cada instante, aparece la pregunta inversa: ¿cómo reconstruir todo el desplazamiento acumulado? Esas dos preguntas conducirán, sin comenzar por una lista de reglas, a las ideas de derivada e integral.

**Dos preguntas que originan el cálculo**

¿Qué está cambiando *ahora*? ¿Cuánto se ha *acumulado* durante un intervalo? La derivada y la integral nacen de estas preguntas y realizan operaciones distintas.

## 3.1 Lo que necesitamos saber antes de comenzar

Bastan inicialmente el álgebra elemental, las potencias, las unidades, la lectura de ejes cartesianos y la diferencia entre magnitudes escalares y vectoriales. Recordaremos dos precauciones. Primero, para interpretar una función matemática como una ley física debemos especificar sus variables, unidades y condiciones de aplicación. Segundo, la lectura de una gráfica física reúne los números y las magnitudes representadas en los ejes.

**Comprobación de entrada.** Si 2 m/s es una velocidad constante durante 3 s, el desplazamiento es 6 m. Si una longitud depende del tiempo mediante $x(t) = x_0 + ut$, entonces $x_0$ debe medirse en unidades de longitud y $u$ en unidades de longitud dividida por tiempo. Si estas dos afirmaciones no resultan comprensibles, conviene regresar a las conversiones, el despeje de ecuaciones y las gráficas del capítulo 2 antes de seguir.

| Producto de magnitudes | Desplazamiento |
|---|---|
| $2\,\mathrm{m/s} \times 1\,\mathrm{s}$ | 2 m |
| $2\,\mathrm{m/s} \times 3\,\mathrm{s}$ | 6 m |

## 3.2 Una función describe un modelo

Consideremos la expresión

$$x(t) = 3\,\mathrm{m} + (2\,\mathrm{m/s})t. \tag{3.1}$$

Aquí $t$ representa el tiempo transcurrido desde un instante elegido como origen y $x(t)$ representa una coordenada de posición respecto de un punto de referencia. La expresión puede describir, por ejemplo, una plataforma que parte a tres metros del origen y avanza con velocidad constante a lo largo de una recta. En $t = 0$, su posición es 3 m; en $t = 4\,\mathrm{s}$, es 11 m.

| $t$ (s) | $x(t)$ (m) |
|---|---|
| 0 | 3 |
| 1 | 5 |
| 2 | 7 |
| 4 | 11 |

Una función asigna a cada elemento de un conjunto $D$ un único valor; el conjunto $D$ es su *dominio*. Al emplearla como modelo físico elegimos un dominio de aplicación y declaramos las unidades y las hipótesis que sostienen esa elección. Para una máquina observada durante los primeros cinco segundos, ese intervalo constituye el respaldo experimental disponible; aplicar la ley a $t = 100\,\mathrm{s}$ requiere justificar su prolongación. Una expresión puede admitir tiempos negativos en su dominio matemático; su aplicación a esos tiempos necesita respaldo físico.

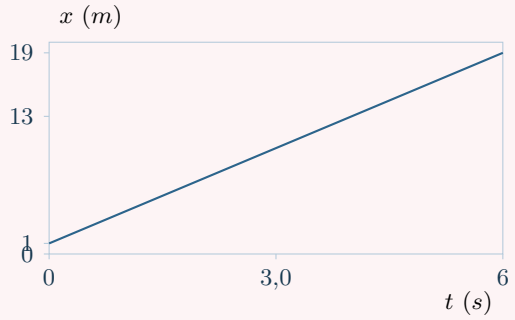
**PROBLEMA RESUELTO 3.1 · La ecuación de un experimento limitado**

Durante un ensayo de 0 a 6 s se ajusta la coordenada horizontal de un carrito con la función $x(t) = 1\,\text{m} + (3\,\text{m/s})t$. Determinar $x(0)$, $x(4\,\text{s})$ y decidir qué puede afirmarse acerca de $x(20\,\text{s})$.

*Resolución.* En el instante inicial se obtiene $x(0) = 1\,\text{m}$. Para los cuatro segundos:

$$x(4\,\text{s}) = 1\,\text{m} + (3\,\text{m/s})(4\,\text{s}) = 13\,\text{m}.$$

Para 20 s la fórmula da algebraicamente 61 m, una *extrapolación* más allá del intervalo en que se ha establecido el ajuste. La interpretación del cálculo incluye examinar la validez del modelo.




Solo se dibuja el dominio del ensayo. El punto $t = 4\,\text{s}$ está dentro; $t = 20\,\text{s}$ queda fuera de la información experimental.

## 3.3 La pendiente nos habla de una variación

Una recta que representa posición frente al tiempo tiene pendiente constante. En la ecuación (3.1), incrementar el tiempo en un segundo incrementa la posición en dos metros. La pendiente posee, por tanto, unidades de velocidad. En una curva, en cambio, la inclinación puede ser diferente según el punto. Una función cuadrática ofrece un ejemplo sencillo:

$$x(t) = (2\,\text{m/s}^2)t^2, \qquad t \geq 0.$$

Las posiciones son $x(0) = 0$, $x(1\,\text{s}) = 2\,\text{m}$, $x(2\,\text{s}) = 8\,\text{m}$ y $x(3\,\text{s}) = 18\,\text{m}$. En tres intervalos sucesivos de un segundo, los incrementos son 2, 6 y 10 m. Dividir cada incremento por su duración da 2, 6 y 10 m/s: son tasas medias en esos intervalos. La curva se hace más empinada. Para estudiar la secante entre uno y tres segundos reuniremos el desplazamiento de esos dos últimos tramos y su duración.

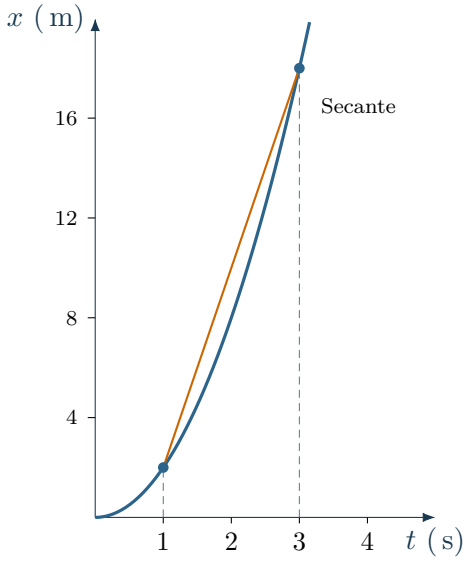



Figura 3.1: Gráfica de $x(t) = 2t^2$ (en unidades compatibles) y secante entre 1 y 3 s. La pendiente de la secante es una velocidad *media* calculada entre los extremos del intervalo.

**PROBLEMA RESUELTO 3.2 · Qué significa una pendiente media**

En el modelo cuadrático anterior, hallar la velocidad media entre $t = 1\,\text{s}$ y $t = 3\,\text{s}$, y comprobar las unidades.

*Resolución.* Durante ese intervalo la coordenada pasa de 2 m a 18 m. Su incremento es 16 m y el intervalo dura 2 s. Entonces

$$\bar{v}_{[1,3]} = \frac{18\,\text{m} - 2\,\text{m}}{3\,\text{s} - 1\,\text{s}} = 8\,\text{m/s}.$$

La pendiente de la secante de la figura 3.1 es ocho metros por segundo. Ese valor se obtiene dividiendo el cambio de posición por el tiempo transcurrido; es compatible con distintas velocidades durante el trayecto.

| **Extremo** | $t$ **(s)** | $x$ **(m)** |
|---|---|---|
| Inicial | 1 | 2 |
| Final | 3 | 18 |
| Incremento | 2 | 16 |

La fila de incrementos representa los catetos del triángulo de la secante: $\Delta x/\Delta t = 8\,\text{m/s}$.

## 3.4 La tasa media y su límite

Para una función cualquiera $x(t)$, la *tasa media de variación* entre $t_1$ y $t_2$ es

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}, \qquad t_2 \neq t_1. \tag{3.2}$$

Para la posición de una partícula se trata de su velocidad media. Pensemos ahora que queremos saber la velocidad *justo cuando* $t = 2\,\text{s}$. No podemos aplicar la fórmula poniendo $t_1 = t_2 = 2\,\text{s}$: obtendríamos $0/0$, que no es un número. Pero podemos comparar el instante $t$ con otro muy cercano, $t + h$, y estudiar qué sucede al disminuir $h$ sin hacerlo todavía cero.

Tomemos de nuevo $x(t) = kt^2$, donde $k = 2\,\mathrm{m/s^2}$. Entonces

$$\frac{x(t+h)-x(t)}{h} = k\,\frac{(t+h)^2 - t^2}{h} \\ = k\,\frac{2th + h^2}{h} = k(2t+h), \qquad h \neq 0.$$

Mientras $h$ se aproxima a cero, esta expresión se aproxima a $2kt$. Esta observación motiva la definición de *derivada*:

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = \lim_{h\to 0} \frac{x(t+h)-x(t)}{h}, \tag{3.3}$$

si el límite existe como un valor finito y único. En un instante interior debemos poder acercarnos desde tiempos anteriores y posteriores y obtener el mismo valor. Al comienzo o al final de un intervalo observado solo disponemos del lado que pertenece al dominio: cuando evaluemos allí velocidad o aceleración, entenderemos el límite desde ese lado. Por tanto, para el modelo considerado,

$$\boxed{v(t) = x'(t) = 2kt = (4\,\mathrm{m/s^2})t.}$$

El símbolo $dx/dt$ designa la tasa instantánea definida por ese límite; sus unidades son longitud dividida por tiempo. Geométricamente, la derivada se interpreta como la pendiente de la tangente a la gráfica, cuando esa interpretación es válida.

En un curso de análisis estudiaremos cuidadosamente qué significa que exista el límite, bajo qué condiciones lo podemos manipular y cómo se demuestra un teorema general. Aquí hemos justificado algebraicamente el resultado para una función cuadrática concreta, sin pretender haber construido toda la teoría de límites.

### PROBLEMA RESUELTO 3.3 · Una medición cada vez más próxima

Para $x(t) = (2\,\mathrm{m/s^2})t^2$, determinar la velocidad media entre $2\,\mathrm{s}$ y $2\,\mathrm{s} + h$ con $h = 1\,\mathrm{s}$, $0{,}1\,\mathrm{s}$ y $0{,}01\,\mathrm{s}$. Inferir la velocidad instantánea a los $2\,\mathrm{s}$.

*Resolución.* Del cálculo anterior,

$$\bar{v} = (2\,\mathrm{m/s^2})(4\,\mathrm{s} + h).$$

Para los tres incrementos se obtienen $10\,\mathrm{m/s}$, $8{,}2\,\mathrm{m/s}$ y $8{,}02\,\mathrm{m/s}$. Cada reducción de $h$ aproxima la velocidad media a $8\,\mathrm{m/s}$; la tabla hace visible la interpretación de ese límite, cuya demostración exige justificar la tendencia. La expresión algebraica $2k(2\,\mathrm{s} + 0)$ verifica que $v(2\,\mathrm{s}) = 8\,\mathrm{m/s}$.

| $h$ (s) | $\bar{v}$ (m/s) | Exceso sobre 8 m/s |
|---|---|---|
| 1 | 10 | 2 |
| 0,1 | 8,2 | 0,2 |
| 0,01 | 8,02 | 0,02 |

El exceso es $(2\,\mathrm{m/s^2})h$. La fórmula, además de los tres valores, justifica la convergencia al reducir $h$.

## 3.5 Derivar también permite estudiar aceleraciones

Si $v(t)$ es la velocidad, su tasa instantánea de cambio se llama *aceleración*: $a(t) = v'(t)$. Para el modelo anterior, donde $v(t) = 2kt$, obtenemos $a(t) = 2k = 4\,\mathrm{m/s^2}$. Esta aceleración es constante aunque la velocidad no lo sea. El efecto de una aceleración negativa sobre la rapidez depende también del signo de la velocidad. Si la velocidad es negativa y la aceleración también lo es, el móvil puede aumentar su rapidez mientras se desplaza en la dirección negativa.

Para trabajar con funciones más variadas necesitamos reglas de derivación. Si $C$ permanece constante respecto del tiempo y $n$ es un entero positivo, las identidades

$$\frac{d}{dt}C = 0, \qquad \frac{d}{dt}(Ct^n) = nCt^{n-1}, \qquad \frac{d}{dt}(f+g) = f' + g' \tag{3.4}$$

permiten derivar polinomios término por término, en intervalos donde están definidos. Cuando $Ct^n$ representa una posición, $C$ tiene unidades de longitud dividida por tiempo a la potencia $n$; al derivar, cada término queda en unidades de velocidad. La derivada de una cantidad constante respecto del tiempo es cero, también cuando esa constante tiene unidades. Cada regla puede justificarse a partir de la definición de derivada. Para $t^2$ ya hemos hecho el cálculo con el cociente incremental; las potencias naturales superiores se estudian expandiendo $(t+h)^n$ y simplificando antes de tomar el límite.

| Potencia | Cociente incremental, $h \neq 0$ |
|---|---|
| $t^2$ | $2t + h$ |
| $t^3$ | $3t^2 + 3th + h^2$ |

**PROBLEMA RESUELTO 3.4 · Posición, velocidad, aceleración y detención momentánea**

Un móvil tiene, entre 0 y 4 s, la posición

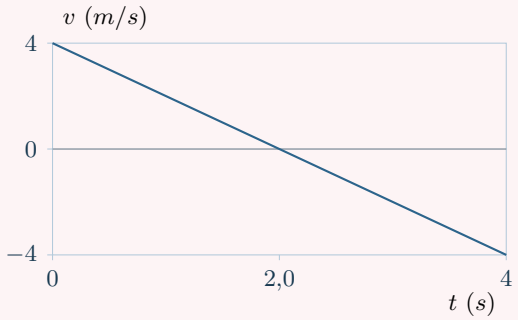
$$x(t) = 3\,\mathrm{m} + (4\,\mathrm{m/s})t - (1\,\mathrm{m/s^2})t^2.$$

Calcular velocidad, aceleración e instante de velocidad nula. Interpretar el comportamiento del móvil.

*Resolución.* Derivamos conservando las unidades de los coeficientes:

$$v(t) = 4\,\mathrm{m/s} - (2\,\mathrm{m/s^2})t, \qquad a(t) = -2\,\mathrm{m/s^2}.$$

Al resolver $v(t) = 0$ se obtiene $t = 2\,\mathrm{s}$. Antes de ese instante, la velocidad es positiva y decrece hasta cero; después es negativa y su módulo aumenta. En ese instante cambia de sentido. La aceleración conserva el mismo signo durante todo el intervalo, pero el efecto sobre la rapidez cambia según el signo de la velocidad.




La velocidad cruza cero en 2 s. La pendiente negativa permanece igual antes y después del cambio de sentido.

Las funciones trigonométricas también aparecen en la física, especialmente en oscilaciones. Cuando el ángulo se mide en *radianes*, las reglas elementales son

$$\frac{d}{dt}\sin(\omega t) = \omega\cos(\omega t), \qquad \frac{d}{dt}\cos(\omega t) = -\omega\sin(\omega t), \tag{3.5}$$

donde $\omega$ es constante y el argumento $\omega t$ es adimensional, expresado en radianes. Estas reglas y la regla de la cadena se presentan como herramientas operativas; su fundamentación completa utiliza, entre otros resultados, límites trigonométricos. Trabajar con ángulos en grados requiere incorporar el factor de conversión al derivar.

El factor $\omega$ aparece porque el ángulo también cambia con el tiempo. Si llamamos $\theta(t) = \omega t$, entonces $d\theta/dt = \omega$. La regla de la cadena expresa esa composición como

$$\frac{d}{dt}\cos\theta(t) = -\sin\theta(t)\,\frac{d\theta}{dt}.$$

Para $x = A\cos(\omega t)$, la amplitud $A$ multiplica toda la derivada y resulta $v = -A\omega\sin(\omega t)$. Al derivar otra vez aparece un segundo factor $\omega$: $a = -A\omega^2\cos(\omega t)$. Así podemos reconstruir los coeficientes y sus unidades en lugar de recordar tres fórmulas por separado.

**PROBLEMA RESUELTO 3.5 · Una oscilación sencilla**

La coordenada de una masa viene dada por

$$x(t) = (0{,}10\,\mathrm{m})\cos\big((2\,\mathrm{s}^{-1})t\big).$$

Hallar su velocidad y aceleración y evaluarlas en $t = 0$.
*Resolución.* Derivando una vez y después otra:

$$v(t) = -(0{,}20\,\mathrm{m/s})\sin[(2\,\mathrm{s}^{-1})t],$$
$$a(t) = -(0{,}40\,\mathrm{m/s^2})\cos[(2\,\mathrm{s}^{-1})t].$$

La expresión $(2\,\mathrm{s}^{-1})t$ es adimensional y representa un ángulo en radianes. En $t = 0$, $v(0) = 0$ y $a(0) = -0{,}40\,\mathrm{m/s^2}$. En un extremo de la oscilación la velocidad es nula y la aceleración tiene módulo máximo en este modelo.

| **Instante** | $x$ **(m)** | $v$ **(m/s) /** $a$ **(m/s²)** |
|---|---|---|
| 0 | 0,10 | 0 / −0,40 |
| $\pi/4\,\mathrm{s}$ | 0 | −0,20 / 0 |
| $\pi/2\,\mathrm{s}$ | −0,10 | 0 / 0,40 |

La secuencia de un extremo al otro muestra que velocidad nula y aceleración nula ocurren en instantes distintos.

## 3.6 El camino inverso: acumular pequeños desplazamientos

Supongamos que conocemos una velocidad variable y queremos averiguar cuánto cambió la posición. Si la velocidad fuera constante durante un intervalo de duración $\Delta t$, el desplazamiento sería $\Delta x = v\Delta t$. En una gráfica velocidad–tiempo esto se representa mediante un rectángulo, cuya altura es $v$ y cuya base es $\Delta t$. Si la velocidad cambia, podemos dividir el intervalo en tramos, sumar los rectángulos aproximados y mejorar la aproximación reduciendo el ancho de los tramos.

La idea es la misma que se emplea para calcular áreas bajo una curva, pero hay una peculiaridad física fundamental: *si la velocidad tiene signo, la contribución de un intervalo puede ser negativa.* El área geométrica usual mide una superficie positiva; para el desplazamiento usamos un *área orientada*, positiva por encima del eje temporal y negativa por debajo. Esta distinción nos permitirá diferenciar el desplazamiento de la distancia recorrida.

La figura 3.2 muestra el modelo

$$v(t) = 4\,\mathrm{m/s} - (2\,\mathrm{m/s^2})t, \qquad 0 \le t \le 4\,\mathrm{s}.$$

El móvil avanza durante los dos primeros segundos y regresa durante los dos segundos siguientes. El área triangular del primer tramo es $+4\,\mathrm{m}$; la del segundo, $-4\,\mathrm{m}$. El desplazamiento total resulta cero, aunque el móvil sí haya recorrido una distancia positiva.

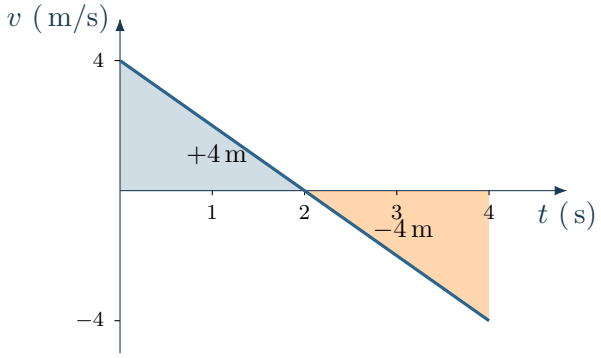



Figura 3.2: La suma de áreas *orientadas* da el desplazamiento. La suma de los módulos de las áreas da la distancia recorrida en este movimiento unidimensional.

**PROBLEMA RESUELTO 3.6 · Un recorrido que termina donde empezó**

Para la velocidad de la figura 3.2, calcular el desplazamiento y la distancia recorrida entre $t = 0$ y $t = 4\,\text{s}$.

*Resolución.* En el primer tramo el área triangular es

$$A_1 = \tfrac{1}{2}(2\,\text{s})(4\,\text{m/s}) = 4\,\text{m}.$$

En el segundo tramo la velocidad está por debajo del eje; el área orientada vale $A_2 = -4\,\text{m}$. Por tanto,

$$\Delta x = A_1 + A_2 = 0, \qquad d_{\text{recorrida}} = |A_1| + |A_2| = 8\,\text{m}.$$

El objeto vuelve a la coordenada de partida después de recorrer posiciones intermedias. La suma orientada representa el desplazamiento y la suma de longitudes de ambos tramos representa la distancia.

| **Tramo (s)** | **$\Delta x$ (m)** | **Distancia (m)** |
|---|---|---|
| 0 a 2 | 4 | 4 |
| 2 a 4 | $-4$ | 4 |
| Total | 0 | 8 |

El balance orientado cancela las contribuciones; la suma de longitudes conserva ambos tramos.

## 3.7 La integral: del dibujo a una expresión general

Denotemos por $\Delta t$ el ancho de cada intervalo temporal y por $v(t_i)$ la velocidad escogida dentro de él. La suma aproximada de desplazamientos es

$$\Delta x \approx \sum_{i=1}^{N} v(t_i)\,\Delta t.$$

La letra $\Sigma$ indica que debemos sumar un término por cada intervalo: para tres intervalos la expresión significa $v(t_1)\Delta t + v(t_2)\Delta t + v(t_3)\Delta t$. El índice $i$ cuenta los intervalos y $N$ es su número total. Si todos tienen igual ancho, $\Delta t = (t_b - t_a)/N$; aumentar $N$ reduce ese ancho manteniendo fijos los extremos del experimento.

Para una velocidad continua en el intervalo cerrado, al refinar las particiones las sumas se aproximan a un mismo valor, cualquiera que sea el punto elegido en cada tramo, siempre que

la anchura máxima de los tramos tienda a cero. La continuidad es una condición suficiente que cubre los modelos empleados aquí; el estudio de análisis amplía las clases de funciones integrables. Ese valor es la integral definida, y escribimos

$$x(t_b) - x(t_a) = \int_{t_a}^{t_b} v(t)\,dt. \tag{3.6}$$

Esta es la *integral definida* de la velocidad entre los dos tiempos. La notación reúne $v$ y $dt$ para expresar el límite de las sumas que construyen la acumulación. En problemas de física, las unidades de la integral se obtienen multiplicando las de la tasa por las de la variable: $(\,\mathrm{m/s})(\,\mathrm{s}) = \mathrm{m}$.

Más adelante escribiremos $[F(t)]_{t_a}^{t_b}$ como abreviatura de $F(t_b) - F(t_a)$: primero se evalúa en el extremo superior y después se resta el valor del inferior.

Una forma extraordinariamente útil de calcular integrales conecta acumulación y derivación. Si una función $F(t)$ cumple $F'(t) = v(t)$, entonces, por el *teorema fundamental del cálculo*, si $v$ es continua en $[t_a, t_b]$ y $F$ es una primitiva suya en ese intervalo,

$$\int_{t_a}^{t_b} v(t)\,dt = F(t_b) - F(t_a). \tag{3.7}$$

La demostración general del teorema corresponde al análisis. Hemos construido su necesidad e ilustramos cómo se utiliza. Esta aproximación física permite llegar a ella con preguntas comprensibles.

Para las funciones que más utilizaremos al principio, una regla operativa sencilla es

$$\int t^n\,dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1. \tag{3.8}$$

Para $n$ entero no negativo vale en toda la recta; para otros exponentes se requiere un intervalo donde la potencia sea real y derivable (por ejemplo, $t > 0$). Esta escritura representa una familia de *primitivas*: la derivada de cualquier miembro de la familia es $t^n$. La constante $C$ es necesaria porque todas las funciones que difieren en una constante tienen la misma derivada. A veces se escribe directamente la integral *definida*, con límites, y entonces la constante se cancela en la diferencia $F(t_b) - F(t_a)$.

**PROBLEMA RESUELTO 3.7 · Reconstruir la posición cuando conocemos la velocidad**

Una partícula tiene velocidad

$$v(t) = 2\,\mathrm{m/s} + (3\,\mathrm{m/s^2})t, \qquad 0 \le t \le 3\,\mathrm{s},$$

y en el instante inicial su posición es $x(0) = -5\,\mathrm{m}$. Hallar $x(t)$ y $x(3\,\mathrm{s})$.
*Resolución.* Una primitiva de la velocidad es

$$F(t) = (2\,\mathrm{m/s})t + \tfrac{1}{2}(3\,\mathrm{m/s^2})t^2.$$

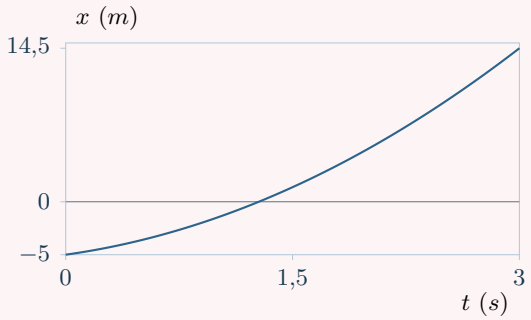
Como el cambio de posición es $F(t) - F(0)$, necesitamos la posición inicial para localizar la trayectoria en el eje:

$$\boxed{x(t) = -5\,\mathrm{m} + (2\,\mathrm{m/s})t + (1{,}5\,\mathrm{m/s^2})t^2.}$$

En tres segundos,

$$x(3\,\mathrm{s}) = -5\,\mathrm{m} + 6\,\mathrm{m} + 13{,}5\,\mathrm{m} = 14{,}5\,\mathrm{m}.$$

La comprobación derivando reproduce la velocidad dada. Obsérvese que el *desplazamiento* fue 19,5 m, mientras que la *posición final* es 14,5 m. El dato $x(0)$ fija la coordenada inicial y permite determinar esta última posición.




La curva parte de $-5\,\mathrm{m}$. El desplazamiento es el incremento vertical entre sus extremos.

**PROBLEMA RESUELTO 3.8 · Una integral también describe un depósito**

El caudal de entrada de agua en un depósito aumenta con el tiempo según

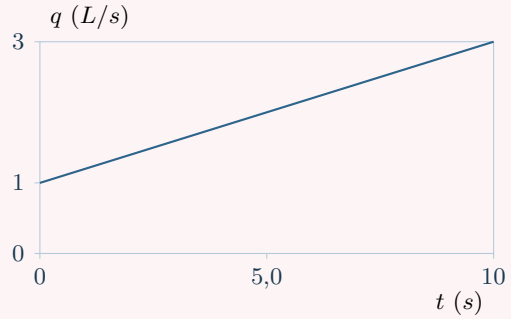
$$q(t) = 1\,\mathrm{L/s} + (0{,}2\,\mathrm{L/s^2})t.$$

Si inicialmente contiene 12 L, hallar su volumen a los 10 s, suponiendo que no existe salida ni rebose.

*Resolución.* El caudal representa volumen por unidad de tiempo. El agua añadida es

$$\begin{aligned}\Delta V &= \int_0^{10\,\mathrm{s}} q(t)\,dt \\ &= \Big[(1\,\mathrm{L/s})t + (0{,}1\,\mathrm{L/s^2})t^2\Big]_0^{10\,\mathrm{s}} \\ &= 10\,\mathrm{L} + 10\,\mathrm{L} = 20\,\mathrm{L}.\end{aligned}$$

El volumen final es $12 + 20 = 32$ L. Si el depósito admitiera menos de esa cantidad, el modelo sin rebose dejaría de describir correctamente la situación. El cálculo muestra tanto su utilidad como sus límites.




El área bajo el caudal tiene 10 L de rectángulo y 10 L de triángulo. Deben añadirse los 12 L iniciales.

## 3.8 Cuando los datos son discretos

En un experimento rara vez conocemos una función exacta de la velocidad. Tenemos mediciones en ciertos instantes. Por ejemplo, supongamos que se registran estos datos:

| $t$ (s) | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $v$ (m/s) | 0 | 2 | 3 | 3 |

Podemos aproximar el desplazamiento multiplicando cada intervalo temporal por una velocidad representativa. Si los datos fueran unidos por segmentos rectos, el área de cada intervalo sería un trapecio. Su fórmula es

$$\Delta x_i \approx \frac{v_i + v_{i+1}}{2}\,(t_{i+1} - t_i). \tag{3.9}$$

La regla del trapecio integra exactamente el modelo lineal que une cada par de datos. Su adecuación al movimiento depende de cuánto se aparte la velocidad real de ese segmento y de la incertidumbre de las mediciones. Una variación rápida puede ser lineal y quedar integrada exactamente; la curvatura y el muestreo determinan el error de interpolación. Nuevas observaciones permiten contrastar el modelo atribuido a cada intervalo.

**PROBLEMA RESUELTO 3.9 · Recuperar un desplazamiento de cuatro mediciones**

Estimar el desplazamiento total asociado a la tabla anterior mediante la regla de los trapecios y comparar con la estimación que usa la velocidad inicial de cada tramo.
*Resolución.* Los intervalos duran un segundo. Los tres trapecios contribuyen $(0+2)/2 = 1\,\text{m}$, $(2+3)/2 = 2{,}5\,\text{m}$ y $(3+3)/2 = 3\,\text{m}$. La estimación total es $6{,}5\,\text{m}$. Con rectángulos de altura igual a la velocidad inicial de cada tramo obtendríamos $(0+2+3)\,\text{m} = 5\,\text{m}$. Para conocer el desplazamiento exacto necesitaríamos conocer la velocidad entre las mediciones. Ambas respuestas son estimaciones asociadas a decisiones distintas de modelización.

| Tramo (s) | Trapecio (m) | Rectángulo izquierdo (m) |
|---|---|---|
| 0 a 1 | 1 | 0 |
| 1 a 2 | 2,5 | 2 |
| 2 a 3 | 3 | 3 |
| Suma | 6,5 | 5 |

La interpolación elegida fija la evolución que el modelo atribuye a cada intervalo; nuevas observaciones permiten contrastarla.

## 3.9 Una primera ecuación diferencial

Hasta aquí hemos usado una función conocida para obtener su derivada o su acumulación. En física es frecuente conocer directamente una *relación entre una función desconocida y su derivada*. Tal relación se llama *ecuación diferencial*. El ejemplo más sencillo es

$$\frac{dv}{dt} = a_0, \tag{3.10}$$

donde $a_0$ es una aceleración constante. Buscar $v(t)$ consiste en encontrar una función cuya derivada sea $a_0$. Por la regla de integración,

$$v(t) = a_0 t + C.$$

Si sabemos que $v(0) = v_0$, entonces $C = v_0$ y obtenemos

$$\boxed{v(t) = v_0 + a_0 t.} \tag{3.11}$$

Como también sabemos que $dx/dt = v(t)$, integramos de nuevo y, usando $x(0) = x_0$, obtenemos

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a_0 t^2.} \tag{3.12}$$

Las relaciones para el movimiento con aceleración constante han surgido de dos ideas: derivar y acumular. En el capítulo siguiente podremos estudiarlas como leyes de descripción del movimiento, con sus hipótesis y situaciones de aplicación, sin tener que memorizarlas antes de entenderlas. Cuando $a$ varía con el tiempo, debemos integrar su dependencia temporal.

**PROBLEMA RESUELTO 3.10 · La importancia de las condiciones iniciales**

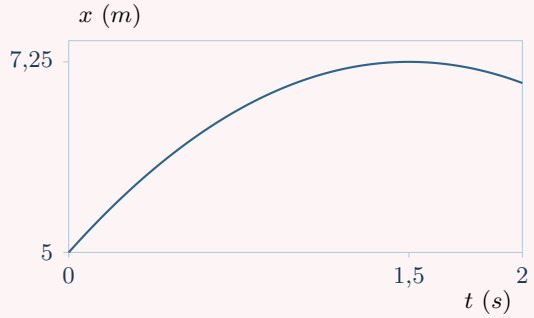
Una partícula se mueve sobre una recta con aceleración constante $a_0 = -2\,\mathrm{m/s^2}$. En $t = 0$, su posición es 5 m y su velocidad es 3 m/s. Obtener $v(t)$ y $x(t)$, y calcular la posición a los 2 s.

*Resolución.* Aplicando las ecuaciones (3.11) y (3.12),

$$v(t) = 3\,\mathrm{m/s} - (2\,\mathrm{m/s^2})t,$$

$$x(t) = 5\,\mathrm{m} + (3\,\mathrm{m/s})t - (1\,\mathrm{m/s^2})t^2.$$

Por tanto $x(2\,\mathrm{s}) = 5\,\mathrm{m} + 6\,\mathrm{m} - 4\,\mathrm{m} = 7\,\mathrm{m}$. Comprobamos que $v(0) = 3\,\mathrm{m/s}$, $x(0) = 5\,\mathrm{m}$ y que la segunda derivada de $x(t)$ es $-2\,\mathrm{m/s^2}$. Son tres controles independientes del cálculo. La posición es 7 m aunque el móvil ya haya cambiado de sentido antes de $t = 2\,\mathrm{s}$: su velocidad se anula a los 1,5 s.




El máximo está en $t = 1{,}5\,\mathrm{s}$ y $x = 7{,}25\,\mathrm{m}$. Al terminar, la coordenada es 7 m y la velocidad ya es negativa.

## 3.10 Qué hemos justificado y qué queda por demostrar

Una lectura rigurosa distingue las demostraciones establecidas de los resultados que se presentan para un uso inicial. Hemos definido operativamente la tasa media mediante un cociente finito y hemos *calculado* una derivada cuadrática estudiando la expresión incremental. Hemos motivado la integral mediante sumas de pequeños aportes, interpretado la acumulación en gráficos y usado un teorema matemático cuyo enunciado general requiere hipótesis. Hemos adoptado reglas para derivar funciones trigonométricas sin probarlas en toda generalidad. Cada afirmación posee un estatuto diferente.

La teoría de los números reales, la topología de la recta y las definiciones rigurosas de límite, continuidad e integrabilidad permiten después fundamentar esas operaciones sin depender de dibujos ni aproximaciones numéricas. Quien estudie matemáticas puras encontrará allí preguntas distintas, igualmente legítimas: ¿qué es exactamente un límite?, ¿qué condiciones garantizan la existencia de una integral?, ¿puede una función ser continua y no derivable? El encuentro con esa teoría será más fructífero si ya ha conocido problemas físicos que hacen necesarias tales ideas.

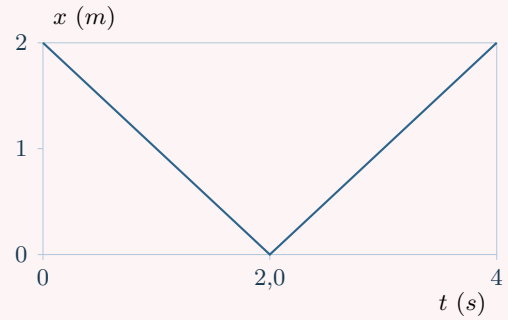
Para pasar a Cinemática basta una competencia conceptual firme: distinguir posición, velocidad y aceleración; saber que una derivada mide variación instantánea y que una integral acumula cantidades orientadas; reconocer la función, las unidades y el intervalo de validez. Las reglas simbólicas más amplias y las ecuaciones diferenciales preparan, además, para una lectura universitaria más exigente.

**PROBLEMA RESUELTO 3.11 · Una esquina y dos pendientes laterales**

Consideremos la posición idealizada $x(t) = c\,|t - t_0|$, donde $t_0 = 2\,\mathrm{s}$ y $c = 1\,\mathrm{m/s}$. ¿Cuál es la velocidad instantánea en $t = t_0$?
*Resolución.* Para tiempos anteriores a $t_0$ tenemos $x(t) = c(t_0 - t)$, cuya pendiente es $-c$. Para tiempos posteriores, $x(t) = c(t - t_0)$, cuya pendiente es $+c$. Justo en el instante de cambio, el cociente incremental vale

$$\frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h} = c\,\frac{|h|}{h} = \begin{cases} -c, & h < 0, \\ +c, & h > 0. \end{cases}$$

No existe un único valor al que se aproximen ambos lados; por ello la derivada en $t_0$ no existe. El dibujo representa una inversión instantánea del sentido de movimiento, útil como modelo geométrico a tramos, pero incompatible con una aceleración ordinaria finita en ese instante. No toda función continua es derivable.




Las pendientes laterales en la esquina valen $-1$ y $+1\,\mathrm{m/s}$. La posición es continua y las pendientes laterales son distintas.

## Ejercicios de práctica

Los siguientes problemas son originales y se ordenan por razonamiento requerido. Los niveles B, C y U significan respectivamente fundamento, consolidación y puente universitario, y orientan la profundidad del trabajo propuesto. Las soluciones íntegras aparecen inmediatamente después de la lista.

**EJERCICIO 3.1 · Una función con unidades (B)**

Un sensor entrega $x(t) = 2\,\mathrm{m} + (3\,\mathrm{m/s})t + (1\,\mathrm{m/s^2})t^2$, validada entre 0 y 5 s. Identifica la variable independiente, las unidades de los coeficientes, $x(2\,\mathrm{s})$ y por qué no se puede declarar válida en $t = 20\,\mathrm{s}$ sin información adicional.

**EJERCICIO 3.2 · Una ida y un regreso (B)**

Para $0 \le t \le 6\,\mathrm{s}$, la coordenada de un móvil es $x(t) = (12\,\mathrm{m/s})t - (2\,\mathrm{m/s^2})t^2$. Calcula la velocidad media entre 0 y 3 s, y el desplazamiento total entre 0 y 6 s. ¿El segundo resultado demuestra que el objeto estuvo inmóvil?

**EJERCICIO 3.3 · Construir una derivada (B)**

Para $x(t) = 5\,\text{m} - (3\,\text{m/s})t + (1\,\text{m/s}^2)t^2$, desarrolla el cociente $[x(t+h) - x(t)]/h$ y halla la velocidad instantánea en función de $t$. ¿Cuándo se anula?

**EJERCICIO 3.4 · Una piedra arrojada hacia arriba (C)**

La altura de una piedra, medida desde el punto de lanzamiento, obedece a $y(t) = (14\,\text{m/s})t - (5\,\text{m/s}^2)t^2$, para el movimiento ideal sin resistencia del aire. Halla la velocidad vertical, la aceleración, el instante de altura máxima, esa altura y el tiempo en que vuelve al nivel de lanzamiento.

**EJERCICIO 3.5 · Velocidad con signo (B)**

Entre 0 y 4 s se observa $v(t) = (2\,\text{m/s}^2)t - 4\,\text{m/s}$. Calcula el desplazamiento y la distancia recorrida. Realiza también un bosquejo de la gráfica velocidad–tiempo e identifica el cambio de sentido.

**EJERCICIO 3.6 · Triángulo y desplazamiento (B)**

En un intervalo $0 \le t \le 4\,\text{s}$ la velocidad es $v(t) = (2\,\text{m/s}^2)t$. Halla el desplazamiento usando únicamente la geometría de la gráfica y explica por qué la unidad del área representa una longitud.

**EJERCICIO 3.7 · Caudal constante (C)**

Un recipiente inicialmente tiene 5 L y entra agua a un caudal constante de 3 L/s durante 12 s, sin pérdidas. Calcula el volumen final mediante una integral. Verifica el resultado por aritmética elemental.

**EJERCICIO 3.8 · Carga y corriente (C)**

La corriente eléctrica en un conductor es $I(t) = 2\,\text{C/s} + (3\,\text{C/s}^2)t$ durante los primeros cuatro segundos. Si la carga neta transferida contabilizada hasta $t = 0$ era 1 C, ¿cuál será la carga acumulada hasta $t = 4\,\text{s}$? Distingue el valor inicial del incremento.

**EJERCICIO 3.9 · Cuatro trapecios (C)**

Se dispone de los siguientes datos de velocidad en instantes enteros:

| $t$ (s) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $v$ (m/s) | 0 | 1 | 4 | 5 | 8 |

Estima el desplazamiento con la regla de trapecios. ¿Qué suposición haces sobre el comportamiento entre mediciones?

**EJERCICIO 3.10 · Una secante cúbica (C)**

Sea $x(t) = (1\,\mathrm{m/s^3})t^3$. Calcula algebraicamente el cociente incremental y la velocidad instantánea en $t = 1\,\mathrm{s}$. Compara con la tasa media hacia delante usando $h = 0{,}1\,\mathrm{s}$.

**EJERCICIO 3.11 · Oscilación y unidades (C)**

Una partícula oscila como $x(t) = (0{,}10\,\mathrm{m})\cos[(2\,\mathrm{s^{-1}})t]$; el argumento del coseno se expresa en radianes. Obtén $v(t)$, $a(t)$, $v(0)$ y $a(0)$. Justifica dimensionalmente las amplitudes de velocidad y aceleración. Si se duplica $\omega$ manteniendo la amplitud de posición, ¿por qué factores cambian las amplitudes de velocidad y aceleración?

**EJERCICIO 3.12 · Una aceleración positiva puede frenar (B)**

Durante $0 \le t \le 3\,\mathrm{s}$ un cuerpo tiene velocidad $v(t) = -6\,\mathrm{m/s} + (2\,\mathrm{m/s^2})t$. Calcula su aceleración, su desplazamiento y la distancia recorrida. ¿Está aumentando su rapidez?

**EJERCICIO 3.13 · Aproximación numérica (C)**

Para $v(t) = (2\,\mathrm{m/s^2})t$ entre 0 y 2 s, estima el desplazamiento con rectángulos izquierdos de ancho 1 s y luego con ancho 0,5 s. Compara con la integral exacta y explica de qué lado quedan ambas estimaciones.

**EJERCICIO 3.14 · Una ecuación que aún necesita información (U)**

Un objeto tiene aceleración constante de $2\,\mathrm{m/s^2}$ y se encuentra en $x(0) = 10\,\mathrm{m}$. Obtén una familia de posibles funciones $x(t)$ y explica qué dato adicional sería necesario para predecir su posición a los 5 s. Expresa la respuesta en función de ese dato pendiente.

## Soluciones completas de los ejercicios

**SOLUCIÓN 3.1.**
La variable independiente es el tiempo $t$, medido en segundos, mientras que la variable dependiente es la coordenada $x$, expresada en metros. Cada término de una suma de posiciones debe tener dimensión de longitud. Por eso el término independiente se expresa en metros, el coeficiente de $t$ en metros por segundo y el de $t^2$ en metros por segundo cuadrado. Para el instante pedido:

$$x(2\,\mathrm{s}) = 2\,\mathrm{m} + 6\,\mathrm{m} + 4\,\mathrm{m} = 12\,\mathrm{m}.$$

El dato de que la fórmula fue validada solo entre 0 y 5 s impide garantizar su aplicación a 20 s. El valor calculado para ese tiempo es una extrapolación cuya validez física requiere pruebas adicionales.

**SOLUCIÓN 3.2.**
Calculamos posiciones antes de interpretar. La coordenada inicial es $x(0) = 0$ y a los tres segundos vale

$$x(3\,\mathrm{s}) = (12\,\mathrm{m/s})(3\,\mathrm{s}) - (2\,\mathrm{m/s^2})(3\,\mathrm{s})^2 = 18\,\mathrm{m}.$$

La velocidad media entre ambos instantes es $(18 - 0)\,\mathrm{m}/3\,\mathrm{s} = 6\,\mathrm{m/s}$. Al terminar el intervalo,

$$x(6\,\mathrm{s}) = 72\,\mathrm{m} - 72\,\mathrm{m} = 0,$$

de modo que el desplazamiento en los seis segundos es cero. Durante el trayecto pasó por otras posiciones: a los tres segundos estaba a 18 m del origen. Las posiciones intermedias describen el recorrido de ida y vuelta entre esos extremos iguales.

**SOLUCIÓN 3.3.**
El término constante de 5 m desaparece del incremento. Escribiendo $u = 3\,\mathrm{m/s}$ y $k = 1\,\mathrm{m/s^2}$ para aligerar el álgebra,

$$\begin{aligned}\frac{x(t+h) - x(t)}{h} &= \frac{-uh + k[(t+h)^2 - t^2]}{h} \\ &= -u + k(2t + h), \qquad h \neq 0.\end{aligned}$$

Al llevar $h$ a cero se obtiene

$$v(t) = -3\,\mathrm{m/s} + (2\,\mathrm{m/s^2})t.$$

La velocidad se anula cuando $t = (3\,\mathrm{m/s})/(2\,\mathrm{m/s^2}) = 1{,}5\,\mathrm{s}$. Para $t$ menores la velocidad es negativa; después es positiva. El móvil cambia de sentido en ese instante si el modelo es válido a ambos lados.

**SOLUCIÓN 3.4.**
Derivar una vez proporciona

$$v_y(t) = 14\,\mathrm{m/s} - (10\,\mathrm{m/s^2})t,$$

y la segunda derivada da $a_y = -10\,\mathrm{m/s^2}$. La altura es máxima cuando la velocidad se anula, siempre que el instante se encuentre en el intervalo de validez del movimiento. De $14 - 10t = 0$ resulta $t = 1{,}4\,\mathrm{s}$. Sustituyendo:

$$y(1{,}4\,\mathrm{s}) = 19{,}6\,\mathrm{m} - 9{,}8\,\mathrm{m} = 9{,}8\,\mathrm{m}.$$

Para volver al nivel inicial imponemos $y(t) = 0$ y factorizamos $t[(14\,\mathrm{m/s}) - (5\,\mathrm{m/s^2})t] = 0$. Las raíces son $t = 0$ (lanzamiento) y $t = 2{,}8\,\mathrm{s}$ (retorno). La simetría de los tiempos se obtiene bajo las hipótesis de aceleración constante y de origen y destino al mismo nivel.

**SOLUCIÓN 3.5.**
La velocidad es una recta que va de $-4\,\mathrm{m/s}$ en $t = 0$ a $+4\,\mathrm{m/s}$ en $t = 4\,\mathrm{s}$. Se anula en $t = 2\,\mathrm{s}$. Integrando,

$$\Delta x = \int_0^{4\,\mathrm{s}} \big[(2\,\mathrm{m/s^2})t - 4\,\mathrm{m/s}\big]\,dt = 16\,\mathrm{m} - 16\,\mathrm{m} = 0.$$

Entre 0 y 2 s la contribución es el área triangular negativa de módulo $\tfrac{1}{2}(2\,\mathrm{s})(4\,\mathrm{m/s}) = 4\,\mathrm{m}$. Entre 2 y 4 s la contribución es positiva y también mide 4 m. La distancia recorrida es la suma de módulos: 8 m. Un desplazamiento nulo puede corresponder a un recorrido no nulo.

**SOLUCIÓN 3.6.**

La velocidad aumenta linealmente de cero a $v(4\,\mathrm{s}) = 8\,\mathrm{m/s}$. La gráfica delimitada por los ejes y la recta es un triángulo de base $4\,\mathrm{s}$ y altura $8\,\mathrm{m/s}$. El desplazamiento es

$$\Delta x = \frac{1}{2}(4\,\mathrm{s})(8\,\mathrm{m/s}) = 16\,\mathrm{m}.$$

La unidad del producto es $(\mathrm{s})(\mathrm{m/s}) = \mathrm{m}$. En este intervalo la velocidad toma valores positivos o cero; por eso $|v(t)| = v(t)$ y las integrales de rapidez y velocidad dan el mismo valor: $16\,\mathrm{m}$. Con velocidad negativa, el desplazamiento tiene signo negativo mientras la distancia acumula su módulo, como muestra el regreso de e3-5.

**SOLUCIÓN 3.7.**

Definimos $V(t)$ como volumen. El caudal de entrada es su derivada, $dV/dt = q = 3\,\mathrm{L/s}$, mientras el agua permanece entrando al ritmo indicado. La acumulación en los doce segundos es

$$\Delta V = \int_0^{12\,\mathrm{s}} 3\,\mathrm{L/s}\,dt = 36\,\mathrm{L}.$$

Sumamos el volumen inicial: $V(12\,\mathrm{s}) = 5\,\mathrm{L} + 36\,\mathrm{L} = 41\,\mathrm{L}$. La comprobación aritmética $3\,\mathrm{L}$ por segundo multiplicado por doce segundos reproduce $36\,\mathrm{L}$. Esta coincidencia es razonable porque el caudal es constante.

**SOLUCIÓN 3.8.**

La corriente representa tasa de transferencia de carga, de modo que $dq/dt = I(t)$. Su integral entre cero y cuatro segundos determina la carga *adicional*:

$$\begin{aligned}\Delta q &= \int_0^{4\,\mathrm{s}} \left[2\,\mathrm{C/s} + (3\,\mathrm{C/s^2})t\right] dt \\ &= (2\,\mathrm{C/s})(4\,\mathrm{s}) + \tfrac{1}{2}(3\,\mathrm{C/s^2})(4\,\mathrm{s})^2 \\ &= 8\,\mathrm{C} + 24\,\mathrm{C} = 32\,\mathrm{C}.\end{aligned}$$

La cantidad acumulada desde el origen previo de conteo es $q(4\,\mathrm{s}) = 1\,\mathrm{C} + 32\,\mathrm{C} = 33\,\mathrm{C}$. La integral expresa el cambio de la magnitud; hallar su valor final requiere sumar el valor inicial.

**SOLUCIÓN 3.9.**

Cada intervalo dura $1\,\mathrm{s}$. Para el primer par de datos el trapecio tiene velocidades extremas $0$ y $1\,\mathrm{m/s}$ y representa un desplazamiento estimado de $0{,}5\,\mathrm{m}$. Los tres siguientes aportan

$$\frac{1+4}{2}\,\mathrm{m} = 2{,}5\,\mathrm{m}, \quad \frac{4+5}{2}\,\mathrm{m} = 4{,}5\,\mathrm{m}, \quad \frac{5+8}{2}\,\mathrm{m} = 6{,}5\,\mathrm{m}.$$

El total es $0{,}5 + 2{,}5 + 4{,}5 + 6{,}5 = 14\,\mathrm{m}$. El método supone que el comportamiento entre mediciones puede aproximarse mediante segmentos rectos en la gráfica velocidad–tiempo. Para certificar que $14\,\mathrm{m}$ sea el desplazamiento exacto necesitaríamos conocer la evolución entre las mediciones.

**SOLUCIÓN 3.10.**
Escribimos $k = 1\,\mathrm{m/s^3}$. Desarrollando el cubo,

$$\frac{x(t+h)-x(t)}{h} = k\frac{(t+h)^3 - t^3}{h} \\ = k(3t^2 + 3th + h^2), \qquad h \neq 0.$$

Al tomar el límite $h \to 0$ obtenemos $v(t) = 3kt^2$, de donde $v(1\,\mathrm{s}) = 3\,\mathrm{m/s}$. Para $h = 0{,}1\,\mathrm{s}$, la velocidad media hacia delante es

$$\frac{1{,}1^3 - 1^3}{0{,}1}\,\mathrm{m/s} = 3{,}31\,\mathrm{m/s}.$$

Es mayor que la instantánea porque la pendiente de $x(t) = kt^3$ está aumentando para estos tiempos. El cociente finito describe una media en un intervalo; el valor límite define la magnitud instantánea.

**SOLUCIÓN 3.11.**
Sea $A = 0{,}10\,\mathrm{m}$ y $\omega = 2\,\mathrm{s^{-1}}$, con $\omega t$ expresado en radianes. Usando la regla de derivación del coseno y la regla de la cadena:

$$v(t) = -A\omega\sin(\omega t) = -(0{,}20\,\mathrm{m/s})\sin(\omega t),$$

$$a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t) = -(0{,}40\,\mathrm{m/s^2})\cos(\omega t).$$

En $t = 0$, $\sin 0 = 0$ y $\cos 0 = 1$, luego $v(0) = 0$ y $a(0) = -0{,}40\,\mathrm{m/s^2}$. Las dimensiones de las amplitudes surgen de $[A\omega] = \mathrm{m/s}$ y $[A\omega^2] = \mathrm{m/s^2}$. El ángulo debe expresarse en radianes para usar estas reglas sin factores de conversión adicionales. Al sustituir $\omega$ por $2\omega$, $A\omega$ se duplica y $A\omega^2$ se cuadruplica. La amplitud $A$ de posición permanece fija.

**SOLUCIÓN 3.12.**
La derivada de la velocidad es la aceleración constante $a = +2\,\mathrm{m/s^2}$. En $t = 0$ la velocidad vale $-6\,\mathrm{m/s}$ y en $t = 3\,\mathrm{s}$ llega a cero; no cambia de signo dentro del intervalo abierto. El desplazamiento es

$$\Delta x = \int_0^{3\,\mathrm{s}} \left[-6\,\mathrm{m/s} + (2\,\mathrm{m/s^2})t\right] dt = -18\,\mathrm{m} + 9\,\mathrm{m} = -9\,\mathrm{m}.$$

Dado que la velocidad fue negativa todo el tiempo, la distancia recorrida es $|\Delta x| = 9\,\mathrm{m}$. La rapidez pasa de $6\,\mathrm{m/s}$ a cero, así que *disminuye*, pese a que la aceleración es positiva. Para decidir si un cuerpo gana o pierde rapidez debemos comparar los signos de la velocidad y de la aceleración.

**SOLUCIÓN 3.13.**
La suma izquierda aproxima cada tramo mediante la velocidad al *inicio*. Con paso $1\,\mathrm{s}$, los instantes de muestreo son $0$ y $1\,\mathrm{s}$, de modo que

$$\Delta x_{1\,\mathrm{s}} \approx (0 + 2)\,\mathrm{m/s} \cdot 1\,\mathrm{s} = 2\,\mathrm{m}.$$

Con paso $0{,}5\,\mathrm{s}$, las velocidades izquierdas son $0, 1, 2, 3\,\mathrm{m/s}$; por tanto

$$\Delta x_{0{,}5\,\mathrm{s}} \approx (0 + 1 + 2 + 3)\,\mathrm{m/s} \cdot 0{,}5\,\mathrm{s} = 3\,\mathrm{m}.$$

La integral exacta resulta

$$\Delta x = \int_0^{2\,\mathrm{s}} (2\,\mathrm{m/s^2})t\,dt = \left[(1\,\mathrm{m/s^2})t^2\right]_0^{2\,\mathrm{s}} = 4\,\mathrm{m}.$$

Ambas sumas subestiman porque la velocidad crece durante todos los tramos y tomamos el valor inicial. Reducir el paso mejoró el resultado, pero ninguna de las dos sumas es la integral exacta.

**SOLUCIÓN 3.14.**
Como $dv/dt = 2\,\mathrm{m/s^2}$, la primera integración produce $v(t) = v_0 + (2\,\mathrm{m/s^2})t$, con $v_0$ desconocida. Una segunda integración da

$$\boxed{x(t) = 10\,\mathrm{m} + v_0 t + (1\,\mathrm{m/s^2})t^2.}$$

Esta es una *familia* de movimientos, uno para cada velocidad inicial elegida. En $t = 5\,\mathrm{s}$,

$$x(5\,\mathrm{s}) = 35\,\mathrm{m} + v_0(5\,\mathrm{s}).$$

Para asignar un valor numérico único a la coordenada final necesitamos conocer $v_0$ o un dato equivalente, como otra posición en otro instante. La aceleración y la posición inicial deben acompañarse de una condición que fije la velocidad inicial.

## Diagnóstico de salida y puente hacia el capítulo 4

Para continuar, debes poder distinguir una tasa media de una instantánea, interpretar áreas orientadas y reconstruir una función con sus condiciones iniciales. Los ejercicios 3.3, 3.5, 3.7 y 3.14 permiten comprobar esas capacidades. Inténtalos sin consultar sus soluciones antes de resolver los controles siguientes.

**Tres controles de transferencia.** Conviene resolver estas preguntas breves en una hoja en blanco, indicando siempre unidades y justificación.

1. Si $v = 3\,\mathrm{m/s}$ durante $4\,\mathrm{s}$ y $x_0 = -5\,\mathrm{m}$, calcula por separado desplazamiento y posición final.
2. Si $v$ pasa de $-2\,\mathrm{m/s}$ a cero con $a > 0$, ¿crece la rapidez? Explica qué indica cada signo.
3. Si solo conoces $a(t)$, ¿puedes hallar una posición única? Identifica los datos que faltan.

**Contraste después del intento.** (1) $\Delta x = 12\,\mathrm{m}$ y $x_f = 7\,\mathrm{m}$. (2) La rapidez disminuye de $2\,\mathrm{m/s}$ a cero; la aceleración positiva cambia una velocidad negativa hacia cero. (3) Faltan velocidad y posición en un instante de referencia, o información equivalente.

**Criterio para avanzar.** Resuelve sin ayuda estos controles y los ejercicios 3.3, 3.5, 3.7 y 3.14. Si confundes posición y desplazamiento, reconstruye el problema 3.7; para el signo de la rapidez, el problema 3.4; para las condiciones iniciales, el ejercicio 3.14. Cambia después un dato y comprueba que puedes repetir el razonamiento sin copiar la solución.

# CAPÍTULO 4

# MOVIMIENTO EN UNA DIMENSIÓN


4.1 Antes de medir un movimiento: elegir la referencia . . . . . 61
4.2 Rapidez, velocidad y aceleración 62
4.3 Tres gráficas que cuentan una misma historia . . . . . 64
4.4 Movimiento rectilíneo uniforme 66
4.5 Aceleración constante: deducir antes de memorizar . . . . . 67
4.6 Caída libre y lanzamiento vertical: una misma convención . 70
4.7 Movimientos por tramos: conservar la información entre etapas 72
4.8 Qué podemos inferir realmente de las mediciones . . . . . 74
Ejercicios de práctica . . . . . 76
Soluciones completas de los ejercicios 78
Diagnóstico de salida . . . . . 80


Para predecir cuándo llegará un tren a una estación necesitamos precisar cuantitativamente qué significa que «va rápido». Necesitamos una posición de partida, una referencia para medirla y alguna información sobre la evolución del movimiento. Un problema físico comienza precisamente cuando convertimos una situación en preguntas cuantificables. Ahora utilizaremos el lenguaje construido en los capítulos anteriores para pasar de la descripción a las predicciones.

La *cinemática* describe la evolución de la posición, la velocidad y la aceleración de los cuerpos respecto de una referencia. En una dimensión, esas magnitudes permiten reconstruir el movimiento sobre una recta. La dinámica relacionará después sus cambios con las interacciones entre cuerpos. Revisaremos el significado físico de cada derivada y de cada integral que aparezca.

**Una distinción que utilizaremos siempre**

Una velocidad negativa describe una orientación respecto del eje elegido. Para saber si aumenta o disminuye la rapidez debemos compararla con la aceleración.

## 4.1 Antes de medir un movimiento: elegir la referencia

En una carretera recta elegimos un origen $O$, una dirección positiva y un reloj. La *posición* $x(t)$ es la coordenada del cuerpo en cada instante. Una coordenada negativa sitúa al cuerpo a un lado del origen elegido. Al cambiar el origen, los números describen la misma situación física desde una referencia distinta. La descripción del movimiento requiere especificar una referencia.

La *partícula* de nuestros modelos representa un objeto cuya extensión tiene una influencia despreciable en la cuestión planteada. Para calcular cuánto tarda un tren en atravesar completamente un túnel debemos incluir su longitud; al estudiar la posición de su centro de masa durante un trayecto largo puede resultar razonable la aproximación de partícula.

Distinguiremos *instante* de *intervalo*: $t_0$ nombra la lectura inicial del reloj y $\Delta t = t_f - t_0$ el tiempo transcurrido. En los problemas usaremos $t$ para el tiempo contado desde el instante indicado. Una descripción bien definida exige también señalar qué intervalo de tiempos abarca el modelo.

**PROBLEMA RESUELTO 4.1 · Ir, volver y distinguir dos longitudes**

Una persona parte de $x = -30\,\text{m}$, camina hasta $x = +20\,\text{m}$ y regresa hasta $x = -10\,\text{m}$. Hallar el desplazamiento y la distancia recorrida.
*Resolución.* El desplazamiento es la diferencia entre las posiciones final e inicial:

$$\Delta x = x_f - x_0 = (-10) - (-30) = +20\,\text{m}.$$

La distancia es la longitud de todo el recorrido. El primer tramo mide $|20 - (-30)| = 50\,\text{m}$, y el segundo $|-10-20| = 30\,\text{m}$. Por tanto, $s = 80\,\text{m}$. La persona se encuentra veinte metros a la derecha de su posición inicial, aunque recorrió ochenta metros. El desplazamiento tiene signo en nuestro eje; la distancia es no negativa.

| **Etapa** | $x_i \to x_f$ **(m)** | **Longitud (m)** |
|---|---|---|
| Ida | $-30 \to 20$ | 50 |
| Regreso | $20 \to -10$ | 30 |
| Balance | $-30 \to -10$ | $\Delta x = +20$ |

Las dos primeras filas conservan el camino y suman 80 m. La última compara únicamente los extremos.

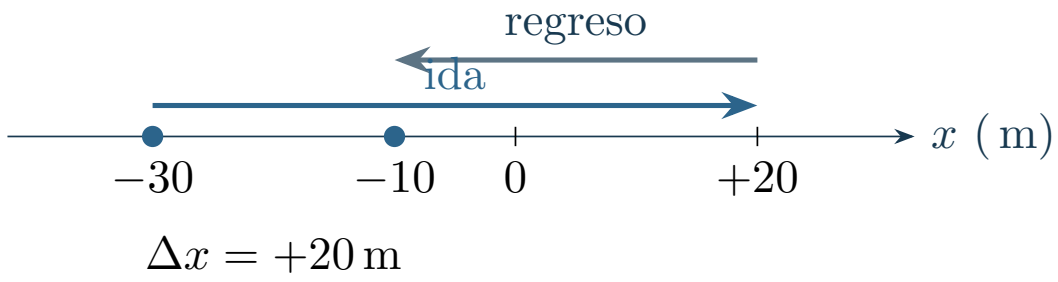



Figura 4.1: Un recorrido de dos tramos sobre un eje orientado. La suma de las longitudes es distinta del desplazamiento neto.

## 4.2 Rapidez, velocidad y aceleración

La *velocidad media* es la razón entre el desplazamiento y la duración:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_f) - x(t_i)}{t_f - t_i}. \tag{4.1}$$

En cambio, la *rapidez media* relaciona la distancia total recorrida con el mismo intervalo: $\bar{r} = s/\Delta t$. Si el movimiento cambia de sentido, estas dos magnitudes no coinciden en general. El valor absoluto de la velocidad media coincide con la rapidez media cuando se mantiene el sentido del movimiento durante el intervalo.

Para conocer la velocidad *instantánea*, reducimos el intervalo sobre el cual calculamos la razón. En el lenguaje del capítulo 3:

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = \frac{dx}{dt}. \tag{4.2}$$

La *rapidez instantánea* es $|v(t)|$. La aceleración media mide el cambio de velocidad por unidad de tiempo, $\bar{a} = \Delta v/\Delta t$; cuando existe su límite, la aceleración instantánea es

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}. \tag{4.3}$$

La igualdad con la segunda derivada requiere que las derivadas indicadas existan. La velocidad se mide en m/s y la aceleración en m/s$^2$. En una dimensión, la velocidad y la aceleración pueden ser positivas, nulas o negativas según el eje y el movimiento. La rapidez, igual a $|v(t)|$, toma valores positivos o cero.

**PROBLEMA RESUELTO 4.2 · La velocidad media puede ocultar el recorrido**

La persona del problema 4.1 realiza todo el trayecto en 40 s. Encontrar su velocidad media y su rapidez media.

*Resolución.* Usando los resultados distintos del problema anterior,

$$\bar{v} = \frac{+20\,\text{m}}{40\,\text{s}} = +0{,}50\,\text{m/s}, \qquad \bar{r} = \frac{80\,\text{m}}{40\,\text{s}} = 2{,}0\,\text{m/s}.$$

Estas dos medias del viaje completo admiten distintas evoluciones de la velocidad instantánea. Para calcular la velocidad media de cada tramo necesitaríamos su duración. Las posiciones inicial y final fijan el desplazamiento; la distancia total requiere además información sobre el camino.

| **Magnitud** | **Numerador / tiempo** | **Resultado** |
|---|---|---|
| Velocidad media | $+20\,\text{m}/40\,\text{s}$ | $+0{,}50\,\text{m/s}$ |
| Rapidez media | $80\,\text{m}/40\,\text{s}$ | $2{,}0\,\text{m/s}$ |

El denominador es idéntico; cambiar desplazamiento por distancia cambia la magnitud física que se obtiene.

**PROBLEMA RESUELTO 4.3 · Aceleración positiva y disminución de rapidez**

La posición de un cuerpo se modela por

$$x(t) = 3\,\mathrm{m} - (2\,\mathrm{m/s})t + (0{,}5\,\mathrm{m/s^2})t^2, \qquad 0 \le t \le 4\,\mathrm{s}.$$

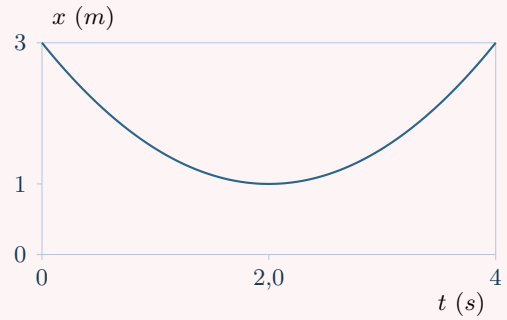
¿Cuándo cambia de sentido? ¿Qué desplazamiento y qué distancia efectúa?
*Resolución.* Derivamos, conservando las unidades de los coeficientes:

$$v(t) = -2\,\mathrm{m/s} + (1\,\mathrm{m/s^2})t, \qquad a(t) = +1\,\mathrm{m/s^2}.$$

El cambio de sentido ocurre en $t = 2\,\mathrm{s}$, donde $v = 0$ y pasa de negativa a positiva. Las posiciones son $x(0) = 3\,\mathrm{m}$, $x(2\,\mathrm{s}) = 1\,\mathrm{m}$ y $x(4\,\mathrm{s}) = 3\,\mathrm{m}$. De aquí,

$$\Delta x = x(4\,\mathrm{s}) - x(0) = 0, \qquad s = |1-3| + |3-1| = 4\,\mathrm{m}.$$

Durante los primeros dos segundos el cuerpo se mueve en la dirección negativa mientras su aceleración es positiva; su rapidez disminuye. Después crece. Para decidir si aumenta la rapidez debemos comparar el signo de $a$ con el de la velocidad.



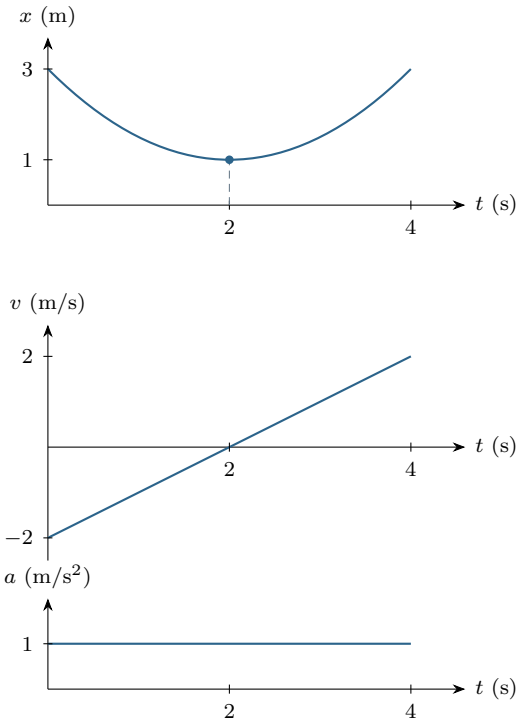

La pendiente negativa se anula en 2 s y luego se vuelve positiva. La posición final coincide con la inicial, pero hay recorrido.

## 4.3 Tres gráficas que cuentan una misma historia

Las gráficas de posición, velocidad y aceleración frente al tiempo se relacionan de dos modos. La pendiente de la curva $x(t)$ es $v(t)$ y la pendiente de $v(t)$ es $a(t)$, cuando existen las derivadas. La acumulación de valores de $v$ durante un intervalo, contando sus signos, proporciona el desplazamiento:

$$\Delta x = \int_{t_i}^{t_f} v(t)\,dt, \qquad s = \int_{t_i}^{t_f} |v(t)|\,dt. \tag{4.4}$$

La segunda integral da la distancia recorrida cuando la posición es suficientemente regular para esta formulación. De modo análogo, $\Delta v = \int a(t)\,dt$. Todas estas relaciones necesitan atender al intervalo temporal y a posibles cambios de sentido.




Las tres gráficas corresponden al problema 4.3, con la misma escala temporal. En $t = 2\,\mathrm{s}$ la posición es mínima y la velocidad cruza cero; la aceleración permanece positiva. Cada eje vertical tiene sus propias unidades.

### PROBLEMA RESUELTO 4.4 · De una tabla a un modelo de movimiento

Una medición entrega $x(0) = 0\,\mathrm{m}$, $x(1) = 2\,\mathrm{m}$, $x(2) = 8\,\mathrm{m}$ y $x(3) = 18\,\mathrm{m}$, con tiempos en segundos. Calcular las tres velocidades medias sucesivas y proponer *un* modelo sencillo compatible con los datos.

*Resolución.* En intervalos consecutivos de $1\,\mathrm{s}$, las velocidades medias son 2, 6 y $10\,\mathrm{m/s}$. La secuencia sugiere un cambio de velocidad uniforme. El modelo $x(t) = (2\,\mathrm{m/s^2})t^2$ reproduce las cuatro posiciones y tiene $v(t) = (4\,\mathrm{m/s^2})t$ y $a = 4\,\mathrm{m/s^2}$. Esos cuatro datos son compatibles también con otros movimientos que pasan por las mismas posiciones en los instantes medidos. Hemos construido un modelo contrastable, cuya elección puede afinarse con nuevas mediciones.

| **Intervalo (s)** | $\Delta x$ **(m)** | $\bar{v}$ **(m/s)** |
|---|---|---|
| 0 a 1 | 2 | 2 |
| 1 a 2 | 6 | 6 |
| 2 a 3 | 10 | 10 |

Los aumentos de $4\,\mathrm{m/s}$ entre velocidades medias sugieren el modelo cuadrático; otras funciones también pueden coincidir con esos datos.

**PROBLEMA RESUELTO 4.5 · Desplazamiento y distancia bajo el eje**

Durante $0 \le t \le 5\,\mathrm{s}$ la velocidad vale

$$v(t) = 6\,\mathrm{m/s} - (2\,\mathrm{m/s^2})t.$$

Determinar el desplazamiento y la distancia recorrida.
*Resolución.* La velocidad se anula en $t = 3\,\mathrm{s}$ y cambia de positiva a negativa. La integral con signo da

$$\Delta x = \int_0^{5\,\mathrm{s}} v(t)\,dt = 6\,\mathrm{m/s}(5\,\mathrm{s}) - (1\,\mathrm{m/s^2})(5\,\mathrm{s})^2 = 5\,\mathrm{m}.$$

La distancia requiere sumar magnitudes de las áreas antes y después del cruce:

$$s = \frac{1}{2}(3\,\mathrm{s})(6\,\mathrm{m/s}) + \frac{1}{2}(2\,\mathrm{s})(4\,\mathrm{m/s}) = 9\,\mathrm{m} + 4\,\mathrm{m} = 13\,\mathrm{m}.$$

Un desplazamiento positivo pequeño puede coexistir con una distancia mucho mayor.

| Tramo (s) | Área orientada (m) | Longitud (m) |
|---|---|---|
| 0 a 3 | 9 | 9 |
| 3 a 5 | −4 | 4 |
| Total | 5 | 13 |

El corte en $v = 0$ separa los sentidos del movimiento. El gráfico siguiente sitúa las dos áreas.

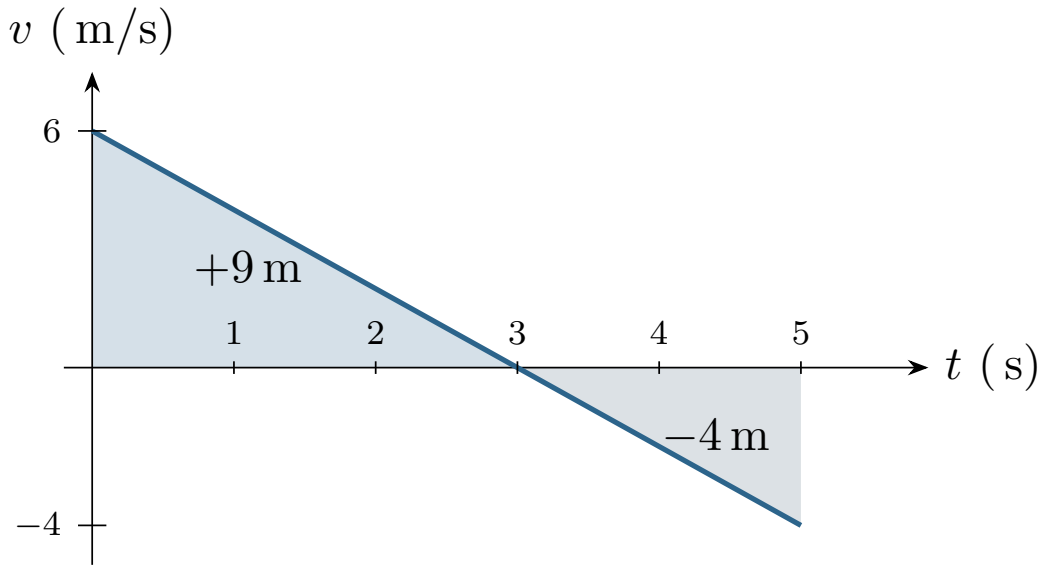



Figura 4.2: El área orientada bajo $v(t)$ suma $+9\,\mathrm{m}$ y $-4\,\mathrm{m}$. La distancia suma $9\,\mathrm{m}$ y $4\,\mathrm{m}$ sin cancelar tramos.

## 4.4 Movimiento rectilíneo uniforme: posición inicial y encuentros

Si la velocidad es constante, entonces $a = 0$ y la posición evoluciona linealmente:

$$x(t) = x_0 + v(t - t_0). \tag{4.5}$$

Una expresión como $x = vt$ es solamente el caso particular $x_0 = 0$ y $t_0 = 0$. La velocidad puede ser negativa aunque el movimiento sea uniforme. En una gráfica posición-tiempo, su signo coincide

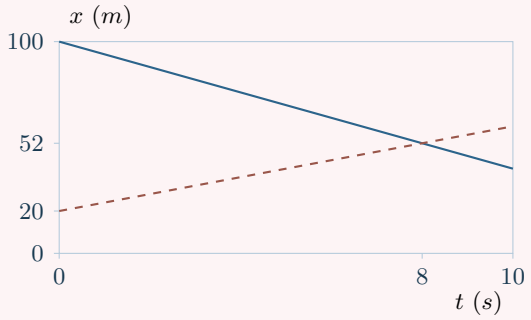
con el de la pendiente. Podemos elegir el origen en cualquier punto y expresar respecto de él la posición inicial.

**PROBLEMA RESUELTO 4.6 · Dos móviles que se encuentran en un eje**

Dos bicicletas se mueven en sentidos contrarios. En $t = 0$, A está en $x_A = 100\,\text{m}$ y tiene velocidad constante $-6\,\text{m/s}$; B está en $x_B = 20\,\text{m}$ con velocidad constante $+4\,\text{m/s}$. Hallar el instante y la posición del encuentro.
*Resolución.* Escribimos una ecuación para cada objeto *en la misma referencia*:

$$x_A(t) = 100\,\text{m} - (6\,\text{m/s})t, \qquad x_B(t) = 20\,\text{m} + (4\,\text{m/s})t.$$

El encuentro ocurre cuando las posiciones son iguales: $100 - 6t = 20 + 4t$ al medir las distancias en metros y $t$ en segundos. Entonces $10t = 80$, de donde $t = 8\,\text{s}$. Al sustituir en cualquiera de las dos leyes resulta $x = 52\,\text{m}$. Verificamos: A avanzó 48 m hacia la izquierda desde 100; B avanzó 32 m hacia la derecha desde 20. Sus recorridos suman los 80 m de separación inicial.




Línea azul de trazo continuo: A. Línea terracota de trazos: B. La intersección corresponde a $t = 8\,\text{s}$ y $x = 52\,\text{m}$.

## 4.5 Aceleración constante: deducir antes de memorizar

Una aceleración constante $a$ significa que la velocidad cambia linealmente con el tiempo. Integrar $dv/dt = a$ entre $t_0$ y $t$ da

$$v(t) = v_0 + a(t - t_0). \tag{4.6}$$

Al integrar nuevamente, usando $dx/dt = v$, obtenemos

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2. \tag{4.7}$$

Estas dos expresiones requieren los valores iniciales $x_0$ y $v_0$. La relación

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \tag{4.8}$$

puede obtenerse sin dividir por la aceleración. Llamemos $u = t - t_0$. De la ecuación de velocidad, $v - v_0 = au$, y de la posición,

$$2a(x - x_0) = 2av_0u + a^2u^2 = (v - v_0)(2v_0 + v - v_0) = v^2 - v_0^2.$$

Esta deducción también admite $a = 0$; en ese caso solo afirma $v^2 = v_0^2$, mientras que el modelo completo impone $v = v_0$. La relación contiene cuadrados de velocidades; el signo de $v$ debe inferirse del problema y de las condiciones iniciales. Las fórmulas solo describen el intervalo donde $a$ es efectivamente constante.

### PROBLEMA RESUELTO 4.7 · Reconstruir un movimiento con condiciones iniciales

Un móvil comienza con $x_0 = -5\,\text{m}$, $v_0 = +4\,\text{m/s}$ y aceleración constante $a = +2\,\text{m/s}^2$. Hallar la posición y la velocidad a los 3 s.
*Resolución.* Con $t_0 = 0$,

$$v(3\,\text{s}) = 4\,\text{m/s} + (2\,\text{m/s}^2)(3\,\text{s}) = 10\,\text{m/s},$$

$$x(3\,\text{s}) = -5\,\text{m} + (4\,\text{m/s})(3\,\text{s}) + \frac{1}{2}(2\,\text{m/s}^2)(3\,\text{s})^2 = 16\,\text{m}.$$

El desplazamiento es 21 m; 16 m es la coordenada final respecto del origen. También podemos comprobar el desplazamiento usando la velocidad media $(4+10)/2 = 7\,\text{m/s}$, válida aquí para aceleración constante: $7\,\text{m/s}\cdot 3\,\text{s} = 21\,\text{m}$.

| Instante (s) | $x$ (m) | $v$ (m/s) |
|---|---|---|
| 0 | −5 | 4 |
| 1 | 0 | 6 |
| 2 | 7 | 8 |
| 3 | 16 | 10 |

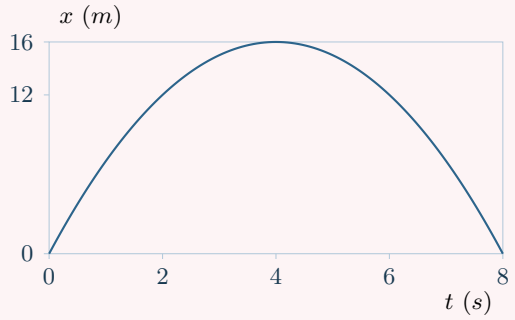
Los incrementos de posición crecen en intervalos iguales; los incrementos de velocidad son constantes.

### PROBLEMA RESUELTO 4.8 · Una posición se alcanza dos veces

Un cuerpo describe $x(t) = (8\,\text{m/s})t - (1\,\text{m/s}^2)t^2$, para $0 \le t \le 8\,\text{s}$. ¿En qué instantes ocupa $x = 12\,\text{m}$ y con qué velocidades?
*Resolución.* Al medir el tiempo numéricamente en segundos, resolver $8t - t^2 = 12$ equivale a $t^2 - 8t + 12 = 0$, cuyas soluciones son $t = 2$ y $t = 6$. Así, los instantes son 2 s y 6 s, ambos pertenecientes al dominio físico. Como

$$v(t) = 8\,\text{m/s} - (2\,\text{m/s}^2)t,$$

las velocidades correspondientes son $+4\,\text{m/s}$ y $-4\,\text{m/s}$. El cuerpo llega a la misma coordenada mientras avanza y, después de invertir su marcha en $t = 4\,\text{s}$, vuelve a pasar por ella. Descartar mecánicamente una de las raíces perdería información real sobre el movimiento.



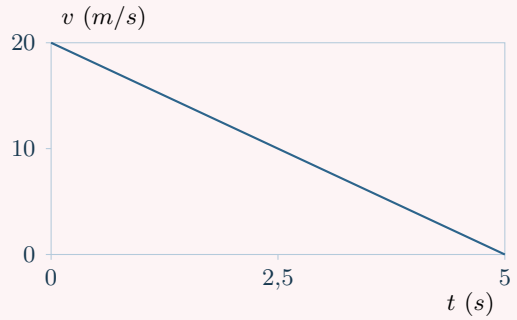

La altura gráfica $x = 12\,\text{m}$ corta la parábola a los 2 y 6 s; las pendientes en los cruces tienen sentidos opuestos.

### PROBLEMA RESUELTO 4.9 · El frenado y la distancia necesaria para detenerse

Un automóvil avanza a $20\,\mathrm{m/s}$ y sufre una desaceleración constante de $4\,\mathrm{m/s^2}$, dirigida en contra del movimiento. ¿Qué distancia recorre antes de detenerse?
*Resolución.* Elegimos positiva la marcha inicial: $v_0 = 20\,\mathrm{m/s}$ y $a = -4\,\mathrm{m/s^2}$. En el instante en que se detiene $v = 0$. Aplicando la relación independiente del tiempo,

$$0 = (20\,\mathrm{m/s})^2 + 2(-4\,\mathrm{m/s^2})\,\Delta x, \qquad \Delta x = 50\,\mathrm{m}.$$

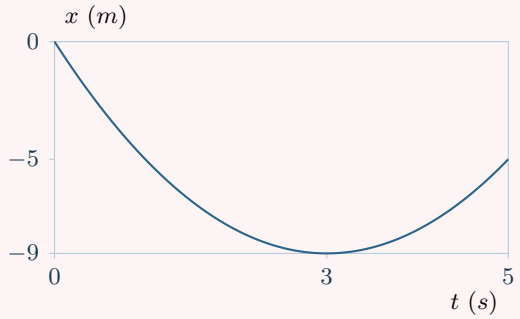
La duración es $t = -(v_0/a) = 5\,\mathrm{s}$, y la verificación $\bar{v} = (20+0)/2 = 10\,\mathrm{m/s}$ da $\Delta x = 50\,\mathrm{m}$. Este modelo describe el frenado solo *hasta detenerse*. La prolongación matemática de la aceleración negativa más allá del reposo predice un retroceso; describir la acción posterior de los frenos requiere examinar cómo cambia la interacción al detenerse el automóvil.




El modelo se interrumpe al detenerse. El triángulo de base $5\,\mathrm{s}$ y altura $20\,\mathrm{m/s}$ representa los $50\,\mathrm{m}$ de frenado.

### PROBLEMA RESUELTO 4.10 · Una aceleración que se opone al movimiento solo al principio

Un cuerpo comienza en $x_0 = 0$ con $v_0 = -6\,\mathrm{m/s}$ y aceleración constante $a = +2\,\mathrm{m/s^2}$. Analizar el movimiento hasta $t = 5\,\mathrm{s}$.
*Resolución.* Tenemos $v(t) = -6\,\mathrm{m/s} + (2\,\mathrm{m/s^2})t$. En $t = 3\,\mathrm{s}$ se anula la velocidad; allí $x = -6(3)+3^2 = -9\,\mathrm{m}$ al usar segundos y metros. En $t = 5\,\mathrm{s}$ la posición es $x = -6(5)+5^2 = -5\,\mathrm{m}$ y la velocidad $+4\,\mathrm{m/s}$. El desplazamiento neto vale $-5\,\mathrm{m}$, pero la distancia es $9+4 = 13\,\mathrm{m}$. Entre 0 y $3\,\mathrm{s}$ disminuye la rapidez, y entre 3 y $5\,\mathrm{s}$ aumenta. Es preciso comparar el signo de $a$ con el de $v$.




La coordenada disminuye hasta $-9\,\mathrm{m}$ y luego crece hasta $-5\,\mathrm{m}$. Los dos tramos miden 9 y $4\,\mathrm{m}$.

## 4.6 Caída libre y lanzamiento vertical: una misma convención

En regiones suficientemente pequeñas cerca de la superficie terrestre, podemos aproximar la aceleración gravitacional como constante y vertical, con magnitud $g \approx 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$. Elegiremos positiva la dirección vertical hacia arriba. Entonces $a_y = -g$ para un objeto sometido solo a su peso, despreciando la resistencia del aire. Su posición y velocidad se escriben

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2, \qquad v_y(t) = v_{0y} - gt. \tag{4.9}$$

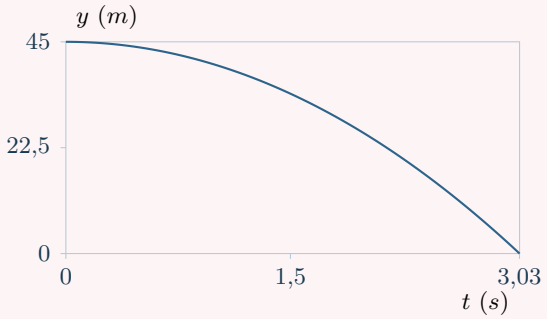
En la cumbre de un lanzamiento vertical, la velocidad instantánea puede ser cero sin que la aceleración sea cero. La aceleración gravitacional continúa dirigida hacia abajo antes, durante y después de ese instante. La altura de referencia puede escogerse libremente, siempre que se respete de principio a fin.

**PROBLEMA RESUELTO 4.11 · Una piedra soltada desde una altura conocida**

Una piedra se suelta desde 45 m de altura. Despreciando el aire y usando $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$, estimar el tiempo de caída y la velocidad justo antes del impacto.
*Resolución.* Con el eje vertical positivo hacia arriba, si $y_0 = 45\,\mathrm{m}$, $v_{0y} = 0$ y el suelo está en $y = 0$, la condición de impacto es $0 = 45\,\mathrm{m} - \tfrac{1}{2}gt^2$. Así,

$$t = \sqrt{\frac{2(45\,\mathrm{m})}{9{,}8\,\mathrm{m/s^2}}} \approx 3{,}03\,\mathrm{s}.$$

Se escoge la raíz positiva porque contamos el tiempo desde la liberación. La velocidad al impacto es $v_y = -gt \approx -29{,}7\,\mathrm{m/s}$; su *rapidez* es 29,7 m/s. Si el cuerpo tuviera una resistencia del aire apreciable, las predicciones cambiarían.




El eje vertical es altura y el horizontal es tiempo. La curva termina justo antes del impacto, aproximadamente a los 3,03 s.

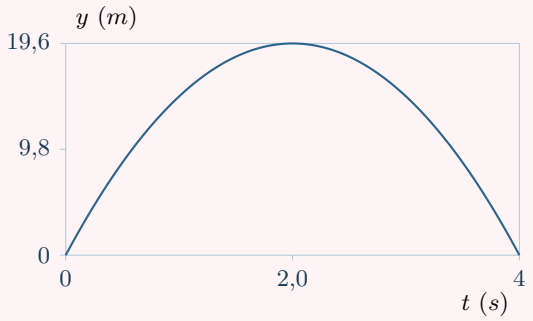
**PROBLEMA RESUELTO 4.12 · Altura máxima y regreso al mismo nivel**

Una pelota se lanza verticalmente hacia arriba desde $y_0 = 0$ con $v_{0y} = 19{,}6\,\text{m/s}$, y se desprecia la resistencia del aire. Usa $g = 9{,}8\,\text{m/s}^2$. Encontrar el tiempo para alcanzar la altura máxima, esa altura y el instante en que vuelve al nivel inicial.

*Resolución.* En la altura máxima $v_y = 0$, por lo que $t_{\text{máx}} = v_{0y}/g = 2{,}0\,\text{s}$. Sustituimos en la posición:

$$y_{\text{máx}} = (19{,}6\,\text{m/s})(2\,\text{s}) - \frac{1}{2}(9{,}8\,\text{m/s}^2)(2\,\text{s})^2 = 19{,}6\,\text{m}.$$

Al igualar $y(t) = 0$, la ecuación se factoriza como $t(v_{0y} - \frac{1}{2}gt) = 0$. La primera raíz $t = 0$ es el lanzamiento; la segunda, $t = 2v_{0y}/g = 4\,\text{s}$, es el retorno. Esta simetría temporal solo es válida con aceleración constante, igual nivel de partida y llegada, y sin resistencia del aire.




Con $g = 9{,}8\,\text{m/s}^2$ la cumbre divide en dos partes iguales los 4 s de vuelo hasta el mismo nivel.

**PROBLEMA RESUELTO 4.13 · Lanzamiento desde una terraza**

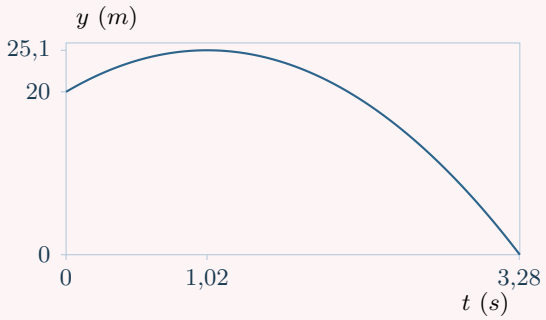
Desde una terraza situada a 20 m del suelo se lanza verticalmente una pelota a +10 m/s. Encontrar cuándo llega al suelo, con $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$.
*Resolución.* La condición de llegada $y = 0$ conduce a

$$0 = 20\,\mathrm{m} + (10\,\mathrm{m/s})t - (4{,}9\,\mathrm{m/s^2})t^2.$$

Es una cuadrática cuyos tiempos son

$$t = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 392}}{9{,}8}\,\mathrm{s} = \frac{10 \pm \sqrt{492}}{9{,}8}\,\mathrm{s}.$$

Solo la raíz positiva representa un instante posterior al lanzamiento: $t \approx 3{,}28\,\mathrm{s}$. La velocidad de impacto es $v_y = 10 - 9{,}8t \approx -22{,}2\,\mathrm{m/s}$. La raíz negativa representa un instante de la parábola extrapolada anterior al origen temporal elegido; el impacto futuro corresponde a la raíz positiva.




La pelota primero gana altura; la llegada al suelo ocurre en la rama descendente. Solo se representa el dominio futuro hasta el impacto.

## 4.7 Movimientos por tramos: conservar la información entre etapas

Para decidir cómo resolver, conviene empezar por la información disponible. Una velocidad constante permite relacionar directamente posición y tiempo; una aceleración constante exige además la velocidad inicial. Si no aparece el tiempo entre los datos ni entre las incógnitas, la relación entre $v^2$ y $x - x_0$ puede evitar calcularlo. Cuando se conoce una función $a(t)$ variable, hay que recuperar primero $v(t)$ y después $x(t)$, usando ambas condiciones iniciales. Esta elección del modelo precede a la sustitución de números.

En muchos problemas el movimiento cambia de régimen: un vehículo acelera, mantiene después una rapidez y finalmente frena. Cada etapa debe emplear el valor de $a$ que le corresponde. Si el cuerpo sigue una trayectoria continua sin saltos de posición, la posición final de una etapa es la inicial de la siguiente. En ausencia de un impulso idealizado o de una discontinuidad especificada, también mantenemos continua la velocidad. Lo que puede cambiar bruscamente en un modelo por tramos es la aceleración, aunque las fuerzas reales no siempre lo hagan instantáneamente.

**PROBLEMA RESUELTO 4.14 · Acelerar y luego frenar sin detenerse**

Un cuerpo comienza con $x_0 = 0$ y $v_0 = 1\,\mathrm{m/s}$. Su aceleración vale $+2\,\mathrm{m/s^2}$ durante los primeros $3\,\mathrm{s}$ y $-1\,\mathrm{m/s^2}$ durante los siguientes $4\,\mathrm{s}$. Encontrar $x$ y $v$ al finalizar cada tramo.
*Resolución.* En la primera etapa,

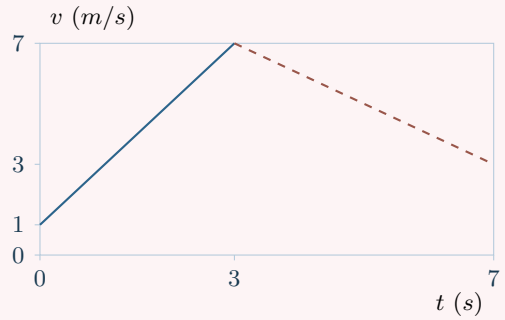
$$v_1 = 1 + (2)(3) = 7\,\mathrm{m/s}, \qquad x_1 = 0 + (1)(3) + \tfrac{1}{2}(2)(3)^2 = 12\,\mathrm{m},$$

con unidades SI implícitas en los factores numéricos. En la segunda etapa usamos $\tau = t - 3\,\mathrm{s}$, con $0 \le \tau \le 4\,\mathrm{s}$, y las *condiciones de enlace* $x(\tau = 0) = 12\,\mathrm{m}$ y $v(\tau = 0) = 7\,\mathrm{m/s}$:

$$v_2 = 7\,\mathrm{m/s} - (1\,\mathrm{m/s^2})(4\,\mathrm{s}) = 3\,\mathrm{m/s},$$

$$x_2 = 12\,\mathrm{m} + (7\,\mathrm{m/s})(4\,\mathrm{s}) - \tfrac{1}{2}(1\,\mathrm{m/s^2})(4\,\mathrm{s})^2 = 32\,\mathrm{m}.$$

Al cambiar la aceleración, la posición y la velocidad conservan sus valores de enlace entre etapas. En el segundo tramo la velocidad sigue siendo positiva; por tanto el cuerpo avanza mientras disminuye su rapidez.




La velocidad enlaza continuamente en $t = 3\,\mathrm{s}$. Cambia la pendiente, de $+2$ a $-1\,\mathrm{m/s^2}$; la velocidad conserva su valor de enlace.

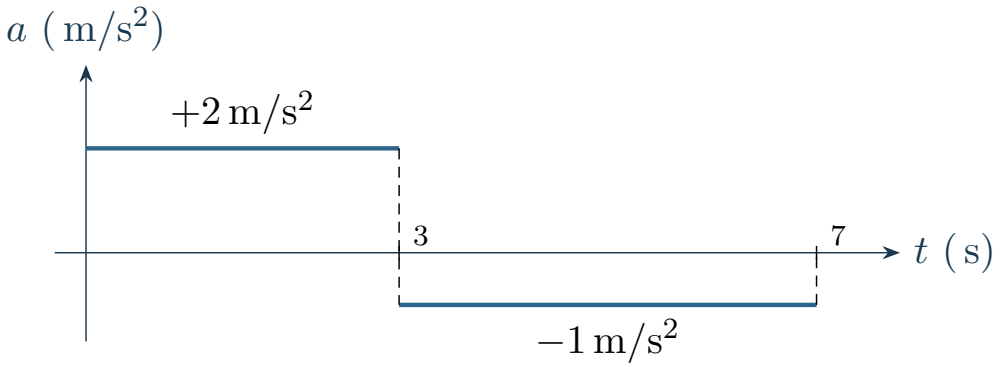



Figura 4.3: Aceleración idealizada por tramos. El área orientada acumulada representa el cambio de velocidad; para hallar la velocidad final debemos sumar $v_0$.

## 4.8 Qué podemos inferir realmente de las mediciones

Interpretar una gráfica o una tabla requiere precisar las relaciones y las hipótesis del modelo. Si observamos posiciones en cinco instantes, podemos encontrar velocidades medias entre lecturas y contrastar leyes candidatas. Para conocer la velocidad exacta en los instantes intermedios necesitamos información o hipótesis adicionales. Incluso una gráfica obtenida de muchos datos necesita criterios sobre resolución, error y ajuste. Ser cuidadoso con esta diferencia es parte de pensar físicamente.

**PROBLEMA RESUELTO 4.15 · Estimar un desplazamiento a partir de tres velocidades**

Un sensor registra velocidades 0, 2 y 4 m/s en $t = 0$, 1 y 2 s, respectivamente. Aproximar el desplazamiento mediante trapecios de ancho 1 s y explicar por qué la cifra no es necesariamente exacta.

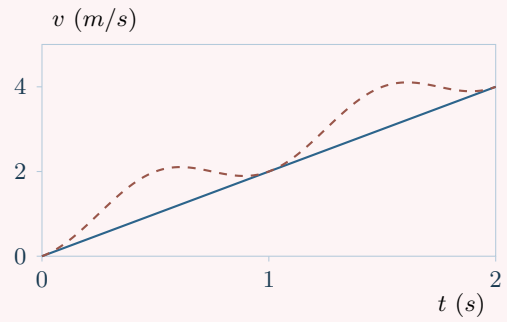
*Resolución.* El método de los trapecios supone que, entre cada par de datos, la velocidad se aproxima por una recta. Por ello,

$$\Delta x \approx \frac{0+2}{2}\,\mathrm{m/s}\,(1\,\mathrm{s}) + \frac{2+4}{2}\,\mathrm{m/s}\,(1\,\mathrm{s}) = 4\,\mathrm{m}.$$

El resultado es exacto *si* la velocidad cambia linealmente durante cada tramo. Pero una función distinta puede coincidir exactamente con las tres lecturas. Por ejemplo, además del modelo lineal $v_A(t) = (2\,\mathrm{m/s^2})t$, el modelo

$$v_B(t) = (2\,\mathrm{m/s^2})t + (0{,}5\,\mathrm{m/s})[1 - \cos(2\pi t/(1\,\mathrm{s}))]$$

coincide en esos tres tiempos y tiene un desplazamiento total de 5 m entre 0 y 2 s, pues su término adicional acumula 1 m sobre ese intervalo. La descripción del comportamiento intermedio procede de la interpolación elegida; su exactitud requiere contraste adicional.




Línea azul de trazo continuo: A. Línea terracota de trazos: B. Ambas funciones son continuas y coinciden en las tres muestras; sus integrales son 4 y 5 m.

**PROBLEMA RESUELTO 4.16 · Recuperar posición a partir de aceleración variable**

Un cuerpo tiene $a(t) = (6\,\mathrm{m/s^3})t$, con $v(0) = 2\,\mathrm{m/s}$ y $x(0) = -3\,\mathrm{m}$. Hallar $v(t)$, $x(t)$ y $x(2\,\mathrm{s})$.
*Resolución.* La primera integración da

$$v(t) = 2\,\mathrm{m/s} + (3\,\mathrm{m/s^3})t^2.$$

Integramos de nuevo y utilizamos la posición inicial:

$$x(t) = -3\,\mathrm{m} + (2\,\mathrm{m/s})t + (1\,\mathrm{m/s^3})t^3.$$

En $t = 2\,\mathrm{s}$ resulta $x = -3+4+8 = 9\,\mathrm{m}$. Comprobamos derivando dos veces: $dx/dt = 2\,\mathrm{m/s} + (3\,\mathrm{m/s^3})t^2$ y $d^2x/dt^2 = (6\,\mathrm{m/s^3})t$. Con condiciones iniciales incompletas obtendríamos una familia de movimientos compatibles.

| **Instante (s)** | $a$ **(m/s²)** | $v$ **(m/s) / $x$ (m)** |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 2 / −3 |
| 1 | 6 | 5 / 0 |
| 2 | 12 | 14 / 9 |

Las dos integraciones conservan condiciones iniciales diferentes. La tabla comprueba simultáneamente aceleración, velocidad y posición.

Elegimos ejes paralelos con igual orientación, un tiempo común y orígenes coincidentes en $t = 0$. El origen del observador se traslada uniformemente según $x_O(t) = Ut$. El modelo clásico relaciona las coordenadas mediante $x' = x - Ut$ y las velocidades mediante $v' = v - U$. En una referencia *inercial*, una partícula libre conserva su velocidad; el capítulo 6 desarrollará el fundamento dinámico de esta propiedad. Usamos aquí este cambio de referencia en el régimen clásico de velocidades ordinarias.

**PROBLEMA RESUELTO 4.17 · Velocidad relativa a un observador en movimiento**

En un eje fijo a una carretera, un tren avanza a $+18\,\mathrm{m/s}$ y una persona en otro vehículo se mueve a $+25\,\mathrm{m/s}$. ¿Qué velocidad observa esta última para el tren, si ambas referencias son inerciales y los orígenes coinciden en $t = 0$?
*Resolución.* Si $x_O(t) = (25\,\mathrm{m/s})t$, la posición relativa es $x' = x - x_O$. Al derivar, $v' = v - v_O = 18 - 25 = -7\,\mathrm{m/s}$. Para quien viaja a $25\,\mathrm{m/s}$, el tren se mueve hacia atrás a una rapidez de $7\,\mathrm{m/s}$. El signo depende de la orientación escogida; ningún conductor necesita retroceder respecto del camino para observar una velocidad relativa negativa. Usamos transformaciones galileanas, adecuadas al régimen de velocidades ordinarias de este modelo.

| **Referencia** | **Velocidad tren** | **Velocidad observador** |
|---|---|---|
| Carretera | $+18\,\mathrm{m/s}$ | $+25\,\mathrm{m/s}$ |
| Observador | $-7\,\mathrm{m/s}$ | 0 |

Restar $25\,\mathrm{m/s}$ a ambas velocidades deja en reposo al observador y cambia el signo de la velocidad del tren.

## Ejercicios de práctica

Resuelve los problemas por escrito antes de leer las soluciones. En cada caso declara el sistema de referencia, usa unidades coherentes y comprueba que el resultado pertenece al dominio del problema. Hay ejercicios deliberadamente subdeterminados.

**EJERCICIO 4.1 · Recorrido con retorno**

Una persona pasa de $x = -5\,\mathrm{m}$ a $x = 15\,\mathrm{m}$ y vuelve a $x = 3\,\mathrm{m}$ en $8\,\mathrm{s}$. Halla el desplazamiento, distancia, velocidad media y rapidez media.

**EJERCICIO 4.2 · Una ecuación lineal con posición inicial**

Dado $x(t) = 2\,\mathrm{m} - (3\,\mathrm{m/s})t$, hallar $x(4\,\mathrm{s})$, $\Delta x$ en $0 \le t \le 4\,\mathrm{s}$ y la velocidad instantánea.

**EJERCICIO 4.3 · Encuentro con posiciones iniciales distintas**

En una recta, A parte de $x = 0$ a $+6\,\mathrm{m/s}$ y B de $x = 120\,\mathrm{m}$ a $-4\,\mathrm{m/s}$, ambos con velocidad constante. ¿Dónde y cuándo se encuentran?

**EJERCICIO 4.4 · Parábola con retorno**

Para $0 \le t \le 6\,\mathrm{s}$, un móvil sigue $x(t) = 5\,\mathrm{m} - (6\,\mathrm{m/s})t + (1\,\mathrm{m/s^2})t^2$. Halla $v$, $a$, el punto de retorno, el desplazamiento y la distancia.

**EJERCICIO 4.5 · Velocidad que cambia de signo**

Durante $0 \le t \le 5\,\mathrm{s}$ la velocidad vale $v(t) = 4\,\mathrm{m/s} - (2\,\mathrm{m/s^2})t$. Halla $\Delta x$ y la distancia recorrida.

**EJERCICIO 4.6 · Condiciones iniciales necesarias**

Un cuerpo parte de $x_0 = -1\,\mathrm{m}$ con $v_0 = 2\,\mathrm{m/s}$ y $a = 3\,\mathrm{m/s^2}$ constante. ¿Cuáles son $x(4\,\mathrm{s})$ y $v(4\,\mathrm{s})$?

**EJERCICIO 4.7 · Detener un móvil**

Un tren reduce uniformemente su velocidad de $12\,\mathrm{m/s}$ a cero con aceleración de $-3\,\mathrm{m/s^2}$. Calcula el tiempo y la distancia de frenado.

**EJERCICIO 4.8 · Dos momentos para una misma posición**

En $t \ge 0$, $x(t) = (9\,\mathrm{m/s})t - (1{,}5\,\mathrm{m/s^2})t^2$. Hallar los instantes en que $x = 9\,\mathrm{m}$ y las velocidades correspondientes.

**EJERCICIO 4.9 · Un lanzamiento vertical**

Desde el suelo se lanza una pelota con $v_{0y} = 14{,}7\,\mathrm{m/s}$ hacia arriba. Usa $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$. Calcula tiempo hasta la altura máxima, altura máxima y regreso al suelo.

**EJERCICIO 4.10 · Caída desde un edificio**

Una piedra se suelta desde 19,6 m con velocidad inicial nula. Para $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$, determina tiempo y rapidez de impacto.

**EJERCICIO 4.11 · Velocidad por dos tramos ideales**

El registro se aproxima por $v = -2\,\mathrm{m/s}$ durante los primeros 2 s y $v = +3\,\mathrm{m/s}$ durante los 3 s siguientes. Halla desplazamiento y distancia. ¿Qué idealización física delicada contiene el cambio brusco de velocidad?

**EJERCICIO 4.12 · Cambiar de aceleración**

Un objeto comienza en reposo en $x = 0$. Acelera a $+2\,\mathrm{m/s^2}$ durante 2 s y luego a $-1\,\mathrm{m/s^2}$ durante 4 s. Hallar las posiciones y velocidades al final de cada tramo.

**EJERCICIO 4.13 · Una velocidad sin tiempo**

Un cuerpo lleva $v_0 = 5\,\mathrm{m/s}$, experimenta una aceleración constante $a = +1{,}5\,\mathrm{m/s^2}$ y se desplaza $+20\,\mathrm{m}$. ¿Cuál es su velocidad final, suponiendo que no invierte el sentido?

**EJERCICIO 4.14 · ¿Qué nos dicen dos posiciones?**

Un móvil tiene $x(0) = 10\,\mathrm{m}$ y $x(2\,\mathrm{s}) = 18\,\mathrm{m}$. Calcula la velocidad media. ¿Puedes determinar $x(5\,\mathrm{s})$ sin otra hipótesis? ¿Qué obtendrías si fuera MRU?

**EJERCICIO 4.15 · Una referencia que se mueve**

Un automóvil viaja a $+20\,\mathrm{m/s}$ y una bicicleta a $+12\,\mathrm{m/s}$ en la misma recta. Determina la velocidad de la bicicleta respecto del automóvil.

**EJERCICIO 4.16 · Aceleración que depende del tiempo**

Sea $a(t) = (3\,\mathrm{m/s^3})t$, con $v_0 = 1\,\mathrm{m/s}$ y $x_0 = 2\,\mathrm{m}$. Hallar $v(t)$, $x(t)$ y ambas cantidades en $t = 2\,\mathrm{s}$.

**EJERCICIO 4.17 · Tres lecturas y un área aproximada**

Un sensor lee $v = 0$, 2 y $4\,\mathrm{m/s}$ en $t = 0$, 1 y 2 s. Aproxima el desplazamiento por trapecios y explica qué dato falta para afirmar que es exacto.

**EJERCICIO 4.18 · Verdadero o falso, con justificación**

Determina si cada enunciado es verdadero en todos los movimientos rectilíneos: (a) aceleración negativa implica disminución de rapidez; (b) desplazamiento nulo implica distancia nula; (c) velocidad constante implica aceleración cero; (d) en la cumbre de un lanzamiento vertical la aceleración es cero.

**EJERCICIO 4.19 · Una pelota desde un techo**

Una pelota sale verticalmente hacia arriba a $5\,\mathrm{m/s}$ desde una terraza situada a $30\,\mathrm{m}$ del suelo. Usa $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$. Determina la altura máxima, cuándo llega al suelo y su velocidad de impacto.

**EJERCICIO 4.20 · Diagnóstico de modelos**

Dos cuerpos parten del mismo punto en $t = 0$. A sigue $x_A(t) = (2\,\mathrm{m/s})t$, mientras B sigue $x_B(t) = (0{,}5\,\mathrm{m/s^2})t^2$. (a) ¿En qué instante positivo se vuelven a encontrar? (b) ¿Tienen igual velocidad en ese instante? (c) ¿Qué supuesto adicional hace falta para asegurar que estos modelos describen objetos reales?

## Soluciones completas de los ejercicios

**SOLUCIÓN 4.1.**
El desplazamiento es $3-(-5) = +8\,\mathrm{m}$. La distancia suma $|15-(-5)| + |3-15| = 20+12 = 32\,\mathrm{m}$. Con $\Delta t = 8\,\mathrm{s}$, la velocidad media es $+1\,\mathrm{m/s}$ y la rapidez media $4\,\mathrm{m/s}$. Aunque el desplazamiento sea positivo, en la segunda etapa hubo movimiento en el sentido contrario.

**SOLUCIÓN 4.2.**
Sustituyendo $t = 4\,\mathrm{s}$, $x(4\,\mathrm{s}) = 2-12 = -10\,\mathrm{m}$. El desplazamiento es $-10-2 = -12\,\mathrm{m}$. La función es lineal y su derivada es la velocidad constante $v = -3\,\mathrm{m/s}$, coherente con $\Delta x = v\Delta t$.

**SOLUCIÓN 4.3.**
En la misma referencia, $x_A(t) = (6\,\mathrm{m/s})t$ y $x_B(t) = 120\,\mathrm{m} - (4\,\mathrm{m/s})t$. Igualando, $(10\,\mathrm{m/s})t = 120\,\mathrm{m}$, luego $t = 12\,\mathrm{s}$ y $x = 72\,\mathrm{m}$. Las distancias avanzadas, 72 y 48 m, completan los 120 m iniciales.

**SOLUCIÓN 4.4.**
Derivando, $v(t) = -6\,\mathrm{m/s} + (2\,\mathrm{m/s^2})t$ y $a = 2\,\mathrm{m/s^2}$. En $t = 3\,\mathrm{s}$ cambia de sentido y la posición mínima es $x = 5-18+9 = -4\,\mathrm{m}$. Como $x(0) = x(6\,\mathrm{s}) = 5\,\mathrm{m}$, el desplazamiento es cero. La distancia suma $|-4-5| + |5-(-4)| = 18\,\mathrm{m}$.

**SOLUCIÓN 4.5.**
La velocidad se hace cero en $t = 2\,\mathrm{s}$; el desplazamiento es $\int_0^{5\,\mathrm{s}} v(t)\,dt = 4(5) - 5^2 = -5\,\mathrm{m}$, con coeficientes en SI. Las áreas por separado miden $\frac{1}{2}(2)(4) = 4\,\mathrm{m}$ y $\frac{1}{2}(3)(6) = 9\,\mathrm{m}$, de modo que la distancia es 13 m. El signo negativo del desplazamiento indica la orientación del cambio de posición.

**SOLUCIÓN 4.6.**
La velocidad final es $v = 2+(3)(4) = 14\,\mathrm{m/s}$. La coordenada final vale $x = -1+(2)(4)+\frac{1}{2}(3)(4)^2 = -1+8+24 = 31\,\mathrm{m}$, con unidades SI. El desplazamiento es 32 m y la diferencia con la coordenada se debe a $x_0 \neq 0$.

**SOLUCIÓN 4.7.**
Si $v(t) = 12\,\mathrm{m/s} - (3\,\mathrm{m/s^2})t$, la condición $v = 0$ da $t = 4\,\mathrm{s}$. La distancia de frenado (sin cambio de sentido) es $\bar{v}\,t = (12+0)/2\,\mathrm{m/s}\cdot 4\,\mathrm{s} = 24\,\mathrm{m}$. También resulta de $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$.

**SOLUCIÓN 4.8.**
De $9t - 1{,}5t^2 = 9$ (con $t$ en segundos) se obtiene $t^2 - 6t + 6 = 0$, y por tanto $t_{1,2} = (3 \mp \sqrt{3})\,\mathrm{s}$, aproximadamente 1,27 s y 4,73 s. Como $v(t) = 9\,\mathrm{m/s} - (3\,\mathrm{m/s^2})t$, las velocidades son $+3\sqrt{3}\,\mathrm{m/s}$ y $-3\sqrt{3}\,\mathrm{m/s}$. Ambas raíces son posteriores al inicio y físicamente admisibles.

**SOLUCIÓN 4.9.**
En la altura máxima $v_y = 0$, por lo que $t_{\text{máx}} = 14{,}7/9{,}8 = 1{,}5\,\mathrm{s}$. La altura ganada es $h = v_0^2/(2g) = 11{,}025\,\mathrm{m} \approx 11{,}0\,\mathrm{m}$. La pelota regresa al suelo en $2t_{\text{máx}} = 3{,}0\,\mathrm{s}$, bajo el modelo ideal y con los mismos niveles de partida y llegada.

**SOLUCIÓN 4.10.**
Con $y(t) = 19{,}6\,\mathrm{m} - \frac{1}{2}(9{,}8\,\mathrm{m/s^2})t^2$, la llegada al suelo requiere $t^2 = 4\,\mathrm{s^2}$. Escogemos $t = 2\,\mathrm{s}$ porque corresponde al instante posterior al inicio. La velocidad en ese instante es $-19{,}6\,\mathrm{m/s}$ si el eje positivo apunta hacia arriba, de modo que la rapidez de impacto vale 19,6 m/s.

**SOLUCIÓN 4.11.**
El desplazamiento por tramos es $(-2)(2) + (3)(3) = +5\,\mathrm{m}$, con unidades SI, y la distancia es $4 + 9 = 13\,\mathrm{m}$. Un salto de velocidad de $-2$ a $+3\,\mathrm{m/s}$ en tiempo nulo representaría una aceleración impulsiva idealizada; su descripción física requiere especificar la interacción que lo causa. Para cálculo de áreas por tramos podemos usar esa idealización sin pretender que retrata la transición real.

**SOLUCIÓN 4.12.**
El reloj sigue contando desde el comienzo, pero en cada fórmula necesitamos la duración de su propio tramo. El segundo empieza en $t = 2\,\mathrm{s}$ y dura 4 s, por lo que termina en $t = 6\,\mathrm{s}$. Las condiciones iniciales del segundo tramo son las finales del primero. En los primeros 2 s, $v_1 = (2)(2) = 4\,\mathrm{m/s}$ y $x_1 = \frac{1}{2}(2)(2)^2 = 4\,\mathrm{m}$. En los siguientes 4 s, a partir de $x_1, v_1$, $v_2 = 4 - (1)(4) = 0$ y $x_2 = 4 + (4)(4) - \frac{1}{2}(1)(4)^2 = 12\,\mathrm{m}$. Se conservaron las condiciones al pasar de un tramo al siguiente; el movimiento nunca retrocedió.

**SOLUCIÓN 4.13.**
Aplicamos la ecuación independiente del tiempo y calculamos el cuadrado de la velocidad:

$$v^2 = (5\,\mathrm{m/s})^2 + 2(1{,}5\,\mathrm{m/s^2})(20\,\mathrm{m}) = 85\,\mathrm{m^2/s^2}.$$

Luego $v = +\sqrt{85}\,\mathrm{m/s} \approx 9{,}22\,\mathrm{m/s}$. La raíz positiva está justificada porque inicialmente avanza hacia la derecha, su aceleración tiene el mismo sentido y el enunciado especifica que no invierte la marcha.

**SOLUCIÓN 4.14.**
La velocidad media es $(18 - 10)\,\mathrm{m}/2\,\mathrm{s} = 4\,\mathrm{m/s}$. Determinar $x(5\,\mathrm{s})$ requiere más condiciones: movimientos no uniformes pueden compartir esos dos puntos. Bajo la hipótesis adicional de MRU, $x(t) = 10\,\mathrm{m} + (4\,\mathrm{m/s})t$ y por ello $x(5\,\mathrm{s}) = 30\,\mathrm{m}$.

**SOLUCIÓN 4.15.**
La velocidad relativa de la bicicleta respecto del automóvil es $v_{b/a} = v_b - v_a = 12 - 20 = -8\,\mathrm{m/s}$ sobre el eje elegido. El automóvil se aleja hacia delante; para su ocupante la bicicleta se mueve hacia atrás a una rapidez relativa de 8 m/s. Ambas velocidades absolutas respecto de la carretera eran positivas.

**SOLUCIÓN 4.16.**
Integrando $a(t) = (3\,\mathrm{m/s^3})t$ con $v_0 = 1\,\mathrm{m/s}$ se obtiene $v(t) = 1\,\mathrm{m/s} + (1{,}5\,\mathrm{m/s^3})t^2$. Otra integración, con $x_0 = 2\,\mathrm{m}$, da $x(t) = 2\,\mathrm{m} + (1\,\mathrm{m/s})t + (0{,}5\,\mathrm{m/s^3})t^3$. En $t = 2\,\mathrm{s}$, $v = 7\,\mathrm{m/s}$ y $x = 2 + 2 + 4 = 8\,\mathrm{m}$. Las derivadas devuelven la aceleración dada.

**SOLUCIÓN 4.17.**
Aplicando trapecios sobre dos intervalos de 1 s, $\Delta x \approx (0 + 2)/2 + (2 + 4)/2 = 4\,\mathrm{m}$, con el factor de tiempo incorporado. Faltan mediciones o un modelo justificado para saber cómo cambió $v(t)$ entre los instantes observados. Una función curvada puede pasar por los mismos tres valores y producir un área diferente.

**SOLUCIÓN 4.18.**
(a) Falso: con $v < 0$ y $a < 0$ la rapidez aumenta. (b) Falso: ir y volver al origen produce desplazamiento cero y distancia positiva. (c) Verdadero en un intervalo donde la velocidad es constante y derivable, pues $a = dv/dt = 0$. (d) Falso en el modelo de caída libre: en la cumbre $v_y = 0$ pero $a_y = -g$. Cada afirmación necesita la distinción entre componente con signo, módulo y derivada.

**SOLUCIÓN 4.19.**
Con eje positivo hacia arriba, $y(t) = 30\,\mathrm{m} + (5\,\mathrm{m/s})t - (5\,\mathrm{m/s^2})t^2$. La cumbre ocurre en $t = 0{,}5\,\mathrm{s}$ y la altura máxima es $30 + 2{,}5 - 1{,}25 = 31{,}25\,\mathrm{m}$. Para llegar al suelo $30 + 5t - 5t^2 = 0$ equivale a $t^2 - t - 6 = 0$, cuyas raíces son $t = 3\,\mathrm{s}$ y $t = -2\,\mathrm{s}$; escogemos $3\,\mathrm{s}$. En ese instante $v_y = 5 - 10(3) = -25\,\mathrm{m/s}$ y la rapidez vale $25\,\mathrm{m/s}$.

**SOLUCIÓN 4.20.**
Las posiciones se igualan para $2t = 0{,}5t^2$ con $t$ medido en segundos. Las soluciones son $t = 0$ y $t = 4\,\mathrm{s}$, así que se encuentran nuevamente en el instante positivo $4\,\mathrm{s}$ y en $x = 8\,\mathrm{m}$. Las velocidades son $v_A = 2\,\mathrm{m/s}$ y $v_B = (1\,\mathrm{m/s^2})t$, que en $t = 4\,\mathrm{s}$ vale $4\,\mathrm{m/s}$. Dos móviles pueden coincidir en posición con velocidades distintas. Para contrastar los modelos con cuerpos reales se comparan las posiciones y velocidades previstas con las mediciones. El capítulo 6 permitirá examinar además qué fuerzas sostienen la velocidad constante de A y la aceleración constante de B.

## Diagnóstico de salida

El lector debe poder resolver un encuentro de móviles sobre una recta con condiciones iniciales; reconstruir una gráfica de posición o velocidad a partir de una ley temporal; determinar si un móvil gana o pierde rapidez comparando los signos de velocidad y aceleración; y separar desplazamiento, distancia y posición final. Los ejercicios 4.3, 4.4, 4.8, 4.12, 4.17 y 4.19 constituyen pruebas escritas para estas capacidades.

Una preparación universitaria requiere relacionar las ecuaciones con sus hipótesis, su deducción y su significado físico. Consiste en reconocer cuándo se aplican, derivarlas si se olvidan, explicar su alcance y confrontarlas con mediciones. En el siguiente capítulo la posición será un vector en el plano: cada componente conservará la lógica desarrollada aquí, pero necesitaremos relacionar simultáneamente direcciones distintas.

**Comprobación sin consultar las soluciones.** Para $x(t) = 1\,\mathrm{m} - (4\,\mathrm{m/s})t + (1\,\mathrm{m/s^2})t^2$, entre 0 y $3\,\mathrm{s}$, bosqueja $x(t)$, $v(t)$ y $a(t)$. Marca el retorno, calcula desplazamiento y distancia, y explica si hay aceleración cuando $v = 0$. Después justifica qué tendrías que cambiar en tu método si la aceleración dependiera del tiempo.

**Contraste después del intento.** $v(t) = -4\,\mathrm{m/s} + (2\,\mathrm{m/s^2})t$ y $a = 2\,\mathrm{m/s^2}$. El retorno ocurre en $t = 2\,\mathrm{s}$ y $x = -3\,\mathrm{m}$; $x(3\,\mathrm{s}) = -2\,\mathrm{m}$, por lo que $\Delta x = -3\,\mathrm{m}$ y $s = 4 + 1 = 5\,\mathrm{m}$. La aceleración sigue siendo positiva en el retorno. Si $a$ varía, se recuperan $v$ y $x$ mediante dos integraciones con sus condiciones iniciales. Para revisar las gráficas vuelve al problema 4.3; para la distancia, al 4.5; para aceleración variable, al 4.16.

# CAPÍTULO 5

# MOVIMIENTO EN DOS DIMENSIONES Y MOVIMIENTO RELATIVO


5.1 Una posición necesita dos coordenadas . . . . . 82
5.2 Reconstruir el movimiento por componentes . . . . . 84
5.3 Proyectiles: dos movimientos y un solo reloj . . . . . 86
5.4 Encuentros: coincidir en el espacio y en el tiempo . . . . . 92
5.5 Movimiento circular: cambiar de dirección es acelerar . . . . 94
5.6 Cambiar de observador sin cambiar el suceso . . . . . 95
5.7 Del modelo a una observación 98
Ejercicios para reconstruir y transferir 99
Soluciones completas de los ejercicios 102
Diagnóstico de salida . . . . . 105


Una pelota lanzada hacia una canasta avanza mientras sube y baja. La altura permite predecir cuándo volverá al suelo; el avance horizontal sitúa ese regreso y permite decidir si pasa por encima del aro. Las dos descripciones tienen que referirse a la misma pelota y al mismo instante. Esta exigencia sencilla será el hilo conductor del capítulo.

Las coordenadas y los vectores del capítulo 2 permiten reunir esas descripciones. Cada componente conservará las relaciones entre posición, velocidad y aceleración que construimos en los capítulos 3 y 4. La novedad aparecerá al recomponerlas: un móvil puede acelerar sin cambiar su rapidez, dos caminos pueden cruzarse sin que sus viajeros se encuentren y una trayectoria puede verse diferente desde un tren y desde el suelo.

## 5.1 Una posición necesita dos coordenadas

En una explanada elegimos un origen, un eje horizontal $x$ y otro eje perpendicular $y$. En una vista desde arriba podemos orientar $x$ al este e $y$ al norte; en un lanzamiento de pelota será más útil orientar $y$ hacia arriba. La elección pertenece al modelo y debe acompañar a los números. Escribiremos la posición como

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath}.$$

Los vectores unitarios $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$, ya introducidos en el capítulo 2, tienen módulo uno y dimensión uno; fijan las direcciones positivas de los ejes. El vector $\vec{r}$ tiene dimensión de longitud. El par $(x, y)$ designa sus componentes en los ejes elegidos.

Representamos el cuerpo mediante un punto cuando sus dimensiones permiten responder la pregunta con la precisión buscada. Estudiar el paso de una pelota por un punto idealiza tanto la pelota como el blanco; para decidir si cabe por una abertura necesitamos también sus dimensiones. Esta elección delimita lo que podremos concluir de una coincidencia de coordenadas.

Entre dos instantes, el desplazamiento es

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_f) - \vec{r}(t_i) = \Delta x\,\hat{\imath} + \Delta y\,\hat{\jmath}, \qquad |\Delta\vec{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Su módulo es la distancia en línea recta entre los extremos. La distancia recorrida depende también del camino: cada desvío puede aumentar su longitud sin modificar el desplazamiento.

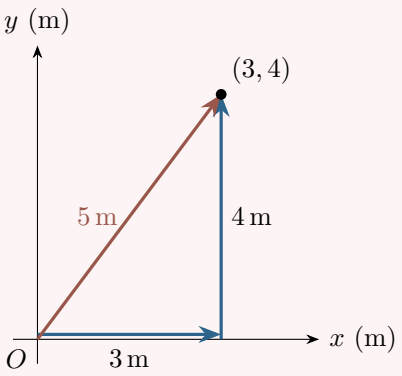
**PROBLEMA RESUELTO 5.1 · Dos tramos y una diagonal**

Una persona camina desde $(0, 0)$ hasta $(3, 0)$ m y después hasta $(3, 4)$ m. El recorrido dura 10 s. Determina desplazamiento, distancia, velocidad media y rapidez media.

*Resolución.* El extremo final determina $\Delta\vec{r} = (3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath})$ m, cuyo módulo es 5 m. El camino tiene dos tramos perpendiculares, de modo que su longitud es $s = 3 + 4 = 7$ m. Dividimos magnitudes distintas por la misma duración:

$$\overline{\vec{v}} = (0{,}3\hat{\imath} + 0{,}4\hat{\jmath})\ \text{m/s},$$
$$\overline{u} = 0{,}7\ \text{m/s}.$$

Aquí $|\overline{\vec{v}}| = 0{,}5$ m/s describe el desplazamiento por unidad de tiempo; la rapidez media se calcula con la longitud del camino. La diagonal resume el cambio entre la posición inicial y la final.




El recorrido sigue los dos lados azules; el desplazamiento es la diagonal. Misma escala en ambos ejes.

La velocidad media es $\overline{\vec{v}} = \Delta\vec{r}/\Delta t$. Para conocer lo que sucede en un instante tomamos el límite de ese cociente, componente por componente, en unos ejes que permanecen fijos:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath}, \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{\jmath}. \tag{5.1}$$

Se entiende que existen las derivadas escritas. Al dividir un pequeño desplazamiento por su duración obtenemos una dirección que, en una curva regular, se aproxima a la tangente. Por eso la velocidad es tangente a la trayectoria cuando es distinta de cero. La aceleración describe cómo cambia ese vector y puede tener una dirección distinta.

Trabajaremos con trayectorias continuas cuyas componentes tienen derivadas continuas por tramos en el intervalo observado. Esto permite empalmar etapas del movimiento y calcular la longitud sumando sus aportes. La rapidez instantánea será $u = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. Usamos $u$ para distinguir el escalar del vector $\vec{v}$. La distancia recorrida se obtiene acumulando esa rapidez en los tramos:

$$s = \int_{t_i}^{t_f} \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2}\, dt.$$

Algunas funciones requieren métodos numéricos para calcular la integral. La fórmula sigue teniendo sentido y puede aproximarse con una tabla de velocidades, del mismo modo que aproximamos áreas en el capítulo 3.

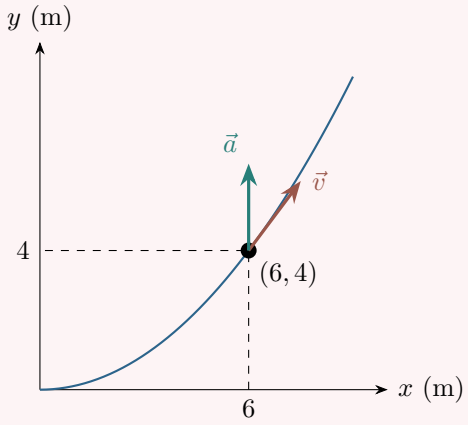
**PROBLEMA RESUELTO 5.2 · La dirección cambia aunque una componente sea constante**

Un móvil sigue $x(t) = (3\,\mathrm{m/s})t$ e $y(t) = (1\,\mathrm{m/s^2})t^2$ para $0 \le t \le 3\,\mathrm{s}$. Encuentra posición, velocidad, rapidez y aceleración en $t = 2\,\mathrm{s}$.

*Resolución.* Primero derivamos las dos funciones y después evaluamos en el mismo instante:

$$\vec{v}(t) = 3\,\mathrm{m/s}\,\hat{\imath} + (2\,\mathrm{m/s^2})t\,\hat{\jmath}, \qquad \vec{a} = 2\,\mathrm{m/s^2}\,\hat{\jmath}.$$

En $t = 2\,\mathrm{s}$ la posición es $(6, 4)\,\mathrm{m}$ y la velocidad $(3, 4)\,\mathrm{m/s}$; por Pitágoras, $u = 5\,\mathrm{m/s}$. La dirección de la velocidad forma $\arctan(4/3) \simeq 53{,}1^\circ$ sobre $+x$. Este ángulo pertenece al primer cuadrante porque ambas componentes son positivas. El cociente $y/x = 4/6$ daría la dirección de la posición, una pregunta diferente. La componente horizontal de la velocidad permanece constante, mientras la vertical crece: cambian tanto la rapidez como la dirección del movimiento.




La velocidad en $t = 2\,\mathrm{s}$ es tangente; la aceleración es vertical. Las flechas muestran direcciones; cada magnitud tiene su propia escala.

Las dos ecuaciones $x = x(t)$ e $y = y(t)$ constituyen una descripción *paramétrica*: el tiempo es el parámetro común. Si eliminamos $t$ obtenemos una relación geométrica entre las coordenadas, pero podemos perder información sobre cuándo se ocupa cada punto, en qué sentido se recorre la curva y qué parte de ella pertenece al intervalo observado.

**PROBLEMA RESUELTO 5.3 · Una misma curva con horarios diferentes**

Para $0 \le t \le 2\,\mathrm{s}$ se proponen dos movimientos:

$$x_A = (2\,\mathrm{m/s})t, \quad y_A = (1\,\mathrm{m/s^2})t^2,$$
$$x_B = (4\,\mathrm{m/s})t, \quad y_B = (4\,\mathrm{m/s^2})t^2.$$

Compara las relaciones $y(x)$ y el paso por $(4, 4)\,\mathrm{m}$.
*Resolución.* En A, $t = x/(2\,\mathrm{m/s})$; en B, $t = x/(4\,\mathrm{m/s})$. Al sustituir, ambos dan $y = x^2/(4\,\mathrm{m})$. Sin embargo, A llega al punto indicado en 2 s y B en 1 s. Sus velocidades allí son $(2, 4)\,\mathrm{m/s}$ y $(4, 8)\,\mathrm{m/s}$. Tienen la misma dirección tangente y distinta rapidez. Además, durante el intervalo dado A solo alcanza $x = 4\,\mathrm{m}$, mientras B alcanza $x = 8\,\mathrm{m}$: cada uno recorre un arco distinto de la curva soporte.

| **Paso por** $(4, 4)\,\mathrm{m}$ | **Movimiento A** | **Movimiento B** |
|---|---|---|
| Instante | $2\,\mathrm{s}$ | $1\,\mathrm{s}$ |
| Velocidad | $(2, 4)\,\mathrm{m/s}$ | $(4, 8)\,\mathrm{m/s}$ |
| Rapidez | $\sqrt{20}\,\mathrm{m/s}$ | $2\sqrt{20}\,\mathrm{m/s}$ |
| Curva soporte | $y = x^2/(4\,\mathrm{m})$ | $y = x^2/(4\,\mathrm{m})$ |

El punto y la tangente coinciden; el reloj y la rapidez distinguen los movimientos.

## 5.2 Reconstruir el movimiento por componentes

Cuando $\vec{a}$ es constante en unos ejes fijos, sus componentes también lo son. Podemos aplicar a cada una el razonamiento del capítulo 4. Si $\tau = t - t_0$, la integración de $d\vec{v}/dt = \vec{a}$ y después de $d\vec{r}/dt = \vec{v}$ proporciona

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}\,\tau, \qquad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\tau + \tfrac{1}{2}\vec{a}\,\tau^2. \tag{5.2}$$

El término $\frac{1}{2}\vec{a}\tau^2$ es un vector de longitud que se suma a los otros desplazamientos. La expresión incluye el caso $\vec{a} = \vec{0}$ y permite elegir libremente el origen de posiciones. Si la aceleración depende del tiempo, debemos integrar sus componentes conservando las condiciones iniciales; reemplazarla por su valor final en estas fórmulas, en general, produce otro movimiento.

**PROBLEMA RESUELTO 5.4 · Una aceleración constante oblicua**

En $t = 0$ un móvil tiene $\vec{r}_0 = (1, 2)\,\text{m}$ y $\vec{v}_0 = (3, -1)\,\text{m/s}$. Durante los siguientes 2 s su aceleración es $\vec{a} = (-2, 4)\,\text{m/s}^2$. Encuentra su estado final.
*Resolución.* Trabajamos con la misma duración en ambos ejes:

$$x(2\,\text{s}) = 1 + 3(2) - \tfrac{1}{2}(2)(2)^2 = 3\,\text{m},$$
$$y(2\,\text{s}) = 2 - 1(2) + \tfrac{1}{2}(4)(2)^2 = 8\,\text{m}.$$

En estas sustituciones los valores numéricos están expresados en SI. La velocidad final es $(3, -1) + (-2, 4)(2) = (-1, 7)\,\text{m/s}$ y la rapidez $\sqrt{50}\,\text{m/s}$. La componente $v_x$ se anula en 1,5 s y cambia de signo; en ese instante el móvil se desplaza verticalmente con $v_y = 5\,\text{m/s}$. La anulación del vector requiere que se anulen todas sus componentes a la vez.

| **Tiempo** | **Posición** $(x, y)$ | **Velocidad** $(v_x, v_y)$ |
|---|---|---|
| 0 s | $(1, 2)\,\text{m}$ | $(3, -1)\,\text{m/s}$ |
| 1,5 s | $(3{,}25, 5)\,\text{m}$ | $(0, 5)\,\text{m/s}$ |
| 2 s | $(3, 8)\,\text{m}$ | $(-1, 7)\,\text{m/s}$ |

El cambio de signo horizontal sucede con velocidad vertical distinta de cero. Cada fila reúne componentes simultáneas.

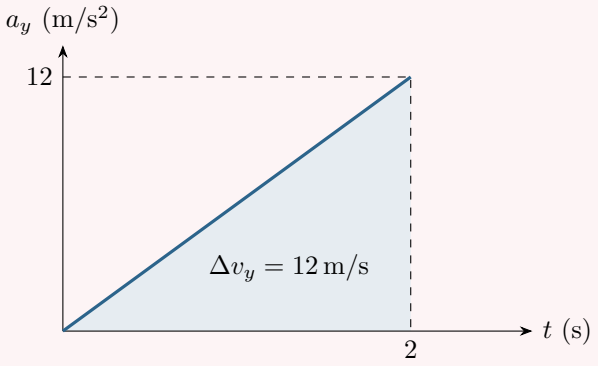
**PROBLEMA RESUELTO 5.5 · La aceleración cambia durante el trayecto**

Para $0 \le t \le 2\,\mathrm{s}$, sean $\vec{a}(t) = 2\,\mathrm{m/s^2}\,\hat{\imath} + (6\,\mathrm{m/s^3})t\,\hat{\jmath}$, $\vec{v}_0 = (1, -2)\,\mathrm{m/s}$ y $\vec{r}_0 = \vec{0}$. Determina $\vec{v}(t)$, $\vec{r}(t)$ y sus valores finales.

*Resolución.* Integramos desde el instante inicial para que las constantes de integración queden fijadas por los datos:

$$\begin{aligned} v_x(t) &= 1\,\mathrm{m/s} + (2\,\mathrm{m/s^2})t, \\ v_y(t) &= -2\,\mathrm{m/s} + (3\,\mathrm{m/s^3})t^2, \\ x(t) &= (1\,\mathrm{m/s})t + (1\,\mathrm{m/s^2})t^2, \\ y(t) &= -(2\,\mathrm{m/s})t + (1\,\mathrm{m/s^3})t^3. \end{aligned}$$

En 2 s obtenemos $\vec{v} = (5, 10)\,\mathrm{m/s}$ y $\vec{r} = (6, 4)\,\mathrm{m}$. Si tratáramos $a_y(2\,\mathrm{s}) = 12\,\mathrm{m/s^2}$ como constante durante todo el intervalo, predeciríamos $v_y = -2 + 12(2) = 22\,\mathrm{m/s}$. Ese valor prolonga a todo el intervalo la aceleración final de un movimiento cuya aceleración varía. Derivar las funciones obtenidas recupera exactamente los datos originales.




El área triangular da el cambio de velocidad vertical: $\frac{1}{2}(2\,\mathrm{s})(12\,\mathrm{m/s^2})$. Usar el valor final como constante reemplazaría el triángulo por un rectángulo.

## 5.3 Proyectiles: dos movimientos y un solo reloj

Una pelota que abandona una mesa conserva inicialmente la velocidad horizontal que tenía sobre ella y empieza a caer. El avance horizontal y la caída ocurren simultáneamente desde el lanzamiento. En el modelo que usaremos, el movimiento horizontal y el vertical evolucionan simultáneamente, con aceleraciones $a_x = 0$ y $a_y = -g$ cuando $y$ apunta hacia arriba.

Supondremos una región próxima a la superficie terrestre, suficientemente pequeña para considerar $g$ constante y las verticales paralelas. Despreciaremos resistencia del aire, sustentación, giro de la Tierra y variaciones de $g$. El modelo describe el vuelo libre antes del primer choque; una pared o el suelo pueden terminarlo antes de lo que sugiera la prolongación algebraica. Usaremos $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ en los cálculos de este capítulo, una aproximación deliberada para centrar la atención en el razonamiento.

Si fijamos $t = 0$ al lanzar, las ecuaciones son

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_{0x}t, & v_x(t) &= v_{0x}, \\ y(t) &= y_0 + v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2, & v_y(t) &= v_{0y} - gt. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Las componentes de la velocidad inicial se obtienen con $v_{0x} = v_0 \cos\theta$ y $v_{0y} = v_0 \sin\theta$ cuando $\theta$ se mide desde $+x$. Aquí $v_0 = |\vec{v}_0|$. Un ángulo orientado permite componentes negativas; el dibujo debe fijar el cuadrante antes de utilizar una función inversa.

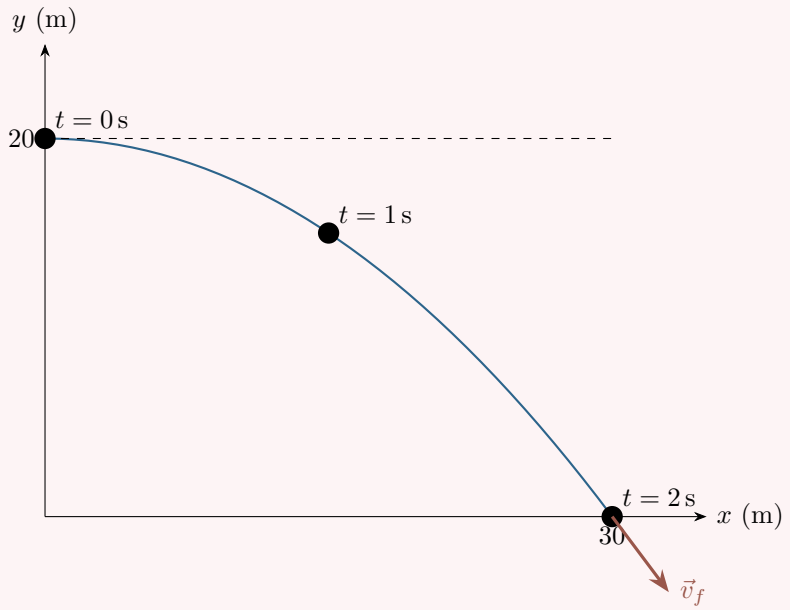
Las componentes describen la posición del mismo cuerpo en un mismo instante. Si la condición de llegada es una altura dada, la ecuación vertical proporcionará posibles instantes, que luego debemos contrastar con la posición horizontal y el intervalo de vuelo. Si la condición es una pared situada en $x = L$, primero encontraremos cuándo se llega a esa coordenada. La pregunta decide qué ecuación conviene usar antes.

**PROBLEMA RESUELTO 5.6 · Una pelota abandona horizontalmente una terraza**

Una pelota sale horizontalmente a 15 m/s desde 20 m sobre un suelo horizontal. Encuentra el tiempo de vuelo, el punto de impacto y la velocidad justo antes de tocar el suelo.
*Resolución.* Tomamos el origen horizontal bajo la salida y el suelo como $y = 0$. Entonces $x = 15t$ e $y = 20 - 5t^2$ en SI. La condición $y = 0$ da $t^2 = 4\,\mathrm{s}^2$; retenemos $t = 2\,\mathrm{s}$ porque estudiamos el movimiento posterior a la salida. Así, $x = 30\,\mathrm{m}$ y

$$\vec{v}_f = (15, -20)\,\mathrm{m/s}, \qquad u_f = 25\,\mathrm{m/s}.$$

La velocidad forma $\arctan(20/15) \simeq 53{,}1^\circ$ por debajo de la horizontal. La raíz negativa pertenece a la prolongación matemática anterior a la salida; el vuelo estudiado comienza en el instante de lanzamiento. Una segunda pelota soltada desde la misma altura y al mismo tiempo, con velocidad vertical inicial nula, caería en los mismos 2 s dentro del modelo, aunque su posición horizontal fuera distinta.




Posiciones separadas por un segundo. Los avances horizontales son iguales y las caídas aumentan. La flecha final indica la dirección de la velocidad; el vuelo termina en el suelo.

Para un lanzamiento con $v_{0y} > 0$, la altura máxima se alcanza cuando $v_y = 0$. Por tanto,

$$t_H = \frac{v_{0y}}{g}, \qquad y_H - y_0 = \frac{v_{0y}^2}{2g}.$$

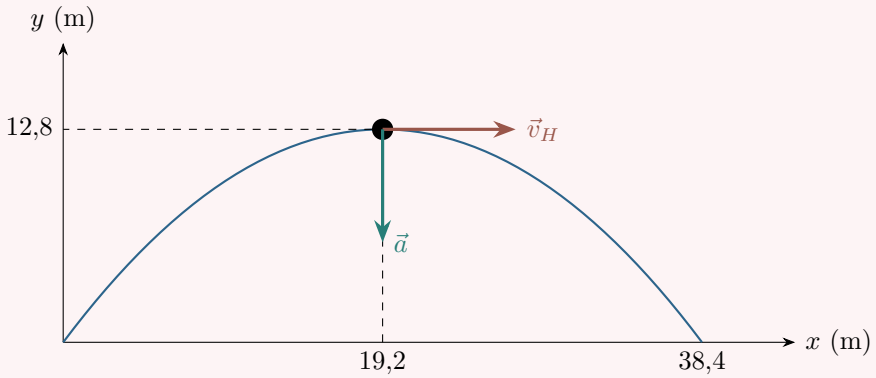
El máximo es vertical: allí se conserva la velocidad horizontal. Si $v_{0y} \le 0$, la altura máxima del vuelo posterior a la salida es la inicial; un $t_H$ negativo sitúa el vértice de la parábola extrapolada antes del lanzamiento.

**PROBLEMA RESUELTO 5.7 · En la cumbre la pelota sigue moviéndose**

Una pelota parte del suelo con $\vec{v}_0 = (12, 16)\,\mathrm{m/s}$. Calcula la altura máxima, el tiempo hasta volver al suelo y el alcance horizontal.
*Resolución.* Como $v_y = 16 - 10t$ en SI, la cumbre se alcanza en 1,6 s. Sustituir en $y = 16t - 5t^2$ da 12,8 m. Para volver a $y = 0$ resolvemos

$$t(16\,\mathrm{m/s} - 5\,\mathrm{m/s^2}\, t) = 0.$$

La raíz inicial es el lanzamiento y la raíz positiva es $T = 3{,}2\,\mathrm{s}$. El alcance resulta $R = 12(3{,}2) = 38{,}4\,\mathrm{m}$. En la cumbre $\vec{v} = (12, 0)\,\mathrm{m/s}$ y $\vec{a} = (0, -10)\,\mathrm{m/s^2}$: ni velocidad ni aceleración son nulas. La rapidez inicial es 20 m/s y la final vuelve a ser 20 m/s, con la componente vertical de signo opuesto.




En la cumbre solo se anula la componente vertical de la velocidad. Las flechas de velocidad y aceleración indican direcciones, con escalas propias.

Si el punto de llegada tiene la misma altura que el de salida, $v_{0y} > 0$ y no hay obstáculos anteriores, factorizar $y(T) - y_0 = 0$ proporciona

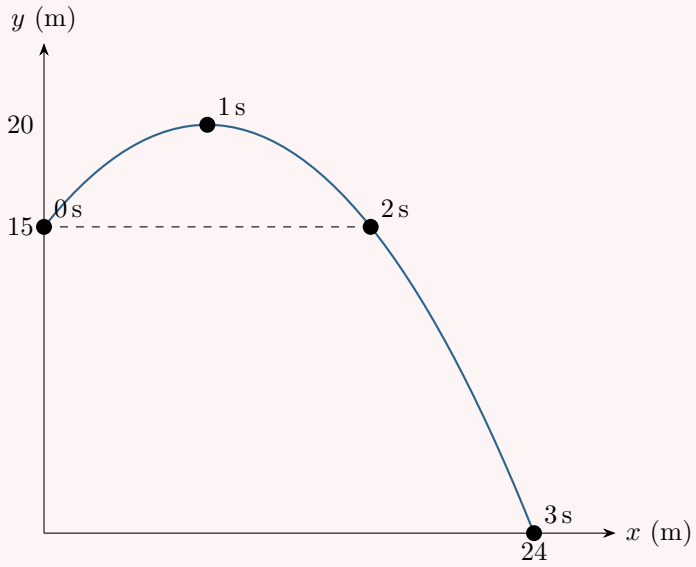
$$T = \frac{2v_{0y}}{g}, \qquad R = v_{0x}T = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}. \tag{5.4}$$

En la última igualdad usamos $2\sin\theta\cos\theta = \sin(2\theta)$, identidad trigonométrica para el doble de un ángulo. $R$ es aquí el desplazamiento horizontal; para $0 < \theta < 90^\circ$ es positivo y coincide con el alcance usual. La igualdad de alturas es una hipótesis de la deducción y debe comprobarse antes de emplear estas expresiones.

**PROBLEMA RESUELTO 5.8 · Llegar a una altura diferente**

Desde una plataforma de 15 m se lanza una pelota con $\vec{v}_0 = (8, 10)\,\text{m/s}$. Encuentra el impacto con el suelo y la altura máxima.

*Resolución.* La ecuación vertical es $y = 15 + 10t - 5t^2$ en SI. Al imponer $y = 0$ obtenemos $t^2 - 2t - 3 = 0$, es decir $(t - 3)(t + 1) = 0$ al medir $t$ en segundos. El tiempo físico es $T = 3\,\text{s}$; $2v_{0y}/g = 2\,\text{s}$ corresponde al regreso a la altura de la plataforma, mientras el suelo se alcanza después. El impacto ocurre en $x = 8(3) = 24\,\text{m}$, con $\vec{v}_f = (8, -20)\,\text{m/s}$ y rapidez $\sqrt{464}\,\text{m/s} \simeq 21{,}54\,\text{m/s}$. La cumbre se alcanza al segundo de vuelo, a $15 + 10 - 5 = 20\,\text{m}$ sobre el suelo. Ganó 5 m respecto de la salida.

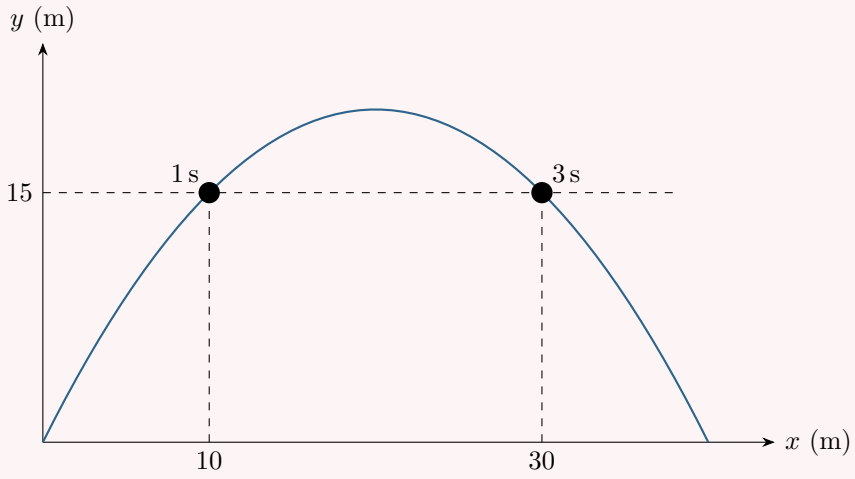



Tras 2 s se recupera la altura de salida; el impacto con el suelo ocurre un segundo después. Las marcas corresponden al mismo reloj en ambos ejes.

**PROBLEMA RESUELTO 5.9 · Una altura puede corresponder a dos instantes**

Un lanzamiento desde el origen tiene $\vec{v}_0 = (10, 20)\,\mathrm{m/s}$. Encuentra todos los puntos del vuelo en que la altura es 15 m.

*Resolución.* La condición $20t - 5t^2 = 15$ da $t^2 - 4t + 3 = 0$ en SI, con raíces 1 s y 3 s. Ambas pertenecen al vuelo $0 \le t \le 4\,\mathrm{s}$. Los puntos son $(10, 15)\,\mathrm{m}$ y $(30, 15)\,\mathrm{m}$. En el primero $v_y = +10\,\mathrm{m/s}$ y en el segundo $v_y = -10\,\mathrm{m/s}$: la pelota pasa por esa altura al subir y al bajar. Debemos examinar la posición y el sentido de movimiento asociados a cada raíz positiva. Si se preguntara por una persona en $(10, 15)\,\mathrm{m}$, únicamente la primera raíz cumpliría también la coordenada horizontal.




La horizontal $y = 15\,\mathrm{m}$ corta dos veces el arco de vuelo, en puntos e instantes distintos.

Para dibujar la trayectoria podemos eliminar el tiempo siempre que $v_{0x} \neq 0$. De $t = (x - x_0)/v_{0x}$ resulta

$$y = y_0 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}(x - x_0) - \frac{g}{2v_{0x}^2}(x - x_0)^2. \tag{5.5}$$

Es una parábola en estos ejes. El coeficiente del término cuadrático tiene unidad de longitud inversa, de modo que el último término sigue siendo una altura. Si $v_{0x} = 0$, el lanzamiento es vertical y debemos conservar la descripción paramétrica, que sigue siendo válida. Incluso cuando la ecuación de la parábola existe, el vuelo físico puede ocupar solo un arco, hasta el primer impacto.

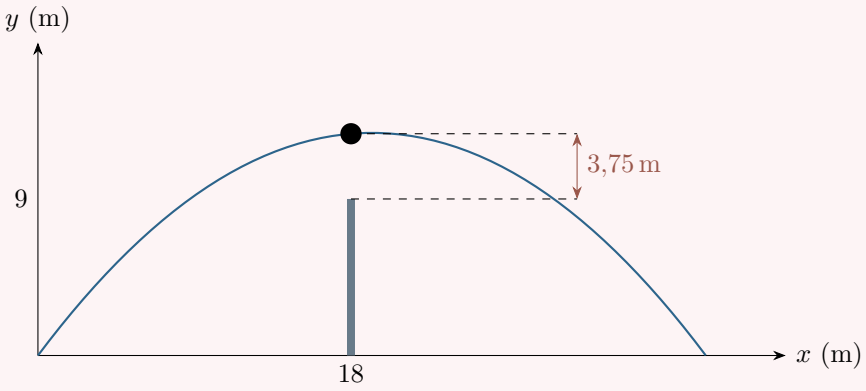
**PROBLEMA RESUELTO 5.10 · Una pared selecciona el instante pertinente**

La pelota del problema 5.7 encuentra una pared delgada de 9 m de altura en $x = 18$ m. ¿Pasa sobre ella? Idealiza la pelota como un punto y la parte superior de la pared como horizontal.

*Resolución.* La coordenada de la pared determina el instante: $t = 18/12 = 1{,}5$ s. Está dentro del vuelo calculado anteriormente. La altura entonces es

$$y = 16(1{,}5) - 5(1{,}5)^2 = 12{,}75\,\text{m}.$$

Supera la pared por 3,75 m. Resolver primero $y = 9$ m daría los instantes de paso por la altura de la pared; la llegada a ella se determina mediante su posición horizontal. La ecuación de la trayectoria, $y = \frac{4}{3}x - x^2/(28{,}8\,\text{m})$, conduce al mismo resultado al sustituir $x = 18$ m.




La pared fija una coordenada horizontal. La comparación de alturas en esa coordenada permite decidir si el proyectil supera la pared.

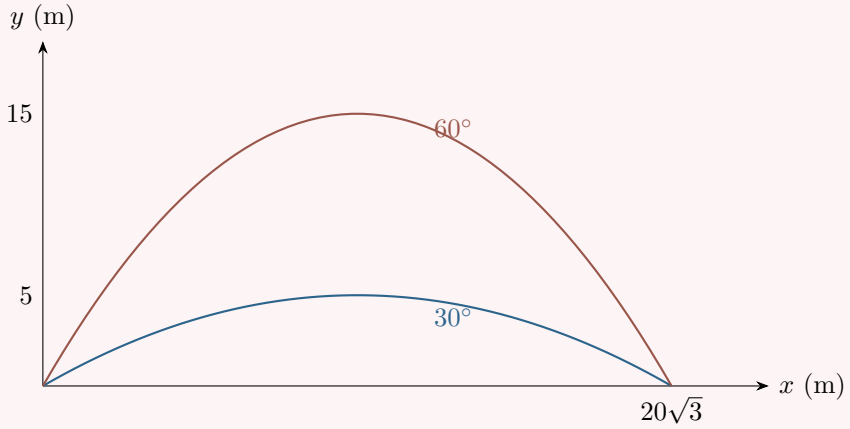
**PROBLEMA RESUELTO 5.11 · Dos ángulos, un alcance y vuelos diferentes**

Desde el suelo se lanzan dos pelotas a 20 m/s, una a 30° y otra a 60° sobre la horizontal. Compara alcance, duración y altura máxima; determina después el ángulo de alcance máximo para esa rapidez inicial.

*Resolución.* Para 30°, $v_{0x} = 10\sqrt{3}\,\text{m/s}$ y $v_{0y} = 10\,\text{m/s}$; para 60° se intercambian estas componentes. Las expresiones ya deducidas dan

| $\theta$ | $R$ (m) | $T$ (s) | $y_H$ (m) |
|---|---|---|---|
| 30° | $20\sqrt{3}$ | 2 | 5 |
| 60° | $20\sqrt{3}$ | $2\sqrt{3}$ | 15 |

Los alcances coinciden porque $\sin 60° = \sin 120°$, pero el segundo vuelo dura más y sube más alto. Para $0 < \theta < 90°$, $\sin(2\theta) \leq 1$, con igualdad en $\theta = 45°$; por ello $R_{\text{máx}} = v_0^2/g = 40\,\text{m}$. Podemos justificar este máximo mediante el valor máximo del seno. La conclusión se obtiene para alturas iguales bajo las hipótesis del modelo; una plataforma elevada o una resistencia importante del aire requieren un nuevo análisis del ángulo óptimo.




Dos arcos con el mismo alcance y distintas alturas. Las duraciones se calculan a partir de las ecuaciones temporales.

## 5.4 Encuentros: coincidir en el espacio y en el tiempo

Una intersección en un plano solo dice que los caminos tienen un punto común. Para que dos partículas se encuentren deben ocupar ese punto en el mismo instante de un reloj compartido:

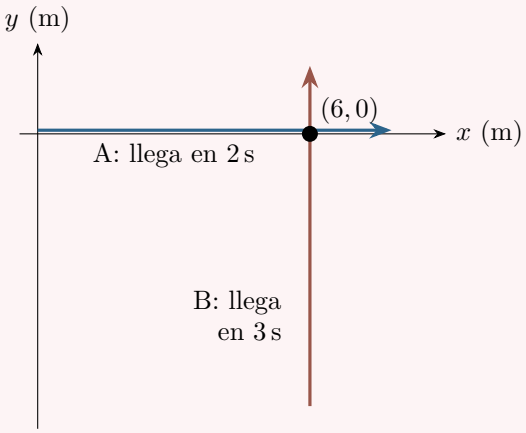
$$\vec{r}_A(t) = \vec{r}_B(t), \qquad x_A(t) = x_B(t), \quad y_A(t) = y_B(t).$$

Las dos igualdades deben admitir una misma solución dentro de los intervalos de validez. Si un móvil parte más tarde, sus ecuaciones deben expresar el tiempo de marcha a partir del instante de salida.

### PROBLEMA RESUELTO 5.12 · Coincidencia espacial y simultaneidad

Desde $t = 0$, A parte de $(0, 0)\,\mathrm{m}$ con velocidad $(3, 0)\,\mathrm{m/s}$ y B parte de $(6, -6)\,\mathrm{m}$ con velocidad $(0, 2)\,\mathrm{m/s}$. ¿Se encuentran? ¿Qué ocurre si A espera un segundo antes de iniciar el mismo movimiento?

*Resolución.* Los caminos se cruzan en $(6, 0)\,\mathrm{m}$. A llega allí en $2\,\mathrm{s}$ y B en $3\,\mathrm{s}$. La igualdad horizontal exige $t = 2\,\mathrm{s}$, mientras la vertical exige $t = 3\,\mathrm{s}$; no hay encuentro. Si A espera, para $t \geq 1\,\mathrm{s}$ su posición es $x_A = (3\,\mathrm{m/s})(t - 1\,\mathrm{s})$ e $y_A = 0$. Entonces ambas igualdades se cumplen en $t = 3\,\mathrm{s}$, cuando A lleva dos segundos caminando. Antes de partir A está en el origen, que tampoco pertenece al camino de B.




Las etiquetas sitúan el paso de cada móvil por el cruce en instantes distintos. Retrasar A un segundo hace simultáneo el paso por el cruce.

### PROBLEMA RESUELTO 5.13 · Dos proyectiles y una aceleración que se cancela

En $t = 0$ se lanzan simultáneamente A desde $(0, 0)\,\mathrm{m}$ con velocidad $(10, 15)\,\mathrm{m/s}$ y B desde $(20, 10)\,\mathrm{m}$ con velocidad $(0, 10)\,\mathrm{m/s}$. Ambos están en vuelo libre bajo la misma gravedad. ¿Coinciden antes de llegar al suelo horizontal $y = 0$?

*Resolución.* Restar las posiciones elimina el término gravitatorio común:

$$\vec{r}_B - \vec{r}_A = (20\,\mathrm{m} - 10\,\mathrm{m/s}\,t)\hat{\imath} + (10\,\mathrm{m} - 5\,\mathrm{m/s}\,t)\hat{\jmath}.$$

Las dos componentes se anulan en $t = 2\,\mathrm{s}$. Al sustituir, ambas partículas están en $(20, 10)\,\mathrm{m}$. A no alcanza el suelo hasta $3\,\mathrm{s}$ y B hasta $(1 + \sqrt{3})\,\mathrm{s}$, por lo que el encuentro pertenece a los dos vuelos. Las velocidades allí son $(10, -5)\,\mathrm{m/s}$ y $(0, -10)\,\mathrm{m/s}$: los cuerpos ocupan la misma posición con velocidades distintas. Si fueran objetos materiales, un choque podría invalidar las leyes de vuelo posteriores; solo hemos descrito lo que sucede hasta la coincidencia.

| **Instante** | **A:** $(x, y)$ **en m** | **B:** $(x, y)$ **en m** |
|---|---|---|
| $0\,\mathrm{s}$ | $(0, 0)$ | $(20, 10)$ |
| $1\,\mathrm{s}$ | $(10, 10)$ | $(20, 15)$ |
| $2\,\mathrm{s}$ | $(20, 10)$ | $(20, 10)$ |

Las separaciones pasan de $(20, 10)\,\mathrm{m}$ a $(10, 5)\,\mathrm{m}$ y a cero. El mismo descenso gravitatorio se cancela al restar posiciones.

## 5.5 Movimiento circular: cambiar de dirección es acelerar

En una pista circular, un móvil puede conservar la lectura de su velocímetro y, sin embargo, cambiar continuamente su velocidad vectorial. Necesitamos una descripción que haga visible ese cambio de dirección. Si el círculo tiene centro en el origen y radio $R > 0$, la trigonometría proporciona

$$x(t) = R\cos\theta(t), \qquad y(t) = R\sin\theta(t).$$

Mediremos $\theta$ en radianes, positivos en sentido antihorario. Un radián corresponde a un arco cuya longitud es igual al radio; en general $\theta = s_{\text{arco}}/R$ para un arco orientado. Una vuelta equivale a $2\pi$ radianes. Esta convención hace que las derivadas del seno y del coseno conserven las formas del capítulo 3, sin factores de conversión de grados.

La velocidad angular es $\omega = d\theta/dt$. En movimiento circular uniforme, $\omega$ es constante y $\theta = \theta_0 + \omega t$ al elegir $t_0 = 0$. Aplicando la regla de la cadena,

$$\vec{v} = R\omega(-\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}),$$
$$\vec{a} = -R\omega^2(\cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath}) = -\omega^2\vec{r}.$$

Derivar el seno o el coseno introduce un factor $\omega$, y la segunda derivada introduce otro. El vector entre paréntesis en $\vec{v}$ tiene módulo uno y es perpendicular al radio: la velocidad es tangente. La aceleración apunta hacia el centro, aunque la rapidez sea constante. Sus magnitudes satisfacen

$$u = R|\omega|, \qquad a_c = R\omega^2 = \frac{u^2}{R}. \tag{5.6}$$

Se llama *centrípeta* por su dirección hacia el centro; la identificación de la interacción que la produce corresponde a la dinámica. Si $\omega \neq 0$, el período es $T = 2\pi/|\omega|$ y la frecuencia, el número de vueltas por unidad de tiempo, es $f = 1/T$, medida en hercios ($1\,\text{Hz} = 1\,\text{s}^{-1}$).

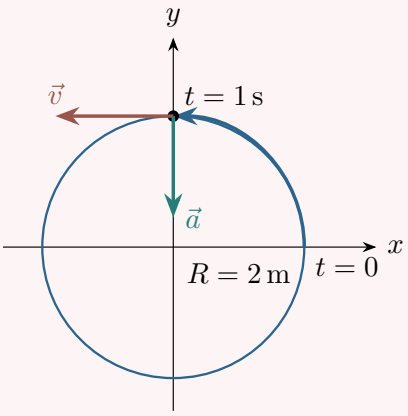
**PROBLEMA RESUELTO 5.14 · Un cuarto de vuelta**

Una partícula recorre un círculo de radio 2 m en 4 s, con rapidez constante y sentido antihorario. Parte de $(2, 0)$ m. Determina su posición, velocidad y aceleración al cabo de 1 s.

*Resolución.* La velocidad angular es $\omega = 2\pi/(4\,\text{s}) = (\pi/2)\,\text{rad/s}$. Tras un segundo ha girado $\pi/2$ radianes y está en $(0, 2)$ m. La rapidez es $u = R\omega = \pi\,\text{m/s}$. La tangente antihoraria en el punto superior apunta a la izquierda, mientras la aceleración apunta hacia el origen:

$$\vec{v} = (-\pi, 0)\,\text{m/s},$$
$$\vec{a} = (0, -\pi^2/2)\,\text{m/s}^2.$$

La aceleración apunta al centro y es distinta de $\vec{0}$, mientras la derivada de la rapidez es cero. En una vuelta completa el desplazamiento sería cero y la distancia $4\pi$ m, lo que vuelve a separar trayectoria y desplazamiento.




La velocidad es tangente y la aceleración apunta al centro. Las flechas representan direcciones; cada magnitud se interpreta con su propia unidad y escala.

Cuando $\omega$ cambia, la rapidez puede cambiar además de la dirección. Escribamos $\alpha = d\omega/dt$. Al derivar $R\omega(-\sin\theta, \cos\theta)$ usamos la regla del producto: un término procede de derivar $\omega$ y el otro de derivar las funciones trigonométricas. Resulta

$$\vec{a} = R\alpha(-\sin\theta, \cos\theta) - R\omega^2(\cos\theta, \sin\theta).$$

Los términos son perpendiculares: uno tangente y otro radial hacia el centro. Sus módulos son $R|\alpha|$ y $R\omega^2$. El módulo de la aceleración total se obtiene mediante la suma vectorial de ambas componentes. Esta descripción cinemática se construye a partir de la posición y sus derivadas.

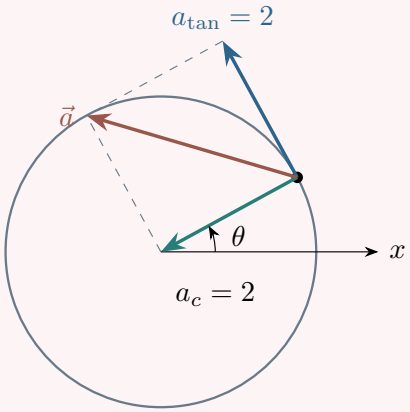
**PROBLEMA RESUELTO 5.15 · El giro se hace cada vez más rápido**

Una partícula permanece sobre un círculo de radio 2 m y su ángulo es $\theta(t) = (0{,}5\,\mathrm{rad/s^2})t^2$, para $t \geq 0$. Calcula la rapidez y las componentes tangencial y centrípeta de la aceleración en $t = 1\,\mathrm{s}$.

*Resolución.* Derivar el ángulo da $\omega = (1\,\mathrm{rad/s^2})t$ y $\alpha = 1\,\mathrm{rad/s^2}$. En el instante pedido, $\theta = 0{,}5\,\mathrm{rad}$ y $\omega = 1\,\mathrm{rad/s}$. Así,

$$\begin{aligned} u &= 2\,\mathrm{m/s}, \\ a_{\tan} &= 2\,\mathrm{m/s^2}, \\ a_c &= 2\,\mathrm{m/s^2}, \\ |\vec{a}| &= 2\sqrt{2}\,\mathrm{m/s^2}. \end{aligned}$$

El término tangencial apunta en el sentido del movimiento porque $\omega$ y $\alpha$ son positivos; el radial apunta hacia el centro. Aunque sus módulos coinciden, tienen direcciones perpendiculares. Usar únicamente $u^2/R$ omitiría el cambio de rapidez.




Componentes de aceleración en $\mathrm{m/s^2}$, con una misma escala para las tres flechas. Su suma vectorial es la diagonal del paralelogramo, de módulo $2\sqrt{2}\,\mathrm{m/s^2}$.

## 5.6 Cambiar de observador sin cambiar el suceso

Desde un tren que avanza sin girar, una persona puede ver una pelota subir y bajar por una misma vertical; desde el andén, otra persona ve que la pelota también avanza. Los dos observadores están describiendo los mismos sucesos con distintos orígenes. Para compararlos fijaremos ejes paralelos, unidades iguales y relojes sincronizados, con un mismo tiempo $t$ de la mecánica clásica.

Sea S la referencia del suelo y S′ otra cuyo origen tiene posición $\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \vec{U}t$ en S, con $\vec{U}$ constante. La suma geométrica de los vectores de posición da $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}\,'$. Por tanto,

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{R}_0 - \vec{U}t, \qquad \vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{U}, \qquad \vec{a}\,' = \vec{a}. \tag{5.7}$$

Estas son transformaciones galileanas para una traslación uniforme sin rotación. La igualdad de aceleraciones se deduce al derivar la velocidad constante $\vec{U}$: su derivada es cero. Si el origen acelera, en ejes que siguen siendo paralelos obtendríamos $\vec{a}\,' = \vec{a} - \ddot{\vec{R}}$; si además giran los ejes, aparecen cambios adicionales que quedan fuera de este capítulo. Las transformaciones galileanas son la aproximación clásica adecuada para velocidades pequeñas frente a la velocidad de la luz.

**PROBLEMA RESUELTO 5.16 · Una pelota lanzada dentro de un tren**

Un tren avanza a 12 m/s respecto del suelo. En su interior se lanza una pelota verticalmente hacia arriba a 6 m/s respecto del tren. Supón el tren en traslación uniforme, aire sin efectos apreciables y un techo suficientemente alto. Describe el vuelo hasta regresar a la altura de salida en las dos referencias.

*Resolución.* Hacemos coincidir los orígenes con la salida en $t = 0$ y tomamos $y$ hacia arriba. En el tren, $x' = 0$ e $y' = (6\,\mathrm{m/s})t - (5\,\mathrm{m/s^2})t^2$. En el suelo,

$$x = (12\,\mathrm{m/s})t, \qquad y = (6\,\mathrm{m/s})t - (5\,\mathrm{m/s^2})t^2.$$

La pelota regresa a la altura inicial en 1,2 s, después de avanzar 14,4 m respecto del suelo, lo mismo que el punto de lanzamiento del tren. Por eso vuelve a ese punto si se mantienen las hipótesis. En ambas referencias la aceleración es $(0, -10)\,\mathrm{m/s^2}$. La trayectoria recta de S′ y la parábola de S reúnen las posiciones medidas desde sus respectivos orígenes móviles.

| **Instante** | **Suelo:** $(x, y)$ **en m** | **Tren:** $(x\prime, y\prime)$ **en m** |
|---|---|---|
| 0 s | (0, 0) | (0, 0) |
| 0,6 s | (7,2, 1,8) | (0, 1,8) |
| 1,2 s | (14,4, 0) | (0, 0) |

El mismo reloj y la misma altura en cada fila; las coordenadas horizontales difieren en el avance del origen del tren.

Para evitar confundir velocidades, escribiremos $\vec{v}_{A/B}$ como «velocidad de A respecto de B». Al comparar un objeto A, un medio B y la orilla S,

$$\vec{v}_{A/S} = \vec{v}_{A/B} + \vec{v}_{B/S}.$$

La suma es vectorial. Una embarcación puede apuntar al norte respecto del agua y desplazarse al nordeste respecto de la orilla; la velocidad de la corriente forma parte de la segunda descripción. Supondremos orillas rectas, corriente uniforme y velocidades constantes durante el cruce.

**PROBLEMA RESUELTO 5.17 · Cruzar antes o llegar justo enfrente**

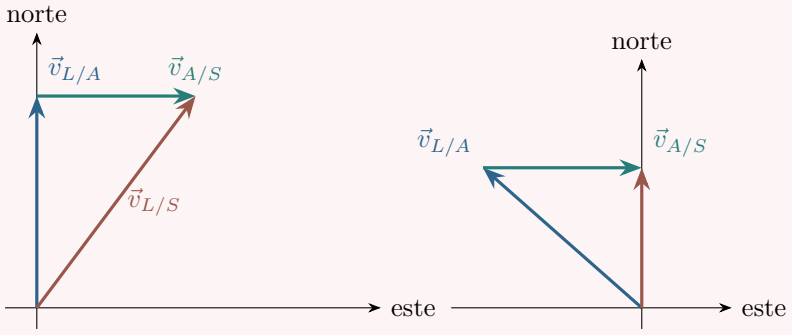
Un río tiene 120 m de anchura de sur a norte y corriente de 3 m/s al este. Una lancha puede mantener 4 m/s respecto del agua en cualquier dirección. Compara el cruce de menor tiempo con el que termina exactamente enfrente del punto de partida.

*Resolución.* Elegimos $x$ al este e $y$ al norte. Para minimizar el tiempo debemos maximizar la componente norte de la velocidad respecto de la orilla. La corriente tiene componente norte nula, y una velocidad de módulo 4 m/s tiene componente norte máxima 4 m/s cuando apunta directamente al norte. En ese caso $t = 120/4 = 30\,\text{s}$ y la corriente desplaza la lancha $3(30) = 90\,\text{m}$ al este.

Para llegar justo enfrente la componente este total debe ser cero. La lancha necesita $v_{L/A,x} = -3\,\text{m/s}$. Como su rapidez respecto del agua es 4 m/s, Pitágoras deja $v_{L/A,y} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}\,\text{m/s}$. Así,

$$t = \frac{120}{\sqrt{7}}\,\text{s} \simeq 45{,}36\,\text{s}, \qquad \beta = \arcsin(3/4) \simeq 48{,}6^\circ$$

al oeste del norte. Compensar la corriente sacrifica avance transversal y aumenta el tiempo. En general, llegar justo enfrente con velocidad constante exige que la rapidez disponible respecto del agua sea *mayor* que la de la corriente: si fueran iguales, toda la velocidad se usaría para contrarrestarla y no quedaría componente de cruce.




Menor tiempo
$(3, 4)\,\text{m/s}$ respecto de la orilla

Llegar enfrente
$(0, \sqrt{7})\,\text{m/s}$ respecto de la orilla

Triángulos de velocidades con escala común: lancha respecto del agua (L/A), agua respecto de la orilla (A/S) y lancha respecto de la orilla (L/S). Se suman punta con cola.

Para comparar dos móviles en una misma referencia también podemos definir la separación $\vec{\rho} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$. Su derivada es la velocidad relativa $\vec{w} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$. Si ambas velocidades son constantes, $\vec{\rho}(t) = \vec{\rho}_0 + \vec{w}t$. Un encuentro requiere $\vec{\rho} = \vec{0}$; la menor separación puede ser positiva.

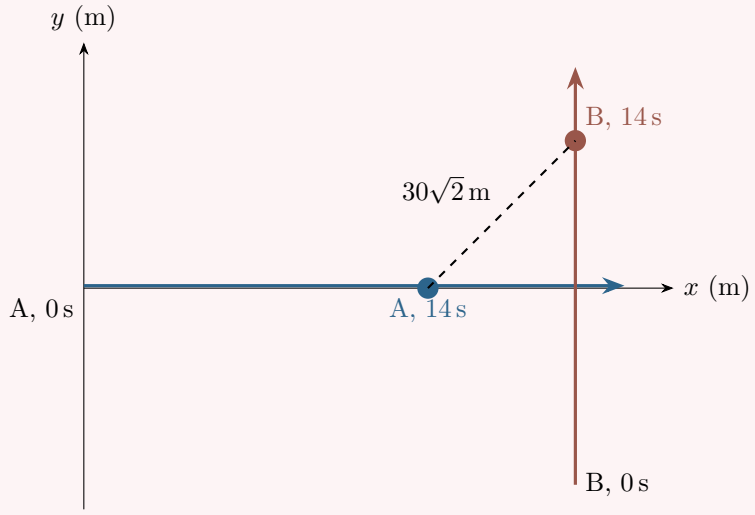
**PROBLEMA RESUELTO 5.18 · Distancia mínima entre dos móviles**

Desde $t = 0$, A parte del origen con velocidad $(5, 0)\,\mathrm{m/s}$ y B parte de $(100, -40)\,\mathrm{m}$ con velocidad $(0, 5)\,\mathrm{m/s}$. Los modelos rigen para $0 \le t \le 30\,\mathrm{s}$. Encuentra su menor separación en ese intervalo.

*Resolución.* La separación es $\vec{\rho}(t) = (100 - 5t, -40 + 5t)\,\mathrm{m}$ si $t$ se expresa en segundos. En vez de minimizar una raíz, minimizamos su cuadrado, que crece junto con la distancia:

$$d^2(t) = (100 - 5t)^2 + (-40 + 5t)^2 = 50(t - 14)^2 + 1800,$$

con $d$ en metros y $t$ en segundos. El cuadrado se hace mínimo en $t = 14\,\mathrm{s}$, que pertenece al intervalo. Entonces A está en $(70, 0)\,\mathrm{m}$ y B en $(100, 30)\,\mathrm{m}$: la distancia mínima es $30\sqrt{2}\,\mathrm{m} \simeq 42{,}43\,\mathrm{m}$. La igualdad horizontal ocurriría en $20\,\mathrm{s}$ y la vertical en $8\,\mathrm{s}$; no hay encuentro. Si la ventana observada terminara antes de $14\,\mathrm{s}$, habría que buscar el mínimo restringido a esa ventana.




Posiciones simultáneas de menor separación. Los caminos se cruzan en $(100, 0)\,\mathrm{m}$, pero los móviles pasan por ese punto en tiempos diferentes.

## 5.7 Del modelo a una observación

La independencia de las componentes es una propiedad del modelo de aceleración que hemos elegido. Con resistencia del aire, las aceleraciones pueden depender de las componentes de la velocidad, y resolver un eje puede requerir información del otro. La trayectoria parabólica se obtiene como consecuencia de las hipótesis elegidas; su aplicación a un objeto real requiere contrastarlas. La observación permite examinar si tales hipótesis son adecuadas en una situación concreta.

**Seguir una pelota en un vídeo**

Graba, con autorización y en un lugar despejado, el vuelo corto de una pelota blanda. Coloca la cámara fija, aproximadamente perpendicular al plano del movimiento, y una referencia de longitud en ese mismo plano para controlar la perspectiva. Selecciona una secuencia de instantes igualmente espaciados y registra $t$, $x$ e $y$; realiza el ensayo desde una altura segura.

**Continuación**

La elección del muestreo también afecta lo que podemos detectar. Para tres lecturas de una caída parabólica igualmente separadas por $\Delta t$, la segunda diferencia es $D = y(t+\Delta t) - 2y(t) + y(t-\Delta t) = -g(\Delta t)^2$. Si cada posición admite una cota absoluta $\varepsilon = 0{,}01\,\mathrm{m}$, la desigualdad triangular da $|\delta D| \le 4\varepsilon = 0{,}04\,\mathrm{m}$. Con $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ y $\Delta t = 0{,}10\,\mathrm{s}$, $|D| = 0{,}10\,\mathrm{m}$ supera esa cota; con $\Delta t = 0{,}05\,\mathrm{s}$, vale $0{,}025\,\mathrm{m}$ y los intervalos compatibles con curvatura nula se solapan. Reducir la separación disminuye la señal de curvatura entre tres lecturas. Esta cota conservadora admite errores correlacionados; la incertidumbre estándar requiere el tratamiento de C23. Conserva los registros brutos para poder revisar la calibración y el modelo.
Compara los incrementos horizontales $x_{k+1} - x_k$ y las segundas diferencias verticales $y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}$. Si el modelo ideal y el intervalo uniforme $\Delta t$ fueran exactos, los primeros serían constantes y las segundas valdrían $-g(\Delta t)^2$: se comprueba sustituyendo las ecuaciones del proyectil. Busca desviaciones considerando la resolución de las posiciones, la escala, el desenfoque y la elección de fotogramas antes de atribuirlas a una nueva interacción. Conserva los datos originales y contrasta con ellos la curva ajustada y otros modelos compatibles.

El avance respecto del capítulo anterior consiste en conservar un reloj y recomponer direcciones. En una recta bastaba vigilar un signo; en el plano, además de los signos, importa la orientación de cada vector y la simultaneidad de sus componentes. El estudio de las fuerzas explicará después qué interacciones pueden producir las aceleraciones que aquí hemos descrito.

## Ejercicios para reconstruir y transferir

Intenta primero los ejercicios sin consultar el solucionario. En todos los vuelos usa $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$, eje vertical positivo hacia arriba y las hipótesis ideales de la sección 5.3; el suelo indicado es horizontal y termina el vuelo. En los movimientos dados por funciones, conserva las unidades de sus coeficientes. Los resultados aproximados expresan el redondeo de los datos idealizados.

**EJERCICIO 5.1 · Dos tramos perpendiculares**

Un móvil recorre en orden $(0,0)$, $(6,0)$ y $(6,8)\,\mathrm{m}$ durante $7\,\mathrm{s}$. Calcula desplazamiento, distancia, velocidad media y rapidez media.

**EJERCICIO 5.2 · Derivar y orientar**

Para $0 \le t \le 3\,\mathrm{s}$, $x = 1\,\mathrm{m} + (2\,\mathrm{m/s})t$ e $y = 4\,\mathrm{m} - (1\,\mathrm{m/s^2})t^2$. Encuentra $\vec{r}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$ y rapidez en $t = 1\,\mathrm{s}$. Da la dirección de la velocidad.

**EJERCICIO 5.3 · Trayectoria sin reloj**

Compara $x_A = (1\,\mathrm{m/s})t$, $y_A = (1\,\mathrm{m/s^2})t^2$ con $x_B = (2\,\mathrm{m/s})t$, $y_B = (4\,\mathrm{m/s^2})t^2$, para $0 \le t \le 3\,\mathrm{s}$. Elimina $t$ y compara el paso por $(2,4)\,\mathrm{m}$.

**EJERCICIO 5.4 · Una parada parcial**

Un móvil parte de $(2, -1)\,\mathrm{m}$ con velocidad $(-2, 3)\,\mathrm{m/s}$ y aceleración constante $(1, -1)\,\mathrm{m/s^2}$. Encuentra su estado en $t = 2\,\mathrm{s}$ y decide si está detenido.

**EJERCICIO 5.5 · Reconstrucción desde una aceleración variable**

Para $0 \le t \le 2\,\mathrm{s}$, $\vec{a}(t) = (4\,\mathrm{m/s^3})t\,\hat{\imath} - 2\,\mathrm{m/s^2}\,\hat{\jmath}$, $\vec{v}_0 = (0, 3)\,\mathrm{m/s}$ y $\vec{r}_0 = (1, 0)\,\mathrm{m}$. Obtén $\vec{v}(t)$ y $\vec{r}(t)$; evalúa en el extremo final.

**EJERCICIO 5.6 · Una altura a partir del alcance**

Una pelota sale horizontalmente a $10\,\mathrm{m/s}$ y llega al suelo $20\,\mathrm{m}$ más adelante. Determina la altura de salida y la velocidad final.

**EJERCICIO 5.7 · Un lanzamiento desde el suelo**

Para $\vec{v}_0 = (9, 12)\,\mathrm{m/s}$, calcula tiempo de vuelo, alcance, altura máxima y velocidad en la cumbre.

**EJERCICIO 5.8 · La plataforma cambia la duración**

Se lanza una pelota desde $10\,\mathrm{m}$ de altura con $\vec{v}_0 = (6, 5)\,\mathrm{m/s}$. Encuentra el tiempo y la posición horizontal de impacto, y la rapidez justo antes.

**EJERCICIO 5.9 · Dos raíces físicamente posibles**

Una pelota sale del origen con $\vec{v}_0 = (8, 15)\,\mathrm{m/s}$. Encuentra los instantes y las posiciones donde $y = 10\,\mathrm{m}$. Clasifica los pasos como ascendente o descendente.

**EJERCICIO 5.10 · Una pared en el camino**

Para el lanzamiento del ejercicio 5.7, una pared está en $x = 9\,\mathrm{m}$ y tiene $7\,\mathrm{m}$ de altura. ¿La pelota ideal pasa sobre ella? ¿Qué cambia si la pared mide $8\,\mathrm{m}$?

**EJERCICIO 5.11 · Reconstruir un lanzamiento**

Un proyectil parte del origen y pasa por $(12, 5)\,\mathrm{m}$ en $t = 1\,\mathrm{s}$ antes de tocar el suelo $y = 0$. Determina la velocidad inicial, la altura máxima y el alcance.

**EJERCICIO 5.12 · Hasta dónde vale el ángulo de cuarenta y cinco grados**

Demuestra que dos lanzamientos desde el mismo nivel, con igual rapidez y ángulos $\theta$ y $90^\circ - \theta$, tienen igual alcance si $0 < \theta < 90^\circ$. Explica por qué esa conclusión no puede trasladarse sin más a una plataforma elevada.

**EJERCICIO 5.13 · Una coincidencia simultánea**

A parte de $(0,0)\,\mathrm{m}$ con velocidad $(2,1)\,\mathrm{m/s}$ y B de $(12,0)\,\mathrm{m}$ con $(-1,1)\,\mathrm{m/s}$. Ambos parten en $t=0$ y mantienen sus velocidades. ¿Cuándo y dónde se encuentran?

**EJERCICIO 5.14 · Un cruce en instantes distintos**

A parte del origen con velocidad $(4,0)\,\mathrm{m/s}$ y B de $(8,-6)\,\mathrm{m}$ con velocidad $(0,2)\,\mathrm{m/s}$, en $t=0$. Decide si se encuentran y encuentra cuánto debe retrasar A su partida para lograrlo.

**EJERCICIO 5.15 · Una gravedad común**

En $t=0$, A sale del suelo en el origen con $\vec{v}_{A0}=(6,12)\,\mathrm{m/s}$ y B de $(12,4)\,\mathrm{m}$ con $\vec{v}_{B0}=(0,10)\,\mathrm{m/s}$. ¿Coinciden mientras ambos siguen por encima del suelo? Da las velocidades en ese instante.

**EJERCICIO 5.16 · Un semicírculo uniforme**

Un móvil recorre un círculo de radio $3\,\mathrm{m}$ con período $6\,\mathrm{s}$, desde $(3,0)\,\mathrm{m}$ y en sentido antihorario. Obtén rapidez, aceleración centrípeta y los vectores posición, velocidad y aceleración tras $3\,\mathrm{s}$. Compara distancia y desplazamiento en ese intervalo.

**EJERCICIO 5.17 · Cambiar la rapidez sobre el mismo círculo**

Si un móvil duplica su rapidez sobre un círculo de radio fijo, ¿cómo cambian la aceleración centrípeta y el período, suponiendo uniforme cada uno de los dos movimientos comparados? Justifica sin un ejemplo numérico.

**EJERCICIO 5.18 · Dos componentes de aceleración**

Una partícula describe un círculo de radio $1\,\mathrm{m}$ con $\theta=(1\,\mathrm{rad/s^2})t^2$. En $t=1\,\mathrm{s}$ determina rapidez, aceleración tangencial, aceleración centrípeta y módulo de la aceleración total.

**EJERCICIO 5.19 · Una pelota vista desde dos referencias**

Un tren en traslación uniforme avanza a $10\,\mathrm{m/s}$. Una pelota se lanza hacia arriba a $5\,\mathrm{m/s}$ respecto del tren y sin componente horizontal en él. Obtén las posiciones en ambas referencias hasta volver a la altura inicial y la distancia horizontal recorrida respecto del suelo. Supón espacio suficiente.

**EJERCICIO 5.20 · Rumbo directo y rumbo compensado**

Un río de $60\,\mathrm{m}$ de ancho corre al este a $1\,\mathrm{m/s}$. Una lancha tiene rapidez de $2\,\mathrm{m/s}$ respecto del agua. Calcula duración y deriva si apunta al norte; después determina rumbo y duración para llegar justo enfrente.

**EJERCICIO 5.21 · El caso límite de la corriente**

Un río corre al este a 2 m/s y una nadadora puede mantener a lo sumo 2 m/s respecto del agua. ¿Puede llegar a la orilla norte justo enfrente mediante un rumbo constante? ¿Puede alcanzar esa orilla en otro punto? Explica las dos respuestas.

**EJERCICIO 5.22 · Encuentro y menor separación**

Para $0 \le t \le 10\,\mathrm{s}$, A parte del origen con $\vec{v}_A = (2, 0)\,\mathrm{m/s}$ y B de $(10, 10)\,\mathrm{m}$ con $\vec{v}_B = (0, -1)\,\mathrm{m/s}$. Determina la menor separación y decide si se encuentran.

**EJERCICIO 5.23 · Una figura insuficiente**

Un dibujo muestra una parábola cóncava hacia abajo. ¿Permite concluir que la aceleración del móvil es constante y vertical? Construye dos parametrizaciones del mismo arco, para $0 \le t \le 1\,\mathrm{s}$, con aceleraciones distintas. Puedes usar $x = L\tau$, $y = L(\tau - \tau^2)$ y después sustituir $\tau$ por $\tau^2$, donde $\tau = t/(1\,\mathrm{s})$ y $L = 1\,\mathrm{m}$.

**EJERCICIO 5.24 · La aceleración vista desde un vehículo que arranca**

En ejes paralelos a los del suelo, un vehículo tiene aceleración $+2\,\mathrm{m/s^2}$ horizontal. Un objeto permanece fijo en el suelo. ¿Qué aceleración horizontal le asigna alguien que usa el vehículo como origen? Explica por qué no contradice la igualdad de aceleraciones de las transformaciones galileanas uniformes.

## Soluciones completas de los ejercicios

**SOLUCIÓN 5.1.**
Los extremos dan $\Delta\vec{r} = (6, 8)\,\mathrm{m}$, de módulo 10 m. La distancia suma los dos tramos: $s = 6 + 8 = 14\,\mathrm{m}$. Por tanto, $\overline{\vec{v}} = (6/7, 8/7)\,\mathrm{m/s}$ y la rapidez media es $14/7 = 2\,\mathrm{m/s}$. El módulo de la velocidad media es $10/7\,\mathrm{m/s}$ y se obtiene a partir del desplazamiento.

**SOLUCIÓN 5.2.**
En 1 s, $\vec{r} = (3, 3)\,\mathrm{m}$. Al derivar obtenemos $v_x = 2\,\mathrm{m/s}$, $v_y = -(2\,\mathrm{m/s^2})t$ y $\vec{a} = (0, -2)\,\mathrm{m/s^2}$. Así, $\vec{v} = (2, -2)\,\mathrm{m/s}$ y $u = 2\sqrt{2}\,\mathrm{m/s}$. La velocidad apunta 45° por debajo de $+x$, pues su componente horizontal es positiva y la vertical negativa. La dirección de $\vec{r}$, 45° por encima de $+x$, es otra dirección.

**SOLUCIÓN 5.3.**
En ambos movimientos resulta $y = x^2/(1\,\mathrm{m})$. A pasa por el punto cuando $t = 2\,\mathrm{s}$ y B cuando $t = 1\,\mathrm{s}$. Sus velocidades allí son $(1, 4)\,\mathrm{m/s}$ y $(2, 8)\,\mathrm{m/s}$, por lo que sus rapideces son $\sqrt{17}\,\mathrm{m/s}$ y $2\sqrt{17}\,\mathrm{m/s}$. Para describir el movimiento debemos añadir el horario y el arco recorrido: en el intervalo dado A alcanza $x = 3\,\mathrm{m}$ y B $x = 6\,\mathrm{m}$.

**SOLUCIÓN 5.4.**
Con $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$, la posición final es $(2 - 4 + 2, -1 + 6 - 2) = (0, 3)\,\mathrm{m}$. La velocidad es $(-2, 3) + (1, -1)2 = (0, 1)\,\mathrm{m/s}$. Solo se ha anulado la componente horizontal; el móvil continúa con rapidez de $1\,\mathrm{m/s}$.

**SOLUCIÓN 5.5.**
La integración da $v_x = (2\,\mathrm{m/s^3})t^2$ y $v_y = 3\,\mathrm{m/s} - (2\,\mathrm{m/s^2})t$. Al integrar otra vez, $x = 1\,\mathrm{m} + (2/3\,\mathrm{m/s^3})t^3$ e $y = (3\,\mathrm{m/s})t - (1\,\mathrm{m/s^2})t^2$. Las constantes reproducen las condiciones iniciales. En 2 s, $\vec{v} = (8, -1)\,\mathrm{m/s}$ y $\vec{r} = (19/3, 2)\,\mathrm{m}$. Derivar estas posiciones recupera las velocidades y aceleraciones dadas.

**SOLUCIÓN 5.6.**
La coordenada horizontal fija $T = 20/10 = 2\,\mathrm{s}$. Como $v_{0y} = 0$, el descenso es $\frac{1}{2}gT^2 = 20\,\mathrm{m}$, que es la altura inicial. La velocidad final es $(10, -20)\,\mathrm{m/s}$ y su módulo $10\sqrt{5}\,\mathrm{m/s} \simeq 22{,}36\,\mathrm{m/s}$. Su dirección es $\arctan 2 \simeq 63{,}4°$ por debajo de la horizontal; $v_x$ permanece constante bajo la aceleración vertical de este modelo.

**SOLUCIÓN 5.7.**
El retorno al suelo cumple $t(12 - 5t) = 0$ en SI. La raíz de llegada es $T = 2{,}4\,\mathrm{s}$ y el alcance $9(2{,}4) = 21{,}6\,\mathrm{m}$. En la cumbre, $t_H = 12/10 = 1{,}2\,\mathrm{s}$ y $y_H = 12^2/(2\cdot 10) = 7{,}2\,\mathrm{m}$. Allí $\vec{v} = (9, 0)\,\mathrm{m/s}$ y $\vec{a} = (0, -10)\,\mathrm{m/s^2}$; con $v_y$ nula, la velocidad es horizontal y la aceleración vertical.

**SOLUCIÓN 5.8.**
La ecuación $10 + 5t - 5t^2 = 0$ tiene raíces $t = 2\,\mathrm{s}$ y $t = -1\,\mathrm{s}$. Solo la positiva pertenece al vuelo posterior al lanzamiento. Por tanto, $x_f = 6(2) = 12\,\mathrm{m}$ y $\vec{v}_f = (6, 5 - 10\cdot 2) = (6, -15)\,\mathrm{m/s}$; la rapidez es $\sqrt{261}\,\mathrm{m/s} \simeq 16{,}16\,\mathrm{m/s}$. El tiempo $2v_{0y}/g = 1\,\mathrm{s}$ corresponde al retorno a 10 m de altura.

**SOLUCIÓN 5.9.**
Resolver $15t - 5t^2 = 10$ da $(t-1)(t-2) = 0$ en SI. En $t = 1\,\mathrm{s}$ la pelota está en $(8, 10)\,\mathrm{m}$ y tiene $v_y = +5\,\mathrm{m/s}$; en $t = 2\,\mathrm{s}$ está en $(16, 10)\,\mathrm{m}$ y tiene $v_y = -5\,\mathrm{m/s}$. Ambos instantes preceden al impacto en $T = 3\,\mathrm{s}$. Son los pasos ascendente y descendente por una misma altura, en puntos distintos del plano.

**SOLUCIÓN 5.10.**
La pelota llega a $x = 9\,\mathrm{m}$ en 1 s y su altura es $12 - 5 = 7\,\mathrm{m}$. Para la pared de 7 m coincide exactamente con el borde superior: hay contacto si el borde pertenece a la pared. Una pelota real exigiría considerar su radio. Para 8 m choca contra la pared a la altura de 7 m; describir el movimiento posterior requiere incorporar la interacción del impacto.

**SOLUCIÓN 5.11.**
La coordenada horizontal da $v_{0x} = 12\,\mathrm{m/s}$. La vertical satisface $5\,\mathrm{m} = v_{0y}(1\,\mathrm{s}) - 5\,\mathrm{m}$, por lo que $v_{0y} = 10\,\mathrm{m/s}$. La rapidez inicial es $\sqrt{244}\,\mathrm{m/s}$, con ángulo $\arctan(10/12) \simeq 39{,}8°$ sobre $+x$. La cumbre se alcanza en 1 s a 5 m de altura. El tiempo total es 2 s y el alcance 24 m, coherente con que el dato correspondiera a la cumbre situada a mitad del alcance.

**SOLUCIÓN 5.12.**
En igualdad de alturas, $R(\theta) = v_0^2 \sin(2\theta)/g$. Para el ángulo complementario aparece $\sin(180° - 2\theta) = \sin(2\theta)$, de donde los alcances son iguales. La prueba usa la duración $T = 2v_0 \sin\theta/g$, obtenida al imponer $y_f = y_0$. Si la salida está a altura $h > 0$ sobre el suelo, la raíz positiva es $T = [v_0 \sin\theta + \sqrt{v_0^2 \sin^2\theta + 2gh}]/g$; ya no se reduce al producto simétrico de seno y coseno. Por ejemplo, con $h = 15\,\mathrm{m}$ y $v_0 = 20\,\mathrm{m/s}$, los alcances para 30° y 60° son $30\sqrt{3}\,\mathrm{m}$ y $(10\sqrt{3} + 10\sqrt{6})\,\mathrm{m}$, distintos.

**SOLUCIÓN 5.13.**
Las posiciones son $(2t, t)$ y $(12 - t, t)$ en SI. La componente vertical coincide para todos los instantes; la horizontal exige $2t = 12 - t$, luego $t = 4\,\mathrm{s}$. El punto es $(8, 4)\,\mathrm{m}$. La condición vertical se satisface idénticamente; en este caso, la ecuación horizontal fija el tiempo de encuentro.

**SOLUCIÓN 5.14.**
Los caminos se cruzan en $(8, 0)\,\mathrm{m}$. A llega en 2 s y B en 3 s, así que no hay encuentro simultáneo. Si A retrasa su salida $\delta$, llega al cruce en $\delta + 2\,\mathrm{s}$. Igualar con 3 s da $\delta = 1\,\mathrm{s}$. Antes de salir A permanece en el origen, que B nunca ocupa.

**SOLUCIÓN 5.15.**
La diferencia de posiciones es $(12-6t, 4-2t)$ m con $t$ en segundos: ambas componentes se anulan en 2 s. El punto común es $(12, 4)$ m porque $y_A = 12(2)-5(2)^2 = 4$ m e $y_B = 4+10(2)-5(2)^2 = 4$ m. A toca el suelo en 2,4 s y B en $(1+3/\sqrt{5})$ s $> 2$ s, por lo que la coincidencia pertenece a ambos vuelos. Las velocidades son $(6, -8)$ m/s y $(0, -10)$ m/s. La cancelación de la gravedad simplifica la separación, pero hace falta volver a comprobar la altura y los tiempos de impacto.

**SOLUCIÓN 5.16.**
La velocidad angular es $\pi/3$ rad/s; la rapidez, $R\omega = \pi$ m/s; y la aceleración centrípeta, $\pi^2/3$ m/s$^2$. En 3 s ha completado medio giro: $\vec{r} = (-3, 0)$ m, $\vec{v} = (0, -\pi)$ m/s y $\vec{a} = (\pi^2/3, 0)$ m/s$^2$. La distancia es la semicircunferencia $3\pi$ m y el desplazamiento $(-6, 0)$ m, de módulo 6 m.

**SOLUCIÓN 5.17.**
Con radio fijo, $a_c = u^2/R$ implica $a_{c,2} = (2u)^2/R = 4a_{c,1}$. Como $T = 2\pi R/u$, $T_2 = T_1/2$. Son comparaciones entre dos regímenes uniformes. Durante una transición real de uno al otro aparecería además una componente tangencial de aceleración que requeriría conocer cómo cambia la rapidez con el tiempo.

**SOLUCIÓN 5.18.**
La velocidad angular es $\omega = (2\,\text{rad/s}^2)t$ y $\alpha = 2$ rad/s$^2$. En 1 s, $u = R\omega = 2$ m/s, $a_{\tan} = R\alpha = 2$ m/s$^2$ y $a_c = R\omega^2 = 4$ m/s$^2$. Por perpendicularidad, $|\vec{a}| = \sqrt{2^2+4^2} = 2\sqrt{5}$ m/s$^2$. Sumar $2+4$ como módulos ignoraría la geometría de la aceleración.

**SOLUCIÓN 5.19.**
Con orígenes coincidentes al lanzar, el tren asigna $x' = 0$ e $y' = (5\,\text{m/s})t - (5\,\text{m/s}^2)t^2$. El suelo asigna $x = (10\,\text{m/s})t$ y la misma $y = y'$. El retorno a la altura inicial sucede en $T = 1$ s y el desplazamiento horizontal respecto del suelo es 10 m. La pelota y el punto de lanzamiento avanzan lo mismo. Ambas referencias asignan aceleración vertical $-10$ m/s$^2$ porque su velocidad relativa es constante.

**SOLUCIÓN 5.20.**
Al apuntar al norte, la velocidad respecto de la orilla es $(1, 2)$ m/s. El cruce dura $60/2 = 30$ s y la deriva es 30 m al este. Para llegar enfrente se necesita componente oeste de 1 m/s respecto del agua. La componente norte restante es $\sqrt{2^2-1^2} = \sqrt{3}$ m/s, así que $t = 60/\sqrt{3} = 20\sqrt{3}$ s $\simeq 34{,}64$ s. El rumbo es $\arcsin(1/2) = 30°$ al oeste del norte. En ambos casos se conserva la rapidez de 2 m/s respecto del agua.

**SOLUCIÓN 5.21.**
Para anular la deriva tendría que dedicar $-2$ m/s a la componente horizontal respecto del agua. Esa componente ya consume todo el módulo disponible: la componente norte sería cero y no cruzaría. Puede llegar a otro punto apuntando al norte, pues entonces su velocidad respecto de la orilla es $(2, 2)$ m/s y tiene componente de cruce positiva. Todavía puede alcanzar la otra orilla llegando a un punto desplazado por la corriente.

**SOLUCIÓN 5.22.**
La separación es $(10-2t, 10-t)$ m con $t$ en segundos. Su cuadrado es $d^2 = 5t^2-60t+200 = 5(t-6)^2+20$ en SI. El mínimo corresponde a $t = 6$ s, dentro del intervalo, y vale $d_{\text{mín}} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ m. Entonces A está en $(12, 0)$ m y B en $(10, 4)$ m. No se encuentran: igualar las coordenadas horizontales exige $t = 5$ s y las verticales $t = 10$ s.

**SOLUCIÓN 5.23.**
Para la primera parametrización, $x/L = \tau$ e $y/L = \tau - \tau^2$; al eliminar $\tau$, $y = x - x^2/L$ con $0 \le x \le L$. Como $\tau = t/(1\,\text{s})$, la aceleración es $(0, -2)$ m/s$^2$. La segunda usa $x = L\tau^2$ e $y = L(\tau^2 - \tau^4)$, que recorre el mismo arco y en el mismo sentido, pero con otro horario. Derivar dos veces da $\vec{a} = (2, 2-12\tau^2)$ m/s$^2$. No es constante ni exclusivamente vertical. La dependencia temporal de la posición determina cómo se recorre la curva y permite comprobar si se trata de un proyectil ideal.

**SOLUCIÓN 5.24.**
Si $x' = x - R(t)$, derivar dos veces da $a'_x = a_x - \ddot{R}$. El objeto fijo tiene $a_x = 0$ y el origen del vehículo $\ddot{R} = +2$ m/s$^2$, luego $a'_x = -2$ m/s$^2$. La igualdad $\vec{a}\,' = \vec{a}$ se dedujo para $\vec{U}$ constante. El vehículo que arranca tiene una velocidad variable; al transformar su movimiento aparece por ello una diferencia de aceleraciones.

## Diagnóstico de salida

Una pelota parte de $(0, 5)\,\mathrm{m}$ con $\vec{v}_0 = (4, 10)\,\mathrm{m/s}$. Una cámara en traslación uniforme se mueve a $(4, 0)\,\mathrm{m/s}$ respecto del suelo; su origen coincide con el del suelo en $t = 0$ y sus ejes permanecen paralelos.

Sin consultar las soluciones, encuentra las posiciones vistas desde el suelo y desde la cámara. Calcula la altura máxima, el instante de impacto con el suelo, el alcance horizontal respecto de la salida y la velocidad justo antes del impacto en cada referencia. Explica qué significa que la cámara vea una trayectoria vertical y por qué no cambia el instante del choque. Finalmente, decide qué hipótesis dejaría de cumplirse si la cámara empezara a acelerar.

**Contraste después del intento.** En SI, el suelo asigna $x = 4t$, $y = 5 + 10t - 5t^2$; la cámara asigna $x' = 0$ y la misma coordenada vertical. La cumbre se alcanza en $1\,\mathrm{s}$, a $10\,\mathrm{m}$ del suelo. La raíz positiva del impacto es $T = (1 + \sqrt{2})\,\mathrm{s}$ y el alcance $4(1 + \sqrt{2})\,\mathrm{m} \simeq 9{,}66\,\mathrm{m}$. Las velocidades de impacto son $(4, -10\sqrt{2})\,\mathrm{m/s}$ y $(0, -10\sqrt{2})\,\mathrm{m/s}$. En las dos referencias el mismo suceso cumple $y = 0$ y ocurre en el mismo tiempo clásico; el desplazamiento horizontal depende del origen que se mueve. Una cámara que acelera requiere una transformación que incluya la aceleración de su origen.

Si las componentes no comparten el mismo instante en tu resolución, vuelve a la sección 5.3; si confundiste rapidez y velocidad, al problema 5.2; si aplicaste el tiempo de vuelo de igual altura, al 5.8; y si restaste velocidades sin identificar observadores, a la sección 5.6.

# CAPÍTULO 6

# LEYES DE NEWTON Y DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE


6.1 Inercia: qué permanece cuando la fuerza neta es cero . . . . . 107
6.2 Sumar interacciones y relacionarlas con la aceleración . . . 108
6.3 Elegir el cuerpo y dibujar las fuerzas que recibe . . . . . 112
6.4 Equilibrio traslacional y condiciones de contacto . . . . . 114
6.5 Tercera ley: dos fuerzas sobre dos cuerpos . . . . . 115
6.6 La resultante en un movimiento curvo . . . . . 117
6.7 Un observador que acelera . . 118
6.8 Fuerza variable y cantidad de movimiento . . . . . 119
6.9 Contrastar el modelo con una observación . . . . . 122
Ejercicios para reconstruir y transferir 123
Soluciones completas de los ejercicios 126
Diagnóstico de salida . . . . . 130
Lecturas de apoyo . . . . . 131


Un carro puede seguir avanzando después de que dejamos de empujarlo. En una curva, en cambio, hace falta que algo cambie continuamente la dirección de su velocidad, aunque la rapidez permanezca constante. Los capítulos anteriores permiten describir esos movimientos; para explicar sus cambios necesitamos identificar las interacciones del carro con su entorno. La pregunta física se desplaza de dónde está el cuerpo a qué otros cuerpos están actuando sobre él.

Las leyes de Newton relacionan esas interacciones con la aceleración. Su aplicación exige elegir una referencia, delimitar el cuerpo estudiado y representar por separado las fuerzas que recibe. Un diagrama de cuerpo libre hará visible esa elección antes de escribir ecuaciones. Seguiremos trabajando con modelos de partícula: describiremos la traslación y dejaremos para un estudio posterior las condiciones que controlan la rotación de un objeto extenso.

## 6.1 Inercia: qué permanece cuando la fuerza neta es cero

Una caja arrastrada por el suelo suele detenerse cuando dejamos de tirar de ella. Esa observación puede sugerir que el movimiento necesita un empuje permanente. Sin embargo, durante la detención el suelo y el aire siguen interactuando con la caja. Cuanto menores sean esas interacciones resistentes, más tiempo conservará su velocidad después del tirón. Al cesar nuestra intervención pueden seguir actuando otras interacciones sobre el cuerpo.

La primera ley de Newton afirma que existen referencias en las cuales un cuerpo aislado conserva su velocidad vectorial: permanece en reposo si su velocidad inicial es cero y continúa en movimiento rectilíneo uniforme si es distinta de cero. Llamamos *inerciales* a esas referencias. En ellas, el mismo comportamiento se obtiene cuando varias fuerzas tienen suma vectorial nula. La inercia nombra la persistencia de la velocidad cuando la resultante es nula.

La afirmación expresa una ley experimental sobre el movimiento y sus interacciones. Para aplicarla justificamos que las interacciones omitidas sean despreciables y que la referencia elegida se aproxime suficientemente a una inercial. El suelo ofrece esa aproximación en los experimentos cortos de este libro; en otras escalas debemos considerar la rotación terrestre.

**PROBLEMA RESUELTO 6.1 · Seguir avanzando sin empuje horizontal**

Un carro se mueve sobre una pista horizontal con resistencia despreciable. Al terminar un breve empuje, su velocidad es $3\,\mathrm{m/s}$ hacia la derecha. Tomamos ese instante como $t = 0$ y su posición como $x = 0$. ¿Dónde estará dos segundos después si ya no recibe fuerza horizontal? *Resolución.* La Tierra sigue ejerciendo una fuerza vertical hacia abajo y la pista una fuerza vertical hacia arriba. Como el carro no acelera verticalmente, ambas se equilibran. Por hipótesis tampoco queda una fuerza horizontal apreciable; en la referencia del suelo, aproximada como inercial, $\vec{a} = \vec{0}$. La velocidad se conserva y $x = (3\,\mathrm{m/s})t$, de modo que $x(2\,\mathrm{s}) = 6\,\mathrm{m}$. La resultante nula permite conservar esa velocidad. Si se detuviera antes, tendríamos que revisar las fuerzas omitidas o el alcance de la aproximación.

| Instante | Posición | Velocidad |
|---|---|---|
| $0\,\mathrm{s}$ | $0\,\mathrm{m}$ | $+3\,\mathrm{m/s}$ |
| $1\,\mathrm{s}$ | $3\,\mathrm{m}$ | $+3\,\mathrm{m/s}$ |
| $2\,\mathrm{s}$ | $6\,\mathrm{m}$ | $+3\,\mathrm{m/s}$ |

En intervalos de un segundo se repite el avance de tres metros. Fuerza neta cero y velocidad no nula son compatibles.

La conclusión requiere que permanezca constante el vector velocidad, con su dirección y su módulo. En el movimiento circular del capítulo 5 la velocidad cambia de dirección y existe aceleración. Para juzgar el equilibrio debemos examinar la aceleración: una pelota está quieta durante un instante en la cumbre de un lanzamiento vertical y sigue acelerando. La primera ley describe la evolución durante un intervalo bajo una condición sobre las fuerzas.

Si una referencia se traslada con velocidad constante respecto de una inercial y sus ejes conservan su orientación, también es inercial en el modelo clásico. La transformación galileana de los capítulos 4 y 5 conserva la aceleración. Un vehículo que arranca, frena o toma una curva introduce una aceleración del observador que debe incorporarse a la descripción.

## 6.2 Sumar interacciones y relacionarlas con la aceleración

Una *fuerza* representa la interacción que un cuerpo ejerce sobre otro. Indicaremos su dirección y sentido mediante un vector y, cuando importe precisar los participantes, escribiremos $\vec{F}_{A\to B}$ para la fuerza que A ejerce sobre B. Sobre un mismo cuerpo pueden actuar simultáneamente la gravedad, una cuerda, una superficie y una mano. La fuerza neta es la suma vectorial de las fuerzas externas que recibe el cuerpo elegido:

$$\vec{F}_{\text{neta}} = \sum_i \vec{F}_i.$$

El índice $i$ recorre las distintas fuerzas; la notación de suma fue introducida en el capítulo 3. La resultante resume el efecto traslacional del conjunto de interacciones. Si dibujamos las fuerzas individuales y además su resultante, debemos mantener separados el diagrama físico y la construcción geométrica de la suma para no contar dos veces lo mismo.

En una referencia inercial, la segunda ley de Newton para una partícula de masa constante $m > 0$ establece

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}, \qquad \sum_i F_{ix} = ma_x, \quad \sum_i F_{iy} = ma_y. \tag{6.1}$$

Las ecuaciones de componentes expresan una sola igualdad vectorial. Las componentes indican proyecciones orientadas sobre los ejes; los módulos toman valores mayores o iguales que cero. La aceleración tiene la dirección de la resultante porque la masa es un escalar positivo; la dirección de la velocidad depende también de las condiciones iniciales.

La masa mide la inercia del cuerpo: ante una misma fuerza neta, una masa mayor adquiere una aceleración menor. Se expresa en kilogramos. En SI, el newton se define por $1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg\,m/s^2}$: una fuerza neta de un newton produce en una masa de un kilogramo una aceleración de un metro por segundo cuadrado. Un dinamómetro calibrado permite comparar fuerzas; una balanza puede inferir masas bajo condiciones conocidas. Debemos distinguir la magnitud que mide directamente el instrumento de la que obtenemos usando un modelo.

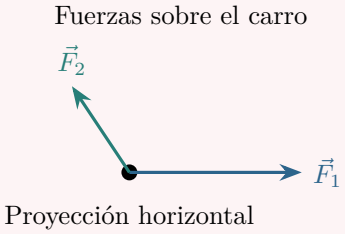
**PROBLEMA RESUELTO 6.2 · Construir la resultante mediante componentes**

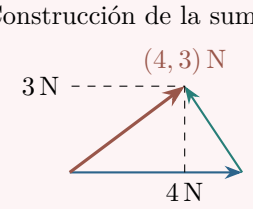
Sobre un carro de 2 kg, en una mesa horizontal sin resistencia apreciable, actúan dos fuerzas horizontales $\vec{F}_1 = (6,0)\,\mathrm{N}$ y $\vec{F}_2 = (-2,3)\,\mathrm{N}$. Los ejes se ven desde arriba. Determina la aceleración y su módulo.

*Resolución.* La normal y el peso se equilibran verticalmente; los vectores dados describen las dos componentes del plano horizontal. Sumamos coordenadas correspondientes:

$$\vec{F}_{\text{neta}} = (4,3)\,\mathrm{N}, \qquad \vec{a} = \frac{(4,3)\,\mathrm{N}}{2\,\mathrm{kg}} = (2,1{,}5)\,\mathrm{m/s^2}.$$

El módulo es $|\vec{a}| = 2{,}5\,\mathrm{m/s^2}$ y la dirección forma $\arctan(3/4) \simeq 36{,}9^\circ$ desde $+x$ hacia $+y$. Sumar $6 + \sqrt{13}$ da la suma de los módulos individuales; la suma vectorial tiene módulo 5 N. La aceleración queda determinada; la velocidad instantánea todavía requiere información inicial.



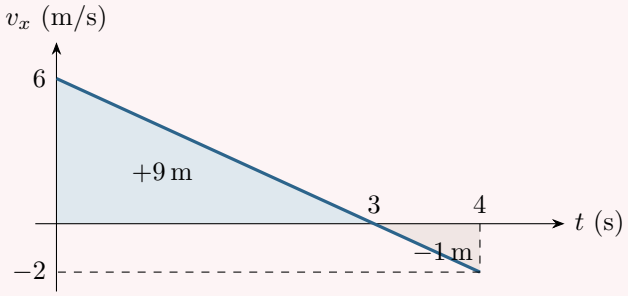

Izquierda: las dos fuerzas aplicadas. Derecha: la construcción geométrica de su resultante. Escala común para las fuerzas.

**PROBLEMA RESUELTO 6.3 · La misma fuerza puede frenar y después invertir el movimiento**

Un móvil de 4 kg parte de $x = 0$ con $v_0 = +6\,\mathrm{m/s}$. Durante 4 s recibe una fuerza neta constante $F_x = -8\,\mathrm{N}$. Encuentra cuándo se detiene y su estado al final del intervalo.
*Resolución.* La segunda ley da $a_x = -8/4 = -2\,\mathrm{m/s^2}$. Por la cinemática del capítulo 4,

$$v_x = 6\,\mathrm{m/s} - (2\,\mathrm{m/s^2})t, \qquad x = (6\,\mathrm{m/s})t - (1\,\mathrm{m/s^2})t^2.$$

La velocidad se anula en 3 s, cuando $x = 9\,\mathrm{m}$. La fuerza continúa actuando y el móvil invierte el sentido: en 4 s tiene $v_x = -2\,\mathrm{m/s}$ y $x = 8\,\mathrm{m}$. Antes del retorno la fuerza se opone a la velocidad y reduce la rapidez; después apunta en el mismo sentido y la aumenta. La distancia total es $9 + 1 = 10\,\mathrm{m}$, mientras el desplazamiento es $+8\,\mathrm{m}$. En el instante de reposo la fuerza sigue siendo $-8\,\mathrm{N}$.




La pendiente permanece negativa durante el retorno. Las áreas orientadas explican el desplazamiento $9 - 1 = 8\,\mathrm{m}$ y la distancia $9 + 1 = 10\,\mathrm{m}$.

Podemos usar la segunda ley en dos direcciones. Con las interacciones conocidas, calculamos la aceleración y reconstruimos el movimiento mediante sus condiciones iniciales. Con un movimiento suficientemente conocido y una masa dada, inferimos la fuerza neta. Identificar las interacciones individuales requiere información adicional, pues distintas combinaciones pueden producir la misma resultante.

### PROBLEMA RESUELTO 6.4 · Lo que una trayectoria permite inferir

En una referencia inercial una partícula de 3 kg sigue, durante $0 \le t \le 2\,\mathrm{s}$,

$$x = 1\,\mathrm{m} + (2\,\mathrm{m/s})t + (1\,\mathrm{m/s^2})t^2, \qquad y = -(1/3\,\mathrm{m/s^3})t^3.$$

Encuentra la fuerza neta en $t = 1{,}5\,\mathrm{s}$. ¿Puedes decidir cuántas fuerzas actúan?
*Resolución.* Las segundas derivadas son $a_x = 2\,\mathrm{m/s^2}$ y $a_y = -(2\,\mathrm{m/s^3})t$. Por tanto,

$$\vec{F}_{\mathrm{neta}}(t) = 6\,\mathrm{N}\,\hat{\imath} - (6\,\mathrm{N/s})t\,\hat{\jmath}, \qquad \vec{F}_{\mathrm{neta}}(1{,}5\,\mathrm{s}) = (6, -9)\,\mathrm{N}.$$

El módulo en ese instante es $\sqrt{117}\,\mathrm{N} \simeq 10{,}82\,\mathrm{N}$. Una o varias interacciones pueden producir esa misma resultante y trayectoria. Para construir un inventario de fuerzas debemos examinar el entorno y los contactos, además de medir el movimiento.

| **Tiempo** | **Aceleración en** $\mathrm{m/s^2}$ | **Resultante en N** |
|---|---|---|
| 0 s | $(2, 0)$ | $(6, 0)$ |
| 0,5 s | $(2, -1)$ | $(6, -3)$ |
| 1,5 s | $(2, -3)$ | $(6, -9)$ |
| 2 s | $(2, -4)$ | $(6, -12)$ |

Cada fila multiplica el vector aceleración por la misma masa de 3 kg. Identificar los agentes requiere información sobre las interacciones.

### PROBLEMA RESUELTO 6.5 · Comparar masas con una misma fuerza neta

Una fuerza neta horizontal de módulo constante produce aceleración $3\,\mathrm{m/s^2}$ en un carro A de 2 kg. Aplicada a un carro B, produce $1{,}2\,\mathrm{m/s^2}$. Las resistencias son despreciables. Determina la fuerza y la masa de B.
*Resolución.* El primer ensayo fija $F = 2(3) = 6\,\mathrm{N}$. En el segundo, $m_B = F/a_B = 6/1{,}2 = 5\,\mathrm{kg}$. También podemos comparar sin calcular primero la fuerza: de $m_A a_A = m_B a_B$ resulta $m_B/m_A = a_A/a_B = 2{,}5$. La comparación requiere la misma fuerza *neta*, incluidas las resistencias presentes en cada ensayo. La masa es el parámetro que relaciona la aceleración de B con la interacción resultante.

| **Cuerpo** | **Masa y aceleración** | **Fuerza neta** |
|---|---|---|
| A | $2\,\mathrm{kg};\ 3\,\mathrm{m/s^2}$ | 6 N |
| B | $5\,\mathrm{kg};\ 1{,}2\,\mathrm{m/s^2}$ | 6 N |

El mismo producto $ma$ se obtiene con mayor masa y menor aceleración. La comparación presupone resultantes iguales.

## 6.3 Elegir el cuerpo y dibujar las fuerzas que recibe

Antes de escribir $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ debemos decidir a qué cuerpo se refiere. Un *diagrama de cuerpo libre*, abreviado DCL, representa ese cuerpo separado de su entorno y las fuerzas externas que actúan sobre él. Cada flecha debe admitir una frase del tipo «la mesa ejerce esta fuerza sobre el libro». Si no podemos nombrar al agente, debemos investigar si hemos dibujado una fuerza real del modelo o una magnitud cinemática por error.

En un DCL de partícula trasladamos las flechas a un punto representativo. Esta convención sirve para la traslación; al estudiar giros debemos conservar los puntos de aplicación de las fuerzas. Los ejes y una indicación de la aceleración pueden acompañar el dibujo, pero se distinguen de las flechas de fuerza. Nunca se añade $m\vec{a}$ al inventario: es el resultado de la suma que queremos establecer.

En las situaciones próximas a la superficie terrestre usaremos el *peso* $\vec{P} = m\vec{g}$, la fuerza gravitatoria que la Tierra ejerce sobre el cuerpo. Con un eje vertical positivo hacia arriba, $\vec{g} = -g\hat{\jmath}$ y $\vec{P} = -mg\hat{\jmath}$. La masa se mide en kilogramos; el peso, en newtons. Adoptaremos $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ en los problemas del capítulo. La aproximación facilita los cálculos en una región donde las variaciones del campo gravitatorio son despreciables.

Una superficie ejerce una fuerza de contacto cuya componente perpendicular se llama *normal*, de módulo $N$. La palabra indica su dirección respecto de la superficie; su módulo se obtiene de las ecuaciones de movimiento y puede diferir de $mg$. En un contacto ordinario sin adhesión la superficie transmite una fuerza de compresión: por eso $N \geq 0$. La componente tangencial, si existe, corresponde al rozamiento; aquí utilizaremos superficies lisas cuando queramos omitirla. El capítulo siguiente estudiará con detalle cómo modelar fricción, cuerdas y cuerpos vinculados.

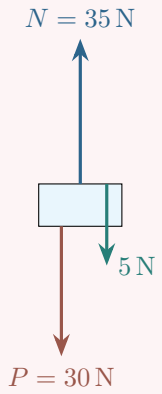
**PROBLEMA RESUELTO 6.6 · Peso, normal y sus respectivas reacciones**

Un libro de 3 kg reposa sobre una mesa horizontal. Una mano añade una fuerza vertical de 5 N hacia abajo sin mover el libro. Determina la normal e identifica los agentes de todas las fuerzas del DCL.

*Resolución.* Sobre el libro actúan la Tierra hacia abajo, la mano hacia abajo y la mesa hacia arriba. Su aceleración vertical es cero. Con $+y$ hacia arriba,

$$N - 30\,\mathrm{N} - 5\,\mathrm{N} = 0, \qquad N = 35\,\mathrm{N}.$$

El peso sigue siendo 30 N porque la masa y el campo gravitatorio conservan sus valores. Peso y normal actúan ambos sobre el libro y provienen de interacciones diferentes. Las fuerzas de reacción correspondientes pertenecen a los DCL de la Tierra y de la mesa, respectivamente.




Fuerzas sobre el libro: mesa arriba; Tierra y mano abajo. Flechas esquemáticas; la mano y la Tierra ejercen fuerzas de interacciones distintas.

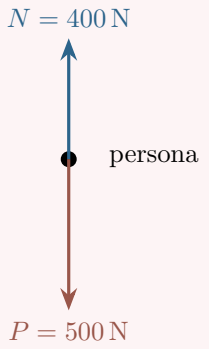
### PROBLEMA RESUELTO 6.7 · Una báscula mide una fuerza de apoyo

Una persona de 50 kg permanece apoyada sobre una báscula dentro de un ascensor. La báscula indica 400 N. Desprecia otras fuerzas verticales. Encuentra la aceleración y explica qué puedes concluir sobre la velocidad.

*Resolución.* El DCL de la persona contiene el peso 500 N hacia abajo y la normal 400 N hacia arriba. La báscula informa esta última fuerza. La segunda ley da

$$400 - 500 = 50a_y$$

al usar unidades SI, luego $a_y = -2\,\mathrm{m/s^2}$. El ascensor podría estar bajando cada vez más rápido o subiendo y frenando; distinguir ambas situaciones requiere conocer el signo de la velocidad. La masa de la persona permanece constante. En caída libre ideal, mientras báscula y persona caen juntas sin apoyo, $N = 0$ aunque el peso continúe actuando.




El DCL de la persona tiene dos fuerzas verticales. Su resultante apunta hacia abajo, con independencia de la velocidad.

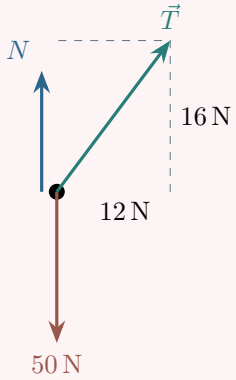
### PROBLEMA RESUELTO 6.8 · Tirar hacia arriba reduce el apoyo

Una caja de 5 kg se desliza sobre una mesa horizontal lisa. Una cuerda tira de ella con componentes $(12, 16)$ N: horizontal hacia la derecha y vertical hacia arriba. Mientras siga en contacto con la mesa, encuentra normal y aceleración.

*Resolución.* La caja no tiene aceleración vertical mientras conserva el contacto con esta mesa fija y horizontal. Por tanto,

$$N + 16 - 50 = 0$$

en SI, de donde $N = 34$ N. Horizontalmente, $12 = 5a_x$ da $a_x = 2{,}4\,\mathrm{m/s^2}$. El tirón tiene módulo 20 N, pero solo su componente horizontal produce la aceleración calculada. Si su componente vertical superara 50 N, la ecuación de contacto exigiría $N < 0$, imposible sin adhesión: habría que usar $N = 0$ y permitir aceleración vertical. Una respuesta negativa puede revelar que la hipótesis de contacto dejó de ser válida.




Fuerzas y proyecciones del tirón. Las líneas discontinuas representan proyecciones geométricas del tirón. Flechas esquemáticas.

Un dibujo del entorno y un DCL cumplen funciones distintas. El primero ayuda a elegir el sistema; el segundo conserva únicamente las interacciones relevantes para su ecuación de movimiento. Separarlos impide, por ejemplo, dibujar sobre un ascensor la fuerza que el ascensor ejerce sobre la persona como si actuara también sobre él. Cuando estudiamos dos cuerpos construiremos primero dos inventarios, uno por cuerpo.

## 6.4 Equilibrio traslacional y condiciones de contacto

Para una partícula de masa constante en una referencia inercial, $\vec{a} = \vec{0}$ equivale a $\sum \vec{F} = \vec{0}$. Llamamos *equilibrio traslacional* a esta condición. Incluye el reposo y el movimiento rectilíneo uniforme con interacciones que se equilibran. En un cuerpo extenso debemos estudiar también la rotación: dos fuerzas pueden tener resultante cero y producir un giro. Aquí la idealización de partícula delimita la afirmación.

En una cuerda flexible y tensa, la fuerza que recibe un cuerpo en el extremo sigue la dirección local de la cuerda y tira hacia ella. Llamaremos *tensión* a su módulo. Una cuerda flexible ideal solo transmite tracción mientras está tensa; una tensión negativa indica que debemos revisar la configuración supuesta. Las fuerzas de dos cuerdas distintas se determinan con sus respectivas condiciones geométricas y dinámicas.

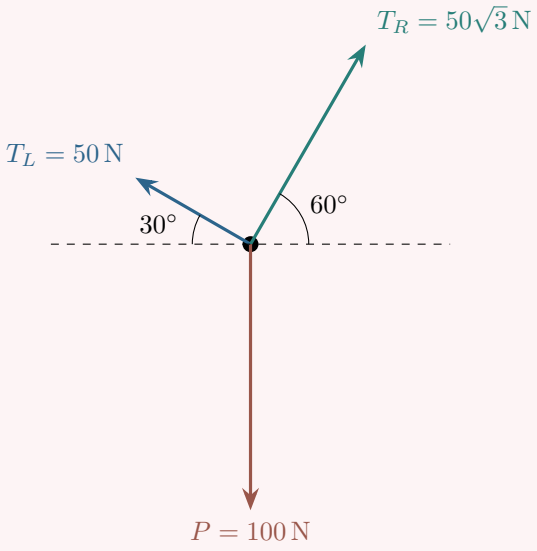
**PROBLEMA RESUELTO 6.9 · Dos cuerdas distintas sostienen una lámpara**

Una lámpara de peso 100 N permanece en reposo, tratada como una partícula. Una cuerda sale hacia arriba a la izquierda formando 30° con la horizontal; la otra sale a la derecha formando 60°. Determina ambas tensiones.

*Resolución.* Dibujamos peso y dos tensiones sobre la lámpara. En equilibrio, las componentes horizontales deben cancelarse y las verticales sumar el peso:

$$\begin{aligned} -T_L \cos 30^\circ + T_R \cos 60^\circ &= 0, \\ T_L \sin 30^\circ + T_R \sin 60^\circ &= 100\,\mathrm{N}. \end{aligned}$$

La primera ecuación da $T_R = \sqrt{3}\,T_L$. Al sustituir en la segunda obtenemos $2T_L = 100\,\mathrm{N}$, luego $T_L = 50\,\mathrm{N}$ y $T_R = 50\sqrt{3}\,\mathrm{N} \simeq 86{,}60\,\mathrm{N}$. Sus componentes verticales son 25 N y 75 N; las horizontales tienen el mismo módulo $25\sqrt{3}\,\mathrm{N}$ y sentidos contrarios. Cada tensión se obtiene resolviendo las dos condiciones de equilibrio.




Las componentes horizontales se cancelan y las verticales suman 100 N. Las longitudes de las tres flechas guardan una escala común.

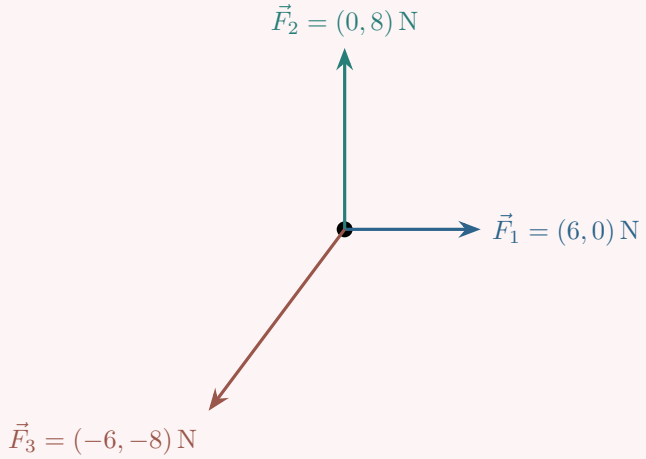
**PROBLEMA RESUELTO 6.10 · Equilibrio con velocidad distinta de cero**

Un disco sobre una mesa horizontal lisa se mueve con velocidad constante $(5, 0)\,\mathrm{m/s}$. En el plano horizontal actúan $\vec{F}_1 = (6, 0)\,\mathrm{N}$, $\vec{F}_2 = (0, 8)\,\mathrm{N}$ y una tercera fuerza desconocida. Determínala.

*Resolución.* La velocidad vectorial constante exige aceleración cero. La normal y el peso se equilibran fuera del plano dibujado, y dentro de él debe cumplirse

$$\vec{F}_3 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = (-6, -8)\,\mathrm{N}, \qquad |\vec{F}_3| = 10\,\mathrm{N}.$$

El signo negativo de ambas componentes sitúa la fuerza en el tercer cuadrante. La misma combinación de fuerzas es compatible con el reposo o con distintas velocidades constantes: las fuerzas determinan el cambio de velocidad, mientras su valor inicial constituye otro dato. Si solo supiéramos que la *rapidez* es constante, no podríamos concluir equilibrio, porque el camino podría ser curvo.




Proyección horizontal del DCL. Las tres fuerzas se suman a cero aunque ninguna sea nula. El disco puede seguir avanzando.

## 6.5 Tercera ley: dos fuerzas sobre dos cuerpos

Una interacción tiene dos participantes. En los modelos newtonianos que estudiaremos, las fuerzas mutuas entre A y B satisfacen

$$\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A}. \tag{6.2}$$

Esta es la tercera ley de Newton. Los dos vectores tienen igual módulo y sentidos opuestos, y actúan sobre cuerpos distintos. Los nombres «acción» y «reacción» identifican los dos lados simultáneos de una misma interacción.

La segunda ley suma las fuerzas *sobre un cuerpo*; la tercera compara las fuerzas *entre dos cuerpos*. En la ecuación de A aparece únicamente el miembro del par que actúa sobre A. Las aceleraciones de los participantes dependen de sus masas y de las demás fuerzas que reciban, y pueden tener módulos distintos.

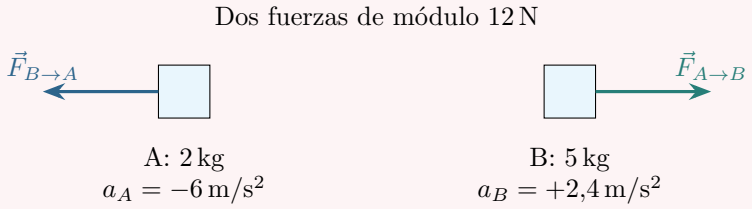
### PROBLEMA RESUELTO 6.11 · Interacción igual y aceleraciones diferentes

Dos carros A y B, de masas 2 kg y 5 kg, se repelen mediante imanes sobre una pista horizontal lisa, dentro del modelo newtoniano de fuerzas mutuas. En cierto instante, A ejerce 12 N hacia la derecha sobre B y B ejerce 12 N hacia la izquierda sobre A. No hay otras fuerzas horizontales. Encuentra sus aceleraciones.

*Resolución.* La tercera ley relaciona las fuerzas horizontales entre los carros, que son opuestas, mientras los pesos y las normales se equilibran verticalmente. Escribimos una ecuación para cada carro:

$$a_A = \frac{-12\,\mathrm{N}}{2\,\mathrm{kg}} = -6\,\mathrm{m/s^2}, \qquad a_B = \frac{12\,\mathrm{N}}{5\,\mathrm{kg}} = 2{,}4\,\mathrm{m/s^2}.$$

El carro de menor masa adquiere mayor aceleración en módulo. La cancelación $-12 + 12$ corresponde al sistema que contiene ambos carros; cada aceleración individual se calcula con la fuerza sobre ese carro. Los resultados corresponden al instante estudiado; extenderlos a otros instantes requiere conocer cómo varía la fuerza magnética.




Proyecciones horizontales de dos DCL distintos. Las flechas tienen igual longitud; las aceleraciones difieren por las masas. Peso y normal se equilibran en cada carro.

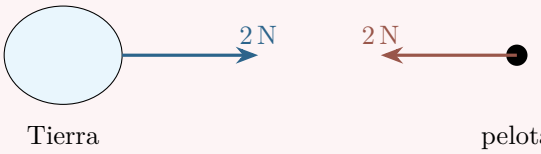
### PROBLEMA RESUELTO 6.12 · La Tierra también recibe una fuerza

Una pelota de 0,2 kg cae cerca de la superficie terrestre sin resistencia del aire. Modela la masa de la Tierra como $6 \times 10^{24}$ kg y usa $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$. Compara las fuerzas gravitatorias mutuas y las aceleraciones que producen.

*Resolución.* La Tierra ejerce sobre la pelota una fuerza de módulo $mg = 2\,\mathrm{N}$ dirigida hacia ella. La pelota ejerce simultáneamente sobre la Tierra una fuerza de 2 N en el sentido opuesto, hacia la pelota. Si consideramos solo esta interacción, sus contribuciones a las aceleraciones son

$$a_{\text{pelota}} = 10\,\mathrm{m/s^2}, \qquad a_{\text{Tierra}} = \frac{2}{6 \times 10^{24}}\,\mathrm{m/s^2} \simeq 3{,}33 \times 10^{-25}\,\mathrm{m/s^2}.$$

La gran diferencia de masa explica por qué la aceleración de la Tierra debida a la pelota es despreciable para nuestro experimento. La fuerza de reacción al peso de la pelota actúa sobre la Tierra. En el DCL de la pelota en vuelo solo aparece su peso bajo estas hipótesis.




La Tierra atrae a la pelota y la pelota atrae a la Tierra. Las fuerzas mutuas tienen igual módulo; tamaños y separación son esquemáticos.

Al reunir varios cuerpos en un sistema, las fuerzas que se ejercen entre ellos pasan a ser *internas*. Sus pares se cancelan en la suma de fuerzas de todo el sistema. Para masas constantes, sumar las ecuaciones individuales da

$$\sum \vec{F}_{\text{externas}} = \sum_j m_j \vec{a}_j.$$

Solo si los cuerpos comparten una misma aceleración podemos escribir el miembro derecho como $M\vec{a}$, con $M = \sum_j m_j$. Los cuerpos de un sistema comparten aceleración cuando las restricciones de su movimiento así lo exigen. El concepto general de centro de masa permitirá otra formulación más adelante.

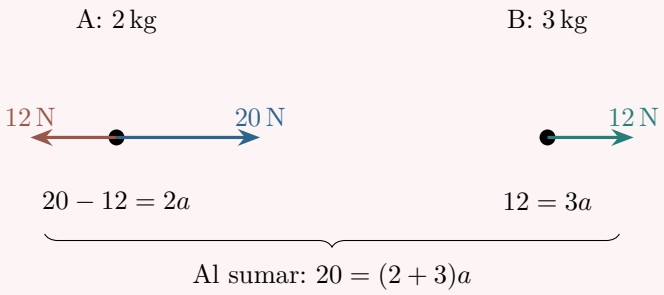
**PROBLEMA RESUELTO 6.13 · Dos bloques en contacto y dos fronteras posibles**

Dos bloques A y B, de 2 kg y 3 kg, están en contacto sobre una mesa horizontal lisa, A a la izquierda de B. Una mano empuja A hacia la derecha con 20 N. Ambos permanecen en contacto sin deformación apreciable. Encuentra la aceleración común y la fuerza de contacto.

*Resolución.* Para el conjunto, la única fuerza horizontal externa es la de la mano. La condición de contacto mantenido impone la misma aceleración horizontal:

$$20\,\text{N} = (2+3)\,\text{kg}\,a, \qquad a = 4\,\text{m/s}^2.$$

Para conocer el contacto aislamos B: la fuerza que recibe de A es su única fuerza horizontal, luego $F_{A\to B} = 3(4) = 12\,\text{N}$ hacia la derecha. Por la tercera ley, B ejerce sobre A 12 N hacia la izquierda. En A se verifica $20 - 12 = 2(4)$ en SI. En cada bloque, peso y normal se equilibran verticalmente. El contacto desaparece de la ecuación del conjunto, pero es indispensable en cada DCL individual. Cada bloque conserva su propia ecuación de movimiento, con la fuerza interna que recibe del otro.




Proyecciones horizontales: el contacto aparece una vez en cada DCL, con sentidos contrarios, y desaparece de la suma del conjunto. Ecuaciones numéricas en SI.

## 6.6 La resultante en un movimiento curvo

La aceleración circular del capítulo 5 proporciona una prueba especialmente útil de la segunda ley. Una partícula que describe un círculo de radio fijo $R$ con rapidez constante $u$ tiene aceleración de módulo $u^2/R$ hacia el centro. Por tanto, la resultante debe tener esa misma dirección y módulo $mu^2/R$. La palabra *centrípeta* describe aquí la dirección de la resultante que proporcionan las interacciones presentes.

Si cambia también la rapidez, la resultante tendrá además una componente tangencial. Podemos decidir qué componente de fuerza necesitamos a partir de cómo cambia el vector velocidad, pero

todavía debemos buscar qué agente la ejerce. La viabilidad del movimiento requiere comprobar que el dispositivo puede proporcionar la fuerza calculada.

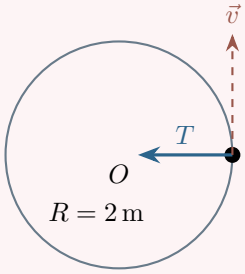
**PROBLEMA RESUELTO 6.14 · La tensión proporciona la resultante radial**

Un disco de 0,5 kg gira con rapidez constante 4 m/s sobre una mesa horizontal lisa, atado mediante una cuerda horizontal a un punto fijo. El radio es 2 m. Encuentra la tensión y describe qué sucede inmediatamente después de cortar la cuerda, mientras el disco siga sobre la mesa.

*Resolución.* Peso y normal valen 5 N y se equilibran verticalmente. La tensión es la única fuerza horizontal, dirigida al centro. Así,

$$T = \frac{mu^2}{R} = \frac{0{,}5(4)^2}{2}\,\mathrm{N} = 4\,\mathrm{N}.$$

La tensión proporciona toda la resultante horizontal centrípeta. Al cortar la cuerda, la tensión desaparece y el disco conserva inicialmente su velocidad tangente. Bajo las hipótesis restantes seguirá una recta sobre la mesa. Al cortarse la cuerda, la velocidad inicial del movimiento libre es tangente a la circunferencia.




Vista superior: la tensión continua apunta al centro y la velocidad discontinua es tangente. Peso y normal se equilibran fuera de este plano.

## 6.7 Un observador que acelera

Las ecuaciones anteriores se escribieron en referencias inerciales. Para entender qué cambia en un vehículo que acelera, retomemos la relación geométrica del capítulo 5 con ejes paralelos: $\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{R}(t)$, donde $\vec{R}$ es la posición del origen móvil. Dos derivadas dan $\vec{a}\,' = \vec{a} - \vec{A}$, con $\vec{A} = \ddot{\vec{R}}$. Si en la referencia inercial $m\vec{a} = \sum \vec{F}$, entonces

$$m\vec{a}\,' = \sum \vec{F} - m\vec{A}. \tag{6.3}$$

El término $-m\vec{A}$ permite escribir la ecuación en la referencia trasladada que acelera. Se denomina *fuerza de inercia* o fuerza ficticia en esa descripción: es un término dependiente de la referencia que permite expresar la ecuación transformada. Su valor depende del observador. La deducción corresponde a ejes sin rotación; una referencia giratoria requiere términos adicionales.

**PROBLEMA RESUELTO 6.15 · La caja que se desplaza hacia atrás dentro de un vehículo**

Una caja de 2 kg reposa inicialmente sobre el piso horizontal sin rozamiento de un vehículo. Este empieza a acelerar a $3\,\mathrm{m/s^2}$ hacia la derecha respecto del suelo, mientras la caja permanece sin tocar las paredes. Describe la aceleración de la caja vista desde el suelo y desde el vehículo.

*Resolución.* Sobre la caja actúan peso y normal, que se equilibran; no hay fuerza horizontal real bajo las hipótesis dadas. Desde el suelo, $a_x = 0$. Desde el vehículo,

$$a'_x = 0 - 3 = -3\,\mathrm{m/s^2}, \qquad ma'_x = -6\,\mathrm{N}.$$

El término $-6\,\mathrm{N}$ es la fuerza de inercia introducida al transformar la ecuación a la referencia acelerada. Si el vehículo parte también del reposo y los orígenes coinciden en $t = 0$, $x = 0$ y $x' = -(1{,}5\,\mathrm{m/s^2})t^2$. Esta descripción rige hasta un eventual contacto con una pared. Aquí la velocidad relativa de los orígenes cambia, y la transformación incluye la aceleración del origen móvil.

| Magnitud horizontal | Suelo inercial | Vehículo acelerado |
|---|---|---|
| Fuerza real neta | $0\,\mathrm{N}$ | $0\,\mathrm{N}$ |
| Aceleración de la caja | $0\,\mathrm{m/s^2}$ | $-3\,\mathrm{m/s^2}$ |
| Término de inercia | No se introduce | $-6\,\mathrm{N}$ |

Cambiar de observador cambia la aceleración descrita y la ecuación que se usa. Las interacciones físicas sobre la caja conservan sus agentes.

## 6.8 Fuerza variable y cantidad de movimiento

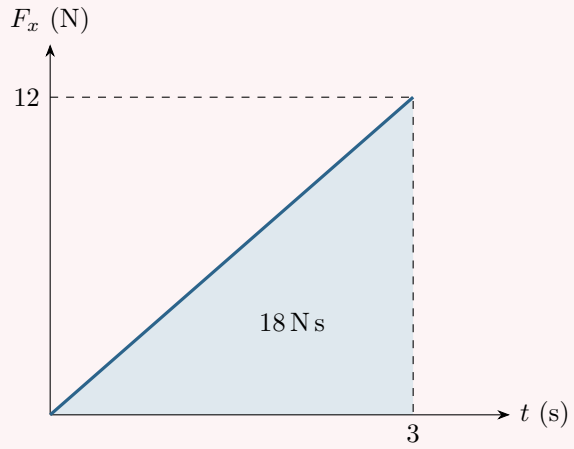
La segunda ley permite estudiar también aceleraciones variables. Si conocemos la resultante como función del tiempo y la masa permanece constante, obtenemos $\vec{a}(t) = \vec{F}_{\mathrm{neta}}(t)/m$ y recuperamos velocidad y posición por integración. Es la misma reconstrucción de los capítulos 3 y 5, ahora conectada con un inventario físico de interacciones.

**PROBLEMA RESUELTO 6.16 · Un empuje que crece con el tiempo**

Un carro de 2 kg se encuentra en reposo en $x = 1\,\text{m}$. Durante $0 \le t \le 3\,\text{s}$ su fuerza neta horizontal es $F_x(t) = (4\,\text{N/s})t$. Encuentra su posición y velocidad al terminar el intervalo.
*Resolución.* La aceleración es $a_x = (2\,\text{m/s}^3)t$. Integramos usando las condiciones iniciales:

$$v_x(t) = (1\,\text{m/s}^3)t^2, \qquad x(t) = 1\,\text{m} + (1/3\,\text{m/s}^3)t^3.$$

En 3 s resulta $v_x = 9\,\text{m/s}$ y $x = 10\,\text{m}$. La fuerza alcanza 12 N al final de los tres segundos y toma valores menores antes de ese instante. Reemplazarla por una constante de 12 N describe otro movimiento, con una velocidad final de 18 m/s.




El área triangular vale 18 N s y corresponde a un cambio de velocidad de 9 m/s para $m = 2\,\text{kg}$. La fuerza promedio se obtiene del impulso y de la duración del intervalo.

Definimos la *cantidad de movimiento* o *momento lineal* de una partícula como $\vec{p} = m\vec{v}$, medida en kg m/s. Para masa constante, la regla del producto se reduce a $d\vec{p}/dt = m\,d\vec{v}/dt$ y permite escribir la segunda ley como

$$\vec{F}_{\text{neta}} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \qquad \vec{p}(t_f) - \vec{p}(t_i) = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{\text{neta}}(t)\,dt. \tag{6.4}$$

La integral de fuerza se llama *impulso*. Sus unidades, $\text{N s} = \text{kg m/s}$, concuerdan con un cambio de momento. La igualdad permite hallar ese cambio incluso cuando la fuerza no es constante.

La forma $m\vec{a}$ empleada aquí corresponde a una colección material de masa constante. Si $m = m(t)$, la regla del producto da la identidad $d(m\vec{v})/dt = m\vec{a} + \dot{m}\vec{v}$. El balance de un sistema abierto incorpora además el momento transportado por la materia que atraviesa su frontera. Para un cohete debemos especificar esa frontera, el flujo de masa y la velocidad de salida pertinente.

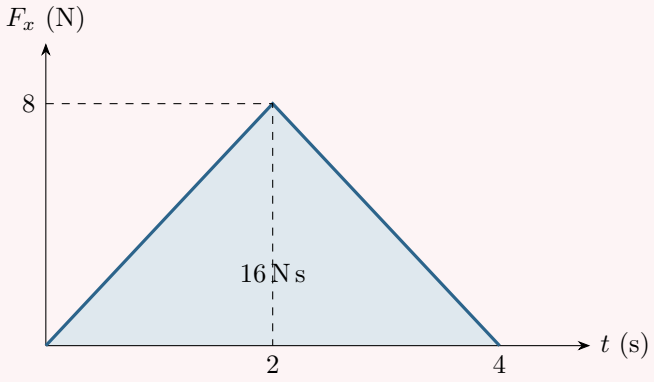
**PROBLEMA RESUELTO 6.17 · El área de una fuerza determina un cambio de momento**

Sobre un carro de 2 kg que inicialmente avanza a 3 m/s actúa una fuerza neta horizontal que crece linealmente de 0 a 8 N entre 0 y 2 s y disminuye linealmente a cero entre 2 y 4 s. Encuentra la velocidad final.

*Resolución.* La gráfica fuerza-tiempo es un triángulo por encima del eje temporal. Su área es

$$J_x = \tfrac{1}{2}(4\,\mathrm{s})(8\,\mathrm{N}) = 16\,\mathrm{N\,s}.$$

Como $J_x = m(v_f - v_0)$, el cambio de velocidad es $16/2 = 8\,\mathrm{m/s}$ y $v_f = 11\,\mathrm{m/s}$. El área representa impulso y sus unidades corresponden a momento lineal. La fuerza promedio durante el intervalo vale $16/4 = 4\,\mathrm{N}$ y produciría el mismo cambio total de velocidad, aunque no la misma velocidad en cada instante ni necesariamente el mismo desplazamiento.

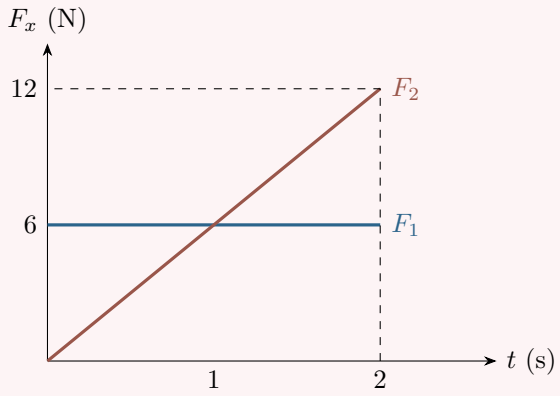



La base completa mide cuatro segundos. El área determina el impulso y, con él, el cambio de momento lineal.

**PROBLEMA RESUELTO 6.18 · El impulso entre dos velocidades medidas**

Un carro de 3 kg parte del reposo en $x = 0$ y alcanza 4 m/s hacia la derecha en 2 s. Determina qué fuerza promedio puede inferirse y compara dos historias compatibles: una resultante constante y otra que crece linealmente desde cero.

*Resolución.* El cambio de momento fija el impulso $J_x = 3(4) = 12\,\mathrm{N\,s}$ y la fuerza promedio $\overline{F}_x = 12/2 = 6\,\mathrm{N}$. Una fuerza constante de 6 N da $a_x = 2\,\mathrm{m/s^2}$, $v_x = (2\,\mathrm{m/s^2})t$ y $x = (1\,\mathrm{m/s^2})t^2$. Una segunda historia, $F_x = (6\,\mathrm{N/s})t$, da $a_x = (2\,\mathrm{m/s^3})t$, $v_x = (1\,\mathrm{m/s^3})t^2$ y $x = (1/3\,\mathrm{m/s^3})t^3$. En ambos casos la velocidad final es 4 m/s, pero las posiciones finales son 4 m y 8/3 m. Los datos determinan un promedio de la resultante; reconstruir su historia temporal y las interacciones individuales requiere mediciones adicionales. Una medición adicional de posición permitiría distinguir estos dos modelos concretos.




En $0 \le t \le 2\,\mathrm{s}$, el rectángulo de $F_1$ y el triángulo de $F_2$ tienen la misma área 12 N s. Dos fuerzas con distinta evolución temporal pueden producir el mismo impulso.

## 6.9 Contrastar el modelo con una observación

Un DCL es una propuesta sobre el sistema y sus interacciones. Su valor aparece cuando las ecuaciones producen consecuencias que podemos contrastar. Si una normal sale negativa o un carro acelera en contra de la resultante calculada, conviene volver al inventario, a los ejes y a las hipótesis antes de ajustar números. Una ecuación algebraicamente correcta puede describir un contacto imposible o una referencia distinta de la observada.

**Comparar aceleraciones sin confundir los datos**

En una mesa horizontal, estudia un carro ligero con ruedas y un dispositivo que permita aplicar un tirón aproximadamente constante medido con un dinamómetro. Realiza recorridos cortos y despejados, sin personas encima del carro. Repite con una masa adicional bien sujeta y registra posición y tiempo mediante vídeo con cámara fija y una escala en el plano del movimiento.

Compara primero las fuerzas medidas y solo después las aceleraciones estimadas a partir de los datos. El dinamómetro mide el tirón; el DCL permite establecer cuándo ese tirón aproxima la resultante de todas las interacciones. Si la resultante fuese la misma en ambos ensayos y se duplicara la masa total, el modelo predeciría la mitad de aceleración. Al procesar las mediciones, examina cómo las resistencias, la inclinación de la cuerda, la resolución del vídeo o un tirón variable pueden explicar diferencias respecto de esa razón. La rotación de las ruedas también puede limitar la aproximación de partícula empleada para el

**Continuación**

carro. Registra la masa del carro junto con la carga, y conserva tanto las lecturas originales como las incertidumbres de la estimación. El contraste permite evaluar la adecuación del modelo bajo las condiciones del ensayo.
Como contraste cuantitativo, considera un tirón $F = (6{,}0 \pm 0{,}1)\,\mathrm{N}$, una masa $m = (2{,}00 \pm 0{,}02)\,\mathrm{kg}$ y una aceleración $a = (2{,}80 \pm 0{,}05)\,\mathrm{m/s^2}$, con márgenes interpretados como cotas compatibles. La fuerza que falta en la dirección contraria al tirón tiene estimación central $R = F - ma = 0{,}40\,\mathrm{N}$. Los extremos conservadores son $R_{\mathrm{mín}} = 5{,}9 - 2{,}02(2{,}85) = 0{,}143\,\mathrm{N}$ y $R_{\mathrm{máx}} = 6{,}1 - 1{,}98(2{,}75) = 0{,}655\,\mathrm{N}$. Bajo estas cotas y el modelo de partícula, el tirón supera a $ma$: el inventario debe incluir una contribución horizontal resistente. Antes de atribuirla a rozamiento, revisa la frontera del sistema, los contactos, la inclinación del tirón y la posible influencia de las ruedas.

La descripción dinámica se sostiene en una elección que debe permanecer visible: qué cuerpo recibe cada fuerza. Una vez fijados el sistema, la referencia y los ejes, la suma vectorial determina una aceleración y las condiciones iniciales permiten reconstruir el movimiento. Cambiar la frontera puede eliminar fuerzas internas de una ecuación global; cambiar el observador puede introducir términos de inercia. Ninguna de esas operaciones cambia quién interactúa físicamente con quién.

## Ejercicios para reconstruir y transferir

En los problemas próximos a la superficie terrestre usa $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$. Considera inercial la referencia del suelo, salvo indicación contraria. Las superficies declaradas lisas no ejercen rozamiento. Dibuja el DCL pertinente antes de calcular y distingue las fuerzas individuales de su resultante. Los datos son idealizados; los resultados numéricos expresan el redondeo empleado.

**EJERCICIO 6.1 · Una fuerza neta nula**

Un carro se encuentra en $x = 2\,\mathrm{m}$ con velocidad $-3\,\mathrm{m/s}$ cuando la fuerza neta se hace cero y permanece así durante $4\,\mathrm{s}$. Encuentra la posición final. Explica si la velocidad negativa exige una fuerza neta negativa.

**EJERCICIO 6.2 · El reposo instantáneo**

Una pelota de $0{,}4\,\mathrm{kg}$ se lanza verticalmente sin aire. Encuentra fuerza neta y aceleración en la cumbre, antes de cualquier contacto. Explica por qué su velocidad nula no implica equilibrio.

**EJERCICIO 6.3 · Sumar dos fuerzas**

En el plano horizontal, una partícula de $4\,\mathrm{kg}$ recibe fuerzas $(8, 6)\,\mathrm{N}$ y $(-4, 2)\,\mathrm{N}$. Peso y normal se equilibran verticalmente. Encuentra resultante y aceleración, con sus módulos.

**EJERCICIO 6.4 · Un móvil que invierte el sentido**

Un carro de 2 kg parte de $x = 0$ con $v_0 = +5\,\mathrm{m/s}$ y recibe una fuerza neta constante $-2\,\mathrm{N}$ durante 7 s. Encuentra instante y posición del retorno, posición y velocidad finales, distancia y desplazamiento.

**EJERCICIO 6.5 · Una fuerza que se infiere**

Para $0 \le t \le 2\,\mathrm{s}$ una partícula de 2 kg sigue $x = (1\,\mathrm{m/s})t + (1\,\mathrm{m/s^3})t^3$ e $y = 2\,\mathrm{m} - (2\,\mathrm{m/s^2})t^2$. Encuentra la fuerza neta en $t = 1\,\mathrm{s}$ y explica qué falta para dibujar las fuerzas individuales.

**EJERCICIO 6.6 · Comparación de inercia**

La misma fuerza neta produce $2\,\mathrm{m/s^2}$ en una masa de 3 kg y $0{,}5\,\mathrm{m/s^2}$ en otro cuerpo. Determina la masa del segundo y la fuerza aplicada.

**EJERCICIO 6.7 · Apoyar y empujar**

Un bloque de 4 kg permanece en reposo sobre una mesa horizontal mientras una mano empuja verticalmente hacia abajo con 10 N. Encuentra la normal e identifica las fuerzas de reacción al peso y al contacto con la mesa.

**EJERCICIO 6.8 · Lectura de una báscula**

Una persona de 60 kg dentro de un ascensor recibe de la báscula una normal de 720 N. Encuentra su aceleración. Da dos signos posibles de velocidad compatibles con la lectura y describe cómo cambia la rapidez en cada caso.

**EJERCICIO 6.9 · Una fuerza inclinada**

Una caja de 4 kg está sobre una mesa horizontal lisa y recibe un tirón con componentes $(12, 9)\,\mathrm{N}$. Determina normal y aceleración mientras conserve el contacto. ¿Qué módulo tiene el tirón?

**EJERCICIO 6.10 · La hipótesis que produce una normal negativa**

Una caja de 2 kg reposa sobre una mesa sin adhesión. Una cuerda empieza a tirar verticalmente hacia arriba con 25 N. Decide si puede seguir apoyada y encuentra su aceleración inmediatamente después de perder el apoyo.

**EJERCICIO 6.11 · Suspensión simétrica**

Un objeto puntual de peso 80 N está en reposo suspendido de dos cuerdas que forman $45^\circ$ con la horizontal, una a cada lado. Determina ambas tensiones y verifica sus componentes.

**EJERCICIO 6.12 · Equilibrio con tres fuerzas**

Un disco conserva velocidad vectorial constante sobre una mesa lisa. Dos fuerzas horizontales son $(5, -2)\,\mathrm{N}$ y $(-1, 7)\,\mathrm{N}$. Encuentra la tercera fuerza horizontal necesaria y su módulo.

**EJERCICIO 6.13 · Fuerzas mutuas**

Dos carros de $3\,\mathrm{kg}$ y $6\,\mathrm{kg}$ intercambian fuerzas magnéticas horizontales de módulo $18\,\mathrm{N}$ en cierto instante. Sobre el primero actúa hacia la izquierda y sobre el segundo hacia la derecha; no hay otras fuerzas horizontales. Encuentra sus aceleraciones y compara fuerza y aceleración.

**EJERCICIO 6.14 · La reacción al peso**

Un objeto cuelga inmóvil de una cuerda vertical. Identifica la reacción al peso y la reacción a la fuerza de la cuerda. Explica por qué peso y tensión se equilibran en el objeto sin constituir un par de tercera ley.

**EJERCICIO 6.15 · Contacto entre dos bloques**

Sobre una mesa lisa, A de $1\,\mathrm{kg}$ está a la izquierda de B de $4\,\mathrm{kg}$. Una mano empuja A hacia la derecha con $15\,\mathrm{N}$ y ambos mantienen el contacto. Encuentra aceleración y fuerza de contacto; verifica las ecuaciones de ambos cuerpos.

**EJERCICIO 6.16 · Una curva con rapidez constante**

Un disco de $2\,\mathrm{kg}$ recorre un círculo de radio $3\,\mathrm{m}$ a $6\,\mathrm{m/s}$ sobre una mesa horizontal lisa, sujeto a una cuerda horizontal fija al centro. Calcula la tensión. Si duplica su rapidez manteniendo el radio, ¿qué tensión necesitaría?

**EJERCICIO 6.17 · Inferir fuerza de un vector velocidad**

Una partícula de $2\,\mathrm{kg}$ tiene $\vec{v}(t) = (3\,\mathrm{m/s})[\cos(\omega t)\hat{\imath} + \sin(\omega t)\hat{\jmath}]$, con $\omega = 2\,\mathrm{rad/s}$, en una referencia inercial. Obtén fuerza neta y su módulo. Evalúa en $t = 0$ y explica si rapidez constante implica fuerza cero.

**EJERCICIO 6.18 · El observador que acelera**

Un carro de $3\,\mathrm{kg}$ sobre una pista lisa no recibe fuerza horizontal. Un observador usa ejes sin rotación cuyo origen acelera $+2\,\mathrm{m/s^2}$ respecto del suelo. Encuentra la aceleración del carro vista por ese observador y el término de inercia que necesita en su ecuación.

**EJERCICIO 6.19 · Una fuerza creciente**

Un carro de $3\,\mathrm{kg}$ parte del reposo en $x = 0$ y su fuerza neta es $F_x = (6\,\mathrm{N/s})t$ durante $0 \le t \le 2\,\mathrm{s}$. Encuentra $a_x(t)$, $v_x(t)$, $x(t)$ y el estado final.

**EJERCICIO 6.20 · Un impulso que frena**

Un carro de 2 kg avanza inicialmente a +5 m/s. Recibe una fuerza neta constante de −4 N durante 3 s. Usa el cambio de momento para encontrar la velocidad final y decide si hubo un retorno antes de terminar el intervalo.

**EJERCICIO 6.21 · Impulso triangular**

Una fuerza neta crece linealmente de 0 a 6 N en 1 s y vuelve linealmente a cero en el siguiente segundo. Actúa sobre un cuerpo de 3 kg con velocidad inicial −1 m/s. Calcula impulso y velocidad final.

**EJERCICIO 6.22 · Un promedio y muchas historias**

Un cuerpo de 2 kg cambia su velocidad de 1 m/s a 7 m/s en 3 s. Halla la fuerza neta promedio. Construye una fuerza constante y otra lineal que parte de cero y produzcan ese mismo cambio; compara sus desplazamientos.

**EJERCICIO 6.23 · ¿Qué sobra en el diagrama?**

Un estudiante dibuja sobre una caja apoyada en el suelo: peso, normal, tirón horizontal, $m\vec{a}$ hacia delante y «fuerza de movimiento» en la dirección de la velocidad. No hay rozamiento. Repara el inventario y explica si la fuerza que la caja ejerce sobre el suelo pertenece a su DCL.

**EJERCICIO 6.24 · Masa que cambia y derivadas**

Comprueba algebraicamente que si $m = m(t)$ y $\vec{v} = \vec{v}(t)$, entonces $d(m\vec{v})/dt = m\vec{a} + \dot{m}\vec{v}$. Explica por qué esa identidad no basta para modelar un cohete mediante la sola expresión $\vec{F}_{\text{ext}} = d(m\vec{v})/dt$ aplicada al cohete sin el gas expulsado.

## Soluciones completas de los ejercicios

**SOLUCIÓN 6.1.**
La fuerza neta nula implica $a_x = 0$ durante el intervalo, luego $v_x = -3\,\text{m/s}$ permanece constante. La posición final es $x_f = 2 - 3(4) = -10\,\text{m}$. El signo de la velocidad indica movimiento hacia el lado negativo del eje. La fuerza neta se relaciona con el cambio de velocidad, que aquí es cero.

**SOLUCIÓN 6.2.**
La única fuerza es el peso, de módulo $mg = 0{,}4(10) = 4\,\text{N}$, hacia abajo. Con $+y$ hacia arriba, $F_y = -4\,\text{N}$ y $a_y = -10\,\text{m/s}^2$. La velocidad se anula al pasar del ascenso al descenso y su derivada sigue siendo distinta de cero: la cumbre es un instante de retorno.

**SOLUCIÓN 6.3.**
La resultante es $(8-4, 6+2) = (4, 8)\,\text{N}$, de módulo $\sqrt{80} = 4\sqrt{5}\,\text{N}$. Dividir sus componentes por 4 kg da $\vec{a} = (1, 2)\,\text{m/s}^2$ y $|\vec{a}| = \sqrt{5}\,\text{m/s}^2$. La resultante se construye sumando vectores mediante sus componentes. La dirección corresponde al primer cuadrante, a $\arctan 2 \simeq 63{,}4°$ desde $+x$.

**SOLUCIÓN 6.4.**

La aceleración es $a_x = -2/2 = -1\,\mathrm{m/s^2}$. Por tanto, $v_x = 5\,\mathrm{m/s} - (1\,\mathrm{m/s^2})t$ y $x = (5\,\mathrm{m/s})t - (0{,}5\,\mathrm{m/s^2})t^2$. El retorno ocurre en $t = 5\,\mathrm{s}$, a 12,5 m del origen. En 7 s, $v_x = -2\,\mathrm{m/s}$ y $x = 35 - 24{,}5 = 10{,}5\,\mathrm{m}$. El desplazamiento es +10,5 m y la distancia $12{,}5 + (12{,}5 - 10{,}5) = 14{,}5\,\mathrm{m}$. La fuerza sigue actuando durante el retorno y después de él.

**SOLUCIÓN 6.5.**

Dos derivadas dan $a_x = (6\,\mathrm{m/s^3})t$ y $a_y = -4\,\mathrm{m/s^2}$. En 1 s, $\vec{a} = (6, -4)\,\mathrm{m/s^2}$ y $\vec{F}_{\text{neta}} = 2\vec{a} = (12, -8)\,\mathrm{N}$. Su módulo es $4\sqrt{13}\,\mathrm{N}$. Para dibujar fuerzas individuales se necesita identificar agentes, contactos y campos; las funciones de posición y la masa solo fijan su suma.

**SOLUCIÓN 6.6.**

El primer ensayo fija la fuerza neta $F = 3(2) = 6\,\mathrm{N}$. La segunda masa vale $m = 6/0{,}5 = 12\,\mathrm{kg}$. El cociente de masas es cuatro y el de aceleraciones es su inverso, siempre que la fuerza neta comparada sea realmente la misma.

**SOLUCIÓN 6.7.**

Sobre el bloque actúan el peso 40 N, la fuerza de la mano 10 N hacia abajo y la normal hacia arriba. Como $a_y = 0$, $N - 40 - 10 = 0$ en SI y $N = 50\,\mathrm{N}$. La reacción al peso es la atracción gravitatoria del bloque sobre la Tierra; la reacción a la normal es el empuje del bloque sobre la mesa. Ninguna actúa sobre el bloque ni debe añadirse a su DCL.

**SOLUCIÓN 6.8.**

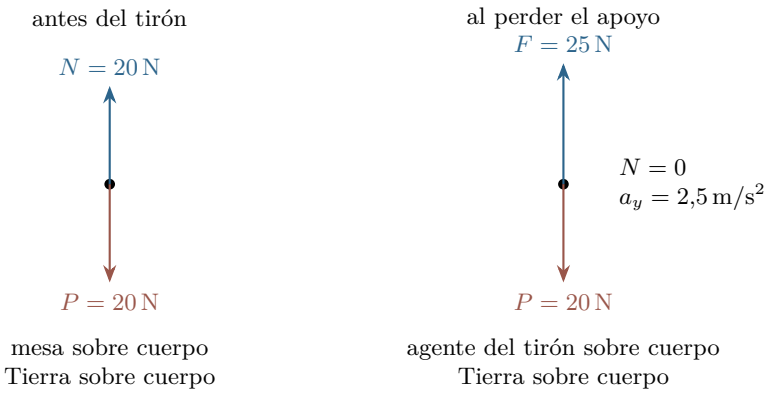
El peso es 600 N. La segunda ley para la persona da $720 - 600 = 60a_y$, luego $a_y = +2\,\mathrm{m/s^2}$. Si sube, su rapidez aumenta; si baja, disminuye mientras siga bajando. La báscula mide una normal; determinar el signo de la velocidad requiere otro dato, y la masa conserva su valor aunque la lectura pudiera interpretarse erróneamente como 72 kg.

**SOLUCIÓN 6.9.**

Verticalmente, $N + 9 - 40 = 0$ da $N = 31\,\mathrm{N}$, positivo y compatible con el contacto. Horizontalmente, $a_x = 12/4 = 3\,\mathrm{m/s^2}$; la aceleración vertical es cero bajo esa hipótesis. El módulo del tirón es $\sqrt{12^2 + 9^2} = 15\,\mathrm{N}$. Usar ese módulo en lugar de su componente horizontal daría una aceleración equivocada.

**SOLUCIÓN 6.10.**

Mantener el apoyo exigiría $N + 25 - 20 = 0$, de donde $N = -5\,\mathrm{N}$. Como la mesa transmite compresión en un contacto sin adhesión, ese resultado invalida la hipótesis de contacto mantenido. Al separarse, $N = 0$ y la fuerza neta es $25 - 20 = 5\,\mathrm{N}$ hacia arriba; por tanto, $a_y = 5/2 = 2{,}5\,\mathrm{m/s^2}$. El peso continúa actuando después de perderse el apoyo.




Dos instantes del modelo. Las flechas son esquemáticas; el apoyo desaparece cuando la superficie deja de comprimir el cuerpo.

**SOLUCIÓN 6.11.**

El equilibrio horizontal exige $T_L = T_R = T$ por la simetría de los ángulos. Verticalmente, $2T \sin 45^\circ = 80\,\mathrm{N}$, luego $T = 40\sqrt{2}\,\mathrm{N} \simeq 56{,}57\,\mathrm{N}$. Cada componente vertical vale 40 N; las horizontales tienen módulos de 40 N y sentidos contrarios. El peso se equilibra con la suma de las componentes verticales de las tensiones, mientras sus componentes horizontales se cancelan.

**SOLUCIÓN 6.12.**

La suma de las dos fuerzas conocidas es $(4, 5)\,\mathrm{N}$. Para que la velocidad vectorial sea constante, la resultante horizontal debe ser cero: $\vec{F}_3 = (-4, -5)\,\mathrm{N}$, de módulo $\sqrt{41}\,\mathrm{N}$. Los signos sitúan la fuerza en el tercer cuadrante. La condición admite tanto el reposo como el movimiento uniforme.

**SOLUCIÓN 6.13.**

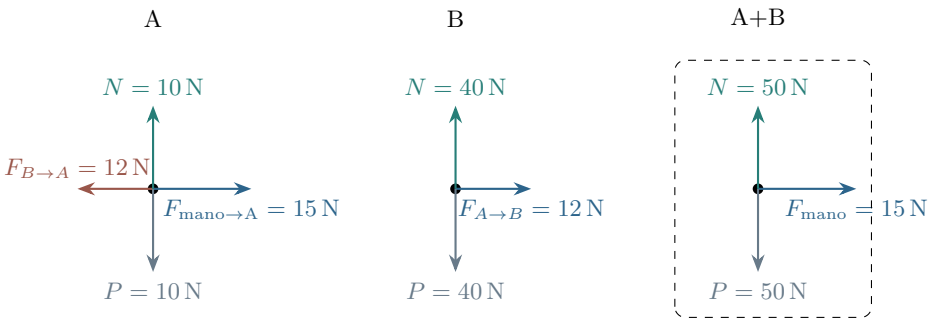
Para el primer carro, $a_1 = -18/3 = -6\,\mathrm{m/s^2}$; para el segundo, $a_2 = 18/6 = +3\,\mathrm{m/s^2}$. La interacción tiene igual módulo en ambos lados y produce aceleraciones de módulos distintos. Los pesos y las normales se equilibran verticalmente. Al sumar las ecuaciones globales se cancelan las fuerzas internas opuestas; cada ecuación individual incluye la fuerza interna correspondiente.

**SOLUCIÓN 6.14.**

El peso es la fuerza de la Tierra sobre el objeto; su reacción es la atracción del objeto sobre la Tierra. La tensión es la fuerza de la cuerda sobre el objeto; su reacción es el tirón del objeto sobre la cuerda. Peso y tensión pertenecen al DCL del objeto y se equilibran porque $a_y = 0$. Pertenecen a interacciones diferentes; sus respectivas reacciones actúan sobre los otros cuerpos participantes.

**SOLUCIÓN 6.15.**

La fuerza externa horizontal sobre el conjunto es $15\,\mathrm{N}$ y la masa total $5\,\mathrm{kg}$. Como el contacto mantenido impone la misma aceleración, $a = 3\,\mathrm{m/s^2}$. Sobre B actúa horizontalmente solo el contacto de A, de módulo $4(3) = 12\,\mathrm{N}$ hacia la derecha. Sobre A actúan $15\,\mathrm{N}$ hacia la derecha y $12\,\mathrm{N}$ hacia la izquierda: $15 - 12 = 1(3)$. En B, $12 = 4(3)$. Los contactos opuestos se cancelan al sumar ambas ecuaciones.




Las normales son fuerzas de la mesa y los pesos son fuerzas de la Tierra. El contacto mutuo actúa sobre cuerpos diferentes y se cancela al sumar los dos balances. La frontera discontinua encierra el sistema A+B.

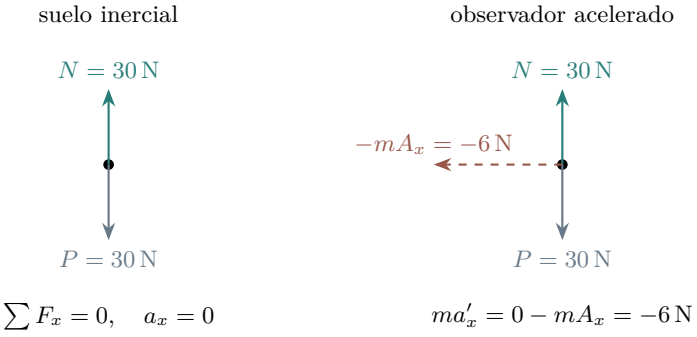
**SOLUCIÓN 6.16.**

La aceleración radial requerida es $u^2/R = 6^2/3 = 12\,\mathrm{m/s^2}$; la tensión horizontal vale $T = ma = 24\,\mathrm{N}$. Con rapidez doble y el mismo radio, $T' = m(2u)^2/R = 4T = 96\,\mathrm{N}$. Se trata de la tensión necesaria en el modelo; la cuerda real tendría que ser capaz de soportarla. La tensión proporciona la fuerza centrípeta requerida.

**SOLUCIÓN 6.17.**

La regla de la cadena da $\vec{a}(t) = (6\,\mathrm{m/s^2})[-\sin(\omega t)\hat{\imath} + \cos(\omega t)\hat{\jmath}]$. Multiplicando por $2\,\mathrm{kg}$ se obtiene la misma combinación unitaria con coeficiente $12\,\mathrm{N}$, que es el módulo constante de la resultante. En $t = 0$, $\vec{v} = (3, 0)\,\mathrm{m/s}$ y $\vec{F} = (0, 12)\,\mathrm{N}$. La resultante es perpendicular a la velocidad y cambia su dirección; derivar solo el módulo constante $3\,\mathrm{m/s}$ perdería esa información.

**SOLUCIÓN 6.18.**
Desde el suelo, $a_x = 0$. El origen del observador tiene $A_x = +2\,\mathrm{m/s^2}$, así que $a'_x = a_x - A_x = -2\,\mathrm{m/s^2}$. La ecuación en la referencia acelerada necesita el término $-mA_x = -6\,\mathrm{N}$. Es un término que depende de la referencia elegida; las reacciones de tercera ley corresponden a interacciones entre cuerpos.




Normal y peso conservan sus agentes. La flecha discontinua representa el término de inercia asociado a la referencia acelerada; su origen es el cambio de observador.

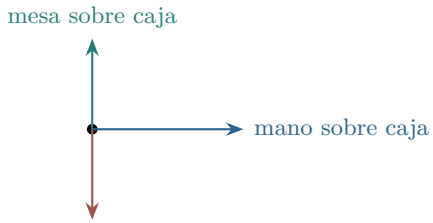
**SOLUCIÓN 6.19.**
Dividir la fuerza por 3 kg da $a_x = (2\,\mathrm{m/s^3})t$. Integrando con $v_0 = 0$ y $x_0 = 0$, $v_x = (1\,\mathrm{m/s^3})t^2$ y $x = (1/3\,\mathrm{m/s^3})t^3$. En 2 s, $a_x = 4\,\mathrm{m/s^2}$, $v_x = 4\,\mathrm{m/s}$ y $x = 8/3\,\mathrm{m}$. La fuerza crece durante el recorrido hasta alcanzar su valor final de 12 N; la integración incorpora esa variación.

**SOLUCIÓN 6.20.**
El impulso es $J_x = (-4\,\mathrm{N})(3\,\mathrm{s}) = -12\,\mathrm{N\,s}$. La variación de velocidad es $J_x/m = -6\,\mathrm{m/s}$ y $v_f = 5 - 6 = -1\,\mathrm{m/s}$. Como la aceleración fue constante, $a_x = -2\,\mathrm{m/s^2}$ y la velocidad se anuló en 2,5 s, antes de terminar el intervalo. El signo final confirma que el carro ya había invertido el sentido.

**SOLUCIÓN 6.21.**
El área triangular da $J_x = \frac{1}{2}(2\,\mathrm{s})(6\,\mathrm{N}) = 6\,\mathrm{N\,s}$. Entonces $\Delta v_x = 6/3 = 2\,\mathrm{m/s}$ y $v_f = -1 + 2 = +1\,\mathrm{m/s}$. La fuerza tiene sentido positivo durante el intervalo; al principio reduce la rapidez del movimiento negativo y después la aumenta en sentido positivo. La fuerza promedio es 3 N y el máximo es 6 N.

**SOLUCIÓN 6.22.**
El cambio de momento es $2(7 - 1) = 12\,\mathrm{N\,s}$; la fuerza promedio vale $12/3 = 4\,\mathrm{N}$. La fuerza constante 4 N da $a_x = 2\,\mathrm{m/s^2}$ y $v_x = 1\,\mathrm{m/s} + (2\,\mathrm{m/s^2})t$, con desplazamiento $3 + 9 = 12\,\mathrm{m}$. Una fuerza lineal $F_x = kt$ debe satisfacer $\frac{1}{2}k(3\,\mathrm{s})^2 = 12\,\mathrm{N\,s}$, luego $k = 8/3\,\mathrm{N/s}$. Entonces $a_x = (4/3\,\mathrm{m/s^3})t$ y $v_x = 1\,\mathrm{m/s} + (2/3\,\mathrm{m/s^3})t^2$. Su desplazamiento es $3 + (2/9)(27) = 9\,\mathrm{m}$. Ambas historias dan $v_f = 7\,\mathrm{m/s}$ y distinto recorrido porque acumulan velocidad de maneras diferentes.

**SOLUCIÓN 6.23.**
El DCL conserva peso, normal y tirón horizontal, cada uno con un agente identificable. $m\vec{a}$ es el miembro derecho de la segunda ley; el inventario de interacciones debe conservar únicamente las fuerzas con agentes identificados. La fuerza que la caja ejerce sobre el suelo pertenece al DCL del suelo. En contacto con un suelo horizontal fijo, las fuerzas verticales se equilibran y la resultante horizontal es el tirón.




caja: $\sum \vec{F} = m\vec{a}$
suelo: recibe la reacción de la caja

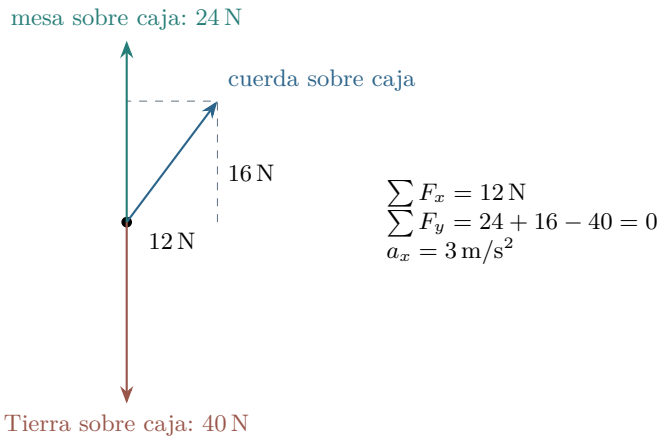
El DCL de la caja reúne las interacciones que recibe. Las reacciones se representan en los diagramas de los otros cuerpos.

**SOLUCIÓN 6.24.**
Aplicar la regla del producto a cada componente de $m\vec{v}$ da $\dot{m}\vec{v} + m\dot{\vec{v}} = \dot{m}\vec{v} + m\vec{a}$. Esa identidad es matemática. El cohete considerado junto con el gas que permanece en su interior forma un sistema abierto: la materia expulsada transporta momento. Su balance físico incorpora ese flujo y la velocidad de salida respecto de la referencia elegida.

## Diagnóstico de salida

Una caja de 4 kg se mueve sobre una mesa horizontal lisa. Parte de $x = 0$ con $v_{0x} = -2\,\mathrm{m/s}$. Durante 2 s una cuerda ejerce un tirón constante de componentes $(12, 16)$ N. Dibuja el DCL y determina normal, aceleración, instante de retorno, velocidad y posición finales. Identifica la reacción a cada fuerza del DCL y explica cuáles actúan sobre la caja. Después describe qué término adicional necesitaría un observador cuyos ejes no giran y cuyo origen acelera $+1\,\mathrm{m/s^2}$ horizontalmente respecto del suelo.

**Contraste después del intento.** Peso 40 N hacia abajo, normal 24 N hacia arriba y tirón $(12, 16)$ N. La resultante es $(12, 0)$ N y la aceleración $(3, 0)\,\mathrm{m/s^2}$. La velocidad se anula en 2/3 s, a $x = -2/3\,\mathrm{m}$. En 2 s, $v_x = 4\,\mathrm{m/s}$ y $x = -4 + 6 = 2\,\mathrm{m}$. Las reacciones pertenecen a los DCL de la Tierra, la mesa y la cuerda. El observador acelerado asigna $a'_x = 3 - 1 = 2\,\mathrm{m/s^2}$ y usa el término de inercia $-mA_x = -4\,\mathrm{N}$. La masa y las interacciones reales son las mismas en las dos descripciones.




DCL de la caja y proyecciones del tirón. Las líneas discontinuas son auxiliares geométricas; las tres fuerzas reales tienen agentes identificados. Flechas esquemáticas.

Para revisar el inventario vuelve a la sección 6.3; para los signos durante el retorno, al problema 6.3; para los pares mutuos, a la sección 6.5; y para el cambio de referencia, a la sección 6.7.

## Lecturas de apoyo

H. D. Young y R. A. Freedman, *Física universitaria*, volumen 1, serie Sears–Zemansky, 12.ª edición, Pearson Educación, 2009: capítulo 4, especialmente las secciones 4.2–4.6 sobre las leyes, las referencias inerciales y los diagramas de cuerpo libre.

R. A. Serway y C. Vuille, *Fundamentos de física*, volumen 1, 9.ª edición, Cengage Learning, 2012: capítulo 4, secciones 4.2–4.5, para contrastar la aplicación de las leyes a cuerpos concretos. Los enunciados, desarrollos y figuras de este capítulo son originales.

# CAPÍTULO 7

# ROZAMIENTO, TENSIONES Y SISTEMAS DE CUERPOS


7.1 Peso, apoyo y movimiento relativo . . . . . 133
7.2 El rozamiento estático como condición de compatibilidad . 133
7.3 Deslizar, frenar y llegar al reposo 134
7.4 Cómo un tirón modifica el apoyo 135
7.5 Elegir ejes sobre una rampa . . 136
7.6 Un intervalo de fuerzas que conserva el reposo . . . . . 139
7.7 Cuerdas y poleas: de la longitud a la aceleración . . . . . 140
7.8 Varios cuerpos y contactos que pueden fallar . . . . . 143
7.9 Una polea móvil cambia la restricción . . . . . 145
7.10 Elegir el tirón y contrastar el modelo . . . . . 145
Ejercicios para reconstruir y transferir 147
Soluciones completas de los ejercicios 150
Diagnóstico de salida . . . . . 152
Lecturas de apoyo . . . . . 152


Al aumentar poco a poco el tirón sobre una caja, podemos observar dos comportamientos: primero permanece quieta y luego comienza a deslizar. La superficie participa en ambos, pero su fuerza tangencial obedece condiciones diferentes. La segunda ley de Newton sigue siendo la misma; cambia el modelo que describe el contacto.

Una cuerda introduce otra dificultad: al mover un cuerpo podemos obligar a otro a moverse también, incluso en otra dirección y con distinta rapidez. Para relacionar sus ecuaciones habrá que estudiar la geometría del vínculo. El recorrido que sigue combina esas dos ideas, contacto y restricción, con los diagramas de cuerpo libre del capítulo anterior.

## 7.1 Peso, apoyo y movimiento relativo

Una caja apoyada sobre una rampa recibe de ella una fuerza que podemos descomponer en una componente perpendicular, la normal, y otra tangencial, el rozamiento o fricción. Ambas describen el contacto con la misma superficie. La normal evita la penetración mientras persiste el apoyo; el rozamiento puede impedir que las superficies deslicen una respecto de otra o resistir un deslizamiento ya establecido.

El peso procede de otra interacción. En una región pequeña, cerca de un astro, lo escribimos $\vec{P} = m\vec{g}$, donde $\vec{g}$ es el campo gravitatorio local, medido en N/kg o, equivalentemente, en $\mathrm{m/s^2}$. Cambiar de lugar puede cambiar el peso sin modificar la masa. Una báscula mide una fuerza de apoyo y, si muestra kilogramos, transforma esa fuerza usando una calibración. Para interpretar su lectura necesitamos conocer las condiciones del movimiento.

**PROBLEMA RESUELTO 7.1 · La misma masa en dos campos gravitatorios**

Una pieza tiene masa 6 kg. Compara su peso en dos lugares donde $g_1 = 10\,\mathrm{N/kg}$ y $g_2 = 1{,}6\,\mathrm{N/kg}$. ¿Qué normal recibe si permanece apoyada en una mesa horizontal en cada lugar? *Resolución.* La masa sigue siendo 6 kg. Los pesos son $P_1 = 6(10) = 60\,\mathrm{N}$ y $P_2 = 6(1{,}6) = 9{,}6\,\mathrm{N}$. En cada mesa, sin otras fuerzas verticales y sin aceleración vertical, $N - P = 0$; por ello las normales valen respectivamente 60 N y 9,6 N. La igualdad entre normal y peso depende de esas condiciones. Un tirón vertical adicional o una mesa acelerada la modificarían.

| Lugar | Campo local | Peso y normal |
|---|---|---|
| 1 | 10 N/kg | 60 N |
| 2 | 1,6 N/kg | 9,6 N |

Masa común: 6 kg. La normal coincide con el peso solo bajo las condiciones del problema.

En adelante usaremos $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ salvo indicación contraria y consideraremos inercial la referencia del suelo dentro de la aproximación del problema. Las rampas y mesas permanecerán fijas, excepto cuando se diga expresamente otra cosa. Los cuerpos se tratarán como partículas para la traslación: se supone que no vuelcan y se deja fuera el análisis de su rotación.

El sentido del rozamiento requiere mirar *las dos superficies*. Un paquete quieto respecto del suelo, sobre una cinta que corre hacia la derecha, desliza hacia la izquierda respecto de la cinta. Esta ejerce sobre él rozamiento hacia la derecha y puede ponerlo en movimiento. También la fricción estática puede acelerar un objeto: una caja que acompaña a un camión sin deslizar necesita una fuerza horizontal. La palabra estática describe la adherencia entre las dos superficies del contacto, incluso cuando ambas se mueven respecto del suelo.

## 7.2 El rozamiento estático como condición de compatibilidad

Supongamos que una caja permanece en reposo sobre una mesa mientras tiramos horizontalmente de ella. Su aceleración es cero; la fuerza tangencial de la mesa debe equilibrar el tirón. Si duplicamos un tirón pequeño, esa fuerza también se duplica mientras el contacto pueda sostener el equilibrio. La fuerza se determina con las ecuaciones del movimiento y tiene un límite que depende de las superficies y de cuánto se comprimen.

El modelo de rozamiento seco de Coulomb aproxima ese límite mediante

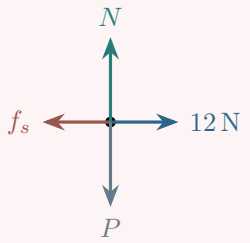
$$|f_s| \le \mu_s N, \qquad N \ge 0. \tag{7.1}$$

Aquí $f_s$ es una componente tangencial con signo, $N$ el módulo de la normal y $\mu_s \geq 0$ el coeficiente de rozamiento estático. El cociente de dos fuerzas es adimensional. Primero se calcula el $f_s$ que exigiría la ausencia de deslizamiento; después se comprueba la desigualdad. La igualdad describe un contacto en el límite de adherencia. En el modelo ideal, el umbral todavía admite un estado de equilibrio.

**PROBLEMA RESUELTO 7.2 · Un tirón compatible con el reposo**

Una caja de 5 kg está en reposo sobre una mesa, con $\mu_s = 0{,}4$. Se aplica un tirón horizontal de 12 N. Determina la normal y el rozamiento. ¿Qué cambia si el tirón aumenta hasta 24 N?

*Resolución.* Verticalmente $N = 50\,\mathrm{N}$, de modo que $f_{s,\mathrm{máx}} = 0{,}4(50) = 20\,\mathrm{N}$. El equilibrio horizontal exige $f_s = -12\,\mathrm{N}$, admisible porque $12 < 20$. La fuerza real tiene módulo 12 N.
Con 24 N, el reposo exigiría $|f_s| = 24\,\mathrm{N} > 20\,\mathrm{N}$ y deja de ser posible. Para calcular la aceleración durante el deslizamiento hace falta otra información, por ejemplo el coeficiente cinético. El coeficiente estático permitió identificar el límite del reposo.




Fuerzas sobre la caja en reposo; el tirón y la fricción se equilibran. Flechas esquemáticas.

La desigualdad separa una condición material de una ecuación dinámica. En esta caja en reposo, la fuerza necesaria se obtiene del equilibrio. En general, calculamos la fuerza compatible con la adherencia mediante la aceleración del cuerpo y después comprobamos el límite estático. La caja transportada por una plataforma acelerada puede conservar el reposo relativo y tener aceleración respecto del suelo: si el rozamiento es su única fuerza horizontal, debe cumplir $f_s = ma$, como en r7-16. Cuando la aceleración tangencial y las demás fuerzas tangenciales son cero, $f_s = 0$ satisface las condiciones.

## 7.3 Deslizar, frenar y llegar al reposo

Cuando las superficies ya deslizan, emplearemos el modelo

$$|\vec{f}_k| = \mu_k N, \qquad \vec{f}_k = -\mu_k N \frac{\vec{v}_{\mathrm{rel}}}{|\vec{v}_{\mathrm{rel}}|}, \quad |\vec{v}_{\mathrm{rel}}| > 0. \tag{7.2}$$

La velocidad $\vec{v}_{\mathrm{rel}}$ es la del cuerpo respecto de la superficie, en la dirección tangente al contacto. En una trayectoria recta basta asignar a la fuerza el sentido opuesto a esa velocidad. Al llegar a velocidad relativa cero, la última expresión deja de estar definida: debemos volver a examinar si la adherencia es posible.

Los coeficientes resumen un comportamiento experimental aproximado. En numerosos contactos secos $\mu_k < \mu_s$, pero sus valores dependen de los materiales y de su estado. Cada coeficiente caracteriza un par de superficies bajo condiciones de contacto determinadas. El modelo es apropiado cuando los efectos de la rapidez, el calentamiento, el desgaste y las deformaciones son pequeños; la resistencia del aire y la rodadura requieren descripciones propias.

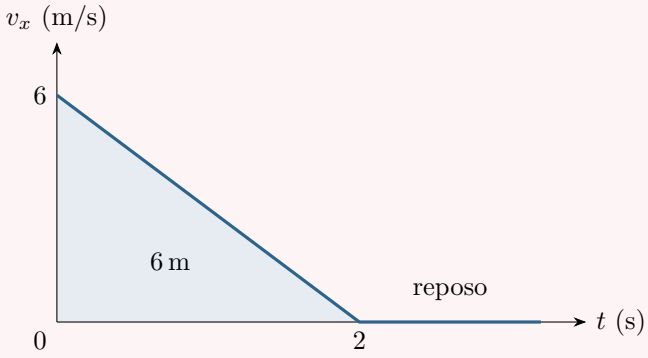
**PROBLEMA RESUELTO 7.3 · La ecuación de frenado tiene un final**

Una caja de 2 kg desliza a 6 m/s sobre una mesa horizontal. Se retira el tirón que la movía y queda únicamente el rozamiento horizontal, con $\mu_k = 0{,}3$. Halla el tiempo y la distancia hasta detenerse; explica qué sucede después.

*Resolución.* La normal es 20 N y la fricción cinética tiene módulo 6 N. Con $+x$ en el sentido inicial, $a_x = -6/2 = -3\,\mathrm{m/s^2}$. Mientras $v_x > 0$,

$$v_x = 6\,\mathrm{m/s} - (3\,\mathrm{m/s^2})t, \quad x - x_0 = (6\,\mathrm{m/s})t - \tfrac{1}{2}(3\,\mathrm{m/s^2})t^2.$$

El primer cero de la velocidad ocurre a los 2 s y el avance es 6 m. Después el reposo con $f_s = 0$ es compatible porque la resultante tangencial es nula. Prolongar $a_x = -3\,\mathrm{m/s^2}$ predeciría una inversión artificial. Esa ecuación correspondía al tramo de deslizamiento hacia $+x$ y terminó al detenerse la caja.




La recta de frenado termina en el primer cero de velocidad. El área triangular es el avance hasta detenerse.

## 7.4 Cómo un tirón modifica el apoyo

En una mesa horizontal, una fuerza inclinada puede aliviar o reforzar el apoyo. Si tiramos con módulo $F$ y ángulo $\alpha$ sobre la horizontal, sus componentes son $F\cos\alpha$ y $F\sin\alpha$. Mientras el cuerpo siga apoyado sin aceleración vertical,

$$N = mg - F\sin\alpha.$$

La misma fuerza que aporta una componente horizontal reduce así la resistencia cinética. Para un empuje dirigido hacia abajo, la componente vertical tiene el signo contrario y $N = mg + F\sin\alpha$. En ambos casos debemos comprobar $N \geq 0$, condición correspondiente a un contacto de compresión sin adhesión.

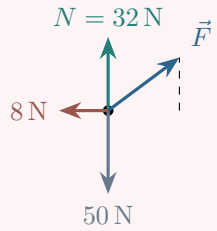
**PROBLEMA RESUELTO 7.4 · Tirar hacia arriba y seguir deslizando**

Una caja de 5 kg desliza hacia la derecha. Se tira de ella con componentes $(24, 18)$ N y $\mu_k = 0{,}25$. Calcula su aceleración y el módulo del tirón.

*Resolución.* La ecuación vertical es $N + 18 - 50 = 0$, por lo que $N = 32$ N. La fricción vale $0{,}25(32) = 8$ N hacia la izquierda. Entonces

$$a_x = \frac{24 - 8}{5} = 3{,}2\,\mathrm{m/s^2}.$$

El tirón tiene módulo $\sqrt{24^2 + 18^2} = 30$ N. Mientras se mantiene el contacto, su componente vertical modifica la normal y, con ella, el rozamiento.




DCL durante el avance a la derecha. El tirón alivia el apoyo. Flechas esquemáticas.

**PROBLEMA RESUELTO 7.5 · Empujar y tirar con el mismo módulo**

Repite el problema anterior con una fuerza de componentes $(24, -18)$ N. Compara la aceleración con la producida por el tirón ascendente.
*Resolución.* El peso y el empuje comprimen ahora la caja contra la mesa: $N = 50 + 18 = 68$ N. La fricción cinética es 17 N hacia la izquierda y $a_x = (24 - 17)/5 = 1{,}4\,\mathrm{m/s^2}$. Las dos fuerzas aplicadas tienen módulo 30 N y la misma componente horizontal, pero cambian de manera distinta la normal. La diferencia entre las aceleraciones se explica por el contacto, sin añadir ninguna fuerza nueva al DCL.

| Fuerza aplicada | Normal | Aceleración |
|---|---|---|
| $(24, 18)$ N | 32 N | $3{,}2\,\mathrm{m/s^2}$ |
| $(24, -18)$ N | 68 N | $1{,}4\,\mathrm{m/s^2}$ |

Comparación durante el deslizamiento a la derecha, con la misma caja y el mismo coeficiente cinético.

## 7.5 Elegir ejes sobre una rampa

En una rampa recta que forma un ángulo $\theta$ con la horizontal, resulta conveniente elegir un eje tangencial cuesta abajo y otro normal hacia fuera. El peso tiene componentes $mg\sin\theta$ y $-mg\cos\theta$. La segunda se obtiene proyectando sobre la normal: el ángulo entre la vertical descendente y la dirección hacia el interior del plano es $\theta$. El componente tangencial restante tiene módulo $mg\sin\theta$.

Si no hay otras fuerzas con componente normal y se conserva el apoyo, la aceleración normal es cero y $N = mg\cos\theta$. El peso permanece vertical: al cambiar de ejes solo hemos cambiado sus coordenadas. En un DCL podemos representar el peso completo o sus dos componentes con la descomposición claramente indicada; sumarlos todos contaría dos veces la gravedad.

**PROBLEMA RESUELTO 7.6 · Una rampa descrita con dos juegos de ejes**

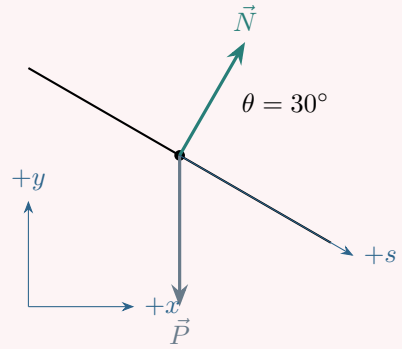
Un bloque de 4 kg desliza por una rampa lisa de 30°. Encuentra normal y aceleración. Expresa también la aceleración en ejes horizontal hacia la derecha y vertical hacia arriba, si la rampa desciende hacia la derecha.
*Resolución.* En ejes adaptados a la rampa,

$$N = 40\cos 30^\circ = 20\sqrt{3}\,\mathrm{N}, \qquad a_{\parallel} = 10\sin 30^\circ = 5\,\mathrm{m/s^2}.$$

La dirección cuesta abajo es $(\cos 30^\circ, -\sin 30^\circ)$, así que

$$\vec{a} = (5\sqrt{3}/2, -5/2)\,\mathrm{m/s^2}.$$

Como comprobación en los ejes fijos, la normal apunta en la dirección $(\sin 30^\circ, \cos 30^\circ)$. Por tanto $\vec{N} = (10\sqrt{3}, 30)\,\mathrm{N}$ y $\vec{P} = (0, -40)\,\mathrm{N}$; su suma $(10\sqrt{3}, -10)\,\mathrm{N}$ coincide con $4\vec{a}$. Las dos descripciones predicen el mismo vector físico.




La normal es perpendicular a la rampa. El eje $+s$ apunta cuesta abajo; los ejes fijos permiten comprobar el mismo vector aceleración. Flechas esquemáticas.

Para un bloque inicialmente quieto sin otras fuerzas tangenciales, mantener el reposo requiere rozamiento cuesta arriba de módulo $mg\sin\theta$. La condición de adherencia se vuelve

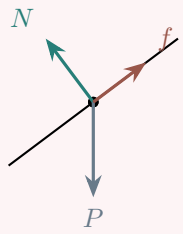
$$mg\sin\theta \le \mu_s mg\cos\theta \quad\Longleftrightarrow\quad \tan\theta \le \mu_s, \qquad 0 \le \theta < 90^\circ. \tag{7.3}$$

La cancelación de la masa explica que el ángulo límite de este modelo quede determinado por las propiedades del contacto. Es una conclusión bajo las hipótesis indicadas: una fuerza adicional puede cambiar tanto la normal como la fuerza tangencial requerida.

### PROBLEMA RESUELTO 7.7 · Una caja que puede quedarse en la pendiente

Una caja de 5 kg descansa sobre una rampa con $\sin\theta = 0{,}6$ y $\cos\theta = 0{,}8$. El coeficiente estático es 0,8. Decide si puede permanecer quieta.

*Resolución.* La normal vale $50(0{,}8) = 40\,\text{N}$. El peso tangencial es $50(0{,}6) = 30\,\text{N}$ cuesta abajo. Se necesitan 30 N de fricción cuesta arriba y el máximo es $0{,}8(40) = 32\,\text{N}$: el reposo es admisible.
La fricción real es 30 N. El ángulo actual es $\arctan(0{,}75) \simeq 36{,}9°$ y el límite $\arctan(0{,}8) \simeq 38{,}7°$. Se ha comprobado el equilibrio para el estado inicial dado; un bloque que ya desliza exige analizar el régimen cinético.



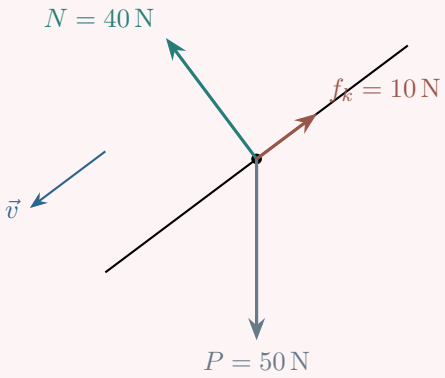

En reposo, la fricción sostiene la caja cuesta arriba. Su módulo está por debajo del máximo disponible. Flechas esquemáticas.

### PROBLEMA RESUELTO 7.8 · Descender por una rampa rugosa

El bloque de 5 kg del problema anterior ya desliza cuesta abajo y tiene $\mu_k = 0{,}25$. Calcula la aceleración y la rapidez tras avanzar 4 m, si entra en ese tramo con rapidez 2 m/s.
*Resolución.* Se conserva $N = 40\,\text{N}$. El rozamiento cinético vale 10 N cuesta arriba, opuesto al deslizamiento. La resultante tangencial es $30 - 10 = 20\,\text{N}$ cuesta abajo y $a_{\parallel} = 4\,\text{m/s}^2$. Con eje positivo en ese sentido,

$$v^2 = v_0^2 + 2a_{\parallel}\Delta x = 4 + 2(4)(4) = 36\,\text{m}^2/\text{s}^2,$$

por lo que $v = 6\,\text{m/s}$. El reposo previo y el deslizamiento posterior obedecen a regímenes distintos del contacto, con fuerzas de rozamiento diferentes.




El bloque desciende hacia la izquierda; la fricción apunta cuesta arriba. La velocidad se dibuja aparte del DCL. Flechas esquemáticas.

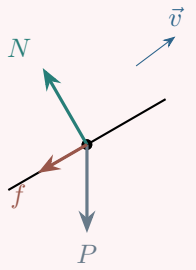
**PROBLEMA RESUELTO 7.9 · Subir, detenerse y revisar el contacto**

Un bloque asciende por una rampa de 30° con rapidez inicial 4 m/s. Tiene $\mu_k = 0{,}2$ y $\mu_s = 0{,}7$. Encuentra cuánto sube y decide si vuelve a bajar.

*Resolución.* Mientras sube, gravedad tangencial y fricción apuntan cuesta abajo. Con eje positivo cuesta arriba,

$$a_{\parallel} = -10(\sin 30^\circ + 0{,}2\cos 30^\circ) = -(5+\sqrt{3})\ \mathrm{m/s^2}.$$

Se detiene tras avanzar $s = 16/[2(5+\sqrt{3})]\ \mathrm{m} \simeq 1{,}19\ \mathrm{m}$. En ese instante examinamos el reposo: requiere $mg\sin 30^\circ \le 0{,}7mg\cos 30^\circ$, que se cumple porque $\tan 30^\circ \simeq 0{,}577 < 0{,}7$. Permanece allí. La fricción pasa a apuntar cuesta arriba para equilibrar el peso tangencial.




Durante la subida el rozamiento apunta cuesta abajo. Al detenerse puede cambiar al régimen estático. Flechas esquemáticas.

## 7.6 Un intervalo de fuerzas que conserva el reposo

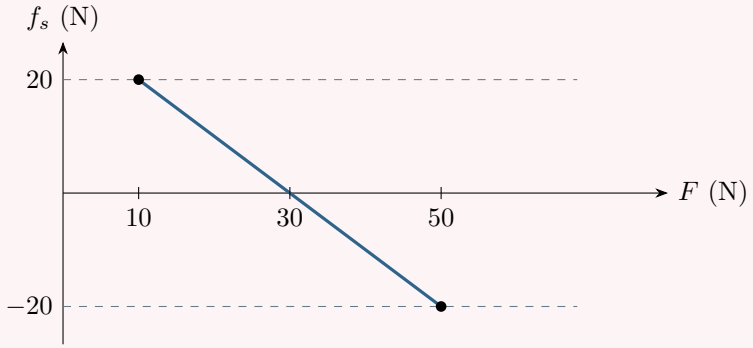
La fricción estática puede cambiar de sentido dentro de un mismo problema. Si una fuerza $F$ tira cuesta arriba, tomar ese sentido como positivo da $F + f_s - mg\sin\theta = 0$. La componente que se necesita es $f_s = mg\sin\theta - F$: positiva cuando falta tirón y negativa cuando sobra. El tirón es paralelo al plano y la normal conserva su valor. La condición completa es

$$mg\sin\theta - \mu_s mg\cos\theta \le F \le mg\sin\theta + \mu_s mg\cos\theta. \tag{7.4}$$

Para un dispositivo que solo puede tirar cuesta arriba debemos intersectar ese intervalo con $F \ge 0$. Un extremo negativo indica que el reposo ya es posible con $F = 0$.

**PROBLEMA RESUELTO 7.10 · El rozamiento cambia de sentido**

Una caja de 5 kg está en una rampa con seno 0,6, coseno 0,8 y $\mu_s = 0{,}5$. Una cuerda tira paralelamente cuesta arriba con fuerza $F$. Encuentra todas las tensiones compatibles con reposo. Calcula después la aceleración si $F = 60\,\mathrm{N}$ y $\mu_k = 0{,}3$, una vez iniciado el ascenso.
*Resolución.* Tenemos $N = 40\,\mathrm{N}$ y $f_s = 30\,\mathrm{N} - F$. La condición $|30\,\mathrm{N} - F| \le 20\,\mathrm{N}$ equivale a $10\,\mathrm{N} \le F \le 50\,\mathrm{N}$. Para $F < 30\,\mathrm{N}$ la fricción apunta cuesta arriba; para $F > 30\,\mathrm{N}$ apunta cuesta abajo, y se anula con $F = 30\,\mathrm{N}$. En los extremos el contacto está al límite.
Un tirón de 60 N supera el extremo superior. Durante el ascenso, $f_k = 0{,}3(40) = 12\,\mathrm{N}$ cuesta abajo. Así, $a_{\parallel} = (60 - 30 - 12)/5 = 3{,}6\,\mathrm{m/s^2}$ cuesta arriba. La ecuación cinética corresponde específicamente al ascenso indicado.




Fricción requerida con signo positivo cuesta arriba. Solo el segmento entre $F = 10$ y $50\,\mathrm{N}$ satisface el límite estático.

## 7.7 Cuerdas y poleas: de la longitud a la aceleración

Una cuerda ideal será de masa despreciable, inextensible y flexible; mientras esté tensa solo tira a lo largo de su dirección. En un tramo recto sin fuerzas tangenciales distribuidas, la masa despreciable exige que las tensiones de sus extremos tengan igual módulo: una diferencia finita produciría una resultante que no podría equilibrarse con una masa nula. Al pasar por una polea ideal de eje sin rozamiento y momento de inercia despreciable, ese módulo se conserva. La polea puede cambiar la dirección del tirón.

Una polea con inercia rotacional apreciable requiere además estudiar el balance de torques para relacionar las tensiones de ambos lados. Las tensiones de dos cuerdas distintas se calculan con las condiciones propias de cada una. En los montajes siguientes las cuerdas y poleas se declaran ideales y se supone que sus contactos permiten la transmisión indicada.

La inextensibilidad aporta una ecuación geométrica. En una polea fija con dos ramales verticales, si $y_A$ y $y_B$ se miden hacia abajo desde el eje, la parte variable de la longitud es $y_A + y_B$. Entonces $y_A + y_B =$ constante, $v_A + v_B = 0$ y $a_A + a_B = 0$. Las componentes tienen signos opuestos cuando ambos ejes apuntan hacia abajo. Si orientamos cada eje en el sentido de movimiento previsto, los valores de las aceleraciones resultan iguales. Esa igualdad depende del montaje y de los ejes.

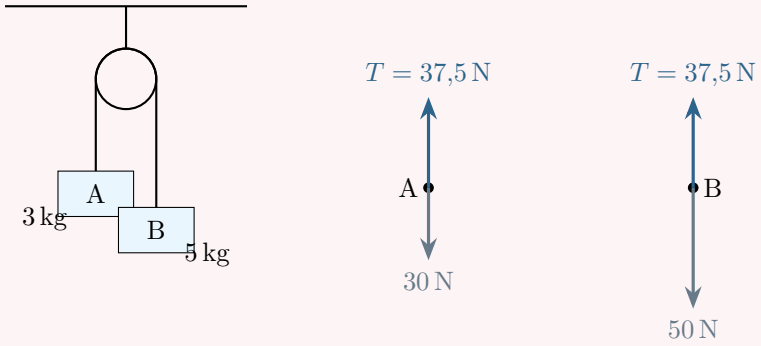
**PROBLEMA RESUELTO 7.11 · Dos masas y una polea fija**

Dos cuerpos de 3 kg y 5 kg cuelgan de los extremos de una cuerda ideal sobre una polea fija ideal. Se liberan desde el reposo. Encuentra aceleración y tensión antes de que alguno encuentre un obstáculo.

*Resolución.* El cuerpo de 5 kg desciende. Elegimos positivo hacia arriba para A, de 3 kg, y hacia abajo para B, de 5 kg. El vínculo impone un mismo valor $a$ y los DCL dan, en SI,

$$T - 30 = 3a, \qquad 50 - T = 5a.$$

Al sumarlas, $20 = 8a$, luego $a = 2{,}5\,\mathrm{m/s^2}$. La primera ecuación da $T = 37{,}5\,\mathrm{N}$, valor que también satisface la segunda. Queda entre ambos pesos: acelera al ligero hacia arriba y permite al pesado acelerar hacia abajo. Si usáramos ejes verticales hacia abajo para ambos, escribiríamos $a_A = -2{,}5\,\mathrm{m/s^2}$ y $a_B = +2{,}5\,\mathrm{m/s^2}$, con la misma tensión.




Izquierda: montaje. Derecha: DCL separados; las fuerzas verticales comparten escala. El peso mayor produce el descenso de B.

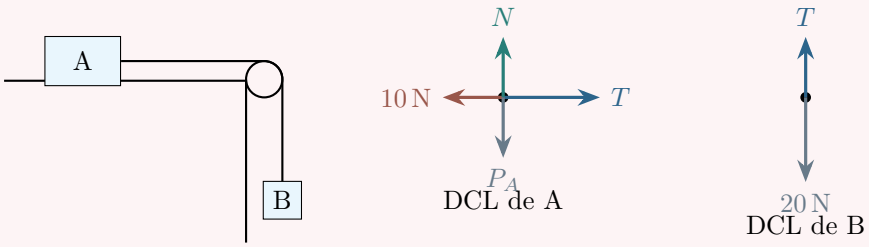
### PROBLEMA RESUELTO 7.12 · Una masa en la mesa y otra colgando

Un bloque A de 4 kg sobre mesa horizontal está unido por cuerda y polea fijas ideales a B, de 2 kg, que desciende. A desliza hacia la polea y tiene $\mu_k = 0{,}25$. Encuentra aceleración y tensión.

*Resolución.* La normal de A es 40 N y su fricción 10 N, alejándose de la polea. El eje de A apunta hacia la polea y el de B hacia abajo. La longitud constante impone iguales avances y aceleraciones en esos sentidos:

$$T - 10 = 4a, \qquad 20 - T = 2a.$$

Sumar elimina $T$ y da $a = 10/6 = 5/3\,\mathrm{m/s^2}$. Entonces $T = 20 - 2(5/3) = 50/3\,\mathrm{N}$. La fuerza que impulsa esta coordenada común es el peso de B menos la fricción de A, mientras ambas masas aportan inercia. Esta suma de ecuaciones escalares emplea el sentido positivo de cada eje para incorporar las restricciones de la cuerda.




Montaje y diagramas separados. Los sentidos positivos son hacia la polea para A y hacia abajo para B. Flechas esquemáticas.

### PROBLEMA RESUELTO 7.13 · Cuánta masa puede sostener el rozamiento

En el montaje anterior A tiene 4 kg, $\mu_s = 0{,}4$ y todo está inicialmente en reposo. ¿Qué masas $m_B \geq 0$ son compatibles con ese estado?

*Resolución.* El equilibrio de B exige $T = m_B g$. Para A se necesitan $f_s = T$ de módulo hacia el lado opuesto a la polea, con $N = m_A g$. La desigualdad es $m_B g \leq \mu_s m_A g$, de donde $0 \leq m_B \leq 1{,}6\,\mathrm{kg}$. Con $m_B = 1\,\mathrm{kg}$, por ejemplo, la tensión y la fricción valen 10 N, por debajo del límite 16 N. Con $m_B = 2\,\mathrm{kg}$ el reposo es imposible; para describir el deslizamiento posterior necesitamos el modelo cinético. En el extremo formal $m_B = 0$, $T = 0$: no hay un peso colgante que mantenga positivamente tensa la cuerda.

| Masa B | Tensión requerida | Reposo |
|---|---|---|
| 1 kg | 10 N | admisible |
| 1,6 kg | 16 N | en el límite |
| 2 kg | 20 N | imposible |

La mesa solo puede suministrar hasta 16 N de fricción estática en este montaje.

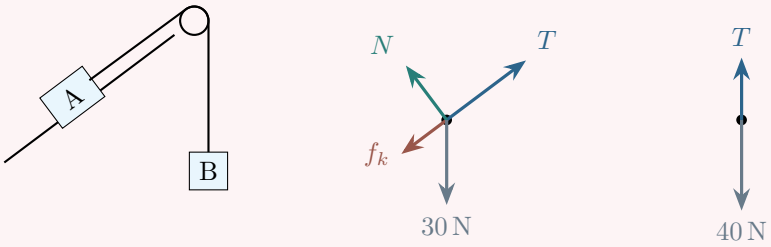
**PROBLEMA RESUELTO 7.14 · La rampa enlazada con una masa colgante**

Un bloque A de 3 kg está sobre una rampa con seno 0,6 y coseno 0,8. Una cuerda paralela al plano pasa por una polea fija ideal y lo une a B, de 4 kg. B ya desciende; $\mu_k = 0{,}25$ entre A y la rampa. Calcula aceleración y tensión.

*Resolución.* A asciende y su rozamiento apunta cuesta abajo. Sobre A, $N = 30(0{,}8) = 24\,\mathrm{N}$, $f_k = 6\,\mathrm{N}$ y el peso tangencial es 18 N. Con ejes cuesta arriba para A y hacia abajo para B,

$$T - 18 - 6 = 3a, \qquad 40 - T = 4a.$$

La suma da $16 = 7a$, luego $a = 16/7\,\mathrm{m/s^2}$. Se obtiene $T = 40 - 4(16/7) = 216/7\,\mathrm{N}$. Es positiva y ambas ecuaciones coinciden. La dirección del deslizamiento fue un dato: si B estuviera ascendiendo, el rozamiento de A tendría otro sentido aunque el peso y las masas fueran iguales.




El ascenso de A y descenso de B fijan el sentido del rozamiento. Montaje y DCL separados: A recibe tensión, normal, peso y fricción; B recibe tensión y peso. Flechas esquemáticas.

## 7.8 Varios cuerpos y contactos que pueden fallar

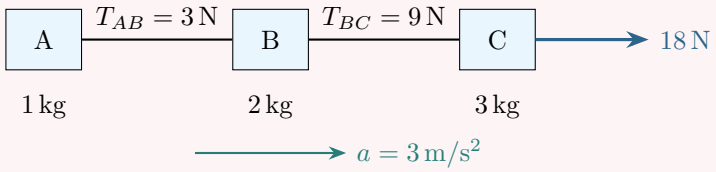
La elección del sistema permite obtener una aceleración común sin calcular primero todas las tensiones. Después hace falta volver a un subsistema para recuperar cada fuerza interna. Las tensiones se cancelan al sumar ecuaciones compatibles, pero siguen siendo indispensables para describir el movimiento de cada cuerpo y para comprobar si una cuerda puede sostenerlo.

Una cuerda flexible transmite tracción mientras está tensa. Si una resolución produce $T < 0$, la hipótesis de cuerda tensa es incompatible con ese movimiento. Puede aparecer holgura y, desde ese momento, deja de valer la restricción de longitud que habíamos usado. Del mismo modo, dos bloques superpuestos solo comparten aceleración tangencial si el rozamiento estático requerido no excede su límite.

## PROBLEMA RESUELTO 7.15 · Tres bloques, dos tensiones

Tres bloques A, B y C, de masas 1, 2 y 3 kg, están alineados sobre una mesa lisa y unidos consecutivamente por dos cuerdas ideales tensas. Se tira de C hacia la derecha con 18 N. Encuentra la aceleración y ambas tensiones.

*Resolución.* La fuerza horizontal externa sobre el conjunto es 18 N y su masa 6 kg; las cuerdas imponen un mismo $a = 3\,\mathrm{m/s^2}$. Para A, $T_{AB} = 1(3) = 3\,\mathrm{N}$. El subsistema A+B tiene masa 3 kg y solo recibe horizontalmente $T_{BC}$ desde fuera, así que $T_{BC} = 3(3) = 9\,\mathrm{N}$. En B, $9 - 3 = 2(3)$, y en C, $18 - 9 = 3(3)$. Las tensiones distintas aceleran masas distintas a la izquierda de cada corte; pertenecen a dos cuerdas.




Montaje con los módulos de las dos tensiones. Cada cuerda acelera una masa distinta situada a su izquierda; cada masa conserva su propio DCL.

## PROBLEMA RESUELTO 7.16 · Una caja sobre otra

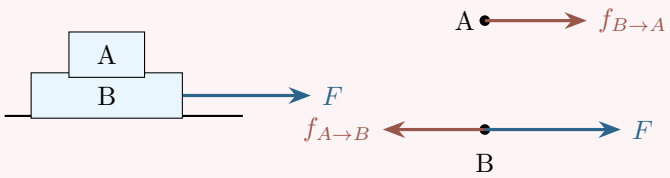
Una caja A de 2 kg está sobre B, de 3 kg. El suelo bajo B es liso. Entre las cajas $\mu_s = 0{,}4$ y $\mu_k = 0{,}3$. Se empuja horizontalmente B hacia la derecha. Compara fuerzas aplicadas de 15 N y 25 N, partiendo del reposo en cada ensayo.

*Resolución.* Si ambas acompañan el movimiento, su aceleración es $a = F/5$. La única fuerza horizontal sobre A es la fricción que B ejerce hacia la derecha, de módulo $f_s = m_A a = 2F/5$. La normal entre cajas es 20 N y el máximo estático 8 N. Por tanto el movimiento conjunto requiere $2F/5 \le 8$, es decir $F \le 20\,\mathrm{N}$.

Con $F = 15\,\mathrm{N}$, $a = 3\,\mathrm{m/s^2}$ y $f_s = 6\,\mathrm{N}$: A recibe esa fuerza hacia la derecha y B su reacción hacia la izquierda. Con 25 N falla la adherencia. B comienza a adelantarse bajo A y la fricción cinética tiene módulo 6 N. En el suelo inercial,

$$a_A = 6/2 = 3\,\mathrm{m/s^2}, \qquad a_B = (25 - 6)/3 = 19/3\,\mathrm{m/s^2}.$$

La aceleración relativa $a_A - a_B = -10/3\,\mathrm{m/s^2}$ confirma que A se retrasa respecto de B. Estos valores valen mientras las superficies sigan en contacto y deslicen en ese sentido.




Izquierda: montaje. Derecha: proyecciones horizontales de dos DCL; los rozamientos mutuos tienen igual módulo y sentidos opuestos. Fuerzas verticales equilibradas omitidas en estas proyecciones.

## 7.9 Una polea móvil cambia la restricción

Una carga sostenida por una polea móvil puede recibir dos tirones hacia arriba. Para comprender el montaje hay que contar los ramales que cambian de longitud. Supongamos una cuerda anclada al techo, que baja alrededor de la polea móvil, vuelve a subir sobre una polea fija y termina en una masa colgante. Todos los tramos variables son verticales. Si la carga sube una distancia $y$, los dos ramales que llegan a la polea móvil se acortan cada uno en $y$; el extremo libre debe bajar $2y$. Con $z$ positivo hacia abajo para ese extremo,

$$z - 2y = \text{constante}, \qquad a_z = 2a_y. \tag{7.5}$$

El módulo de la tensión es común en la cuerda ideal. La carga junto con su polea recibe $2T$ hacia arriba, mientras la masa del extremo recibe $T$. La relación de desplazamientos explica a la vez la diferencia de aceleraciones y la distribución de fuerzas.

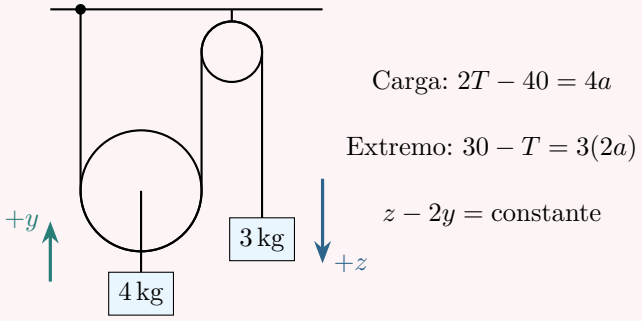
**PROBLEMA RESUELTO 7.17 · Dos ramales sostienen una carga**

En el montaje descrito, la carga y el soporte móvil tienen masa total 4 kg; la inercia rotacional de las poleas es despreciable. En el extremo libre cuelgan 3 kg. Encuentra aceleraciones y tensión desde el reposo.

*Resolución.* Tomamos $a$ positivo hacia arriba para la carga. La masa libre tiene aceleración $2a$ hacia abajo. Los DCL dan

$$2T - 40 = 4a, \qquad 30 - T = 3(2a).$$

De la primera, $T = 20 + 2a$; al sustituir en la segunda, $10 = 8a$. Por tanto $a = 1{,}25\,\mathrm{m/s^2}$ hacia arriba para la carga, $2a = 2{,}5\,\mathrm{m/s^2}$ hacia abajo para la masa libre y $T = 22{,}5\,\mathrm{N}$. Los dos ramales ejercen en conjunto 45 N sobre la carga. Imponer aceleraciones de igual módulo habría contradicho la longitud constante de la cuerda.




Una cuerda anclada al techo rodea la polea móvil y pasa por la fija. Los dos ramales de la polea móvil cambian de longitud; el extremo libre recorre el doble.

## 7.10 Elegir el tirón y contrastar el modelo

Las ecuaciones también permiten estudiar cómo cambia un resultado al modificar el montaje. Al tirar de una caja hacia arriba, aumentar el ángulo reduce la normal pero resta componente horizontal a la fuerza. Esa competencia genera un ángulo óptimo dentro del modelo seco. Obtenerlo permite explicar el resultado antes de ensayarlo.

**PROBLEMA RESUELTO 7.18 · El ángulo que reduce el tirón necesario**

Una caja de 10 kg descansa en un suelo horizontal con $\mu_s = 0{,}5$. Se aplica un tirón de módulo $F$ y ángulo $0 \le \alpha < 90°$ hacia arriba. Encuentra el menor módulo que lleva el contacto al límite de deslizamiento horizontal.

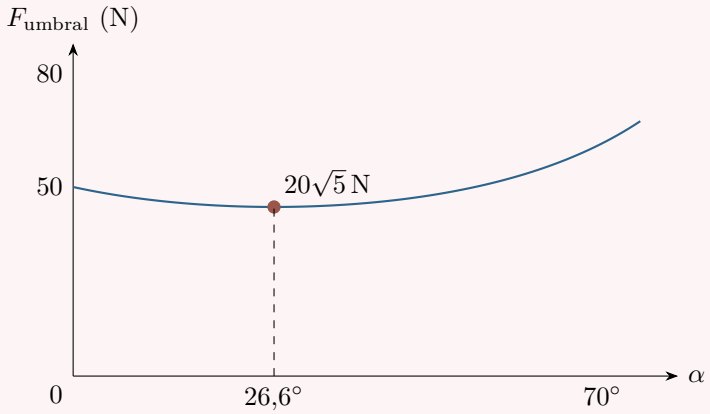
*Resolución.* Mientras hay apoyo, $N = 100\,\mathrm{N} - F\sin\alpha$. En el umbral, $F\cos\alpha = 0{,}5N$, así que

$$F(\alpha) = \frac{50\,\mathrm{N}}{\cos\alpha + 0{,}5\sin\alpha}.$$

Minimizar el cociente exige maximizar su denominador. Es el producto escalar de los vectores $(1, 0{,}5)$ y $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, el segundo de módulo uno. Por la proyección, el máximo es $\sqrt{1 + 0{,}5^2} = \sqrt{5}/2$, alcanzado cuando ambos vectores tienen la misma dirección: $\tan\alpha = 0{,}5$. Luego

$$\alpha \simeq 26{,}6°, \qquad F_{\mathrm{mín}} = 20\sqrt{5}\,\mathrm{N} \simeq 44{,}7\,\mathrm{N}.$$

En ese ángulo, $F_x = 40\,\mathrm{N}$, $F_y = 20\,\mathrm{N}$ y $N = 80\,\mathrm{N} > 0$. El contacto es admisible y $F_x = \mu_s N$. El tirón horizontal requeriría 50 N. El valor obtenido es el umbral: para forzar el inicio del deslizamiento desde el reposo hay que superarlo, aunque sea muy ligeramente, en este modelo ideal.




Curva del tirón umbral para la caja de 10 kg. El mínimo aparece en un ángulo intermedio.

**Medir dos regímenes de un mismo contacto**

Usa una caja pequeña, una tabla estable y un dinamómetro de rango adecuado. En una primera serie, aumenta lentamente un tirón horizontal y registra la lectura máxima anterior al deslizamiento. En otra, registra la lectura durante un tramo aproximadamente rectilíneo y uniforme. Repite y conserva la dispersión de los datos. Si la cuerda es horizontal y la aceleración vertical es nula, $N = mg$; el primer valor permite estimar $\mu_s$ y el segundo $\mu_k$ solo cuando la aceleración horizontal es despreciable.

El dinamómetro mide el tirón. Durante una aceleración, el tirón y la fricción difieren en $ma_x$: igualarlos alteraría el coeficiente inferido. Anota la inclinación de la cuerda y las variaciones de rapidez; examina además si la caja vuelca o engancha el borde. Una diferencia entre ensayos puede señalar cambios de superficie o límites del modelo. Evita cargas elevadas y masas suspendidas sobre personas.

En un problema de contactos, una solución numérica necesita conservar la situación que la produjo: apoyo con normal no negativa, cuerdas capaces de tirar, y fricción compatible con adherencia o con el deslizamiento supuesto. Al cambiar una de esas condiciones comienza

otro tramo del movimiento. Esa comprobación decide hasta dónde las ecuaciones describen la experiencia.

## Ejercicios para reconstruir y transferir

Usa $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ salvo otra indicación. Las cuerdas y poleas son ideales, las mesas y rampas están fijas y los cuerpos no vuelcan. Dibuja los DCL y declara el sentido de cada eje. Comprueba el régimen del contacto antes de aceptar una aceleración.

**EJERCICIO 7.1 · Masa y campo local**

Una pieza de 8 kg se lleva de un lugar con $g = 10\,\mathrm{N/kg}$ a otro con $g = 3{,}7\,\mathrm{N/kg}$. Encuentra ambos pesos y explica qué magnitud se conserva.

**EJERCICIO 7.2 · Adherencia por debajo del máximo**

Una caja de 4 kg reposa sobre mesa con $\mu_s = 0{,}5$. Se aplica horizontalmente $F = 0$, 12 y 20 N en ensayos separados. Encuentra el rozamiento en cada caso y decide cuáles admiten reposo.

**EJERCICIO 7.3 · El reposo deja de ser posible**

En la caja anterior se aplica $F = 26\,\mathrm{N}$. Si $\mu_k = 0{,}3$, determina la aceleración una vez iniciado el deslizamiento en el sentido del tirón.

**EJERCICIO 7.4 · Una frenada completa**

Un bloque de 3 kg desliza a 8 m/s sobre suelo horizontal con $\mu_k = 0{,}2$, sin otras fuerzas horizontales. Calcula el instante de detención y el recorrido. Explica qué aceleración tiene después.

**EJERCICIO 7.5 · La superficie también se mueve**

Una caja de 2 kg se deposita sin velocidad horizontal sobre una cinta que corre a 3 m/s hacia la derecha, a velocidad constante. Hay $\mu_k = 0{,}25$. Encuentra el sentido de la fricción, el tiempo hasta igualar velocidades y el avance de la caja respecto del suelo; supón que la cinta es suficientemente larga.

**EJERCICIO 7.6 · Un tirón inclinado**

Una caja de 6 kg desliza hacia la derecha y recibe un tirón de componentes $(18, 24)\,\mathrm{N}$, con $\mu_k = 0{,}25$. Calcula normal, fricción y aceleración.

**EJERCICIO 7.7 · Presionar contra la mesa**

Repite el ejercicio anterior con componentes $(18, -24)\,\mathrm{N}$. Indica si la caja aumenta o disminuye su rapidez mientras se mueve hacia la derecha.

**EJERCICIO 7.8 · Un apoyo imposible**

Un bloque de $2\,\mathrm{kg}$ está sobre una mesa sin adhesión. Se le aplica una fuerza vertical de $25\,\mathrm{N}$ hacia arriba. Explica por qué no se puede mantener $a_y = 0$ y encuentra la aceleración al separarse.

**EJERCICIO 7.9 · Rampa lisa**

Un bloque de $5\,\mathrm{kg}$ se mueve por una rampa lisa con seno 0,6 y coseno 0,8. Encuentra normal y aceleración cuesta abajo; si la rampa desciende hacia la derecha, expresa la aceleración en ejes horizontal y vertical.

**EJERCICIO 7.10 · Ángulo de adherencia**

Una rampa tiene $\tan\theta = 0{,}5$ y soporta un bloque de $4\,\mathrm{kg}$ con $\mu_s = 0{,}6$. Determina normal y fricción para el reposo; halla el ángulo límite del modelo.

**EJERCICIO 7.11 · Deslizamiento descendente**

Un bloque de $5\,\mathrm{kg}$ desciende por una rampa con seno 0,6, coseno 0,8 y $\mu_k = 0{,}25$. Entra a $2\,\mathrm{m/s}$. ¿Cuánto tarda en avanzar $4\,\mathrm{m}$?

**EJERCICIO 7.12 · Detenerse y regresar**

Un bloque sube a $4\,\mathrm{m/s}$ por una rampa de $30^\circ$, con $\mu_k = 0{,}2$ y $\mu_s = 0{,}4$. Encuentra el recorrido ascendente y la aceleración cuando comienza a bajar. Justifica el cambio de sentido de la fricción.

**EJERCICIO 7.13 · Un intervalo de tirones**

Un bloque de $10\,\mathrm{kg}$ está en una rampa con seno 0,6, coseno 0,8 y $\mu_s = 0{,}5$. Encuentra los valores de una tensión paralela cuesta arriba que admiten reposo. ¿Qué fricción se necesita con tensiones de 40, 60 y $80\,\mathrm{N}$?

**EJERCICIO 7.14 · Dos masas colgantes**

Dos masas de 2 y $3\,\mathrm{kg}$ están unidas por cuerda sobre polea fija. Se liberan desde el reposo. Encuentra aceleración y tensión y comprueba ambas ecuaciones.

**EJERCICIO 7.15 · Mesa rugosa y masa colgante**

Un bloque A de 6 kg desliza por una mesa hacia la polea, unido a B de 3 kg que desciende. Si $\mu_k = 0{,}2$, encuentra aceleración y tensión.

**EJERCICIO 7.16 · La masa colgante en equilibrio**

El montaje anterior parte del reposo y tiene $\mu_s = 0{,}3$; la masa de B es variable. Encuentra su intervalo admisible para equilibrio. Explica qué dato adicional necesitarías para el movimiento posterior al superar ese intervalo.

**EJERCICIO 7.17 · Rampa y cuerpo colgante**

A, de 2 kg, asciende por una rampa con seno 0,6, coseno 0,8 y $\mu_k = 0{,}25$, unido a B de 3 kg que desciende. Encuentra aceleración y tensión.

**EJERCICIO 7.18 · Dos cuerdas distintas**

Sobre mesa lisa se alinean A, B y C de masas 2, 1 y 3 kg, unidos consecutivamente. Se tira de C con 24 N. Encuentra aceleración, tensión AB y tensión BC.

**EJERCICIO 7.19 · Sin deslizar sobre otra caja**

A tiene 3 kg y está sobre B de 2 kg; el suelo es liso y entre cajas $\mu_s = 0{,}5$. Se empuja B. Encuentra la fuerza máxima compatible con movimiento conjunto y la fricción real si se aplican 20 N.

**EJERCICIO 7.20 · Cuando falla la adherencia**

En el montaje anterior se aplican 30 N desde el reposo y $\mu_k = 0{,}3$. Encuentra las aceleraciones de A y B, e indica hacia dónde desliza A respecto de B.

**EJERCICIO 7.21 · Dos ramales y otra relación de masas**

En el montaje de polea móvil del problema resuelto 7.17, la carga y soporte móvil tienen masa total 6 kg y del extremo libre cuelgan 4 kg. Encuentra tensión y ambas aceleraciones.

**EJERCICIO 7.22 · La tensión puede anularse**

Dos bloques de 2 kg están sobre mesa lisa, A a la izquierda de B, unidos por una cuerda flexible inicialmente tensa. Sobre A se aplica una fuerza de 10 N hacia B; B no recibe otras fuerzas horizontales. Ensaya la hipótesis de aceleración común, explica su fallo y describe el comienzo del movimiento antes del choque.

**EJERCICIO 7.23 · Cambiar ejes sin cambiar el movimiento**

Reescribe las ecuaciones del ejercicio 7.14 usando un eje vertical positivo hacia arriba para ambos cuerpos. Encuentra las componentes de sus aceleraciones y contrasta la tensión.

**EJERCICIO 7.24 · Elegir un ángulo**

Una caja de 5 kg reposa en suelo horizontal con $\mu_s = 0{,}75$. Encuentra el ángulo y el módulo mínimo del tirón que lleva el contacto al umbral de deslizamiento. Comprueba la normal.

## Soluciones completas de los ejercicios

**SOLUCIÓN 7.1.**
El peso se obtiene multiplicando masa por campo local: $P_1 = 8(10) = 80\,\text{N}$ y $P_2 = 8(3{,}7) = 29{,}6\,\text{N}$. Se conserva la masa de 8 kg. El cociente $P_2/P_1 = 0{,}37$ coincide con el de los campos; la pieza conserva su masa y su peso cambia con el campo gravitatorio.

**SOLUCIÓN 7.2.**
La normal es 40 N y el máximo estático 20 N. Con $+x$ en el sentido del tirón, el equilibrio exige $f_s = -F$, de donde $f_s = 0$, $-12$ y $-20\,\text{N}$. Los tres valores son admisibles; el último está en el límite. Asignar 20 N a los tres ensayos introduciría una fuerza neta incompatible con el reposo en los primeros dos.

**SOLUCIÓN 7.3.**
El reposo exigiría 26 N de fricción, por encima de los 20 N disponibles. Durante el deslizamiento, $f_k = 0{,}3(40) = 12\,\text{N}$ en sentido opuesto al tirón. Así $a = (26 - 12)/4 = 3{,}5\,\text{m/s}^2$ hacia el tirón. Se ha cambiado de régimen al usar $\mu_k$.

**SOLUCIÓN 7.4.**
La normal vale 30 N, la fricción 6 N y la aceleración durante el avance $-6/3 = -2\,\text{m/s}^2$. De $0 = 8 - 2t$ resulta $t = 4\,\text{s}$. El recorrido es $8(4) - \frac{1}{2}(2)(4^2) = 16\,\text{m}$. Después permanece quieto con fricción nula y aceleración cero; extender la ley de frenado más allá del primer cero de velocidad cambiaría indebidamente el sentido del rozamiento.

**SOLUCIÓN 7.5.**
La caja tiene inicialmente velocidad relativa $-3\,\text{m/s}$ respecto de la cinta, por lo que la fricción sobre ella apunta a la derecha. Como $N = 20\,\text{N}$, $f_k = 5\,\text{N}$ y $a_x = 2{,}5\,\text{m/s}^2$. Iguala la velocidad de la cinta cuando $2{,}5t = 3$, es decir a los 1,2 s. Avanza $\frac{1}{2}(2{,}5)(1{,}2)^2 = 1{,}8\,\text{m}$ respecto del suelo. Desde entonces puede acompañar la cinta a velocidad constante con fricción nula, en ausencia de otras fuerzas horizontales.

**SOLUCIÓN 7.6.**
Verticalmente $N + 24 - 60 = 0$, luego $N = 36\,\text{N} > 0$. La fricción cinética vale 9 N hacia la izquierda. La resultante horizontal es $18 - 9 = 9\,\text{N}$ y $a_x = 9/6 = 1{,}5\,\text{m/s}^2$ hacia la derecha.

**SOLUCIÓN 7.7.**
La componente descendente refuerza el apoyo: $N = 60 + 24 = 84\,\text{N}$ y $f_k = 21\,\text{N}$ hacia la izquierda. Por tanto $a_x = (18 - 21)/6 = -0{,}5\,\text{m/s}^2$. La caja, que aún se mueve hacia la derecha, disminuye su rapidez. El resultado describe ese tramo; al detenerse hará falta analizar el régimen estático con su coeficiente correspondiente.

**SOLUCIÓN 7.8.**
Mantener el apoyo sin aceleración vertical exigiría $N + 25 - 20 = 0$, es decir $N = -5\,\text{N}$. La mesa sin adhesión solo puede transmitir una normal de compresión. Al perder contacto $N = 0$; quedan 5 N hacia arriba y $a_y = 5/2 = 2{,}5\,\text{m/s}^2$. La ecuación errónea sirvió para detectar una hipótesis imposible.

**SOLUCIÓN 7.9.**
La normal es $N = 50(0{,}8) = 40\,\text{N}$. El peso tangencial es $50(0{,}6) = 30\,\text{N}$ y $a_{\parallel} = 30/5 = 6\,\text{m/s}^2$. La dirección cuesta abajo es $(0{,}8, -0{,}6)$, de modo que $\vec{a} = (4{,}8, -3{,}6)\,\text{m/s}^2$. Su módulo es $6\,\text{m/s}^2$, como debe ser.

**SOLUCIÓN 7.10.**
De $\tan\theta = 1/2$ se obtiene $\sin\theta = 1/\sqrt{5}$ y $\cos\theta = 2/\sqrt{5}$. Entonces $N = 80/\sqrt{5}\,\text{N}$ y el rozamiento requerido es $40/\sqrt{5}\,\text{N}$ cuesta arriba. Su máximo es $48/\sqrt{5}\,\text{N}$, suficiente para el reposo. El ángulo límite satisface $\tan\theta_c = 0{,}6$, de donde $\theta_c \simeq 31{,}0°$, mayor que el ángulo actual $26{,}6°$.

**SOLUCIÓN 7.11.**
La normal es 40 N y la fricción 10 N cuesta arriba. La aceleración descendente es $(30 - 10)/5 = 4\,\text{m/s}^2$. El avance satisface $4 = 2t + 2t^2$ en SI, o $t^2 + t - 2 = 0$. Las raíces son 1 s y $-2$ s; el tiempo posterior a la entrada es 1 s. En ese instante la rapidez es $2 + 4(1) = 6\,\text{m/s}$.

**SOLUCIÓN 7.12.**
Durante la subida ambas fuerzas tangenciales apuntan cuesta abajo y $a_{\parallel} = -(5 + \sqrt{3})\,\text{m/s}^2$, tomando positivo hacia arriba. El avance hasta detenerse es $16/[2(5+\sqrt{3})]\,\text{m} \simeq 1{,}19\,\text{m}$. El reposo exigiría $\tan 30° \leq 0{,}4$, que es falso. Al comenzar a descender la fricción apunta cuesta arriba, por lo que la aceleración descendente es $10(\sin 30° - 0{,}2\cos 30°) = (5 - \sqrt{3})\,\text{m/s}^2 \simeq 3{,}27\,\text{m/s}^2$. La gravedad tangencial conserva su dirección; cambia la fricción al cambiar el deslizamiento.

**SOLUCIÓN 7.13.**
La normal vale 80 N y el máximo estático 40 N. Con eje positivo cuesta arriba, $f_s = 60\,\text{N} - T$; la condición $|60\,\text{N} - T| \leq 40\,\text{N}$ da $20\,\text{N} \leq T \leq 100\,\text{N}$. Para $T = 40$, 60 y 80 N, se necesitan respectivamente $+20$, 0 y $-20$ N de fricción. Todos admiten reposo; el signo negativo del último corresponde a fricción cuesta abajo.

**SOLUCIÓN 7.14.**
Elegimos positivo hacia arriba para la masa de 2 kg y hacia abajo para la de 3 kg. La cuerda impone igual valor $a$. Las ecuaciones son $T - 20 = 2a$ y $30 - T = 3a$ en SI. Al sumarlas $10 = 5a$, luego $a = 2\,\text{m/s}^2$ y $T = 24\,\text{N}$. Se comprueban $24 - 20 = 2(2)$ y $30 - 24 = 3(2)$; la tensión es positiva y queda entre ambos pesos.

**SOLUCIÓN 7.15.**
Sobre A, $N = 60\,\text{N}$ y $f_k = 12\,\text{N}$. Los ejes positivos apuntan hacia la polea y hacia abajo. Las ecuaciones $T - 12 = 6a$ y $30 - T = 3a$ dan $18 = 9a$, así que $a = 2\,\text{m/s}^2$ y $T = 24\,\text{N}$. La comprobación $24 - 12 = 6(2)$ confirma el DCL de A; $30 - 24 = 3(2)$ confirma el de B.

**SOLUCIÓN 7.16.**
En reposo B requiere $T = m_B g$; A necesita igual módulo de fricción con máximo $0{,}3(6g)$. Por ello $m_B \leq 1{,}8\,\text{kg}$, con $m_B \geq 0$. En el extremo superior el contacto está al límite; con masa mayor el reposo es incompatible. Para calcular el movimiento posterior se necesita, entre otros datos del modelo, $\mu_k$. En el extremo $m_B = 0$ la tensión es nula y no queda garantizada una cuerda positivamente tensa.

**SOLUCIÓN 7.17.**
Para A, $N = 20(0{,}8) = 16\,\text{N}$, $f_k = 4\,\text{N}$ cuesta abajo y el peso tangencial es 12 N. Con ascenso positivo para A y descenso positivo para B, $T - 16 = 2a$ y $30 - T = 3a$. La suma da $14 = 5a$, luego $a = 2{,}8\,\text{m/s}^2$ y $T = 21{,}6\,\text{N}$. Sustituir en A da $21{,}6 - 16 = 2(2{,}8)$, y en B $30 - 21{,}6 = 3(2{,}8)$.

**SOLUCIÓN 7.18.**
El sistema tiene masa 6 kg y fuerza externa horizontal 24 N: $a = 4\,\text{m/s}^2$. Para A, $T_{AB} = 2(4) = 8\,\text{N}$. Para A+B, $T_{BC} = (2 + 1)(4) = 12\,\text{N}$. En B, $12 - 8 = 1(4)$, y en C, $24 - 12 = 3(4)$. Cada tensión corresponde a una cuerda distinta y se obtiene de la ecuación de movimiento del subsistema elegido.

**SOLUCIÓN 7.19.**
Si no hay deslizamiento, $a = F/(3 + 2) = F/5$. La fricción requerida sobre A es $f_s = 3F/5$, mientras su normal es 30 N y su límite 15 N. De $3F/5 \leq 15$ se obtiene $F_{\text{máx}} = 25\,\text{N}$. Con $F = 20\,\text{N}$ la aceleración común es $4\,\text{m/s}^2$ y la fricción real 12 N hacia la derecha sobre A. B recibe su reacción de 12 N hacia la izquierda.

**SOLUCIÓN 7.20.**
Como $30 > 25\,\text{N}$ no pueden acompañarse. La fricción cinética entre cajas vale $0{,}3(30) = 9\,\text{N}$. Sobre A apunta a la derecha y produce $a_A = 9/3 = 3\,\text{m/s}^2$. Sobre B apunta a la izquierda: $a_B = (30-9)/2 = 10{,}5\,\text{m/s}^2$. Por tanto $a_A - a_B = -7{,}5\,\text{m/s}^2$: A desliza hacia atrás respecto de B, aunque ambos comiencen a avanzar hacia la derecha respecto del suelo. El resultado vale antes de que A alcance el borde.

**SOLUCIÓN 7.21.**
Sea $a$ hacia arriba para la carga móvil; la masa libre acelera $2a$ hacia abajo. Las ecuaciones son $2T - 60 = 6a$ y $40 - T = 4(2a)$. De la primera $T = 30 + 3a$; al sustituir, $10 = 11a$. Así $a = 10/11\,\text{m/s}^2$, $a_{\text{libre}} = 20/11\,\text{m/s}^2$ y $T = 360/11\,\text{N}$. Las fuerzas netas son $60/11\,\text{N}$ hacia arriba sobre los $6\,\text{kg}$ y $80/11\,\text{N}$ hacia abajo sobre los $4\,\text{kg}$, compatibles con esas aceleraciones.

**SOLUCIÓN 7.22.**
Una aceleración común sería $a = 10/(2+2) = 2{,}5\,\text{m/s}^2$. Pero sobre B la cuerda solo podría tirar hacia la izquierda; con derecha positiva, $-T = 2a$ exigiría $T = -5\,\text{N}$. Una cuerda flexible transmite tracción. Comienza a aflojarse: antes del choque A acelera $10/2 = 5\,\text{m/s}^2$ hacia B y B permanece sin aceleración horizontal. Si ambos partían del reposo, B sigue quieto durante ese intervalo.

**SOLUCIÓN 7.23.**
Con ambos ejes hacia arriba, las ecuaciones son $T - 20 = 2a_A$ y $T - 30 = 3a_B$. La longitud constante impone $a_A + a_B = 0$. Sustituir $a_B = -a_A$ y restar las ecuaciones produce $10 = 5a_A$. Luego $a_A = +2\,\text{m/s}^2$, $a_B = -2\,\text{m/s}^2$ y $T = 24\,\text{N}$. Los signos de las componentes cambiaron respecto de la elección con dos positivos opuestos; los movimientos y la tensión coinciden.

**SOLUCIÓN 7.24.**
El umbral satisface $F\cos\alpha = 0{,}75(50\,\text{N} - F\sin\alpha)$, de donde $F = 37{,}5\,\text{N}/(\cos\alpha + 0{,}75\sin\alpha)$. El denominador alcanza su máximo $\sqrt{1 + 0{,}75^2} = 1{,}25$ cuando $\tan\alpha = 0{,}75$, es decir $\alpha \simeq 36{,}9^\circ$. Así $F_{\text{mín}} = 30\,\text{N}$. Con seno 0,6 y coseno 0,8, sus componentes son $(24, 18)\,\text{N}$ y $N = 50 - 18 = 32\,\text{N}$. Se verifica $0{,}75N = 24\,\text{N}$ y el apoyo es posible. Es el valor límite, que debe superarse para imponer el inicio del deslizamiento ideal.

## Diagnóstico de salida

Un bloque de $4\,\text{kg}$ sobre mesa horizontal está unido mediante cuerda y polea fijas ideales a otro de $2\,\text{kg}$ colgante. Ambos parten del reposo; sobre la mesa $\mu_s = 0{,}6$ y $\mu_k = 0{,}25$. Decide si se mueven. Después, en un segundo ensayo, aumenta la masa colgante a $3\,\text{kg}$. Dibuja los DCL, determina el movimiento inicial y explica qué cambia si empleas vertical positiva hacia arriba para la masa colgante.

**Contraste después del intento.** En el primer ensayo el reposo requiere $T = f_s = 20\,\text{N}$ y el límite es $0{,}6(40) = 24\,\text{N}$; permanecen quietos. En el segundo se necesitarían $30\,\text{N}$, así que el reposo falla. Al deslizar, $f_k = 10\,\text{N}$ y las ecuaciones son $T - 10 = 4a$, $30 - T = 3a$, con $a = 20/7\,\text{m/s}^2$ y $T = 150/7\,\text{N}$. Si el eje vertical apunta hacia arriba, su componente es $a_B = -20/7\,\text{m/s}^2$ y se escribe $T - 30 = 3a_B$. La tensión conserva su valor. Para revisar la elección del régimen vuelve a la sección 7.2; para la relación de aceleraciones, a la sección 7.7.

## Lecturas de apoyo

H. D. Young y R. A. Freedman, *Física universitaria*, volumen 1, serie Sears–Zemansky, 12.ª edición, Pearson Educación, 2009: capítulo 5, aplicaciones de las leyes de Newton y fuerzas de fricción.

R. A. Serway y C. Vuille, *Fundamentos de física*, volumen 1, 9.ª edición, Cengage Learning, 2012: capítulo 4, cuerpos unidos y fricción. Los ejemplos, soluciones y dibujos del presente capítulo son desarrollos originales.

# CAPÍTULO 8

# TRABAJO, ENERGÍA Y POTENCIA


8.1 Una fuerza actúa a lo largo de un desplazamiento . . . . . 154
8.2 Del trabajo neto a la energía cinética . . . . . 155
8.3 Acumular el trabajo de una fuerza variable . . . . . 157
8.4 Cambiar la dirección sin cambiar la energía cinética . . . . 158
8.5 La gravedad y la elección de una energía potencial . . . . . 159
8.6 Resortes y fuerzas conservativas 160
8.7 Conservar la energía mecánica con hipótesis explícitas . . . . 161
8.8 El balance cuando hay rozamiento . . . . . 162
8.9 Potencia y rendimiento . . . . 164
8.10 Qué estados permite un balance de energía . . . . . 166
Ejercicios para reconstruir y transferir 167
Soluciones completas de los ejercicios 171
Diagnóstico de salida . . . . . 173
Lecturas de apoyo . . . . . 173


Una caja puede recorrer varios metros mientras distintas fuerzas tiran de ella, la frenan o sostienen su peso. El balance de trabajo y energía permite conocer la rapidez final a partir de las transferencias durante el recorrido. Podemos preguntar cuánto aporta cada fuerza durante el recorrido y relacionar ese aporte con el cambio de rapidez.
La idea de trabajo permite hacer ese balance. De ella surgirán la energía cinética, las energías potenciales gravitatoria y elástica y las condiciones para conservar su suma. El tiempo reaparecerá al estudiar potencia: dos máquinas pueden transferir la misma energía y hacerlo a ritmos muy distintos. Mantendremos a la vista el sistema elegido, las fuerzas incluidas y los límites de cada modelo.

## 8.1 Una fuerza actúa a lo largo de un desplazamiento

Al sostener una caja inmóvil podemos cansarnos aunque su posición no cambie. El esfuerzo fisiológico involucra procesos internos del cuerpo; para describir la transferencia mecánica mediante la fuerza sobre la caja necesitamos además un desplazamiento. También importa su dirección: una fuerza perpendicular al movimiento puede desviarlo sin aumentar su rapidez.

Para una partícula sometida a una fuerza constante $\vec{F}$, definimos el trabajo de esa fuerza entre dos posiciones mediante el producto escalar introducido en el capítulo 2:

$$W_F = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F|\Delta\vec{r}|\cos\alpha. \tag{8.1}$$

El ángulo $\alpha$ se mide entre la fuerza y el desplazamiento. La proyección de la fuerza sobre este último determina el signo: positivo si favorece ese desplazamiento, negativo si se opone y cero si es perpendicular. El trabajo es escalar, medido en joules: $1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{N\,m} = 1\,\mathrm{kg\,m^2/s^2}$. Su signo se conserva al girar los ejes y puede cambiar al elegir otra referencia que atribuya al cuerpo un desplazamiento distinto.

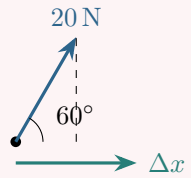
**PROBLEMA RESUELTO 8.1 · Solo contribuye la componente paralela**

Una fuerza constante de 20 N forma 60° sobre la horizontal y actúa sobre una caja que avanza 3 m horizontalmente. Calcula su trabajo.

*Resolución.* La proyección horizontal de la fuerza es $20\cos 60^\circ = 10\,\mathrm{N}$. Como el desplazamiento no tiene componente vertical,

$$W_F = (20)(3)\cos 60^\circ\,\mathrm{J} = 30\,\mathrm{J}.$$

Multiplicar solo los módulos daría 60 J e ignoraría la dirección. La componente vertical puede modificar el apoyo, como vimos en el capítulo 7, aunque su trabajo en este recorrido horizontal sea cero.




La fuerza se proyecta sobre el desplazamiento horizontal. El trabajo es $F_x\Delta x$.

Para una fuerza constante, la expresión depende del desplazamiento entre extremos, incluso si la trayectoria intermedia es curva. La fórmula $W = Fs$ con $s$ igual a la longitud recorrida exige una situación más particular: fuerza de módulo constante que acompaña en cada punto la dirección y el sentido del avance. Para la fricción cinética sobre una superficie fija, el signo es opuesto y el trabajo vale $-f_k s$ cuando $f_k$ es constante. La fuerza cambia de dirección si cambia la dirección del deslizamiento.

**PROBLEMA RESUELTO 8.2 · Subir a rapidez constante también requiere trabajo**

Se eleva una caja de 4 kg una altura de 2 m con rapidez constante. Sin resistencia del aire, encuentra los trabajos del cable y del peso, y el trabajo neto sobre la caja.
*Resolución.* La aceleración es cero: la tensión tiene módulo $T = mg = 40\,\text{N}$. Su trabajo es $W_T = 40(2) = 80\,\text{J}$, positivo porque tensión y desplazamiento apuntan hacia arriba. El peso realiza $W_g = -40(2) = -80\,\text{J}$. Por tanto $W_{\text{neto}} = 0$. Los trabajos de las dos fuerzas se compensan y mantienen constante la energía cinética. Si elegimos el sistema caja–Tierra, los 80 J aportados por el cable aumentan la energía potencial gravitatoria que definiremos más adelante.

| Fuerza | Trabajo | Efecto en el balance |
|---|---|---|
| Cable | $+80\,\text{J}$ | Aporta energía |
| Peso | $-80\,\text{J}$ | Compensa el aporte |
| Suma | $0\,\text{J}$ | $\Delta K = 0$ |

Balance de trabajos sobre la caja. El ascenso a rapidez constante tiene trabajo neto nulo.

## 8.2 Del trabajo neto a la energía cinética

Para descubrir qué mide el trabajo neto, volvamos a una partícula de masa constante $m$ en una referencia inercial. La segunda ley da $\vec{F}_{\text{neta}} = m\,d\vec{v}/dt$. Durante un intervalo pequeño, $d\vec{r} = \vec{v}\,dt$. Al multiplicar escalarmente ambas expresiones,

$$\vec{F}_{\text{neta}} \cdot d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}\,dt = d\Big(\tfrac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v}\Big)\,.$$

La última igualdad procede de derivar $\vec{v}\cdot\vec{v} = v_x^2 + v_y^2$ por componentes. Nos lleva a definir la *energía cinética* $K = \frac{1}{2}mv^2$, donde $v = |\vec{v}|$ es la rapidez. Al acumular a lo largo del movimiento obtenemos el teorema

$$W_{\text{neto}} = \sum_i W_i = K_f - K_i = \Delta K. \tag{8.2}$$

Esta deducción vale también con fuerzas variables y trayectorias curvas; en la próxima sección precisaremos la acumulación como integral. Supone masa constante y una referencia inercial. Aplicado a un cuerpo extenso, el modelo de partícula describe su traslación y deja fuera rotación y deformación, cuyos balances requerirían otras contribuciones.

La energía cinética es no negativa y depende de la referencia. Duplicar la rapidez cuadruplica $K$; invertir la dirección de la velocidad conservando su módulo deja $K$ igual. Por ello el balance energético puede determinar una rapidez sin determinar la dirección, el tiempo transcurrido ni la forma de la trayectoria. Esos datos requieren información adicional.

### PROBLEMA RESUELTO 8.3 · El trabajo que cambia una rapidez

Una partícula de 3 kg pasa de rapidez 2 m/s a 6 m/s. ¿Qué trabajo neto recibe? ¿Cuánto trabajo recibiría en el cambio inverso?

*Resolución.* Sus energías son $K_i = \frac{1}{2}(3)(2^2) = 6\,\text{J}$ y $K_f = \frac{1}{2}(3)(6^2) = 54\,\text{J}$. El trabajo neto es 48 J. En el cambio inverso sería $-48\,\text{J}$. El signo describe el cambio de energía cinética. Para repartir esos 48 J entre las fuerzas necesitamos identificar las interacciones presentes.

| Estado | Rapidez | Energía cinética |
|---|---|---|
| Inicial | 2 m/s | 6 J |
| Final | 6 m/s | 54 J |

El trabajo neto es la diferencia: $54 - 6 = 48\,\text{J}$. La energía depende del cuadrado de la rapidez.

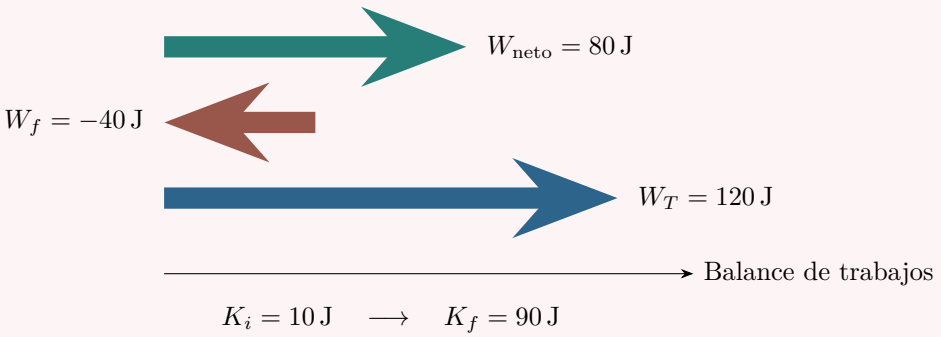
### PROBLEMA RESUELTO 8.4 · Separar el tirón de la resultante

Una caja de 5 kg desliza 4 m por una mesa horizontal. Parte a 2 m/s hacia la derecha y recibe un tirón horizontal constante de 30 N en ese sentido. Si $\mu_k = 0{,}2$, encuentra su rapidez final.

*Resolución.* La normal es 50 N y el rozamiento cinético 10 N hacia la izquierda. Peso y normal realizan trabajo nulo porque son perpendiculares al recorrido. El tirón aporta 120 J y el rozamiento $-40\,\text{J}$: $W_{\text{neto}} = 80\,\text{J}$. Como $K_i = 10\,\text{J}$,

$$K_f = 90\,\text{J}, \qquad v_f = \sqrt{\frac{2K_f}{m}} = 6\,\text{m/s}.$$

Usar solo los 120 J del tirón como cambio cinético contaría como aceleración una energía que el contacto ha transferido a otros grados de libertad. Podemos comprobar el resultado con Newton: $a_x = (30 - 10)/5 = 4\,\text{m/s}^2$ y $v_f^2 = 2^2 + 2(4)(4) = 36\,\text{m}^2/\text{s}^2$.




Las longitudes representan módulos con escala común; la barra resistente apunta en sentido de trabajo negativo. La suma determina el incremento cinético.

## 8.3 Acumular el trabajo de una fuerza variable

Si la fuerza varía, dividimos la trayectoria en desplazamientos pequeños y sumamos los productos escalares de fuerza y desplazamiento. El límite de esa suma define

$$W_F = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}. \tag{8.3}$$

La letra $C$ señala la trayectoria concreta. Parametrizada por el tiempo, la misma expresión es $\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t)\, dt$. En una trayectoria sobre el eje $x$, queda $W_F = \int_{x_i}^{x_f} F_x(x)\, dx$. El capítulo 3 enseñó a interpretar estas integrales como acumulaciones con signo: las zonas bajo el eje restan trabajo y, si se invierte el recorrido, también se invierten los límites.

Una gráfica fuerza–posición permite así leer trabajo en sus áreas. Una gráfica fuerza–tiempo permite leer impulso, como vimos en el capítulo 6. Las bases tienen unidades distintas: N m para trabajo y N s para impulso. Un área geométricamente parecida puede representar magnitudes físicas diferentes.

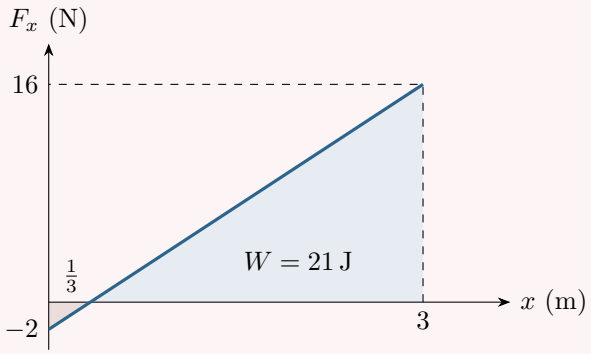
**PROBLEMA RESUELTO 8.5 · Una fuerza que primero frena y luego ayuda**

Un carro de 2 kg avanza por una pista recta y recibe una fuerza neta $F_x(x) = (6\,\mathrm{N/m})x - 2\,\mathrm{N}$. En $x = 0$ tiene velocidad $+1$ m/s. Halla el trabajo hasta $x = 3$ m y comprueba que puede alcanzar ese punto.

*Resolución.* En SI,

$$W_{0\to 3} = \int_0^3 (6x - 2)\, dx = [3x^2 - 2x]_0^3 = 21\,\mathrm{J}.$$

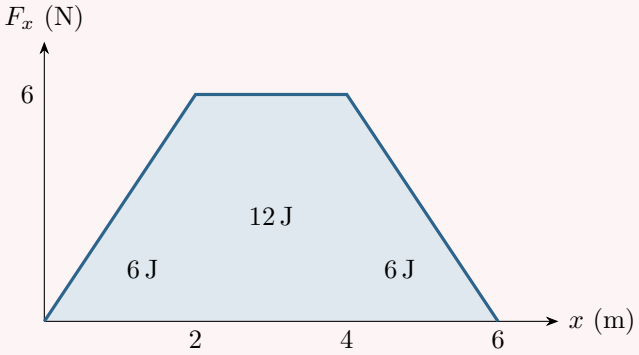
La energía inicial es 1 J; en una posición intermedia, $K(x) = 1\,\mathrm{J} + (3\,\mathrm{N/m})x^2 - (2\,\mathrm{N})x$. Su mínimo ocurre donde $F_x = 0$, en $x = 1/3$ m, y vale $2/3\,\mathrm{J} > 0$. El carro atraviesa toda la región de fuerza negativa con energía cinética positiva. Finalmente $K_f = 22$ J y $v_f = \sqrt{22}$ m/s. Para interpretar el balance entre extremos debemos comprobar que la energía cinética permita llegar a la posición final.




El área inicial negativa resta 1/3 J; la positiva aporta 64/3 J. Su suma es 21 J.

**PROBLEMA RESUELTO 8.6 · Trabajo a partir de una gráfica**

La fuerza neta sobre un móvil de 3 kg depende de su posición: crece linealmente de cero a 6 N entre $x = 0$ y 2 m, permanece en 6 N hasta 4 m y baja linealmente a cero en 6 m. En $x = 0$ lleva rapidez 2 m/s hacia la derecha. Encuentra la rapidez al alcanzar 6 m.
*Resolución.* Los tres tramos aportan las áreas de dos triángulos y un rectángulo: $6+12+6 = 24$ J. La energía cinética inicial es $\frac{1}{2}(3)(2^2) = 6$ J y la final 30 J. Por ello $\frac{1}{2}(3)v_f^2 = 30$ J y $v_f = 2\sqrt{5}\,\text{m/s} \simeq 4{,}47\,\text{m/s}$. Toda la fuerza es no negativa durante el avance, así que la energía cinética nunca baja de su valor inicial y el carro puede recorrer el tramo. El área de 24 J representa el incremento que debemos sumar a la energía cinética inicial.




Tres áreas acumulan 24 J de trabajo. La energía inicial de 6 J se añade para obtener la energía final.

## 8.4 Cambiar la dirección sin cambiar la energía cinética

La igualdad $W_{\text{neto}} = 0$ entre dos instantes solo asegura igual energía cinética en los extremos. Si el trabajo acumulado es nulo en cada subtramo, la rapidez permanece constante durante todo el recorrido. Esto ocurre cuando la resultante es perpendicular a la velocidad en todo instante. La aceleración puede entonces cambiar la dirección de $\vec{v}$ aunque no cambie su módulo.

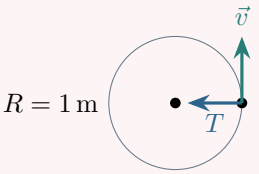
**PROBLEMA RESUELTO 8.7 · La tensión sostiene un giro sin aportar energía cinética**

Un disco de 2 kg gira a 3 m/s sobre una mesa lisa, unido a un punto fijo por cuerda de 1 m. Calcula tensión y trabajo de esa tensión en media vuelta.

*Resolución.* Peso y normal se equilibran. La tensión aporta la resultante radial:

$$T = mv^2/R = 18\,\text{N}.$$

Cada desplazamiento infinitesimal es tangente al círculo y perpendicular a la tensión. Por tanto $W_T = \int_C \vec{T}\cdot d\vec{r} = 0$. La energía cinética sigue siendo 9 J. La fuerza neta produce la aceleración centrípeta que cambia continuamente la dirección de la velocidad. El resultado usa un punto de anclaje fijo y radio constante.




Vista superior. Tensión radial y velocidad tangencial son perpendiculares; el trabajo instantáneo de tensión es cero.

Una normal sobre una pista fija y lisa también puede guiar el movimiento sin realizar trabajo, porque es perpendicular al desplazamiento permitido. Con una superficie móvil, esa conclusión deja de estar garantizada. El trabajo depende del desplazamiento en la referencia elegida; la palabra normal, por sí sola, solo describe una dirección respecto de la superficie.

## 8.5 La gravedad y la elección de una energía potencial

En un campo gravitatorio uniforme con eje $y$ positivo hacia arriba, $\vec{P} = (0, -mg)$. A lo largo de cualquier trayectoria entre A y B,

$$W_g = \int_C -mg\, dy = mg(y_A - y_B).$$

Solo intervienen las alturas inicial y final. Podemos guardar esa información en una función de posición $U_g(y) = mg(y - y_0)$, de modo que

$$W_g = -\Delta U_g. \tag{8.4}$$

El nivel $y_0$ fija el cero de energía potencial. Cambiarlo añade la misma constante a los valores inicial y final y deja intacto $\Delta U_g$. Una energía potencial negativa es admisible; indica una posición respecto del cero elegido.

La energía potencial gravitatoria corresponde a la interacción cuerpo–Tierra. Hablar de la energía potencial de la caja es una abreviatura útil cuando la Tierra se considera fija y su campo dado. Al formular un balance hay que decidir si describiremos la gravedad mediante su trabajo sobre la caja o mediante el cambio de energía potencial del sistema caja–Tierra. Incluir ambas contribuciones simultáneamente duplicaría la misma interacción.

**PROBLEMA RESUELTO 8.8 · Dos caminos y dos ceros de altura**

Una caja de 2 kg pasa de altura 3 m a 1 m. Compara el trabajo gravitatorio por una bajada directa y por una rampa más larga. Calcula además sus energías potenciales tomando el cero primero en el suelo y después a 4 m.

*Resolución.* En ambos caminos $W_g = 20(3 - 1) = 40\,\text{J}$. Con cero en el suelo, $U_i = 60\,\text{J}$ y $U_f = 20\,\text{J}$. Con cero a 4 m, $U_i' = -20\,\text{J}$ y $U_f' = -60\,\text{J}$. En los dos casos $\Delta U = -40\,\text{J}$ y se verifica $W_g = -\Delta U$. El trabajo gravitatorio conserva su valor aunque la rampa sea más larga. Si hubiese fricción, su trabajo sí dependería del camino y de las condiciones del contacto.

| **Cero elegido** | $(U_i, U_f)$ | **Diferencia** |
|---|---|---|
| Suelo | $(60, 20)\,\text{J}$ | $-40\,\text{J}$ |
| Altura 4 m | $(-20, -60)\,\text{J}$ | $-40\,\text{J}$ |

La diferencia de potencial y el trabajo gravitatorio son independientes del cero elegido y del camino.

## 8.6 Resortes y fuerzas conservativas

Un resorte ideal de constante $k > 0$ ejerce, sobre un cuerpo unido a su extremo, $F_x = -kx$, donde $x$ mide la deformación respecto de la longitud natural. El signo expresa la restitución: se opone al alargamiento positivo y a la compresión negativa. La ley de Hooke aproxima el comportamiento de un resorte en su rango elástico; fuera de él puede dejar de ser válida.

Su trabajo entre deformaciones $x_i$ y $x_f$ es

$$W_e = \int_{x_i}^{x_f} -kx\,dx = -\left(\tfrac{1}{2}kx_f^2 - \tfrac{1}{2}kx_i^2\right).$$

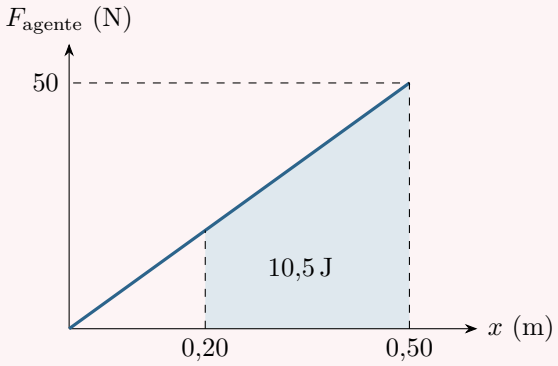
Definimos $U_e = \frac{1}{2}kx^2$, con cero en la longitud natural, y obtenemos nuevamente $W_e = -\Delta U_e$. Tanto comprimir como estirar almacena energía positiva con esta elección del cero. Las unidades lo confirman: $(\mathrm{N/m})(\mathrm{m^2}) = \mathrm{J}$.

Una fuerza estacionaria es *conservativa* en una región cuando admite una energía potencial $U$ tal que, para cualquier trayectoria admisible de A a B, su trabajo es $W_{A\to B} = U(A) - U(B)$. Por eso, los distintos caminos entre los mismos extremos producen el mismo trabajo. En una coordenada y donde $U$ sea derivable, $F_x = -dU/dx$. La gravedad uniforme y el resorte ideal cumplen esta condición. La fricción cinética puede realizar trabajo negativo en cada tramo de ida y vuelta; su acumulación depende del recorrido y del régimen de contacto.

**PROBLEMA RESUELTO 8.9 · El trabajo para estirar un resorte**

Un resorte de 100 N/m pasa lentamente de deformación 0,20 m a 0,50 m. La variación de energía cinética es despreciable. Calcula el trabajo del agente que lo estira y el del resorte sobre el extremo móvil.

*Resolución.* La fuerza del agente se ajusta aproximadamente a $kx$, opuesta a la del resorte. La energía elástica pasa de $U_i = \frac{1}{2}(100)(0{,}2)^2 = 2\,\mathrm{J}$ a $U_f = 12{,}5\,\mathrm{J}$. El agente aporta 10,5 J y el resorte realiza −10,5 J sobre el extremo. El mismo resultado se obtiene integrando $kx$ entre ambas deformaciones. Multiplicar la fuerza final 50 N por el avance 0,30 m daría 15 J y sobreestimaría el trabajo de este tirón variable.




El trabajo del agente es el área del trapecio entre deformaciones. La recta $F = kx$ corresponde al estiramiento lento.

## 8.7 Conservar la energía mecánica con hipótesis explícitas

Al separar las fuerzas conservativas de las restantes, el teorema trabajo–energía toma la forma $\Delta K = -\Delta U + W_{\text{otras}}$. Por tanto,

$$\Delta E_{\text{mec}} = \Delta(K + U) = W_{\text{otras}}. \tag{8.5}$$

La suma $U$ incluye las interacciones conservativas que decidimos representar como potenciales. El término $W_{\text{otras}}$ reúne los trabajos de las fuerzas restantes, después de incorporar en $U$ las interacciones conservativas elegidas. Si ese término es cero, $K + U$ se conserva entre los estados considerados. Para que sea constante a lo largo de todo el movimiento, debe anularse en cada subtramo.

La energía mecánica puede conservarse bajo la acción de fuerzas conservativas. Un resorte puede cambiar intensamente la rapidez y la gravedad puede acelerar una caída mientras $K + U$ permanece constante. La energía pasa entre las formas incluidas en el balance. Si una interacción transfiere energía a deformaciones irreversibles, vibraciones o calentamiento, conservar solo la suma mecánica dejaría fuera parte del proceso.

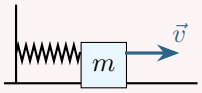
**PROBLEMA RESUELTO 8.10 · Liberar una compresión**

Un bloque de 2 kg está en reposo contra un resorte de 200 N/m comprimido 0,30 m sobre mesa lisa. No está unido al resorte. ¿Con qué rapidez lo abandona al recuperar este su longitud natural?

*Resolución.* El sistema bloque–resorte conserva su energía mecánica en la aproximación ideal. La energía inicial es $\frac{1}{2}(200)(0{,}3)^2 = 9\,\text{J}$, toda elástica. En la longitud natural $U_e = 0$, de modo que

$$\tfrac{1}{2}(2)v^2 = 9, \qquad v = 3\,\text{m/s}.$$

El resorte deja de empujar al bloque allí. Al recuperar su longitud natural, el resorte pierde el contacto con el bloque, que continúa su movimiento libre. Sobre la mesa lisa continuará con esa velocidad.




9 J elásticos
$\longrightarrow$ 9 J cinéticos

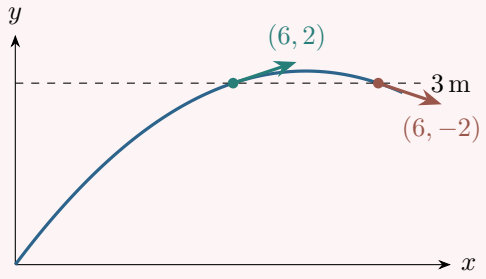
El resorte empuja durante la descompresión. En la longitud natural cesa el contacto con el bloque no unido.

**PROBLEMA RESUELTO 8.11 · Una rapidez y dos direcciones posibles**

Una pelota se lanza con componentes iniciales $(6, 8)\,\mathrm{m/s}$ desde $y = 0$, sin resistencia del aire. Encuentra su rapidez cuando pasa por $y = 3\,\mathrm{m}$ y determina las dos velocidades posibles. *Resolución.* La rapidez inicial es $10\,\mathrm{m/s}$. Dividir la conservación de $K + U_g$ entre $m$ da $v^2/2 + gy = v_0^2/2$. En $y = 3\,\mathrm{m}$,

$$v^2 = 100 - 2(10)(3) = 40\,\mathrm{m^2/s^2}, \qquad v = 2\sqrt{10}\,\mathrm{m/s}.$$

La componente horizontal permanece en $6\,\mathrm{m/s}$. Así $v_y^2 = 40 - 36 = 4\,\mathrm{m^2/s^2}$ y las velocidades son $(6, +2)\,\mathrm{m/s}$ al subir y $(6, -2)\,\mathrm{m/s}$ al bajar. La altura máxima es $8^2/(2g) = 3{,}2\,\mathrm{m}$: ambas visitas existen. La energía sola dio el módulo; la información cinemática permitió reconstruir las componentes.




En los dos pasos por la misma altura la rapidez coincide; la componente vertical cambia de signo. Velocidades en m/s.

## 8.8 El balance cuando hay rozamiento

Para un bloque que desliza sobre una rampa fija, el rozamiento cinético realiza $W_f = -\int f_k\,ds$. Con coeficiente y normal constantes, $W_f = -\mu_k N s$. Si ya hemos incluido la gravedad en $U_g$, la ecuación es $\Delta(K + U_g) = -\mu_k N s$. La longitud $s$ mide el recorrido sobre la superficie; la pérdida de altura es su proyección vertical.

La disminución de energía mecánica corresponde a una transferencia hacia otras formas de energía. Al ampliar el sistema al bloque, la superficie y la Tierra, aparecen aumentos de energía interna y posibles transferencias al entorno. En el modelo de deslizamiento seco sobre una superficie fija, con otras transferencias despreciables, representaremos el aumento interno total por $\Delta E_{\mathrm{int}} = f_k s$. Determinar qué fracción calienta cada cuerpo requiere información adicional. Para una superficie móvil o un contacto con deformaciones importantes habría que estudiar también el movimiento y las transferencias de esa superficie; identificar automáticamente trabajo negativo e incremento térmico del bloque sería insuficiente.

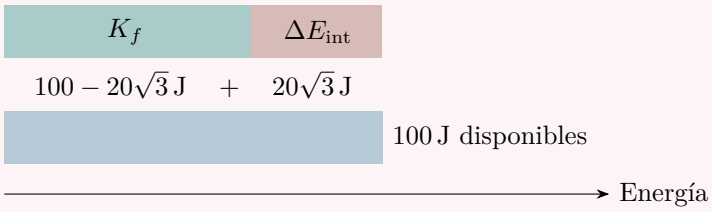
### PROBLEMA RESUELTO 8.12 · La altura perdida y el camino rugoso

Un bloque de 4 kg parte del reposo y desciende 5 m por una rampa fija de 30°, con $\mu_k = 0{,}2$. Se supone que el contacto permite iniciar el deslizamiento al soltarlo. Halla la rapidez final y la energía mecánica transferida a formas internas.

*Resolución.* La pérdida de altura es $h = 5\sin 30° = 2{,}5\,\text{m}$; el potencial disminuye $mgh = 100\,\text{J}$. La normal es $mg\cos 30° = 20\sqrt{3}\,\text{N}$ y la fricción tiene módulo $4\sqrt{3}\,\text{N}$. Su trabajo a lo largo de la rampa vale $-20\sqrt{3}\,\text{J}$. Por tanto,

$$K_f = 100 - 20\sqrt{3}\,\text{J}, \qquad v_f = \sqrt{50 - 10\sqrt{3}}\,\text{m/s} \simeq 5{,}72\,\text{m/s}.$$

La energía mecánica disminuye $20\sqrt{3}\,\text{J} \simeq 34{,}6\,\text{J}$. Bajo las hipótesis del balance ampliado, esa cantidad aumenta la energía interna total de bloque y rampa. Usar 2,5 m como recorrido de fricción daría la mitad del trabajo resistente real.




El potencial perdido se reparte entre energía cinética y aumento interno total en el modelo adoptado. Barras con escala común.

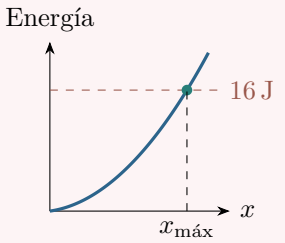
### PROBLEMA RESUELTO 8.13 · Comprimir un resorte mientras actúa la fricción

Un bloque de 2 kg avanza a 4 m/s por suelo horizontal y llega a un resorte sin deformar de 100 N/m. Desde el contacto comienza a comprimirlo; $\mu_k = 0{,}25$. Encuentra la primera compresión máxima.

*Resolución.* La energía cinética al tocar el resorte es 16 J y la fricción durante la compresión vale $0{,}25(20) = 5\,\text{N}$. Sea $x \geq 0$ la compresión. En la primera detención,

$$16\,\text{J} = \tfrac{1}{2}(100\,\text{N/m})x^2 + (5\,\text{N})x.$$

En SI resulta $50x^2 + 5x - 16 = 0$. Las raíces son $x = (-1 \pm \sqrt{129})/20\,\text{m}$. La compresión físicamente admisible es $x = (\sqrt{129} - 1)/20\,\text{m} \simeq 0{,}518\,\text{m}$. La otra raíz es negativa y no corresponde al tramo considerado. En esa posición $K = 0$, pero decidir si el bloque regresa requiere examinar el rozamiento estático y el vínculo con el resorte. Después de una detención debemos examinar las fuerzas y las condiciones de contacto para determinar cómo continúa el movimiento.




La curva suma energía elástica y transferencia por fricción desde el contacto. Su cruce con 16 J fija la primera detención.

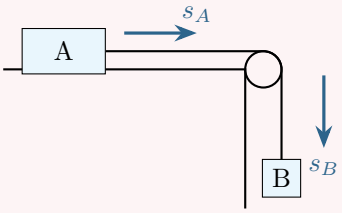
**PROBLEMA RESUELTO 8.14 · La energía de dos cuerpos vinculados**

Un bloque A de 4 kg desliza por mesa hacia una polea fija ideal, unido mediante cuerda ideal a B de 2 kg que desciende. Parten del reposo; entre A y mesa $\mu_s = 0{,}40$ y $\mu_k = 0{,}25$. B puede bajar al liberarse el sistema porque su peso, 20 N, supera el rozamiento estático máximo, 16 N. Calcula la rapidez común después de que B descienda 1,2 m.

*Resolución.* La cuerda impone iguales recorridos y rapidez. La energía potencial perdida por B es $2(10)(1{,}2) = 24\,\text{J}$. La normal de A vale 40 N y la fricción 10 N, cuyo trabajo es $-12\,\text{J}$. La energía cinética final total es

$$\tfrac{1}{2}(4+2)v^2 = 24 - 12 = 12\,\text{J}, \qquad v = 2\,\text{m/s}.$$

Los trabajos de tensión sobre A y B se cancelan al sumar sus balances: son $+Ts$ y $-Ts$, porque la cuerda y polea ideales tienen tensión común y los recorridos son iguales. Las fuerzas sobre los dos cuerpos tienen direcciones distintas; la cancelación de sus trabajos se justifica por esos productos escalares y el vínculo. La comprobación dinámica da $a = (20-10)/6 = 5/3\,\text{m/s}^2$ y $v^2 = 2a(1{,}2) = 4\,\text{m}^2/\text{s}^2$.




$$-\Delta U_g = 24\,\text{J}$$

$$W_f = -12\,\text{J}$$

$$K_A + K_B = 12\,\text{J}$$

El vínculo da igual rapidez y recorrido. Las dos masas participan en la energía cinética total; solo B cambia su altura.

## 8.9 Potencia y rendimiento

Para conocer la duración del proceso necesitamos información sobre el movimiento o la potencia. Para describir el ritmo de transferencia definimos la potencia media $\overline{\mathcal{P}} = W/\Delta t$ y, cuando existe la derivada, la potencia instantánea

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}. \tag{8.6}$$

Aquí $\vec{v}$ es la velocidad de la partícula sobre la que actúa la fuerza, en la misma referencia usada para calcular el trabajo. Una potencia negativa representa un aporte negativo de trabajo de esa fuerza al balance. El cambio de energía cinética depende de la suma de los aportes: para una partícula de masa constante en una referencia inercial, $\sum_i \mathcal{P}_i = dK/dt$, como en el balance de trabajos de r8-4. Su unidad SI es el watt, $1\,\text{W} = 1\,\text{J/s}$. Un kilowatt-hora es una unidad de energía: $1\,\text{kWh} = 3{,}6\times10^6\,\text{J}$.

El rendimiento $\eta = E_{\text{útil}}/E_{\text{entrada}}$ compara, para un mismo proceso y límites de sistema definidos, la energía útil obtenida con la suministrada. Para una máquina que recibe energía durante un intervalo sin consumir reservas internas previas, $0 \le \eta \le 1$. Si las potencias son constantes puede escribirse $\eta = \mathcal{P}_{\text{útil}}/\mathcal{P}_{\text{entrada}}$. Las energías que no aparecen como salida útil siguen en el balance, por ejemplo como calentamiento, ruido o energía almacenada.

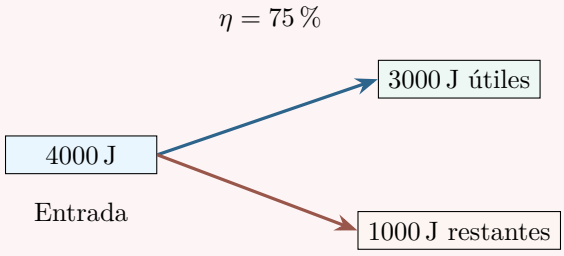
### PROBLEMA RESUELTO 8.15 · Igual trabajo y distinto ritmo

Un elevador idealizado sube una carga de 50 kg una altura de 6 m en 10 s, con igual rapidez inicial y final. Su rendimiento global para esa elevación es 75 %. Halla energía útil, potencia útil media y energía y potencia media de entrada.

*Resolución.* El aumento de potencial es $50(10)(6) = 3000\,\text{J}$ y la variación cinética es cero. La potencia útil media vale $3000/10 = 300\,\text{W}$. Con $\eta = 0{,}75$,

$$E_{\text{entrada}} = 3000/0{,}75 = 4000\,\text{J}, \qquad \overline{\mathcal{P}}_{\text{entrada}} = 400\,\text{W}.$$

Los 1000 J restantes corresponden a otras transferencias o cambios internos del equipo y su entorno. Hacer la misma elevación en la mitad del tiempo duplicaría la potencia útil media sin cambiar los 3000 J útiles, si se conservan las condiciones indicadas.

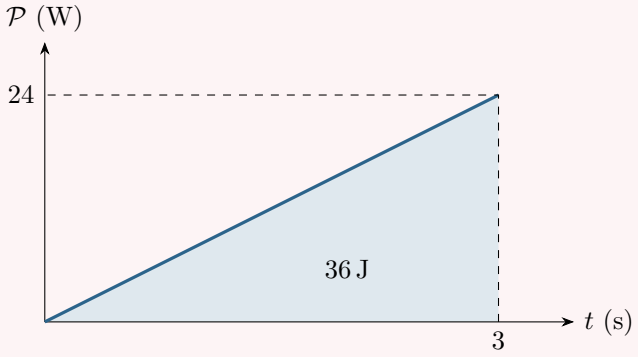



Balance de energía durante los 10 s del proceso. Dividir cada transferencia por ese tiempo da sus potencias medias.

### PROBLEMA RESUELTO 8.16 · La potencia aumenta aunque la fuerza sea constante

Un carro de 2 kg sobre pista lisa parte del reposo y recibe una fuerza horizontal constante de 4 N durante 3 s. Calcula la potencia instantánea al final y la potencia media en el intervalo.

*Resolución.* La aceleración es $2\,\text{m/s}^2$, de modo que $v(t) = (2\,\text{m/s}^2)t$ y $\mathcal{P}(t) = Fv(t) = (8\,\text{W/s})t$. A los 3 s la potencia instantánea es 24 W. El avance es $\frac{1}{2}(2)(3^2) = 9\,\text{m}$, el trabajo 36 J y la potencia media 12 W. También se obtiene integrando la gráfica potencia–tiempo: su área triangular es 36 J. La fuerza constante hace más trabajo por segundo cuando el carro recorre más distancia por segundo.




El área potencia–tiempo es trabajo. La potencia media de 12 W es la mitad de la potencia final en este crecimiento lineal.

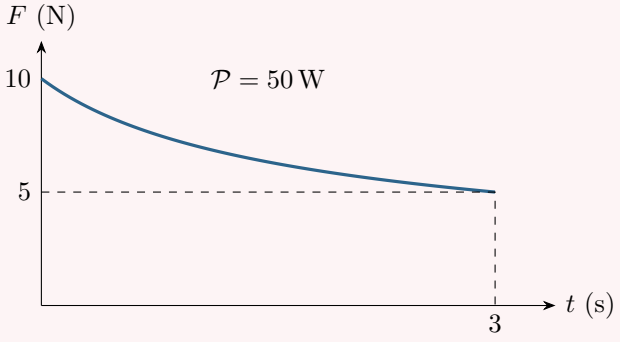
**PROBLEMA RESUELTO 8.17 · Potencia constante con fuerza decreciente**

Un móvil de 4 kg avanza inicialmente a 5 m/s por una pista lisa. Un motor le suministra potencia mecánica constante de 50 W, mediante una fuerza paralela a la velocidad, durante 3 s. Encuentra la rapidez final y las fuerzas inicial y final.

*Resolución.* El motor aporta $50(3) = 150\,\mathrm{J}$. La energía inicial es $\frac{1}{2}(4)(5^2) = 50\,\mathrm{J}$, luego $K_f = 200\,\mathrm{J}$ y $v_f = 10\,\mathrm{m/s}$. Como $\mathcal{P} = Fv$, la fuerza pasa de $50/5 = 10\,\mathrm{N}$ a $50/10 = 5\,\mathrm{N}$. Durante el intervalo,

$$v(t) = \sqrt{25\,\mathrm{m^2/s^2} + (25\,\mathrm{m^2/s^3})t}.$$

La aceleración y la fuerza disminuyen mientras la potencia permanece constante. El modelo se inicia con velocidad no nula; una potencia positiva constante desde reposo exacto exigiría $F = \mathcal{P}/v$ sin límite al inicio, por encima de la capacidad de un motor real.




La fuerza necesaria disminuye de 10 a 5 N conforme aumenta la rapidez, mientras su producto permanece constante.

## 8.10 Qué estados permite un balance de energía

Conocer la energía mecánica $E$ de una partícula que se mueve en una coordenada bajo una fuerza conservativa permite escribir $K(x) = E - U(x)$. Como $K \geq 0$, solo son accesibles posiciones donde $U(x) \leq E$. Aun así, puede haber varias regiones permitidas separadas por una barrera. Un cuerpo no pasa de una a otra si entre ellas tendría que adquirir energía cinética negativa.

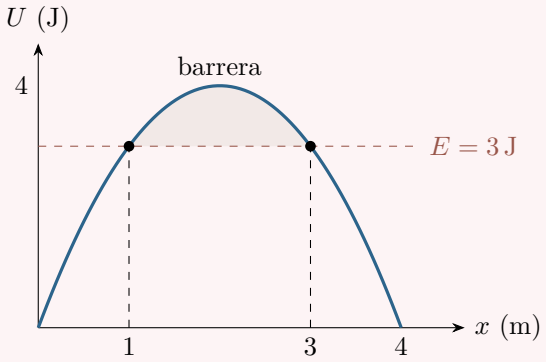
Donde $E = U$, la rapidez es cero. Para decidir qué ocurre después hay que mirar la fuerza $-dU/dx$ y las condiciones del contacto. Un mínimo de $U$ corresponde, cuando es suave, a fuerza nula y puede ser un equilibrio estable; una detención sobre una pendiente de $U$ tiene fuerza no nula y normalmente precede a un retorno. Los siguientes conceptos de oscilación podrán desarrollarse a partir de esta diferencia.

**PROBLEMA RESUELTO 8.18 · Una rapidez formal al otro lado de una barrera**

Una partícula de 2 kg se mueve en una coordenada $0 \le x \le 4\,\text{m}$ con potencial $U(x) = (4\,\text{N})x - (1\,\text{N/m})x^2$. Parte de $x = 0$ hacia la derecha con energía cinética 3 J. ¿Puede alcanzar $x = 4\,\text{m}$ conservando su energía?

*Resolución.* La energía total es $E = 3\,\text{J}$. Como $U(4\,\text{m}) = 0$, un balance solo entre extremos produciría $K_f = 3\,\text{J}$. Pero el potencial alcanza 4 J en $x = 2\,\text{m}$, por encima de la energía disponible. Las igualdades $U(x) = 3\,\text{J}$ dan, en SI, $4x - x^2 = 3$ y raíces $x = 1\,\text{m}$ y $3\,\text{m}$.

La partícula llega primero a $x = 1\,\text{m}$, donde se detiene. Allí $F_x = -dU/dx = -4\,\text{N} + (2\,\text{N/m})x = -2\,\text{N}$: acelera hacia la izquierda y retorna. El intervalo $1 < x < 3\,\text{m}$ está prohibido para esa energía; la región permitida $x \ge 3\,\text{m}$ queda desconectada de su estado inicial. La conservación de energía debe cumplirse a lo largo del recorrido completo, además de en los extremos.




La zona sombreada tiene $U > E$ y exigiría energía cinética negativa. La partícula que llega desde la izquierda retorna en $x = 1\,\text{m}$.

**De una rapidez medida a un balance comprobable**

Usa un carro ligero, una rampa pequeña y estable, una regla y una grabación fija que permita estimar la rapidez al pie. Mide la diferencia de altura del centro de masa entre los estados escogidos. El modelo de partícula sin pérdidas predice $v_f^2 - v_i^2 = 2gh$. Repite con varias alturas y compara, conservando la dispersión de las mediciones.

Las ruedas almacenan energía de rotación, omitida en ese modelo; interpretar una rapidez menor exige estimar también esa contribución. También influyen la resistencia del aire, las irregularidades, el error al medir alturas y el procedimiento de liberación. Un bloque que desliza permite otro modelo, pero introduce rozamiento. La experiencia permite contrastar un balance con hipótesis identificadas y evaluar las transferencias de energía pertinentes.

## Ejercicios para reconstruir y transferir

Usa $g = 10\,\text{m/s}^2$, masas constantes y referencia inercial del suelo, salvo indicación contraria. Los cuerpos se modelan como partículas. Distingue trabajos individuales de trabajo neto y declara qué interacciones incluyes como energía potencial.

**EJERCICIO 8.1 · Un trabajo oblicuo**

Una fuerza constante de 30 N forma 60° con un desplazamiento de 4 m. Calcula su trabajo y el que haría la misma fuerza si el desplazamiento tuviera sentido opuesto.

**EJERCICIO 8.2 · Una fuerza perpendicular**

Un disco se mueve horizontalmente sobre mesa fija lisa. Explica el trabajo de peso y normal. ¿Se sigue de ello que cada una de esas fuerzas sea nula?

**EJERCICIO 8.3 · Elevación uniforme**

Una caja de 6 kg sube 3 m a rapidez constante, sin aire. Calcula trabajos de tensión y peso y el trabajo neto.

**EJERCICIO 8.4 · Rapidez y energía cinética**

Una partícula de 4 kg pasa de 3 a 5 m/s. Encuentra el trabajo neto. ¿Qué energía cinética tendría a $-5$ m/s en un movimiento rectilíneo?

**EJERCICIO 8.5 · Tirón y rozamiento**

Una caja de 4 kg parte a 2 m/s y avanza 3 m horizontalmente, con tirón de 24 N hacia el avance y $\mu_k = 0{,}2$. Encuentra trabajos y rapidez final.

**EJERCICIO 8.6 · Una fuerza dependiente de la posición**

Un carro de 2 kg avanza desde $x = 0$ con $v_i = 2$ m/s. La fuerza neta es $F_x = (4\,\text{N/m})x - 2\,\text{N}$. Calcula trabajo y rapidez en $x = 2$ m y comprueba que puede llegar.

**EJERCICIO 8.7 · Un área con signo**

Entre $x = 0$ y 2 m la fuerza neta es $+4$ N; entre 2 y 5 m es $-2$ N. Un móvil de 1 kg entra en $x = 0$ con rapidez 2 m/s hacia la derecha. Halla el trabajo total y la rapidez final.

**EJERCICIO 8.8 · Fuerza no nula, trabajo nulo**

Un disco de 1 kg gira a 4 m/s sobre mesa lisa, con cuerda de radio 2 m anclada en un punto fijo. Encuentra tensión y trabajo de tensión en una vuelta.

**EJERCICIO 8.9 · La gravedad depende de los extremos**

Una caja de 3 kg pasa de altura 5 m a 2 m. Halla el trabajo de gravedad por dos caminos cualesquiera y las energías potenciales tomando cero a 4 m.

**EJERCICIO 8.10 · Cambiar el cero**

Un potencial gravitatorio se escribe $U(y) = mgy + C$. Explica por qué cambiar $C$ no cambia el trabajo entre dos alturas ni la rapidez predicha por conservación.

**EJERCICIO 8.11 · Estirar lentamente**

Un resorte de 80 N/m se estira de 0,10 a 0,30 m con cambio cinético despreciable. Calcula trabajos del agente y del resorte.

**EJERCICIO 8.12 · La misma energía al comprimir**

Compara la energía elástica de un resorte de 200 N/m con deformaciones $+0{,}20$ y $-0{,}20$ m. Indica el sentido de su fuerza sobre un cuerpo unido al extremo.

**EJERCICIO 8.13 · Lanzamiento por resorte**

Un bloque de 1 kg contra un resorte de 100 N/m comprimido 0,40 m se libera sobre mesa lisa. No está unido al resorte. Encuentra su rapidez al separarse.

**EJERCICIO 8.14 · Una altura que puede alcanzarse**

Una pelota sale con componentes $(3, 4)$ m/s desde $y = 0$, sin aire. Calcula la rapidez y las dos velocidades en $y = 0{,}60$ m. Comprueba la altura máxima.

**EJERCICIO 8.15 · Altura y fricción**

Un bloque de 5 kg ya iniciado en deslizamiento parte con rapidez despreciable y recorre 5 m cuesta abajo por una rampa con seno 0,6, coseno 0,8 y $\mu_k = 0{,}25$. Halla rapidez final y disminución de energía mecánica.

**EJERCICIO 8.16 · La primera compresión máxima**

Un bloque de 1 kg llega a 3 m/s a un resorte sin deformar de 40 N/m. El suelo tiene $\mu_k = 0{,}2$. Calcula la primera compresión máxima y explica qué falta para decidir si queda allí.

**EJERCICIO 8.17 · Dos masas en un balance**

Un bloque de 3 kg desliza por mesa hacia polea fija ideal, unido por cuerda ideal a una masa de 2 kg descendente. Parten del reposo; $\mu_s = 0{,}50$ y $\mu_k = 0{,}20$ en la mesa. Comprueba el inicio del movimiento y halla la rapidez común cuando la masa colgante baja 2 m.

**EJERCICIO 8.18 · Una máquina y su rendimiento**

Una máquina eleva 40 kg una altura de 5 m en 8 s, con igual rapidez inicial y final. Su rendimiento es 80 %. Encuentra energía y potencia útil media, y energía y potencia media de entrada.

**EJERCICIO 8.19 · Potencia variable**

Un carro de 3 kg parte del reposo sobre pista lisa con fuerza constante de 6 N durante 4 s. Halla potencia final, trabajo y potencia media.

**EJERCICIO 8.20 · Potencia mecánica constante**

Un móvil de 2 kg tiene rapidez inicial 4 m/s y recibe potencia mecánica constante de 20 W durante 3 s sobre pista lisa. Halla rapidez final y fuerza final si esta es paralela a la velocidad.

**EJERCICIO 8.21 · Expresar una energía en joules**

Un equipo consume potencia eléctrica constante de 1,5 kW durante 20 min. Expresa la energía recibida en kilowatt-hora y joules.

**EJERCICIO 8.22 · La barrera de potencial**

En el potencial del problema resuelto 8.18, una partícula parte de $x = 0$ hacia la derecha con energía total 2 J. Halla su primer punto de detención y explica por qué no llega a $x = 4$ m.

**EJERCICIO 8.23 · La fricción puede hacer trabajo positivo**

Una caja de 2 kg se deposita sin velocidad horizontal sobre una cinta que corre a 3 m/s constantes; $\mu_k = 0{,}25$. Antes de igualar velocidades, avanza 1,8 m respecto del suelo y la cinta recorre 3,6 m. Calcula el trabajo de fricción sobre la caja, el trabajo de su reacción sobre la cinta y su suma. Interpreta la diferencia con el aumento de energía cinética de la caja.

**EJERCICIO 8.24 · Cambiar de referencia**

Un carro de 2 kg sobre pista lisa acelera de 2 a 6 m/s en 2 s con fuerza horizontal constante. Calcula trabajo neto en el suelo y en una referencia inercial que avanza a 2 m/s en el mismo sentido. Verifica el teorema trabajo–energía en ambas.

## Soluciones completas de los ejercicios

**SOLUCIÓN 8.1.**
El trabajo es $30(4)\cos 60^\circ = 60\,\text{J}$. Al invertir el desplazamiento, el ángulo pasa a $120^\circ$ y $W = -60\,\text{J}$. La fuerza se mantuvo fija; cambió el sentido del recorrido. El signo resulta del producto escalar y se conserva al girar los ejes.

**SOLUCIÓN 8.2.**
El desplazamiento es tangente a la mesa y peso y normal son verticales, de modo que ambos productos escalares son cero durante todo el movimiento. Si no hay otras fuerzas verticales, $N = mg$ y sus módulos son no nulos. Trabajo cero solo indica falta de componente a lo largo del desplazamiento en esta situación.

**SOLUCIÓN 8.3.**
La rapidez constante exige $T = mg = 60\,\text{N}$. Para el ascenso de $3\,\text{m}$, $W_T = 180\,\text{J}$ y $W_g = -180\,\text{J}$. Su suma es cero, coherente con $\Delta K = 0$. La tensión sí transfiere energía al sistema caja–Tierra, aumentando el potencial $180\,\text{J}$.

**SOLUCIÓN 8.4.**
Las energías inicial y final son $18\,\text{J}$ y $50\,\text{J}$. El trabajo neto es $32\,\text{J}$. Con componente de velocidad $-5\,\text{m/s}$ la rapidez también es $5\,\text{m/s}$ y $K = 50\,\text{J}$. La misma energía cinética es compatible con distintos sentidos de movimiento.

**SOLUCIÓN 8.5.**
La normal vale $40\,\text{N}$ y la fricción $8\,\text{N}$ hacia atrás. Los trabajos son $W_T = 24(3) = 72\,\text{J}$, $W_f = -8(3) = -24\,\text{J}$ y cero para normal y peso. El trabajo neto es $48\,\text{J}$. Como $K_i = 8\,\text{J}$, $K_f = 56\,\text{J}$ y $v_f = \sqrt{2(56)/4} = 2\sqrt{7}\,\text{m/s} \simeq 5{,}29\,\text{m/s}$. La resultante favorece el avance durante todo el tramo.

**SOLUCIÓN 8.6.**
En SI, $W = \int_0^2 (4x - 2)\,dx = [2x^2 - 2x]_0^2 = 4\,\text{J}$. La energía inicial es $4\,\text{J}$ y la final $8\,\text{J}$, luego $v_f = \sqrt{8}\,\text{m/s} = 2\sqrt{2}\,\text{m/s}$. En el tramo intermedio, $K = 4 + 2x^2 - 2x$ en joules alcanza su mínimo en $x = 0{,}5\,\text{m}$, donde vale $3{,}5\,\text{J} > 0$. Puede cruzar la región inicial de fuerza negativa sin detenerse.

**SOLUCIÓN 8.7.**
El primer tramo aporta $4(2) = 8\,\text{J}$ y el segundo $-2(3) = -6\,\text{J}$, por lo que el total es $2\,\text{J}$. La energía inicial es $2\,\text{J}$ y la final $4\,\text{J}$; $v_f = \sqrt{8}\,\text{m/s}$. En $x = 2\,\text{m}$ había $10\,\text{J}$ y la fuerza negativa retira solo $6\,\text{J}$ antes del extremo: el cuerpo llega con energía cinética positiva. La rapidez aumentó primero y disminuyó después, aunque su valor final supere el inicial.

**SOLUCIÓN 8.8.**
La tensión radial es $T = mv^2/R = 1(16)/2 = 8\,\text{N}$. Es perpendicular al desplazamiento infinitesimal en cada punto, así que su trabajo en toda la vuelta es cero. La energía cinética permanece en $8\,\text{J}$ y el vector velocidad cambia de dirección. Una fuerza neta perpendicular a la velocidad realiza trabajo nulo mientras cambia su dirección.

**SOLUCIÓN 8.9.**
El trabajo gravitatorio es $mg(y_i - y_f) = 30(5 - 2) = 90\,\text{J}$ por cualquiera de los dos caminos. Con cero a $4\,\text{m}$, $U_i = 30(5 - 4) = 30\,\text{J}$ y $U_f = 30(2 - 4) = -60\,\text{J}$. Su diferencia es $-90\,\text{J}$, negativa del trabajo calculado. La energía potencial negativa depende del nivel elegido y es admisible.

**SOLUCIÓN 8.10.**
La diferencia es $U_f - U_i = (mgy_f + C) - (mgy_i + C) = mg(y_f - y_i)$: la constante se cancela. También se cancela en $K_f + U_f = K_i + U_i$, por lo que el cambio de energía cinética y la rapidez final permanecen iguales. Debe usarse el mismo cero para los dos estados del balance.

**SOLUCIÓN 8.11.**
El potencial pasa de $\frac{1}{2}(80)(0{,}1)^2 = 0{,}4\,\text{J}$ a $\frac{1}{2}(80)(0{,}3)^2 = 3{,}6\,\text{J}$. Por tanto $\Delta U_e = 3{,}2\,\text{J}$. El trabajo del agente es $+3{,}2\,\text{J}$ si el cambio cinético es despreciable y no hay pérdidas; el del resorte sobre el extremo es $-3{,}2\,\text{J}$. El trabajo se obtiene integrando la fuerza variable sobre el recorrido.

**SOLUCIÓN 8.12.**
En ambos casos $U_e = \frac{1}{2}(200)(0{,}2)^2 = 4\,\text{J}$. La fuerza es $F_x = -kx$: $-40\,\text{N}$ para la extensión positiva y $+40\,\text{N}$ para la compresión negativa. La misma energía potencial puede corresponder a fuerzas de sentidos opuestos en posiciones distintas.

**SOLUCIÓN 8.13.**
La energía inicial es $\frac{1}{2}(100)(0{,}4)^2 = 8\,\text{J}$. En la longitud natural pasa a energía cinética: $\frac{1}{2}(1)v^2 = 8$, de donde $v = 4\,\text{m/s}$. Al recuperar el resorte su longitud natural, el bloque pierde el contacto y continúa a esa rapidez sobre la mesa lisa.

**SOLUCIÓN 8.14.**
La rapidez inicial es $5\,\text{m/s}$. En $y = 0{,}60\,\text{m}$, $v^2 = 25 - 2(10)(0{,}60) = 13\,\text{m}^2/\text{s}^2$ y $v = \sqrt{13}\,\text{m/s}$. Como $v_x = 3\,\text{m/s}$, $v_y^2 = 13 - 9 = 4\,\text{m}^2/\text{s}^2$, luego las velocidades son $(3, +2)$ y $(3, -2)\,\text{m/s}$. La altura máxima es $4^2/(2g) = 0{,}8\,\text{m}$, mayor que la consultada: existen ambos pasos.

**SOLUCIÓN 8.15.**
La pérdida de altura es $5(0{,}6) = 3\,\text{m}$ y de potencial $5(10)(3) = 150\,\text{J}$. La normal vale $50(0{,}8) = 40\,\text{N}$ y la fricción $10\,\text{N}$, con trabajo $-50\,\text{J}$. Quedan $100\,\text{J}$ de energía cinética, de donde $v_f = \sqrt{2(100)/5} = 2\sqrt{10}\,\text{m/s}$. La energía mecánica disminuye $50\,\text{J}$; bajo el modelo ampliado sin otras transferencias, aumenta en esa cantidad la energía interna total de las superficies.

**SOLUCIÓN 8.16.**
La energía cinética al contacto es $\frac{1}{2}(1)(3^2) = 4{,}5\,\text{J}$. La normal es $10\,\text{N}$ y la fricción $2\,\text{N}$. Para la primera detención, $4{,}5 = 20x^2 + 2x$ en SI. Las raíces son $x = (-1 \pm \sqrt{91})/20\,\text{m}$; se acepta la positiva, $x \simeq 0{,}427\,\text{m}$. Para decidir si queda allí hace falta el coeficiente estático y precisar el contacto con el resorte. Si este empuja todavía al bloque, el reposo requiere que su fuerza $kx$ no exceda el máximo estático disponible.

**SOLUCIÓN 8.17.**
El peso colgante es $20\,\text{N}$ y el rozamiento estático máximo es $0{,}50(30) = 15\,\text{N}$, de modo que el sistema comienza a deslizar al liberarse. La masa colgante pierde $2(10)(2) = 40\,\text{J}$ de potencial. Sobre el bloque, $N = 30\,\text{N}$, $f_k = 6\,\text{N}$ y el trabajo resistente es $-12\,\text{J}$. El vínculo da igual rapidez, por lo que $\frac{1}{2}(3+2)v^2 = 28\,\text{J}$. Así $v^2 = 56/5\,\text{m}^2/\text{s}^2$ y $v \simeq 3{,}35\,\text{m/s}$. Los trabajos de tensión se cancelan al sumar porque tensión y recorrido tienen módulos comunes y sentidos de aporte opuestos.

**SOLUCIÓN 8.18.**
La energía útil es $mgh = 40(10)(5) = 2000\,\text{J}$. Su potencia media es $250\,\text{W}$. El rendimiento 0,8 exige energía de entrada $2000/0{,}8 = 2500\,\text{J}$ y potencia media de entrada $312{,}5\,\text{W}$. Los $500\,\text{J}$ restantes pertenecen a otras transferencias o cambios internos dentro del balance global del proceso.

**SOLUCIÓN 8.19.**
La aceleración es $6/3 = 2\,\text{m/s}^2$. Al final $v = 8\,\text{m/s}$, por lo que la potencia final es $6(8) = 48\,\text{W}$. El avance $\frac{1}{2}(2)(4^2) = 16\,\text{m}$ da trabajo $96\,\text{J}$ y potencia media $24\,\text{W}$. También $\Delta K = \frac{1}{2}(3)(8^2) = 96\,\text{J}$ confirma el trabajo neto.

**SOLUCIÓN 8.20.**
La energía inicial es $\frac{1}{2}(2)(4^2) = 16\,\text{J}$ y la aportada $20(3) = 60\,\text{J}$. Así $K_f = 76\,\text{J}$ y $v_f = \sqrt{76}\,\text{m/s} = 2\sqrt{19}\,\text{m/s} \simeq 8{,}72\,\text{m/s}$. Con fuerza paralela, $F_f = \mathcal{P}/v_f = 10/\sqrt{19}\,\text{N} \simeq 2{,}29\,\text{N}$. El tiempo especificado permite integrar la potencia directamente y obtener el trabajo con la aceleración variable del movimiento.

**SOLUCIÓN 8.21.**
El tiempo es $1/3\,\text{h} = 1200\,\text{s}$. La energía recibida vale $(1{,}5\,\text{kW})(1/3\,\text{h}) = 0{,}5\,\text{kWh}$, o $(1500\,\text{W})(1200\,\text{s}) = 1{,}8 \times 10^6\,\text{J}$. Multiplicar potencia por tiempo produce energía. La unidad kWh ya contiene ese producto.

**SOLUCIÓN 8.22.**
En SI, los puntos con $K = 0$ satisfacen $4x - x^2 = 2$, es decir $x = 2 \pm \sqrt{2}\,\text{m}$. El primero desde $x = 0$ es $2 - \sqrt{2}\,\text{m} \simeq 0{,}586\,\text{m}$. Entre las dos raíces $U > 2\,\text{J}$ y la energía cinética sería negativa. Por tanto la partícula retorna y no alcanza la región al otro lado de la barrera. En el primer punto la fuerza es $F_x = -4 + 2(2 - \sqrt{2}) = -2\sqrt{2}\,\text{N}$, dirigida hacia atrás y no nula.

**SOLUCIÓN 8.23.**
La normal es 20 N y la fricción sobre la caja 5 N hacia la derecha. Su trabajo es $+5(1{,}8) = +9$ J, exactamente el aumento de energía cinética $\frac{1}{2}(2)(3^2) = 9$ J. La reacción sobre la cinta apunta a la izquierda mientras esta recorre 3,6 m a la derecha: su trabajo es $-18$ J. La suma de trabajos de contacto es $-9$ J. Corresponde a energía mecánica convertida en formas internas por el deslizamiento relativo de 1,8 m en este modelo. El motor que mantiene constante la velocidad de la cinta debe compensar la extracción de 18 J: 9 J llegan a la caja como energía cinética y 9 J al aumento interno total, despreciando otras pérdidas.

**SOLUCIÓN 8.24.**
En el suelo, $a = (6-2)/2 = 2\,\text{m/s}^2$ y $F = 4$ N. El avance es $\Delta x = [(2+6)/2](2) = 8$ m y $W = 32$ J, igual a $\frac{1}{2}(2)(6^2 - 2^2)$. En la referencia que avanza a 2 m/s, las velocidades son 0 y 4 m/s y el desplazamiento $8 - 2(2) = 4$ m. La misma fuerza hace $W' = 16$ J, igual a $\frac{1}{2}(2)(4^2 - 0^2)$. El teorema vale en ambas referencias inerciales; los valores de trabajo y energía cinética dependen de ellas.

## Diagnóstico de salida

Una caja de 2 kg llega con rapidez 4 m/s al comienzo de un tramo horizontal rugoso de 2 m, con $\mu_k = 0{,}2$. Después entra en una rampa lisa ascendente. Encuentra la energía cinética al final del tramo rugoso, la altura máxima en la rampa y el trabajo de la fricción. Explica si la energía mecánica se conserva en todo el trayecto y si la respuesta determina cuánto tarda en llegar al punto más alto.

**Contraste después del intento.** La energía inicial es 16 J. La normal es 20 N y la fricción 4 N, cuyo trabajo es $-8$ J. Quedan 8 J de energía cinética al llegar a la rampa. En ella se conserva $K + U_g$ y $mgh = 8$ J, así que $h = 0{,}40$ m. La energía mecánica disminuyó en el primer tramo y permaneció constante en la rampa. El tiempo requiere información adicional, como la geometría de la rampa y el análisis del movimiento. Para revisar la suma de trabajos vuelve a la sección 8.2; para evitar contar dos veces la gravedad, a la sección 8.7.

## Lecturas de apoyo

H. D. Young y R. A. Freedman, *Física universitaria*, volumen 1, serie Sears–Zemansky, 12.ª edición, Pearson Educación, 2009: capítulos 6 y 7, trabajo, energía cinética, potencia y energía potencial.

R. A. Serway y C. Vuille, *Fundamentos de física*, volumen 1, 9.ª edición, Cengage Learning, 2012: capítulo 5, energía y sistemas. Los enunciados, desarrollos y figuras de este capítulo tienen formulación original.

# CAPÍTULO 9

# CANTIDAD DE MOVIMIENTO, IMPULSO Y COLISIONES


9.1 Cantidad de movimiento y energía cinética . . . . . 175
9.2 El impulso acumula la fuerza en el tiempo . . . . . 175
9.3 Elegir el sistema y comprobar el impulso externo . . . . . 177
9.4 Choques en los que los cuerpos quedan unidos . . . . . 178
9.5 Colisiones elásticas en una dimensión . . . . . 179
9.6 Qué información falta en un choque general . . . . . 181
9.7 Separar etapas y reconocer la energía interna . . . . . 182
9.8 Conservar momento por componentes . . . . . 184
9.9 El centro de masa describe el movimiento del conjunto . . . 185
Ejercicios para reconstruir y transferir 188
Soluciones completas de los ejercicios 191
Diagnóstico de salida . . . . . 194
Lecturas de apoyo . . . . . 194


En una colisión breve, las fuerzas de contacto pueden cambiar mucho y resultar difíciles de medir instante a instante. Aun así, las velocidades anteriores y posteriores suelen guardar relaciones sencillas. Para descubrirlas conviene estudiar juntos los cuerpos que interactúan y seguir la cantidad de movimiento que intercambian.

El impulso enlaza las fuerzas con esos cambios. La energía cinética aporta otra información, pero su conservación exige condiciones adicionales: dos carros que quedan unidos pueden conservar su momento total y perder parte de su energía cinética. Al estudiar ambas magnitudes podremos distinguir qué conocemos de un choque, qué falta medir y cómo se mueve el conjunto aunque sus partes se separen.

## 9.1 Cantidad de movimiento y energía cinética

Para una partícula de masa constante $m > 0$ y velocidad $\vec{v}$ definimos su *cantidad de movimiento*, o *momento lineal*, por $\vec{p} = m\vec{v}$. La introdujimos al final del capítulo 6; su carácter vectorial será decisivo al sumar movimientos. En SI se mide en $\mathrm{kg\,m/s}$, equivalente a $\mathrm{N\,s}$. Su dirección coincide con la velocidad; cada componente puede tener signo positivo, negativo o ser cero.

La energía cinética $K = \frac{1}{2}mv^2$ es escalar. Si una partícula invierte su velocidad conservando la rapidez, su momento cambia de signo mientras su energía cinética permanece igual. Para una masa dada, ambas magnitudes se relacionan por $K = |\vec{p}|^2/(2m)$; con igual energía cinética, el módulo del momento depende de la masa.

**PROBLEMA RESUELTO 9.1 · La misma energía con distintos momentos**

A, de $2\,\mathrm{kg}$, avanza a $3\,\mathrm{m/s}$ y B, de $8\,\mathrm{kg}$, a $1{,}5\,\mathrm{m/s}$, ambos hacia la derecha. Compara sus energías cinéticas y momentos. Considera además dos carros de $2\,\mathrm{kg}$ que avanzan a $+3$ y $-3\,\mathrm{m/s}$.

*Resolución.* Para A, $K_A = 9\,\mathrm{J}$ y $p_A = 6\,\mathrm{kg\,m/s}$; para B, $K_B = 9\,\mathrm{J}$ y $p_B = 12\,\mathrm{kg\,m/s}$. La masa mayor puede tener la misma energía a menor rapidez y, sin embargo, mayor momento. En el segundo sistema, los momentos son $+6$ y $-6\,\mathrm{kg\,m/s}$, cuya suma es cero; las energías se suman y dan $18\,\mathrm{J}$. Un sistema con momento total nulo puede contener movimiento relativo considerable.

| **Sistema o cuerpo** | $p_x$ **en** $\mathrm{kg\,m/s}$ | $K$ **en** J |
|---|---|---|
| A | +6 | 9 |
| B | +12 | 9 |
| Dos carros opuestos | 0 | 18 |

La suma de momentos respeta las direcciones. Las energías cinéticas de las partículas son escalares no negativos.

Para varios cuerpos, escribiremos $\vec{P} = \sum_i m_i\vec{v}_i$ y $K_{\mathrm{tot}} = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2$. La suma de módulos $\sum_i |\vec{p}_i|$ y el módulo de la suma $|\vec{P}|$ expresan operaciones distintas. Mantendremos la misma referencia al comparar estados y, salvo indicación contraria, tomaremos el suelo como referencia inercial aproximada. Las velocidades iniciales se denotarán con $\vec{u}$ y las finales con $\vec{v}$.

## 9.2 El impulso acumula la fuerza en el tiempo

La segunda ley para una partícula de masa constante es $d\vec{p}/dt = \vec{F}_{\mathrm{neta}}$. Integrarla durante el intervalo estudiado produce el teorema impulso–momento:

$$\vec{J}_{\mathrm{neto}} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{\mathrm{neta}}(t)\,dt = \vec{p}_f - \vec{p}_i. \tag{9.1}$$

El impulso es vectorial. Si la fuerza es constante, $\vec{J} = \vec{F}\Delta t$; para una fuerza variable podemos definir la fuerza media $\overline{\vec{F}} = \vec{J}/\Delta t$. Esa media conserva el impulso durante el intervalo; conocer el máximo y la evolución temporal de la fuerza requiere información adicional.

El trabajo acumula fuerza a lo largo del desplazamiento; el impulso la acumula en el tiempo. Una gráfica $F_x$–$t$ da la componente de impulso $J_x$ mediante su área orientada, en $\mathrm{N\,s}$. Una gráfica $F_x$–$x$ da el trabajo correspondiente, en J. Los ejes identifican qué acumulación representa cada área.

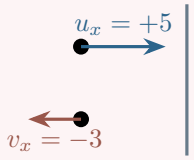
### PROBLEMA RESUELTO 9.2 · Rebotar exige contar el cambio de sentido

Una pelota de 0,20 kg llega a una pared con velocidad horizontal +5 m/s y sale con −3 m/s. El contacto dura 0,040 s y las otras fuerzas horizontales son despreciables. Encuentra el impulso y la fuerza horizontal media de la pared.

*Resolución.* Con derecha positiva,

$$J_x = m(v_x - u_x) = 0{,}20(-3-5) = -1{,}6\,\text{N s}.$$

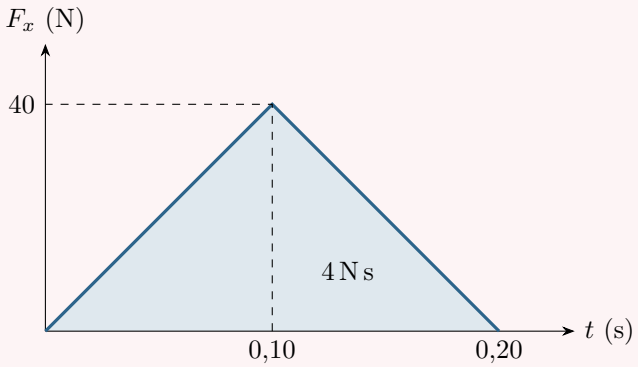
La fuerza media es $-1{,}6/0{,}040 = -40\,\text{N}$, dirigida hacia la izquierda. Restar solo las rapideces perdería el cambio de sentido y subestimaría el impulso. El dato temporal permite hallar la media; una fuerza variable puede producir ese mismo impulso y alcanzar un máximo de módulo distinto de 40 N.




Antes y después del rebote. Velocidades en m/s; la pared está a la derecha. Flechas esquemáticas.

### PROBLEMA RESUELTO 9.3 · Una fuerza triangular en el tiempo

Sobre un carro de 0,50 kg actúa una fuerza neta horizontal que aumenta linealmente de cero a 40 N en 0,10 s y disminuye linealmente a cero en los siguientes 0,10 s. La velocidad inicial es −2 m/s. Encuentra la final y la fuerza media.
*Resolución.* El área triangular es $J_x = \frac{1}{2}(0{,}20)(40) = 4\,\text{N s}$. El momento inicial es $-1\,\text{kg m/s}$ y el final $-1+4 = 3\,\text{kg m/s}$, luego $v_x = 3/0{,}50 = +6\,\text{m/s}$. La fuerza media vale $4/0{,}20 = 20\,\text{N}$, la mitad del máximo. El impulso positivo primero reduce el módulo del momento negativo y después invierte su sentido. El cambio de energía cinética es $9 - 1 = 8\,\text{J}$, una magnitud distinta del impulso calculado.

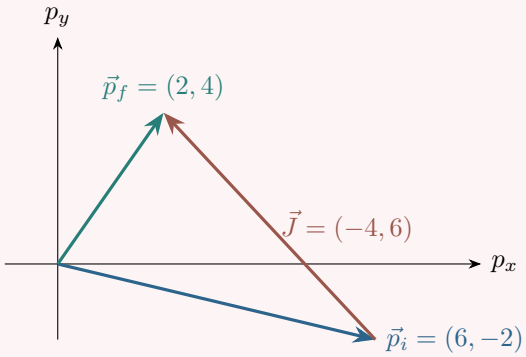



El área fuerza–tiempo es impulso. La fuerza media de 20 N conserva esa área en los 0,20 s.

**PROBLEMA RESUELTO 9.4 · Un impulso con dos componentes**

Una partícula de 2 kg tiene velocidad inicial $(3,-1)$ m/s y recibe impulso neto $(-4,6)$ N s. Encuentra su velocidad final y el cambio de energía cinética.

*Resolución.* El momento inicial es $(6,-2)$ kg m/s. Al sumar el impulso obtenemos $\vec{p}_f = (2,4)$ kg m/s y $\vec{v}_f = (1,2)$ m/s. Las energías son $K_i = \frac{1}{2}(2)(3^2+(-1)^2) = 10$ J y $K_f = \frac{1}{2}(2)(1^2+2^2) = 5$ J. Por tanto $\Delta K = -5$ J. Para masa constante, $K = |\vec{p}|^2/(2m)$: el módulo del momento disminuyó de $\sqrt{40}$ a $\sqrt{20}$ kg m/s, lo que explica la disminución de energía cinética. La dirección del impulso determina el cambio vectorial del momento.




Suma vectorial del momento inicial y el impulso. Todas las componentes se expresan en kg m/s = N s.

## 9.3 Elegir el sistema y comprobar el impulso externo

Consideremos un conjunto fijo de partículas con masas constantes. Sobre cada una actúan fuerzas externas y fuerzas que provienen de otras partículas del conjunto. Al sumar sus ecuaciones, cada par interno de acción y reacción se cancela según la tercera ley de Newton, en el modelo clásico empleado. Resulta

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{ext}}, \qquad \vec{P}_f - \vec{P}_i = \vec{J}_{\text{ext}}. \tag{9.2}$$

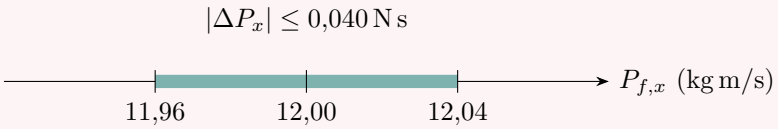
Si la resultante externa es cero durante todo el proceso, el momento total permanece constante. Si solo sabemos que su impulso integrado es cero, conocemos la igualdad entre los momentos de los extremos; pudo variar en el intervalo. También puede conservarse una componente aunque otra no lo haga.

En un choque breve suele ser útil despreciar el impulso externo frente a los cambios de momento intercambiados entre los cuerpos. Para justificar la aproximación debemos estimar el impulso externo durante el choque; una pared o un soporte pueden ejercer una fuerza enorme incluso en un intervalo breve. Debemos justificar una cota del impulso omitido o identificar una dirección en la cual sea despreciable.

**PROBLEMA RESUELTO 9.5 · Cuánto error permite omitir una fuerza**

Dos carros de masa total 5 kg interactúan durante 0,020 s en una pista horizontal. El momento horizontal inicial del conjunto es 12 kg m/s. Se sabe que la resultante horizontal externa tiene módulo no mayor que 2 N. Estima la variación máxima de momento y el error en la velocidad del centro de masa al despreciarla.

*Resolución.* Incluso si la fuerza cambia de signo, la integral satisface $|J_{\text{ext},x}| \le \int |F_{\text{ext},x}|dt \le 2(0{,}020) = 0{,}040\,\text{N s}$. Por tanto $P_{f,x}$ queda entre 11,96 y 12,04 kg m/s. La velocidad global definida por $V_x = P_x/M$, que justificaremos como velocidad del centro de masa, tiene error no mayor que $0{,}040/5 = 0{,}008\,\text{m/s}$. Respecto del momento inicial no nulo, la cota es aproximadamente 0,33 %. Con momento inicial cero debemos utilizar la cota absoluta para expresar el error.




Intervalo permitido por la cota de fuerza externa. La amplitud del cambio global se acota sin conocer las fuerzas internas.

El sistema debe incluir los cuerpos cuyos impulsos mutuos queremos cancelar. Para la pelota del problema resuelto 9.2, la pared era externa y cambió su momento. Ampliar el sistema a pelota, pared y Tierra permite incluir la reacción, pero obliga a contabilizar también sus momentos. Los cambios de momento de un cuerpo individual y los del conjunto responden a preguntas diferentes.

Las fuerzas internas pueden realizar trabajo total no nulo porque sus puntos de aplicación no recorren necesariamente el mismo desplazamiento. El balance energético debe considerar el trabajo de las fuerzas internas, incluso cuando se cancelan en la ecuación del momento. Durante un choque pueden acumular energía elástica, deformar los cuerpos o aumentar su energía interna.

## 9.4 Choques en los que los cuerpos quedan unidos

En una colisión *perfectamente inelástica*, los cuerpos quedan con una misma velocidad inmediatamente después del impacto. Si el impulso externo es despreciable, la conservación de momento en una dimensión da

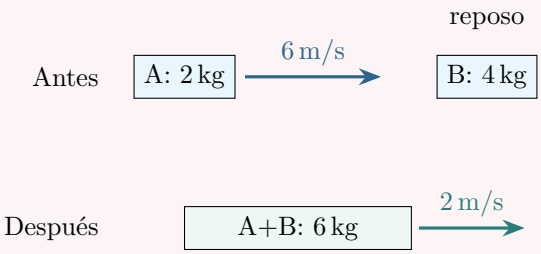
$$m_1u_1 + m_2u_2 = (m_1 + m_2)V, \qquad V = \frac{m_1u_1 + m_2u_2}{m_1 + m_2}. \tag{9.3}$$

Los signos se asignan con un mismo eje. La velocidad común puede ser positiva, negativa o nula según el momento inicial. La igualdad de velocidades finales completa la ecuación de momento y permite determinar las dos velocidades.

La energía cinética del movimiento de los cuerpos, considerados como partículas, disminuye en este modelo pasivo salvo que ya llevaran la misma velocidad. Su diferencia se transforma en otras formas de energía, sin violar la conservación de la energía total. El término perfectamente inelástico describe la velocidad común de los cuerpos después del choque.

**PROBLEMA RESUELTO 9.6 · Un carro alcanza y se une a otro**

Un carro de 2 kg avanza a 6 m/s y choca con otro de 4 kg en reposo. Quedan unidos sobre pista lisa. Encuentra velocidad común y disminución de energía cinética.
*Resolución.* El sistema de ambos carros recibe impulso horizontal externo despreciable. Su momento inicial es 12 kg m/s, de modo que $6V = 12$ en SI y $V = 2\,\text{m/s}$ hacia la derecha. Inicialmente $K_i = \frac{1}{2}(2)(6^2) = 36\,\text{J}$; finalmente $K_f = \frac{1}{2}(6)(2^2) = 12\,\text{J}$. La disminución es 24 J. Los carros siguen moviéndose y conservan 12 J de energía cinética; el resto pasó a deformaciones y formas internas bajo las hipótesis del choque.




Las masas se unen y comparten velocidad. El momento permanece en 12 kg m/s; la energía cinética pasa de 36 a 12 J.

**PROBLEMA RESUELTO 9.7 · Un encuentro frontal con movimiento final conjunto**

A, de 3 kg, avanza a +4 m/s; B, de 1 kg, se acerca a −2 m/s. Chocan y quedan unidos, con impulso externo despreciable. Encuentra velocidad final y cambio cinético.
*Resolución.* El momento total es $3(4) + 1(-2) = 10\,\text{kg m/s}$, positivo. La velocidad común es $V = 10/4 = 2{,}5\,\text{m/s}$. Las energías son $K_i = 24 + 2 = 26\,\text{J}$ y $K_f = \frac{1}{2}(4)(2{,}5)^2 = 12{,}5\,\text{J}$. Por tanto $\Delta K = -13{,}5\,\text{J}$. Los cuerpos se acercaban en sentidos opuestos y su momento total era distinto de cero; el conjunto termina por ello en movimiento.

| **Estado** | $P_x$ **en** kg m/s | $K$ **en** J |
|---|---|---|
| Inicial | 10 | 26 |
| Final | 10 | 12,5 |

El momento positivo inicial fija el sentido de la velocidad común. La diferencia cinética es 13,5 J.

## 9.5 Colisiones elásticas en una dimensión

Una colisión es *elástica* cuando la energía cinética total anterior y posterior es la misma. Si además el impulso externo es despreciable, contamos con las dos ecuaciones

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2, \qquad m_1u_1^2 + m_2u_2^2 = m_1v_1^2 + m_2v_2^2.$$

El momento puede intercambiarse durante el contacto y parte de la energía cinética puede almacenarse temporalmente como deformación elástica. La igualdad de energías se refiere a los estados elegidos antes y después, una vez terminada esa interacción transitoria.

Para el caso de intercambio no trivial, la primera ecuación da $m_1(u_1 - v_1) = m_2(v_2 - u_2)$. Factorizando las diferencias de cuadrados en la segunda y dividiendo por esa cantidad no nula, obtenemos $u_1 + v_1 = u_2 + v_2$. Equivalentemente,

$$v_2 - v_1 = u_1 - u_2. \tag{9.4}$$

La rapidez relativa de separación iguala la de acercamiento para una colisión frontal. Al resolver con el momento,

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} u_2, \tag{9.5}$$

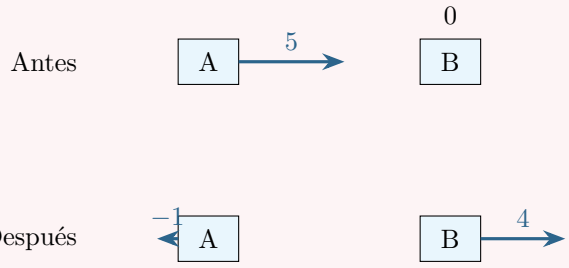
$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} u_2. \tag{9.6}$$

La solución algebraica $v_1 = u_1$, $v_2 = u_2$ también satisface momento y energía: representa ausencia de intercambio. Para describir el choque efectivo se elige la rama que separa los cuerpos después del contacto. Esta elección física importa tanto como resolver las igualdades.

**PROBLEMA RESUELTO 9.8 · Una masa ligera rebota ante otra más pesada**

Un carro de 2 kg avanza a 5 m/s hacia otro de 3 kg en reposo. La colisión es frontal y elástica, con impulso externo despreciable. Encuentra las velocidades finales.

*Resolución.* Las ecuaciones son $10 = 2v_1 + 3v_2$ y $v_2 - v_1 = 5$, en SI. De la segunda, $v_2 = v_1 + 5$; al sustituir, $10 = 5v_1 + 15$. Luego $v_1 = -1$ m/s y $v_2 = 4$ m/s. El primer carro rebota. La comprobación energética da $K_i = 25$ J y $K_f = \frac{1}{2}(2)(1)^2 + \frac{1}{2}(3)(4)^2 = 25$ J. El momento final es $-2 + 12 = 10$ kg m/s, igual al inicial.

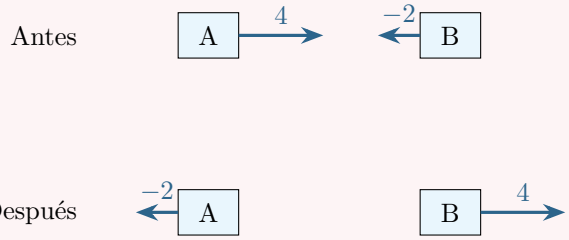



Velocidades en m/s. A rebota y B avanza; ambas conservaciones se verifican para las masas de 2 y 3 kg.

**PROBLEMA RESUELTO 9.9 · Masas iguales intercambian velocidades**

Dos carros de 1 kg se acercan con velocidades +4 y −2 m/s y chocan elásticamente en una pista lisa. Determina sus velocidades finales.

*Resolución.* Para masas iguales, las expresiones anteriores se reducen a $v_1 = u_2$ y $v_2 = u_1$. Así, $v_1 = -2\,\mathrm{m/s}$ y $v_2 = +4\,\mathrm{m/s}$. Antes y después, $P_x = 2\,\mathrm{kg\,m/s}$ y $K_{\mathrm{tot}} = 10\,\mathrm{J}$. Con el carro A inicialmente a la izquierda, la velocidad de separación $v_2 - v_1 = 6\,\mathrm{m/s}$ coincide con el acercamiento inicial $u_1 - u_2 = 6\,\mathrm{m/s}$. El intercambio describe los valores de las velocidades finales de los cuerpos, cuyas identidades se conservan.




Velocidades en m/s. Para masas iguales, el choque frontal elástico intercambia las velocidades.

## 9.6 Qué información falta en un choque general

En una colisión unidimensional sin unión final ni elasticidad declarada, la conservación de momento deja una familia de pares $(v_1, v_2)$. Se necesita una medida o un modelo de la interacción. Para A inicialmente a la izquierda de B y acercándose con $u_1 > u_2$, podemos definir el coeficiente de restitución normal

$$e = \frac{v_2 - v_1}{u_1 - u_2}. \tag{9.7}$$

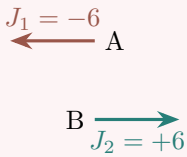
En el modelo frontal pasivo que usaremos, $0 \le e \le 1$. El valor $e = 1$ representa la rama elástica y $e = 0$ da igual velocidad inmediatamente después. Quedar permanentemente unidos requiere un mecanismo que mantenga la unión después del instante en que igualan sus velocidades. Valores $e > 1$ pueden aparecer si se libera energía interna, pero quedan fuera de este modelo pasivo.

El coeficiente relaciona las velocidades normales de acercamiento y separación y depende de los materiales y del régimen del impacto. En una colisión oblicua debemos identificar la dirección del impulso de contacto y aplicar la relación a las componentes pertinentes. Para evitar ambigüedades, los casos de restitución de esta sección serán estrictamente unidimensionales.

**PROBLEMA RESUELTO 9.10 · Un choque parcialmente inelástico**

Dos carros de 2 kg están sobre pista lisa. A llega desde la izquierda a 4 m/s y B está en reposo. El coeficiente de restitución frontal es $e = 0{,}5$. Encuentra velocidades, impulsos mutuos y disminución cinética.

*Resolución.* El momento exige $v_1 + v_2 = 4$ en SI, y la restitución $v_2 - v_1 = 0{,}5(4) = 2$. Por tanto $v_1 = 1$ y $v_2 = 3\,\text{m/s}$, ambos hacia la derecha.
A recibe $J_1 = 2(1-4) = -6\,\text{N s}$ y B $J_2 = 2(3-0) = +6\,\text{N s}$. Son opuestos. La energía pasa de 16 J a $1 + 9 = 10\,\text{J}$ y disminuye 6 J. Se conserva el momento y parte de la energía cinética se transforma durante el choque.




Impulsos mutuos en N s. Se cancelan al sumar los dos cambios de momento, aunque $K$ disminuye.

**PROBLEMA RESUELTO 9.11 · Un impulso externo durante la unión**

A, de 2 kg, se mueve a 5 m/s hacia B, de 3 kg, en reposo. Durante el proceso en que quedan unidos, un actuador externo comunica al conjunto un impulso horizontal de $-2\,\text{N s}$. Encuentra la velocidad común y el cambio de energía cinética. ¿Se puede atribuir todo ese cambio a calentamiento por el choque?
*Resolución.* El momento inicial es $10\,\text{kg m/s}$ y el final $10 - 2 = 8\,\text{kg m/s}$. La velocidad común es $V = 8/5 = 1{,}6\,\text{m/s}$. Inicialmente $K_i = 25\,\text{J}$ y finalmente $K_f = \frac{1}{2}(5)(1{,}6)^2 = 6{,}4\,\text{J}$, de modo que $\Delta K = -18{,}6\,\text{J}$. Conservar indebidamente el momento daría 2 m/s.
El impulso externo permite calcular el momento final; para hallar el trabajo del actuador necesitamos su relación con el desplazamiento. El reparto de los 18,6 J requiere conocer ese trabajo y los cambios de energía interna del choque.

| **Estado** | $P_x$ **en** kg m/s | $K$ **en** J |
|---|---|---|
| Inicial | 10 | 25 |
| Final | 8 | 6,4 |

El cambio de momento es el impulso externo $-2\,\text{N s}$. El cambio cinético es $-18{,}6\,\text{J}$; su reparto requiere un balance de trabajo e interacción.

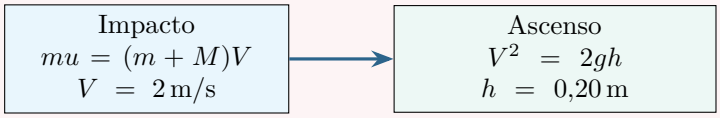
## 9.7 Separar etapas y reconocer la energía interna

Una experiencia puede contener un impacto breve seguido de un movimiento mucho más lento. Las condiciones de conservación deben examinarse en cada etapa. Durante el impacto puede ser despreciable el impulso externo horizontal y, a la vez, importante la transformación de energía cinética en energía interna. Después puede conservarse la energía mecánica mientras la gravedad cambia el momento del cuerpo.

## PROBLEMA RESUELTO 9.12 · Impacto y ascenso de un péndulo

Una pequeña pieza de 0,020 kg llega horizontalmente a 100 m/s y queda incrustada en un bloque de 0,980 kg suspendido de una cuerda ideal. El conjunto se modela como una partícula, sin rotación interna. El impacto ocurre en el punto más bajo, dura muy poco y el impulso externo horizontal es despreciable. Encuentra la altura máxima posterior, sin aire ni pérdidas durante el ascenso.

*Resolución.* Durante el impacto se conserva el momento horizontal: $0{,}020(100) = 1{,}000V$, de donde $V = 2\,\text{m/s}$. Durante la incrustación, la energía cinética pasó de 100 J a 2 J. Durante el ascenso, la tensión ideal es perpendicular a la trayectoria y realiza trabajo nulo. La energía cinética inmediatamente posterior al impacto se convierte en potencial: $\frac{1}{2}(1)V^2 = (1)gh$. Así $h = V^2/(2g) = 0{,}20\,\text{m}$. Conservar los 100 J iniciales de energía mecánica hasta la cima habría ignorado los 98 J transformados en el impacto. Durante el ascenso el momento del conjunto sí cambia por fuerzas externas, aunque su energía mecánica permanezca constante.



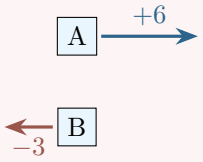

100 J → 2 J cinéticos  2 J cinéticos → 2 J potenciales

Cada etapa tiene su balance. El momento horizontal permite resolver el impacto y la energía mecánica el ascenso.

## PROBLEMA RESUELTO 9.13 · Un resorte interno separa dos carros

Un dispositivo de masa total 6 kg está en reposo sobre pista lisa. Un resorte interno libera energía y sus dos partes, de 2 y 4 kg, se separan. La primera sale a +6 m/s. Determina la velocidad de la segunda y la energía cinética adquirida, suponiendo despreciables otras pérdidas y energía elástica remanente.

*Resolución.* El momento total inicial era cero y el impulso horizontal externo es despreciable. Por tanto $2(6) + 4v_2 = 0$, luego $v_2 = -3\,\text{m/s}$. La energía cinética final es $\frac{1}{2}(2)(6^2) + \frac{1}{2}(4)(3^2) = 54\,\text{J}$. Esa energía procede de la reserva elástica inicial y queda incluida en el balance de energía total. La segunda parte recibe momento de módulo 12 kg m/s, igual al de la primera y de sentido opuesto, pero solo 18 J de energía cinética frente a los 36 J de la más ligera.




Velocidades en m/s. La parte de 4 kg sale más despacio que la de 2 kg; sus momentos son opuestos.

## 9.8 Conservar momento por componentes

En dos dimensiones, $\vec{P}_f = \vec{P}_i$ representa dos ecuaciones escalares. Debemos conservar separadamente las componentes con un mismo juego de ejes. Si dos cuerpos quedan unidos, la velocidad final se obtiene como vector:

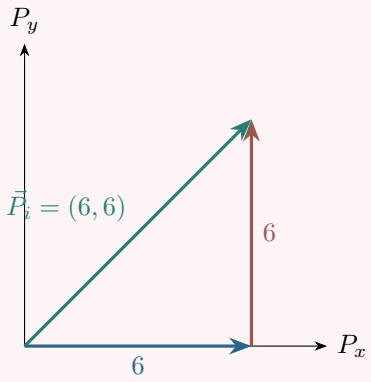
$$\vec{V} = \frac{m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2}{m_1 + m_2}.$$

Su dirección se obtiene sumando las componentes vectoriales. Para un choque sin unión, dos velocidades finales desconocidas aportan cuatro componentes; incluso añadiendo conservación de energía cinética puede faltar información, como una dirección de salida o la geometría del contacto.

**PROBLEMA RESUELTO 9.14 · Dos direcciones iniciales y una velocidad común**

A, de 2 kg, llega con velocidad $(3, 0)$ m/s y B, de 1 kg, con $(0, 6)$ m/s sobre una mesa horizontal lisa. Chocan y quedan unidos. Encuentra velocidad, rapidez final y disminución cinética.

*Resolución.* El momento inicial en el plano es $(6, 6)$ kg m/s. La masa conjunta es 3 kg y $\vec{V} = (2, 2)$ m/s. Su rapidez es $2\sqrt{2}$ m/s y su dirección forma 45° con $+x$. La energía inicial es $9 + 18 = 27$ J y la final $\frac{1}{2}(3)(2^2 + 2^2) = 12$ J. La disminución es 15 J. Sumar los módulos de los momentos habría producido 12 kg m/s en vez del vector correcto, cuyo módulo es $6\sqrt{2}$ kg m/s.




$\vec{V} = (2, 2)$ m/s
$|\vec{V}| = 2\sqrt{2}$ m/s

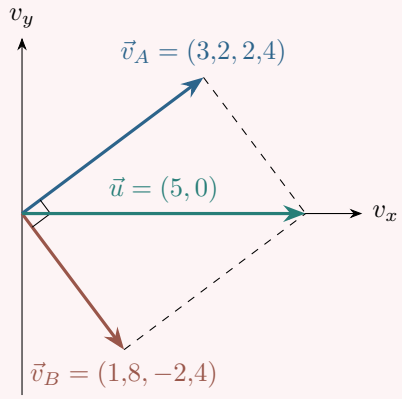
Construcción de la suma inicial: los momentos perpendiculares se suman como vectores. Componentes de $\vec{P}$ en kg m/s.

**PROBLEMA RESUELTO 9.15 · Reconstruir la otra salida de un choque elástico**

Dos discos de 1 kg interactúan sin rotación apreciable sobre una mesa lisa. A llega con $(5,0)$ m/s y B está en reposo. Después A tiene $(3{,}2, 2{,}4)$ m/s. Encuentra la velocidad de B y comprueba si los datos son compatibles con una colisión elástica.

*Resolución.* La conservación por componentes da $\vec{v}_B = (5,0) - (3{,}2, 2{,}4) = (1{,}8, -2{,}4)$ m/s. Las rapideces finales son 4 y 3 m/s. La energía inicial es 12,5 J y la final $8 + 4{,}5 = 12{,}5$ J, compatible con elasticidad en el modelo declarado.

Además, $\vec{v}_A \cdot \vec{v}_B = 3{,}2(1{,}8) + 2{,}4(-2{,}4) = 0$: las salidas son perpendiculares. Para masas iguales y una inicialmente quieta, $\vec{u} = \vec{v}_A + \vec{v}_B$; elevar su módulo al cuadrado y comparar con $u^2 = v_A^2 + v_B^2$ da $2\vec{v}_A \cdot \vec{v}_B = 0$. Si ambas velocidades finales son no nulas, la perpendicularidad es una consecuencia general de esas hipótesis. Para masas distintas o discos que adquieren rotación debemos resolver los balances correspondientes a esas nuevas condiciones.




Las velocidades finales suman la inicial porque las masas son iguales y B estaba quieto. Sus direcciones son perpendiculares. Unidades: m/s.

## 9.9 El centro de masa describe el movimiento del conjunto

Las interacciones internas pueden cambiar las velocidades individuales sin alterar el momento total. Podemos asociar a ese movimiento global un punto geométrico: el *centro de masa*. Para masas constantes $m_i$ y masa total $M = \sum_i m_i > 0$, definimos

$$\vec{R}_{\mathrm{CM}} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}. \tag{9.8}$$

Es un promedio de posiciones ponderado por las masas. Se acerca a las partículas más pesadas y puede estar situado en una región vacía del cuerpo. Su posición depende de cómo se distribuye la masa; la forma geométrica solo basta cuando se conocen además densidad y simetrías.

Al derivar la definición, como las masas son constantes, obtenemos

$$\vec{V}_{\mathrm{CM}} = \frac{\vec{P}}{M}, \qquad M\vec{A}_{\mathrm{CM}} = \sum \vec{F}_{\mathrm{ext}}. \tag{9.9}$$

Esta relación justifica describir la traslación global como si la masa estuviese concentrada en ese punto para estudiar su aceleración. Las partes pueden moverse respecto del centro de masa y almacenar energía cinética en ese movimiento relativo y en la rotación.

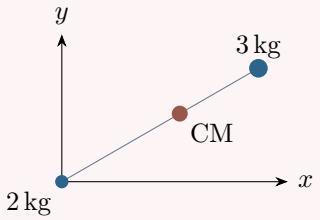
### PROBLEMA RESUELTO 9.16 · Una posición ponderada y una velocidad global

Dos partículas de masas 2 y 3 kg están en $(0,0)$ y $(4,2)$ m. Sus velocidades son $(3,0)$ y $(-1,2)$ m/s. Encuentra posición y velocidad del centro de masa.

*Resolución.* La masa total es 5 kg y

$$\vec{R}_{\mathrm{CM}} = \frac{2(0,0)+3(4,2)}{5}\,\mathrm{m} = (2{,}4,1{,}2)\,\mathrm{m}.$$

El momento es $2(3,0)+3(-1,2)=(3,6)\,\mathrm{kg\,m/s}$, de modo que $\vec{V}_{\mathrm{CM}} = (0{,}6,1{,}2)\,\mathrm{m/s}$. El centro de masa divide el segmento entre ambas posiciones y queda más cerca de la partícula de 3 kg. El punto medio geométrico sería $(2,1)$ m, distinto.




El centro de masa está al 60 % del segmento desde la masa ligera hacia la pesada. Posiciones en metros.

En una dimensión, si la resultante externa es nula y el sistema parte con momento total cero, la posición del centro de masa permanece fija. Las partes pueden desplazarse unas respecto de otras, pero sus desplazamientos ponderados deben compensarse. Esto permite resolver situaciones a partir del balance externo, aun con información incompleta sobre las fuerzas internas o la duración de cada paso.

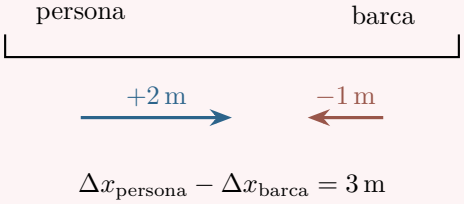
### PROBLEMA RESUELTO 9.17 · Caminar dentro de una barca libre

Una persona de 60 kg está en una barca de 120 kg inicialmente quieta. Camina 3 m hacia la derecha respecto de la barca. Durante todo el recorrido, la resultante horizontal de las fuerzas externas sobre persona y barca es despreciable; la barca se mantiene horizontal. Encuentra el desplazamiento de cada uno respecto de la orilla.

*Resolución.* El centro de masa de persona y barca conserva su posición horizontal. Sea $b$ el desplazamiento de la barca respecto de la orilla. La persona se desplaza $b+3$ m respecto de la orilla, por la suma de posiciones relativas. Entonces

$$60(b+3)+120b=0$$

en SI, de donde $b=-1$ m. La persona avanza 2 m respecto de la orilla y 3 m respecto de la barca. La compensación es $60(2)+120(-1)=0\,\mathrm{kg\,m}$. La persona utiliza energía interna y puede cambiar su manera de caminar; la relación de desplazamientos se mantiene bajo las hipótesis dadas, con independencia del balance de energía mecánica.




$$\Delta x_{\mathrm{persona}} - \Delta x_{\mathrm{barca}} = 3\,\mathrm{m}$$

Desplazamientos respecto de la orilla. La suma ponderada por las masas es cero y la diferencia da el avance relativo.

**PROBLEMA RESUELTO 9.18 · El centro de masa después de una separación en vuelo**

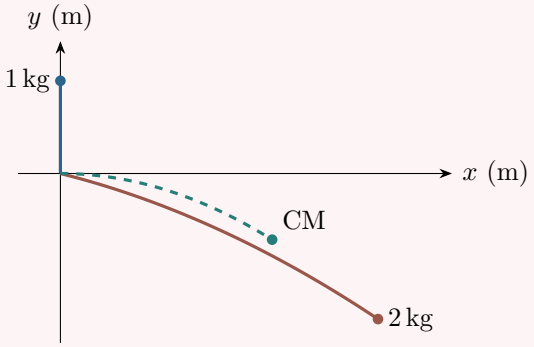
Un objeto de 3 kg se separa en dos fragmentos en el punto más alto de su vuelo, donde su velocidad es $(4, 0)$ m/s. Los fragmentos tienen 1 y 2 kg; el primero sale con $(0, 6)$ m/s. El impulso externo durante la separación es despreciable. Después solo actúa gravedad uniforme y no hay impactos durante el siguiente medio segundo. Encuentra la velocidad inicial del segundo fragmento y la posición del centro de masa a los 0,50 s respecto del punto de separación.

*Resolución.* El momento inmediatamente anterior es $(12, 0)$ kg m/s. Por conservación en la separación, $(0, 6) + 2\vec{v}_2 = (12, 0)$ en SI, luego $\vec{v}_2 = (6, -3)$ m/s. Las velocidades individuales son distintas, pero $\vec{V}_{\mathrm{CM}} = (4, 0)$ m/s en ese instante.

Después la resultante externa es el peso total y $\vec{A}_{\mathrm{CM}} = (0, -g)$. Con origen en la separación,

$$\vec{R}_{\mathrm{CM}}(t) = ((4\,\mathrm{m/s})t, -\tfrac{1}{2}gt^2).$$

A los 0,50 s está en $(2, -1{,}25)$ m. El centro de masa sigue la trayectoria que habría seguido el objeto sin separarse, mientras la gravedad sea uniforme y no aparezcan otras fuerzas. Durante ese medio segundo el impulso gravitatorio cambia el momento vertical del sistema.




Trayectorias desde la separación. Los puntos indican $t = 0{,}50$ s; el CM continúa con la trayectoria del objeto sin fragmentar.

La distinción entre traslación global y movimiento relativo también aclara la pérdida cinética en una unión. Escribamos $\vec{v}_i = \vec{V}_{\mathrm{CM}} + \vec{w}_i$. La suma $\sum_i m_i \vec{w}_i$ es cero; al expandir los cuadrados, los términos cruzados se anulan y queda

$$K_{\mathrm{tot}} = \tfrac{1}{2}MV_{\mathrm{CM}}^2 + \sum_i \tfrac{1}{2}m_i w_i^2. \tag{9.10}$$

Para masa y momento total fijados, la primera contribución está fijada y la segunda es no negativa. El mínimo cinético se alcanza cuando todas las partículas comparten la velocidad del centro de masa. Para dos partículas, la energía relativa es $\tfrac{1}{2}\mu|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|^2$, donde $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ se llama masa reducida. Una unión sin impulso externo elimina ese movimiento relativo traslacional y transforma esa energía en otras formas. En el modelo frontal con restitución, la disminución es $\tfrac{1}{2}\mu(1 - e^2)(u_1 - u_2)^2$.

Los resultados se refieren a un conjunto fijo de partículas. Un cohete que expulsa masa requiere contabilizar el momento que cruza la frontera si se elige solo el cohete como sistema. Describir ese proceso requiere incorporar el flujo de momento asociado a la masa que entra o sale.

**Registrar un choque y decidir qué se conserva**

Graba dos carros ligeros sobre una pista horizontal estable, con cámara fija y una escala en el mismo plano. Estima velocidades inmediatamente antes y después del contacto usando varios fotogramas y conserva sus incertidumbres. Calcula por separado el momento horizontal total y la energía cinética traslacional. Repite con carros que se unan y, si dispones de topes elásticos, con un rebote.
Compara las diferencias con el error de medición. La resistencia de la pista aporta impulso externo; las ruedas almacenan además energía rotacional, que debe contabilizarse por separado de la suma traslacional. Los imanes o topes pueden guardar energía durante parte de la interacción. Esas contribuciones deben considerarse antes de atribuir una discrepancia a una ley física. Elige los instantes de comparación cuando el contacto transitorio ya haya terminado y evita impactos fuertes o masas suspendidas.

## Ejercicios para reconstruir y transferir

Usa $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$. Las velocidades se refieren al suelo inercial, salvo otra indicación. Desprecia rotación y modela los cuerpos como partículas; cuando se declare aislado un choque, entiende despreciable su impulso externo en la dirección estudiada.

**EJERCICIO 9.1 · Igual energía y distinta masa**

A tiene 1 kg y velocidad $+4\,\mathrm{m/s}$; B tiene 4 kg y $+2\,\mathrm{m/s}$. Compara sus energías y momentos.

**EJERCICIO 9.2 · Momento total nulo**

Dos partículas de 3 kg tienen velocidades $+2$ y $-2\,\mathrm{m/s}$. Encuentra momento y energía cinética totales y explica por qué los resultados son compatibles.

**EJERCICIO 9.3 · Un rebote horizontal**

Una pelota de 0,10 kg llega a $+8\,\mathrm{m/s}$ y sale a $-4\,\mathrm{m/s}$ tras 0,020 s. Encuentra impulso neto y fuerza horizontal media.

**EJERCICIO 9.4 · Área fuerza–tiempo**

Una fuerza neta crece linealmente de cero a 30 N y vuelve a cero formando un triángulo de base 0,40 s. Actúa sobre una masa de 2 kg inicialmente a $-1\,\mathrm{m/s}$. Encuentra impulso, fuerza media y velocidad final.

**EJERCICIO 9.5 · Dos componentes**

Una masa de 3 kg tiene velocidad $(2, -1)\,\mathrm{m/s}$ y recibe impulso neto $(-3, 9)\,\mathrm{N\,s}$. Halla velocidad final y cambio cinético.

**EJERCICIO 9.6 · Cota del impulso omitido**

La resultante horizontal externa sobre un sistema de 4 kg tiene módulo no mayor que 3 N durante 0,010 s. Acota el cambio de momento y de velocidad del centro de masa. ¿Sirve un error porcentual referido al momento inicial si este es cero?

**EJERCICIO 9.7 · Unión tras alcanzar un carro**

Un carro de 1 kg llega a 6 m/s y se une a otro de 2 kg en reposo, en choque aislado horizontalmente. Halla velocidad final y pérdida cinética.

**EJERCICIO 9.8 · Encuentro frontal y unión**

Dos masas de 2 y 3 kg se acercan con $+5$ y $-1$ m/s y quedan unidas. Encuentra velocidad común y disminución cinética, con impulso externo despreciable.

**EJERCICIO 9.9 · Velocidad común cero**

Dos carros de 2 kg llegan uno contra otro a $+3$ y $-3$ m/s y quedan unidos sobre pista lisa. Encuentra velocidad final y energía cinética transformada.

**EJERCICIO 9.10 · Choque elástico frontal**

Un carro de 1 kg llega a 6 m/s hacia otro de 2 kg en reposo. Encuentra las velocidades posteriores a una colisión elástica aislada y verifica ambas conservaciones.

**EJERCICIO 9.11 · Dos carros iguales**

Dos carros de 2 kg llevan velocidades $+3$ y $-1$ m/s. Colisionan frontalmente de manera elástica en pista lisa. Determina velocidades, momento y energía antes y después.

**EJERCICIO 9.12 · Restitución parcial**

Dos masas de 1 kg tienen velocidades iniciales $+6$ y 0 m/s, A inicialmente a la izquierda. El choque aislado tiene $e = 0{,}5$. Halla velocidades finales, impulsos y pérdida cinética.

**EJERCICIO 9.13 · Datos necesarios para determinar un choque**

Una masa de 1 kg llega a 4 m/s hacia otra igual en reposo. El choque tiene impulso externo despreciable, pero no se conoce su restitución ni se sabe si se unen. Da dos salidas compatibles con conservación de momento y explica qué dato falta.

**EJERCICIO 9.14 · Impulso externo conocido**

Una masa de 2 kg a 4 m/s se une a otra de 2 kg en reposo. Durante el proceso el conjunto recibe impulso externo de +4 N s. Halla velocidad común y cambio cinético; explica si el impulso permite hallar el trabajo externo.

**EJERCICIO 9.15 · Dos etapas de un péndulo**

Una pieza de 0,050 kg llega horizontalmente a 40 m/s y queda incrustada en un bloque suspendido de 0,950 kg. En el punto más bajo, el impulso horizontal externo durante el choque es despreciable. Sin pérdidas durante el ascenso posterior, halla velocidad inmediata, altura máxima y disminución cinética del impacto. Usa el modelo de partícula.

**EJERCICIO 9.16 · Separación desde el reposo**

Un sistema de 8 kg inicialmente quieto se separa sobre pista lisa en partes de 2 y 6 kg. La primera sale a +9 m/s. Encuentra la velocidad de la otra y la energía cinética total adquirida.

**EJERCICIO 9.17 · Unión en un plano**

Dos masas de 1 kg llegan con velocidades $(4, 0)$ y $(0, 3)$ m/s y quedan unidas sobre mesa lisa. Halla velocidad, rapidez final y pérdida cinética.

**EJERCICIO 9.18 · Una salida conocida en dos dimensiones**

En un choque aislado de discos de 2 kg, A llega con $(5, 0)$ m/s y B está quieto. Después A tiene $(3{,}2, 2{,}4)$ m/s. Encuentra la velocidad de B y verifica si la energía cinética traslacional se conserva, sin rotación.

**EJERCICIO 9.19 · Posición y velocidad del centro de masa**

Dos masas de 1 y 3 kg están en $x = 0$ y 4 m y tienen velocidades +6 y −2 m/s. Encuentra $x_{\mathrm{CM}}$, $V_{\mathrm{CM}}$ y energía cinética total.

**EJERCICIO 9.20 · La resultante externa acelera al centro de masa**

Un sistema de masa total 5 kg tiene inicialmente momento $(5, -10)$ kg m/s. Recibe una fuerza externa neta constante $(10, 5)$ N durante 2 s. Encuentra aceleración y velocidad final del centro de masa, y su desplazamiento en ese intervalo.

**EJERCICIO 9.21 · Caminar sobre una plataforma libre**

Una persona de 40 kg sobre una plataforma de 80 kg, ambas inicialmente quietas y sin fuerza horizontal externa, camina 1,5 m respecto de la plataforma. Halla los desplazamientos de ambas respecto del suelo.

**EJERCICIO 9.22 · Separación en vuelo**

Un objeto de 4 kg se separa en partes de 1 y 3 kg cuando su velocidad es $(3, 0)$ m/s. La primera sale con $(0, 6)$ m/s. Desprecia el impulso externo durante la separación; después solo actúa gravedad uniforme. Encuentra la otra velocidad inicial y el desplazamiento del centro de masa en 0,40 s, antes de cualquier impacto.

**EJERCICIO 9.23 · Energía relativa y unión**

Dos masas de 1 y 3 kg llevan +4 y 0 m/s. Calcula la velocidad del centro de masa y separa la energía cinética inicial en global y relativa. ¿Cuánta disminuye si quedan unidas sin impulso externo?

**EJERCICIO 9.24 · Cambiar la referencia**

En el choque del ejercicio 9.7, considera otra referencia inercial que se mueve a +1 m/s respecto del suelo. Calcula momentos y energías cinéticas totales antes y después. Comprueba si cambian la conservación de momento y la pérdida cinética.

## Soluciones completas de los ejercicios

**SOLUCIÓN 9.1.**
Para A, $K_A = \frac{1}{2}(1)(4^2) = 8$ J y $p_A = 4$ kg m/s. Para B, $K_B = \frac{1}{2}(4)(2^2) = 8$ J y $p_B = 8$ kg m/s. Las energías coinciden, pero el momento de B tiene el doble de módulo. La relación $|p| = \sqrt{2mK}$ muestra la dependencia con la masa para energía fija.

**SOLUCIÓN 9.2.**
Los momentos +6 y −6 kg m/s se cancelan, de modo que $P_x = 0$. Cada partícula tiene 6 J de energía cinética y la suma es 12 J. La primera suma es vectorial; la segunda agrega escalares no negativos. Las partículas pueden moverse mientras su centro de masa permanece quieto bajo resultante externa nula.

**SOLUCIÓN 9.3.**
El cambio de momento es $J_x = 0{,}10(-4-8) = -1{,}2$ N s. La fuerza media es $-1{,}2/0{,}020 = -60$ N. Ambos apuntan hacia la izquierda. Restar $8-4$ como si fueran componentes del mismo signo omitiría la inversión de movimiento.

**SOLUCIÓN 9.4.**
El área triangular es $J_x = \frac{1}{2}(0{,}40)(30) = 6$ N s y la media $6/0{,}40 = 15$ N. El momento inicial es $2(-1) = -2$ kg m/s y el final 4 kg m/s, por lo que $v_x = +2$ m/s. La fuerza máxima es 30 N; la media se obtiene dividiendo el impulso por la duración.

**SOLUCIÓN 9.5.**
El momento inicial es $(6, -3)$ kg m/s; al sumar el impulso queda $(3, 6)$ kg m/s. Dividir por 3 kg da $\vec{v} = (1, 2)$ m/s. Como $u^2 = 2^2 + (-1)^2 = 5$ y $v^2 = 1^2 + 2^2 = 5$ en SI, ambas energías son 7,5 J y $\Delta K = 0$. Un impulso no nulo puede cambiar la dirección sin cambiar la rapidez final.

**SOLUCIÓN 9.6.**
La cota es $|\Delta P_x| \le 3(0{,}010) = 0{,}030$ N s. Por ello $|\Delta V_{\mathrm{CM},x}| \le 0{,}030/4 = 0{,}0075$ m/s. Con momento inicial cero, dividir por ese valor no define un error porcentual. Se conserva la cota absoluta, que puede compararse con otra escala física pertinente.

**SOLUCIÓN 9.7.**
El momento inicial es 6 kg m/s y la masa conjunta 3 kg. Entonces $V = 2$ m/s. Las energías son $K_i = 18$ J y $K_f = \frac{1}{2}(3)(2^2) = 6$ J, con disminución 12 J. El momento se conserva horizontalmente y parte de la energía cinética se transforma.

**SOLUCIÓN 9.8.**
Con un mismo eje, $P_i = 2(5) + 3(-1) = 7\,\mathrm{kg\,m/s}$. La velocidad común es $V = 7/5 = 1{,}4\,\mathrm{m/s}$. Inicialmente $K_i = 25 + 1{,}5 = 26{,}5\,\mathrm{J}$ y finalmente $K_f = \frac{1}{2}(5)(1{,}4)^2 = 4{,}9\,\mathrm{J}$. La disminución es $21{,}6\,\mathrm{J}$. Sumar los módulos de los momentos habría predicho otra velocidad y otro proceso.

**SOLUCIÓN 9.9.**
El momento inicial se anula, de modo que la masa conjunta de $4\,\mathrm{kg}$ tiene $V = 0$. Inicialmente había $\frac{1}{2}(2)(3^2) + \frac{1}{2}(2)(3^2) = 18\,\mathrm{J}$ y finalmente cero. Los $18\,\mathrm{J}$ pasan a formas distintas de la energía cinética traslacional. Este reposo final depende de la compensación inicial de momentos.

**SOLUCIÓN 9.10.**
Las ecuaciones son $6 = v_1 + 2v_2$ y $v_2 - v_1 = 6$, en SI. Sustituir $v_2 = v_1 + 6$ da $v_1 = -2\,\mathrm{m/s}$ y $v_2 = 4\,\mathrm{m/s}$. El momento final es $-2+8 = 6\,\mathrm{kg\,m/s}$; la energía inicial $18\,\mathrm{J}$ y la final $2+16 = 18\,\mathrm{J}$. La velocidad de separación positiva identifica la rama del choque, frente a la solución sin intercambio.

**SOLUCIÓN 9.11.**
Las masas iguales intercambian velocidades: $v_1 = -1\,\mathrm{m/s}$ y $v_2 = +3\,\mathrm{m/s}$. Antes, $P_i = 2(3) + 2(-1) = 4\,\mathrm{kg\,m/s}$ y $K_i = 9+1 = 10\,\mathrm{J}$. Después los sumandos se intercambian y dan $P_f = 4\,\mathrm{kg\,m/s}$ y $K_f = 10\,\mathrm{J}$. Se conservan las dos magnitudes bajo las hipótesis declaradas.

**SOLUCIÓN 9.12.**
La conservación da $v_1 + v_2 = 6$ y la restitución $v_2 - v_1 = 0{,}5(6) = 3$, por lo que $v_1 = 1{,}5\,\mathrm{m/s}$ y $v_2 = 4{,}5\,\mathrm{m/s}$. Los impulsos son $J_1 = 1(1{,}5 - 6) = -4{,}5\,\mathrm{N\,s}$ y $J_2 = +4{,}5\,\mathrm{N\,s}$. La energía pasa de $18\,\mathrm{J}$ a $\frac{1}{2}(1)(1{,}5^2 + 4{,}5^2) = 11{,}25\,\mathrm{J}$, con disminución $6{,}75\,\mathrm{J}$. Es consistente con $0 < e < 1$.

**SOLUCIÓN 9.13.**
La ecuación disponible es $v_1 + v_2 = 4$ en SI. La pareja $(2, 2)\,\mathrm{m/s}$ corresponde a velocidad común, con energía final $4\,\mathrm{J}$. La pareja $(0, 4)\,\mathrm{m/s}$ corresponde al choque elástico de masas iguales, con energía final $8\,\mathrm{J}$. Ambas conservan los $4\,\mathrm{kg\,m/s}$ iniciales y conducen a resultados distintos. Hace falta una condición adicional, como unión, restitución o una velocidad final medida.

**SOLUCIÓN 9.14.**
El momento inicial es $8\,\mathrm{kg\,m/s}$ y el final $8 + 4 = 12\,\mathrm{kg\,m/s}$. La velocidad común es $V = 12/4 = 3\,\mathrm{m/s}$. La energía inicial es $16\,\mathrm{J}$ y la final $\frac{1}{2}(4)(3^2) = 18\,\mathrm{J}$: aumenta $2\,\mathrm{J}$ aunque los cuerpos queden unidos. El actuador externo aporta momento y puede aportar energía; calcular su trabajo requiere conocer cómo actúa durante el desplazamiento. Con aportes externos, una velocidad final común puede acompañarse de un aumento de energía cinética.

**SOLUCIÓN 9.15.**
En el choque, $0{,}050(40) = (1)V$, luego $V = 2\,\mathrm{m/s}$. La energía cinética anterior era $40\,\mathrm{J}$ y la posterior $2\,\mathrm{J}$, por lo que disminuye $38\,\mathrm{J}$. En la etapa de ascenso se conserva la energía mecánica y $h = V^2/(2g) = 0{,}20\,\mathrm{m}$. El balance de momento se aplica al choque; la conservación de energía mecánica, al ascenso posterior a la incrustación.

**SOLUCIÓN 9.16.**
La conservación horizontal exige $2(9) + 6v_2 = 0$, así que $v_2 = -3\,\mathrm{m/s}$. La energía cinética final vale $\frac{1}{2}(2)(9^2) + \frac{1}{2}(6)(3^2) = 81 + 27 = 108\,\mathrm{J}$. Proviene de energía interna liberada por el mecanismo. El momento total puede mantenerse en cero mientras aumenta la energía cinética de las partes.

**SOLUCIÓN 9.17.**
El momento inicial es $(4, 3)\,\mathrm{kg\,m/s}$ y la masa total $2\,\mathrm{kg}$. Así $\vec{V} = (2, 1{,}5)\,\mathrm{m/s}$ y $|\vec{V}| = 2{,}5\,\mathrm{m/s}$. La energía inicial es $8 + 4{,}5 = 12{,}5\,\mathrm{J}$ y la final $\frac{1}{2}(2)(2{,}5)^2 = 6{,}25\,\mathrm{J}$. Disminuye $6{,}25\,\mathrm{J}$. La dirección final cumple $\tan\alpha = 1{,}5/2$, de donde $\alpha \simeq 36{,}9°$.

**SOLUCIÓN 9.18.**
Las masas se cancelan en cada componente: $\vec{v}_B = (5, 0) - (3{,}2, 2{,}4) = (1{,}8, -2{,}4)\,\mathrm{m/s}$. Las rapideces finales son $4$ y $3\,\mathrm{m/s}$. La energía inicial es $25\,\mathrm{J}$ y la final $\frac{1}{2}(2)(4^2 + 3^2) = 25\,\mathrm{J}$; los datos son compatibles con elasticidad traslacional. Además, el producto escalar de las dos salidas se anula, como corresponde a masas iguales, una quieta inicialmente y ambas velocidades finales no nulas.

**SOLUCIÓN 9.19.**
La posición es $x_{\mathrm{CM}} = [1(0) + 3(4)]/4 = 3\,\mathrm{m}$. El momento es $1(6) + 3(-2) = 0\,\mathrm{kg\,m/s}$, así que $V_{\mathrm{CM}} = 0$. Sin embargo $K = \frac{1}{2}(1)(6^2) + \frac{1}{2}(3)(2^2) = 24\,\mathrm{J}$. En esta referencia toda la energía cinética es relativa al centro de masa.

**SOLUCIÓN 9.20.**

La aceleración global es $\vec{A}_{\mathrm{CM}} = (10,5)/5 = (2,1)\,\mathrm{m/s^2}$. La velocidad inicial es $(5,-10)/5 = (1,-2)\,\mathrm{m/s}$ y la final $(1,-2)+(2,1)(2) = (5,0)\,\mathrm{m/s}$. Como la resultante externa es constante, el desplazamiento del centro de masa es $\vec{V}_i\Delta t + \frac{1}{2}\vec{A}\Delta t^2 = (2,-4)+(4,2) = (6,-2)\,\mathrm{m}$. El impulso $(20,10)\,\mathrm{N\,s}$ lleva el momento a $(25,0)\,\mathrm{kg\,m/s}$, lo que confirma la velocidad final.

**SOLUCIÓN 9.21.**

Si $b$ es el desplazamiento de la plataforma, la persona se desplaza $b+1{,}5\,\mathrm{m}$ respecto del suelo. El centro de masa permanece fijo y $40(b+1{,}5)+80b = 0$ en SI. Resulta $b = -0{,}50\,\mathrm{m}$ y desplazamiento de la persona $+1{,}00\,\mathrm{m}$. La razón inversa de masas se refleja en $40(1)+80(-0{,}5) = 0$.

**SOLUCIÓN 9.22.**

El momento inicial es $(12,0)\,\mathrm{kg\,m/s}$. De $(0,6)+3\vec{v}_2 = (12,0)$ resulta $\vec{v}_2 = (4,-2)\,\mathrm{m/s}$. La velocidad inicial del centro de masa sigue siendo $(3,0)\,\mathrm{m/s}$ y después su aceleración es $(0,-10)\,\mathrm{m/s^2}$. En $0{,}40\,\mathrm{s}$ su desplazamiento es $(3(0{,}4),-5(0{,}4)^2) = (1{,}2,-0{,}8)\,\mathrm{m}$. Esto vale antes de cualquier impacto y bajo gravedad uniforme.

**SOLUCIÓN 9.23.**

El momento total es $4\,\mathrm{kg\,m/s}$ y $M = 4\,\mathrm{kg}$, luego $V_{\mathrm{CM}} = 1\,\mathrm{m/s}$. La energía total inicial es $8\,\mathrm{J}$ y la global $\frac{1}{2}(4)(1^2) = 2\,\mathrm{J}$. Las velocidades relativas son $+3$ y $-1\,\mathrm{m/s}$, que aportan $\frac{1}{2}(1)(3^2)+\frac{1}{2}(3)(1^2) = 6\,\mathrm{J}$. Si quedan unidas, esa parte relativa desaparece y la disminución cinética es $6\,\mathrm{J}$, mientras permanecen los $2\,\mathrm{J}$ globales.

**SOLUCIÓN 9.24.**

En la nueva referencia las velocidades iniciales son $5$ y $-1\,\mathrm{m/s}$ y la común final $1\,\mathrm{m/s}$. El momento inicial es $1(5)+2(-1) = 3\,\mathrm{kg\,m/s}$ y el final $3(1) = 3\,\mathrm{kg\,m/s}$. La energía inicial es $\frac{1}{2}(1)(5^2)+\frac{1}{2}(2)(1^2) = 13{,}5\,\mathrm{J}$ y la final $\frac{1}{2}(3)(1^2) = 1{,}5\,\mathrm{J}$. La disminución sigue siendo $12\,\mathrm{J}$. Los valores de momento y energía cambiaron, pero la conservación y la pérdida cinética coinciden. Para masa total fija y momento conservado, los términos añadidos por un cambio galileano se cancelan al tomar la diferencia de energías.

## Diagnóstico de salida

Un carro de 2 kg llega a 4 m/s y queda unido a otro de 2 kg en reposo sobre pista lisa. El choque dura 0,10 s y su impulso horizontal externo es despreciable. Encuentra velocidad común, impulso y fuerza media que recibe el primer carro, disminución de energía cinética y velocidad del centro de masa. Explica si la fuerza neta sobre cada carro tuvo que ser cero durante el contacto.

**Contraste después del intento.** El momento total es 8 kg m/s y $V = 2$ m/s. El primer carro recibe $J_1 = 2(2-4) = -4$ N s y fuerza media $-40$ N; el segundo recibe el impulso opuesto. La energía pasa de 16 a 8 J y disminuye 8 J. La velocidad del centro de masa es 2 m/s antes y después, y permanece constante si la resultante externa es despreciable durante todo el contacto. Los carros individuales sí reciben fuerzas netas que cambian sus momentos; la suma interna se cancela para el sistema. Para revisar esa distinción vuelve a la sección 9.3; para la pérdida cinética, a la sección 9.9.

## Lecturas de apoyo

H. D. Young y R. A. Freedman, *Física universitaria*, volumen 1, serie Sears–Zemansky, 12.ª edición, Pearson Educación, 2009: capítulo 8, momento lineal, impulso, choques y centro de masa.

R. A. Serway y C. Vuille, *Fundamentos de física*, volumen 1, 9.ª edición, Cengage Learning, 2012: capítulo 6, cantidad de movimiento y colisiones. Los datos, enunciados, soluciones y figuras del presente capítulo tienen formulación original.

# CAPÍTULO 10

# EQUILIBRIO, ROTACIONES Y MOMENTO ANGULAR


10.1 El torque depende de la línea de acción . . . . . 196
10.2 Equilibrio de un cuerpo extenso 198
10.3 Describir el giro con una sola coordenada . . . . . 200
10.4 La distribución de masa y el momento de inercia . . . . . 202
10.5 Del torque a la aceleración angular . . . . . 203
10.6 Trabajo y potencia de un torque 205
10.7 Rodar combina traslación y rotación . . . . . 206
10.8 El momento angular y su ley de cambio . . . . . 208
10.9 Conservar el momento angular sin conservar la energía cinética 209
Ejercicios para reconstruir y transferir 211
Soluciones completas de los ejercicios 214
Diagnóstico de salida . . . . . 217
Lecturas de apoyo . . . . . 217


Una puerta puede permanecer cerrada bajo una fuerza considerable aplicada cerca de las bisagras y abrirse con un empuje menor cerca del borde. La fuerza y su dirección importan, pero también importa dónde actúa. Al representar todo el cuerpo mediante una partícula habíamos dejado fuera esa información.

Recuperarla nos permitirá estudiar una barra sostenida por apoyos, calcular el arranque de una rueda y comprender por qué una persona gira más deprisa al recoger los brazos. El centro de masa seguirá describiendo la traslación del conjunto; para su giro necesitaremos relacionar las fuerzas con la distribución de la masa y construir una nueva cantidad conservada.

## 10.1 El torque depende de la línea de acción

Tomemos un punto $O$ y una fuerza $\vec{F}$ aplicada en una posición $\vec{r}$ medida desde él. Su *torque*, también llamado momento de una fuerza, respecto de $O$ se define por

$$\vec{\tau}_O = \vec{r} \times \vec{F}. \tag{10.1}$$

El producto vectorial es perpendicular al plano de los dos vectores y su módulo es $rF\sin\phi$, donde $\phi$ es el ángulo entre ellos. La regla de la mano derecha fija el sentido: los dedos se curvan desde $\vec{r}$ hacia $\vec{F}$ por el ángulo menor y el pulgar indica el del torque. En un dibujo en el plano $xy$, tomaremos $+z$ hacia el lector; un torque positivo corresponde a la tendencia antihoraria.

Podemos obtener el módulo sin construir el producto vectorial. Si $d$ es la distancia perpendicular desde $O$ a la *línea de acción* de la fuerza, entonces $|\tau_O| = Fd$. Ese $d$ es el brazo de palanca. También podemos usar $rF_\perp$, con $F_\perp$ perpendicular a $\vec{r}$. La componente radial no aporta torque respecto de $O$.

En problemas planos resulta especialmente útil escribir

$$\tau_{O,z} = xF_y - yF_x. \tag{10.2}$$

El signo contiene información que se perdería al sumar módulos. El torque se mide en $\mathrm{N\,m}$; aunque esta combinación tiene las dimensiones del joule, un torque y una energía representan magnitudes diferentes. El trabajo aparecerá al considerar además un desplazamiento angular.

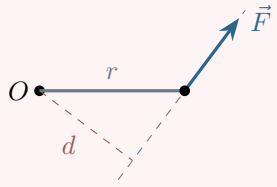
**PROBLEMA RESUELTO 10.1 · La componente que hace girar la llave**

Una llave horizontal recibe una fuerza $\vec{F} = (30, 40)\,\mathrm{N}$ en el punto $(0{,}40, 0)\,\mathrm{m}$ respecto del tornillo. Encuentra el torque y el brazo de palanca.

*Resolución.* Con antihorario positivo,

$$\tau_z = 0{,}40(40) - 0(30) = 16\,\mathrm{N\,m}.$$

La fuerza tiene módulo $50\,\mathrm{N}$, por lo que $d = 16/50 = 0{,}32\,\mathrm{m}$. La distancia al punto de aplicación es $0{,}40\,\mathrm{m}$; el brazo es menor porque la fuerza es oblicua. Los $30\,\mathrm{N}$ paralelos a la llave no producen torque sobre el tornillo.



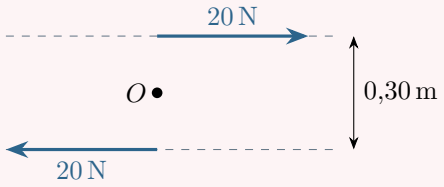

El brazo $d$ es perpendicular a la línea de acción; puede diferir de $r$. Torque positivo hacia el lector.

Un par de fuerzas puede mantener resultante nula y producir una tendencia al giro. Un *par de fuerzas* consiste en dos fuerzas opuestas, de igual módulo, cuyas líneas de acción son paralelas y distintas. La fuerza total es cero, pero sus torques se suman y dan un módulo $F\ell$, donde $\ell$ es la separación perpendicular entre las líneas.

**PROBLEMA RESUELTO 10.2 · Dos fuerzas que se cancelan y aun así hacen girar**

Sobre un cuerpo actúan $(20, 0)\,\mathrm{N}$ en $(0, 0{,}15)\,\mathrm{m}$ y $(-20, 0)\,\mathrm{N}$ en $(0, -0{,}15)\,\mathrm{m}$. Calcula la resultante y el torque total respecto del origen.

*Resolución.* La suma de fuerzas es cero. Los torques son $-0{,}15(20) = -3\,\mathrm{N\,m}$ y $-(-0{,}15)(-20) = -3\,\mathrm{N\,m}$. El total es $-6\,\mathrm{N\,m}$, horario. También se obtiene $F\ell = 20(0{,}30) = 6\,\mathrm{N\,m}$ con ese sentido. El centro de masa puede tener aceleración cero mientras cambia el movimiento de rotación.




Las fuerzas se cancelan; sus torques horarios se suman. La separación indicada es perpendicular a las líneas de acción.

Debemos mantener el mismo punto al sumar torques. Si $O'$ está en la posición $\vec{a}$ respecto de $O$, cada posición nueva es $\vec{r}_i - \vec{a}$. Por distributividad,

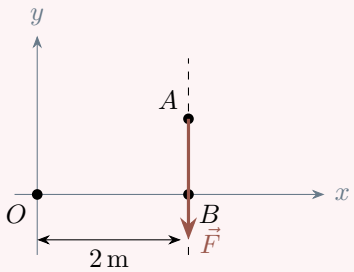
$$\sum \vec{\tau}_{O'} = \sum \vec{\tau}_O - \vec{a} \times \sum \vec{F}. \tag{10.3}$$

Así se explica por qué el torque de un par es independiente del origen. También se explica por qué, al comprobar equilibrio con fuerza neta cero, basta imponer torque neto cero respecto de un punto: será cero respecto de todos.

**PROBLEMA RESUELTO 10.3 · Cambiar el punto de referencia cambia el torque**

Una fuerza $(0, -10)\,\mathrm{N}$ actúa en $A = (2, 1)\,\mathrm{m}$. Calcula su torque respecto de $O = (0, 0)$ y de $B = (2, 0)\,\mathrm{m}$.

*Resolución.* Respecto de $O$, $\tau_{O,z} = 2(-10) - 1(0) = -20\,\mathrm{N\,m}$. Respecto de $B$, la posición relativa es $(0, 1)\,\mathrm{m}$ y el torque es cero: la línea de acción pasa por $B$. La ecuación 10.3 da el mismo resultado, pues $(\vec{a} \times \vec{F})_z = -20\,\mathrm{N\,m}$. La fuerza conserva su valor; cambió la pregunta acerca de su efecto alrededor de un punto.




La fuerza vertical tiene brazo $2\,\mathrm{m}$ respecto de $O$ y brazo cero respecto de $B$.

## 10.2 Equilibrio de un cuerpo extenso

Un cuerpo rígido ideal conserva las distancias entre sus partículas. Si está inicialmente en reposo en una referencia inercial, las condiciones del *equilibrio estático* son

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}, \qquad \sum \vec{\tau}_{O,\text{ext}} = \vec{0}. \tag{10.4}$$

La primera impide la aceleración del centro de masa; la segunda impide que comience a girar. En un problema plano proporcionan tres ecuaciones escalares: $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ y $\sum \tau_{O,z} = 0$. Elegir el punto $O$ en un apoyo suele eliminar del balance de torque sus fuerzas desconocidas. Esas fuerzas siguen perteneciendo al diagrama de cuerpo libre y a las ecuaciones de traslación.

En un campo gravitatorio uniforme, la suma de los torques de los pesos es $\sum_i \vec{r}_i \times m_i\vec{g} = \vec{R}_{\text{CM}} \times M\vec{g}$. Para calcular el efecto exterior del peso podemos representarlo aplicado en el centro de masa. Bajo esa hipótesis coincide con el centro de gravedad. Una barra uniforme tiene su centro en el punto medio; una barra cuya masa se concentra hacia un extremo puede tenerlo en otro lugar.

Las ecuaciones deben acompañarse de las condiciones del contacto. Un cable ideal tira a lo largo de su dirección; un apoyo simple transmite una normal de compresión. Una articulación ideal permite el giro libre y puede ejercer dos componentes de fuerza en el plano. La fricción estática se determina con el equilibrio y después se compara con $\mu_s N$; la igualdad solo se impone en el umbral de deslizamiento.

### PROBLEMA RESUELTO 10.4 · Repartir una carga entre dos apoyos

Una barra horizontal uniforme de 4 m pesa 80 N. Descansa en apoyos simples en sus extremos A y B y sostiene una carga de 120 N a 3 m de A. Encuentra las reacciones verticales.

*Resolución.* El peso propio actúa a 2 m de A. Tomando torques respecto de A,

$$4R_B - 80(2) - 120(3) = 0, \qquad R_B = 130\,\text{N}.$$

La suma vertical exige $R_A + R_B = 200\,\text{N}$, luego $R_A = 70\,\text{N}$. Ambas reacciones son positivas y el contacto supuesto es posible. Como control independiente, respecto de B obtenemos $-4(70) + 80(2) + 120(1) = 0$. La carga próxima a B explica que ese apoyo sostenga más peso.

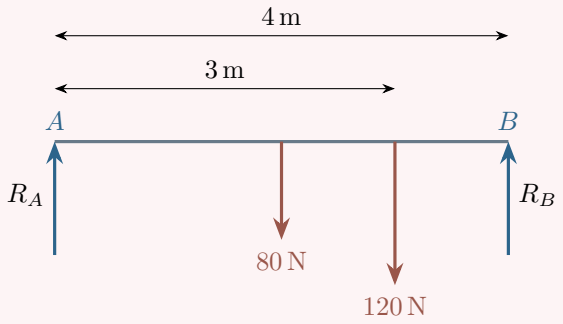



Diagrama de cuerpo libre de la barra. El peso propio actúa en el punto medio; los dos apoyos empujan hacia arriba.

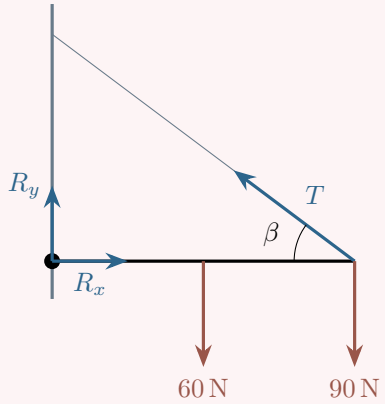
**PROBLEMA RESUELTO 10.5 · Un cable inclinado y una articulación**

Una barra horizontal uniforme de 3 m, articulada a una pared por su extremo izquierdo, pesa 60 N y sostiene 90 N en el extremo derecho. Un cable desde ese extremo hacia la pared forma un ángulo $\beta$ con la horizontal, con $\sin\beta = 3/5$ y $\cos\beta = 4/5$. Encuentra su tensión y la reacción de la articulación.

*Resolución.* La componente vertical del cable es $T\sin\beta$. Su componente horizontal pasa por la articulación y no aporta torque sobre ella. Por tanto

$$3T\frac{3}{5} - 60(1{,}5) - 90(3) = 0, \qquad T = 200\,\text{N}.$$

El cable tira hacia arriba con 120 N y hacia la izquierda con 160 N. Las ecuaciones de fuerzas dan $R_x = 160\,\text{N}$ hacia la derecha y $R_y = 60 + 90 - 120 = 30\,\text{N}$ hacia arriba. El apoyo comparte la carga y la oblicuidad del cable determina la relación entre la tensión y su componente vertical.



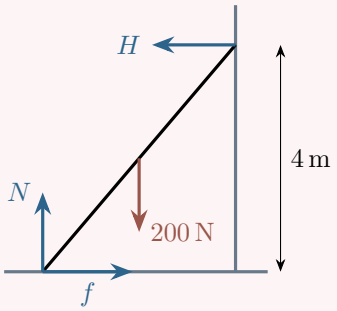

El cable tira hacia la pared. El brazo de su componente horizontal respecto de la articulación es cero.

**PROBLEMA RESUELTO 10.6 · La fricción que necesita una escalera**

Una escalera uniforme de 5 m y peso 200 N apoya su pie en un suelo rugoso y su extremo superior en una pared lisa. La separación horizontal es 3 m y la altura 4 m. Encuentra las fuerzas de contacto y el coeficiente estático mínimo para el equilibrio.
*Resolución.* Situemos el pie en $(0,0)$ y la parte superior en $(3,4)$ m. La pared empuja horizontalmente hacia la izquierda con fuerza $H$. El peso actúa en $(1{,}5,2)$ m. El balance de torque sobre el pie da $4H - 200(1{,}5) = 0$, luego $H = 75$ N. El suelo debe ejercer fricción de 75 N hacia la derecha y normal de 200 N hacia arriba. El contacto permite ese equilibrio si

$$75 \le \mu_s(200), \qquad \mu_s \ge 0{,}375.$$

Con un coeficiente mayor, la fricción sigue siendo 75 N; solo aumenta su límite disponible. No hay fricción en la pared según el enunciado.




Pared lisa: su reacción es horizontal. El suelo debe proporcionar normal y fricción; el peso actúa en el centro de la escalera.

Para estudiar la estabilidad debemos examinar la respuesta del cuerpo a un pequeño desplazamiento respecto del equilibrio. Al desplazar ligeramente un cuerpo, el torque puede devolverlo a su posición, alejarlo de ella o dejarlo en una nueva posición de equilibrio. Bajo gravedad, un mínimo local de energía potencial es una señal de estabilidad. Un bloque sobre una base finita puede volcar cuando la línea de acción de la reacción requerida alcanza el borde. Antes de ese umbral, la distribución de presión desplaza su resultante dentro de la base; superarlo exige revisar la configuración de contacto.

## 10.3 Describir el giro con una sola coordenada

En una rotación alrededor de un eje fijo, cada punto del cuerpo describe un círculo cuyo radio es su distancia perpendicular al eje. Todos comparten el mismo desplazamiento angular $\Delta\theta$. Elegido un sentido positivo de giro, el arco orientado cumple $\Delta s = r\Delta\theta$, con $\theta$ en radianes. La longitud recorrida acumula la rapidez: $\ell = r\int_{t_i}^{t_f} |\omega(t)|\,dt$. En un tramo de un solo sentido resulta $\ell = r|\Delta\theta|$; los cambios de sentido exigen sumar las longitudes de los tramos, como en r10-8. Una revolución equivale a $2\pi$ rad.

Elegimos un sentido positivo y seguimos el ángulo acumulado, sin reducirlo necesariamente al intervalo de una vuelta. Definimos

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}, \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt}. \tag{10.5}$$

La velocidad angular $\omega$ tiene signo; su módulo es la rapidez angular. En SI usamos rad/s y rad/s$^2$. El radián es una razón de longitudes y es adimensional; conservar su nombre ayuda a reconocer el significado de una tasa.

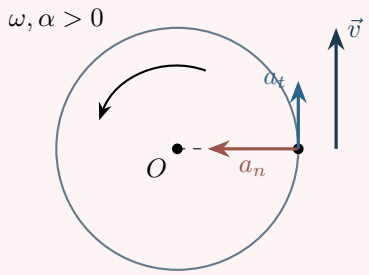
Si $\alpha$ es constante, integrar estas definiciones produce

$$\omega = \omega_0 + \alpha t, \qquad \Delta\theta = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2, \qquad \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta\theta. \tag{10.6}$$

La última igualdad pierde información del signo al elevar al cuadrado; el movimiento y sus intervalos deben decidirlo. En un punto a distancia $r$ del eje, la rapidez es $v = r|\omega|$, la aceleración tangencial tiene componente $a_t = r\alpha$ en el sentido positivo de giro y la aceleración normal, hacia el eje, tiene módulo $a_n = r\omega^2$. Las dos aceleraciones son perpendiculares. Incluso con $\alpha = 0$ puede haber aceleración normal.

**PROBLEMA RESUELTO 10.7 · Arranque con aceleración angular constante**

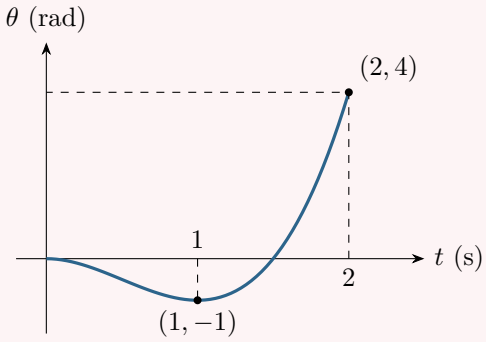
Una rueda tiene $\omega_0 = 2\,\text{rad/s}$ y $\alpha = 3\,\text{rad/s}^2$ durante $4\,\text{s}$. Calcula el ángulo barrido, la velocidad angular final y las magnitudes cinemáticas de un punto a $0{,}20\,\text{m}$ del eje al final. *Resolución.* Las ecuaciones 10.6 dan $\omega = 2 + 3(4) = 14\,\text{rad/s}$ y $\Delta\theta = 2(4) + \frac{1}{2}(3)(4^2) = 32\,\text{rad}$, unas 5,09 vueltas. El punto tiene rapidez $0{,}20(14) = 2{,}8\,\text{m/s}$, aceleración tangencial $0{,}20(3) = 0{,}60\,\text{m/s}^2$ y aceleración normal $0{,}20(14^2) = 39{,}2\,\text{m/s}^2$. Esta última cambia la dirección de su velocidad, aunque su valor sea mucho mayor que la aceleración que cambia la rapidez.




En el punto de la derecha, la velocidad y la aceleración tangencial apuntan hacia arriba; la aceleración normal apunta al eje. Flechas de magnitudes esquemáticas.

**PROBLEMA RESUELTO 10.8 · Un giro que primero retrocede**

La posición de una rueda es $\theta(t) = (2\,\text{rad/s}^3)t^3 - (3\,\text{rad/s}^2)t^2$ entre $t = 0$ y $t = 2\,\text{s}$. Encuentra $\omega$ y $\alpha$ al final, el desplazamiento angular y el ángulo total recorrido.
*Resolución.* Al derivar obtenemos $\omega = (6\,\text{rad/s}^3)t^2 - (6\,\text{rad/s}^2)t$ y $\alpha = (12\,\text{rad/s}^3)t - 6\,\text{rad/s}^2$. En 2 s valen 12 rad/s y 18 rad/s$^2$. La velocidad es negativa entre 0 y 1 s y positiva después. Las posiciones son $\theta(0) = 0$, $\theta(1\,\text{s}) = -1\,\text{rad}$ y $\theta(2\,\text{s}) = 4\,\text{rad}$. El desplazamiento es 4 rad, mientras el recorrido suma $1 + 5 = 6\,\text{rad}$. La aceleración varía con el tiempo y debemos incorporar esa dependencia al calcular el movimiento.




La pendiente cambia de negativa a positiva en $t = 1\,\text{s}$. El recorrido suma ambos tramos; el desplazamiento resta las posiciones extremas.

## 10.4 La distribución de masa y el momento de inercia

Una rueda rígida obliga a sus partículas a compartir $\omega$, pero cada una tiene rapidez $r_i|\omega|$. La energía cinética total alrededor de un eje fijo es entonces

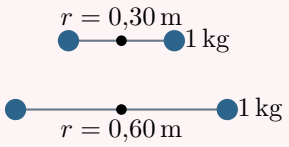
$$K = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \tfrac{1}{2} I \omega^2, \qquad I = \sum_i m_i r_i^2. \tag{10.7}$$

La cantidad $I$ es el *momento de inercia respecto de ese eje*. Se mide en kg m$^2$. En una distribución continua reemplazamos la suma por $I = \int r_\perp^2\, dm$. Alejar una masa al doble de distancia cuadruplica su contribución; predecir la respuesta al torque requiere conocer su distribución respecto del eje.

**PROBLEMA RESUELTO 10.9 · La misma masa a distintas distancias**

Dos masas puntuales de 1 kg se unen por una varilla sin masa y giran alrededor de un eje perpendicular por su punto medio. Compara las configuraciones con cada masa a 0,30 m y a 0,60 m del eje, a rapidez angular 10 rad/s.

*Resolución.* Los momentos son $I_1 = 2(1)(0{,}30^2) = 0{,}18\,\text{kg m}^2$ e $I_2 = 2(1)(0{,}60^2) = 0{,}72\,\text{kg m}^2$. Las energías a la misma rapidez son 9 J y 36 J. Con la misma masa total, la nueva distribución cuadruplicó tanto $I$ como la energía necesaria para ese giro. La comparación se refiere a dos estados con igual $\omega$; mantener ese valor durante el traslado de las masas requeriría un balance dinámico propio.




Cada punto extremo representa 1 kg. Los ejes son perpendiculares al dibujo y pasan por los puntos medios.

Para un aro delgado de radio $R$, todo $dm$ está a distancia $R$ y $I = MR^2$ en su eje central perpendicular. Para un disco uniforme de radio $R$, dividimos en anillos. Con densidad superficial $\sigma = M/(\pi R^2)$,

$$I = \int_0^R r^2 (2\pi\sigma r\, dr) = \frac{\pi\sigma R^4}{2} = \frac{1}{2}MR^2.$$

El eje central de simetría es esencial en ambas expresiones. Un disco y un aro con igual $M$ y $R$ tienen distintos momentos porque una parte de la masa del disco está más cerca del eje.

Podemos trasladar un eje sin rehacer toda la integral. Si un eje es paralelo a otro que pasa por el centro de masa, y están separados por $d$, se cumple el *teorema de ejes paralelos*:

$$I = I_{\mathrm{CM}} + Md^2. \tag{10.8}$$

Para verlo, elijamos coordenadas perpendiculares con el nuevo eje desplazado $d$ en $x$. Al expandir $\sum m_i[(x_i - d)^2 + y_i^2]$, aparece $I_{\mathrm{CM}} + Md^2 - 2d\sum m_i x_i$. La última suma es cero porque el origen estaba en el centro de masa. Para relacionar dos ejes paralelos arbitrarios debemos referir ambos al eje paralelo que pasa por el centro de masa.

**PROBLEMA RESUELTO 10.10 · Una barra que gira por el centro o por un extremo**

Una barra delgada uniforme de masa 3 kg y longitud 2 m gira alrededor de un eje perpendicular a ella. Encuentra su momento por el centro y por un extremo, y compara las energías a 3 rad/s.

*Resolución.* Con $x$ medido desde el centro y $dm = (M/L)\,dx$,

$$I_{\mathrm{CM}} = \frac{M}{L}\int_{-L/2}^{L/2} x^2\, dx = \frac{ML^2}{12} = 1\,\mathrm{kg\,m^2}.$$

El eje del extremo es paralelo y dista $L/2 = 1$ m. Así, $I_{\mathrm{ext}} = 1 + 3(1)^2 = 4\,\mathrm{kg\,m^2} = ML^2/3$. Las energías son $\frac{1}{2}(1)(3^2) = 4{,}5$ J y $\frac{1}{2}(4)(3^2) = 18$ J. La segunda es mayor porque cambiaron las distancias de las partículas al eje, aunque la barra sea la misma.

| **Eje perpendicular** | $I$ **en** $\mathrm{kg\,m^2}$ | $K$ **en** J |
|---|---|---|
| Por el centro | 1 | 4,5 |
| Por un extremo | 4 | 18 |

La barra tiene $M = 3\,\mathrm{kg}$ y $L = 2\,\mathrm{m}$. Las dos energías corresponden a $\omega = 3\,\mathrm{rad/s}$.

## 10.5 Del torque a la aceleración angular

Para una partícula que gira a distancia fija $r_i$ de un eje fijo $z$, la fuerza tangencial neta es $m_i r_i \alpha$. Su torque axial es $m_i r_i^2 \alpha$. Al sumar sobre el cuerpo, los torques de las fuerzas internas centrales se cancelan por pares y queda

$$\sum \tau_{\mathrm{ext},z} = I_z \alpha. \tag{10.9}$$

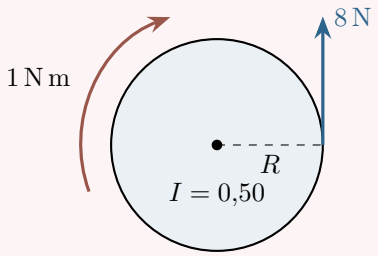
Estamos usando un cuerpo rígido de masa y distribución constantes alrededor de un eje fijo en una referencia inercial. Es una igualdad para la *componente axial*; una reacción en el eje puede ser necesaria para mantenerlo fijo, aunque no produzca torque axial. La relación vectorial $\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$ con un solo escalar $I$ requiere condiciones particulares; la rotación tridimensional general utiliza una descripción más completa de la distribución de masa. Más adelante formularemos la ley general mediante el momento angular.

El signo de $\alpha$ indica cómo cambia $\omega$. Un torque negativo frena un giro positivo, pero acelera un giro negativo. Si el rozamiento se opone al movimiento, su sentido debe reconsiderarse al detenerse el cuerpo para describir correctamente la evolución posterior.

**PROBLEMA RESUELTO 10.11 · Un disco con torque motor y resistencia**

Un disco uniforme de 4 kg y radio 0,50 m gira sobre su eje central fijo. Una fuerza tangencial de 8 N inicia un giro positivo desde el reposo. Durante ese giro actúa un torque resistente constante de 1 N m. Encuentra el estado a los 3 s.

*Resolución.* El momento de inercia es $I = \frac{1}{2}(4)(0{,}50^2) = 0{,}50\,\mathrm{kg\,m^2}$. El torque motor es $8(0{,}50) = 4\,\mathrm{N\,m}$ y el neto $4 - 1 = 3\,\mathrm{N\,m}$. Luego $\alpha = 3/0{,}50 = 6\,\mathrm{rad/s^2}$, $\omega = 18\,\mathrm{rad/s}$ y $\Delta\theta = \frac{1}{2}(6)(3^2) = 27\,\mathrm{rad}$. Su energía es $\frac{1}{2}(0{,}50)(18^2) = 81\,\mathrm{J}$. El balance de trabajo, $4(27) - 1(27) = 81\,\mathrm{J}$, comprueba el resultado y distingue los 108 J suministrados por el motor de los 27 J disipados.




El motor favorece giro antihorario y la resistencia lo frena. $I$ se expresa en $\mathrm{kg\,m^2}$.

Una polea con momento de inercia puede exigir tensiones diferentes a sus dos lados. Suponer una cuerda ligera asegura tensión uniforme en un tramo libre; las tensiones a ambos lados de una polea masiva deben satisfacer también su balance de torque. En el contacto sin deslizamiento, la fuerza tangencial distribuida entre cuerda y polea permite esa diferencia.

**PROBLEMA RESUELTO 10.12 · Una polea que también debe acelerarse**

Masas de 3 kg y 1 kg cuelgan de una cuerda ligera e inextensible que pasa por una polea disco de masa 2 kg y radio 0,20 m. El eje es fijo y sin rozamiento, y la cuerda no desliza. Usa $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$. Encuentra la aceleración y las tensiones.

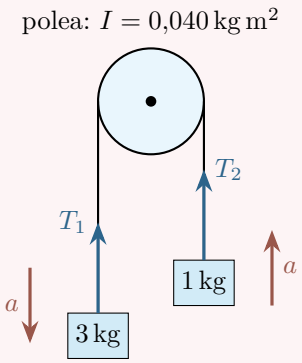
*Resolución.* La masa mayor baja con aceleración $a > 0$. Sus ecuaciones y la de la polea son

$$30 - T_1 = 3a, \qquad T_2 - 10 = a, \qquad (T_1 - T_2)R = I\alpha.$$

Aquí $I = \frac{1}{2}(2)(0{,}20^2) = 0{,}040\,\mathrm{kg\,m^2}$ y la condición de no deslizamiento da $\alpha = a/R$. Al sumar las ecuaciones de las masas y eliminar la diferencia de tensiones,

$$a = \frac{(3-1)10}{3 + 1 + I/R^2} = 4\,\mathrm{m/s^2}.$$

Por tanto $T_1 = 18\,\mathrm{N}$, $T_2 = 14\,\mathrm{N}$ y $\alpha = 20\,\mathrm{rad/s^2}$. La diferencia 4 N produce 0,80 N m, igual a $I\alpha$. La polea almacena energía cinética: ignorar su inercia habría predicho una aceleración mayor.




La cuerda no desliza: $a = R|\alpha|$. Las tensiones diferentes producen el torque que acelera la polea.

## 10.6 Trabajo y potencia de un torque

Cuando el cuerpo gira un ángulo infinitesimal $d\theta$ sobre un eje fijo, la fuerza tangencial realiza trabajo $dW = F_t r\,d\theta = \tau_z\,d\theta$. Las componentes radiales realizan trabajo nulo en esa rotación porque son perpendiculares al desplazamiento. Al sumar fuerzas externas e integrar,

$$W_{\mathrm{ext}} = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau_{\mathrm{ext},z}\,d\theta = \Delta\left(\tfrac{1}{2}I\omega^2\right), \qquad \mathcal{P} = \tau_z\omega. \tag{10.10}$$

La expresión integral en función de $\theta$ supone que podemos representar el torque a lo largo del recorrido; si el giro invierte su sentido conviene separar los tramos o integrar $\tau_z(t)\omega(t)\,dt$. La potencia es positiva cuando el torque entrega energía al giro y negativa cuando la retira. Para un cuerpo rígido con eje fijo, los apoyos ideales inmóviles realizan trabajo nulo, incluso con fuerzas grandes.

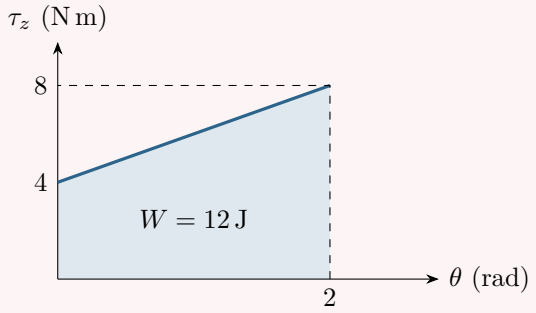
**PROBLEMA RESUELTO 10.13 · Un torque que aumenta con el ángulo**

Un rotor de momento $2\,\mathrm{kg\,m^2}$ comienza con $\omega_0 = 3\,\mathrm{rad/s}$. Durante un giro positivo de $\theta = 0$ a $2\,\mathrm{rad}$ recibe torque neto $\tau_z = 4\,\mathrm{N\,m} + (2\,\mathrm{N\,m/rad})\theta$. Encuentra la rapidez final y la potencia neta al terminar.

*Resolución.* El área bajo la gráfica torque–ángulo es

$$W = \int_0^{2\,\mathrm{rad}} \tau_z \, d\theta = 12\,\mathrm{J}.$$

La energía inicial es $\frac{1}{2}(2)(3^2) = 9\,\mathrm{J}$ y la final $21\,\mathrm{J}$. Así, $\omega_f = \sqrt{21}\,\mathrm{rad/s} \simeq 4{,}58\,\mathrm{rad/s}$, positiva porque el torque refuerza el giro inicial. El torque final es $8\,\mathrm{N\,m}$ y la potencia $8\sqrt{21}\,\mathrm{W} \simeq 36{,}7\,\mathrm{W}$. El trabajo usa toda el área; multiplicar el torque final por todo el ángulo lo sobreestimaría.




El trabajo es el área del trapecio bajo el torque. El valor final del torque sirve para la potencia instantánea final.

## 10.7 Rodar combina traslación y rotación

Una rueda que avanza también hace girar sus partículas alrededor del centro de masa. La descomposición de energía del capítulo anterior toma, para un cuerpo rígido en movimiento plano, la forma

$$K = \tfrac{1}{2} M V_{\mathrm{CM}}^2 + \tfrac{1}{2} I_{\mathrm{CM}} \omega^2. \tag{10.11}$$

El segundo término corresponde al giro respecto del centro de masa; usar en él el momento sobre el punto de contacto y conservar además el primer término contaría una parte dos veces.

Si una rueda circular de radio $R$ rueda sin deslizar sobre un suelo inmóvil, el punto que toca el suelo tiene velocidad instantánea cero. Al sumar su velocidad relativa al centro y la del centro resulta $V_{\mathrm{CM}} = R|\omega|$. El punto superior tiene rapidez $2V_{\mathrm{CM}}$ respecto del suelo. En una pendiente recta la condición también relaciona los módulos de las aceleraciones tangencial y angular: $a = R|\alpha|$. Con deslizamiento debemos calcular por separado la traslación y la rotación.

En movimiento plano podemos emplear $\sum \tau_{\mathrm{CM},z} = I_{\mathrm{CM}}\alpha$, junto con $\sum \vec{F} = M\vec{A}_{\mathrm{CM}}$, aun cuando el centro se traslade y acelere. La ley respecto del centro de masa justifica este uso aun cuando el punto de contacto cambie durante el movimiento.

**PROBLEMA RESUELTO 10.14 · La fricción necesaria para rodar cuesta abajo**

Un disco uniforme de masa 3 kg y radio 0,20 m parte del reposo en una pendiente de 30°. Supón rodadura sin deslizamiento y usa $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$. Encuentra la aceleración, la fricción y la condición sobre $\mu_s$.

*Resolución.* Tomemos positivo hacia abajo de la pendiente. El peso tangencial es $Mg\sin 30^\circ = 15\,\mathrm{N}$. Una fricción $f$ hacia arriba produce el giro necesario. Los balances son

$$15 - f = 3a, \qquad fR = I_{\mathrm{CM}}\frac{a}{R}, \qquad I_{\mathrm{CM}} = \tfrac{1}{2}MR^2.$$

De la segunda ecuación, $f = \tfrac{1}{2}Ma$; por tanto $a = 10/3\,\mathrm{m/s^2}$ y $f = 5\,\mathrm{N}$. La aceleración angular tiene módulo $a/R = 50/3\,\mathrm{rad/s^2}$. Como $N = Mg\cos 30^\circ = 15\sqrt{3}\,\mathrm{N}$, se requiere

$$\mu_s \geq \frac{f}{N} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \simeq 0{,}192.$$

Si no se cumple esta desigualdad, la solución de rodadura es incompatible con el contacto y debemos permitir deslizamiento. La fricción se obtiene del balance dinámico y después se compara con el máximo $f = \mu_s N$.

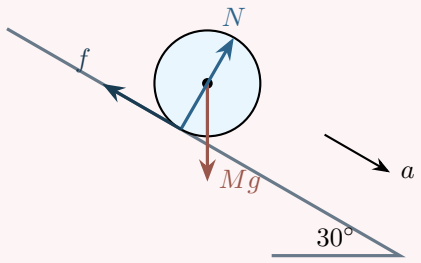



Diagrama de fuerzas y dirección de la aceleración del centro. La fricción estática apunta cuesta arriba y proporciona el torque de rodadura.

En la rodadura ideal sobre un suelo rígido e inmóvil, el trabajo de la fricción estática es cero porque la velocidad instantánea del punto de aplicación es nula. Puede disminuir la contribución traslacional respecto de una caída libre por la pendiente y aumentar la rotacional, sin disipar energía mecánica. La resistencia real a la rodadura implica deformaciones y otros efectos que este modelo excluye.

**PROBLEMA RESUELTO 10.15 · Un aro y un disco desde la misma altura**

Un aro delgado y un disco uniforme, ambos de masa 2 kg y radio 0,50 m, ruedan sin deslizar desde el reposo y descienden una altura de 0,60 m. Compara sus rapideces finales y el reparto de energía. Usa $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.
*Resolución.* Escribamos $I_{\mathrm{CM}} = kMR^2$. Al conservar energía y usar $|\omega| = V/R$ obtenemos

$$Mgh = \tfrac{1}{2}MV^2(1+k), \qquad V^2 = \frac{2gh}{1+k}.$$

Para el disco, $k = 1/2$ y $V = \sqrt{8}\,\mathrm{m/s}$; para el aro, $k = 1$ y $V = \sqrt{6}\,\mathrm{m/s}$. Ambos tienen 12 J de energía final. El disco reparte 8 J en traslación y 4 J en rotación; el aro reparte 6 J en cada una. El disco llega más rápido porque dedica una fracción menor de la misma energía al giro. La comparación supone que ambos contactos permiten rodar sin deslizar.

| **Cuerpo** | $K_{\mathrm{tras}}$ **en** J | $K_{\mathrm{rot}}$ **en** J |
|---|---|---|
| Disco | 8 | 4 |
| Aro | 6 | 6 |

Los dos cuerpos tienen 12 J de energía cinética total. El reparto depende del cociente $I_{\mathrm{CM}}/(MR^2)$.

## 10.8 El momento angular y su ley de cambio

El momento lineal nos permitió estudiar interacciones sin conocer su fuerza en cada instante. Para relacionar una interacción con el giro definimos el *momento angular* de una partícula respecto de un punto $O$:

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p}. \tag{10.12}$$

Sus unidades son $\mathrm{kg\,m^2/s}$. Depende del punto elegido y puede ser distinto de cero incluso para una trayectoria recta. En un plano, $L_{O,z} = xp_y - yp_x$; su módulo equivale al momento lineal multiplicado por la distancia perpendicular desde $O$ a la recta de movimiento.

Si $O$ está fijo en una referencia inercial y la masa es constante, derivar la definición da

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{\tau}_O.$$

El primer término se anula porque los vectores son paralelos. Para un conjunto fijo de partículas sumamos sus momentos angulares. Las fuerzas internas centrales tienen torque total cero por pares: $(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} = \vec{0}$. Bajo esas hipótesis queda la ley

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{\tau}_{O,\mathrm{ext}}, \qquad \Delta\vec{L}_O = \int_{t_i}^{t_f} \sum \vec{\tau}_{O,\mathrm{ext}}\, dt. \tag{10.13}$$

La integral es el impulso angular. Respecto del centro de masa también se cumple la ley de torque externo, aunque ese centro acelere: al usar posiciones relativas, el término adicional es proporcional a $\sum m_i \vec{r}_i' = \vec{0}$. Esta propiedad justifica el balance de rodadura que empleamos antes. Aplicarla respecto de otro punto acelerado requiere incluir el término correctivo correspondiente.

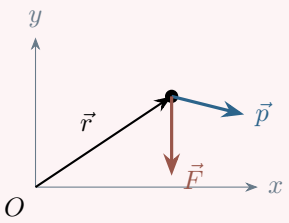
**PROBLEMA RESUELTO 10.16 · Momento angular en una trayectoria general**

Una partícula de 2 kg está en $(3, 2)$ m y tiene velocidad $(4, -1)$ m/s. En ese instante su fuerza neta es $(0, -10)$ N. Calcula su momento angular respecto del origen y su tasa de cambio.

*Resolución.* El momento lineal es $(8, -2)\,\mathrm{kg\,m/s}$. Así,

$$L_z = 3(-2) - 2(8) = -22\,\mathrm{kg\,m^2/s}.$$

El torque es $3(-10) - 2(0) = -30\,\mathrm{N\,m}$, igual a $dL_z/dt$ en ese instante. El signo indica sentido horario respecto del origen y describe una tasa instantánea; la trayectoria y su evolución posterior requieren conocer las condiciones del movimiento.




$\vec{L}$ y $\vec{r}$ apuntan hacia dentro del dibujo en este instante. Las flechas representan direcciones; sus escalas son diferentes.

En un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje fijo $z$, cada partícula aporta $L_{i,z} = m_i r_{\perp i}^2 \omega$. Por tanto

$$L_z = I_z \omega. \tag{10.14}$$

Si $I_z$ es constante, derivar recupera $\tau_{\mathrm{ext},z} = I_z \alpha$. En los discos y aros que giran alrededor de su eje central de simetría, el momento angular apunta en la dirección y sentido de la velocidad angular y cumple $\vec{L} = I_z \vec{\omega}$. Para un cuerpo rígido que gira alrededor de otro eje fijo, la igualdad axial $L_z = I_z \omega$ sigue siendo válida, mientras la dirección del vector completo depende de la distribución tridimensional de masa respecto del punto elegido.

## 10.9 Conservar el momento angular sin conservar la energía cinética

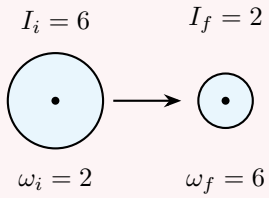
Si el torque externo neto respecto de un punto fijo es cero durante todo un intervalo, el momento angular correspondiente permanece constante. Si solo es nula una componente del torque, se conserva la componente correspondiente de $\vec{L}$. Como en el impulso lineal, una integral nula garantiza igualdad entre extremos, sin exigir constancia en todos los instantes.

El torque y la fuerza externa netos responden a preguntas distintas. Una fuerza dirigida hacia un punto fijo tiene torque cero respecto de ese punto y puede modificar el momento lineal. Un par de fuerzas, en cambio, puede modificar el momento angular sin acelerar el centro de masa. En un sistema que redistribuye su masa, la conservación de $L_z$ debe acompañarse de un balance energético que incluya el trabajo interno.

### PROBLEMA RESUELTO 10.17 · Recoger los brazos aumenta la energía del giro

Una persona sobre una plataforma giratoria reduce el momento de inercia total respecto del eje vertical de 6 a $2\,\mathrm{kg\,m^2}$. La velocidad angular inicial es $2\,\mathrm{rad/s}$ y el torque externo vertical es despreciable. En los dos estados comparados las partes giran juntas y no hay movimiento radial apreciable. Encuentra la velocidad final y el cambio cinético.

*Resolución.* Se conserva $L_z = I_i\omega_i = 12\,\mathrm{kg\,m^2/s}$. Por tanto $\omega_f = 12/2 = 6\,\mathrm{rad/s}$. Las energías son $K_i = \frac{1}{2}(6)(2^2) = 12\,\mathrm{J}$ y $K_f = \frac{1}{2}(2)(6^2) = 36\,\mathrm{J}$. El aumento de 24 J procede del trabajo interno al recoger los brazos. La expresión $K = L_z^2/(2I)$ muestra por qué disminuir $I$ aumenta $K$ cuando $L_z$ se conserva. Durante el cambio, la persona redistribuye su masa y modifica $I$.




Esquema de redistribución, sin escala geométrica. $I$ en $\mathrm{kg\,m^2}$ y $\omega$ en rad/s; $I\omega = 12$ en ambos estados.

### PROBLEMA RESUELTO 10.18 · Dos discos que terminan girando juntos

Dos discos coaxiales tienen momentos de inercia 2 y $1\,\mathrm{kg\,m^2}$. El primero gira a $6\,\mathrm{rad/s}$ y el segundo está en reposo. Al ponerlos en contacto, la fricción los lleva a una velocidad común. El torque externo respecto del eje común es despreciable. Encuentra esa velocidad y la energía cinética transformada.

*Resolución.* Incluimos ambos discos en el sistema. Los torques mutuos son internos y opuestos; los cojinetes ideales no aportan torque axial. El momento angular inicial es $2(6) = 12\,\mathrm{kg\,m^2/s}$ y el momento de inercia final total $3\,\mathrm{kg\,m^2}$. De aquí $\omega_f = 4\,\mathrm{rad/s}$. La energía inicial es $\frac{1}{2}(2)(6^2) = 36\,\mathrm{J}$ y la final $\frac{1}{2}(3)(4^2) = 24\,\mathrm{J}$. La diferencia de 12 J se transforma durante el deslizamiento relativo. El torque externo nulo conserva momento angular, mientras la fricción interna reduce energía cinética. Suponer además conservación de esta última daría una velocidad final incompatible con el balance angular.

| **Estado** | $\omega$ **en** rad/s | $K$ **en** J |
|---|---|---|
| Discos separados | 6 y 0 | 36 |
| Giro conjunto | 4 | 24 |

El momento angular total conserva $12\,\mathrm{kg\,m^2/s}$. La fricción interna transforma 12 J de energía cinética.

El capítulo anterior y este ofrecen balances complementarios: fuerza e impulso para $\vec{P}$, torque e impulso angular para $\vec{L}$, y trabajo para la energía. La elección depende de lo que sepamos del proceso y de lo que podamos justificar sobre las interacciones externas. En una captura sobre un pivote, por ejemplo, el apoyo puede cambiar el momento lineal con un impulso considerable y tener torque cero respecto del propio pivote.

### Equilibrar una regla y poner a prueba los brazos de palanca

Localiza el centro de masa de una regla equilibrándola sobre un apoyo estrecho. Añade dos grupos de monedas iguales a distancias medidas a ambos lados y predice dónde colocar uno para equilibrar el otro. Incluye el peso de la regla si el apoyo no pasa por su centro de masa. Registra las distancias desde el apoyo hasta los centros de los grupos.

**Continuación**

Repite con un grupo de masa doble y compara la distancia predicha con la observada. Estima la incertidumbre debida al ancho del apoyo, al tamaño de las monedas y a la lectura de la escala. Si el apoyo transmite un pequeño par por rozamiento, puede existir un intervalo de posiciones aparentemente equilibradas: su anchura limita la precisión del ensayo. Explica con las dos condiciones de equilibrio por qué la reacción del apoyo cambia al añadir monedas, aunque se mantenga el balance de torques.

## Ejercicios para reconstruir y transferir

Usa $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$. Los ejes y apoyos se consideran ideales cuando se indica. Toma antihorario positivo en los problemas planos y expresa los ángulos en radianes al usar las relaciones entre magnitudes lineales y angulares. Comprueba las condiciones del contacto antes de aceptar una solución de equilibrio o de rodadura.

**EJERCICIO 10.1 · Brazo de una fuerza oblicua**

Una fuerza $(12, 16)\,\mathrm{N}$ actúa en $(0{,}30, 0)\,\mathrm{m}$. Calcula su torque respecto del origen y el brazo de palanca.

**EJERCICIO 10.2 · Ambas componentes aportan**

En el punto $(2, -1)\,\mathrm{m}$ actúa una fuerza $(3, 4)\,\mathrm{N}$. Encuentra el torque respecto del origen y su sentido.

**EJERCICIO 10.3 · Un par independiente del punto**

Dos fuerzas horizontales de 15 N actúan en sentidos opuestos sobre líneas separadas 0,40 m. La superior apunta a la izquierda y la inferior a la derecha. Encuentra la resultante y el torque total. Justifica su independencia del origen.

**EJERCICIO 10.4 · Dos apoyos y una carga**

Una barra uniforme de 3 m pesa 60 N y sostiene 30 N a 2,5 m del extremo izquierdo. Encuentra las reacciones de los apoyos simples situados en ambos extremos.

**EJERCICIO 10.5 · Un cable sostiene una barra**

Una barra horizontal uniforme de 2 m y peso 40 N está articulada por la izquierda y sostiene 60 N en el extremo derecho. Un cable desde ese extremo tira hacia arriba y a la izquierda con $\sin\beta = 4/5$, $\cos\beta = 3/5$. Encuentra la tensión y la reacción de la articulación.

**EJERCICIO 10.6 · Equilibrio de una escalera**

Una escalera uniforme de 5 m y peso 160 N apoya sobre un suelo rugoso y una pared lisa. Su pie dista 3 m de la pared y alcanza 4 m de altura. Encuentra la fricción, las normales y $\mu_s$ mínimo.

**EJERCICIO 10.7 · Volcar antes de deslizar**

Un bloque uniforme pesa 100 N, tiene base de 0,60 m y altura 1 m. Una fuerza horizontal creciente hacia la derecha actúa en su borde superior. El suelo tiene $\mu_s = 0{,}50$. Encuentra los umbrales de vuelco y deslizamiento y decide cuál se alcanza primero en un aumento cuasiestático de la fuerza.

**EJERCICIO 10.8 · Invertir el sentido del giro**

Una rueda tiene $\omega_0 = -4\,\text{rad/s}$ y $\alpha = 2\,\text{rad/s}^2$ durante 3 s. Encuentra la velocidad final, el desplazamiento angular, el instante de inversión y el recorrido angular total.

**EJERCICIO 10.9 · Una ley angular variable**

Una rueda sigue $\theta(t) = (1\,\text{rad/s}^3)t^3$. Encuentra $\theta$, $\omega$ y $\alpha$ en 2 s, y la rapidez y las aceleraciones tangencial y normal de un punto a 0,50 m del eje.

**EJERCICIO 10.10 · De revoluciones a radianes**

Una rueda gira uniformemente a 120 revoluciones por minuto. Encuentra su rapidez angular, el período y la rapidez de un punto a 0,25 m del eje.

**EJERCICIO 10.11 · Cambiar la distribución**

Dos masas puntuales de 2 kg giran con una varilla sin masa alrededor de su punto medio. Calcula $I$ con cada masa a 0,50 m y a 1 m. Para cada configuración rígida, encuentra $\alpha$ bajo torque neto 2 N m.

**EJERCICIO 10.12 · Ejes paralelos en una barra**

Una barra uniforme de 6 kg y longitud 2 m gira alrededor de ejes perpendiculares a ella. Calcula sus momentos por el centro y por un extremo.

**EJERCICIO 10.13 · Un disco con resistencia**

Un disco uniforme de 2 kg y radio 0,40 m parte del reposo sobre un eje central fijo. Una fuerza tangencial de 5 N impulsa el giro y un torque resistente de 0,40 N m se opone. Encuentra $\alpha$, $\omega$, el ángulo y la energía a los 2 s.

**EJERCICIO 10.14 · Frenar hasta el reposo**

Un rotor de momento $0{,}50\,\mathrm{kg\,m^2}$ gira a $10\,\mathrm{rad/s}$. Un freno ejerce torque de módulo $2\,\mathrm{N\,m}$ opuesto al giro hasta detenerlo. Calcula el tiempo, el ángulo recorrido y el trabajo del freno. Explica por qué no debe prolongarse sin más la aceleración calculada después del reposo.

**EJERCICIO 10.15 · Una polea masiva**

Masas de 4 y $2\,\mathrm{kg}$ cuelgan de una cuerda ligera que no desliza sobre una polea disco de masa $4\,\mathrm{kg}$ y radio $0{,}50\,\mathrm{m}$, con eje fijo sin rozamiento. Encuentra $a$, ambas tensiones y $\alpha$.

**EJERCICIO 10.16 · Área bajo torque y ángulo**

Un rotor de momento $3\,\mathrm{kg\,m^2}$ tiene velocidad angular inicial $1\,\mathrm{rad/s}$. El torque neto es $\tau_z = (3\,\mathrm{N\,m/rad})\theta$ durante el giro positivo entre 0 y $2\,\mathrm{rad}$. Encuentra el trabajo, la rapidez final y la potencia final.

**EJERCICIO 10.17 · Trabajo y potencia constantes**

Un motor aplica torque de $5\,\mathrm{N\,m}$ en el sentido de un giro de rapidez angular constante $6\,\mathrm{rad/s}$. Encuentra su potencia y su trabajo durante dos revoluciones. ¿Cuál es el torque resistente total si el giro permanece uniforme?

**EJERCICIO 10.18 · Comprobar una rodadura**

Un disco uniforme de $6\,\mathrm{kg}$ y radio $0{,}30\,\mathrm{m}$ rueda sin deslizar por una pendiente de $30°$. Encuentra $a$, la fricción, el módulo de $\alpha$ y $\mu_s$ mínimo.

**EJERCICIO 10.19 · La misma energía y distinta rapidez**

Un disco uniforme y un aro delgado, ambos de $2\,\mathrm{kg}$ y el mismo radio, ruedan sin deslizar desde el reposo y bajan $0{,}90\,\mathrm{m}$ de altura. Encuentra sus rapideces y el reparto final entre energía traslacional y rotacional.

**EJERCICIO 10.20 · Velocidades en una rueda que avanza**

Una rueda de radio $0{,}40\,\mathrm{m}$ rueda sin deslizar hacia la derecha a $2\,\mathrm{m/s}$ sobre un suelo inmóvil. Encuentra su velocidad angular con antihorario positivo y las velocidades respecto del suelo de los puntos inferior y superior.

**EJERCICIO 10.21 · Momento angular de una partícula**

Una partícula de $3\,\mathrm{kg}$ está en $(2, 1)\,\mathrm{m}$ y tiene velocidad $(-1, 4)\,\mathrm{m/s}$. Su fuerza neta instantánea es $(6, 0)\,\mathrm{N}$. Encuentra $L_z$ respecto del origen y $dL_z/dt$.

**EJERCICIO 10.22 · Trabajo interno en un giro**

Una persona y su plataforma cambian su momento de inercia de 5 a $2\,\mathrm{kg\,m^2}$ con torque externo axial despreciable. La velocidad angular inicial es $4\,\mathrm{rad/s}$. En los extremos hay giro conjunto sin movimiento radial apreciable. Encuentra la velocidad final y el cambio de energía cinética.

**EJERCICIO 10.23 · Un impulso angular triangular**

Sobre un rotor de momento $0{,}50\,\mathrm{kg\,m^2}$ actúa un torque neto que sube linealmente de cero a $8\,\mathrm{N\,m}$ y baja linealmente a cero, en un intervalo total de $0{,}50\,\mathrm{s}$. La velocidad angular inicial es $-2\,\mathrm{rad/s}$. Encuentra el impulso angular, la velocidad final y el cambio cinético.

**EJERCICIO 10.24 · Una captura sobre un pivote**

Una barra uniforme de $3\,\mathrm{kg}$ y longitud $2\,\mathrm{m}$ está en reposo y gira libremente en un plano horizontal sobre un pivote fijo en un extremo. Una partícula de $0{,}10\,\mathrm{kg}$ llega al extremo libre a $20\,\mathrm{m/s}$, perpendicular a la barra, y queda adherida. El torque externo axial durante la captura es despreciable. Encuentra la rapidez angular posterior y la energía cinética transformada. Explica por qué puede usarse momento angular respecto del pivote sin imponer conservación de momento lineal.

## Soluciones completas de los ejercicios

**SOLUCIÓN 10.1.**
El torque axial es $0{,}30(16) = 4{,}8\,\mathrm{N\,m}$, antihorario. El módulo de la fuerza es $\sqrt{12^2+16^2} = 20\,\mathrm{N}$ y el brazo $d = 4{,}8/20 = 0{,}24\,\mathrm{m}$. Usar $0{,}30\,\mathrm{m}$ como brazo habría supuesto que toda la fuerza es perpendicular.

**SOLUCIÓN 10.2.**
Aplicando ambas contribuciones, $\tau_z = 2(4) - (-1)(3) = 11\,\mathrm{N\,m}$. La fuerza vertical aplicada a la derecha y la horizontal aplicada por debajo del origen favorecen ambas el sentido antihorario. Los signos de los torques se determinan a partir de las posiciones y direcciones de las fuerzas.

**SOLUCIÓN 10.3.**
La resultante es cero. Cada fuerza favorece el giro antihorario y el torque total es $15(0{,}40) = 6\,\mathrm{N\,m}$. Al cambiar el origen, la variación del torque total es $-\vec{a} \times \sum \vec{F} = \vec{0}$. Su valor permanece igual aunque cambien los torques individuales.

**SOLUCIÓN 10.4.**
Respecto del extremo izquierdo, $3R_B - 60(1{,}5) - 30(2{,}5) = 0$. Así $R_B = 55\,\mathrm{N}$. La suma vertical da $R_A = 90 - 55 = 35\,\mathrm{N}$. Las dos reacciones son positivas y son compatibles con apoyos simples que empujan hacia arriba.

**SOLUCIÓN 10.5.**
El balance sobre la articulación es $2T(4/5) - 40(1) - 60(2) = 0$, de donde $T = 100\,\mathrm{N}$. Las componentes del cable son $(-60, 80)\,\mathrm{N}$. El equilibrio de fuerzas exige reacción $(60, 20)\,\mathrm{N}$. Omitir la componente horizontal dejaría el cuerpo sin equilibrio traslacional.

**SOLUCIÓN 10.6.**
La pared ejerce $H$ horizontal. Sobre el pie, $4H - 160(1{,}5) = 0$, luego $H = 60\,\mathrm{N}$. El suelo ejerce normal $160\,\mathrm{N}$ y fricción $60\,\mathrm{N}$ hacia la pared. Se requiere $60 \le 160\mu_s$, es decir $\mu_s \ge 0{,}375$. En equilibrio la fricción tiene ese valor cualquiera que sea el margen adicional disponible.

**SOLUCIÓN 10.7.**
Mientras la base completa puede mantener contacto, la normal total es 100 N y la fricción requerida es $F$. La fuerza horizontal aplicada a 1 m del suelo desplaza la resultante normal una distancia $x = F(1)/100$ a la derecha del centro de la base. El límite geométrico es $x = 0{,}30$ m: $F_{\text{vuelco}} = 30$ N. El límite por fricción, si no volcara antes, sería $F_{\text{desliz}} = 0{,}50(100) = 50$ N. El primer umbral es el vuelco. En él todavía basta una fricción de $30\,\text{N} < 50\,\text{N}$; superarlo inicia el vuelco y exige cambiar la configuración de contacto.

**SOLUCIÓN 10.8.**
La velocidad final es $-4 + 2(3) = 2$ rad/s y el desplazamiento $-4(3) + \frac{1}{2}(2)(3^2) = -3$ rad. Se detiene e invierte en $t = 2$ s. Hasta allí gira 4 rad en sentido negativo; entre 2 y 3 s gira 1 rad positivo. El recorrido total es 5 rad, distinto del módulo del desplazamiento.

**SOLUCIÓN 10.9.**
La derivada da $\omega = (3\,\text{rad/s}^3)t^2$ y la segunda derivada $\alpha = (6\,\text{rad/s}^3)t$. En 2 s obtenemos $\theta = 8$ rad, $\omega = 12$ rad/s y $\alpha = 12\,\text{rad/s}^2$. El punto tiene $v = 0{,}50(12) = 6\,\text{m/s}$, $a_t = 6\,\text{m/s}^2$ y $a_n = 0{,}50(12^2) = 72\,\text{m/s}^2$ hacia el eje. Las aceleraciones tienen direcciones perpendiculares y deben sumarse vectorialmente.

**SOLUCIÓN 10.10.**
La frecuencia es $120/60 = 2\,\text{s}^{-1}$. Por vuelta hay $2\pi$ rad, luego $|\omega| = 4\pi$ rad/s. El período es $1/2 = 0{,}50$ s y la rapidez lineal $0{,}25(4\pi) = \pi$ m/s. El giro uniforme anula $\alpha$ y conserva la aceleración normal de ese punto.

**SOLUCIÓN 10.11.**
La suma $I = 2mr^2$ da $1\,\text{kg m}^2$ para $r = 0{,}50$ m y $4\,\text{kg m}^2$ para $r = 1$ m. En cada configuración rígida, $\alpha = \tau/I$ vale 2 y $0{,}50\,\text{rad/s}^2$, respectivamente. Al duplicar las distancias la misma acción externa produce la cuarta parte de aceleración angular.

**SOLUCIÓN 10.12.**
El eje por el centro da $I_{\text{CM}} = ML^2/12 = 6(2^2)/12 = 2\,\text{kg m}^2$. El extremo está a 1 m de ese eje y es paralelo: $I_{\text{ext}} = 2 + 6(1)^2 = 8\,\text{kg m}^2$. Coincide con $ML^2/3$.

**SOLUCIÓN 10.13.**
El disco tiene $I = \frac{1}{2}(2)(0{,}40^2) = 0{,}16\,\text{kg m}^2$. El torque neto es $5(0{,}40) - 0{,}40 = 1{,}60$ N m, luego $\alpha = 10\,\text{rad/s}^2$. En 2 s, $\omega = 20$ rad/s y $\Delta\theta = 20$ rad. La energía es $\frac{1}{2}(0{,}16)(20^2) = 32$ J, igual al trabajo neto $1{,}60(20)$.

**SOLUCIÓN 10.14.**
Con el giro inicial positivo, $\alpha = -2/0{,}50 = -4\,\text{rad/s}^2$. El primer reposo ocurre en $10/4 = 2{,}5$ s. El ángulo es $10(2{,}5) - \frac{1}{2}(4)(2{,}5^2) = 12{,}5$ rad y el trabajo $-2(12{,}5) = -25$ J, opuesto a la energía inicial $\frac{1}{2}(0{,}50)(10^2)$. La ley dada describe el frenado hasta el reposo; la evolución posterior requiere especificar cómo actúa el dispositivo una vez detenido el rotor.

**SOLUCIÓN 10.15.**
La polea tiene $I = \frac{1}{2}(4)(0{,}50^2) = 0{,}50\,\text{kg m}^2$. Con la masa de 4 kg bajando, $40 - T_1 = 4a$, $T_2 - 20 = 2a$ y $T_1 - T_2 = (I/R^2)a = 2a$. Al combinar, $a = 20/8 = 2{,}5\,\text{m/s}^2$. Así $T_1 = 30$ N, $T_2 = 25$ N y $\alpha = a/R = 5\,\text{rad/s}^2$. El torque $5(0{,}50) = 2{,}5$ N m coincide con $I\alpha$.

**SOLUCIÓN 10.16.**
El trabajo es el área triangular: $W = \frac{1}{2}(2)(6) = 6$ J. La energía inicial es $\frac{1}{2}(3)(1^2) = 1{,}5$ J y la final 7,5 J. De $\frac{1}{2}(3)\omega_f^2 = 7{,}5$ resulta $\omega_f = \sqrt{5}$ rad/s en el sentido positivo. Al final $\tau = 6$ N m y $\mathcal{P} = 6\sqrt{5}$ W. La aceleración crece durante el giro y su variación se incorpora mediante el balance de trabajo.

**SOLUCIÓN 10.17.**
La potencia del motor es $5(6) = 30$ W. Dos revoluciones equivalen a $4\pi$ rad y su trabajo es $5(4\pi) = 20\pi$ J. Para mantener $\omega$ constante con $I$ constante, el torque neto debe ser cero, por lo que el resistente total vale $-5$ N m. En ese intervalo retira la misma energía que entrega el motor.

**SOLUCIÓN 10.18.**

Con positivo cuesta abajo, $30 - f = 6a$ y $fR = (\frac{1}{2}MR^2)(a/R)$, luego $f = 3a$. Resultan $a = 10/3\,\mathrm{m/s^2}$, $f = 10\,\mathrm{N}$ hacia arriba y $|\alpha| = a/0{,}30 = 100/9\,\mathrm{rad/s^2}$. La normal es $60\cos 30^\circ = 30\sqrt{3}\,\mathrm{N}$ y la condición $f \le \mu_s N$ da $\mu_s \ge 1/(3\sqrt{3})$. La condición obtenida se mantiene para un disco ideal en la misma pendiente, cualquiera sea su masa o radio.

**SOLUCIÓN 10.19.**

Cada cuerpo pierde $Mgh = 18\,\mathrm{J}$ de energía potencial. Con $V^2 = 2gh/(1+k)$, el aro tiene $V = 3\,\mathrm{m/s}$ y el disco $V = \sqrt{12}\,\mathrm{m/s}$. El aro reparte 9 J en traslación y 9 J en giro. El disco reparte 12 J y 6 J. En el modelo de rodadura sobre superficie inmóvil se conserva la energía mecánica bajo la acción de la fricción estática.

**SOLUCIÓN 10.20.**

El giro es horario, por lo que $\omega = -V/R = -5\,\mathrm{rad/s}$. En el punto inferior, la velocidad respecto del centro es 2 m/s hacia la izquierda y cancela la del centro: la velocidad respecto del suelo es cero. En el punto superior es 2 m/s hacia la derecha y se suma: resulta 4 m/s hacia la derecha. La relación $V = R|\omega|$ utiliza específicamente la rapidez del centro.

**SOLUCIÓN 10.21.**

El momento lineal es $(-3, 12)\,\mathrm{kg\,m/s}$. Luego $L_z = 2(12) - 1(-3) = 27\,\mathrm{kg\,m^2/s}$. La fuerza produce $\tau_z = 2(0) - 1(6) = -6\,\mathrm{N\,m}$ y esa es la tasa instantánea $dL_z/dt$. El torque negativo reduce inicialmente el momento angular positivo; reconstruir la trayectoria posterior requiere información adicional sobre las fuerzas.

**SOLUCIÓN 10.22.**

Se conserva $L_z = 5(4) = 20\,\mathrm{kg\,m^2/s}$, por lo que $\omega_f = 20/2 = 10\,\mathrm{rad/s}$. Las energías son $K_i = \frac{1}{2}(5)(4^2) = 40\,\mathrm{J}$ y $K_f = \frac{1}{2}(2)(10^2) = 100\,\mathrm{J}$. El aumento de 60 J procede de reservas internas y trabajo durante la redistribución. Con torque externo nulo se conserva el momento angular; los cambios de energía cinética dependen también del trabajo interno.

**SOLUCIÓN 10.23.**

El impulso angular es $\frac{1}{2}(0{,}50)(8) = 2\,\mathrm{N\,m\,s}$. El momento inicial es $0{,}50(-2) = -1\,\mathrm{kg\,m^2/s}$ y el final $+1\,\mathrm{kg\,m^2/s}$. Así $\omega_f = +2\,\mathrm{rad/s}$. Las energías inicial y final son ambas 1 J y $\Delta K = 0$. El torque primero frena el giro negativo y luego acelera el positivo; entre esos extremos el cambio cinético resulta nulo.

**SOLUCIÓN 10.24.**

El pivote es el punto fijo elegido. Antes del impacto, la partícula aporta $L_z = mvL = 0{,}10(20)(2) = 4\,\mathrm{kg\,m^2/s}$ en el sentido de la captura. La barra aporta inicialmente cero. Después el momento de inercia es $ML^2/3 + mL^2 = 4 + 0{,}40 = 4{,}40\,\mathrm{kg\,m^2}$, de modo que $\omega_f = 4/4{,}40 = 10/11\,\mathrm{rad/s}$. La energía inicial es 20 J y la final $L_z^2/(2I) = 20/11\,\mathrm{J}$; se transforman $200/11\,\mathrm{J} \simeq 18{,}18\,\mathrm{J}$. El pivote puede transmitir impulso lineal externo y su brazo respecto de sí mismo es cero. Por eso el balance angular puede conservarse sin que se conserve el momento lineal del sistema barra–partícula.

## Diagnóstico de salida

Un disco uniforme de 2 kg y radio 0,50 m parte del reposo sobre su eje central fijo. Una fuerza tangencial constante de 4 N actúa durante 2 s y no hay resistencia al giro. Encuentra $I$, el torque, $\alpha$, $\omega_f$, el ángulo, el trabajo y el momento angular final. Explica por qué el centro puede permanecer inmóvil aunque el disco acelere angularmente.

**Contraste después del intento.** El momento es $I = 0{,}25\,\mathrm{kg\,m^2}$, el torque 2 N m y la aceleración $8\,\mathrm{rad/s^2}$. En 2 s, $\omega_f = 16\,\mathrm{rad/s}$ y $\Delta\theta = 16\,\mathrm{rad}$. El trabajo es 32 J, igual a $\frac{1}{2}I\omega_f^2$, y $L_{f,z} = I\omega_f = 4\,\mathrm{kg\,m^2/s}$, igual al impulso angular $\tau\Delta t$. Las fuerzas del eje mantienen fijo el centro y el torque axial aplicado produce la aceleración angular. Si falló el equilibrio de fuerzas y torques, vuelve a la sección 10.2; para las condiciones de la ecuación rotacional, a la sección 10.5.

## Lecturas de apoyo

H. D. Young y R. A. Freedman, *Física universitaria*, volumen 1, serie Sears–Zemansky, 12.ª edición, Pearson Educación, 2009: capítulos 9 y 10 sobre rotación de cuerpos rígidos y dinámica rotacional; secciones 11.1–11.2 sobre equilibrio y centro de gravedad.

R. A. Serway y C. Vuille, *Fundamentos de física*, volumen 1, 9.ª edición, Cengage Learning, 2012: capítulo 8, equilibrio y dinámica rotatorios. Los datos, enunciados, soluciones y ayudas de este capítulo tienen formulación original.

# CAPÍTULO 11

# GRAVITACIÓN, LEYES DE KEPLER Y ÓRBITAS


11.1 Una ley para la atracción entre masas . . . . . 219
11.2 El campo gravitatorio y la distancia al centro . . . . . 220
11.3 Energía potencial con un campo que cambia . . . . . 222
11.4 Una órbita circular es una caída continua . . . . . 224
11.5 Escape y lanzamientos que regresan . . . . . 226
11.6 Elipses y las tres leyes de Kepler 227
11.7 La ley de las áreas nace de un torque nulo . . . . . 228
11.8 La energía distingue las órbitas 229
11.9 Períodos, observaciones y masas comparables . . . . . 230
Ejercicios para reconstruir y transferir 232
Soluciones completas de los ejercicios 235
Diagnóstico de salida . . . . . 237
Lecturas de apoyo . . . . . 238


Una piedra que cae y un satélite que permanece en órbita están sometidos a la misma interacción. La diferencia se encuentra en sus posiciones y velocidades: la piedra alcanza el suelo; el satélite avanza mientras la gravedad curva su trayectoria. Comprender esa relación exige abandonar la aproximación de un campo uniforme cuando las distancias llegan a ser comparables con el tamaño del planeta.

La ley de gravitación permitirá calcular cómo cambia la fuerza con la distancia. La energía determinará hasta dónde puede llegar un lanzamiento, y el momento angular explicará cómo se reparte el movimiento en una órbita. Las leyes de Kepler reunirán esas ideas en relaciones entre formas, áreas y períodos.

## 11.1 Una ley para la atracción entre masas

Dos partículas de masas $m_1$ y $m_2$, separadas por una distancia $r$, se atraen con fuerzas de módulo

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}. \tag{11.1}$$

La constante $G$ se mide en $\mathrm{N\,m^2/kg^2}$, equivalentes a $\mathrm{m^3/(kg\,s^2)}$. Usaremos $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2/kg^2}$ cuando haga falta un valor numérico. La fuerza apunta hacia la otra masa: si $\hat{r}$ va desde la fuente $M$ hacia la partícula $m$, la fuerza sobre esta última es $\vec{F} = -GMm\hat{r}/r^2$. El signo expresa atracción.

Las dos fuerzas tienen igual módulo y sentidos opuestos, incluso si las masas son muy diferentes. Cada una actúa sobre un cuerpo distinto; las aceleraciones correspondientes dependen de sus respectivas masas. La ley describe partículas. Para un cuerpo extenso se suman las contribuciones de sus partes, con sus respectivas direcciones y distancias.

Un resultado especialmente útil de esa suma es el *teorema de las capas esféricas*: una capa de masa con simetría esférica produce, en su exterior, el mismo campo que una masa puntual situada en el centro; en su interior produce campo nulo. Al superponer capas, el campo exterior de cualquier distribución esféricamente simétrica equivale al de toda su masa concentrada en el centro. La densidad puede variar con el radio. Esta propiedad, cuya demostración requiere integrar las contribuciones angulares de la capa, será un resultado de partida del modelo. Un cuerpo de forma irregular requiere considerar cómo contribuyen sus distintas partes al campo.

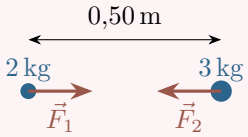
**PROBLEMA RESUELTO 11.1 · Fuerzas iguales, aceleraciones distintas**

Dos partículas de 2 y 3 kg están separadas 0,50 m. Calcula sus fuerzas de atracción y las aceleraciones que produciría esa interacción si no actuaran otras fuerzas.

*Resolución.* La ley da

$$F = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\frac{2(3)}{0{,}50^2} \simeq 1{,}60 \times 10^{-9}\,\mathrm{N}.$$

Ese módulo es el mismo en ambos cuerpos. Las aceleraciones valen $F/2 \simeq 8{,}00 \times 10^{-10}\,\mathrm{m/s^2}$ y $F/3 \simeq 5{,}34 \times 10^{-10}\,\mathrm{m/s^2}$, cada una hacia la otra partícula. La masa menor cambia su velocidad más deprisa. La pequeñez de las fuerzas explica por qué la gravitación entre objetos cotidianos suele quedar oculta por otras interacciones.



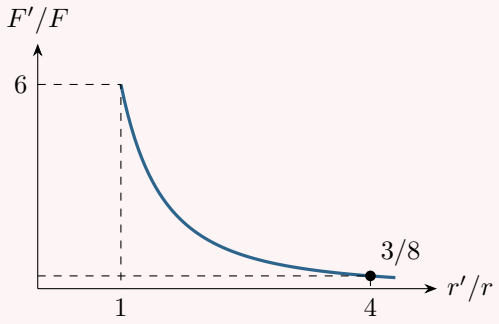

Las fuerzas tienen igual módulo y sentidos opuestos. Los tamaños de los puntos solo distinguen las partículas.

**PROBLEMA RESUELTO 11.2 · Comparar sin recalcular la constante**

Una interacción tiene fuerza de módulo $F$. Se duplica la primera masa, se triplica la segunda y la separación pasa a ser cuatro veces la inicial. ¿Qué fuerza resulta?
*Resolución.* Dividir las dos expresiones elimina $G$ y los datos originales:

$$\frac{F'}{F} = \frac{(2m_1)(3m_2)}{m_1 m_2}\left(\frac{r}{4r}\right)^2 = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}.$$

La fuerza disminuye a pesar del aumento de las masas, porque la distancia entra al cuadrado. Si solo se duplicara la separación, el resultado sería $F/4$; reducirla a la mitad daría $4F$. Estas comparaciones suponen que se mantienen los modelos de masas puntuales o de cuerpos esféricos exteriores entre sí, sin superposición de sus volúmenes.




Con las masas multiplicadas por 2 y 3, la razón de fuerzas es $6/q^2$, con $q$ la razón de separaciones. El punto marcado corresponde a cuadruplicar la separación.

## 11.2 El campo gravitatorio y la distancia al centro

El campo gravitatorio en una posición es la fuerza por unidad de masa de una partícula de prueba: $\vec{g} = \vec{F}/m$. La partícula debe ser lo bastante pequeña para no alterar apreciablemente la distribución que estudiamos. Para una fuente esférica de masa $M$, en el exterior,

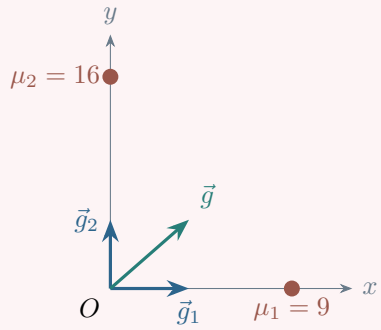
$$\vec{g} = -\frac{\mu}{r^2}\hat{r}, \qquad \mu = GM. \tag{11.2}$$

La cantidad $\mu$, llamada parámetro gravitacional, se mide en $\mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2$. La constante gravitatoria es universal; la aceleración $g$ depende de la posición y de la distribución de masa. Si existen varias fuentes, sus campos se suman vectorialmente, $\vec{g} = \sum_i \vec{g}_i$. Sumar sus módulos ignoraría posibles cancelaciones.

**PROBLEMA RESUELTO 11.3 · Dos fuentes en direcciones perpendiculares**

Dos fuentes puntuales tienen parámetros $\mu_1 = 9\,\mathrm{m^3/s^2}$ y $\mu_2 = 16\,\mathrm{m^3/s^2}$ y se encuentran en $(3, 0)\,\mathrm{m}$ y $(0, 4)\,\mathrm{m}$. Encuentra el campo en el origen y la fuerza sobre una partícula de prueba de 2 kg.

*Resolución.* La primera fuente produce $9/3^2 = 1\,\mathrm{m/s^2}$ hacia $+x$; la segunda, $16/4^2 = 1\,\mathrm{m/s^2}$ hacia $+y$. Por tanto $\vec{g} = (1, 1)\,\mathrm{m/s^2}$, cuyo módulo es $\sqrt{2}\,\mathrm{m/s^2}$. La fuerza es $\vec{F} = 2\vec{g} = (2, 2)\,\mathrm{N}$ y su módulo $2\sqrt{2}\,\mathrm{N}$. La dirección forma 45° con $+x$. Ninguna fuente ocupa el origen; el campo allí describe lo que experimentaría la partícula de prueba.




Posiciones de las fuentes en metros y parámetros en $\mathrm{m^3/s^2}$. Los campos se dibujan en el punto donde se evalúan, con una escala diferente de las posiciones.

Para una superficie esférica de radio $R$, la altura $h$ corresponde a la distancia al centro $r = R + h$; usar $r = h$ omitiría el radio del cuerpo central. Así,

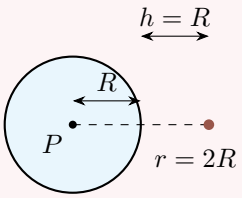
$$g(h) = \frac{\mu}{(R+h)^2} = g_0 \left(\frac{R}{R+h}\right)^2, \qquad g_0 = \frac{\mu}{R^2}. \tag{11.3}$$

El peso gravitatorio debido al planeta tiene módulo $mg(h)$, mientras la masa permanece igual. En varios ejemplos usaremos un planeta ideal P, esférico, de radio $R = 1{,}00 \times 10^7\,\mathrm{m}$ y parámetro $\mu = 4{,}00 \times 10^{14}\,\mathrm{m^3/s^2}$. Su campo superficial es $g_0 = 4{,}00\,\mathrm{m/s^2}$. Estos datos describen un planeta idealizado. Para los movimientos alrededor de P se despreciará la masa del móvil frente a la del planeta, la atmósfera, la rotación de P y las demás fuentes, salvo indicación contraria.

**PROBLEMA RESUELTO 11.4 · Subir una altura igual al radio**

Una persona de 60 kg se encuentra a altura $h = R$ sobre P. Calcula su peso gravitatorio y compáralo con el superficial.

*Resolución.* La distancia al centro es $2R$. Entonces $g = g_0/4 = 1\,\mathrm{m/s^2}$ y el peso 60 N, frente a los 240 N de la superficie. La masa sigue siendo 60 kg. Sustituir $r = h = R$ habría dejado el peso sin variación, por medir desde el lugar equivocado. La lectura de una balanza acompañante dependerá también del movimiento del soporte.




El radio se mide desde el centro. Duplicar esa distancia divide el campo exterior por cuatro.

Dentro del planeta debemos calcular el campo con la masa encerrada a cada radio, en lugar de extender $g = GM/r^2$ con la masa total. Las capas exteriores al punto dan campo total

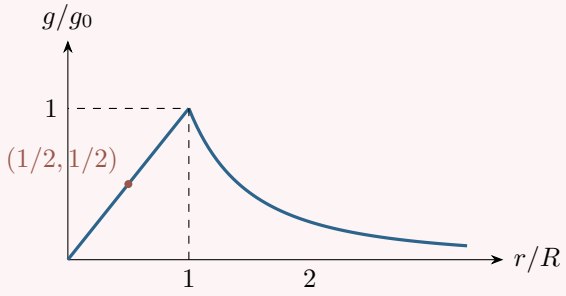
cero; las interiores equivalen a la masa $M(r)$ encerrada. Para una esfera de densidad uniforme, $M(r) = M(r/R)^3$, pues la masa es proporcional al volumen. Por tanto $g(r) = GMr/R^3 = g_0 r/R$ en el interior. Se anula en el centro y se une de forma continua al valor superficial. Una densidad no uniforme produce otra función $M(r)$.

**PROBLEMA RESUELTO 11.5 · El interior de una esfera uniforme**

Supón que P tiene densidad uniforme. Encuentra el campo a $r = R/2$ y compáralo con la sustitución incorrecta de toda la masa en $GM/r^2$.
*Resolución.* La masa encerrada es $M/8$. Su campo tiene módulo

$$g = \frac{G(M/8)}{(R/2)^2} = \frac{g_0}{2} = 2\,\mathrm{m/s^2}.$$

Apunta hacia el centro. Usar toda $M$ habría dado $4g_0 = 16\,\mathrm{m/s^2}$, ocho veces el valor correcto. Las contribuciones vectoriales de las capas exteriores se cancelan exactamente bajo la simetría esférica. El resultado depende además de la uniformidad supuesta para hallar $M(r)$.




Campo de una esfera uniforme: crece linealmente dentro y disminuye con el cuadrado del radio fuera. Ambas ramas coinciden en la superficie.

## 11.3 Energía potencial con un campo que cambia

Al desplazarse una partícula en el exterior de una fuente esférica fija, la componente radial de la fuerza es $F_r = -\mu m/r^2$. Su trabajo entre $r_1$ y $r_2$ es

$$W_g = \int_{r_1}^{r_2} -\frac{\mu m}{r^2}\,dr = \mu m\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right).$$

En un movimiento no radial, la fuerza es perpendicular a la parte tangencial del desplazamiento; la misma integral describe el trabajo. Solo dependen los radios extremos, de modo que la interacción es conservativa. Elegir $U \to 0$ cuando $r \to \infty$ conduce a

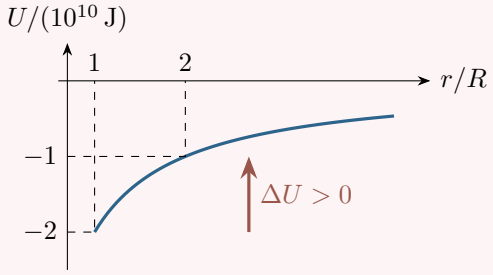
$$U(r) = -\frac{\mu m}{r}, \qquad \Delta U = \mu m\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \tag{11.4}$$

Con el origen $U(\infty) = 0$, la energía potencial es negativa y aumenta hacia cero al alejarnos. Si las energías cinéticas de los extremos son iguales, el trabajo externo necesario para separar los cuerpos desde $r$ hasta una distancia indefinidamente grande es $W_{\mathrm{ext}} = -U(r) = \mu m/r > 0$. El potencial gravitatorio $\Phi = U/m = -\mu/r$ se mide en J/kg; los potenciales de fuentes múltiples se suman como escalares. Un punto con campo nulo puede tener potencial distinto de cero.

### PROBLEMA RESUELTO 11.6 · Elevar una carga hasta dos radios

Una carga de 500 kg se eleva lentamente desde la superficie de P hasta $r = 2R$. Encuentra $U_i$, $U_f$, el trabajo gravitatorio y el trabajo externo ideal, con energías cinéticas inicial y final iguales.

*Resolución.* Las energías son $U_i = -(4{,}00 \times 10^{14})(500)/10^7 = -2{,}00 \times 10^{10}\,\mathrm{J}$ y $U_f = -1{,}00 \times 10^{10}\,\mathrm{J}$. Así, $\Delta U = +1{,}00 \times 10^{10}\,\mathrm{J}$ y $W_g = -1{,}00 \times 10^{10}\,\mathrm{J}$. Como $\Delta K = 0$, el agente externo debe aportar $W_{\mathrm{ext}} = +1{,}00 \times 10^{10}\,\mathrm{J}$. Al retirar el sostén después de una elevación lenta, la carga empieza a caer; para situarla en órbita debemos darle además la velocidad tangencial apropiada.




Al elevar la carga de $R$ a $2R$, su energía potencial pasa de $-2 \times 10^{10}$ a $-10^{10}$ J. El cero corresponde al límite de separación infinita.

La expresión $mg_0h$ reaparece como aproximación cerca de la superficie. Desde $R$ hasta $R + h$, la fórmula exacta da

$$\Delta U = \frac{\mu m h}{R(R+h)} = \frac{mg_0 h}{1 + h/R}. \tag{11.5}$$

Cuando $h/R \ll 1$, el denominador es próximo a uno. Para $h > 0$, el valor $mg_0h$ sobreestima el aumento exacto: mantiene durante toda la subida un campo igual al superficial, aunque el campo disminuye. Su error relativo respecto del valor exacto es precisamente $h/R$. Esta comparación permite decidir la calidad de la aproximación con un criterio cuantitativo.

### PROBLEMA RESUELTO 11.7 · Cuándo basta la fórmula local

Una masa de 10 kg sube $h = 1{,}00 \times 10^5$ m sobre P. Compara $mg_0h$ con el aumento exacto de energía potencial.

*Resolución.* La razón $h/R$ es 0,0100. La aproximación produce $10(4)(10^5) = 4{,}00 \times 10^6$ J. La fórmula exacta da $4{,}00 \times 10^6/1{,}01 \simeq 3{,}96 \times 10^6$ J. El error relativo de la aproximación es 1,00 %. La diferencia importa si la precisión requerida es mejor que ese porcentaje. Una altura grande en kilómetros puede seguir siendo pequeña frente al radio del planeta; la razón entre longitudes decide el régimen.

| $h/R$ | $\Delta U/(mg_0h)$ | **Error relativo de** $mg_0h$ |
|---|---|---|
| 0,01 | 1/1,01 | 1 % |
| 0,10 | 1/1,10 | 10 % |
| 1 | 1/2 | 100 % |

Para $h > 0$, el error se mide respecto del aumento exacto de energía potencial. La aproximación siempre sobreestima ese aumento.

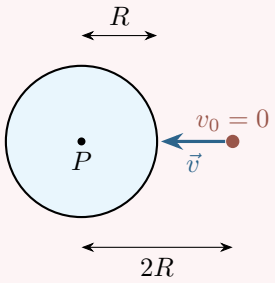
Sin otros trabajos, la energía mecánica $E = \frac{1}{2}mv^2 - \mu m/r$ permanece constante. Por unidad de masa escribiremos $\varepsilon = E/m = \frac{1}{2}v^2 - \mu/r$. La rapidez en una posición se obtiene comparando energías, aunque la trayectoria no sea recta.

**PROBLEMA RESUELTO 11.8 · Una caída desde gran altura**

Una partícula se suelta desde el reposo en $r = 2R$ respecto de P y cae radialmente. Encuentra su rapidez justo antes de alcanzar la superficie.
*Resolución.* La energía inicial por unidad de masa es $-\mu/(2R)$. En la superficie,

$$-\frac{\mu}{2R} = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{R}, \qquad v^2 = \frac{\mu}{R} = 4{,}00 \times 10^7\,\mathrm{m^2/s^2}.$$

Así, $v = 2000\sqrt{10}\,\mathrm{m/s} \simeq 6{,}32\,\mathrm{km/s}$. La masa se cancela. Tratar $g_0$ como constante a lo largo de una caída de altura $R$ habría dado $v^2 = 2g_0R$, el doble del valor correcto. La fórmula exterior deja de describir una caída libre sin contacto cuando la partícula llega al suelo.




Caída radial desde el reposo en $2R$. La energía se compara hasta el instante anterior al contacto con la superficie.

## 11.4 Una órbita circular es una caída continua

Supongamos un móvil de masa despreciable frente a P, sin propulsión ni resistencia. En una órbita circular de radio $r$, la única fuerza es gravitatoria y produce la aceleración normal necesaria. La ecuación de Newton es $\mu m/r^2 = mv_c^2/r$, de donde

$$v_c = \sqrt{\frac{\mu}{r}}, \qquad T = \frac{2\pi r}{v_c} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{\mu}}. \tag{11.6}$$

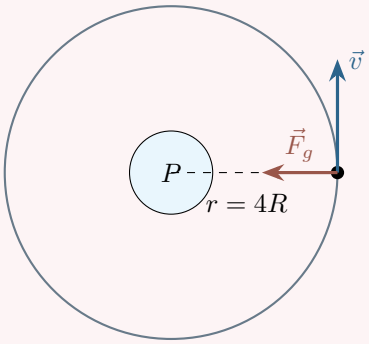
La atracción gravitatoria proporciona la fuerza centrípeta requerida por la órbita circular. Es el nombre de su función en este movimiento. Para ese radio, la velocidad debe ser tangencial y tener la rapidez indicada; una dirección diferente o una rapidez diferente producirá otra trayectoria, que puede alcanzar la superficie.

### PROBLEMA RESUELTO 11.9 · Rapidez, aceleración y período orbitales

Un satélite de 1000 kg describe una órbita circular de radio $4R$ alrededor de P. Encuentra su rapidez, aceleración, período y fuerza gravitatoria.
*Resolución.* El radio es $4{,}00 \times 10^7$ m. Entonces $v_c = \sqrt{10^7} = 1000\sqrt{10}\,\mathrm{m/s} \simeq 3{,}16\,\mathrm{km/s}$. La aceleración es $\mu/r^2 = 0{,}250\,\mathrm{m/s^2}$ y la fuerza 250 N. El período vale

$$T = \frac{2\pi(4{,}00 \times 10^7)}{1000\sqrt{10}} = 8000\pi\sqrt{10}\,\mathrm{s} \simeq 7{,}95 \times 10^4\,\mathrm{s}.$$

La velocidad cambia de dirección durante toda la vuelta. La rapidez es constante y la aceleración apunta al centro; la altura del satélite es $3R$ y su distancia al centro, $4R$.

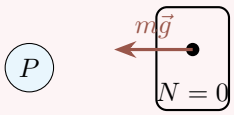



La velocidad es tangente y la fuerza gravitatoria apunta al centro. La gravedad proporciona la resultante centrípeta.

### PROBLEMA RESUELTO 11.10 · Una balanza en caída orbital

Una astronauta de 60 kg acompaña al satélite del ejemplo anterior. Encuentra su peso gravitatorio y la lectura ideal de una balanza que flota con ella, sin presionarla.

*Resolución.* Su peso gravitatorio es $60(0{,}250) = 15\,\mathrm{N}$ hacia P. La astronauta y la nave comparten aproximadamente la misma aceleración orbital y permanecen juntas en caída libre. La normal es cero y la balanza ideal marca cero. Esta ingravidez aparente es compatible con un campo no nulo. El modelo desprecia las pequeñas diferencias del campo entre partes de la nave, responsables de efectos de marea.




La nave y la astronauta caen juntas. La gravedad produce la caída; la lectura nula corresponde a la ausencia de fuerza de soporte.

En una órbita circular, sustituir $v_c^2 = \mu/r$ en la energía produce

$$K_c = \frac{\mu m}{2r}, \qquad U_c = -\frac{\mu m}{r}, \qquad E_c = -\frac{\mu m}{2r}. \tag{11.7}$$

Una órbita circular más alta tiene energía mecánica mayor y rapidez menor. El aumento de potencial supera la disminución cinética. Para calcular los impulsos de una maniobra o su consumo de combustible necesitamos describir también cómo actúa el vehículo entre los estados orbitales.

**PROBLEMA RESUELTO 11.11 · Una órbita más alta y más lenta**

Compara las energías de un satélite de 1000 kg en órbitas circulares de radios $2R$ y $4R$ alrededor de P.

*Resolución.* A $2R$, $K_1 = 1{,}00 \times 10^{10}\,\mathrm{J}$, $U_1 = -2{,}00 \times 10^{10}\,\mathrm{J}$ y $E_1 = -1{,}00 \times 10^{10}\,\mathrm{J}$. A $4R$, las tres magnitudes se reducen a la mitad en valor absoluto: $K_2 = 5{,}00 \times 10^{9}\,\mathrm{J}$, $U_2 = -1{,}00 \times 10^{10}\,\mathrm{J}$ y $E_2 = -5{,}00 \times 10^{9}\,\mathrm{J}$. La energía total aumenta $5{,}00 \times 10^{9}\,\mathrm{J}$, aunque la cinética disminuye en esa misma cantidad. La rapidez pasa de $2000\sqrt{5}$ a $1000\sqrt{10}\,\mathrm{m/s}$. Para conectar realmente ambos estados habría que describir la transferencia y el agente que aporta energía.

| **Radio** | $K$ | $U$ | $E$ |
|---|---|---|---|
| $2R$ | 10 | $-20$ | $-10$ |
| $4R$ | 5 | $-10$ | $-5$ |

Energías en $10^9$ J para el mismo satélite de 1000 kg. A mayor radio circular, menor rapidez y energía total menos negativa.

## 11.5 Escape y lanzamientos que regresan

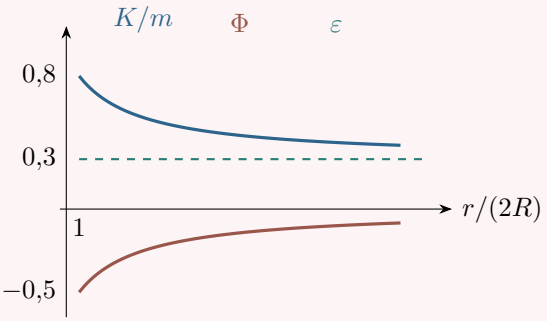
Con $U(\infty) = 0$, alcanzar distancias indefinidamente grandes exige $\varepsilon \geq 0$. El umbral ideal se obtiene imponiendo rapidez asintótica cero:

$$\frac{v_{\mathrm{esc}}^2}{2} - \frac{\mu}{r} = 0, \qquad v_{\mathrm{esc}} = \sqrt{\frac{2\mu}{r}} = \sqrt{2}\, v_c. \tag{11.8}$$

Esta rapidez es una condición energética en el modelo de una fuente aislada, sin atmósfera ni propulsión posterior. Para un lanzamiento desde el exterior debe elegirse además una trayectoria que no choque con el planeta; una velocidad dirigida hacia él puede causar una colisión aunque su módulo supere el umbral. Llegar “al infinito” describe el límite del movimiento cuando la distancia crece indefinidamente. Otros astros o una fuerza propulsora cambian el problema.

**PROBLEMA RESUELTO 11.12 · Escape con rapidez residual**

Desde $r = 2R$ de P se lanza una partícula radialmente hacia afuera. Encuentra la rapidez de escape y la rapidez asintótica si parte a 8,00 km/s.
*Resolución.* El umbral es $\sqrt{2\mu/(2R)} = 2000\sqrt{10}\,\text{m/s} \simeq 6{,}32\,\text{km/s}$. Para $v_0 = 8000\,\text{m/s}$, la energía específica es $\varepsilon = \frac{1}{2}(8000)^2 - \mu/(2R) = 1{,}20 \times 10^7\,\text{J/kg} > 0$. Cuando $r \to \infty$, el potencial tiende a cero y $v_\infty = \sqrt{2\varepsilon} = 2000\sqrt{6}\,\text{m/s} \simeq 4{,}90\,\text{km/s}$. La gravedad reduce la rapidez durante el alejamiento, que tiende a un valor positivo.

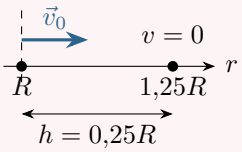



Energías por unidad de masa en unidades $\mu/R$. La suma de la curva azul y la terracota es la constante positiva $\varepsilon = 0{,}3\mu/R$. La energía cinética tiende a ese valor al alejarse.

**PROBLEMA RESUELTO 11.13 · Un lanzamiento radial que vuelve**

Una partícula parte radialmente hacia afuera desde la superficie de P a 4000 m/s. Encuentra su radio máximo y su altura máxima.

*Resolución.* La energía específica inicial es $8{,}00 \times 10^6 - 4{,}00 \times 10^7 = -3{,}20 \times 10^7\,\text{J/kg}$. Al ser radial, el movimiento llega a un punto con velocidad cero. Allí $\varepsilon = -\mu/r_{\text{máx}}$, de donde $r_{\text{máx}} = 1{,}25 \times 10^7\,\text{m} = 1{,}25R$ y $h_{\text{máx}} = 0{,}25R = 2{,}50 \times 10^6\,\text{m}$. En una órbita con momento angular no nulo, el punto más lejano conserva velocidad tangencial; imponer allí $v = 0$ sería incorrecto.




Tramo radial desde la superficie hasta el punto de retorno. La velocidad se anula allí porque no existe componente tangencial.

## 11.6 Elipses y las tres leyes de Kepler

Las órbitas planetarias motivaron las tres relaciones conocidas como leyes de Kepler. En el modelo newtoniano de dos cuerpos aislados se expresan con precisión así: una órbita ligada y no radial es elíptica; el radio vector barre áreas iguales en tiempos iguales; y el cuadrado del período es proporcional al cubo del semieje mayor, con una constante que depende de las masas. Cuando una masa domina, la fuente puede tratarse aproximadamente fija en uno de los focos. El círculo es el caso particular de una elipse con excentricidad cero.

Una elipse tiene dos focos: la suma de las distancias de cualquier punto a ambos es $2a$, donde $a$ es el semieje mayor. Si la distancia de cada foco al centro geométrico es $c$, la excentricidad es $e = c/a$, con $0 \le e < 1$. Su semieje menor es $b = a\sqrt{1 - e^2}$. La fuente ocupa un foco, generalmente distinto del centro de la elipse; el segundo foco es otro punto geométrico de la curva.

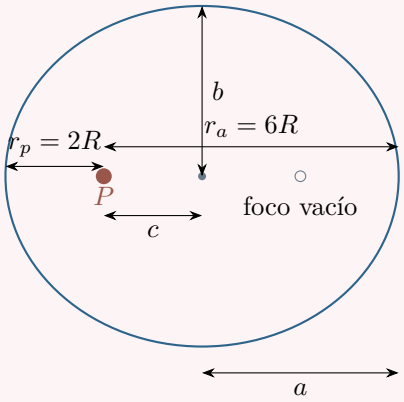
Las distancias mínima y máxima a la fuente, llamadas periapsis y apoapsis, son

$$r_p = a(1-e), \qquad r_a = a(1+e), \qquad a = \frac{r_p + r_a}{2}, \quad e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}. \tag{11.9}$$

Para órbitas alrededor del Sol se emplean perihelio y afelio; alrededor de la Tierra, perigeo y apogeo. Para una órbita exterior libre completa, la elipse debe permanecer fuera del cuerpo central. Para nuestros satélites debe cumplirse además $r_p > R$.

**PROBLEMA RESUELTO 11.14 · Reconstruir la geometría de una órbita**

Una órbita elíptica alrededor de P tiene $r_p = 2R$ y $r_a = 6R$. Encuentra sus semiejes, excentricidad y distancia entre el centro geométrico y el foco ocupado.
*Resolución.* De las distancias extremas obtenemos $a = (2R + 6R)/2 = 4R$ y $e = (6R - 2R)/(6R + 2R) = 1/2$. Luego $c = ae = 2R$ y $b = 4R\sqrt{1 - 1/4} = 2\sqrt{3}R$. El foco está desplazado $2R$ respecto del centro geométrico. Las distancias extremas se miden desde el foco ocupado; el semieje mayor caracteriza el tamaño de la elipse. Como $r_p = 2R > R$, la elipse permanece fuera del planeta en este modelo.




La fuente está en un foco. El semieje mayor se mide desde el centro geométrico, mientras periapsis y apoapsis se miden desde la fuente.

## 11.7 La ley de las áreas nace de un torque nulo

Respecto de una fuente fija, la fuerza gravitatoria es central: $\vec{F}$ y $\vec{r}$ son colineales. Por tanto $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$ y se conserva $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$. Si $\vec{L} \neq \vec{0}$, su dirección constante fija el plano de la órbita. Un movimiento radial tiene $\vec{L} = \vec{0}$ y no barre áreas.

En un tiempo infinitesimal $dt$, el radio vector barre área $dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$. Como la componente transversal de la velocidad es $v_\perp = r\, d\theta/dt$,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r v_\perp = \frac{|\vec{L}|}{2m}. \tag{11.10}$$

Esta tasa constante demuestra la segunda ley. La conservación del momento angular y de la velocidad areolar se cumple para cualquier fuerza central respecto de un punto fijo, incluida la proporcional a $1/r^2$. La forma elíptica y la relación particular entre período y semieje mayor sí dependen de la ley gravitatoria inversa del cuadrado.

En periapsis y apoapsis la velocidad es perpendicular al radio vector. Allí $r_p v_p = r_a v_a$. En un punto intermedio debe usarse la componente transversal; sustituirla sin más por la rapidez total puede alterar el resultado.

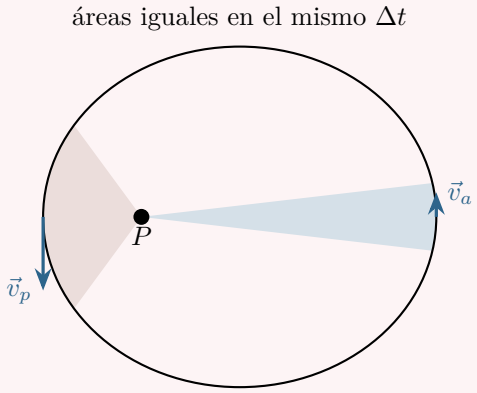
**PROBLEMA RESUELTO 11.15 · Velocidades distintas, áreas iguales**

En la órbita del resuelto anterior, la rapidez en periapsis es $v_p = 1000\sqrt{30}\,\mathrm{m/s}$. Encuentra la rapidez en apoapsis, la tasa de área barrida y el área recorrida por el radio vector en 100 s.

*Resolución.* Como los dos puntos son extremos radiales, $v_a = (2R/6R)v_p = (1000\sqrt{30}/3)\,\mathrm{m/s} \simeq 1{,}83\,\mathrm{km/s}$. La tasa de área es

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}(2{,}00\times 10^7)(1000\sqrt{30}) = 10^{10}\sqrt{30}\,\mathrm{m^2/s}.$$

En 100 s barre $10^{12}\sqrt{30}\,\mathrm{m^2}$, cualquiera que sea el tramo orbital considerado. Cerca del periapsis, el radio menor permite un avance angular mayor durante el mismo tiempo manteniendo igual el área barrida.




Los sectores se construyeron con áreas iguales respecto del foco ocupado. El tramo próximo al periapsis abarca un ángulo y un arco mayores.

## 11.8 La energía distingue las órbitas

Podemos obtener la energía elíptica sin resolver toda la ecuación de la trayectoria. Para $e > 0$, en los extremos se conservan energía y momento angular específico $\ell = |\vec{L}|/m$:

$$\varepsilon = \frac{\ell^2}{2r_p^2} - \frac{\mu}{r_p} = \frac{\ell^2}{2r_a^2} - \frac{\mu}{r_a}.$$

Restar y factorizar las diferencias da $\ell^2 = 2\mu r_p r_a/(r_p + r_a)$. Al sustituir en cualquiera de las dos energías resulta $\varepsilon = -\mu/(r_p + r_a) = -\mu/(2a)$. El círculo satisface la misma expresión por la ecuación 11.7. Para toda elipse exterior del modelo,

$$E = -\frac{\mu m}{2a}, \qquad v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right), \qquad \ell^2 = \mu a(1-e^2). \tag{11.11}$$

La relación de rapidez se conoce como ecuación vis viva. La forma elíptica de una órbita ligada bajo la ley $1/r^2$ se está usando como resultado de la dinámica newtoniana; aquí deducimos sus relaciones de energía a partir de ella, sin presentar una demostración completa de la forma de la trayectoria.

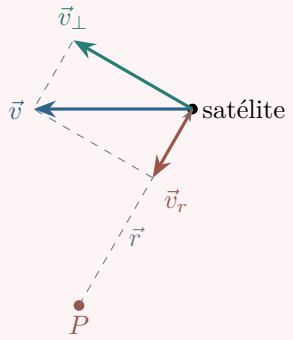
Una energía negativa, con ese cero de potencial, impide llegar al infinito. Una energía nula corresponde al umbral y una positiva deja rapidez asintótica no nula. Con momento angular distinto de cero, las trayectorias ideales no ligadas son parábolas para $E = 0$ e hipérbolas para $E > 0$. Las trayectorias radiales son casos degenerados y una colisión con el cuerpo central puede interrumpir cualquiera de estas descripciones exteriores.

**PROBLEMA RESUELTO 11.16 · Igual rapidez en órbitas diferentes**

En la elipse $a = 4R$, $e = 1/2$ alrededor de P, encuentra la rapidez cuando $r = 4R$. Compárala con la circular a ese radio y calcula las magnitudes de sus componentes transversal y radial. *Resolución.* Como $r = a$, la ecuación vis viva da $v^2 = \mu/a = 10^7\,\mathrm{m^2/s^2}$ y $v = 1000\sqrt{10}\,\mathrm{m/s}$, igual a la rapidez circular del mismo radio. Sin embargo, $\ell^2 = \mu a(1-e^2) = 1{,}20\times10^{22}\,\mathrm{m^4/s^2}$. Por tanto

$$v_\perp = \frac{\ell}{r} = 500\sqrt{30}\,\mathrm{m/s}, \qquad |v_r| = \sqrt{v^2 - v_\perp^2} = 500\sqrt{10}\,\mathrm{m/s}.$$

La componente radial puede ser positiva al alejarse o negativa al acercarse. En el círculo es cero. Identificar una órbita requiere conocer la posición y el vector velocidad completo, incluida su dirección.




Descomposición en el punto superior de la elipse, donde $r = a$. La velocidad total apunta a la izquierda y tiene componente radial hacia la fuente. Las escalas de posición y velocidad son diferentes.

## 11.9 Períodos, observaciones y masas comparables

El área de una elipse es $\pi ab$ y la tasa areolar es $\ell/2$. Usando las relaciones anteriores obtenemos

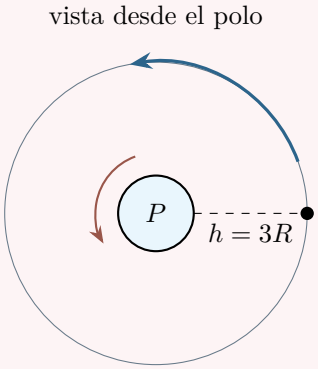
$$T = \frac{2\pi ab}{\ell} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}, \qquad \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu}. \tag{11.12}$$

Esta deducción extiende el resultado circular al semieje mayor de una elipse. En órbitas alrededor de la misma fuente dominante, igual $a$ implica igual período, aunque cambie $e$. El “radio medio” de algunas formulaciones escolares designa aquí la media de las distancias extremas, $a = (r_p + r_a)/2$. Si cambia la masa central, cambia la constante de proporcionalidad.

**PROBLEMA RESUELTO 11.17 · Una órbita que acompaña la rotación**

P gira con período $T_{\text{rot}} = 8000\pi\sqrt{10}\,\text{s}$. ¿A qué radio podría un satélite circular permanecer sobre el mismo punto del ecuador? Indica las condiciones geométricas y compara el período con el de la elipse $a = 4R$, $e = 1/2$.

*Resolución.* Igualar los períodos exige $r^3 = \mu T_{\text{rot}}^2/(4\pi^2) = 6{,}40 \times 10^{22}\,\text{m}^3$, luego $r = 4{,}00 \times 10^7\,\text{m} = 4R$. La altura es $3R$. Permanecer sobre el mismo punto requiere una órbita circular en el plano ecuatorial, con el sentido y el período de la rotación de P. La elipse indicada tiene también $a = 4R$ y, por la tercera ley, el mismo período, aunque su distancia y rapidez varían. Para el planeta ideal usamos su rotación como referencia geométrica y conservamos el campo esférico supuesto.




Para permanecer sobre el mismo punto se requieren órbita circular ecuatorial, sentido de giro común e igualdad de períodos. El radio orbital es $4R$.

Cuando ninguna masa es despreciable, ambas orbitan alrededor de su centro de masa. Si $\vec{r}$ va desde $M$ hasta $m$, restar sus aceleraciones produce

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{G(M+m)}{r^2}\hat{r}.$$

La trayectoria relativa obedece al mismo tipo de ecuación, con parámetro $\mu_{\text{rel}} = G(M+m)$. Por tanto la tercera ley exacta del sistema aislado de dos masas es

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a_{\text{rel}}^3}{G(M+m)}. \tag{11.13}$$

Aquí $a_{\text{rel}}$ pertenece a la elipse de la separación entre los cuerpos; las órbitas individuales se refieren al centro de masa. Las fuerzas de otros astros, las irregularidades del campo y otros efectos limitan la descripción por elipses keplerianas exactas. El modelo sigue siendo útil cuando esas correcciones son pequeñas para la pregunta y la precisión elegidas.

**PROBLEMA RESUELTO 11.18 · Dos cuerpos que giran alrededor de su centro de masa**

Un sistema binario aislado tiene $M = 4m$, separación circular constante $d = 1{,}00 \times 10^7\,\mathrm{m}$ y $G(M+m) = 1{,}00 \times 10^{15}\,\mathrm{m^3/s^2}$. Encuentra los radios de ambas órbitas respecto del centro de masa, el período y las rapideces.

*Resolución.* Si $r_M + r_m = d$ y $Mr_M = mr_m$, resultan $r_M = d/5 = 2{,}00 \times 10^6\,\mathrm{m}$ y $r_m = 4d/5 = 8{,}00 \times 10^6\,\mathrm{m}$. La velocidad angular común satisface $\omega^2 = G(M+m)/d^3 = 10^{-6}\,\mathrm{s^{-2}}$, de donde $\omega = 10^{-3}\,\mathrm{rad/s}$ y $T = 2000\pi\,\mathrm{s}$. Las rapideces son 2000 y 8000 m/s. Usar solo $GM = 8{,}00 \times 10^{14}\,\mathrm{m^3/s^2}$ con separación $d$ como si $M$ estuviera fijo daría un período $\sqrt{5/4}$ veces el correcto, aproximadamente un 11,8 % mayor. Al ser las masas comparables, debemos conservar esa corrección.

| Cuerpo | Radio al CM en m | Rapidez en m/s |
|---|---|---|
| $M = 4m$ | $2 \times 10^6$ | 2000 |
| $m$ | $8 \times 10^6$ | 8000 |

Los dos cuerpos tienen período $2000\pi$ s. La separación que entra en la ley de la órbita relativa es la suma de los radios, $10^7$ m.

**Construir una órbita mediante pasos pequeños**

En una hoja de cálculo usa unidades escaladas en las que $\mu = 1$. Comienza con posición $(x, y) = (1, 0)$ y velocidad $(v_x, v_y) = (0, 1)$: el modelo continuo predice una órbita circular. Para un paso $\Delta t = 0{,}02$, calcula primero $\vec{a}_n = -\vec{r}_n/|\vec{r}_n|^3$, después $\vec{v}_{n+1} = \vec{v}_n + \vec{a}_n \Delta t$ y finalmente $\vec{r}_{n+1} = \vec{r}_n + \vec{v}_{n+1}\Delta t$. El orden importa: la nueva posición usa la velocidad ya actualizada.

Representa unos 6,3 intervalos de tiempo escalado y repite con la mitad del paso, manteniendo la misma duración total. Compara la forma orbital y la variación de $\varepsilon_n = |\vec{v}_n|^2/2 - 1/|\vec{r}_n|$. La simulación permite explorar las predicciones del modelo y su aproximación numérica. Este esquema conserva algebraicamente $\ell_{z,n} = x_n v_{y,n} - y_n v_{x,n}$ porque la aceleración es radial, mientras la energía presenta un error de discretización. Comprueba esa diferencia y separa las pequeñas desviaciones numéricas de los cambios físicos que produciría una fuerza adicional.

## Ejercicios para reconstruir y transferir

Salvo indicación contraria, usa el planeta ideal P con $R = 1{,}00 \times 10^7\,\mathrm{m}$ y $\mu = 4{,}00 \times 10^{14}\,\mathrm{m^3/s^2}$, masa del móvil despreciable, campo exterior esférico, sin atmósfera ni otras fuerzas. Usa $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2/kg^2}$ cuando se pida una masa. Distingue siempre radio y altura.

**EJERCICIO 11.1 · Atracción entre dos partículas**

Dos partículas de 4 y 5 kg están separadas 0,20 m. Calcula el módulo de cada fuerza y compara las aceleraciones debidas a la interacción.

**EJERCICIO 11.2 · Cambiar masas y distancia**

Se duplica la masa de una fuente, se reduce a la mitad la masa de prueba y se triplica la separación. Encuentra las razones entre fuerzas y entre aceleraciones de la masa de prueba, antes y después.

**EJERCICIO 11.3 · Campo nulo y potencial no nulo**

Dos fuentes puntuales de parámetros 16 y $4\,\mathrm{m^3/s^2}$ están en $x = 0$ y $x = 6\,\mathrm{m}$. Encuentra el punto entre ellas donde el campo se anula y calcula allí $\Phi$, con cero de potencial en el infinito.

**EJERCICIO 11.4 · Superposición en un plano**

Dos fuentes puntuales tienen $\mu = 25\,\mathrm{m^3/s^2}$ cada una y están en $(-3, 0)$ y $(3, 0)\,\mathrm{m}$. Encuentra el campo en $(0, 4)\,\mathrm{m}$ y la fuerza sobre una masa de prueba de $5\,\mathrm{kg}$ situada allí.

**EJERCICIO 11.5 · Peso a gran altura**

Una masa de $90\,\mathrm{kg}$ se encuentra a altura $2R$ sobre P. Encuentra $g$ y su peso gravitatorio.

**EJERCICIO 11.6 · Buscar una altura a partir del campo**

¿A qué altura sobre P se reduce el campo a $g_0/16$? Da también la distancia al centro.

**EJERCICIO 11.7 · Mismo módulo dentro y fuera**

Supón densidad uniforme en P. Compara los campos en $r = R/4$ y $r = 2R$. ¿Qué fracción de la masa de P queda encerrada por la primera esfera?

**EJERCICIO 11.8 · Otro planeta**

Un planeta esférico tiene tres veces la masa de P y el doble de su radio. Encuentra su campo superficial y la razón de su densidad media a la de P.

**EJERCICIO 11.9 · Trabajo al elevar una carga**

Una carga de $200\,\mathrm{kg}$ pasa de $r = R$ a $r = 3R$ respecto de P. Calcula las energías potenciales, su variación y el trabajo gravitatorio.

**EJERCICIO 11.10 · Controlar la aproximación local**

Una masa de $2\,\mathrm{kg}$ sube $2{,}00 \times 10^5\,\mathrm{m}$ desde la superficie de P. Calcula el aumento exacto de potencial y el valor $mg_0h$. Encuentra el error relativo de la aproximación respecto del valor exacto.

**EJERCICIO 11.11 · Caída radial**

Una partícula se suelta desde el reposo en $r = 3R$ y cae hasta la superficie de P. Encuentra su rapidez justo antes del contacto.

**EJERCICIO 11.12 · Órbita circular a dos radios**

Un satélite describe una órbita circular de radio $2R$ alrededor de P. Encuentra su rapidez, aceleración y período.

**EJERCICIO 11.13 · Comparar dos órbitas circulares**

Compara un mismo satélite en órbitas circulares de radios $2R$ y $8R$. Encuentra las razones de rapidez, período, aceleración y energía mecánica final a inicial.

**EJERCICIO 11.14 · Peso y lectura de una balanza**

Una astronauta de 80 kg está en una nave en órbita circular de radio $2R$. Encuentra su peso gravitatorio y la normal de una balanza que la acompaña sin presionarla.

**EJERCICIO 11.15 · Energía de un satélite**

Una masa de 500 kg describe una órbita circular de radio $4R$. Encuentra $K$, $U$ y $E$, con cero de potencial en el infinito.

**EJERCICIO 11.16 · Escape desde dos posiciones**

Encuentra las rapideces de escape desde $R$ y desde $4R$ de P. Compara ambas.

**EJERCICIO 11.17 · Rapidez al alejarse indefinidamente**

Una partícula parte radialmente hacia afuera desde $r = 2R$ a 10,0 km/s. Clasifica su energía y calcula su rapidez asintótica.

**EJERCICIO 11.18 · Radio de retorno**

Una partícula sale radialmente desde la superficie de P a 6,00 km/s. Encuentra su radio y altura máximos, y justifica que regresa.

**EJERCICIO 11.19 · Geometría de otra elipse**

Una elipse alrededor de P tiene $r_p = 2R$ y $r_a = 8R$. Encuentra $a$, $e$, $b$ y su período.

**EJERCICIO 11.20 · Aplicar la ley de las áreas**

En la órbita del ejercicio 11.19, la rapidez en periapsis es $4000\sqrt{2}\,\mathrm{m/s}$. Encuentra la rapidez en apoapsis y la tasa de área barrida.

**EJERCICIO 11.21 · Rapidez en un punto intermedio**

En esa misma elipse, encuentra la rapidez cuando $r = 5R$ y la energía mecánica por unidad de masa. ¿El dato de rapidez basta para afirmar que el movimiento es circular?

**EJERCICIO 11.22 · Cambiar la masa central**

Un satélite de masa despreciable orbita una fuente $M$ con semieje mayor $a$. Otro orbita una fuente de masa $8M$ con semieje mayor $4a$. Encuentra la razón de períodos y explica por qué no basta usar la razón de semiejes.

**EJERCICIO 11.23 · Inferir una masa por su satélite**

Alrededor de una fuente esférica desconocida, un satélite de masa despreciable tiene órbita circular de radio $2{,}00 \times 10^{7}\,\mathrm{m}$ y período $4000\pi\,\mathrm{s}$. Encuentra el parámetro gravitacional y la masa central.

**EJERCICIO 11.24 · Un binario de masas iguales**

Dos masas iguales aisladas describen órbitas circulares alrededor de su centro de masa, separadas $d = 2{,}00 \times 10^{7}\,\mathrm{m}$. Se sabe que $G(M+m) = 8{,}00 \times 10^{14}\,\mathrm{m^3/s^2}$. Encuentra el radio de cada órbita, el período común y sus rapideces. Distingue el radio individual de la separación usada en la ley de dos cuerpos.

## Soluciones completas de los ejercicios

**SOLUCIÓN 11.1.**
Cada fuerza tiene módulo $G(4)(5)/(0{,}20)^2 = 500G \simeq 3{,}34 \times 10^{-8}\,\mathrm{N}$, con sentidos opuestos sobre cuerpos distintos. Las aceleraciones tienen módulos $F/4 \simeq 8{,}34 \times 10^{-9}\,\mathrm{m/s^2}$ y $F/5 = 6{,}67 \times 10^{-9}\,\mathrm{m/s^2}$. La razón de la primera a la segunda es $5/4$; las aceleraciones difieren porque cada masa recibe una fuerza de igual módulo.

**SOLUCIÓN 11.2.**
La fuerza se multiplica por $(2)(1/2)/3^2 = 1/9$. La aceleración de prueba es $GM/r^2$ y se multiplica por $2/9$. También resulta de dividir la nueva fuerza, $F/9$, por la nueva masa, $m/2$. La reducción de la masa de prueba modifica la fuerza y conserva el campo de la fuente.

**SOLUCIÓN 11.3.**
Entre las fuentes los campos tienen sentidos opuestos. La igualdad $16/x^2 = 4/(6-x)^2$ permite tomar raíces positivas: $4/x = 2/(6-x)$. Resulta $x = 4\,\mathrm{m}$. El potencial allí es $\Phi = -16/4 - 4/2 = -6\,\mathrm{J/kg}$. Las fuerzas por unidad de masa se cancelan vectorialmente; los potenciales negativos se suman y dan un valor negativo.

**SOLUCIÓN 11.4.**
La distancia desde cada fuente hasta el punto es $\sqrt{3^2+4^2}=5\,\mathrm{m}$ y cada campo tiene módulo $25/5^2=1\,\mathrm{m/s^2}$. Sus componentes horizontales son opuestas, de módulos $3/5$; sus componentes verticales apuntan ambas hacia abajo, de módulo $4/5$. Así $\vec{g}=(0,-8/5)\,\mathrm{m/s^2}$ y $\vec{F}=5\vec{g}=(0,-8)\,\mathrm{N}$.

**SOLUCIÓN 11.5.**
La distancia al centro es $r=R+2R=3R$. Por tanto $g=4/9\,\mathrm{m/s^2}$ y el peso $90(4/9)=40\,\mathrm{N}$. Sustituir la altura como radio produciría un campo mayor que el que corresponde al punto.

**SOLUCIÓN 11.6.**
La ecuación $g/g_0=R^2/(R+h)^2=1/16$ da $R+h=4R$ con distancias positivas. La altura es $h=3R=3{,}00\times10^7\,\mathrm{m}$ y el radio $4{,}00\times10^7\,\mathrm{m}$.

**SOLUCIÓN 11.7.**
En el interior uniforme, $g=g_0(r/R)$; en $R/4$ vale $1\,\mathrm{m/s^2}$. En el exterior a $2R$, $g=g_0/4=1\,\mathrm{m/s^2}$. Los módulos coinciden, aunque se han usado leyes distintas en sus respectivos dominios. La masa encerrada en $R/4$ es la fracción $(1/4)^3=1/64$ de la total. Los dos campos apuntan hacia el centro desde cada posición.

**SOLUCIÓN 11.8.**
El cociente superficial es $g'/g_0=(3M/M)(R/2R)^2=3/4$, luego $g'=3\,\mathrm{m/s^2}$. La densidad media divide masa por volumen, por lo que $\overline{\rho}'/\overline{\rho}=3/2^3=3/8$. Para comparar el campo superficial debemos conocer tanto la masa como el radio del cuerpo.

**SOLUCIÓN 11.9.**
Las energías son $U_i=-\mu(200)/R=-8{,}00\times10^9\,\mathrm{J}$ y $U_f=-\mu(200)/(3R)=-(8/3)\times10^9\,\mathrm{J}$. El aumento es $\Delta U=(16/3)\times10^9\,\mathrm{J}\simeq5{,}33\times10^9\,\mathrm{J}$. El trabajo gravitatorio es el opuesto, $-(16/3)\times10^9\,\mathrm{J}$, porque la fuerza se opone al alejamiento.

**SOLUCIÓN 11.10.**
Aquí $h/R=0{,}0200$ y $mg_0h=2(4)(2\times10^5)=1{,}60\times10^6\,\mathrm{J}$. El aumento exacto es $1{,}60\times10^6/1{,}02\simeq1{,}57\times10^6\,\mathrm{J}$. La sobreestimación relativa respecto de este último es $h/R=2{,}00\,\%$. Comparar solo cifras redondeadas a dos decimales puede ocultar parte de esa diferencia.

**SOLUCIÓN 11.11.**
La conservación de energía da $-\mu/(3R)=v^2/2-\mu/R$. Luego $v^2=2\mu(1/R-1/(3R))=16\times10^7/3\,\mathrm{m^2/s^2}$. La rapidez es $4000\sqrt{10/3}\,\mathrm{m/s}\simeq7{,}30\,\mathrm{km/s}$. Se toma la raíz positiva por pedir rapidez; la velocidad radial al llegar apunta hacia dentro.

**SOLUCIÓN 11.12.**
En $r=2R$, $v_c=\sqrt{\mu/(2R)}=2000\sqrt{5}\,\mathrm{m/s}\simeq4{,}47\,\mathrm{km/s}$. La aceleración es $\mu/(2R)^2=1\,\mathrm{m/s^2}$ y el período $2\pi(2R)/v_c=4000\pi\sqrt{5}\,\mathrm{s}$. La altura es $R$ y el período no depende de la masa despreciable del satélite.

**SOLUCIÓN 11.13.**
La razón de radios es cuatro. Como $v_c\propto r^{-1/2}$, $T\propto r^{3/2}$ y $g\propto r^{-2}$, resultan $v_f/v_i=1/2$, $T_f/T_i=8$ y $g_f/g_i=1/16$. La energía es negativa e inversamente proporcional al radio: $E_f/E_i=1/4$. Esa razón positiva menor que uno significa que el estado final es menos negativo y tiene mayor energía mecánica.

**SOLUCIÓN 11.14.**
El campo en $2R$ vale $1\,\mathrm{m/s^2}$ y el peso gravitatorio $80\,\mathrm{N}$. La balanza y la astronauta comparten la caída orbital sin contacto que las comprima, de modo que $N=0$. La lectura nula expresa que la fuerza de soporte es cero durante la caída libre compartida.

**SOLUCIÓN 11.15.**
Con $m=500\,\mathrm{kg}$ y $r=4R$, $K=\mu m/(2r)=2{,}50\times10^9\,\mathrm{J}$, $U=-\mu m/r=-5{,}00\times10^9\,\mathrm{J}$ y $E=-2{,}50\times10^9\,\mathrm{J}$. Se verifica $U=-2K$ y $E=-K$, relaciones específicas de la órbita circular en este potencial.

**SOLUCIÓN 11.16.**
En la superficie, $v_{\mathrm{esc}}=\sqrt{2\mu/R}=4000\sqrt{5}\,\mathrm{m/s}\simeq8{,}94\,\mathrm{km/s}$. En $4R$ vale $\sqrt{2\mu/(4R)}=2000\sqrt{5}\,\mathrm{m/s}\simeq4{,}47\,\mathrm{km/s}$. Cuadruplicar la distancia reduce el umbral a la mitad. La comparación supone lanzamiento exterior sin una colisión posterior con el planeta.

**SOLUCIÓN 11.17.**
La energía específica es $\varepsilon = (10^4)^2/2 - \mu/(2R) = 3{,}00 \times 10^7\,\mathrm{J/kg} > 0$. Es un movimiento radial no ligado en el modelo exterior. La rapidez asintótica es $\sqrt{2\varepsilon} = 2000\sqrt{15}\,\mathrm{m/s} \simeq 7{,}75\,\mathrm{km/s}$. La dirección inicial hacia afuera evita una intercepción con la superficie durante el alejamiento.

**SOLUCIÓN 11.18.**
La energía específica inicial es $(6000)^2/2 - \mu/R = -2{,}20 \times 10^7\,\mathrm{J/kg}$. Al ser negativa, no puede alcanzar el infinito. Como el movimiento es radial, en el extremo $v = 0$ y $r_{\text{máx}} = \mu/|\varepsilon| = (20/11)R \simeq 1{,}82 \times 10^7\,\mathrm{m}$. La altura máxima es $(9/11)R \simeq 8{,}18 \times 10^6\,\mathrm{m}$. La gravedad sigue apuntando hacia el planeta y el movimiento invierte su sentido allí.

**SOLUCIÓN 11.19.**
El semieje mayor es $a = (2R + 8R)/2 = 5R$, la excentricidad $(8R - 2R)/(8R + 2R) = 3/5$ y el menor $b = 5R\sqrt{1 - 9/25} = 4R$. El período es $2\pi\sqrt{(5R)^3/\mu} = 25000\pi\sqrt{2}\,\mathrm{s}$. El periapsis queda fuera del planeta, por lo que la geometría es compatible con una órbita exterior completa.

**SOLUCIÓN 11.20.**
La conservación angular en los extremos da $v_a = (2R/8R)v_p = 1000\sqrt{2}\,\mathrm{m/s}$. La tasa areolar es $r_p v_p/2 = (2 \times 10^7)(4000\sqrt{2})/2 = 4 \times 10^{10}\sqrt{2}\,\mathrm{m^2/s}$. Solo en los extremos se pudo usar la rapidez completa en ese producto; en puntos intermedios debe emplearse la componente transversal.

**SOLUCIÓN 11.21.**
En $r = a = 5R$, $v^2 = \mu/a = 8{,}00 \times 10^6\,\mathrm{m^2/s^2}$ y $v = 2000\sqrt{2}\,\mathrm{m/s}$. La energía específica es $-\mu/(2a) = -4{,}00 \times 10^6\,\mathrm{J/kg}$. La rapidez coincide con la circular de ese radio, pero la órbita dada tiene $e = 3/5$ y componente radial no nula en esa posición. Falta la dirección para deducir una órbita a partir de posición y rapidez solamente.

**SOLUCIÓN 11.22.**
La tercera ley, con fuentes dominantes diferentes, da $T_2^2/T_1^2 = (4a)^3/a^3\,(M/(8M)) = 64/8 = 8$. Por tanto $T_2/T_1 = 2\sqrt{2}$. La constante $4\pi^2/(GM)$ toma un valor propio en cada sistema, según la masa de su fuente. Usar solo el factor geométrico habría dado una razón de períodos de ocho.

**SOLUCIÓN 11.23.**
De $T^2 = 4\pi^2 r^3/\mu$, resulta $\mu = 4\pi^2(2 \times 10^7)^3/(4000\pi)^2 = 2{,}00 \times 10^{15}\,\mathrm{m^3/s^2}$. Así $M = \mu/G \simeq 3{,}00 \times 10^{25}\,\mathrm{kg}$. Se infiere el parámetro gravitacional a partir de la órbita y se usa después $G$ para convertirlo en masa; son pasos distintos.

**SOLUCIÓN 11.24.**
Por simetría el centro de masa está a mitad de camino y cada radio es $d/2 = 1{,}00 \times 10^7\,\mathrm{m}$. La velocidad angular común cumple $\omega^2 = 8 \times 10^{14}/(2 \times 10^7)^3 = 10^{-7}\,\mathrm{s^{-2}}$. El período es $2000\pi\sqrt{10}\,\mathrm{s}$ y cada rapidez $\omega(d/2) = 1000\sqrt{10}\,\mathrm{m/s}$. La ley de dos cuerpos usa la separación $d$ como radio de la órbita relativa. Sustituir en ella el radio individual reduciría indebidamente el período.

## Diagnóstico de salida

Un satélite de 1000 kg describe una órbita circular de radio $2R$ alrededor de P. Encuentra su altura, campo, rapidez, período y energías $K$, $U$ y $E$. Calcula además la rapidez de escape desde esa posición y explica por qué el satélite puede permanecer en órbita sin una fuerza de soporte.

**Contraste después del intento.** La altura es $R$, el campo $1\,\mathrm{m/s^2}$, la rapidez $2000\sqrt{5}\,\mathrm{m/s}$ y el período $4000\pi\sqrt{5}\,\mathrm{s}$. Las energías son $K = 10^{10}\,\mathrm{J}$, $U = -2 \times 10^{10}\,\mathrm{J}$ y $E = -10^{10}\,\mathrm{J}$. La rapidez de escape es $2000\sqrt{10}\,\mathrm{m/s}$. El satélite está en caída libre: la fuerza gravitatoria proporciona la aceleración normal requerida por su órbita. Si fallaron las distancias, revisa la sección 11.2; para rapidez y energía orbitales, las secciones 11.4 y 11.5.

## Lecturas de apoyo

H. D. Young y R. A. Freedman, *Física universitaria*, volumen 1, serie Sears–Zemansky, 12.ª edición, Pearson Educación, 2009: capítulo 12, gravitación, energía, satélites y leyes de Kepler.

R. A. Serway y C. Vuille, *Fundamentos de física*, volumen 1, 9.ª edición, Cengage Learning, 2012: secciones 7.5–7.6, gravitación newtoniana y leyes de Kepler. Los datos, enunciados, soluciones y ayudas de este capítulo tienen formulación original.

# CAPÍTULO 12

# PRESIÓN, FLOTACIÓN Y FLUIDOS


12.1 Densidad y presión: dos cocientes con distinto significado . . 240
12.2 Cómo cambia la presión con la altura . . . . . 241
12.3 Pascal y el intercambio entre fuerza y recorrido . . . . . 243
12.4 Arquímedes: del gradiente de presión al empuje . . . . . 245
12.5 Conservar la masa de un fluido que circula . . . . . 248
12.6 Bernoulli: seguir la energía de una corriente . . . . . 249
12.7 Del depósito al chorro: hipótesis y predicciones . . . . . 251
Ejercicios para reconstruir y transferir 253
Soluciones razonadas . . . . . 257
Una experiencia: el alcance de un chorro . . . . . 258
Diagnóstico antes de avanzar . . . . 259


Una botella llena de agua puede sostener un objeto que se hundiría en el aire. Una prensa permite levantar una carga grande mediante una fuerza pequeña. Y un chorro se estrecha mientras cae, aunque nadie retire agua de sus costados. Estos hechos parecen diferentes; todos pueden estudiarse siguiendo las fuerzas, la masa y la energía de un fluido.

Comenzaremos por el equilibrio. La presión permitirá expresar cómo se distribuye una fuerza sobre una superficie, y su variación con la altura explicará tanto la flotación como los instrumentos de medida. Después dejaremos moverse al líquido: conservar la masa fijará el caudal; conservar la energía relacionará presión, rapidez y elevación. En cada paso habrá que decidir qué condiciones hacen razonable el modelo.

## 12.1 Densidad y presión: dos cocientes con distinto significado

Un fluido puede deformarse continuamente bajo una fuerza tangencial sostenida. Los líquidos conservan aproximadamente su volumen; los gases cambian de volumen con mucha mayor facilidad. En reposo, un fluido ordinario ejerce sobre una pared una fuerza perpendicular a ella. Si pudiera sostener una tensión tangencial sin deformarse, el modelo de fluido en reposo dejaría de describirlo.

La densidad media es la masa dividida por el volumen ocupado, $\rho = m/V$, y se mide en $\mathrm{kg/m^3}$. Para un material homogéneo coincide con su densidad local. En una distribución no uniforme, la definición local es $\rho = dm/dV$; la masa total se obtiene sumando $dm = \rho\, dV$. Usaremos líquidos de densidad constante y tomaremos $\rho_{\text{agua}} = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$ y $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$, salvo indicación distinta. La temperatura y la composición pueden modificar esas densidades.

La presión media sobre una superficie plana es $p_{\text{media}} = F_\perp/A = (1/A)\int_A p\, dA$. Su definición local es $p = dF_\perp/dA$; una distribución uniforme tiene presión local igual a ese promedio. Un pascal es un newton por metro cuadrado: $1\,\mathrm{Pa} = 1\,\mathrm{N/m^2}$. La presión es escalar; la dirección de la fuerza se obtiene de la orientación de cada superficie. Sobre un área curva, las fuerzas elementales tienen direcciones distintas y se suman como vectores.

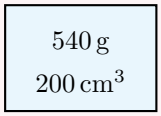
### PROBLEMA RESUELTO 12.1 · Un volumen pequeño en unidades coherentes

Una pieza homogénea tiene masa 540 g y volumen $200\,\mathrm{cm^3}$. Calcula su densidad en unidades SI.

*Resolución.* Como $1\,\mathrm{cm^3} = 10^{-6}\,\mathrm{m^3}$, el volumen es $2{,}00 \times 10^{-4}\,\mathrm{m^3}$ y la masa, 0,540 kg. Por tanto,

$$\rho = \frac{0{,}540}{2{,}00 \times 10^{-4}} = 2700\,\mathrm{kg/m^3}.$$

También resulta $2{,}70\,\mathrm{g/cm^3}$. El factor de conversión afecta a las tres dimensiones del volumen: convertir solo una longitud daría una densidad equivocada.




$\rho = 2700\,\mathrm{kg/m^3}$

Masa y volumen describen la misma pieza. La forma dibujada es esquemática.

### PROBLEMA RESUELTO 12.2 · La misma fuerza sobre dos áreas

Una fuerza normal de 600 N se distribuye uniformemente primero sobre $0{,}030\,\mathrm{m^2}$ y después sobre $0{,}0060\,\mathrm{m^2}$. Compara las presiones.

*Resolución.* Las presiones son $p_1 = 600/0{,}030 = 20\,\mathrm{kPa}$ y $p_2 = 600/0{,}0060 = 100\,\mathrm{kPa}$. Reducir el área a la quinta parte multiplica la presión por cinco. La fuerza total sigue siendo 600 N en cada caso. Si dos superficies tienen igual presión pero áreas distintas, en cambio, las fuerzas normales serán distintas: $F = pA$.

| $F_\perp$ | $A$ | $p = F_\perp/A$ |
|---|---|---|
| 600 N | $0{,}030\,\mathrm{m^2}$ | 20 kPa |
| 600 N | $0{,}0060\,\mathrm{m^2}$ | 100 kPa |

La fuerza es la misma. Reducir el área a la quinta parte quintuplica la presión.

## 12.2 Cómo cambia la presión con la altura

Tomemos un pequeño prisma de líquido en reposo, con área horizontal $A$ y espesor $dz$. El eje $z$ apunta hacia arriba. En su base actúa $p(z)A$ hacia arriba; en su cara superior, $p(z+dz)A$ hacia abajo; su peso es $\rho g A\,dz$. El equilibrio exige

$$p(z)A - p(z+dz)A - \rho g A\,dz = 0.$$

Al dividir por $A\,dz$ y tomar el límite obtenemos $dp/dz = -\rho g$. Para densidad y gravedad constantes, integrar entre dos niveles da

$$p_2 - p_1 = -\rho g(z_2 - z_1), \qquad p = p_s + \rho g h. \tag{12.1}$$

En la segunda forma, $h$ es la profundidad bajo una superficie cuya presión es $p_s$. La presión depende del desnivel, del fluido y de la presión de referencia, cualquiera sea la forma del recipiente. A igual altura, dos puntos de un mismo líquido conectado y en reposo tienen la misma presión. Comparar fluidos distintos o recipientes aislados con presiones superficiales diferentes requiere incluir esos datos en el balance.

La *presión absoluta* se mide respecto del vacío. La *presión manométrica* es $p_{\text{man}} = p_{\text{abs}} - p_{\text{atm}}$. Puede ser negativa sin que lo sea la presión absoluta. En un recipiente abierto, $p_s = p_{\text{atm}}$; en uno cerrado, la presión del gas superior debe conocerse. Al calcular la fuerza neta sobre una pared que tiene aire al otro lado se resta esa presión exterior. Si se emplea $p_{\text{man}}$, esa resta ya está hecha.

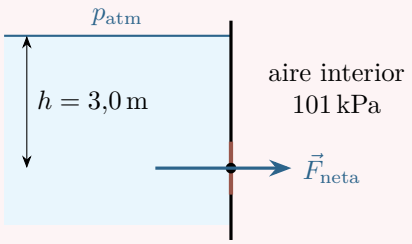
**PROBLEMA RESUELTO 12.3 · Una ventana bajo el agua**

El centro de una ventana pequeña de área $0{,}020\,\text{m}^2$ está $3{,}0\,\text{m}$ bajo una superficie de agua abierta. Dentro hay aire a $101\,\text{kPa}$, igual que fuera en la superficie. Calcula la presión absoluta en el centro y la fuerza neta aproximada. Supón pequeña la variación de profundidad sobre la ventana.

*Resolución.* El incremento hidrostático es $\rho g h = 1000(9{,}8)(3) = 29{,}4\,\text{kPa}$. Así, $p_{\text{abs}} = 130{,}4\,\text{kPa}$. La fuerza neta usa la diferencia con el aire interior:

$$F_{\text{neta}} = (130{,}4 - 101)10^3(0{,}020) = 588\,\text{N}.$$

Apunta hacia dentro. Multiplicar la presión absoluta por el área calcularía la fuerza del agua sobre una cara; la resultante requiere combinar las fuerzas de ambas caras. Para una ventana plana vertical de área conocida, la presión media coincide además con la presión en su centroide, si la densidad es constante.




La presión exterior en el centro es absoluta. Para hallar la fuerza neta se resta la presión del aire interior. Esquema sin escala.

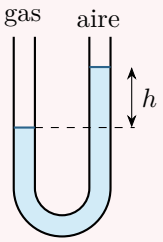
### PROBLEMA RESUELTO 12.4 · Leer el signo de un manómetro

Un tubo en U contiene mercurio de densidad $13600\,\mathrm{kg/m^3}$. Un brazo comunica con un gas y el otro con la atmósfera. El mercurio queda 8,0 cm más alto en el brazo abierto. Determina la presión manométrica del gas. Desprecia la variación de presión en los gases.

*Resolución.* En el brazo abierto descendemos 0,080 m hasta el nivel de la interfaz del otro brazo. La presión aumenta en $\rho g h$; a ese nivel ambas ramas del mercurio tienen la misma presión. Resulta

$$p_g - p_{\mathrm{atm}} = 13600(9{,}8)(0{,}080) \simeq 10{,}7\,\mathrm{kPa}.$$

El gas tiene mayor presión que el ambiente: ha deprimido el mercurio de su lado. Invertir las alturas cambiaría el signo de la lectura.




$p_g > p_{\mathrm{atm}}$

La rama abierta queda más alta: la presión del gas es mayor. Se comparan presiones al mismo nivel dentro del mercurio.

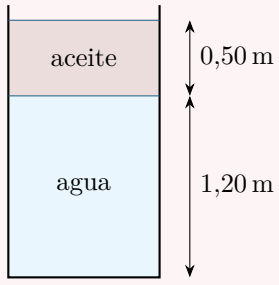
### PROBLEMA RESUELTO 12.5 · Dos líquidos, dos incrementos

Un depósito abierto contiene 0,50 m de aceite de densidad $800\,\mathrm{kg/m^3}$ sobre 1,20 m de agua. Halla la presión manométrica en el fondo. Los líquidos son inmiscibles; desprecia efectos de tensión superficial.

*Resolución.* La presión es continua al atravesar una interfaz plana sin tensión superficial apreciable. Sumamos el aumento en cada capa:

$$p_f - p_{\mathrm{atm}} = 800(9{,}8)(0{,}50) + 1000(9{,}8)(1{,}20) = 15680\,\mathrm{Pa}.$$

Equivale a una columna de agua de 1,60 m, menor que la altura geométrica total de 1,70 m. Usar una sola densidad para toda la columna perdería la contribución distinta del aceite.




$p_f - p_{\mathrm{atm}} = 15{,}68\,\mathrm{kPa}$

Cada capa aporta un incremento $\rho_i g h_i$. La presión es continua al cruzar la interfaz en el modelo usado.

**PROBLEMA RESUELTO 12.6 · Una compuerta: sumar fuerzas distribuidas**

Una compuerta vertical rectangular tiene ancho $b = 1{,}0\,\mathrm{m}$ y altura $H = 2{,}0\,\mathrm{m}$. Su borde superior coincide con la superficie de agua abierta; al otro lado hay aire a presión atmosférica. Calcula la fuerza neta y la profundidad a la que actúa su resultante.

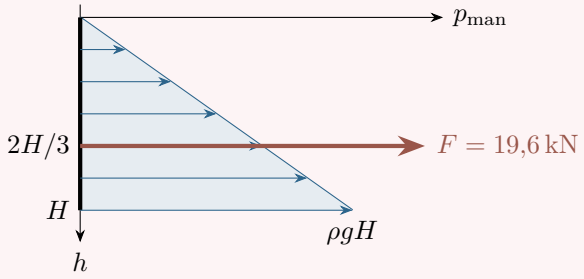
*Resolución.* A profundidad $h$, la presión manométrica es $\rho g h$. Una franja horizontal de espesor $dh$ recibe $dF = \rho g h b\,dh$. Por tanto,

$$F = \int_0^H \rho g b h\,dh = \frac{1}{2}\rho g b H^2 = 19600\,\mathrm{N}.$$

Para ubicar la resultante igualamos su momento respecto del borde superior al de todas las franjas:

$$F h_R = \int_0^H h\,dF = \frac{1}{3}\rho g b H^3, \qquad h_R = \frac{2H}{3} = 1{,}33\,\mathrm{m}.$$

La fuerza actúa por debajo del centro geométrico porque las franjas inferiores reciben mayor presión. Su módulo también se obtiene con $\rho g (H/2) b H$; localizar el punto de aplicación requiere calcular el momento de la distribución, que difiere del correspondiente a $H/2$.




La distribución de presión es triangular. Su centroide está a $2H/3$: allí debe pasar la resultante para conservar el momento de todas las franjas.

## 12.3 Pascal y el intercambio entre fuerza y recorrido

Si aumentamos la presión en una frontera de un líquido confinado, su nuevo equilibrio sigue cumpliendo $p = p_s + \rho g h$. Cuando la geometría y la densidad se mantienen, cada punto recibe el mismo incremento $\Delta p_s$. Este es el principio de Pascal: se transmite el incremento de presión. Las presiones totales de puntos a distinta altura pueden seguir siendo diferentes.

En una prensa ideal con pistones a la misma altura, sin rozamiento ni peso de los pistones, y con la misma presión exterior en ambos, las fuerzas aplicadas satisfacen

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}. \tag{12.2}$$

Para un desplazamiento pequeño, el líquido incompresible obliga a que $A_1 s_1 = A_2 s_2$, donde los $s$ son módulos de recorridos opuestos. Multiplicar ambas relaciones da $F_1 s_1 = F_2 s_2$: la mayor fuerza se obtiene a costa de un menor recorrido. La igualdad de trabajos supone pérdidas despreciables y un cambio despreciable de energía potencial del líquido. Para desniveles apreciables hay que añadir el término hidrostático; para movimientos grandes, actualizar las alturas.

**PROBLEMA RESUELTO 12.7 · Una prensa y sus dos recorridos**

Los pistones de una prensa ideal tienen áreas de $4{,}0\,\mathrm{cm}^2$ y $100\,\mathrm{cm}^2$. Se aplica una fuerza de $120\,\mathrm{N}$ al menor, que desciende $0{,}25\,\mathrm{m}$. Calcula la fuerza de salida, el ascenso mayor y los trabajos. Desprecia las correcciones por desnivel durante el movimiento.

*Resolución.* La razón de áreas es 25, por lo que $F_2 = 25(120) = 3000\,\mathrm{N}$. La conservación del volumen da $s_2 = s_1/25 = 0{,}010\,\mathrm{m}$. Los trabajos de entrada y de salida tienen el mismo módulo:

$$W_{\text{entrada}} = 120(0{,}25) = 30\,\mathrm{J}, \qquad W_{\text{salida}} = 3000(0{,}010) = 30\,\mathrm{J}.$$

El trabajo que la carga realiza sobre el dispositivo tiene signo negativo; el que el dispositivo realiza sobre la carga es positivo. Las áreas pueden compararse en $\mathrm{cm}^2$ porque sus unidades se cancelan en la razón.

| **Magnitud** | **Pistón menor** | **Pistón mayor** |
|---|---|---|
| Área | $4\,\mathrm{cm}^2$ | $100\,\mathrm{cm}^2$ |
| Fuerza | $120\,\mathrm{N}$ | $3000\,\mathrm{N}$ |
| Recorrido | $0{,}25\,\mathrm{m}$ | $0{,}010\,\mathrm{m}$ |
| Trabajo (módulo) | $30\,\mathrm{J}$ | $30\,\mathrm{J}$ |

La razón de fuerzas es 25 y la de recorridos es su inversa. Las condiciones ideales del enunciado hacen iguales los trabajos.

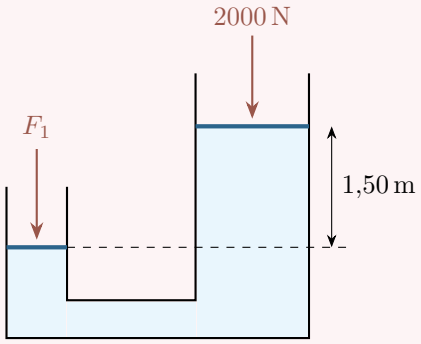
**PROBLEMA RESUELTO 12.8 · El pistón de salida está más arriba**

En equilibrio, un pistón de $0{,}010\,\mathrm{m}^2$ sostiene una carga de $2000\,\mathrm{N}$ y está $1{,}50\,\mathrm{m}$ por encima de otro de $4{,}0\times10^{-4}\,\mathrm{m}^2$. El aceite tiene densidad $800\,\mathrm{kg/m}^3$. Ambos pistones carecen de peso y rozamiento y están expuestos a la misma atmósfera. ¿Qué fuerza hacia abajo requiere el pistón menor?

*Resolución.* Bajo el pistón mayor, $p_{2,\mathrm{man}} = 2000/0{,}010 = 200000\,\mathrm{Pa}$. Como el menor está más abajo, su presión debe ser mayor:

$$p_{1,\mathrm{man}} = 200000 + 800(9{,}8)(1{,}50) = 211760\,\mathrm{Pa}.$$

Luego $F_1 = p_{1,\mathrm{man}}A_1 = 84{,}704\,\mathrm{N} \simeq 84{,}7\,\mathrm{N}$. Ignorar el desnivel daría $80\,\mathrm{N}$. El principio de Pascal sigue siendo válido; lo que cambia con la altura es el valor de equilibrio sobre el que se transmite un incremento de presión.




$$p_{1,\mathrm{man}} = p_{2,\mathrm{man}} + \rho g \Delta z$$

El pistón menor está más abajo. Las dimensiones y los tamaños de pistón son esquemáticos; el cálculo usa las áreas del enunciado.

## 12.4 Arquímedes: del gradiente de presión al empuje

Imaginemos un volumen de líquido en reposo y marquemos su frontera sin retirar materia. Las fuerzas que el líquido circundante ejerce sobre esa frontera equilibran el peso del volumen marcado. Si lo sustituimos por un cuerpo de la misma forma, las presiones en las mismas posiciones producen la misma resultante, siempre que se mantengan el campo hidrostático y el contacto del fluido con la superficie. Esa resultante es el *empuje*:

$$B = \rho_f g V_d. \tag{12.3}$$

$V_d$ es el volumen de fluido desplazado; para un cuerpo parcialmente sumergido, solo cuenta la porción sumergida. El empuje apunta hacia arriba y su línea de acción pasa por el centro de volumen desplazado cuando $\rho_f$ es uniforme. Para capas de densidad diferente, se suman $\rho_i g V_i$. El aire también ejerce empuje, aunque aquí lo despreciaremos frente al del agua y frente al peso de objetos densos.

El empuje queda determinado por el fluido desplazado y el campo gravitatorio. Un cuerpo sostenido e inmerso puede tener $B < mg$ o $B > mg$. Para flotar libremente en equilibrio vertical, sin otros apoyos ni tensiones, sí debe cumplirse $B = mg$. Si es homogéneo, de densidad $\rho_c$, se obtiene $V_d/V = \rho_c/\rho_f$. Una fracción mayor que uno indica que la flotación parcial es imposible. La igualdad de densidades permite equilibrio totalmente sumergido, idealmente neutro frente a desplazamientos verticales. La estabilidad ante un giro requiere además estudiar los momentos de las fuerzas.

La derivación necesita fuerzas de presión alrededor del volumen desplazado. Un objeto sellado contra el fondo, sin líquido debajo, requiere estudiar las presiones efectivamente presentes en sus superficies. En ese caso deben calcularse las fuerzas de presión y de contacto con la distribución real del líquido.

### PROBLEMA RESUELTO 12.9 · Lo que mide el dinamómetro

Un cuerpo de masa 5,0 kg y volumen $2{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$ permanece completamente sumergido en agua, suspendido de un dinamómetro. No toca el fondo. Calcula el empuje y la lectura. *Resolución.* El empuje es $B = 1000(9{,}8)(0{,}0020) = 19{,}6\,\mathrm{N}$. El equilibrio vertical del cuerpo exige $T + B - mg = 0$; por tanto,

$$T = 49{,}0 - 19{,}6 = 29{,}4\,\mathrm{N}.$$

El dinamómetro mide la tensión, llamada aquí peso aparente; la fuerza gravitatoria sigue siendo 49,0 N. En el equilibrio vertical, la tensión aporta 29,4 N y el empuje los 19,6 N restantes.

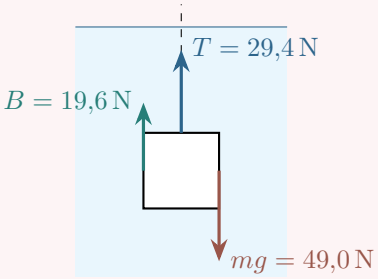



Diagrama de fuerzas del cuerpo sumergido. Las flechas indican sentidos; los módulos se obtienen del cálculo.

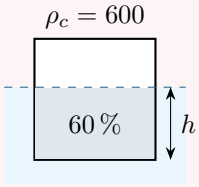
### PROBLEMA RESUELTO 12.10 · Cuánto emerge y cuánto puede cargar

Un cubo homogéneo de arista 0,10 m y densidad $600\,\mathrm{kg/m}^3$ flota en agua con sus caras horizontales. Halla su calado y la masa adicional máxima que puede sostener justo antes de sumergirse por completo. La carga permanece fuera del agua y no altera la orientación.

*Resolución.* Su volumen es $10^{-3}\,\mathrm{m}^3$ y su masa, 0,60 kg. La fracción sumergida vale $600/1000 = 0{,}60$, de modo que el calado es 0,060 m. Al límite, el agua desplazada tiene masa 1,00 kg. La carga máxima resulta

$$m_{\text{carga}} = 1{,}00 - 0{,}60 = 0{,}40\,\mathrm{kg}.$$

La carga de 0,40 kg corresponde al límite ideal de equilibrio vertical en la orientación supuesta. El oleaje y la estabilidad de una carga alta exigen márgenes adicionales.




El calado es el 60

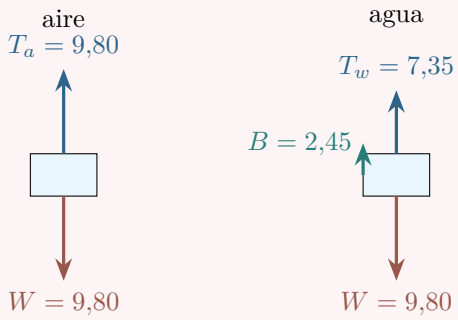
### PROBLEMA RESUELTO 12.11 · Inferir la densidad a partir del peso aparente

Una pieza pesa 9,80 N en aire y el dinamómetro marca 7,35 N cuando se sumerge por completo en agua. Ignora el empuje del aire y el volumen del hilo. Calcula la densidad de la pieza.

*Resolución.* La disminución de lectura es el empuje: $B = 9{,}80 - 7{,}35 = 2{,}45\,\mathrm{N}$. Entonces

$$V = \frac{2{,}45}{1000(9{,}8)} = 2{,}50 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^3, \qquad m = \frac{9{,}80}{9{,}8} = 1{,}00\,\mathrm{kg}.$$

La densidad es $m/V = 4000\,\mathrm{kg/m^3}$. También puede deducirse directamente $\rho_c = \rho_f W/(W - T)$. La pieza debe estar completamente sumergida, sin burbujas adheridas ni apoyo en el recipiente, para que la diferencia de lecturas permita determinar su volumen completo.




Fuerzas en newtons. Al despreciar el empuje del aire, la diferencia entre lecturas determina el empuje del agua. Las flechas son esquemáticas.

### PROBLEMA RESUELTO 12.12 · Hielo que flota y después se funde

Un bloque de hielo de densidad $900\,\mathrm{kg/m^3}$ flota primero en agua dulce de densidad $1000\,\mathrm{kg/m^3}$ y después en agua salada de densidad $1025\,\mathrm{kg/m^3}$. Compara las fracciones sumergidas. ¿Cambia el nivel al fundirse en el recipiente de agua dulce? Desprecia evaporación, variaciones térmicas del líquido y el volumen del aire desplazado.

*Resolución.* La fracción sumergida es $\rho_h/\rho_f$: vale 0,900 en agua dulce y $900/1025 \simeq 0{,}878$ en agua salada. El mismo peso requiere menos volumen desplazado en el líquido más denso. Para una masa de hielo $m$, antes de fundirse se desplaza $V_d = m/\rho_{\text{agua}}$. Después se incorpora agua líquida de volumen $m/\rho_{\text{agua}}$, exactamente el mismo. El nivel del recipiente de agua dulce permanece constante en este modelo. Para estudiar hielo dulce que se derrite en agua salada debemos incorporar la densidad y la mezcla del agua añadida.

| Estado del hielo | Volumen desplazado | Fracción sumergida |
|---|---|---|
| Flotando en agua dulce | $m/1000$ | 0,900 |
| Flotando en agua salada | $m/1025$ | 0,878 |
| Fundido en agua dulce | Volumen añadido: $m/1000$ | — |

Con $m$ en kilogramos y densidades en $\mathrm{kg/m^3}$, los volúmenes se expresan en $\mathrm{m^3}$. En agua dulce el volumen añadido al fundirse coincide con el que desplazaba el hielo.

## 12.5 Conservar la masa de un fluido que circula

En un flujo estacionario, las propiedades de cada punto fijo permanecen constantes mientras las partículas siguen moviéndose. Una línea de corriente es tangente a la velocidad local. Consideremos un tramo de tubería sin fugas ni ramificaciones. En un intervalo $dt$ atraviesa una sección de área $A$ un volumen $dV = Av\,dt$ si la velocidad es uniforme y normal a la sección. Si varía sobre ella, $v$ representará aquí su componente normal media.

El caudal volumétrico es $Q = dV/dt = Av$, medido en $\mathrm{m^3/s}$; $1\,\mathrm{L/s} = 10^{-3}\,\mathrm{m^3/s}$. El caudal másico es $\dot{m} = \rho A v$ para densidad uniforme en la sección. La ausencia de acumulación de masa exige

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2. \tag{12.4}$$

En un líquido incompresible, $\rho_1 = \rho_2$ y queda $A_1 v_1 = A_2 v_2$. En una unión, la suma de caudales másicos entrantes iguala a la de salientes. Igualar caudales volumétricos requiere además igual densidad. Una sección estrecha exige mayor rapidez para transportar el mismo caudal; determinar el caudal producido por una bomba o un depósito requiere completar el modelo.

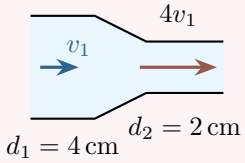
**PROBLEMA RESUELTO 12.13 · Reducir un diámetro a la mitad**

Agua circula de forma estacionaria por una tubería que pasa de 4,0 a 2,0 cm de diámetro. En la sección ancha la rapidez media es 0,50 m/s. Calcula la rapidez estrecha y el caudal.

*Resolución.* El área circular es $A = \pi d^2/4$. La razón de áreas vale cuatro, de modo que $v_2 = 4v_1 = 2{,}0\,\mathrm{m/s}$. El caudal es

$$Q = \pi(0{,}020)^2(0{,}50) \simeq 6{,}28 \times 10^{-4}\,\mathrm{m^3/s},$$

unos 0,628 L/s. El cambio de diámetro entra al cuadrado; duplicar la rapidez sería insuficiente para conservar el caudal.




Diámetros en razón 2:1; áreas en razón 4:1. Las longitudes de las flechas solo indican el aumento de rapidez.

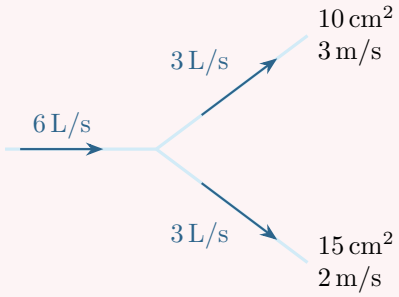
**PROBLEMA RESUELTO 12.14 · La continuidad en una bifurcación**

En una unión estacionaria entran 6,0 L/s de agua. Por una rama de área 10 cm$^2$ salen a 3,0 m/s. La otra rama tiene área 15 cm$^2$. Halla su caudal y rapidez. No hay fugas ni acumulación.

*Resolución.* La primera rama transporta $Q_a = (10 \times 10^{-4})(3) = 0{,}0030\,\mathrm{m^3/s} = 3{,}0\,\mathrm{L/s}$. La segunda debe llevar $Q_b = 6{,}0 - 3{,}0 = 3{,}0\,\mathrm{L/s}$. Por ello,

$$v_b = \frac{0{,}0030}{15 \times 10^{-4}} = 2{,}0\,\mathrm{m/s}.$$

El caudal de entrada se reparte entre las ramas, y su suma conserva el valor de entrada. Las dos ramas tienen igual caudal y distinta rapidez porque sus áreas son distintas. Las presiones y las resistencias del circuito determinan si ese reparto puede realizarse; la continuidad comprueba su compatibilidad con la conservación de masa.




El caudal entrante se reparte entre las dos ramas. Las secciones y la geometría se dibujan de manera esquemática.

## 12.6 Bernoulli: seguir la energía de una corriente

Sigamos un pequeño volumen $dV$ que avanza entre dos secciones de una corriente ideal. Su masa es $dm = \rho dV$. El fluido anterior realiza un trabajo $p_1 dV$ sobre el tramo; el tramo entrega un trabajo $p_2 dV$ al fluido posterior. Al aplicar el teorema de trabajo y energía, incorporando la gravedad mediante energía potencial, se obtiene

$$(p_1 - p_2)dV = \tfrac{1}{2}\rho dV(v_2^2 - v_1^2) + \rho g dV(z_2 - z_1).$$

En régimen estacionario se cancelan las contribuciones intermedias que no cambian en el tiempo. Dividir por $dV$ y reagrupar conduce a

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2. \tag{12.5}$$

Cada término tiene unidades de presión, o de energía por unidad de volumen. Dividiendo por $\rho g$ aparecen alturas: $p/(\rho g)$, $v^2/(2g)$ y $z$. El término $p\,dV$ representa el trabajo de las fuerzas de presión en las fronteras elegidas.

La relación se aplica entre puntos de una misma línea de corriente en un flujo estacionario, incompresible y con disipación viscosa despreciable, sin bombas ni turbinas entre los puntos. En una tubería usaremos además velocidades aproximadamente uniformes en las secciones; un perfil muy desigual exige correcciones de energía cinética. Cada aplicación requiere comprobar que el régimen de flujo satisface esas condiciones. Rozamiento importante, cambios bruscos, remolinos o una máquina que entrega trabajo obligan a ampliar el balance. Cada línea de corriente puede tener su propia constante de Bernoulli.

Si los dos puntos tienen igual altura, mayor rapidez corresponde a menor presión dentro de este modelo. Si las alturas difieren, el término gravitatorio también interviene. Puede usarse presión manométrica en ambos extremos cuando se resta la misma referencia atmosférica. En un chorro libre expuesto al aire, la presión es aproximadamente la atmosférica, de acuerdo con la condición en su superficie.

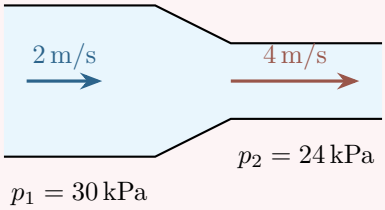
### PROBLEMA RESUELTO 12.15 · Un estrechamiento horizontal

Una tubería horizontal ideal lleva 1,6 L/s de agua. Sus áreas son 8,0 y 4,0 $\mathrm{cm}^2$. En la sección ancha la presión manométrica es 30 kPa. Calcula las velocidades y la presión en la sección estrecha.

*Resolución.* Convertimos $Q = 1{,}6 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$ y las áreas a $\mathrm{m}^2$. Resultan $v_1 = 2{,}0\,\mathrm{m/s}$ y $v_2 = 4{,}0\,\mathrm{m/s}$. Bernoulli, con $z_1 = z_2$, da

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2) = 30000 + 500(4 - 16) = 24000\,\mathrm{Pa}.$$

La presión baja 6,0 kPa mientras aumenta la energía cinética por unidad de volumen en esa misma cantidad. Una diferencia de presión impulsa y acelera el líquido; el balance de energía relaciona esa aceleración con los cambios de presión y altura.




Presiones manométricas. En este flujo horizontal ideal, el aumento de energía cinética por unidad de volumen coincide con la disminución de presión.

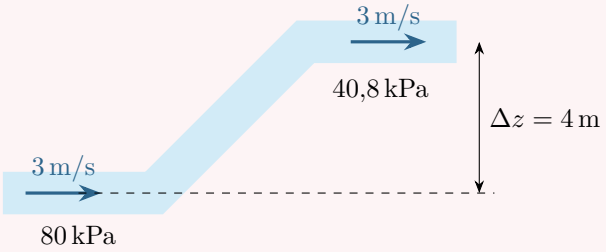
**PROBLEMA RESUELTO 12.16 · La altura también cuesta presión**

Agua asciende por una tubería ideal de sección constante. Entre dos puntos de una misma corriente sube 4,0 m; la rapidez es 3,0 m/s en ambos. Si abajo hay 80 kPa manométricos, ¿qué presión hay arriba?

*Resolución.* Los términos cinéticos se cancelan porque la continuidad mantiene la rapidez. Así,

$$p_2 = p_1 - \rho g(z_2 - z_1) = 80000 - 1000(9{,}8)(4) = 40800\,\text{Pa}.$$

Arriba hay 40,8 kPa manométricos y la rapidez conserva su valor. El descenso de presión sostiene el aumento de energía potencial por unidad de volumen. En una tubería real habría además una caída asociada a disipación, si ninguna bomba actuara entre esos puntos.




La rapidez permanece constante, pero la presión manométrica disminuye al subir. La inclinación del dibujo es esquemática.

## 12.7 Del depósito al chorro: hipótesis y predicciones

Un depósito grande abierto descarga por un pequeño orificio a profundidad $h$ bajo su superficie. Elegimos un punto en la superficie y otro en el chorro recién salido. Ambos están aproximadamente a presión atmosférica. Si el área del depósito es mucho mayor que la del chorro, la rapidez superficial es despreciable. El balance ideal reduce entonces $\rho g h = \rho v^2/2$:

$$v = \sqrt{2gh}. \tag{12.6}$$

Es la ley de Torricelli: el líquido sale con la rapidez que adquiriría una caída libre a través de $h$. La densidad se cancela. La semejanza de rapidez procede del balance de energía, aunque las trayectorias y las fuerzas durante el movimiento sean distintas.

El nivel baja durante el vaciado. La fórmula puede usarse de manera cuasiestacionaria si ese descenso es lento comparado con el ajuste del flujo, pero el caudal $Q = Av$ disminuye al disminuir $h$. En un orificio real, el chorro puede contraerse y su rapidez puede ser menor que la ideal; el área efectiva y las pérdidas deben medirse o modelarse. La contracción del chorro puede hacer que su sección mínima difiera del área geométrica del agujero.

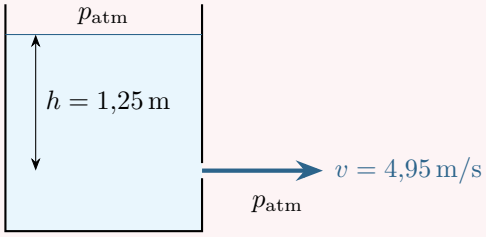
### PROBLEMA RESUELTO 12.17 · La rapidez y el caudal instantáneos

Un depósito grande abierto tiene una salida ideal de sección efectiva $2{,}0\,\mathrm{cm}^2$, situada $1{,}25\,\mathrm{m}$ bajo el nivel del agua. Calcula la rapidez y el caudal en ese instante. Supón despreciable la rapidez de la superficie y las pérdidas.

*Resolución.* Torricelli da $v = \sqrt{2(9{,}8)(1{,}25)} = \sqrt{24{,}5} \simeq 4{,}95\,\mathrm{m/s}$. Entonces

$$Q = (2{,}0 \times 10^{-4})(4{,}95) \simeq 9{,}90 \times 10^{-4}\,\mathrm{m^3/s} = 0{,}990\,\mathrm{L/s}.$$

Ese caudal permitiría llenar inicialmente casi un litro por segundo. Calcular el tiempo de vaciado completo requiere además conocer la geometría del depósito y cómo cambia el nivel. Al reducir $h$ a la cuarta parte, tanto la rapidez como el caudal se reducirían a la mitad si la sección efectiva se mantuviera.




La misma presión atmosférica aparece en la superficie y en el chorro. El desnivel determina la rapidez ideal instantánea.

**PROBLEMA RESUELTO 12.18 · Un alcance que permite poner a prueba el modelo**

La superficie de un depósito grande abierto está 1,80 m por encima de una boquilla horizontal situada 0,80 m sobre el suelo. La sección efectiva del chorro es 1,0 $\text{cm}^2$. Predice rapidez, caudal y alcance horizontal ideales. Después interpreta una rapidez de salida medida de 4,50 m/s. Desprecia la resistencia del aire y considera lento el descenso del nivel.

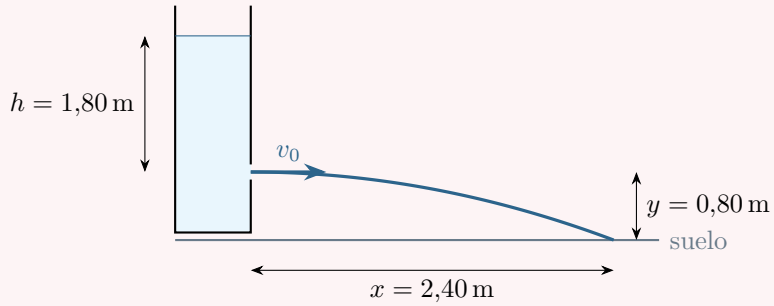
*Resolución.* El desnivel que acelera el líquido es la diferencia de altura entre la superficie y la salida: 1,80 m. En el modelo ideal,

$$v = \sqrt{2(9{,}8)(1{,}80)} \simeq 5{,}94\,\text{m/s}, \qquad Q \simeq 5{,}94 \times 10^{-4}\,\text{m}^3/\text{s} = 0{,}594\,\text{L/s}.$$

Al salir, cada pequeña porción sigue aproximadamente un tiro horizontal. Su tiempo de caída es $t = \sqrt{2(0{,}80)/9{,}8} \simeq 0{,}404\,\text{s}$; el alcance resulta $x = vt = 2\sqrt{(1{,}80)(0{,}80)} = 2{,}40\,\text{m}$. La rapidez medida produciría $x \simeq 4{,}50(0{,}404) = 1{,}82\,\text{m}$. Si las alturas y presiones se mantienen, el déficit de energía mecánica por unidad de peso puede expresarse como una altura de pérdida:

$$h_L = 1{,}80 - \frac{4{,}50^2}{2(9{,}8)} \simeq 0{,}767\,\text{m}.$$

Ese término amplía el balance a $h = v^2/(2g) + h_L$. La energía total se conserva; parte de la energía mecánica se transforma en energía interna y movimiento desordenado. El dato cuantifica un déficit respecto del modelo; identificar su causa requiere evidencia adicional. También convendría comprobar el nivel, la dirección del chorro y la sección efectiva.




El desnivel $h$ fija la rapidez de salida; la altura $y$ fija el tiempo de vuelo. Trayectoria parabólica esquemática, con escalas horizontal y vertical distintas.

## Ejercicios para reconstruir y transferir

Intenta primero representar la situación y elegir las fronteras del sistema. Usa $g = 9{,}8\,\text{m/s}^2$ y agua de densidad $1000\,\text{kg/m}^3$. En los problemas de flujo ideal se suponen régimen estacionario o cuasiestacionario, líquido incompresible, pérdidas despreciables y velocidades uniformes en las secciones. En flotación desprecia el empuje del aire y la tensión superficial, salvo que se indique otra cosa.

**EJERCICIO 12.1 · Masa de un líquido**

Un líquido homogéneo de densidad $850\,\text{kg/m}^3$ ocupa 2,4 L. Calcula su masa y su peso.

**EJERCICIO 12.2 · De área a fuerza**

Una presión uniforme de 35 kPa actúa sobre 12 $cm^2$. Calcula la fuerza normal sobre esa cara. ¿Cuál sería la resultante si la cara opuesta recibiera la misma presión?

**EJERCICIO 12.3 · Diferencia entre profundidades**

Dos puntos de un mismo depósito abierto de agua están a 0,50 y 2,50 m de profundidad. Determina la diferencia de presiones y señala cuál es mayor.

**EJERCICIO 12.4 · Absoluta y manométrica**

En un lugar con presión atmosférica de 98 kPa, un instrumento marca −15 kPa manométricos en una cámara. Halla la presión absoluta. Explica si el signo implica presión absoluta negativa.

**EJERCICIO 12.5 · Manómetro de agua**

Un gas se conecta a un brazo de un tubo en U con agua; el otro queda abierto. El agua está 12 cm más alta del lado del gas. Halla la presión manométrica del gas, despreciando el peso del aire.

**EJERCICIO 12.6 · Capas y profundidad equivalente**

Hay 0,40 m de aceite de densidad 750 $kg/m^3$ sobre 0,80 m de agua en un vaso abierto. Calcula la presión manométrica inferior y la profundidad de agua pura que produciría lo mismo.

**EJERCICIO 12.7 · Una tapa horizontal**

Una tapa horizontal de área 0,015 $m^2$ separa agua situada arriba de aire atmosférico debajo. Está 0,60 m bajo una superficie abierta. Determina la fuerza neta de presión y su sentido. Desprecia el peso de la tapa.

**EJERCICIO 12.8 · Centro de presión**

Repite el cálculo de la compuerta del problema 12.6 para ancho 0,80 m y altura 1,50 m, con el borde superior en la superficie. Determina fuerza y profundidad de aplicación.

**EJERCICIO 12.9 · Una razón de radios**

Una prensa ideal tiene radios de pistón 1,0 y 5,0 cm. A igual altura, ¿qué carga sostiene una fuerza de 90 N en el menor? Si este desciende 20 cm, ¿cuánto sube el mayor? Ignora correcciones de altura.

**EJERCICIO 12.10 · El costo energético de levantar**

En una prensa ideal que trabaja a igual altura, el pistón mayor levanta 1800 N una distancia de 0,040 m. El área mayor es veinte veces la menor. Calcula fuerza, recorrido y trabajo de entrada. Desprecia cambios de energía potencial del líquido.

**EJERCICIO 12.11 · Corregir un desnivel**

Dos pistones ideales tienen igual presión atmosférica exterior. El mayor, de $0{,}020\,\mathrm{m}^2$, sostiene 1000 N y está 2,0 m por debajo del menor, de $0{,}0010\,\mathrm{m}^2$. La densidad del líquido es $900\,\mathrm{kg/m}^3$. Calcula la fuerza necesaria hacia abajo en el menor para equilibrio.

**EJERCICIO 12.12 · Empuje antes de conocer la masa**

Un objeto desplaza $350\,\mathrm{cm}^3$ de agua. Calcula el empuje. ¿Puede determinarse su masa con ese único dato si está sostenido por un hilo? ¿Y si flota libremente en equilibrio?

**EJERCICIO 12.13 · La fuerza de un hilo hacia abajo**

Una esfera de volumen $0{,}0040\,\mathrm{m}^3$ y masa 2,0 kg está totalmente sumergida en agua. Un hilo vertical la sujeta al fondo sin que lo toque. Calcula la tensión y dibuja sus tres fuerzas.

**EJERCICIO 12.14 · Calado en agua salada**

Un bloque homogéneo de densidad $700\,\mathrm{kg/m}^3$ y altura 0,20 m flota verticalmente en un líquido de densidad $1050\,\mathrm{kg/m}^3$. Determina la fracción sumergida y la altura emergida.

**EJERCICIO 12.15 · Volumen y densidad de una pieza**

Una pieza pesa 19,6 N en aire y su peso aparente al sumergirse completamente en agua es 14,7 N. Calcula masa, volumen y densidad, despreciando el empuje del aire.

**EJERCICIO 12.16 · Volumen repartido entre dos líquidos**

Un cuerpo de 1,0 kg y volumen $1{,}2 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$ queda en equilibrio atravesando una interfaz entre aceite de densidad $800\,\mathrm{kg/m}^3$ y agua de densidad $1000\,\mathrm{kg/m}^3$. No sobresale al aire ni toca paredes. Halla el volumen en cada líquido, sin tensión superficial.

**EJERCICIO 12.17 · Caudal y tiempo de llenado**

Una tubería de sección $3{,}0\,\mathrm{cm}^2$ lleva agua a rapidez media constante 2,0 m/s. Halla el caudal y el tiempo para llenar 90 L, sin pérdidas de agua.

### EJERCICIO 12.18 · Un gas que cambia de densidad

En flujo estacionario sin fugas, un gas pasa de densidad $1{,}2\,\mathrm{kg/m^3}$ y área $20\,\mathrm{cm^2}$ a densidad $0{,}80\,\mathrm{kg/m^3}$ y área $10\,\mathrm{cm^2}$. Si $v_1 = 5{,}0\,\mathrm{m/s}$, halla $v_2$ y ambos caudales volumétricos. ¿Qué caudal se conserva?

### EJERCICIO 12.19 · Dos salidas

Entran $8{,}0\,\mathrm{L/s}$ de agua a una unión. Una salida de $12\,\mathrm{cm^2}$ lleva $2{,}5\,\mathrm{m/s}$. Calcula la rapidez de la otra salida si su área es $20\,\mathrm{cm^2}$.

### EJERCICIO 12.20 · Presión en un tramo horizontal

En una tubería horizontal ideal, el agua pasa de 1,0 a 3,0 m/s. En la sección lenta hay 25 kPa manométricos. Halla la presión en la sección rápida y la razón de áreas $A_1/A_2$.

### EJERCICIO 12.21 · Cambian rapidez y altura

En un conducto ideal, el agua pasa de $v_1 = 2{,}0\,\mathrm{m/s}$ a $v_2 = 4{,}0\,\mathrm{m/s}$ mientras asciende 3,0 m. Si $p_{1,\mathrm{man}} = 70\,\mathrm{kPa}$, calcula $p_{2,\mathrm{man}}$ e identifica las dos contribuciones al cambio.

### EJERCICIO 12.22 · El nivel desciende

Un depósito grande tiene una salida ideal de sección efectiva $1{,}5\,\mathrm{cm^2}$. Calcula rapidez y caudal cuando el desnivel es 0,80 m. Compara con el instante en que el desnivel es 0,20 m. Calcula cómo varía el caudal a medida que baja el nivel.

### EJERCICIO 12.23 · Elegir el orificio para un alcance

La superficie de un depósito grande está a altura fija $H = 2{,}0\,\mathrm{m}$ sobre el suelo. Un chorro ideal sale horizontalmente por un orificio a altura $y$, con $0 < y < H$. Deduce el alcance $x(y)$ y determina qué altura lo maximiza. Desprecia el aire.

### EJERCICIO 12.24 · Un balance con pérdida

Agua sale de un depósito grande abierto por una boquilla situada 2,0 m bajo la superficie. Se mide $v = 5{,}0\,\mathrm{m/s}$. Calcula la altura de pérdida equivalente $h_L$ y el déficit de energía mecánica por cada litro descargado. Supón ambas presiones atmosféricas y rapidez superficial despreciable.

## Soluciones razonadas

**SOLUCIÓN 12.1.**
El volumen es $2{,}4\times10^{-3}\,\mathrm{m}^3$. De $m=\rho V$ resulta $m=2{,}04\,\mathrm{kg}$; su peso es $mg=19{,}992\,\mathrm{N}\simeq 20{,}0\,\mathrm{N}$. La densidad relaciona la masa con el volumen.

**SOLUCIÓN 12.2.**
Convertimos $12\,\mathrm{cm}^2=1{,}2\times10^{-3}\,\mathrm{m}^2$. Así, $F=pA=35000(0{,}0012)=42\,\mathrm{N}$. Con la misma presión sobre la cara opuesta, sus fuerzas normales se cancelan y la resultante de presión es cero.

**SOLUCIÓN 12.3.**
El punto más profundo tiene mayor presión. La diferencia es $\Delta p=1000(9{,}8)(2{,}50-0{,}50)=19600\,\mathrm{Pa}=19{,}6\,\mathrm{kPa}$. La presión atmosférica se cancela porque ambos puntos comparten la misma superficie de referencia.

**SOLUCIÓN 12.4.**
La presión absoluta es $98-15=83\,\mathrm{kPa}$. La lectura manométrica de $-15\,\mathrm{kPa}$ expresa una presión $15\,\mathrm{kPa}$ menor que la atmosférica local.

**SOLUCIÓN 12.5.**
Del lado del gas la columna está más alta, de modo que el gas ejerce menos presión que la atmósfera. Recorriendo el agua entre niveles se obtiene $p_g-p_{\mathrm{atm}}=-1000(9{,}8)(0{,}12)=-1176\,\mathrm{Pa}\simeq-1{,}18\,\mathrm{kPa}$.

**SOLUCIÓN 12.6.**
Sumamos las contribuciones: $p_{\mathrm{man}}=9{,}8[750(0{,}40)+1000(0{,}80)]=10780\,\mathrm{Pa}$. La altura equivalente de agua es $10780/(1000\times9{,}8)=1{,}10\,\mathrm{m}$. Es menor que el espesor total porque el aceite es menos denso que el agua.

**SOLUCIÓN 12.7.**
La diferencia de presión es $\rho gh=5880\,\mathrm{Pa}$. La fuerza neta es $5880(0{,}015)=88{,}2\,\mathrm{N}$ hacia abajo. Se resta la atmósfera inferior; el agua empuja hacia abajo sobre la cara superior de la tapa.

**SOLUCIÓN 12.8.**
Integrar $dF=\rho g b h\,dh$ entre 0 y $H$ da $F=\rho g b H^2/2=8820\,\mathrm{N}$. El momento integrado da $h_R=2H/3=1{,}00\,\mathrm{m}$, medido bajo la superficie, sobre la línea media vertical de la compuerta.

**SOLUCIÓN 12.9.**
La razón de áreas es $(5/1)^2=25$. Por Pascal, $F_2=25(90)=2250\,\mathrm{N}$. La igualdad de volúmenes da $s_2=0{,}20/25=0{,}0080\,\mathrm{m}=0{,}80\,\mathrm{cm}$. Usar una razón de radios en lugar de áreas daría un resultado incorrecto.

**SOLUCIÓN 12.10.**
La fuerza de entrada es $1800/20=90\,\mathrm{N}$ y su recorrido es $20(0{,}040)=0{,}80\,\mathrm{m}$. El trabajo es $90(0{,}80)=72\,\mathrm{J}$, igual a $1800(0{,}040)$. La prensa conserva la energía en el modelo ideal.

**SOLUCIÓN 12.11.**
Bajo el mayor hay $p_{2,\mathrm{man}}=1000/0{,}020=50000\,\mathrm{Pa}$. El menor está arriba, por lo que $p_{1,\mathrm{man}}=50000-900(9{,}8)(2)=32360\,\mathrm{Pa}$. Su fuerza de entrada es $32{,}36\,\mathrm{N}$. Aquí el desnivel reduce la fuerza necesaria respecto de los $50\,\mathrm{N}$ que corresponderían a igual altura.

**SOLUCIÓN 12.12.**
El volumen desplazado es $3{,}50\times10^{-4}\,\mathrm{m}^3$; el empuje vale $B=3{,}43\,\mathrm{N}$. Si un hilo actúa, falta conocer su fuerza para inferir la masa. En flotación libre y equilibrio, $mg=B$, de donde $m=0{,}350\,\mathrm{kg}$.

**SOLUCIÓN 12.13.**
El empuje es $39{,}2\,\mathrm{N}$ y el peso es $19{,}6\,\mathrm{N}$. El hilo tira hacia el fondo. El equilibrio $B-mg-T=0$ da $T=19{,}6\,\mathrm{N}$. El diagrama tiene una flecha hacia arriba, $B$, y dos hacia abajo, $mg$ y $T$.

**SOLUCIÓN 12.14.**
La fracción sumergida es $700/1050=2/3$. El calado vale $0{,}20(2/3)=0{,}133\,\mathrm{m}$ y emergen $0{,}20(1/3)\simeq0{,}0667\,\mathrm{m}$. El líquido desplazado pesa lo mismo que el bloque.

**SOLUCIÓN 12.15.**
La masa es $19{,}6/9{,}8=2{,}0\,\mathrm{kg}$. El empuje $19{,}6-14{,}7=4{,}9\,\mathrm{N}$ implica $V=4{,}9/9800=5{,}0\times10^{-4}\,\mathrm{m}^3$. La densidad es $4000\,\mathrm{kg/m}^3$; la pieza tiene mayor densidad que el agua y necesita una tensión hacia arriba para quedar en reposo.

**SOLUCIÓN 12.16.**
Sean $V_a$ y $V_w$ los volúmenes en aceite y agua. Deben cumplirse $V_a+V_w = 0{,}0012$ y $800V_a+1000V_w = 1$, con volúmenes en $\mathrm{m}^3$. Sustituyendo resulta $V_w = 2{,}0\times10^{-4}\,\mathrm{m}^3$ y $V_a = 1{,}0\times10^{-3}\,\mathrm{m}^3$. Ambos son positivos y suman el volumen completo, de modo que el equilibrio propuesto es compatible con las fuerzas verticales.

**SOLUCIÓN 12.17.**
El caudal es $Q = 3{,}0\times10^{-4}(2) = 6{,}0\times10^{-4}\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s} = 0{,}60\,\mathrm{L/s}$. Como es constante, $t = V/Q = 90/0{,}60 = 150\,\mathrm{s}$. Para un caudal variable debemos integrar su evolución temporal; $V = Qt$ corresponde a caudal constante o a su media apropiada.

**SOLUCIÓN 12.18.**
Conservamos masa: $v_2 = \rho_1 A_1 v_1/(\rho_2 A_2) = 15\,\mathrm{m/s}$. Los caudales volumétricos son $Q_1 = 0{,}010\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$ y $Q_2 = 0{,}015\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$. Son distintos, pero ambos dan $\dot m = 0{,}012\,\mathrm{kg/s}$. Estos datos requieren la forma compresible del balance de masa, en lugar de $A_1v_1 = A_2v_2$.

**SOLUCIÓN 12.19.**
La primera salida lleva $12\times10^{-4}(2{,}5) = 0{,}0030\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s} = 3{,}0\,\mathrm{L/s}$. La otra transporta $5{,}0\,\mathrm{L/s}$. Su rapidez es $0{,}0050/0{,}0020 = 2{,}5\,\mathrm{m/s}$. Aquí las velocidades coinciden, pero los caudales difieren por las áreas.

**SOLUCIÓN 12.20.**
Bernoulli da $p_2 = 25000 + \frac{1}{2}(1000)(1^2-3^2) = 21000\,\mathrm{Pa} = 21\,\mathrm{kPa}$ manométricos. Continuidad exige $A_1/A_2 = v_2/v_1 = 3$. La sección rápida es la más pequeña.

**SOLUCIÓN 12.21.**
El incremento cinético consume $\frac{1}{2}\rho(4^2-2^2) = 6000\,\mathrm{Pa}$ y el incremento gravitatorio, $\rho g(3) = 29400\,\mathrm{Pa}$. Así, $p_2 = 70000-6000-29400 = 34600\,\mathrm{Pa} = 34{,}6\,\mathrm{kPa}$. Comparar solo velocidades omitiría la contribución mayor de este caso.

**SOLUCIÓN 12.22.**
Para $h = 0{,}80\,\mathrm{m}$, $v = \sqrt{15{,}68} \simeq 3{,}96\,\mathrm{m/s}$ y $Q \simeq 0{,}594\,\mathrm{L/s}$. Para $h = 0{,}20\,\mathrm{m}$, la rapidez es $1{,}98\,\mathrm{m/s}$ y el caudal, $0{,}297\,\mathrm{L/s}$. Ambos se reducen a la mitad porque dependen de $\sqrt{h}$, la raíz cuadrada de $h$.

**SOLUCIÓN 12.23.**
Torricelli usa $H-y$ y la caída del chorro usa $y$: $x = \sqrt{2g(H-y)}\sqrt{2y/g} = 2\sqrt{y(H-y)}$. Como $y(H-y) = H^2/4-(y-H/2)^2$, el máximo ocurre en $y = H/2 = 1{,}0\,\mathrm{m}$ y vale $x_{\mathrm{máx}} = H = 2{,}0\,\mathrm{m}$. Los orificios a alturas complementarias $y$ y $H-y$ tienen el mismo alcance ideal, aunque distintas velocidades y tiempos de caída.

**SOLUCIÓN 12.24.**
El balance ampliado es $2 = v^2/(2g) + h_L$. De ahí, $h_L = 2-25/19{,}6 \simeq 0{,}724\,\mathrm{m}$. Un litro tiene masa $1\,\mathrm{kg}$, así que su déficit de energía mecánica es $mgh_L = 7{,}1\,\mathrm{J}$. El término expresa una transformación de energía incluida en el balance total.

## Una experiencia: el alcance de un chorro

### Dos alturas que cumplen funciones distintas

Usa un recipiente plástico con una salida horizontal pequeña, preparado previamente y colocado sobre una bandeja. Mide la altura $y$ de la salida y el desnivel $h$ entre salida y superficie. Durante un intervalo breve recoge el volumen descargado y mide el alcance sobre una superficie horizontal al nivel del suelo de referencia. Mantén pequeños los cambios de nivel en cada medición; repite con varios niveles.

Predice $x = 2\sqrt{hy}$ y $Q = A\sqrt{2gh}$ antes de comparar. Una gráfica de $x^2$ frente a $h$ debería aproximarse a una recta de pendiente $4y$ si se cumplen las hipótesis. Registra la dispersión de varios alcances y la incertidumbre de las alturas. Comprueba primero que el chorro salga horizontal; una inclinación cambia la ecuación de vuelo.

**Continuación**

El área de un agujero irregular y la contracción del chorro dificultan una predicción precisa del caudal. Puede estimarse una rapidez desde $x/\sqrt{2y/g}$ y después una sección efectiva desde $Q/v$. Si difieren de los valores ideales, distingue incertidumbre de medición, descenso del nivel y limitaciones del modelo. Contrasta las posibles causas de cada desajuste con evidencia adicional.

## Diagnóstico antes de avanzar

Responde sin consultar las fórmulas: (a) ¿pueden dos puntos de un líquido tener igual presión y ejercer fuerzas distintas sobre dos pistones? (b) Un bloque flota en un líquido más denso: ¿aumenta el empuje o cambia el volumen desplazado? (c) ¿basta saber que una tubería se estrecha para asegurar que su presión baja? (d) ¿qué se conserva en una corriente de gas cuya densidad cambia?

**Contraste.** (a) Sí: $F = pA$, por lo que cambian las fuerzas si cambian las áreas. (b) Para el mismo bloque en equilibrio libre, el empuje sigue siendo $mg$ y disminuye $V_d$. (c) Hay que especificar altura, régimen, densidad, pérdidas y máquinas; en un tramo horizontal ideal de flujo estacionario incompresible, continuidad y Bernoulli sí predicen esa caída. (d) Se conserva el caudal másico sin acumulación ni fugas; el volumétrico puede cambiar.

**Lecturas de apoyo.** H. D. Young y R. A. Freedman, *Física universitaria*, volumen 1, 12.ª edición, capítulo 14, secciones 14.1–14.5; R. A. Serway y C. Vuille, *Fundamentos de física*, volumen 1, 9.ª edición, capítulo 9, secciones 9.2 y 9.4–9.7. Los problemas y las ayudas de este capítulo son originales; las lecturas permiten contrastar las leyes y las hipótesis empleadas.

# CAPÍTULO 13

# OSCILACIONES Y MOVIMIENTO ARMÓNICO


13.1 La posición de equilibrio y la ley de Hooke . . . . . 261
13.2 De la fuerza a una ecuación para el movimiento . . . . . 263
13.3 Amplitud, fase, frecuencia y tiempos de paso . . . . . 264
13.4 La energía y la geometría del estado . . . . . 266
13.5 El péndulo y la aproximación de ángulo pequeño . . . . . 268
13.6 Amortiguamiento: una pérdida que puede calcularse . . . . . 270
13.7 Forzamiento y resonancia: qué respuesta se maximiza . . . . . 272
Ejercicios para reconstruir y transferir 274
Soluciones razonadas . . . . . 277
Una experiencia: medir el período sin confundirlo con la amplitud . . 279
Diagnóstico antes de avanzar . . . . 280


Un cuerpo unido a un resorte atraviesa la posición de equilibrio y sigue avanzando. Al atravesar el equilibrio conserva la velocidad adquirida, que lo lleva al otro lado mientras la fuerza resultante pasa por cero. El resorte invierte entonces su fuerza y comienza a frenarlo. La repetición nace de esa combinación entre restitución e inercia.

Estudiaremos cómo una ley de fuerza produce una oscilación y cómo las condiciones iniciales deciden su amplitud y su fase. La energía ofrecerá una segunda manera de describir el mismo movimiento. El péndulo permitirá reconocer el alcance de una aproximación; el amortiguamiento y el forzamiento mostrarán qué cambia cuando un sistema pierde energía mecánica o recibe un impulso periódico.

## 13.1 La posición de equilibrio y la ley de Hooke

Al estirar o comprimir moderadamente un resorte, suele encontrarse una relación aproximadamente proporcional entre su deformación y la fuerza necesaria para sostenerlo. En un eje orientado a lo largo del resorte, la fuerza que este ejerce sobre el cuerpo unido a él es

$$F_s = -kq, \qquad k > 0. \tag{13.1}$$

Aquí $q$ mide el cambio de longitud con signo respecto de la longitud natural: positivo al estirar, negativo al comprimir. La constante $k$, medida en N/m, caracteriza la rigidez dentro del intervalo lineal. El signo indica una fuerza que se opone a la deformación. Dentro de ese intervalo, $k$ caracteriza al resorte y la carga determina la deformación de equilibrio.

La ley de Hooke es un modelo constitutivo. Un resorte real puede apartarse de la proporcionalidad antes de quedar deformado permanentemente: el límite de proporcionalidad marca el alcance de la relación lineal y el límite elástico, el de la recuperación de la forma. En nuestros modelos, el resorte tendrá masa despreciable y sus extremos permanecerán unidos a los soportes y cuerpos indicados.

Conviene distinguir longitud natural y posición de equilibrio del sistema. En horizontal, sin otra fuerza a lo largo del movimiento, ambas referencias coinciden. En vertical, la gravedad desplaza el equilibrio. Si $q$ aumenta hacia abajo, la ecuación es $m\ddot{q} = mg - kq$ y el equilibrio está en $q_e = mg/k$. Al medir el desplazamiento desde allí, $x = q - q_e$, se obtiene $m\ddot{x} = -kx$. El peso ya ha intervenido al fijar el origen.

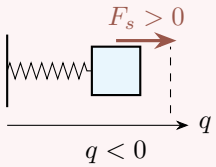
**PROBLEMA RESUELTO 13.1 · Medir la rigidez y leer el signo**

Un resorte horizontal requiere una fuerza externa de 6,0 N para mantener una elongación de 3,0 cm. Halla $k$ y la fuerza que ejercerá sobre un cuerpo cuando esté comprimido 2,0 cm. Supón comportamiento lineal.

*Resolución.* En la medición estática las fuerzas externa y elástica se equilibran. Por ello,

$$k = \frac{6{,}0}{0{,}030} = 200\,\text{N/m}.$$

Con compresión, $q = -0{,}020\,\text{m}$ y $F_s = -200(-0{,}020) = +4{,}0\,\text{N}$. La fuerza apunta hacia la posición de longitud natural. Comprobar la linealidad en un intervalo requiere una serie de medidas de fuerza y deformación dentro de él.




El bloque comprimió el resorte respecto de su longitud natural, marcada con la línea discontinua. La restitución apunta a la derecha.

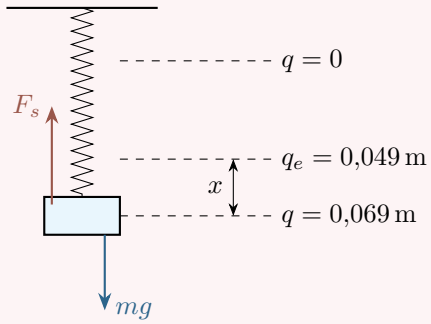
### PROBLEMA RESUELTO 13.2 · Dos orígenes para un resorte vertical

Una masa de 0,20 kg cuelga de un resorte de 40 N/m. Se la desplaza 2,0 cm por debajo de su posición de equilibrio y se la suelta desde el reposo. Calcula la elongación total, la fuerza del resorte y la fuerza neta al liberarla. Usa $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$.

*Resolución.* Tomamos el eje hacia abajo. El equilibrio está en $q_e = mg/k = 0{,}049\,\mathrm{m}$; al liberar, la elongación total es $q = q_e + x = 0{,}069\,\mathrm{m}$. Así,

$$F_s = -40(0{,}069) = -2{,}76\,\mathrm{N}, \qquad F_{\text{neta}} = 1{,}96 - 2{,}76 = -0{,}80\,\mathrm{N}.$$

El mismo resultado neto se obtiene con $-kx$. Aplicar $-kx$ como si fuera la fuerza del resorte aislada omitiría la tensión que ya sostiene el peso en equilibrio. Su aceleración inicial es $-4{,}0\,\mathrm{m/s^2}$.




El eje positivo apunta hacia abajo. La elongación total $q$ y el desplazamiento $x$ desde el equilibrio tienen orígenes distintos. Esquema sin escala.

### PROBLEMA RESUELTO 13.3 · Construir una rigidez equivalente

Dos resortes ideales de 120 y 240 N/m se conectan primero en serie y después en paralelo. Determina la constante equivalente y la fuerza necesaria para una deformación total de 3,0 cm en cada montaje. En paralelo, ambos se deforman igual; en serie, su unión tiene masa despreciable.

*Resolución.* En serie, la misma tensión $F$ atraviesa ambos resortes, mientras las elongaciones se suman: $q = F/k_1 + F/k_2$. Así,

$$\frac{1}{k_s} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}, \qquad k_s = 80\,\mathrm{N/m}.$$

En paralelo cada resorte se deforma $q$ y las fuerzas se suman: $F = (k_1 + k_2)q$, de donde $k_p = 360\,\mathrm{N/m}$. Para $q = 0{,}030\,\mathrm{m}$ resultan $F_s = 2{,}4\,\mathrm{N}$ y $F_p = 10{,}8\,\mathrm{N}$. En serie, las elongaciones individuales son 0,020 y 0,010 m; en paralelo, ambas valen 0,030 m. Esas condiciones geométricas explican por qué las constantes se combinan de distinta manera.

| **Montaje** | **Condición compartida** | $k_{\text{eq}}$ | $F$ **a** 3 cm |
|---|---|---|---|
| Serie | Igual tensión | 80 N/m | 2,4 N |
| Paralelo | Igual deformación | 360 N/m | 10,8 N |

Los resortes individuales tienen 120 y 240 N/m. La condición que se comparte decide qué magnitudes se suman.

## 13.2 De la fuerza a una ecuación para el movimiento

En un cuerpo de masa constante, sometido únicamente a una fuerza neta $-kx$ a lo largo del eje, la segunda ley de Newton se escribe

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{13.2}$$

Los puntos sobre $x$ indican derivadas respecto del tiempo: $\dot{x} = v$ y $\ddot{x} = a$. La ecuación relaciona una función desconocida con su segunda derivada. Se llama *ecuación diferencial*. La relación debe cumplirse durante todo el movimiento.

El seno y el coseno son candidatos naturales porque derivarlos dos veces devuelve la misma función con signo contrario. Para constantes $A \geq 0$ y $\phi$,

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi), \quad v(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi), \quad a(t) = -\omega_0^2 x(t). \tag{13.3}$$

Sustituir estas expresiones verifica la ecuación. Además, podemos elegirlas para cualquier par de valores iniciales $x_0$ y $v_0$ cuando $\omega_0 > 0$. En esta ecuación lineal, esos dos datos determinan una única solución. Una forma que hace visible esa dependencia es

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t). \tag{13.4}$$

El movimiento descrito es *armónico simple*, o MAS. Su rasgo dinámico es que la aceleración resulta proporcional al desplazamiento respecto del equilibrio y de sentido opuesto. Para reconocer un MAS en una trayectoria periódica, comprobamos esa relación entre aceleración y desplazamiento durante todo el movimiento.

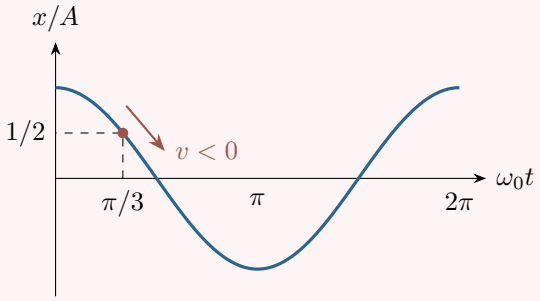
**PROBLEMA RESUELTO 13.4 · Comprobar una trayectoria por derivación**

Una masa de 0,50 kg está unida a un resorte horizontal de 200 N/m sin rozamiento. Se propone $x(t) = 0{,}030\cos(20t)$, con $x$ en metros y $t$ en segundos. Verifica la solución y calcula posición, velocidad y aceleración en $t = \pi/60$ s.

*Resolución.* La razón $k/m = 400\,\mathrm{s}^{-2}$ da $\omega_0 = 20$ rad/s. Derivando,

$$v = -0{,}600\sin(20t), \qquad a = -12{,}0\cos(20t).$$

En efecto, $a = -400x$, y $ma = -200x$ coincide con la fuerza del resorte. En el instante pedido, $20t = \pi/3$, por lo que $x = 0{,}0150$ m, $v = -0{,}300\sqrt{3}$ m/s $\simeq -0{,}520$ m/s y $a = -6{,}00$ m/s$^2$. El cuerpo se acerca al equilibrio desde el lado positivo: velocidad y aceleración apuntan aquí en el mismo sentido, de modo que su rapidez aumenta.



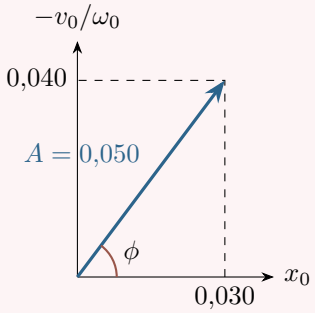

El punto corresponde a $t = \pi/60$ s y $x = A/2$. La pendiente negativa da velocidad negativa; como $x > 0$, la aceleración también es negativa.

**PROBLEMA RESUELTO 13.5 · Reconstruir amplitud y fase**

El mismo oscilador tiene ahora $x_0 = +0{,}030\,\mathrm{m}$ y $v_0 = -0{,}800\,\mathrm{m/s}$. Encuentra su movimiento, su amplitud y una fase inicial compatible con los signos.
*Resolución.* La ecuación 13.4 da directamente

$$x(t) = 0{,}030\cos(20t) - 0{,}040\sin(20t).$$

Al desarrollar $A\cos(20t+\phi)$ se identifica $A\cos\phi = 0{,}030$ y $A\sin\phi = 0{,}040$. Sumando los cuadrados se obtiene $A = 0{,}050\,\mathrm{m}$; ambos coeficientes sitúan $\phi$ en el primer cuadrante, con $\phi = \arctan(4/3) \simeq 0{,}927\,\mathrm{rad}$. Entonces $x = 0{,}050\cos(20t + 0{,}927)$, salvo el redondeo de la fase. El signo menos de la velocidad es esencial para escoger el cuadrante. Una fase aumentada en $2\pi$ describe exactamente el mismo movimiento.




Los ejes y la hipotenusa se expresan en metros. La proyección vertical usa $-v_0/\omega_0$: su signo permite fijar el cuadrante de la fase.

## 13.3 Amplitud, fase, frecuencia y tiempos de paso

La amplitud $A$ es el máximo valor de $|x|$ en el MAS. La fase $\omega_0 t + \phi$ indica en qué parte del ciclo se encuentra el sistema, incluidos el sentido de movimiento y el extremo hacia el que avanza. Dos instantes con la misma posición pueden tener velocidades opuestas. Para determinar la fase se especifican la posición y el sentido de movimiento.

El período $T$ es el menor tiempo positivo después del cual se repiten posición y velocidad; la frecuencia $f = 1/T$ cuenta ciclos por segundo. En una oscilación no trivial, $A > 0$, la fase aumenta $2\pi$ durante cada período:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \qquad f = \frac{\omega_0}{2\pi}. \tag{13.5}$$

La frecuencia angular se expresa en rad/s; la frecuencia en $\mathrm{Hz} = \mathrm{s}^{-1}$. El radián es adimensional, pero conservar su nombre evita confundir ciclos con fases angulares. El argumento de las funciones trigonométricas y las fórmulas de derivación se interpretan en radianes.

Para reconstruir la fase desde los datos iniciales se usan $A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega_0)^2}$, $\cos\phi = x_0/A$ y $\sin\phi = -v_0/(A\omega_0)$. Una calculadora con función de dos argumentos permite obtener el cuadrante mediante $\phi = \mathrm{atan2}(-v_0/\omega_0, x_0)$. Si $A = 0$, el cuerpo permanece en equilibrio y la fase carece de significado físico.

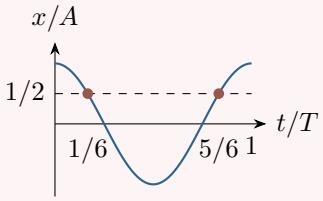
### PROBLEMA RESUELTO 13.6 · Una posición se visita dos veces

Un oscilador parte del extremo $x = A > 0$ en reposo y tiene $\omega_0 = 20\,\text{rad/s}$. ¿Cuándo pasa por primera vez por $x = A/2$ hacia el equilibrio? ¿Cuándo vuelve por esa posición alejándose del equilibrio?

*Resolución.* La fase inicial es cero. Resolver $\cos(20t) = 1/2$ en el primer ciclo da fases $\pi/3$ y $5\pi/3$. En la primera, $v < 0$; en la segunda, $v > 0$. Por tanto,

$$t_1 = \frac{\pi}{60}\,\text{s} = \frac{T}{6}, \qquad t_2 = \frac{\pi}{12}\,\text{s} = \frac{5T}{6}.$$

Los dos pasos corresponden a estados con velocidades opuestas. Entre los dos pasos el cuerpo visita el extremo negativo y vuelve a cruzar el equilibrio.




La línea horizontal corta la curva una vez con pendiente negativa y otra con pendiente positiva.

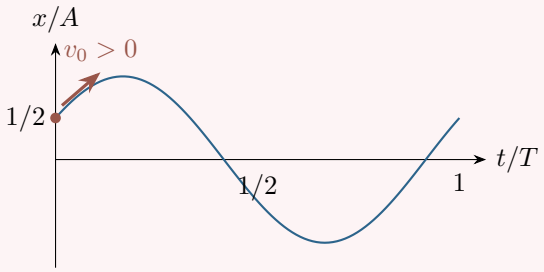
### PROBLEMA RESUELTO 13.7 · Leer una fase negativa

Se mide $x(t) = 0{,}040\cos(5\pi t - \pi/3)$ en unidades SI. Determina amplitud, período, frecuencia y condiciones iniciales. Describe hacia dónde se mueve el cuerpo al comenzar.

*Resolución.* Se identifican $A = 0{,}040\,\text{m}$, $\omega_0 = 5\pi\,\text{rad/s}$ y $\phi = -\pi/3$. El período es $T = 2\pi/(5\pi) = 0{,}400\,\text{s}$ y la frecuencia, $2{,}50\,\text{Hz}$. Al evaluar y derivar,

$$x_0 = 0{,}040\cos(-\pi/3) = 0{,}020\,\text{m}, \qquad v_0 = -0{,}200\pi\sin(-\pi/3) = 0{,}100\pi\sqrt{3}\,\text{m/s}.$$

La velocidad inicial es aproximadamente $+0{,}544\,\text{m/s}$. El cuerpo está a la derecha del equilibrio y se aleja de él; su aceleración apunta a la izquierda y lo frena. La amplitud conserva su valor positivo; la fase inicial fija la posición y el sentido de movimiento al comenzar.




Una fase inicial $-\pi/3$ produce posición positiva y pendiente inicial positiva. El tiempo se normaliza con $T = 0{,}400\,\text{s}$.

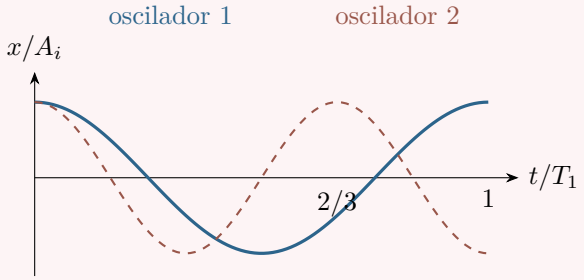
**PROBLEMA RESUELTO 13.8 · Comparar osciladores sin fijar la amplitud**

Un segundo oscilador tiene masa cuatro veces mayor y constante elástica nueve veces mayor que el primero. Compara sus períodos y frecuencias. ¿Alteraría la comparación multiplicar la amplitud del segundo por tres?

*Resolución.* Al dividir las expresiones de los períodos,

$$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{4m_1/(9k_1)}{m_1/k_1}} = \frac{2}{3}, \qquad \frac{f_2}{f_1} = \frac{3}{2}.$$

El aumento de rigidez domina sobre el aumento de masa. El período del resorte ideal lineal depende de la masa y de la rigidez. La amplitud fija la escala de energía y de velocidad; en un resorte real, su aumento puede llevar al sistema fuera del intervalo de Hooke.




Desplazamientos divididos por la amplitud propia. El segundo completa un ciclo en $2T_1/3$ y un ciclo y medio durante un período del primero.

## 13.4 La energía y la geometría del estado

El trabajo de la fuerza elástica entre 0 y $x$ es $\int_0^x (-ku)\,du = -kx^2/2$. Podemos asociarle una energía potencial $U = kx^2/2$, tomando cero en el equilibrio horizontal. Sin disipación, la energía mecánica permanece constante:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2. \tag{13.6}$$

La última igualdad se evalúa en un extremo, donde $v = 0$. En el equilibrio la energía cinética es máxima: $v_{\text{máx}} = \omega_0 A$. A cualquier posición admisible,

$$|v| = \omega_0\sqrt{A^2 - x^2}, \qquad |x| \le A.$$

La conservación de energía da la rapidez. El signo de la velocidad se determina siguiendo la rama del movimiento que recorre el cuerpo. Si se dibuja $v$ frente a $x$, la ecuación $x^2/A^2 + v^2/(\omega_0^2 A^2) = 1$ describe una elipse. En cada extremo de posición hay velocidad cero; en cada cruce por el equilibrio, rapidez máxima. Este *diagrama de estado* representa conjuntamente la posición y la velocidad.

En un resorte vertical, la energía potencial del sistema resorte–masa–Tierra es $U(q) = kq^2/2 - mgq$ con el eje hacia abajo. Al completar el cuadrado resulta $U = k(q - q_e)^2/2 - m^2g^2/(2k)$. El término constante desplaza la referencia energética y tiene derivada espacial cero. Si elegimos el cero en el mínimo, la energía de oscilación vuelve a ser $mv^2/2 + kx^2/2$, con $x = q - q_e$. El cambio de coordenada queda acompañado por el cambio de referencia energética.

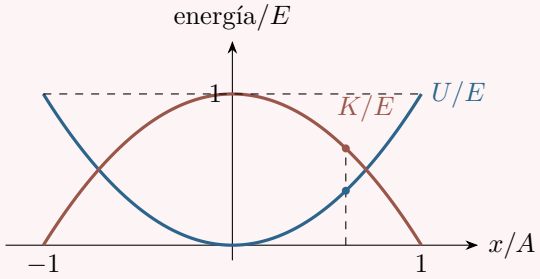
### PROBLEMA RESUELTO 13.9 · La energía se reparte durante el ciclo

Una masa de 0,50 kg oscila con $k = 200\,\mathrm{N/m}$ y amplitud 0,050 m. Determina la energía total y la rapidez al pasar por $x = 0{,}030\,\mathrm{m}$. ¿Puede saberse el signo de la velocidad con esos datos?

*Resolución.* La energía total es $E = \frac{1}{2}(200)(0{,}050)^2 = 0{,}250\,\mathrm{J}$. En la posición pedida, $U = \frac{1}{2}(200)(0{,}030)^2 = 0{,}090\,\mathrm{J}$ y $K = 0{,}160\,\mathrm{J}$. Así,

$$|v| = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{0{,}320}{0{,}50}} = 0{,}800\,\mathrm{m/s}.$$

Hay dos velocidades posibles, $\pm 0{,}800\,\mathrm{m/s}$. El signo negativo corresponde a acercarse al equilibrio desde ese lado; el positivo, a alejarse de él. El resultado coincide con las condiciones iniciales usadas en el problema 13.5 cuando se escoge la rama negativa.




En $x/A = 0{,}60$, la energía potencial es $0{,}36E$ y la cinética $0{,}64E$. Su suma es constante.

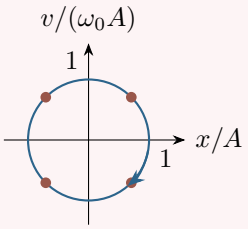
### PROBLEMA RESUELTO 13.10 · Igualdad de energías en el diagrama de estado

Para el oscilador del problema anterior, encuentra las posiciones y velocidades en las que $K = U$. Indica cuántos estados distintos aparecen en un ciclo.

*Resolución.* Si ambas energías son iguales, cada una vale $E/2$. De $kx^2/2 = kA^2/4$ se obtiene $x = \pm A/\sqrt{2} \simeq \pm 0{,}0354\,\mathrm{m}$. En esos puntos,

$$v = \pm\frac{\omega_0 A}{\sqrt{2}} = \pm 0{,}707\,\mathrm{m/s}.$$

Cada posición se recorre con ambos signos de velocidad. Hay cuatro estados distintos y cuatro pasos por esa condición en un período. Las combinaciones de signos representan fases distintas, aunque sus energías coincidan.




Con ambos ejes normalizados, la elipse se ve como una circunferencia. Los cuatro puntos tienen $K = U$. El recorrido es horario.

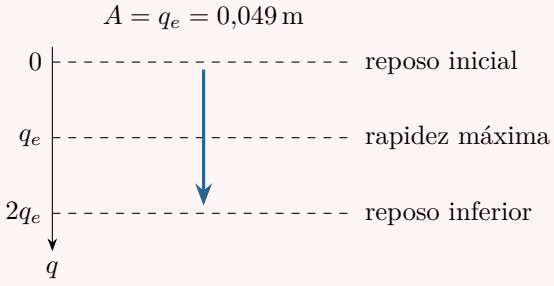
**PROBLEMA RESUELTO 13.11 · Soltar desde la longitud natural**

Una masa de 0,20 kg cuelga de un resorte vertical de 40 N/m. Se sostiene el cuerpo con el resorte sin deformar y se lo suelta desde el reposo. Calcula la amplitud respecto del equilibrio, la máxima elongación total y la rapidez máxima. Supón un resorte unido al cuerpo, lineal en todo el recorrido.

*Resolución.* El equilibrio está $q_e = mg/k = 0{,}049\,\text{m}$ por debajo de la longitud natural. Inicialmente $x_0 = -q_e$ y $v_0 = 0$, por lo que $A = q_e$. El extremo inferior queda en $q = q_e + A = 0{,}098\,\text{m}$. La frecuencia angular es $\sqrt{200}\,\text{rad/s}$, y

$$v_{\text{máx}} = \sqrt{200}(0{,}049) \simeq 0{,}693\,\text{m/s}.$$

La energía de oscilación es $kA^2/2 = 0{,}04802\,\text{J}$, medida desde el mínimo del potencial total. Con la referencia $U(0) = 0$, la energía total inicial sería cero y en el extremo inferior se cumpliría $kq^2/2 - mgq = 0$. Ambas referencias predicen $q = 2mg/k$ como extremo inferior.




El desplazamiento de oscilación se mide respecto del nivel central. La elongación total recorre desde cero hasta $2q_e$; la amplitud es $q_e$.

## 13.5 El péndulo y la aproximación de ángulo pequeño

Un péndulo simple consiste en una masa puntual suspendida de un hilo inextensible y de masa despreciable, de longitud $L$, con punto de suspensión fijo. La tensión se dirige a lo largo del hilo. La componente tangencial de la fuerza total procede de la gravedad y vale $-mg\sin\theta$. Si $\theta$ se mide en radianes desde la vertical inferior, la aceleración tangencial es $L\ddot{\theta}$, y resulta

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0. \tag{13.7}$$

La masa se cancela. La fuerza tangencial contiene $\sin\theta$. Para aproximarla cerca de cero, usamos $\sin\theta = \theta - \theta^3/6 + \cdots$, y el primer término da

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta \simeq 0, \qquad \omega_0 \simeq \sqrt{\frac{g}{L}}, \qquad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

La amplitud angular se expresa en radianes para controlar la precisión de esa aproximación. El término omitido es del orden de $\theta^3$, así que el error relativo en la fuerza empieza en el orden de $\theta^2$. El error del período requiere estudiar el movimiento a lo largo de un ciclo completo.

El potencial exacto, tomando cero abajo, es $mgL(1-\cos\theta)$. Para amplitud angular $\theta_0$ y sin rozamiento, la conservación de energía da $v_{\text{máx}} = \sqrt{2gL(1-\cos\theta_0)}$ en el punto inferior. Para ángulos pequeños, $1-\cos\theta_0 \simeq \theta_0^2/2$ y resulta $v_{\text{máx}} \simeq \theta_0\sqrt{gL}$. Usaremos $T_0$ como período aproximado; a amplitudes mayores el período del péndulo depende de la amplitud.

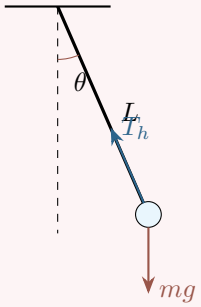
### PROBLEMA RESUELTO 13.12 · Un péndulo de pequeña amplitud

Un péndulo de longitud 0,98 m oscila con amplitud 0,10 rad. Calcula período y frecuencia en la aproximación armónica, y compara la rapidez máxima aproximada con la obtenida mediante energía exacta. Usa $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$.

*Resolución.* La frecuencia angular aproximada es $\sqrt{10}\,\mathrm{rad/s}$. Así, $T_0 = 2\pi/\sqrt{10} \simeq 1{,}987\,\mathrm{s}$ y $f_0 \simeq 0{,}503\,\mathrm{Hz}$. La rapidez máxima aproximada es

$$v_{\mathrm{máx}} \simeq 0{,}10\sqrt{(9{,}8)(0{,}98)} \simeq 0{,}310\,\mathrm{m/s}.$$

El balance exacto da $\sqrt{2(9{,}8)(0{,}98)(1-\cos 0{,}10)} \simeq 0{,}3098\,\mathrm{m/s}$. La proximidad concuerda con una amplitud pequeña. El período de este modelo depende de la longitud y de la gravedad. El rozamiento y una distribución extensa de masa requieren incorporar sus efectos al modelo.




$T_h$ representa la tensión del hilo. El ángulo está ampliado para mostrar la geometría; el cálculo usa 0,10 rad.

### PROBLEMA RESUELTO 13.13 · Estimar la gravedad con varios ciclos

Un péndulo de longitud $L = 1{,}000 \pm 0{,}005\,\mathrm{m}$ tarda $40{,}2 \pm 0{,}2\,\mathrm{s}$ en completar 20 ciclos de pequeña amplitud. Estima $g$ y una cota lineal aproximada de su incertidumbre, tratando las cotas dadas como límites instrumentales. Desprecia correcciones por amplitud y rozamiento.

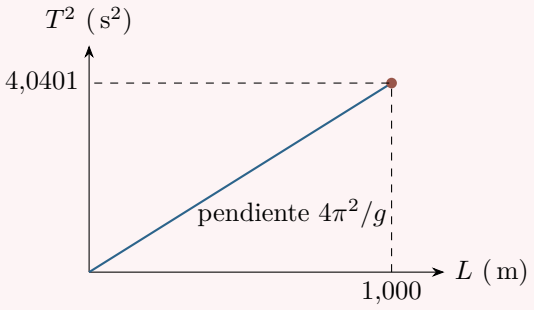
*Resolución.* El período estimado es $T = 40{,}2/20 = 2{,}01\,\mathrm{s}$. Al despejar,

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} \simeq 9{,}772\,\mathrm{m/s^2}.$$

Para variaciones pequeñas, diferenciar da $dg/g = dL/L - 2\,dT/T$. Una cota lineal conservadora suma los módulos:

$$\frac{\delta g}{g} \lesssim \frac{0{,}005}{1{,}000} + 2\frac{0{,}2}{40{,}2} \simeq 0{,}01495.$$

Resulta $\delta g \simeq 0{,}15\,\mathrm{m/s^2}$ y podemos informar $g \simeq (9{,}77 \pm 0{,}15)\,\mathrm{m/s^2}$ bajo esas hipótesis. Esta estimación expresa una cota instrumental aproximada. Cronometrar varios ciclos reduce la incertidumbre relativa de una misma cota de tiempo total; las correcciones sistemáticas requieren un tratamiento propio.




La recta del modelo une el origen con el punto medido. Medir otras longitudes permitiría ajustar una recta y contrastar la linealidad del modelo.

**PROBLEMA RESUELTO 13.14 · Cuantificar el error de una aproximación**

Compara el módulo de la fuerza tangencial exacta del péndulo con el de su aproximación lineal a 10° y a 30°. Mide el error relativo respecto de la fuerza exacta. ¿Son esos porcentajes errores del período?

*Resolución.* Para $0 < \theta < \pi$, la fuerza exacta tiene módulo $mg\sin\theta$ y la aproximada, $mg\theta$. Por tanto,

$$\varepsilon_F = \frac{mg\theta - mg\sin\theta}{mg\sin\theta} = \frac{\theta}{\sin\theta} - 1.$$

Con $10° = \pi/18$ rad resulta $\varepsilon_F \simeq 0{,}00510$, un 0,510 %. Con $30° = \pi/6$ rad resulta $\varepsilon_F \simeq 0{,}0472$, un 4,72 %. La aproximación sobreestima el módulo de restitución en ambos casos. Estos porcentajes describen la fuerza instantánea a los ángulos indicados. El error del período depende de la evolución durante un ciclo completo.

| Ángulo | Radianes | $\theta/\sin\theta - 1$ | Error de fuerza |
|---|---|---|---|
| 10° | $\pi/18$ | 0,00510 | 0,510 % |
| 30° | $\pi/6$ | 0,0472 | 4,72 % |

La comparación expresa el error relativo de la fuerza aproximada respecto de la exacta; el error del período requiere estudiar el ciclo completo.

## 13.6 Amortiguamiento: una pérdida que puede calcularse

En regímenes de resistencia aproximadamente proporcional a la velocidad, modelamos la fuerza como $F_r = -bv$, con $b \geq 0$ en kg/s. La ecuación pasa a ser

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0. \tag{13.8}$$

Multiplicarla por $\dot{x}$ muestra que $dE/dt = -b\dot{x}^2 \leq 0$ para $E = m\dot{x}^2/2 + kx^2/2$. La disipación tiene tasa $b\dot{x}^2$: con $b > 0$ reduce la energía mecánica durante el movimiento, y para $b = 0$ esa energía permanece constante. El sistema ampliado, incluido el entorno, conserva la energía total.

Definamos $\gamma = b/(2m)$ y $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Al sustituir $x = e^{rt}$ se obtiene $r^2 + 2\gamma r + \omega_0^2 = 0$. Si $\gamma < \omega_0$, las raíces conducen a una solución oscilatoria

$$x(t) = Ce^{-\gamma t}\cos(\omega_d t + \phi), \qquad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}.$$

Puede verificarse derivando. Las curvas $\pm Ce^{-\gamma t}$ son envolventes que acotan el desplazamiento. Los extremos reales se obtienen con $\dot{x} = 0$, incluyendo la derivada de la envolvente exponencial. Tras un pseudoperíodo $T_d = 2\pi/\omega_d$, posición y velocidad quedan multiplicadas por $e^{-\gamma T_d}$. La fase se repite mientras disminuye la escala de posición y velocidad.

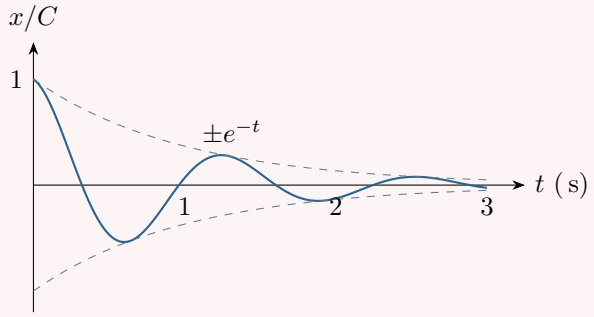
Si $\gamma = \omega_0$, el amortiguamiento es crítico y $x = (C_1 + C_2 t)e^{-\gamma t}$. Si $\gamma > \omega_0$, hay dos raíces reales negativas y una combinación de exponentes decrecientes. Estos dos regímenes carecen de oscilación sostenida alrededor del equilibrio. Las condiciones iniciales, junto con $m$, $k$ y $b$, determinan el número de cruces y la forma del retorno.

### PROBLEMA RESUELTO 13.15 · Envolvente y energía a igual fase

Un sistema tiene $m = 1{,}0\,\text{kg}$, $k = 25\,\text{N/m}$ y $b = 2{,}0\,\text{kg/s}$. Su movimiento es $x = 0{,}040e^{-t}\cos(\sqrt{24}\,t)$ en unidades SI. Calcula la frecuencia amortiguada, la envolvente a los 3,0 s y la razón de energías entre dos instantes separados por $T_d$. ¿Se soltó inicialmente desde el reposo?

*Resolución.* Tenemos $\omega_0 = 5\,\text{rad/s}$, $\gamma = 1\,\text{s}^{-1}$ y $\omega_d = \sqrt{24} \simeq 4{,}899\,\text{rad/s}$. La envolvente a 3 s vale $0{,}040e^{-3} \simeq 0{,}00199\,\text{m}$. Ese valor acota $|x|$; para obtener el desplazamiento en ese instante se incluye el factor coseno.

El pseudoperíodo es $T_d = 2\pi/\sqrt{24} \simeq 1{,}283\,\text{s}$. A igual fase, tanto $x$ como $v$ adquieren el factor $e^{-T_d}$, de modo que $E(t+T_d)/E(t) = e^{-2T_d} \simeq 0{,}0769$. Esta igualdad a fases repetidas es exacta en el modelo. A tiempos arbitrarios, la energía contiene además factores periódicos procedentes de la posición y de la derivada completa de la envolvente. En particular, $v_0 = -0{,}040\,\text{m/s}$; la derivada de la envolvente aporta esa velocidad inicial incluso con fase cero del coseno.




La curva queda entre dos envolventes exponenciales. Sus extremos satisfacen $\dot{x} = 0$ al derivar el producto completo de exponencial y coseno.

### PROBLEMA RESUELTO 13.16 · Tres regímenes con el mismo resorte

Con $m = 1{,}0\,\text{kg}$ y $k = 25\,\text{N/m}$, clasifica los movimientos libres para $b = 2$, 10 y 12 kg/s. Obtén las raíces características del caso sobreamortiguado.

*Resolución.* El umbral crítico es $b_c = 2\sqrt{mk} = 10\,\text{kg/s}$. Para $b = 2$ hay oscilaciones amortiguadas; para $b = 10$ se alcanza el caso crítico; para $b = 12$ el sistema es sobreamortiguado. En este último, $\gamma = 6\,\text{s}^{-1}$ y

$$r_{\pm} = -6 \pm \sqrt{36 - 25} = -6 \pm \sqrt{11}\,\text{s}^{-1}.$$

Ambas raíces son negativas. Cada término de $C_1e^{r_+t} + C_2e^{r_-t}$ es una exponencial real decreciente; las condiciones iniciales $x_0$ y $v_0$ fijan su combinación, que tiende a cero. El caso crítico requiere su propia forma con $te^{-\gamma t}$ porque las dos raíces coinciden.

| $b$ (kg/s) | $\gamma$ ($\text{s}^{-1}$) | **Régimen** | **Forma temporal** |
|---|---|---|---|
| 2 | 1 | Subamortiguado | $e^{-t}\cos(\sqrt{24}\,t + \phi)$ |
| 10 | 5 | Crítico | $(C_1 + C_2t)e^{-5t}$ |
| 12 | 6 | Sobreamortiguado | $C_1e^{r_+t} + C_2e^{r_-t}$ |

En los tres casos $m = 1\,\text{kg}$ y $k = 25\,\text{N/m}$. La primera fila omite un factor de amplitud constante; en la última, $r_{\pm} = -6 \pm \sqrt{11}\,\text{s}^{-1}$.

## 13.7 Forzamiento y resonancia: qué respuesta se maximiza

Una fuerza externa periódica puede compensar la disipación. Con $F(t) = F_0\cos(\Omega t)$, la ecuación es $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0\cos(\Omega t)$. Su solución reúne un transitorio libre y una respuesta forzada. Si $b > 0$, el transitorio decae y queda una oscilación estacionaria a la frecuencia impuesta $\Omega$, que puede diferir de $\omega_0$ y de $\omega_d$.

Para hallar esa respuesta proponemos $x = a\cos\Omega t + c\sin\Omega t$. Al sustituir e igualar por separado los coeficientes de coseno y seno, con $D = k - m\Omega^2$, resulta $Da + b\Omega c = F_0$ y $Dc - b\Omega a = 0$. Resolver esas dos ecuaciones da $a = F_0 D/(D^2 + b^2\Omega^2)$ y $c = F_0 b\Omega/(D^2 + b^2\Omega^2)$. Por tanto,

$$x = A(\Omega)\cos(\Omega t - \delta), \qquad A(\Omega) = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + b^2\Omega^2}}, \tag{13.9}$$

con $\delta = \operatorname{atan2}(b\Omega, k - m\Omega^2)$ para $F_0 > 0$, $b > 0$ y $\Omega > 0$. El desfase indica cuánto se retrasa el desplazamiento respecto de la fuerza. Cuando $\Omega = \omega_0$, el desplazamiento se retrasa $\pi/2$ y la velocidad queda en fase con la fuerza.

La resonancia describe un aumento de respuesta en cierta banda de frecuencias. Para precisar dónde está su máximo hay que indicar qué se mide. El máximo de amplitud de desplazamiento ocurre en $\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$ si $\gamma < \omega_0/\sqrt{2}$. Para $\gamma \geq \omega_0/\sqrt{2}$, la amplitud decrece desde su valor estático $F_0/k$ al aumentar la frecuencia. En el régimen subamortiguado, la frecuencia libre es $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$; el máximo de desplazamiento responde a la expresión anterior.

La potencia media recibida en el estado estacionario se obtiene multiplicando fuerza y velocidad y promediando un ciclo. Como $\langle \sin^2 \rangle = 1/2$ y los productos seno–coseno promedian cero, resulta

$$\overline{P} = \frac{1}{2} b\Omega^2 A(\Omega)^2.$$

Es igual a la potencia media disipada por la fuerza resistiva. En este modelo su máximo ocurre en $\Omega = \omega_0$, aunque el máximo de desplazamiento esté en otra frecuencia. Cuando $b = 0$, la respuesta exactamente resonante crece con el tiempo. Ese caso requiere una solución temporal propia, pues la expresión estacionaria resulta singular en la resonancia ideal.

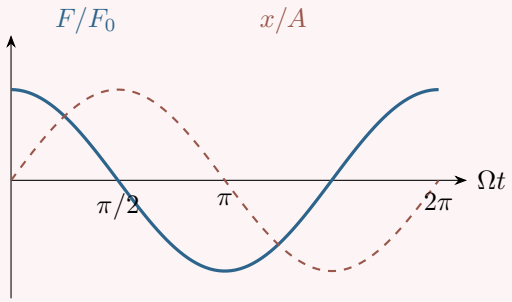
**PROBLEMA RESUELTO 13.17 · Responder a una fuerza de frecuencia conocida**

Un oscilador tiene $m = 1{,}0\,\text{kg}$, $k = 25\,\text{N/m}$, $b = 2{,}0\,\text{kg/s}$ y recibe una fuerza de amplitud $F_0 = 0{,}40\,\text{N}$. Calcula la amplitud y el desfase estacionarios para $\Omega = 3{,}0$ y $5{,}0\,\text{rad/s}$.

*Resolución.* Para $\Omega = 3$, $k - m\Omega^2 = 16\,\text{N/m}$ y $b\Omega = 6\,\text{N/m}$. Por ello,

$$A(3) = \frac{0{,}40}{\sqrt{16^2 + 6^2}} \simeq 0{,}0234\,\text{m}, \qquad \delta(3) = \arctan(6/16) \simeq 0{,}359\,\text{rad}.$$

Para $\Omega = 5 = \omega_0$, el término $k - m\Omega^2$ se anula: $A(5) = 0{,}40/(2 \times 5) = 0{,}0400\,\text{m}$ y $\delta = \pi/2$. La oscilación estacionaria tiene la frecuencia de la fuerza en cada ensayo. Para reconstruir el inicio del movimiento se añade el transitorio compatible con las condiciones iniciales.



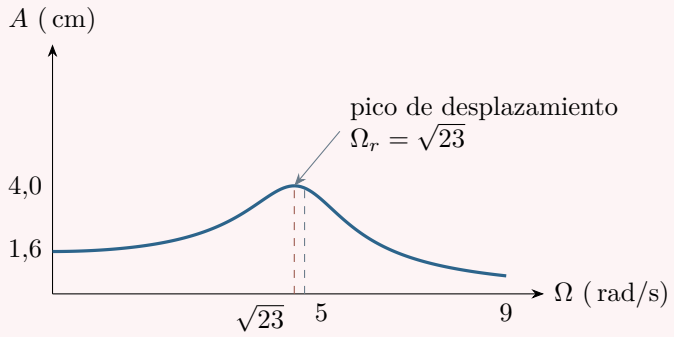

Para $\Omega = \omega_0 = 5\,\text{rad/s}$, el máximo del desplazamiento llega un cuarto de ciclo después que el máximo de fuerza. La velocidad está en fase con la fuerza.

**PROBLEMA RESUELTO 13.18 · Máximos de desplazamiento y potencia**

Para el sistema anterior, encuentra la frecuencia que maximiza el desplazamiento y compárala con la que maximiza la potencia media. Calcula ambos valores máximos.
*Resolución.* Maximizar $A$ equivale a minimizar $D(\Omega) = (25 - \Omega^2)^2 + 4\Omega^2$. Al escribir $u = \Omega^2 \geq 0$, $D = (25 - u)^2 + 4u$ tiene derivada $2u - 46$ y mínimo en $u = 23$. Así,

$$\Omega_r = \sqrt{23} \simeq 4{,}796\,\text{rad/s}, \qquad A_{\text{máx}} = \frac{0{,}40}{\sqrt{96}} \simeq 0{,}0408\,\text{m}.$$

La potencia media es $\overline{P} = \Omega^2 A^2$ con estos valores de $b$. Su máximo ocurre en $\Omega = \omega_0 = 5\,\text{rad/s}$ y vale $\overline{P}_{\text{máx}} = F_0^2/(2b) = 0{,}0400\,\text{W}$. A esa frecuencia la fuerza y la velocidad están en fase: la transferencia media de energía es máxima. El pequeño desplazamiento entre los dos máximos explica por qué una observación de «resonancia» debe indicar qué magnitud se midió y cuánto amortiguamiento había.




Curva estacionaria calculada con $m = 1$, $k = 25$, $b = 2$ y $F_0 = 0{,}40$ en SI. El máximo de desplazamiento queda algo antes de 5 rad/s, donde es máxima la potencia.

## Ejercicios para reconstruir y transferir

Usa unidades SI, $g = 9{,}8\,\text{m/s}^2$ y resortes de masa despreciable dentro de su intervalo lineal. Los movimientos son unidimensionales; se desprecian pérdidas salvo en los ejercicios que introducen amortiguamiento. En los péndulos se supone masa puntual, hilo ideal y suspensión fija. Distingue siempre coordenada desde la longitud natural y desplazamiento desde el equilibrio.

**EJERCICIO 13.1 · Reconstruir una ley de fuerza**

Una fuerza externa de 2,4 N sostiene un resorte estirado 1,2 cm. Calcula $k$ y la fuerza del resorte para una compresión de 2,0 cm, tomando positivo el estiramiento.

**EJERCICIO 13.2 · Un equilibrio desplazado**

Una masa de 0,30 kg cuelga de un resorte de 60 N/m. Halla la elongación estática. Si la masa se duplica y el resorte sigue siendo lineal, ¿qué cambia en $q_e$ y en $k$?

**EJERCICIO 13.3 · Dos resortes en paralelo**

Dos resortes de 100 y 150 N/m se deforman ambos 0,020 m en un montaje paralelo. Calcula la fuerza de cada uno y la fuerza total necesaria para sostener el montaje.

**EJERCICIO 13.4 · Dos resortes en serie**

Los resortes del ejercicio anterior se unen en serie y soportan una fuerza de 3,0 N. Calcula sus elongaciones, la elongación total y la constante equivalente.

**EJERCICIO 13.5 · Comprobar la ecuación diferencial**

Para $x(t) = 0{,}080\cos(10t)$ en unidades SI, deriva $v$ y $a$ y comprueba la relación armónica. Si $m = 0{,}20\,\text{kg}$, determina $k$.

**EJERCICIO 13.6 · De período a rigidez**

Una masa de 0,40 kg oscila con período 0,80 s. Calcula frecuencia, frecuencia angular y constante elástica en el modelo de resorte ideal.

**EJERCICIO 13.7 · Elegir un cuadrante**

Un MAS de $\omega_0 = 10\,\text{rad/s}$ comienza con $x_0 = -0{,}030\,\text{m}$ y $v_0 = +0{,}400\,\text{m/s}$. Escribe $x(t)$ como suma de coseno y seno y determina amplitud y una fase en la forma $A\cos(10t + \phi)$.

**EJERCICIO 13.8 · Primer cruce y distancia recorrida**

Un cuerpo parte del extremo positivo de un MAS con $\omega_0 = 4{,}0\,\text{rad/s}$ y $A = 0{,}060\,\text{m}$. ¿Cuándo cruza por primera vez el equilibrio? ¿Qué distancia recorre en un período completo?

**EJERCICIO 13.9 · Rapidez y aceleración en media amplitud**

Expresa la rapidez y el módulo de la aceleración cuando $|x| = A/2$ como fracciones de sus respectivos máximos. ¿Basta conocer $x = A/2$ para elegir el signo de $v$?

**EJERCICIO 13.10 · Cambiar tres parámetros**

Un segundo oscilador tiene masa nueve veces mayor, constante elástica cuatro veces mayor y amplitud dos veces mayor. Halla las razones de períodos, energías y rapideces máximas respecto del primero.

**EJERCICIO 13.11 · Un balance de energía**

Con $k = 80\,\text{N/m}$, $m = 0{,}20\,\text{kg}$ y $A = 0{,}10\,\text{m}$, calcula la energía total, la rapidez máxima y la rapidez en $x = 0{,}060\,\text{m}$.

**EJERCICIO 13.12 · Cuatro estados con igual reparto**

En un MAS de amplitud 0,060 m, ¿en qué posiciones son iguales las energías cinética y potencial? ¿Cuántos estados de posición y velocidad cumplen esa condición en un ciclo no trivial?

**EJERCICIO 13.13 · Inferir la amplitud sin observar un extremo**

En un MAS de $\omega_0 = 10\,\text{rad/s}$ se mide $x = 0{,}030\,\text{m}$ y $v = -0{,}400\,\text{m/s}$. Calcula la amplitud y la rapidez máxima.

**EJERCICIO 13.14 · Caída sobre un equilibrio elástico**

Una masa de 0,10 kg se libera desde el reposo con un resorte vertical sin deformar, de 50 N/m y unido al cuerpo. Calcula la elongación de equilibrio, la máxima elongación y la rapidez máxima.

**EJERCICIO 13.15 · Período de un péndulo**

Calcula el período aproximado de un péndulo simple de longitud 0,40 m y pequeña amplitud. ¿Cambiaría al duplicar la masa puntual?

**EJERCICIO 13.16 · Cambiar el campo gravitatorio**

Un péndulo de longitud fija se traslada a un lugar donde $g$ es la cuarta parte del original. Compara los períodos de pequeña amplitud. ¿Qué longitud nueva conservaría el período original en ese lugar?

**EJERCICIO 13.17 · Una medición de gravedad**

Un péndulo simple de longitud 0,90 m tiene período medido 1,90 s a pequeña amplitud. Estima $g$ mediante el modelo armónico. Indica dos posibles fuentes de error sistemático.

**EJERCICIO 13.18 · Control local de la aproximación**

A $\theta = 0{,}20\,\text{rad}$, calcula el error relativo de reemplazar $\sin\theta$ por $\theta$, respecto del valor exacto. Explica por qué ese porcentaje no es automáticamente el error del período.

**EJERCICIO 13.19 · Frecuencia libre amortiguada**

Un sistema tiene $m = 2{,}0\,\text{kg}$, $k = 50\,\text{N/m}$ y $b = 4{,}0\,\text{kg/s}$. Halla $\gamma$, $\omega_0$, $\omega_d$ y el pseudoperíodo. Clasifica el régimen.

**EJERCICIO 13.20 · El umbral crítico**

Para $m = 0{,}50\,\text{kg}$ y $k = 32\,\text{N/m}$, calcula el valor crítico de $b$. Explica qué forma de solución reemplaza a seno y coseno amortiguados en ese umbral.

**EJERCICIO 13.21 · Medir el amortiguamiento con extremos**

En un oscilador subamortiguado, dos máximos positivos sucesivos están separados $0{,}50\,\text{s}$ y sus desplazamientos guardan razón $0{,}80$. Estima $\gamma$ y $b$ si $m = 1{,}0\,\text{kg}$. ¿Qué razón guardan las energías mecánicas en esos dos máximos?

**EJERCICIO 13.22 · Potencia en la frecuencia natural**

Un oscilador con $m = 1{,}0\,\text{kg}$, $k = 16\,\text{N/m}$ y $b = 2{,}0\,\text{kg/s}$ recibe $F = 0{,}60\cos(4t)\,\text{N}$. Tras el transitorio, calcula amplitud, desfase y potencia media recibida.

**EJERCICIO 13.23 · Tres frecuencias distintas**

Para el sistema del ejercicio anterior, calcula $\omega_0$, $\omega_d$ y la frecuencia $\Omega_r$ del máximo de desplazamiento. Ordénalas y di cuál maximiza la potencia media.

**EJERCICIO 13.24 · Periódico y armónico**

Sea $x(t) = A\cos^2(\omega t)$, con $A, \omega > 0$. ¿Satisface $\ddot{x} = -\omega^2 x$? Usa una identidad trigonométrica para encontrar su posición media, su período y una ecuación armónica para el desplazamiento desde esa media.

## Soluciones razonadas

**SOLUCIÓN 13.1.**
La elongación es $0{,}012\,\text{m}$, de modo que $k = 2{,}4/0{,}012 = 200\,\text{N/m}$. Para $q = -0{,}020\,\text{m}$, la fuerza del resorte es $-kq = +4{,}0\,\text{N}$. La fuerza externa para mantenerlo comprimido tendría el signo contrario.

**SOLUCIÓN 13.2.**
La elongación estática es $q_e = mg/k = 0{,}049\,\text{m}$. Al duplicar la masa se duplica a $0{,}098\,\text{m}$; $k$ permanece en $60\,\text{N/m}$ bajo la hipótesis de linealidad. La relación fuerza–deformación determina la rigidez.

**SOLUCIÓN 13.3.**
Las fuerzas elásticas tienen módulos $100(0{,}020) = 2{,}0\,\text{N}$ y $150(0{,}020) = 3{,}0\,\text{N}$. La fuerza externa total necesaria vale $5{,}0\,\text{N}$. La constante equivalente es $250\,\text{N/m}$ porque ambos resortes tienen igual deformación.

**SOLUCIÓN 13.4.**
La tensión común es $3\,\text{N}$. Resultan $q_1 = 3/100 = 0{,}030\,\text{m}$ y $q_2 = 3/150 = 0{,}020\,\text{m}$. La suma es $0{,}050\,\text{m}$ y $k_s = 3/0{,}050 = 60\,\text{N/m}$. El montaje es más flexible que cualquiera de los dos resortes por separado.

**SOLUCIÓN 13.5.**
Derivar da $v = -0{,}800\sin(10t)\,\text{m/s}$ y $a = -8{,}00\cos(10t)\,\text{m/s}^2$. Así, $a = -100x$. La frecuencia angular es $10\,\text{rad/s}$ y $k = m\omega_0^2 = 20\,\text{N/m}$. La comprobación vale para todo $t$.

**SOLUCIÓN 13.6.**
La frecuencia es $1/0{,}80 = 1{,}25\,\text{Hz}$ y $\omega_0 = 2\pi/0{,}80 = 2{,}5\pi\,\text{rad/s}$. La constante resulta $k = m\omega_0^2 = 2{,}5\pi^2\,\text{N/m} \simeq 24{,}7\,\text{N/m}$. Omitir el factor $2\pi$ confundiría frecuencia y frecuencia angular.

**SOLUCIÓN 13.7.**
La solución es $x = -0{,}030\cos(10t) + 0{,}040\sin(10t)$. La amplitud vale $0{,}050\,\text{m}$. Deben cumplirse $\cos\phi = -0{,}6$ y $\sin\phi = -0{,}8$: una fase es $\phi \simeq 4{,}069\,\text{rad}$, equivalente a $-2{,}214\,\text{rad}$. El tercer cuadrante asegura velocidad inicial positiva en la convención $v_0 = -A\omega_0\sin\phi$.

**SOLUCIÓN 13.8.**
Con $x = A\cos(4t)$, el primer cero ocurre cuando $4t = \pi/2$: $t = \pi/8\,\text{s} \simeq 0{,}393\,\text{s}$. En un período el cuerpo recorre de $+A$ a $-A$ y regresa; la distancia es $4A = 0{,}240\,\text{m}$ y el desplazamiento neto es cero.

**SOLUCIÓN 13.9.**
De $|v| = \omega_0\sqrt{A^2 - x^2}$ resulta $|v|/v_{\text{máx}} = \sqrt{3}/2$. Como $|a| = \omega_0^2|x|$, $|a|/a_{\text{máx}} = 1/2$. La posición positiva determina aceleración negativa, pero admite ambos signos de velocidad según la fase.

**SOLUCIÓN 13.10.**
El período cambia por $\sqrt{9/4} = 3/2$. La energía $kA^2/2$ cambia por $4 \times 2^2 = 16$. La frecuencia angular cambia por $\sqrt{4/9} = 2/3$ y la rapidez máxima por $(2/3)2 = 4/3$. Las tres comparaciones miden propiedades distintas del movimiento.

**SOLUCIÓN 13.11.**
La energía es $E = 80(0{,}10)^2/2 = 0{,}400\,\text{J}$. Como $\omega_0 = \sqrt{80/0{,}20} = 20\,\text{rad/s}$, $v_{\text{máx}} = 2{,}0\,\text{m/s}$. En $x = 0{,}060\,\text{m}$, $|v| = 20\sqrt{0{,}10^2 - 0{,}060^2} = 1{,}60\,\text{m/s}$. El signo requiere conocer el sentido de paso.

**SOLUCIÓN 13.12.**
Igualar $U$ con $E/2$ da $x = \pm A/\sqrt{2} \simeq \pm 0{,}0424\,\text{m}$. Cada posición tiene dos signos de velocidad de igual módulo, de modo que aparecen cuatro estados por ciclo. Contar los estados exige distinguir también los dos sentidos de paso por cada posición.

**SOLUCIÓN 13.13.**
La ecuación de energía equivale a $A^2 = x^2 + (v/\omega_0)^2$. Con los datos, $A = \sqrt{0{,}030^2 + 0{,}040^2} = 0{,}050\,\text{m}$. La rapidez máxima es $\omega_0 A = 0{,}500\,\text{m/s}$. La velocidad negativa fija la rama actual; la amplitud se obtiene del balance energético.

**SOLUCIÓN 13.14.**
El equilibrio está en $q_e = 0{,}10(9{,}8)/50 = 0{,}0196\,\text{m}$. La liberación desde la longitud natural y en reposo implica $A = q_e$, de modo que $q_{\text{máx}} = 2q_e = 0{,}0392\,\text{m}$. La rapidez máxima es $\sqrt{50/0{,}10}(0{,}0196) \simeq 0{,}438\,\text{m/s}$ al cruzar el equilibrio.

**SOLUCIÓN 13.15.**
El período aproximado es $T_0 = 2\pi\sqrt{0{,}40/9{,}8} \simeq 1{,}27\,\text{s}$. La masa se cancela al escribir la ecuación tangencial y el período queda determinado por la longitud y el campo gravitatorio. La fórmula presupone amplitud angular pequeña.

**SOLUCIÓN 13.16.**
Para longitud fija, $T \propto 1/\sqrt{g}$; al pasar a $g/4$, el período se duplica. Para conservar el período original se necesita mantener $L/g$: la longitud nueva debe ser $L/4$.

**SOLUCIÓN 13.17.**
Despejar da $g = 4\pi^2(0{,}90)/(1{,}90)^2 \simeq 9{,}84\,\text{m/s}^2$. Una longitud medida hasta un punto distinto del centro de la masa y una amplitud demasiado grande producen errores sistemáticos. También pueden intervenir movimiento del soporte o una masa que no sea aproximadamente puntual.

**SOLUCIÓN 13.18.**
La comparación correcta usa radianes: $\varepsilon_F = 0{,}20/\sin(0{,}20) - 1 \simeq 0{,}00670$, aproximadamente $0{,}670\,\%$. Se compara una fuerza en una posición concreta; el período requiere seguir toda la evolución, incluida la rapidez variable.

**SOLUCIÓN 13.19.**
Se obtiene $\gamma = b/(2m) = 1\,\text{s}^{-1}$ y $\omega_0 = \sqrt{k/m} = 5\,\text{rad/s}$. Como $1 < 5$, el régimen es subamortiguado, con $\omega_d = \sqrt{24}\,\text{rad/s} \simeq 4{,}899\,\text{rad/s}$ y $T_d \simeq 1{,}283\,\text{s}$. La fase se repite, pero posición y velocidad disminuyen de escala.

**SOLUCIÓN 13.20.**
El valor crítico es $b_c = 2\sqrt{mk} = 2\sqrt{(0{,}50)(32)} = 8{,}0\,\text{kg/s}$. En él, $\gamma = 8\,\text{s}^{-1}$ y la solución es $x = (C_1 + C_2 t)e^{-8t}$. Las constantes se fijan con la posición y la velocidad iniciales, y la solución describe un retorno al equilibrio sin ciclos de oscilación libre.

**SOLUCIÓN 13.21.**
Los extremos equivalentes se separan por $T_d$. Su razón es $e^{-\gamma T_d} = 0{,}80$, así que $\gamma = -\ln(0{,}80)/0{,}50 \simeq 0{,}446\,\text{s}^{-1}$ y $b = 2m\gamma \simeq 0{,}893\,\text{kg/s}$. En ambos extremos $v = 0$; la razón de energías es el cuadrado de la razón de posiciones, $0{,}80^2 = 0{,}64$.

**SOLUCIÓN 13.22.**
La frecuencia de la fuerza coincide con $\omega_0 = \sqrt{16} = 4\,\text{rad/s}$. La amplitud estacionaria es $A = F_0/(b\Omega) = 0{,}60/8 = 0{,}0750\,\text{m}$ y el desfase es $\pi/2$. La potencia media es $b\Omega^2 A^2/2 = 0{,}0900\,\text{W}$. Es igual a la disipación media por la fuerza resistiva.

**SOLUCIÓN 13.23.**
Con $\gamma = 1\,\text{s}^{-1}$, $\omega_d = \sqrt{16-1} = \sqrt{15}\,\text{rad/s} \simeq 3{,}873\,\text{rad/s}$ y $\Omega_r = \sqrt{16-2} = \sqrt{14}\,\text{rad/s} \simeq 3{,}742\,\text{rad/s}$. El orden es $\Omega_r < \omega_d < \omega_0 = 4\,\text{rad/s}$. El máximo de potencia está en $\omega_0$; el de desplazamiento, en $\Omega_r$.

**SOLUCIÓN 13.24.**
La identidad $\cos^2 u = (1 + \cos 2u)/2$ da $x = A/2 + (A/2)\cos(2\omega t)$. La media es $A/2$ y el período, $\pi/\omega$. Con $y = x - A/2$ se cumple $\ddot{y} = -(2\omega)^2 y$. En cambio, $\ddot{x} = -4\omega^2(x - A/2)$, que no equivale a $-\omega^2 x$. La función sí representa un MAS alrededor de otro equilibrio y con otra frecuencia angular.

## Una experiencia: medir el período sin confundirlo con la amplitud

### Qué permanece y qué cambia

Con un péndulo de masa pequeña y soporte firme, mide la longitud desde el punto de suspensión hasta el centro de la masa. Separa un ángulo pequeño y suelta sin empujar. Cronometra diez o veinte ciclos, repite y registra la dispersión. Comienza y termina en la misma posición y sentido de paso; un ciclo completo exige regresar a la misma posición con el mismo sentido de movimiento.

Repite con varias longitudes y conserva una amplitud angular pequeña semejante. La predicción $T_0^2 = (4\pi^2/g)L$ sugiere representar $T^2$ frente a $L$. La pendiente permitiría estimar $g$. Registra las incertidumbres y examina si la recta pasa cerca del origen: un desfase en la longitud efectiva puede aparecer como intercepto.

Con la misma longitud, compara amplitudes pequeñas diferentes. La aproximación armónica predice períodos casi iguales; la comparación experimental permite estudiar la precisión de esa predicción. Observa además cómo decae la amplitud. Si quieres ensayar un modelo exponencial, mide extremos del mismo lado y grafica su logaritmo frente al tiempo. Una recta aproximada apoyaría una tasa de decaimiento constante en ese intervalo; desviaciones pueden señalar otro mecanismo de rozamiento o limitaciones de la medición.

## Diagnóstico antes de avanzar

Justifica sin sustituir números: (a) En el equilibrio de un MAS no trivial, ¿se anulan velocidad y aceleración? (b) ¿Por qué una masa vertical puede tener fuerza neta cero mientras el resorte ejerce fuerza? (c) ¿Todo movimiento periódico cumple la ecuación del MAS respecto del origen elegido? (d) En un oscilador amortiguado y forzado, ¿coinciden necesariamente el máximo de desplazamiento y el máximo de potencia?

**Contraste.** (a) La aceleración se anula y la rapidez es máxima; para $A > 0$ la velocidad no es cero. (b) La fuerza elástica equilibra el peso: el origen de oscilación está desplazado respecto de la longitud natural. (c) Para identificar un MAS debe comprobarse $a = -\omega_0^2 x$ respecto del equilibrio durante todo el movimiento. (d) En el modelo lineal con rozamiento viscoso, el máximo de potencia está en $\omega_0$; el de desplazamiento, cuando existe a frecuencia positiva, está en $\sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$.

**Lecturas de apoyo.** H. D. Young y R. A. Freedman, *Física universitaria*, volumen 1, 12.ª edición, capítulo 13, secciones 13.1–13.3 y 13.5–13.8; R. A. Serway y C. Vuille, *Fundamentos de física*, volumen 1, 9.ª edición, capítulo 13, secciones 13.1–13.6. Los problemas, datos y ayudas visuales de este capítulo son originales.

# CAPÍTULO 14

# ONDAS, SONIDO, SUPERPOSICIÓN Y RESONANCIA


14.1 Una oscilación que se propaga 282
14.2 La rapidez se obtiene del medio 283
14.3 Superposición e interferencia . 285
14.4 Reflexión, ondas estacionarias y modos normales . . . . . 286
14.5 Sonido, timbre y batimientos . 288
14.6 Intensidad y niveles en decibelios 289
14.7 Doppler: contar frentes desde una referencia común . . . . . 291
14.8 Una aplicación: afinar con batimientos . . . . . 293
Ejercicios para reconstruir y transferir 294
Soluciones razonadas . . . . . 297
Una experiencia: medir modos y batimientos . . . . . 299
Diagnóstico antes de avanzar . . . . 299


Cuando pulsamos una cuerda, una perturbación recorre su longitud mientras cada pequeño tramo se mueve alrededor de su posición de equilibrio. El instrumento responde como un sistema extendido: la tensión comunica el movimiento entre regiones vecinas y las fronteras devuelven parte de lo que llega hasta ellas. La repetición de esas idas y vueltas selecciona las oscilaciones que pueden mantenerse.

La misma idea permitirá estudiar una columna de aire. Seguiremos primero una onda viajera, combinaremos después varias ondas y buscaremos los movimientos compatibles con una cuerda o un tubo. A partir de allí podremos relacionar frecuencia y timbre, calcular intensidades y comprender cómo cambia la frecuencia observada cuando se mueven la fuente, el observador o el medio.

## 14.1 Una oscilación que se propaga

Una onda mecánica es una perturbación que se propaga mediante las interacciones de un medio material. En una cuerda, el desplazamiento transversal de un punto puede representarse como $y(x,t)$: necesitamos su posición de equilibrio $x$ y el instante $t$ para conocer cuánto se ha apartado de ella. Una fotografía fija $t$ y muestra el perfil espacial; un registro de un punto fijo sigue su movimiento temporal.

Una onda es transversal cuando el desplazamiento local es perpendicular a la propagación. En una onda longitudinal, ambos tienen la misma dirección: así se producen las compresiones y rarefacciones del sonido en el aire. En los modelos lineales que usaremos, las partículas oscilan alrededor de sus posiciones de equilibrio mientras se propagan la perturbación y la energía. La curva de una onda sonora puede representar presión o desplazamiento longitudinal; el eje vertical de esa gráfica expresa una magnitud, aunque las partículas se muevan horizontalmente.

Una forma que viaja hacia $+x$ con rapidez constante $c$ puede escribirse $y = f(x-ct)$: mantener fijo $x-ct$ exige aumentar $x$ a razón $c$. Para una onda sinusoidal,

$$y(x,t) = A\cos(kx-\omega t+\phi), \quad k=\frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = 2\pi f, \quad c=\lambda f=\frac{\omega}{k}. \tag{14.1}$$

$A$ es la amplitud, $\lambda$ la distancia entre puntos consecutivos en la misma fase y $T=1/f$ el período de oscilación de un punto fijo. Aquí $k$ designa el *número de onda*, medido en rad/m. En el capítulo anterior esa letra se empleaba para la rigidez de un resorte; el contexto y las unidades distinguen las dos magnitudes. Con $k,\omega>0$, la combinación $kx+\omega t$ representa propagación hacia $-x$.

Al derivar $y$ respecto del tiempo con $x$ fijo obtenemos la velocidad transversal de un elemento, $v_y = \partial y/\partial t = A\omega\sin(kx-\omega t+\phi)$. El símbolo $\partial$ indica que la otra variable se mantiene fija. La rapidez de propagación $c$ y la rapidez local $|v_y|$ describen procesos diferentes. La primera depende del medio; el máximo de la segunda es $A\omega$ para esta onda.

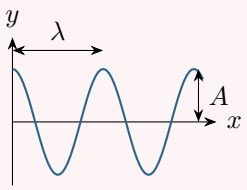
**PROBLEMA RESUELTO 14.1 · Leer espacio y tiempo por separado**

Una fotografía de una onda muestra crestas consecutivas separadas 0,80 m y desplazamiento máximo 0,020 m. Un punto de la cuerda completa un ciclo cada 0,0040 s. Determina amplitud, longitud de onda, frecuencia y rapidez de propagación.

*Resolución.* El perfil da $A=0{,}020\,\text{m}$ y $\lambda=0{,}80\,\text{m}$. El registro temporal da $T=0{,}0040\,\text{s}$ y $f=250\,\text{Hz}$. Por tanto,

$$c=\lambda f=(0{,}80)(250)=200\,\text{m/s}.$$

Durante un período el perfil avanza una longitud de onda, mientras el punto observado completa su oscilación. La fotografía aporta una distancia y el registro aporta un tiempo.



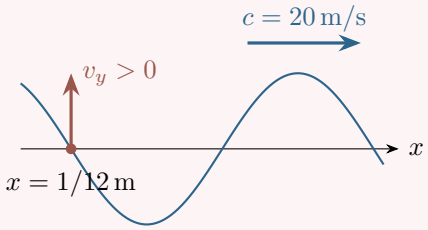

Una fotografía fija el tiempo. Las crestas vecinas separadas por $\lambda$ pertenecen al perfil espacial.

**PROBLEMA RESUELTO 14.2 · Dos velocidades en una misma ecuación**

Una cuerda tiene $y = 0{,}0030\cos(4\pi x - 80\pi t + \pi/6)$ en unidades SI. Halla el sentido de propagación, $\lambda$, $f$, $c$ y la velocidad transversal en $x = 1/12\,\text{m}$, $t = 0$.
*Resolución.* El signo de $-\omega t$ identifica avance hacia $+x$. Se obtiene $\lambda = 2\pi/(4\pi) = 0{,}50\,\text{m}$, $f = 80\pi/(2\pi) = 40\,\text{Hz}$ y $c = 20\,\text{m/s}$. Para el movimiento local,

$$v_y = 0{,}240\pi\,\sin(4\pi x - 80\pi t + \pi/6).$$

En el punto y momento pedidos la fase es $\pi/2$: el elemento pasa por $y = 0$ con $v_y = +0{,}240\pi\,\text{m/s} \simeq +0{,}754\,\text{m/s}$. El perfil se traslada horizontalmente a $20\,\text{m/s}$ y el elemento cruza verticalmente su equilibrio con esa velocidad transversal.




Perfil a $t = 0$ con el eje horizontal reescalado. En el punto marcado la cuerda cruza hacia arriba; el perfil completo avanza a la derecha.

## 14.2 La rapidez se obtiene del medio

En una cuerda uniforme, la densidad lineal es $\mu = M/L$, en kg/m. Denotaremos su tensión por $\mathcal{T}$ para distinguirla del período. Para pendientes pequeñas, la componente vertical de la tensión es aproximadamente $\mathcal{T}\,\partial y/\partial x$. Un tramo de longitud $dx$ recibe la diferencia de esas componentes en sus extremos. Su masa es $\mu\,dx$, y Newton da

$$\mu\,dx\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \mathcal{T}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,dx.$$

Así obtenemos la ecuación de onda lineal y su rapidez:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \qquad c = \sqrt{\frac{\mathcal{T}}{\mu}}. \tag{14.2}$$

El modelo supone tensión aproximadamente constante, cuerda flexible y uniforme, pendiente pequeña y pérdidas despreciables. Al sustituir la onda sinusoidal en la ecuación aparece $\omega^2 = c^2k^2$, consistente con $c = \omega/k$. La relación entre inercia y restitución vuelve a fijar el movimiento; ahora intervienen regiones vecinas del medio.

En el sonido longitudinal, la rapidez depende de la respuesta elástica del material y de su densidad. Para un fluido homogéneo, el modelo da $c = \sqrt{B/\rho}$, donde $B$ es su módulo volumétrico en las condiciones del proceso. Usaremos $c = 340\,\text{m/s}$ cuando se indique aire, como valor adoptado para los ejercicios. La temperatura y la composición pueden cambiarlo.

Cuando una fuente periódica y una frontera permanecen estacionarias, la oscilación transmitida conserva la frecuencia impuesta por la fuente. Si cambia la rapidez en el segundo medio, cambia la longitud de onda según $\lambda = c/f$. Las amplitudes reflejada y transmitida dependen además del acoplamiento entre los medios.

### PROBLEMA RESUELTO 14.3 · Tensión y masa por unidad de longitud

Una cuerda uniforme de 1,20 m tiene masa 6,0 g y tensión 80 N. Calcula la rapidez de una onda transversal. ¿Cómo cambia si se cuadruplica la tensión manteniendo $\mu$?
*Resolución.* La densidad lineal es $\mu = 0{,}0060/1{,}20 = 0{,}0050\,\mathrm{kg/m}$. Así,

$$c = \sqrt{\frac{80}{0{,}0050}} \simeq 126{,}5\,\mathrm{m/s}.$$

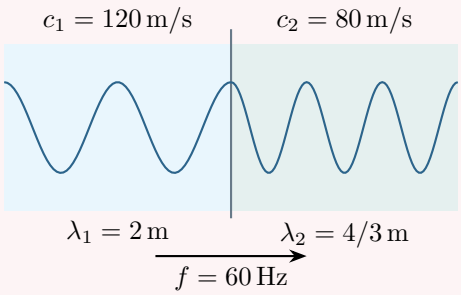
Con tensión $4\mathcal{T}$, la rapidez se multiplica por $\sqrt{4} = 2$, alcanzando unos 253 m/s. La comparación presupone que el cambio de tensión mantiene aproximadamente la densidad lineal y la validez del modelo. Las dimensiones también concuerdan: $(\mathrm{N})/(\mathrm{kg/m}) = \mathrm{m^2/s^2}$.

| Magnitud | Valor | Función en el modelo |
|---|---|---|
| $\mu = M/L$ | 0,0050 kg/m | Inercia por unidad de longitud |
| $\mathcal{T}$ | 80 N | Restitución entre tramos |
| $c = \sqrt{\mathcal{T}/\mu}$ | 126,5 m/s | Rapidez de propagación |

Cuadruplicar la tensión con la misma densidad lineal duplica la rapidez.

### PROBLEMA RESUELTO 14.4 · La frecuencia atraviesa una frontera fija

Una fuente de 60 Hz envía ondas desde un medio de rapidez 120 m/s hacia otro de 80 m/s. Ambos medios y la interfaz están en reposo. Determina las longitudes de onda incidente y transmitida.
*Resolución.* La frontera responde con la periodicidad de la excitación, por lo que $f_2 = f_1 = 60\,\mathrm{Hz}$. Se obtiene $\lambda_1 = 120/60 = 2{,}0\,\mathrm{m}$ y $\lambda_2 = 80/60 \simeq 1{,}33\,\mathrm{m}$. La razón $\lambda_2/\lambda_1 = 2/3$ coincide con $c_2/c_1$. Este cálculo determina la separación espacial de fases en cada medio; para conocer amplitudes harían falta propiedades adicionales de la interfaz.




Perfiles esquemáticos con la misma frecuencia y diferentes longitudes de onda. Las amplitudes dibujadas solo permiten comparar los espaciamientos; su transmisión requeriría otro cálculo.

## 14.3 Superposición e interferencia

La ecuación de onda anterior es lineal: si $y_1$ y $y_2$ son soluciones, también lo es $y = y_1 + y_2$. En un mismo punto y un mismo instante, los desplazamientos se suman con signo. Para perturbaciones pequeñas, este principio permite seguir cada onda durante el encuentro y reconstruir la perturbación resultante.

Las fuerzas y desplazamientos se combinan linealmente; la energía contiene cuadrados. En una cuerda ideal, las energías cinética y elástica por unidad de longitud son $u_K = \mu(\partial y/\partial t)^2/2$ y $u_U = \mathcal{T}(\partial y/\partial x)^2/2$. Ambas dependen del estado completo, incluidas velocidades y pendientes. Un desplazamiento instantáneo nulo puede coexistir con movimiento local y energía cinética.

Para dos oscilaciones de igual frecuencia que llegan a un punto, $y_1 = A_1\cos\theta$ y $y_2 = A_2\cos(\theta + \Delta\phi)$, desarrollar el segundo coseno y sumar coeficientes da

$$A_R^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\phi. \tag{14.3}$$

Con amplitudes iguales, $A_R = 2A|\cos(\Delta\phi/2)|$. Las fases iguales producen el máximo $2A$; una diferencia impar de $\pi$ produce cancelación de desplazamiento en ese punto. Para dos fuentes en fase y trayectos comparables en un medio homogéneo, la diferencia de caminos $\Delta r$ aporta $\Delta\phi = 2\pi\Delta r/\lambda$, salvo un signo que aquí deja igual el coseno. Las fases iniciales y los posibles cambios al reflejarse también contribuyen.

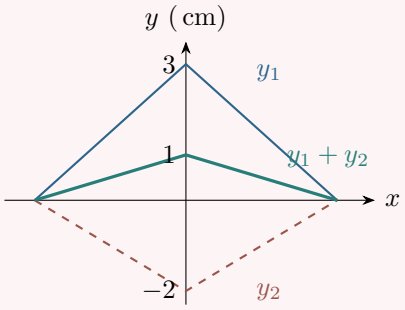
Una interferencia estable requiere fuentes coherentes: su diferencia de fase debe mantenerse durante la observación. La energía se redistribuye entre regiones; el balance global incluye las fuentes, las ondas y sus fronteras. En acústica conviene precisar asimismo qué campo se representa: presión, desplazamiento o velocidad del medio.

**PROBLEMA RESUELTO 14.5 · Dos pulsos se encuentran**

Dos pulsos transversales viajan en sentidos opuestos por una cuerda ideal. En cierto instante, sus centros coinciden: uno desplazaría ese punto +3,0 cm y el otro, −2,0 cm. Halla el desplazamiento resultante y explica cómo continúa cada pulso.

*Resolución.* La suma con signo da $y = 3{,}0 - 2{,}0 = +1{,}0$ cm. En el modelo lineal cada pulso sigue propagándose y recupera su perfil separado después del encuentro. La superposición describe el desplazamiento combinado durante el cruce.

Si dos pulsos iguales y opuestos llegaran a anular todo el perfil en un instante, las velocidades locales podrían seguir siendo distintas de cero: la cuerda atravesaría momentáneamente su configuración recta. Para evaluar la energía habría que incluir esas velocidades. El estado de la cuerda requiere posición y velocidad de cada elemento, como ocurría con un oscilador.




Dos pulsos triangulares de la misma anchura se superponen. Sus desplazamientos centrales se suman con signo.

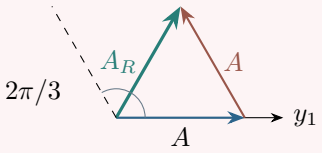
**PROBLEMA RESUELTO 14.6 · Una suma que depende de la fase**

Dos ondas coherentes de igual frecuencia producen en un punto oscilaciones de amplitud 4,0 mm cada una, con diferencia de fase $2\pi/3$. Calcula la amplitud resultante.

*Resolución.* La ecuación 14.3 da

$$A_R = 2(4{,}0)\left|\cos(\pi/3)\right| = 4{,}0\,\text{mm}.$$

La resultante tiene la misma amplitud que una contribución aislada. La suma debe incorporar las fases de ambas oscilaciones. Con las mismas amplitudes, cambiar la diferencia de fase a cero produciría 8,0 mm; cambiarla a $\pi$ daría amplitud nula.



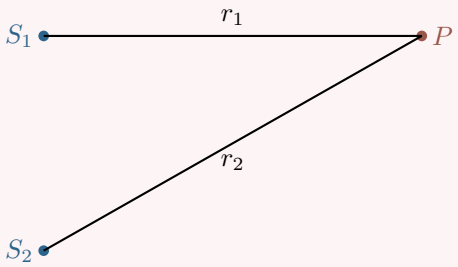

La suma de dos vectores de fase de módulo $A$ y ángulo $2\pi/3$ tiene también módulo $A$.

**PROBLEMA RESUELTO 14.7 · Del camino a la fase**

Dos fuentes sonoras coherentes y en fase emiten a 680 Hz en aire de rapidez 340 m/s. Un punto recibe ondas de igual amplitud con diferencia de caminos 0,75 m. ¿Qué interferencia produce esa diferencia, despreciando reflexiones?

*Resolución.* La longitud de onda es $\lambda = 340/680 = 0{,}50$ m. La diferencia representa $1{,}5\lambda$, por lo que $\Delta\phi = 3\pi$, equivalente a $\pi$ al restar un ciclo completo. La suma ideal en ese punto es destructiva y la amplitud de presión resultante se anula. El resultado depende de la igualdad de amplitudes y de la coherencia supuestas. Al cambiar de posición cambian los trayectos y puede aparecer refuerzo.

$$|r_2 - r_1| = 1{,}5\lambda$$




Trayectos esquemáticos: sus longitudes se fijan por el dato del enunciado. Una diferencia de $1{,}5\lambda$ hace llegar cresta y valle de presión al punto ideal de cancelación.

## 14.4 Reflexión, ondas estacionarias y modos normales

En un extremo fijo de una cuerda, el desplazamiento debe ser cero durante todo el tiempo. La onda reflejada se combina con la incidente para cumplir esa condición. Para amplitudes iguales, una pareja adecuada puede escribirse $y_1 = A\sin(kx - \omega t)$ y $y_2 = A\sin(kx + \omega t)$, cuya suma es

$$y(x,t) = 2A\sin(kx)\cos(\omega t).$$

El factor espacial fija la amplitud de cada punto y el temporal describe su oscilación. Los *nodos* permanecen en reposo; los *vientres* o antinodos tienen amplitud máxima. Se trata de una onda estacionaria. Entre nodos consecutivos hay $\lambda/2$; entre un nodo y el vientre vecino, $\lambda/4$.

En una cuerda de longitud $L$ fija en ambos extremos, $\sin(kL) = 0$ exige $k_n = n\pi/L$, con $n = 1, 2, 3, \ldots$. Por ello,

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \qquad f_n = \frac{nc}{2L} = nf_1. \tag{14.4}$$

Cada patrón es un modo normal. La excitación puede producir combinaciones de modos. En una onda estacionaria ideal formada por dos ondas iguales opuestas, el transporte neto medio de energía a lo largo de la cuerda es cero; hay energía almacenada y transferencias locales durante el ciclo.

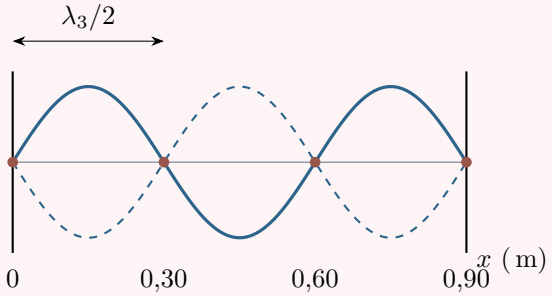
En un tubo sonoro ideal, una abertura funciona aproximadamente como nodo de presión y vientre de desplazamiento del aire. Un extremo cerrado rígido funciona como vientre de presión y nodo de desplazamiento. Estas condiciones son complementarias porque la presión depende de la compresión del aire. Para un tubo abierto en ambos extremos, $f_n = nc/(2L)$. Para uno cerrado en un extremo y abierto en el otro,

$$f_j = \frac{(2j-1)c}{4L}, \qquad j = 1, 2, 3, \ldots. \tag{14.5}$$

La segunda familia contiene los armónicos impares de su fundamental. La longitud efectiva de un tubo real incluye correcciones en las aberturas; su geometría, sus pérdidas y sus acoplamientos modifican la respuesta. Una excitación periódica próxima a un modo puede producir resonancia, con amplitud limitada por las pérdidas y por la manera de excitar el sistema.

**PROBLEMA RESUELTO 14.8 · Contar nodos incluidos los extremos**

Una cuerda de 0,90 m, fija en ambos extremos, tiene rapidez ondulatoria 120 m/s. Calcula su fundamental y describe el tercer modo: frecuencia, longitud de onda, nodos y vientres. *Resolución.* La fundamental es $f_1 = 120/(2 \times 0{,}90) \simeq 66{,}7$ Hz. El tercer modo tiene $f_3 = 200$ Hz y $\lambda_3 = 2(0{,}90)/3 = 0{,}60$ m. Sus nodos están en $x = 0$, 0,30, 0,60 y 0,90 m: cuatro en total, dos interiores. Los vientres quedan en 0,15, 0,45 y 0,75 m. El número de modo cuenta los tres segmentos de media longitud de onda que caben entre los soportes.

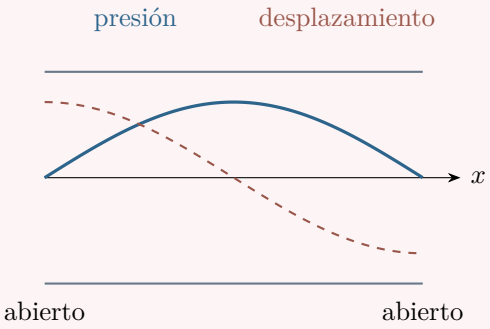



Dos fases opuestas del tercer modo. Los cuatro nodos incluyen los extremos; hay tres vientres.

**PROBLEMA RESUELTO 14.9 · Un tubo abierto en ambos extremos**

Un tubo ideal de longitud 0,85 m está abierto en ambos extremos y contiene aire con $c = 340\,\text{m/s}$. Halla sus tres frecuencias modales más bajas y ubica los nodos de presión de la fundamental.

*Resolución.* La fundamental vale $f_1 = 340/(2 \times 0{,}85) = 200\,\text{Hz}$ y las siguientes son 400 y 600 Hz. En la fundamental, la presión tiene nodos en las dos aberturas y un vientre en el centro. El desplazamiento del aire tiene vientres en las aberturas y un nodo central. Cada afirmación debe nombrar la magnitud representada para que la palabra nodo identifique una condición física precisa.




Factores espaciales de la fundamental, normalizados por separado. Las amplitudes de presión y desplazamiento tienen distintas unidades; sus nodos y vientres se intercalan.

**PROBLEMA RESUELTO 14.10 · Cerrar un extremo cambia la familia**

Se cierra rígidamente un extremo del tubo anterior. Conservando $L = 0{,}85\,\text{m}$ y $c = 340\,\text{m/s}$, determina las tres frecuencias más bajas y distingue modo, armónico y sobretono.

*Resolución.* Ahora $f_1 = c/(4L) = 100\,\text{Hz}$ y las frecuencias siguientes son 300 y 500 Hz. Corresponden a los modos primero, segundo y tercero del tubo, y a los armónicos primero, tercero y quinto de la fundamental. El primer sobretono es la primera frecuencia por encima de la fundamental: aquí vale 300 Hz. En el extremo cerrado el desplazamiento se anula; la primera abertura compatible queda a un cuarto de longitud de onda para la fundamental.

| Fronteras | Tres primeros modos | Primer sobretono |
|---|---|---|
| Abierto–abierto | 200, 400, 600 Hz | 400 Hz |
| Cerrado–abierto | 100, 300, 500 Hz | 300 Hz |

Misma longitud efectiva 0,85 m y rapidez 340 m/s. El segundo modo del tubo cerrado corresponde al tercer armónico de su propia fundamental.

## 14.5 Sonido, timbre y batimientos

Una señal periódica puede construirse sumando componentes sinusoidales de frecuencias $f_0$, $2f_0$, $3f_0$, etc. Sus amplitudes relativas y fases determinan la forma temporal. El espectro muestra qué componentes contiene la señal y con qué amplitudes. Dos sonidos pueden compartir fundamental y tener espectros distintos; esa estructura, junto con su evolución temporal y el ataque, contribuye a su timbre. La frecuencia fundamental organiza la periodicidad y se relaciona con la altura musical percibida.

Una señal puede conservar período $1/f_0$ aun cuando la componente de frecuencia $f_0$ tenga amplitud cero. Por ejemplo, componentes de $2f_0$ y $3f_0$ completan respectivamente dos y tres ciclos en ese tiempo; su suma tiene ese período fundamental si ambas están presentes. Identificar la frecuencia más baja presente y determinar el período de toda la señal son operaciones distintas.

Si se superponen dos oscilaciones de igual amplitud y frecuencias próximas, la identidad de suma de cosenos da

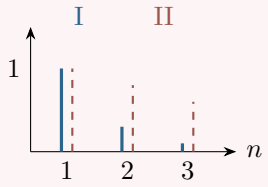
$$A\cos(2\pi f_1 t) + A\cos(2\pi f_2 t) = 2A\cos[\pi(f_1 - f_2)t]\cos\left[2\pi\frac{f_1 + f_2}{2}t\right].$$

Se oye una oscilación rápida cuya intensidad varía lentamente: aparecen *batimientos* o pulsaciones. Los máximos del módulo de la envolvente se repiten con frecuencia $f_b = |f_1 - f_2|$. Un cambio de signo de la envolvente representa un cambio de fase; su módulo vuelve a crecer y produce otro máximo de intensidad.

**PROBLEMA RESUELTO 14.11 · Una misma fundamental, dos espectros**

Dos señales periódicas tienen componentes de 200, 400 y 600 Hz. Sus amplitudes relativas son $(1; 0{,}3; 0{,}1)$ y $(1; 0{,}8; 0{,}6)$. Compara su período fundamental y su estructura espectral.

*Resolución.* Las tres frecuencias son múltiplos enteros de 200 Hz y esa componente está presente en ambas. El período fundamental es $1/200 = 0{,}0050$ s. La segunda señal tiene mayor contribución relativa de los armónicos segundo y tercero. Las formas temporales y los timbres pueden diferir aunque compartan fundamental. Para comparar intensidad total haría falta fijar una escala física de amplitudes y la magnitud que representan.




Amplitudes relativas de los armónicos $nf_0$, con $f_0 = 200$ Hz. Las alturas describen la estructura de cada espectro.

## 14.6 Intensidad y niveles en decibelios

La intensidad media $I$ es la potencia que atraviesa una superficie perpendicular al flujo por unidad de área, medida en $\mathrm{W/m^2}$. Una fuente puntual ideal, de potencia acústica $P$ e irradiación uniforme, reparte esa potencia sobre esferas de área $4\pi r^2$:

$$I(r) = \frac{P}{4\pi r^2}.$$

La relación supone medio homogéneo, pérdidas de propagación despreciables y observación fuera de la región inmediata a la fuente. Reflexiones y direccionalidad pueden producir distribuciones distintas.

Para una onda sonora plana viajera en un medio uniforme, el modelo lineal relaciona intensidad y presión eficaz mediante $I = p_{\mathrm{rms}}^2/(\rho c)$. La presión eficaz es la raíz del promedio temporal del cuadrado de la fluctuación de presión. Para una sinusoide de amplitud $p_m$, $p_{\mathrm{rms}} = p_m/\sqrt{2}$. La presión y la velocidad de partícula llevan conjuntamente el flujo de energía; en campos estacionarios se requiere estudiar su relación de fase y su producto medio.

El nivel de intensidad sonora se define como

$$\beta = 10\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right), \qquad I_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}. \tag{14.6}$$

El valor de referencia fija la escala convencional. De la definición se deduce $\Delta\beta = 10\log_{10}(I_2/I_1)$ y, al invertirla, $I = I_0\,10^{\beta/10}$. Un nivel expresa un cociente logarítmico de intensidades. La percepción de sonoridad incorpora además frecuencia, duración y respuesta del oyente.

Las contribuciones de flujo medio se suman vectorialmente cuando los términos cruzados promedian cero, como sucede para señales no correlacionadas. Si las ondas viajeras avanzan en la misma dirección y sentido, sus intensidades escalares se refieren a una misma superficie normal y se suman directamente; después se convierte el resultado a decibelios. Para ondas coherentes, las presiones se combinan con su fase y los términos cruzados pueden reforzar o reducir el resultado. Las direcciones de propagación forman parte de los datos necesarios para interpretar el flujo.

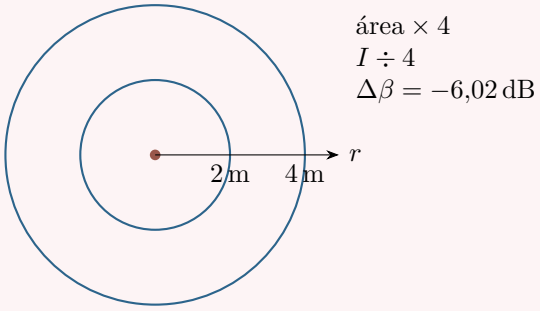
### PROBLEMA RESUELTO 14.12 · Alejarse de una fuente puntual

Una fuente ideal irradia 0,010 W uniformemente en aire. Calcula la intensidad a 2,0 y 4,0 m y el cambio de nivel entre ambos puntos. Desprecia absorción y reflexiones.

*Resolución.* En las dos distancias,

$$I_2 = \frac{0{,}010}{4\pi(2)^2} \simeq 1{,}99 \times 10^{-4}\,\mathrm{W/m^2}, \qquad I_4 \simeq 4{,}97 \times 10^{-5}\,\mathrm{W/m^2}.$$

La segunda intensidad es la cuarta parte de la primera. Por tanto, $\beta_4 - \beta_2 = 10\log_{10}(1/4) \simeq -6{,}02\,\mathrm{dB}$. Los niveles son aproximadamente 83,0 y 77,0 dB, respectivamente. La disminución procede de repartir la misma potencia sobre una superficie cuatro veces mayor.




Secciones de dos esferas concéntricas. La misma potencia atraviesa ambas; el área esférica crece como $r^2$.

### PROBLEMA RESUELTO 14.13 · Interpretar un aumento de nivel

Compara las intensidades correspondientes a 60 y 70 dB. ¿Cuánto aumentaría el nivel de la primera al duplicar su intensidad?

*Resolución.* Invertimos la definición: $I_{60} = 10^{-12}10^{6} = 10^{-6}\,\mathrm{W/m^2}$ y $I_{70} = 10^{-12}10^{7} = 10^{-5}\,\mathrm{W/m^2}$. El aumento de 10 dB representa un factor diez. Al duplicar la intensidad de la primera, el incremento es $10\log_{10}2 \simeq 3{,}01\,\mathrm{dB}$, y el nuevo nivel resulta 63,01 dB. Estas operaciones comparan intensidades físicas dentro de la escala definida.

| Nivel | Intensidad | Razón respecto de 60 dB |
|---|---|---|
| 60 dB | $10^{-6}\,\mathrm{W/m^2}$ | 1 |
| 63,01 dB | $2 \times 10^{-6}\,\mathrm{W/m^2}$ | 2 |
| 70 dB | $10^{-5}\,\mathrm{W/m^2}$ | 10 |

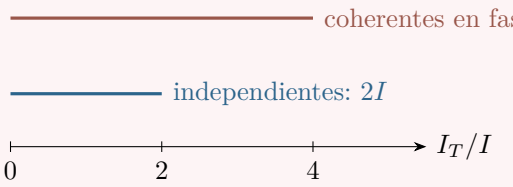
La escala logarítmica convierte factores de intensidad en incrementos de nivel.

**PROBLEMA RESUELTO 14.14 · Dos fuentes: importa su correlación**

Dos ondas planas viajeras avanzan en la misma dirección y sentido, en el mismo medio. Cada una produce por separado 60 dB en el punto de observación. Calcula el nivel conjunto si sus señales son no correlacionadas. Compáralo con dos ondas de igual frecuencia que allí tengan esas amplitudes de presión y lleguen en fase.

*Resolución.* Cada contribución aislada tiene intensidad $I = 10^{-6}\,\mathrm{W/m^2}$. En el primer caso se suman intensidades: $I_T = 2I$ y $\beta_T = 60 + 10\log_{10} 2 \simeq 63{,}01\,\mathrm{dB}$.

En el segundo caso se suman presiones en fase: la amplitud de presión se duplica. La intensidad de la onda plana resultante, proporcional al cuadrado de esa amplitud, es $4I$. Entonces $\beta_T = 60 + 10\log_{10} 4 \simeq 66{,}02\,\mathrm{dB}$. La fase y la geometría especificadas permiten calcular ese refuerzo. Los dos niveles individuales dejan abierta esa información, por lo que es preciso conocer cómo se relacionan las señales para sumarlas.




Ondas viajeras de igual dirección y sentido: cada una produce intensidad $I$. La correlación y la fase determinan el resultado sobre la superficie normal común.

## 14.7 Doppler: contar frentes desde una referencia común

Consideremos propagación unidimensional y un medio en reposo. Elegimos $+x$ desde la fuente hacia el observador a lo largo del rayo que los conecta. Sean $u_s$ y $u_o$ sus velocidades con signo respecto del medio, y $f_s$ la frecuencia de emisión. Durante un período $T_s$, la fuente avanza $u_s T_s$ y el frente anterior recorre $cT_s$. La separación entre frentes que salen hacia $+x$ es

$$\lambda_+ = (c - u_s)T_s = \frac{c - u_s}{f_s}.$$

El observador cruza esos frentes con rapidez relativa $c - u_o$. Dividir esa rapidez por la separación da

$$f_o = f_s \frac{c - u_o}{c - u_s}. \tag{14.7}$$

Usaremos velocidades subsónicas y geometría colineal, con el observador delante de la fuente para la dirección elegida. En esta convención, $u_s > 0$ acerca la fuente al observador; $u_o > 0$ aleja al observador de la fuente. Una velocidad negativa indica movimiento hacia $-x$. Para otra dirección de propagación se reorienta el eje y se vuelven a asignar los signos.

El movimiento de la fuente cambia la separación de frentes; el del observador cambia la tasa con que los encuentra. Esa diferencia explica la presencia de sus velocidades en lugares distintos de la fórmula. En un viento uniforme de velocidad $w$ respecto del suelo, se pueden convertir las velocidades a la referencia del aire restando $w$. También puede seguirse cada frente respecto del suelo, donde su velocidad en la dirección del viento es $c + w$. Las dos descripciones dan el mismo resultado al usar una sola referencia de manera consistente.

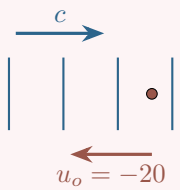
### PROBLEMA RESUELTO 14.15 · Se mueve quien escucha

Una fuente quieta respecto del aire emite a 500 Hz. Un observador avanza hacia ella a 20 m/s. Con $c = 340$ m/s, calcula la frecuencia observada y compárala con la de alejarse a esa rapidez.

*Resolución.* Con el eje desde la fuente al observador, acercarse corresponde a $u_o = -20$ m/s. Por ello,

$$f_o = 500\frac{340 + 20}{340} \simeq 529{,}4\,\text{Hz}.$$

Al alejarse, $u_o = +20$ m/s y $f_o = 500(320/340) \simeq 470{,}6$ Hz. La separación de frentes en el aire sigue siendo $340/500 = 0{,}680$ m; cambia la rapidez con que el observador los cruza.




Frentes equiespaciados que avanzan hacia la derecha. El observador se mueve hacia la izquierda y los encuentra con mayor frecuencia.

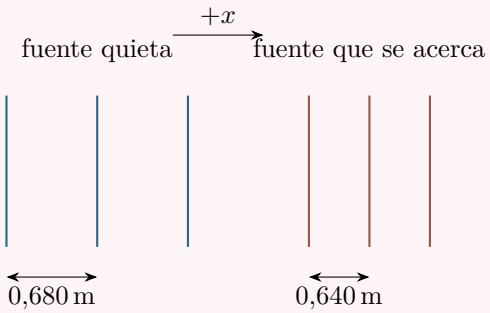
### PROBLEMA RESUELTO 14.16 · Se mueve quien emite

Ahora el observador está quieto en el aire y la fuente de 500 Hz avanza hacia él a 20 m/s. Calcula la frecuencia recibida. Después considera una fuente que se aleja a la misma rapidez, eligiendo de nuevo el eje desde ella hacia el observador.

*Resolución.* Al acercarse, $u_s = +20$ m/s y la separación de frentes es $\lambda_+ = (340 - 20)/500 = 0{,}640$ m. Así, $f_o = 340/0{,}640 = 531{,}25$ Hz. Al alejarse, $u_s = -20$ m/s y resulta

$$f_o = 500\frac{340}{340 + 20} \simeq 472{,}2\,\text{Hz}.$$

La comparación con el problema anterior muestra una diferencia pequeña y medible: el movimiento de la fuente modifica la longitud de onda en el medio. La rapidez de propagación respecto del aire se mantiene en 340 m/s en ambos ensayos.




Comparación esquemática de separaciones de frentes para una fuente de 500 Hz. Las separaciones se rotulan con sus valores calculados.

**PROBLEMA RESUELTO 14.17 · Fuente, observador y viento**

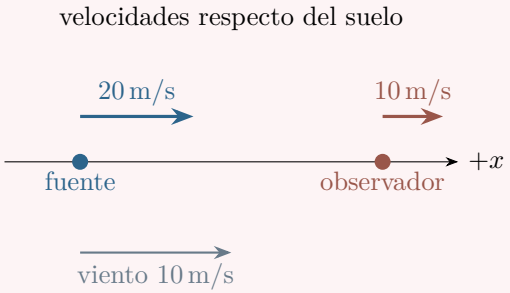
Una fuente situada a la izquierda emite a 600 Hz y se mueve hacia la derecha a 20 m/s respecto del suelo. Un observador a su derecha avanza también hacia la derecha a 10 m/s. Calcula la frecuencia recibida primero con aire quieto y después con viento uniforme de 10 m/s hacia la derecha. Usa $c = 340$ m/s respecto del aire.

*Resolución.* Sin viento, ambas velocidades se refieren ya al medio y

$$f_o = 600\frac{340 - 10}{340 - 20} = 618{,}75\,\text{Hz}.$$

Con viento, las velocidades respecto del aire pasan a $u_s = 20-10 = 10$ m/s y $u_o = 10-10 = 0$. Se obtiene $f_o = 600(340/330) \simeq 618{,}18$ Hz.

Como comprobación desde el suelo, los frentes avanzan ahora a 350 m/s, la separación es $(350 - 20)/600 = 0{,}550$ m y la rapidez de encuentro es $350 - 10 = 340$ m/s. Su cociente reproduce 618,18 Hz. Cada cálculo mantiene todas las velocidades en una misma referencia.




Para calcular desde el aire se resta la velocidad del viento a ambas velocidades del suelo. La rapidez sonora $c$ se mantiene referida al aire.

## 14.8 Una aplicación: afinar con batimientos

La rapidez del sonido, la geometría de la columna de aire y las condiciones en sus extremos fijan sus frecuencias modales. Una excitación próxima a un modo puede producir una respuesta resonante, cuya amplitud depende de las pérdidas y del acoplamiento. Los batimientos permiten comparar una de esas oscilaciones con una referencia cercana. Al observar que las pulsaciones se vuelven más lentas mientras se ajusta el instrumento, inferimos que las frecuencias se aproximan. La frecuencia de batimiento determina el módulo de su diferencia; una segunda observación permite decidir cuál de las dos frecuencias es mayor.

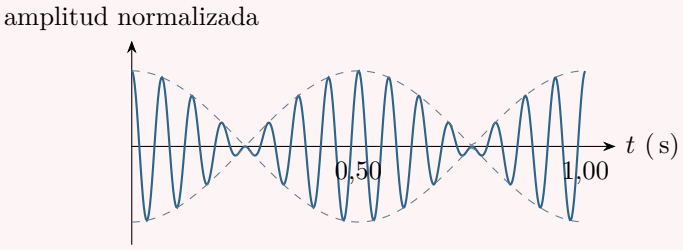
**PROBLEMA RESUELTO 14.18 · Modificar la longitud para alcanzar una referencia**

Un tubo ideal abierto en ambos extremos mide 0,85 m y suena en su fundamental, con $c = 340\,\text{m/s}$. Se compara con una referencia de 202 Hz. Calcula los batimientos iniciales y la longitud efectiva necesaria para igualar la referencia. Supón que el ajuste conserva el tipo de frontera y la rapidez del sonido.

*Resolución.* El tubo produce $f_1 = 340/(2 \times 0{,}85) = 200\,\text{Hz}$. La comparación genera $|202 - 200| = 2\,\text{Hz}$ de batimiento, un máximo de la envolvente cada 0,50 s. Para alcanzar la referencia,

$$L' = \frac{340}{2(202)} \simeq 0{,}8416\,\text{m}.$$

La longitud debe reducirse unos 0,00842 m, es decir, 0,842 cm. Acortar el tubo eleva la fundamental en el modelo. Si solo conociéramos los dos batimientos por segundo y la referencia, las frecuencias candidatas del otro sonido serían 200 y 204 Hz; la longitud inicial proporciona el dato adicional que permite elegir.




Envolvente de dos tonos separados 2 Hz. La oscilación rápida se dibuja reducida para hacer visible la envolvente; sus máximos de módulo se repiten cada 0,50 s.

## Ejercicios para reconstruir y transferir

Usa modelos lineales, cuerdas uniformes e ideales y tubos de longitud efectiva indicada. Para aire adopta $c = 340\,\text{m/s}$, salvo dato distinto. En niveles usa $I_0 = 10^{-12}\,\text{W/m}^2$. En Doppler, asigna velocidades respecto del medio y elige el eje en la dirección de propagación hacia el observador.

**EJERCICIO 14.1 · Un perfil y un registro temporal**

Una onda tiene amplitud 6,0 mm, separación entre crestas de 0,40 m y período 0,0020 s. Calcula $f$ y $c$, e identifica qué datos pertenecen al perfil espacial.

**EJERCICIO 14.2 · Leer una onda que va hacia la izquierda**

Para $y = 0{,}0050\sin(10\pi x + 40\pi t)$ en SI, determina sentido, longitud de onda, frecuencia, rapidez de propagación y máxima rapidez transversal.

**EJERCICIO 14.3 · Interpretar los coeficientes**

Una onda tiene $k = 8\pi\,\text{rad/m}$, $\omega = 120\pi\,\text{rad/s}$ y $A = 0{,}0040\,\text{m}$. Halla $\lambda$, $f$, $c$ y $|v_y|_{\text{máx}}$.

**EJERCICIO 14.4 · Una cuerda bajo tensión**

Una cuerda de 2,0 m tiene masa 10 g y tensión 50 N. Determina su densidad lineal y la rapidez ondulatoria.

**EJERCICIO 14.5 · Variar la tensión con frecuencia fija**

Se multiplica por nueve la tensión de una cuerda manteniendo su densidad lineal y la frecuencia de la fuente. ¿Por qué factores cambian rapidez y longitud de onda?

**EJERCICIO 14.6 · Cambiar de medio**

Una onda sonora de 740 Hz pasa por una interfaz estacionaria de aire a agua, con rapideces 340 y 1480 m/s. Calcula la frecuencia transmitida y ambas longitudes de onda.

**EJERCICIO 14.7 · Una suma con signo**

En un punto, dos pulsos producen desplazamientos de $+2{,}5$ y $-4{,}0$ cm. Halla el desplazamiento total y explica qué información adicional necesitarías para calcular la energía instantánea de la cuerda.

**EJERCICIO 14.8 · Un cuarto de ciclo entre contribuciones**

Dos oscilaciones coherentes tienen amplitudes de 3,0 mm y diferencia de fase $\pi/2$. Calcula la amplitud resultante.

**EJERCICIO 14.9 · Una diferencia de caminos**

Dos fuentes coherentes en fase llegan con igual amplitud a un punto. Si $\lambda = 0{,}60$ m y $\Delta r = 0{,}90$ m, determina la diferencia de fase y el carácter de la interferencia.

**EJERCICIO 14.10 · Amplitudes distintas en oposición**

Dos oscilaciones de amplitudes 5,0 y 3,0 mm llegan con diferencia de fase $\pi$. Calcula la amplitud resultante y la fase de la suma respecto de la contribución mayor.

**EJERCICIO 14.11 · Quinto modo de una cuerda**

Una cuerda de 1,20 m fija en ambos extremos tiene $c = 96$ m/s. Calcula $f_1$, $f_5$ y el número de nodos totales, nodos interiores y vientres del quinto modo.

**EJERCICIO 14.12 · Inferir la tensión desde la fundamental**

Una cuerda uniforme de 0,75 m y masa 3,0 g tiene fundamental 100 Hz con extremos fijos. Calcula su rapidez ondulatoria y la tensión.

**EJERCICIO 14.13 · Tres modos de un tubo abierto**

Calcula las tres frecuencias más bajas de un tubo ideal de 0,68 m abierto en ambos extremos.

**EJERCICIO 14.14 · Tres modos de un tubo cerrado**

Para la misma longitud del ejercicio anterior, cierra un extremo. Calcula las tres primeras frecuencias y señala el primer sobretono y el tercer armónico.

**EJERCICIO 14.15 · La misma fundamental con otras fronteras**

¿Qué longitud efectiva requiere una fundamental de 170 Hz en un tubo abierto en ambos extremos? ¿Y en uno cerrado en un extremo?

**EJERCICIO 14.16 · La periodicidad de un espectro**

Una señal contiene componentes sinusoidales de 400, 600 y 800 Hz, todas con amplitud distinta de cero. Determina su frecuencia fundamental de repetición y explica la función de una posible componente de 200 Hz.

**EJERCICIO 14.17 · Potencia repartida sobre una esfera**

Una fuente puntual isotrópica emite 0,040 W. Calcula intensidad y nivel a 10 m, despreciando absorción y reflexiones.

**EJERCICIO 14.18 · Una diferencia de veinte decibelios**

Calcula la intensidad de 80 dB y su razón respecto de la correspondiente a 60 dB. Justifica el factor obtenido mediante logaritmos.

**EJERCICIO 14.19 · Tres fuentes independientes**

Tres ondas viajeras no correlacionadas avanzan en la misma dirección y sentido y producen cada una 55 dB en el punto de observación. Calcula el nivel conjunto referido a una misma superficie normal a la propagación.

**EJERCICIO 14.20 · El observador se acerca y se aleja**

Una fuente quieta en el aire emite 680 Hz. Calcula la frecuencia que recibe un observador al acercarse a 17 m/s y al alejarse a la misma rapidez.

**EJERCICIO 14.21 · La fuente se acerca y se aleja**

Una fuente de 680 Hz se mueve a 34 m/s en aire quieto. Un observador permanece quieto. Calcula la frecuencia al aproximarse la fuente y al alejarse.

**EJERCICIO 14.22 · Ambos se aproximan**

Una fuente situada a la izquierda emite a 400 Hz y avanza hacia la derecha a 30 m/s en aire quieto. El observador a su derecha se mueve hacia la izquierda a 10 m/s. Calcula la frecuencia recibida y muestra los signos elegidos.

**EJERCICIO 14.23 · Viento con fuente y observador quietos**

Fuente y observador permanecen quietos respecto del suelo. Entre ellos sopla viento uniforme de 20 m/s en la dirección fuente–observador. La fuente emite 500 Hz. Calcula la separación de frentes respecto del suelo y la frecuencia recibida.

**EJERCICIO 14.24 · Afinar con información incompleta**

Una referencia de 432 Hz produce tres batimientos por segundo con otra señal. Halla las frecuencias candidatas y el intervalo entre máximos de la envolvente. Si además se sabe que la otra frecuencia es mayor, identifica su valor y la frecuencia media de ambas.

## Soluciones razonadas

**SOLUCIÓN 14.1.**
El perfil espacial proporciona $A = 0{,}0060\,\text{m}$ y $\lambda = 0{,}40\,\text{m}$. El período fija $f = 1/T = 500\,\text{Hz}$; la rapidez es $c = \lambda f = 200\,\text{m/s}$. Amplitud y longitud de onda son longitudes con funciones distintas en la descripción.

**SOLUCIÓN 14.2.**
La combinación $kx + \omega t$ se desplaza hacia $-x$. Se obtiene $\lambda = 2\pi/(10\pi) = 0{,}20\,\text{m}$, $f = 20\,\text{Hz}$ y $c = 4{,}0\,\text{m/s}$. La máxima rapidez transversal es $A\omega = 0{,}200\pi\,\text{m/s} \simeq 0{,}628\,\text{m/s}$, obtenida derivando respecto del tiempo.

**SOLUCIÓN 14.3.**
La longitud de onda vale 0,25 m y la frecuencia, 60 Hz. Así, $c = 15\,\text{m/s}$. El máximo local es $A\omega = 0{,}480\pi\,\text{m/s} \simeq 1{,}51\,\text{m/s}$. La comparación separa avance del perfil y oscilación del elemento.

**SOLUCIÓN 14.4.**
La densidad lineal es $\mu = 0{,}010/2{,}0 = 0{,}0050\,\text{kg/m}$. La rapidez resulta $\sqrt{50/0{,}0050} = 100\,\text{m/s}$ bajo las hipótesis de cuerda ideal y pendiente pequeña.

**SOLUCIÓN 14.5.**
La rapidez se multiplica por $\sqrt{9} = 3$. Como la frecuencia se conserva, $\lambda = c/f$ también se multiplica por tres. La amplitud depende de la excitación y del acoplamiento; estos datos fijan las razones de rapidez y longitud de onda.

**SOLUCIÓN 14.6.**
La frecuencia transmitida es 740 Hz por la estacionariedad de fuente e interfaz. En aire, $\lambda = 340/740 \simeq 0{,}459\,\text{m}$; en agua, $\lambda = 1480/740 = 2{,}00\,\text{m}$. El cambio de rapidez queda reflejado en la separación espacial de las fases.

**SOLUCIÓN 14.7.**
La suma es $y = 2{,}5 - 4{,}0 = -1{,}5\,\text{cm}$. Para la energía instantánea de un tramo harían falta su velocidad transversal y la pendiente del perfil resultante, además de $\mu$ y $\mathcal{T}$. El desplazamiento aislado describe una parte de ese estado.

**SOLUCIÓN 14.8.**
Se obtiene $A_R = 2(3{,}0)|\cos(\pi/4)| = 3\sqrt{2}\,\text{mm} \simeq 4{,}24\,\text{mm}$. Equivalentemente, sumar los cuadrados de dos coeficientes en cuadratura da $A_R^2 = 3^2 + 3^2$.

**SOLUCIÓN 14.9.**
La diferencia de caminos es $1{,}5\lambda$, así que $\Delta\phi = 3\pi$, equivalente a $\pi$ para la interferencia. Las dos contribuciones de igual amplitud se cancelan en ese punto bajo las hipótesis de coherencia y fase inicial común.

**SOLUCIÓN 14.10.**
La suma equivale a $5\cos\theta + 3\cos(\theta+\pi) = 2\cos\theta$, con amplitudes en milímetros. La amplitud total es 2,0 mm y la fase coincide con la contribución mayor.

**SOLUCIÓN 14.11.**
La fundamental es $96/(2\times 1{,}20) = 40\,\text{Hz}$; el quinto modo tiene 200 Hz. Sus cinco segmentos de media longitud de onda producen seis nodos totales, cuatro interiores y cinco vientres.

**SOLUCIÓN 14.12.**
La rapidez es $c = 2Lf_1 = 150\,\text{m/s}$. Con $\mu = 0{,}0030/0{,}75 = 0{,}0040\,\text{kg/m}$ se obtiene $\mathcal{T} = \mu c^2 = 90\,\text{N}$. Se emplea la longitud vibrante comprendida entre los dos soportes.

**SOLUCIÓN 14.13.**
La fundamental es $340/(2\times 0{,}68) = 250\,\text{Hz}$. Las otras dos frecuencias son 500 y 750 Hz. Los extremos abiertos tienen nodos de presión y vientres de desplazamiento en este modelo.

**SOLUCIÓN 14.14.**
La fundamental es $340/(4\times 0{,}68) = 125\,\text{Hz}$. Siguen 375 y 625 Hz, armónicos tercero y quinto. El primer sobretono y el tercer armónico coinciden aquí en 375 Hz.

**SOLUCIÓN 14.15.**
En abierto–abierto, $L = c/(2f_1) = 1{,}00\,\text{m}$. En cerrado–abierto, $L = c/(4f_1) = 0{,}500\,\text{m}$. Cambiar las fronteras cambia la fracción de longitud de onda que cabe en la fundamental.

**SOLUCIÓN 14.16.**
Las frecuencias son 2, 3 y 4 veces 200 Hz. Su máximo divisor común es 200 Hz, por lo que la señal se repite cada 0,0050 s. Una componente de 200 Hz puede reforzar ese espectro manteniendo el período; la combinación dada ya tiene esa periodicidad fundamental por la presencia conjunta de los múltiplos segundo y tercero.

**SOLUCIÓN 14.17.**
La intensidad es $I = 0{,}040/(4\pi\times 10^2) \simeq 3{,}18\times 10^{-5}\,\text{W/m}^2$. El nivel resulta $10\log_{10}(I/10^{-12}) \simeq 75{,}0\,\text{dB}$. El área de reparto es la de la esfera completa porque se supuso emisión isotrópica.

**SOLUCIÓN 14.18.**
A 80 dB, $I = 10^{-12}10^{8} = 10^{-4}\,\text{W/m}^2$. A 60 dB, $I = 10^{-6}\,\text{W/m}^2$. La razón es $100 = 10^{(80-60)/10}$: cada aumento de diez decibelios multiplica por diez la intensidad.

**SOLUCIÓN 14.19.**
Las ondas tienen la misma dirección y sentido y sus señales son no correlacionadas. Sus intensidades se suman sobre la superficie normal común; el nivel total es $55 + 10\log_{10}3 \simeq 59{,}77\,\text{dB}$. Cada nivel se convierte en intensidad; la suma física se expresa después en la escala logarítmica.

**SOLUCIÓN 14.20.**
Acercarse significa $u_o = -17\,\text{m/s}$ y produce $f_o = 680(340+17)/340 = 714\,\text{Hz}$. Alejarse da $u_o = +17\,\text{m/s}$ y $f_o = 680(340-17)/340 = 646\,\text{Hz}$. La fuente quieta mantiene la separación de frentes.

**SOLUCIÓN 14.21.**
Al aproximarse, $u_s = +34\,\text{m/s}$ y $f_o = 680(340)/(340-34) \simeq 755{,}6\,\text{Hz}$. Al alejarse, $u_s = -34\,\text{m/s}$ y $f_o = 680(340)/(340+34) \simeq 618{,}2\,\text{Hz}$. La velocidad de la fuente interviene al calcular el espaciamiento de los frentes.

**SOLUCIÓN 14.22.**
Elegimos $+x$ de izquierda a derecha. Así, $u_s = +30$ y $u_o = -10\,\text{m/s}$. La frecuencia observada es $400(340+10)/(340-30) \simeq 451{,}6\,\text{Hz}$. La aproximación de ambos aumenta la tasa de encuentro respecto de la emisión.

**SOLUCIÓN 14.23.**
Desde el suelo, los frentes avanzan a $c + w = 360\,\text{m/s}$. La fuente quieta los emite separados $\lambda = 360/500 = 0{,}720\,\text{m}$. El observador quieto recibe $360/0{,}720 = 500\,\text{Hz}$. Desde el aire, ambos se mueven a $-20\,\text{m/s}$ y los factores iguales del numerador y denominador de Doppler se cancelan.

**SOLUCIÓN 14.24.**
La condición $|f - 432| = 3$ da $f = 429$ o $435\,\text{Hz}$. El intervalo entre máximos es $1/3\,\text{s} \simeq 0{,}333\,\text{s}$. El dato de que la otra frecuencia es mayor selecciona $435\,\text{Hz}$ y la frecuencia media es $(432 + 435)/2 = 433{,}5\,\text{Hz}$. El módulo de la diferencia y la frecuencia media desempeñan funciones distintas en la señal combinada.

## Una experiencia: medir modos y batimientos

**Longitud, espectro y fronteras**

Con una cuerda o una banda elástica bajo tensión moderada, mantén dos extremos sujetos y excita movimientos pequeños. Busca patrones con uno, dos y tres vientres, registra la longitud vibrante y estima las frecuencias mediante un video o un registro de audio. Compara las razones de frecuencias con los enteros $1 : 2 : 3$. La elasticidad de la banda puede hacer variar su tensión al ajustar la longitud: registra esa condición para interpretar el ensayo.

Para explorar batimientos, combina dos tonos de frecuencias próximas y amplitudes moderadas, por ejemplo 200 y 202 Hz, mediante un generador de señales. Observa la envolvente temporal en un registro y cuenta sus máximos durante varios segundos. Compara su separación con $1/|f_1 - f_2|$. Después conserva la diferencia y desplaza ambas frecuencias juntas: la rapidez de los batimientos debería mantenerse mientras cambia la oscilación rápida.

Al medir niveles con un teléfono, compara ensayos realizados en la misma configuración y registra la ponderación y la calibración disponibles. La escala de un instrumento concreto puede representar presión sonora ponderada; para confrontarla con el nivel de intensidad de este capítulo hay que identificar la magnitud medida y las condiciones acústicas. Reflexiones, ubicación del micrófono y ruido de fondo aportan parte de la evidencia del experimento.

## Diagnóstico antes de avanzar

Explica: (a) qué distingue $c$ de $\partial y/\partial t$; (b) cómo se relacionan nodo de presión y vientre de desplazamiento en una abertura ideal; (c) qué información necesitas para sumar dos sonidos; (d) cómo asignas los signos en Doppler antes de sustituir velocidades.

**Contraste.** (a) $c$ mide el avance del perfil; la derivada temporal mide el movimiento local del medio. (b) La presión se ajusta aproximadamente a la atmosférica en la abertura mientras el aire puede desplazarse con amplitud grande. (c) Se especifican amplitudes, fases, correlación y direcciones de propagación; para ondas viajeras de igual dirección y sentido con señales no correlacionadas, las intensidades medias se suman antes de convertir a decibelios. (d) Se elige el eje a lo largo de la propagación y se expresan las velocidades de fuente y observador respecto del mismo medio.

**Lecturas de apoyo.** H. D. Young y R. A. Freedman, *Física universitaria*, volumen 1, 12.ª edición, capítulos 15 y 16, pasajes sobre ondas mecánicas, superposición, modos, intensidad, batimientos y Doppler; R. A. Serway y C. Vuille, *Fundamentos de física*, volumen 1, 9.ª edición, secciones 13.7–13.11 y capítulo 14. Los problemas, datos y ayudas visuales de esta entrega son originales.

# CAPÍTULO 15

# TEMPERATURA, CALOR Y TEORÍA CINÉTICA


15.1 Temperatura, equilibrio e intercambio de energía . . . . . 301
15.2 Escalas y propiedades termométricas . . . . . 302
15.3 Dilatación y geometría de un cuerpo . . . . . 303
15.4 Capacidad calorífica y balances de calorimetría . . . . . 304
15.5 Cambios de fase y estados finales posibles . . . . . 307
15.6 Cómo y con qué rapidez se transfiere la energía . . . . . 310
15.7 Temperatura y movimiento microscópico . . . . . 312
Ejercicios para reconstruir y transferir 314
Soluciones razonadas . . . . . 317
Una experiencia: medir la respuesta térmica . . . . . 319
Diagnóstico antes de avanzar . . . . 320


Una cuchara sumergida en una taza caliente acaba calentándose. El café se enfría mientras la cuchara recibe energía, y la evolución depende tanto de sus materiales como de las cantidades que ponemos en contacto. Para predecir el resultado necesitamos distinguir la temperatura que alcanza cada cuerpo de la energía que intercambia durante el proceso. Seguiremos esa diferencia desde la lectura de un termómetro hasta una mezcla con hielo. La energía permitirá decidir cuánto material cambia de fase y qué temperatura final es posible. Después estudiaremos la rapidez del intercambio y buscaremos, en el movimiento de las partículas, una explicación de la temperatura y de la presión de un gas.

## 15.1 Temperatura, equilibrio e intercambio de energía

Al poner dos cuerpos en contacto térmico, permitimos que intercambien energía debido a su diferencia de temperatura. En un contacto ordinario, la transferencia espontánea neta se dirige del cuerpo de mayor temperatura al de menor temperatura. Cuando alcanzan el equilibrio térmico, esa transferencia neta se anula. Las partículas continúan su movimiento microscópico durante el equilibrio.

La temperatura permite comparar estados mediante esta condición. Si dos sistemas están por separado en equilibrio térmico con un tercero, están también en equilibrio térmico entre sí. Esta propiedad, llamada *principio cero de la termodinámica*, permite utilizar un termómetro como intermediario de la comparación. La lectura corresponde al estado alcanzado por el termómetro; para atribuirla a la muestra necesitamos un contacto suficiente y una perturbación pequeña de la muestra.

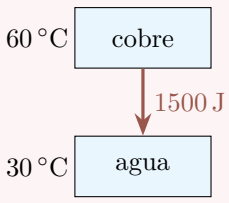
La *energía interna*, $U$, describe la energía microscópica del sistema en el estado considerado. Incluye contribuciones de movimiento y de interacción entre sus partículas. La energía cinética de traslación del objeto completo y su energía potencial por la altura del conjunto se contabilizan por separado. La temperatura es una propiedad intensiva: dos porciones de una muestra homogénea en equilibrio tienen la misma temperatura. La energía interna es extensiva para sistemas ordinarios con interacciones de corto alcance: al reunir porciones equivalentes, sus contribuciones se suman, despreciando efectos de superficie.

Llamamos *calor* a la transferencia de energía debida a una diferencia de temperatura. Usaremos $Q > 0$ para la energía que recibe el sistema por ese mecanismo y $Q < 0$ para la que entrega. El estado del cuerpo tiene energía interna; $Q$ describe lo ocurrido durante un proceso. El trabajo ofrece otro mecanismo de transferencia que estudiaremos junto con los gases en el capítulo siguiente.

**PROBLEMA RESUELTO 15.1 · Seguir una transferencia entre dos cuerpos**

Una pieza de cobre de 0,20 kg está a 60 °C y una muestra de agua de 0,50 kg a 30 °C. Se ponen en contacto dentro de una envoltura aislante. Durante cierto intervalo el agua recibe 1500 J. Identifica el sentido del intercambio y el signo de $Q$ para cada cuerpo. ¿Qué información permite comparar sus temperaturas y sus energías internas?

*Resolución.* La diferencia de temperatura dirige inicialmente la transferencia del cobre al agua. Para el agua, $Q_a = +1500\,\mathrm{J}$; para el cobre, $Q_c = -1500\,\mathrm{J}$, bajo la hipótesis de intercambio exclusivo entre ambos. Las temperaturas dadas ordenan sus estados térmicos. Comparar energías internas exige además describir la cantidad de materia, el material, la fase y la referencia energética. Las masas por sí solas dejan abierta esa comparación.




El signo de cada transferencia se define para el cuerpo que la recibe o entrega. Las flechas indican el intercambio inicial.

La misma cantidad de energía puede producir cambios de temperatura distintos en dos cuerpos. La respuesta depende de cuánto material hay, de cómo almacena energía y de las condiciones del proceso. Medir esa respuesta será el punto de partida de la calorimetría.

## 15.2 Escalas y propiedades termométricas

Un termómetro relaciona una propiedad medible con una escala. Podemos observar la longitud de una columna de líquido, la resistencia eléctrica de un sensor o la presión de un gas a volumen fijo. La calibración fija la relación entre la lectura y la temperatura dentro de un intervalo de uso.

Denotaremos por $\theta$ la temperatura Celsius y por $T$ la temperatura absoluta. Sus valores se relacionan mediante

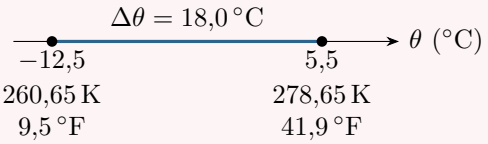
$$\frac{T}{\mathrm{K}} = \frac{\theta}{^\circ\mathrm{C}} + 273{,}15, \qquad \frac{\theta_F}{^\circ\mathrm{F}} = \frac{9}{5}\frac{\theta}{^\circ\mathrm{C}} + 32. \tag{15.1}$$

El kelvin es la unidad de temperatura termodinámica. El desplazamiento de 273,15 fija el origen Celsius respecto del absoluto. El punto de congelación y el de ebullición del agua sirven como referencias aproximadas de laboratorio bajo condiciones especificadas de presión y composición. Las relaciones de conversión anteriores son definiciones exactas entre las escalas.

Al restar dos temperaturas desaparece el desplazamiento entre orígenes. Por eso un aumento de un grado Celsius tiene el mismo tamaño que un aumento de un kelvin. Para diferencias Fahrenheit aparece el factor 9/5. Los cocientes de temperatura que usaremos en el modelo de gases se forman con temperaturas absolutas.

**PROBLEMA RESUELTO 15.2 · Convertir una lectura y un cambio**

Una muestra está a $-12{,}5\,^\circ\mathrm{C}$ y después aumenta su temperatura $18{,}0\,^\circ\mathrm{C}$. Expresa la lectura inicial en kelvin y Fahrenheit, y el aumento en ambas escalas. *Resolución.* La lectura inicial es $T_i = 260{,}65\,\mathrm{K}$ y $\theta_{F,i} = (9/5)(-12{,}5) + 32 = 9{,}5\,^\circ\mathrm{F}$. Para el cambio, $\Delta T = 18{,}0\,\mathrm{K}$ y $\Delta\theta_F = (9/5)(18{,}0) = 32{,}4\,^\circ\mathrm{F}$. La temperatura final es $5{,}5\,^\circ\mathrm{C}$, equivalente a $278{,}65\,\mathrm{K}$ y $41{,}9\,^\circ\mathrm{F}$. Restar las lecturas finales e iniciales comprueba ambos aumentos.




Las diferencias se obtienen restando lecturas de una misma escala. El cambio entre Celsius y kelvin conserva su valor numérico.

**PROBLEMA RESUELTO 15.3 · Calibrar un sensor lineal**

La resistencia de un sensor vale $60\,\Omega$ a $0\,^\circ\mathrm{C}$ y $100\,\Omega$ a $100\,^\circ\mathrm{C}$. Supón una dependencia lineal en ese intervalo. Encuentra la temperatura correspondiente a $85\,\Omega$ y el cambio de temperatura asociado a un aumento de $4\,\Omega$. *Resolución.* Entre los puntos de calibración, cada grado Celsius corresponde a $(100-60)/100 = 0{,}40\,\Omega/\mathrm{K}$. Por tanto,

$$\theta = \frac{85-60}{0{,}40}\,^\circ\mathrm{C} = 62{,}5\,^\circ\mathrm{C}, \qquad T = 335{,}65\,\mathrm{K}.$$

El incremento de resistencia corresponde a $\Delta T = 4/0{,}40 = 10\,\mathrm{K}$. La interpolación utiliza la hipótesis lineal; aplicar el sensor fuera del intervalo calibrado requiere estudiar su respuesta allí.

| Resistencia | Lectura Celsius | Temperatura absoluta |
|---|---|---|
| $60\,\Omega$ | $0\,^\circ\mathrm{C}$ | $273{,}15\,\mathrm{K}$ |
| $85\,\Omega$ | $62{,}5\,^\circ\mathrm{C}$ | $335{,}65\,\mathrm{K}$ |
| $100\,\Omega$ | $100\,^\circ\mathrm{C}$ | $373{,}15\,\mathrm{K}$ |

La calibración lineal interpola entre los dos puntos dados. La fila central corresponde a la lectura del problema.

Una lectura térmica también exige atender a la resolución, la calibración y el tiempo de respuesta del instrumento. Un sensor grande puede modificar apreciablemente la temperatura de una muestra pequeña. El equilibrio alcanzado pertenece al sistema formado por ambos, y la estimación del estado inicial necesita incorporar ese efecto.

## 15.3 Dilatación y geometría de un cuerpo

Muchas dimensiones de los materiales cambian con la temperatura. Para una barra libre, con temperatura aproximadamente uniforme y en un intervalo moderado, podemos representar la variación de longitud mediante

$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T, \qquad L = L_0(1+\alpha\Delta T). \tag{15.2}$$

El coeficiente de dilatación lineal $\alpha$ se mide en $\mathrm{K}^{-1}$ y depende del material y del intervalo. En una descripción local, $\alpha = (1/L)(dL/dT)$. La expresión lineal aproxima esa dependencia cuando el cambio relativo de longitud es pequeño.

Si el material es isótropo y se dilata libremente, cada dimensión lineal recibe el mismo factor. Un área se multiplica por $(1+\alpha\Delta T)^2$ y un volumen por $(1+\alpha\Delta T)^3$. Al conservar los términos de primer orden obtenemos $\Delta A \simeq 2\alpha A_0 \Delta T$ y $\Delta V \simeq 3\alpha V_0 \Delta T$. La deformación uniforme expande también un agujero practicado en una placa: sus bordes se separan como lo harían los de una región del mismo material que llenara el hueco.

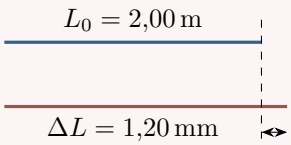
**PROBLEMA RESUELTO 15.4 · Dar espacio a una barra que se calienta**

Una barra de longitud 2,00 m a 20 °C puede dilatarse libremente. Su coeficiente medio es $12 \times 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}$. Calcula el aumento de longitud al llevarla a 70 °C y la longitud final.

*Resolución.* El cambio es $\Delta T = 50\,\mathrm{K}$. Entonces

$$\Delta L = (12 \times 10^{-6})(2{,}00)(50)\,\mathrm{m} = 1{,}20 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}.$$

La longitud final es 2,00120 m dentro del modelo. El cambio relativo es $6{,}0 \times 10^{-4}$, pequeño frente a uno. Una sujeción rígida convertiría parte de esa tendencia de dilatación en esfuerzos internos y requeriría un problema elástico adicional.




La elongación está ampliada para mostrar el cambio. Las longitudes dibujadas son esquemáticas.

La expansión de los materiales responde a sus interacciones microscópicas. La variación puede cambiar de signo en ciertos intervalos: el agua líquida cerca de la congelación exige, por ejemplo, considerar su dependencia particular de densidad y temperatura. Cada coeficiente debe acompañarse del material y de las condiciones en que resulta aplicable.

## 15.4 Capacidad calorífica y balances de calorimetría

Consideremos una muestra que conserva su fase mientras recibe energía por calor bajo condiciones mecánicas especificadas. Su *capacidad calorífica* expresa la energía necesaria por unidad de cambio de temperatura en ese proceso: $C = dQ/dT$. Para una muestra homogénea de masa $m$ definimos el *calor específico* $c = C/m$. Sus unidades son J/K y J/(kg K), respectivamente.

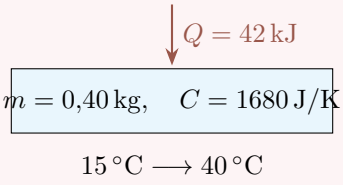
Cuando el calor específico es aproximadamente constante en el intervalo,

$$Q = mc(T_f - T_i) = C\Delta T. \tag{15.3}$$

El signo sale de la diferencia de temperaturas: una muestra que se enfría tiene $Q < 0$. En sólidos y líquidos, bajo presión ordinaria y con cambios de volumen pequeños, esta relación ofrece una aproximación útil. En los gases, la expansión puede realizar un trabajo apreciable; la capacidad calorífica debe especificar entonces si se mantiene el volumen, la presión u otra condición.

**PROBLEMA RESUELTO 15.5 · Calcular una energía de calentamiento**

Se calientan 0,40 kg de agua de 15 a 40 °C. Usa $c = 4200\,\mathrm{J/(kg\,K)}$ constante y estima la capacidad calorífica de la muestra y la energía transferida. *Resolución.* La muestra tiene $C = mc = 0{,}40(4200) = 1680\,\mathrm{J/K}$. El cambio de temperatura es 25 K, de modo que $Q = 1680(25) = 42000\,\mathrm{J}$. El valor positivo corresponde a energía recibida. Al duplicar la masa, bajo las mismas condiciones, se duplican tanto la capacidad calorífica como la energía necesaria para ese aumento de temperatura.




La energía recibida se calcula con la capacidad de la muestra y el aumento de temperatura.

Cuando conocemos la dependencia con la temperatura, sumamos los aportes de pequeños intervalos:

$$Q = m \int_{T_i}^{T_f} c(T)\, dT. \tag{15.4}$$

La integral conserva las condiciones del proceso que definen $c(T)$. El calor específico constante reemplaza la función por una aproximación válida en el intervalo elegido.

**PROBLEMA RESUELTO 15.6 · Sumar una capacidad que varía**

Una muestra de 0,50 kg conserva su fase entre $T_0 = 293{,}15\,\mathrm{K}$ y 333,15 K. En ese proceso su calor específico es $c(T) = c_0 + a(T - T_0)$, con $c_0 = 400\,\mathrm{J/(kg\,K)}$ y $a = 2{,}0\,\mathrm{J/(kg\,K^2)}$. Calcula el calor recibido. *Resolución.* Introducimos $u = T - T_0$, que varía de 0 a 40 K. Integrar da

$$Q = m\left[c_0 \Delta T + \frac{a}{2}(\Delta T)^2\right] = 0{,}50[400(40) + 1(40^2)]\,\mathrm{J} = 8800\,\mathrm{J}.$$

El calor específico pasa de 400 a 480 J/(kg K). Al ser lineal, su media en el intervalo es 440 J/(kg K), y multiplicar esa media por la masa y por 40 K reproduce la integral.

| $T - T_0$ (K) | $c$ (J/(kg K)) | Papel en el cálculo |
|---|---|---|
| 0 | 400 | Extremo inicial |
| 20 | 440 | Media del tramo lineal |
| 40 | 480 | Extremo final |

El calor específico medio coincide con el del punto medio en esta dependencia lineal.

Para estudiar una mezcla elegimos una frontera que encierre todos los cuerpos participantes. En un calorímetro ideal, el aislamiento hace despreciable el intercambio con el entorno. Si los cambios mecánicos son despreciables, las energías entregadas por unas partes son recibidas por las otras y

$$\sum_i Q_i = 0. \tag{15.5}$$

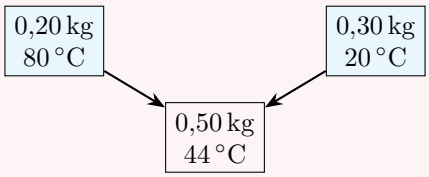
Cada término lleva su propio signo. Si las partes conservan sus fases y sus capacidades caloríficas son constantes, el equilibrio común satisface

$$\sum_i C_i(T_f - T_i) = 0, \qquad T_f = \frac{\sum_i C_i T_i}{\sum_i C_i}.$$

La media queda ponderada por capacidades caloríficas. Con capacidades positivas, la temperatura final se sitúa entre las iniciales. Podemos usar lecturas Celsius en este balance de diferencias: el cambio de origen de escala se cancela coherentemente.

### PROBLEMA RESUELTO 15.7 · Mezclar cantidades diferentes de agua

En un recipiente de capacidad calorífica despreciable y aislado se mezclan 0,20 kg de agua a 80 °C con 0,30 kg a 20 °C. Usa $c = 4200\,\mathrm{J/(kg\,K)}$. Encuentra la temperatura final y el calor de cada porción. *Resolución.* El balance es $0{,}20c(\theta_f - 80) + 0{,}30c(\theta_f - 20) = 0$. El calor específico común se cancela y queda $\theta_f = 44\,^\circ\mathrm{C}$. Para la porción caliente, $Q_h = 0{,}20(4200)(44 - 80) = -30240\,\mathrm{J}$; para la fría, $Q_f = 0{,}30(4200)(44 - 20) = +30240\,\mathrm{J}$. Las cantidades se compensan. La temperatura de equilibrio está más cerca de la inicial de la porción de mayor masa.




La temperatura común procede de una media ponderada por capacidades caloríficas.

El propio recipiente participa cuando su capacidad calorífica es apreciable. También pueden hacerlo el agitador y el termómetro. Podemos reunir sus aportes en una capacidad efectiva medida experimentalmente, siempre que compartan una temperatura aproximadamente uniforme durante el balance considerado.

### PROBLEMA RESUELTO 15.8 · Incluir el recipiente en la mezcla

Un calorímetro de capacidad 60 J/K contiene 0,20 kg de agua, ambos a 20 °C. Se añade una pieza de 0,20 kg a 80 °C, con $c_m = 500\,\mathrm{J/(kg\,K)}$. El conjunto está aislado. Usa $c_a = 4200\,\mathrm{J/(kg\,K)}$ y calcula el equilibrio. *Resolución.* Agua y calorímetro reúnen $0{,}20(4200)+60 = 900\,\mathrm{J/K}$; la pieza aporta $0{,}20(500) = 100\,\mathrm{J/K}$. Por tanto,

$$900(\theta_f - 20) + 100(\theta_f - 80) = 0, \qquad \theta_f = 26\,^\circ\mathrm{C}.$$

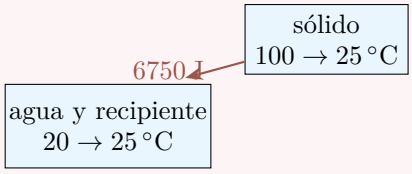
La pieza entrega 5400 J. El agua recibe 5040 J y el calorímetro 360 J, cuya suma reproduce aquella entrega. El recipiente queda incluido tanto en la frontera como en el cálculo.




Las ramas representan las dos porciones que reciben la energía entregada por el sólido.

**PROBLEMA RESUELTO 15.9 · Inferir el calor específico de una muestra**

Un sólido de 0,15 kg a 100 °C se introduce en 0,30 kg de agua a 20 °C. El calorímetro, inicialmente a 20 °C, tiene capacidad 90 J/K. El equilibrio se alcanza a 25 °C. Estima el calor específico del sólido con $c_a = 4200\,\mathrm{J/(kg\,K)}$, aislamiento ideal y fases constantes. *Resolución.* El agua y el recipiente reciben $[0{,}30(4200) + 90](25 - 20) = 6750\,\mathrm{J}$. El sólido entrega esa energía al enfriarse 75 K. De $0{,}15c_s(25-100) = -6750$ resulta $c_s = 600\,\mathrm{J/(kg\,K)}$. Esta estimación depende del balance completo. Una pérdida hacia el entorno durante el ensayo modificaría la relación entre el enfriamiento del sólido y la energía recibida por el agua y el calorímetro.




El agua y el recipiente comparten la temperatura inicial y la final. Ambos participan en el balance.

## 15.5 Cambios de fase y estados finales posibles

Una sustancia puede recibir energía mientras cambia la proporción de sus fases. En una transición de una sustancia pura a presión fija, cerca del equilibrio, la coexistencia ocurre a una temperatura determinada. Durante la fusión, la energía suministrada transforma sólido en líquido mientras se mantiene esa temperatura. La masa que cambia de fase decide la energía necesaria.

El *calor latente específico* $L$ expresa la energía transferida por unidad de masa en esa transición y bajo esas condiciones. Escribiremos

$$Q = +mL \quad \text{en fusión o vaporización,} \qquad Q = -mL \quad \text{en solidificación o condensación.} \tag{15.6}$$

El valor de $L$ se mide en J/kg. Para los problemas adoptaremos $c_a = 4200\,\mathrm{J/(kg\,K)}$, $c_h = 2100\,\mathrm{J/(kg\,K)}$, $L_f = 3{,}34 \times 10^5\,\mathrm{J/kg}$ y $L_v = 2{,}26 \times 10^6\,\mathrm{J/kg}$, correspondientes a aproximaciones para el agua bajo presión atmosférica ordinaria. Usaremos 0 °C y 100 °C como temperaturas de transición en ese modelo.

El valor tabulado de calor latente a presión constante incluye el efecto energético de la expansión durante la transición. Por ello, al trabajar con vapor bajo esa presión, mantenemos coherentes el balance térmico y los datos tabulados. En las mezclas ideales trataremos como despreciable la masa de vapor residual sobre el líquido final. En el capítulo siguiente formularemos separadamente los cambios de energía interna y el trabajo de expansión.

### PROBLEMA RESUELTO 15.10 · Calentar hielo hasta obtener agua tibia

Calcula la energía necesaria para transformar 0,10 kg de hielo a $-10\,^{\circ}\mathrm{C}$ en agua a $20\,^{\circ}\mathrm{C}$, usando las constantes indicadas y presión atmosférica fija. *Resolución.* El recorrido tiene tres etapas. Calentar el hielo hasta la fusión requiere $Q_1 = 0{,}10(2100)(10) = 2100\,\mathrm{J}$. Fundirlo requiere $Q_2 = 0{,}10(334000) = 33400\,\mathrm{J}$. Calentar después el agua requiere $Q_3 = 0{,}10(4200)(20) = 8400\,\mathrm{J}$. En total, $Q = 43900\,\mathrm{J}$. Cada etapa usa la propiedad correspondiente a su fase o a su transición; la temperatura permanece en el valor de fusión durante la segunda etapa.

| Etapa | Cambio térmico | Energía recibida |
|---|---|---|
| Hielo | $-10 \to 0\,^{\circ}\mathrm{C}$ | 2100 J |
| Fusión | $0\,^{\circ}\mathrm{C}$ | 33400 J |
| Agua | $0 \to 20\,^{\circ}\mathrm{C}$ | 8400 J |
| Total | | 43900 J |

Los tramos de calentamiento y la transición se contabilizan por separado y se suman.

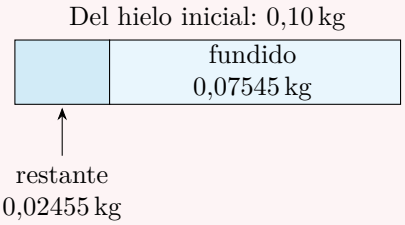
En una mezcla con hielo conviene comparar primero dos cantidades: la energía que el agua y el recipiente pueden entregar al llegar a la temperatura de fusión, y la necesaria para llevar el hielo a esa temperatura y fundirlo. Esa comparación selecciona el estado final que debe entrar en la ecuación.

### PROBLEMA RESUELTO 15.11 · Encontrar cuánto hielo se funde

Un recipiente aislado de capacidad despreciable reúne 0,10 kg de hielo a $0\,^{\circ}\mathrm{C}$ y 0,20 kg de agua a $30\,^{\circ}\mathrm{C}$. Determina el estado final. *Resolución.* Al enfriarse hasta $0\,^{\circ}\mathrm{C}$, el agua puede entregar $0{,}20(4200)(30) = 25200\,\mathrm{J}$. Fundir todo el hielo requeriría 33400 J. La energía disponible permite fundir solo

$$m_f = \frac{25200}{334000}\,\mathrm{kg} \simeq 0{,}07545\,\mathrm{kg}.$$

Quedan aproximadamente 0,02455 kg de hielo y 0,27545 kg de agua a $0\,^{\circ}\mathrm{C}$. El balance térmico fija una masa transformada mientras coexisten ambas fases.



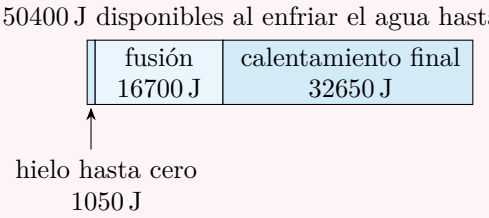

La barra representa únicamente la masa de hielo inicial. El líquido final incluye también el agua que ya estaba en el recipiente.

### PROBLEMA RESUELTO 15.12 · Comprobar una fusión completa

Se ponen 0,050 kg de hielo a $-10\,^{\circ}\mathrm{C}$ en contacto con 0,30 kg de agua a $40\,^{\circ}\mathrm{C}$. Considera aislamiento y capacidad despreciable del recipiente. Encuentra la temperatura final. *Resolución.* Enfriar el agua hasta cero liberaría 50400 J. El hielo necesita $0{,}050(2100)(10) = 1050$ J para llegar a cero y 16700 J para fundirse. Quedan 32650 J para calentar los 0,350 kg de agua finales. Así,

$$\theta_f = \frac{32650}{0{,}350(4200)}\,^{\circ}\mathrm{C} \simeq 22{,}21\,^{\circ}\mathrm{C}.$$

El resultado pertenece al intervalo de agua líquida del modelo y confirma la fusión completa. La suma de las masas se utiliza solo después de haber incorporado el calentamiento y la fusión iniciales del hielo.




La energía se reparte entre calentamiento del hielo, fusión y calentamiento del líquido final. Los anchos representan esas fracciones.

### PROBLEMA RESUELTO 15.13 · Condensar vapor dentro de agua

Se introducen 0,010 kg de vapor de agua a $100\,^{\circ}\mathrm{C}$ en 0,20 kg de agua a $20\,^{\circ}\mathrm{C}$. Supón que toda la masa queda en un recipiente de capacidad despreciable, aislado térmicamente, a presión atmosférica fija. Comprueba si todo el vapor se condensa y calcula el equilibrio. *Resolución.* Llevar el agua inicial a $100\,^{\circ}\mathrm{C}$ requeriría 67200 J, mientras la condensación entrega 22600 J. El equilibrio quedará por debajo de cien y permite la condensación completa. El agua condensada también se enfría. El balance es

$$0{,}20(4200)(\theta_f - 20) = 0{,}010(2260000) + 0{,}010(4200)(100 - \theta_f).$$

De aquí $882\theta_f = 43600$ y $\theta_f \simeq 49{,}43\,^{\circ}\mathrm{C}$. La masa final de líquido es 0,210 kg. El resultado utiliza la energía de condensación y la que entrega después esa porción líquida al enfriarse.

| Etapa | Evolución | Calor de la porción |
|---|---|---|
| Vapor | Condensa a $100\,^{\circ}\mathrm{C}$ | $-22600$ J |
| Condensado | Se enfría hasta $\theta_f$ | $-42(100 - \theta_f)$ J |
| Agua inicial | Se calienta hasta $\theta_f$ | $+840(\theta_f - 20)$ J |

Las dos primeras filas son etapas sucesivas de la masa introducida. La suma de los tres calores es cero; $\theta_f$ es el valor numérico de la temperatura final en grados Celsius.

La temperatura constante de una transición requiere las condiciones indicadas: sustancia pura, presión aproximadamente fija y evolución cercana al equilibrio. Una mezcla de sustancias, una presión variable o un calentamiento con grandes diferencias internas exige otro modelo de la curva térmica. También la evaporación superficial puede ocurrir por debajo de la temperatura de ebullición, con una tasa dependiente del entorno.

## 15.6 Cómo y con qué rapidez se transfiere la energía

El balance energético determina cuánto se intercambia entre dos estados. Para conocer la duración necesitamos describir la tasa de transferencia. La *potencia térmica* es $\dot{Q} = dQ/dt$, medida en watts. Si esa potencia permanece constante, la energía transferida durante un tiempo $t$ es $Q = \dot{Q}\,t$.

En la *conducción*, las interacciones microscópicas transportan energía a través del material. En los metales contribuyen también los electrones móviles. Para una pared plana homogénea de espesor $L$ y área $A$, con caras a temperaturas uniformes y régimen estacionario unidimensional, la ley de Fourier da la magnitud

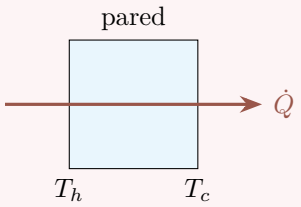
$$\dot{Q} = \kappa A \frac{T_h - T_c}{L}, \qquad T_h > T_c. \tag{15.7}$$

La conductividad $\kappa$ se mide en $\mathrm{W/(m\,K)}$. El régimen estacionario mantiene fijo el perfil de temperatura y exige condiciones estables en las caras. El transporte neto se dirige hacia la de menor temperatura. En forma local y con signo, $\dot{Q}_x = -\kappa A\, dT/dx$.

**PROBLEMA RESUELTO 15.14 · Una pared bajo condiciones estacionarias**

Una pared de área $2{,}0\,\mathrm{m}^2$, espesor $0{,}040\,\mathrm{m}$ y conductividad $0{,}80\,\mathrm{W/(m\,K)}$ mantiene una diferencia entre caras de $20\,\mathrm{K}$. Considera conducción estacionaria, unidimensional y pérdidas laterales despreciables. Calcula la potencia y la energía que atraviesa la pared en diez minutos.

*Resolución.* La potencia es $\dot{Q} = 0{,}80(2{,}0)(20)/0{,}040 = 800\,\mathrm{W}$. Diez minutos son $600\,\mathrm{s}$, por lo que $Q = 800(600) = 480000\,\mathrm{J}$. Las temperaturas de las caras son datos mantenidos externamente. Si ambas pertenecieran a cuerpos finitos que se enfrían o calientan, la diferencia variaría y habría que integrar la potencia correspondiente.

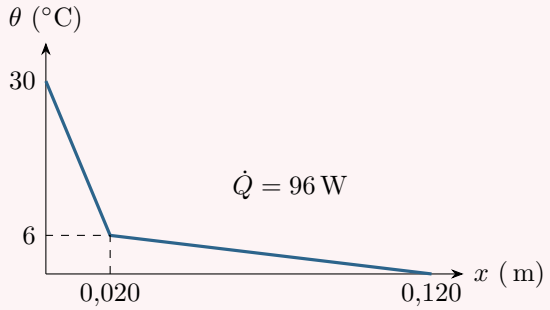



La potencia se dirige hacia la cara fría. Las condiciones estacionarias mantienen la diferencia entre caras.

Podemos definir una resistencia térmica $R_t = L/(\kappa A)$, con unidades $\mathrm{K/W}$. En capas en serie y régimen estacionario atraviesa cada capa la misma potencia. Las diferencias de temperatura se suman y obtenemos $R_{t,\mathrm{total}} = \sum_i R_{t,i}$, despreciando resistencias adicionales de contacto.

**PROBLEMA RESUELTO 15.15 · Localizar la temperatura entre dos capas**

Una pared tiene dos capas de área $2{,}0\,\mathrm{m}^2$: primero un aislante de espesor $0{,}020\,\mathrm{m}$ y $\kappa = 0{,}040\,\mathrm{W/(m\,K)}$; después un ladrillo de espesor $0{,}10\,\mathrm{m}$ y $\kappa = 0{,}80\,\mathrm{W/(m\,K)}$. La cara del aislante se mantiene a $30\,^\circ\mathrm{C}$ y la exterior del ladrillo a $0\,^\circ\mathrm{C}$. Encuentra la potencia estacionaria y la temperatura de la interfaz, con contacto ideal. *Resolución.* Las resistencias son $R_1 = 0{,}25\,\mathrm{K/W}$ y $R_2 = 0{,}0625\,\mathrm{K/W}$. Por tanto $\dot{Q} = 30/(0{,}3125) = 96\,\mathrm{W}$. La caída de temperatura en el aislante es $96(0{,}25) = 24\,\mathrm{K}$, y la interfaz está a $6\,^\circ\mathrm{C}$. El ladrillo completa una caída de $96(0{,}0625) = 6\,\mathrm{K}$. Una capa con mayor resistencia sostiene una fracción mayor de la diferencia total bajo la misma potencia.




El perfil es lineal dentro de cada capa del modelo estacionario. La interfaz está a seis grados Celsius.

La *convección* incorpora el transporte de energía por el movimiento de un fluido. Puede surgir por diferencias de densidad bajo gravedad o ser impulsada por un ventilador o una bomba. En la superficie del cuerpo siguen interviniendo intercambios microscópicos; el movimiento renueva el fluido cercano y modifica la tasa. La geometría, la viscosidad y la rapidez del flujo influyen en ese proceso.

La *radiación* transporta energía mediante ondas electromagnéticas y puede propagarse en el vacío. Una superficie a temperatura absoluta $T$ emite una potencia aproximada $\varepsilon\sigma A T^4$, con emisividad $0 \le \varepsilon \le 1$ y constante $\sigma \simeq 5{,}67 \times 10^{-8}\,\mathrm{W/(m^2K^4)}$. Para una superficie gris pequeña en una envoltura grande, isotérmica y que cubre todo su campo de visión, la potencia radiativa neta hacia el entorno es

$$\dot{Q}_{\text{saliente}} = \varepsilon\sigma A(T^4 - T_e^4). \tag{15.8}$$

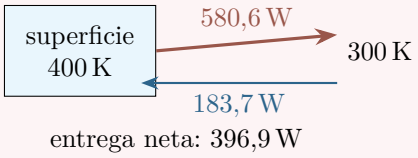
La expresión incluye la absorción de la radiación del entorno a temperatura $T_e$. Un resultado negativo corresponde a recepción neta. La misma emisividad para emisión y absorción supone el modelo gris empleado. La dependencia con la cuarta potencia exige usar kelvin.

**PROBLEMA RESUELTO 15.16 · Restar emisión y absorción radiativas**

Una superficie de área $0{,}50\,\mathrm{m}^2$ y emisividad 0,80 se mantiene a 400 K dentro de una envoltura grande a 300 K. Usa el modelo anterior y calcula la potencia radiativa neta que entrega.
*Resolución.* Sustituir las temperaturas absolutas da

$$\dot{Q}_{\text{saliente}} = 0{,}80(5{,}67\times10^{-8})(0{,}50)(400^4 - 300^4)\,\mathrm{W} = 396{,}9\,\mathrm{W}.$$

La superficie emite aproximadamente 580,6 W y absorbe 183,7 W del entorno. Su diferencia determina la pérdida neta. Mantener la temperatura de la superficie requiere compensar esa pérdida y cualquier otro intercambio presente.




La potencia neta incluye la emisión de la superficie y la absorción de la radiación del entorno.

En un objeto cotidiano pueden coexistir los tres mecanismos. Una taza entrega energía por conducción a la mesa, por convección al aire y por radiación al entorno. La evaporación del líquido añade otra transferencia asociada al cambio de fase y a la masa que sale. Elegir el mecanismo dominante exige examinar las condiciones de cada caso.

## 15.7 Temperatura y movimiento microscópico

Para conectar temperatura y movimiento elegimos un modelo preciso: un gas clásico diluido, en equilibrio, con partículas cuya interacción fuera de los choques es despreciable. Supondremos choques elásticos, paredes en reposo y velocidades distribuidas sin una dirección privilegiada. El movimiento térmico se describe respecto del centro de masa del gas; un flujo del conjunto se trata por separado.

Podemos obtener la presión siguiendo una partícula de masa $m_0$ dentro de una caja de longitud $\ell$ en la dirección $x$. Para este cálculo trataremos las partículas como independientes, con vuelos libres entre paredes. Al rebotar en una pared, la componente normal de su momento cambia de signo y transmite un impulso de módulo $2m_0|v_x|$. Entre dos choques sucesivos contra esa misma pared transcurre $2\ell/|v_x|$. El cociente da una contribución media a la fuerza igual a $m_0v_x^2/\ell$. Sumamos las $N$ partículas y dividimos por el área de la pared. Como el volumen es $V = A\ell$, resulta $p = (N/V)m_0\langle v_x^2\rangle$. En un gas diluido con choques mutuos elásticos, el promedio estadístico de los impulsos sobre la pared conduce a la misma relación.

La isotropía reparte por igual el promedio cuadrático entre las tres direcciones, de modo que $\langle v_x^2\rangle = \langle v^2\rangle/3$. Por tanto,

$$p = \frac{1}{3}\frac{N}{V}m_0\langle v^2\rangle = \frac{1}{3}\rho\langle v^2\rangle. \tag{15.9}$$

Aquí $\rho$ es la densidad de masa del gas. Los choques producen presión aun cuando el promedio vectorial de las velocidades térmicas sea cero: la presión depende de cuadrados positivos de sus componentes.

La relación entre la escala termodinámica y este modelo es

$$\langle K_{\text{tras}}\rangle = \frac{1}{2}m_0\langle v^2\rangle = \frac{3}{2}k_BT, \qquad v_{\text{rms}} = \sqrt{\langle v^2\rangle} = \sqrt{\frac{3k_BT}{m_0}}. \tag{15.10}$$

Usaremos $k_B = 1{,}380649 \times 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$. La rapidez cuadrática media se obtiene promediando primero los cuadrados y extrayendo después la raíz. Cada partícula puede tener una rapidez distinta y cambiarla al chocar con otras; la relación describe el promedio del equilibrio.

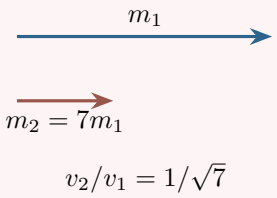
**PROBLEMA RESUELTO 15.17 · Comparar partículas a la misma temperatura**

Dos gases ideales clásicos están a 300 K. La masa de una partícula del segundo es siete veces la del primero. Compara sus energías cinéticas medias de traslación y sus rapideces cuadráticas medias. ¿Qué cambia si la temperatura de ambos pasa a 1200 K?

*Resolución.* A la misma temperatura ambos tienen

$$\begin{aligned}\langle K_{\mathrm{tras}}\rangle &= \tfrac{3}{2}k_B T \\ &= \tfrac{3}{2}(1{,}380649 \times 10^{-23})(300)\,\mathrm{J} \\ &\simeq 6{,}213 \times 10^{-21}\,\mathrm{J}.\end{aligned}$$

La rapidez satisface $v_{\mathrm{rms},2}/v_{\mathrm{rms},1} = 1/\sqrt{7} \simeq 0{,}378$. Al cuadruplicar la temperatura absoluta, cada energía media se cuadruplica y cada rapidez cuadrática media se duplica. La razón entre las rapideces de las dos especies conserva su valor.




Las flechas comparan las rapideces cuadráticas medias a igual temperatura. Sus longitudes guardan la razón indicada.

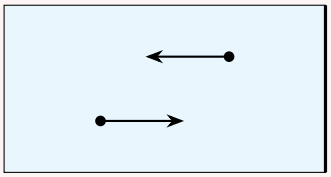
Para un gas monoatómico ideal clásico, la contribución interna del modelo es la suma de esas energías de traslación, $U = (3/2)Nk_BT$, con la referencia elegida para las restantes contribuciones constantes. Una molécula puede almacenar además energía de rotación y vibración. En líquidos y sólidos también importan las interacciones entre partículas. La fórmula para la traslación conserva su alcance específico dentro del modelo clásico indicado; describir la energía interna completa exige identificar las contribuciones que resultan accesibles en las condiciones de la muestra.

**PROBLEMA RESUELTO 15.18 · Obtener presión a partir de choques**

En un gas del modelo anterior hay $2{,}5 \times 10^{25}$ partículas por metro cúbico. Cada una tiene masa $4{,}65 \times 10^{-26}\,\mathrm{kg}$ y la rapidez cuadrática media es $500\,\mathrm{m/s}$. Calcula la presión y la temperatura. El gas está en reposo macroscópico. *Resolución.* La densidad es $(2{,}5 \times 10^{25})(4{,}65 \times 10^{-26}) = 1{,}1625\,\mathrm{kg/m^3}$. La ecuación de los choques da

$$p = \tfrac{1}{3}(1{,}1625)(500^2)\,\mathrm{Pa} = 96875\,\mathrm{Pa}.$$

La relación cinética permite despejar $T = m_0 v_{\mathrm{rms}}^2/(3k_B) \simeq 280{,}67\,\mathrm{K}$. El promedio vectorial térmico es cero y el promedio cuadrático es positivo. Combinar las dos ecuaciones conduce a $pV = Nk_BT$, la relación de estado que estudiaremos con los procesos de gases en el capítulo siguiente.




Dos velocidades opuestas ilustran la compensación vectorial. La presión depende del promedio cuadrático de toda la distribución.

## Ejercicios para reconstruir y transferir

Usa las constantes de agua y hielo de la sección 15.5, salvo indicación distinta. En calorimetría considera aislamiento y capacidad despreciable del recipiente cuando así se indique. Las cifras corresponden a modelos idealizados; el redondeo expresa la aproximación del cálculo.

**EJERCICIO 15.1 · Identificar sistemas y signos**

Una muestra A a $70\,^\circ\mathrm{C}$ entrega $2400\,\mathrm{J}$ por contacto a B, inicialmente a $25\,^\circ\mathrm{C}$, dentro de una envoltura aislante. Asigna el calor de cada una y explica qué información adicional se necesita para calcular sus cambios de temperatura.

**EJERCICIO 15.2 · Una lectura y un descenso**

Convierte $35\,^\circ\mathrm{C}$ a kelvin y Fahrenheit. Después expresa un descenso de $15\,^\circ\mathrm{C}$ como diferencia en ambas escalas y comprueba la lectura final.

**EJERCICIO 15.3 · Duplicar una temperatura absoluta**

Una muestra está a $20\,^\circ\mathrm{C}$. ¿Qué lectura Celsius corresponde al doble de su temperatura absoluta?

**EJERCICIO 15.4 · Interpolar un termómetro**

Una propiedad termométrica vale 20 unidades a 0 °C y 80 a 100 °C. Supón linealidad y encuentra la temperatura correspondiente a una lectura de 47 unidades, en Celsius y kelvin.

**EJERCICIO 15.5 · Una longitud que aumenta**

Una barra libre de 1,50 m tiene $\alpha = 20 \times 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}$. Encuentra su aumento de longitud para $\Delta T = 80\,\mathrm{K}$ y comprueba el cambio relativo.

**EJERCICIO 15.6 · El área de un agujero**

Una placa isótropa tiene un agujero de área $0{,}0100\,\mathrm{m}^2$. Con $\alpha = 15 \times 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}$ y un aumento de 100 K, estima a primer orden el aumento de área y el área final bajo dilatación libre uniforme.

**EJERCICIO 15.7 · Capacidad de una muestra**

Una muestra de 0,25 kg tiene calor específico constante $800\,\mathrm{J/(kg\,K)}$. Calcula su capacidad calorífica y la energía que recibe para aumentar 30 K conservando su fase.

**EJERCICIO 15.8 · Calor específico lineal**

Una muestra de 0,10 kg tiene $c(T) = 200\,\mathrm{J/(kg\,K)} + [1{,}0\,\mathrm{J/(kg\,K^2)}](T - 300\,\mathrm{K})$ en el proceso dado. Calcula el calor recibido entre 300 y 340 K, manteniendo la misma fase.

**EJERCICIO 15.9 · Mezcla de dos porciones**

Se mezclan en un recipiente ideal aislado 0,10 kg de agua a 90 °C y 0,40 kg a 15 °C. Encuentra la temperatura final y el calor de la porción inicialmente caliente.

**EJERCICIO 15.10 · El recipiente también recibe energía**

Un calorímetro de 60 J/K y 0,20 kg de agua están a 20 °C. Se introduce un sólido de 0,30 kg, calor específico $500\,\mathrm{J/(kg\,K)}$ y temperatura 90 °C. Con aislamiento ideal, encuentra el equilibrio y las tres transferencias.

**EJERCICIO 15.11 · Inferir una propiedad del sólido**

Un sólido de 0,10 kg a 120 °C se introduce en 0,10 kg de agua a 20 °C, dentro de un calorímetro de 30 J/K inicialmente a esa temperatura. El equilibrio aislado se alcanza a 30 °C. Estima el calor específico del sólido.

**EJERCICIO 15.12 · Una frontera con pérdida conocida**

Dos cuerpos de capacidades 600 y 400 J/K están inicialmente a 80 y 20 °C. Se equilibran en un recipiente de 200 J/K inicialmente a 20 °C. Durante el proceso el conjunto entrega 6000 J al entorno. Encuentra la temperatura común, conservando las fases.

**EJERCICIO 15.13 · Llegar hasta la fusión completa**

Determina la energía necesaria para convertir 0,20 kg de hielo a −5 °C en agua a 0 °C bajo las condiciones del modelo.

**EJERCICIO 15.14 · Dos fases al final**

Se mezclan 0,050 kg de hielo a 0 °C y 0,10 kg de agua a 20 °C en un recipiente ideal aislado. Determina temperatura y masas finales de cada fase.

**EJERCICIO 15.15 · Agua líquida después de la mezcla**

En un recipiente ideal aislado se ponen 0,050 kg de hielo a 0 °C y 0,20 kg de agua a 50 °C. Comprueba la fase final y encuentra su temperatura.

**EJERCICIO 15.16 · Extraer energía y congelar una parte**

Se enfrían 0,10 kg de agua desde 20 °C hasta obtener 0,040 kg de hielo y el resto de agua a 0 °C. Calcula el calor del sistema durante el proceso a presión atmosférica fija.

**EJERCICIO 15.17 · Dosificar vapor**

¿Qué masa de vapor a 100 °C debe condensarse dentro de 0,20 kg de agua a 20 °C para alcanzar 30 °C? Supón retención completa de la masa, presión atmosférica fija, aislamiento y capacidad despreciable del recipiente.

**EJERCICIO 15.18 · Leer una curva de calentamiento**

Una muestra pura de 0,050 kg recibe 80 W constantes. En un tramo de una sola fase su temperatura sube 0,40 K/s; durante una transición posterior a presión fija permanece constante por 100 s. Desprecia pérdidas y capacidad del recipiente. Calcula el calor específico del primer tramo y el calor latente de la transición completa.

**EJERCICIO 15.19 · Potencia y tiempo en una pared**

Una pared de área 1,0 $m^2$, espesor 0,050 m y conductividad 0,20 W/(m K) mantiene una diferencia entre caras de 15 K. Encuentra la potencia estacionaria y la energía transferida en cinco minutos bajo conducción unidimensional.

**EJERCICIO 15.20 · Dos resistencias térmicas**

Dos capas en serie tienen resistencias térmicas 0,40 y 0,10 K/W. La primera está del lado de una cara a 25 °C; la segunda termina en una cara a 0 °C. Calcula la potencia estacionaria y la temperatura intermedia con contacto ideal.

**EJERCICIO 15.21 · Comparar pérdidas radiativas**

Una misma superficie gris está primero a 400 K y luego a 600 K dentro de una envoltura grande a 300 K. Mantén constantes su área y emisividad. ¿Por qué factor cambia su potencia radiativa neta saliente?

**EJERCICIO 15.22 · Reconocer mecanismos**

Explica el intercambio predominante al tocar metal y madera a la misma temperatura ambiente, la transferencia entre superficies separadas por vacío y el efecto de un ventilador sobre una superficie caliente. Indica qué condición adicional permitiría calcular una potencia en cada caso.

**EJERCICIO 15.23 · Dos proporciones microscópicas**

Un gas ideal clásico pasa de 200 a 800 K. Encuentra los factores de cambio de la energía cinética media de traslación y de la rapidez cuadrática media. A una misma temperatura, compara después dos especies cuando una partícula A tiene cuatro veces la masa de una B.

**EJERCICIO 15.24 · Una presión con velocidad media nula**

Un gas del modelo cinético tiene densidad 1,20 kg/m$^3$ y rapidez cuadrática media 500 m/s. Calcula la presión y explica cómo puede coexistir con un promedio vectorial de velocidades térmicas igual a cero.

## Soluciones razonadas

**SOLUCIÓN 15.1.**
Para A, $Q_A = -2400\,\mathrm{J}$; para B, $Q_B = +2400\,\mathrm{J}$. La suma es cero para el intercambio interno. Calcular los cambios de temperatura requiere las capacidades caloríficas y comprobar las fases y condiciones de cada cuerpo. La igualdad de las energías intercambiadas es compatible con cambios de temperatura diferentes.

**SOLUCIÓN 15.2.**
La lectura inicial es 308,15 K y 95 °F. El descenso corresponde a $\Delta T = -15\,\mathrm{K}$ y $\Delta\theta_F = -27\,^\circ\mathrm{F}$. La lectura final es $20\,^\circ\mathrm{C} = 293{,}15\,\mathrm{K} = 68\,^\circ\mathrm{F}$, que reproduce ambas diferencias.

**SOLUCIÓN 15.3.**
La temperatura absoluta inicial es 293,15 K. Su doble es 586,30 K, cuya lectura Celsius es 313,15 °C. El factor dos se aplica después de fijar el origen absoluto de la escala.

**SOLUCIÓN 15.4.**
La pendiente de calibración es $(80 - 20)/100 = 0{,}60$ unidades por kelvin. La lectura de 47 se sitúa 27 unidades por encima del valor inicial, por lo que $\theta = 27/0{,}60 = 45\,^\circ\mathrm{C}$ y $T = 318{,}15\,\mathrm{K}$. El resultado queda entre los puntos de calibración.

**SOLUCIÓN 15.5.**
El incremento es $\Delta L = (20 \times 10^{-6})(1{,}50)(80) = 0{,}00240\,\text{m} = 2{,}40\,\text{mm}$. El cambio relativo es 0,00160. La longitud final del modelo vale 1,50240 m, bajo la hipótesis de dilatación libre.

**SOLUCIÓN 15.6.**
A primer orden, $\Delta A = 2(15 \times 10^{-6})(0{,}0100)(100) = 3{,}00 \times 10^{-5}\,\text{m}^2$. El área final es aproximadamente $0{,}01003\,\text{m}^2$. La expansión uniforme aumenta las dimensiones del hueco junto con las de la placa. Los términos de segundo orden quedan fuera de esta estimación.

**SOLUCIÓN 15.7.**
La capacidad es $C = 0{,}25(800) = 200\,\text{J/K}$ y el calor recibido $Q = 200(30) = 6000\,\text{J}$. El calor específico caracteriza la respuesta por unidad de masa, mientras la capacidad incluye la masa de esta muestra.

**SOLUCIÓN 15.8.**
Con $u = T - 300\,\text{K}$, $Q = 0{,}10[200(40) + (1/2)(40^2)] = 880\,\text{J}$. El calor específico medio es $220\,\text{J/(kg K)}$, que corresponde al punto medio por la dependencia lineal. Multiplicar esa media por 0,10 kg y 40 K comprueba el resultado.

**SOLUCIÓN 15.9.**
La temperatura final es $[0{,}10(90) + 0{,}40(15)]/0{,}50 = 30\,^\circ\text{C}$. La porción caliente tiene $Q_h = 0{,}10(4200)(30 - 90) = -25200\,\text{J}$. La porción fría recibe $0{,}40(4200)(30 - 15) = 25200\,\text{J}$.

**SOLUCIÓN 15.10.**
El agua y el recipiente suman 900 J/K; el sólido, 150 J/K. El balance $900(\theta_f - 20) + 150(\theta_f - 90) = 0$ da 30 °C. Las transferencias son $Q_s = -9000\,\text{J}$, $Q_a = +8400\,\text{J}$ y $Q_c = +600\,\text{J}$. Su suma es cero.

**SOLUCIÓN 15.11.**
El agua y el calorímetro reciben $[0{,}10(4200) + 30](30 - 20) = 4500\,\text{J}$. El sólido se enfría 90 K, por lo que $c_s = 4500/[0{,}10(90)] = 500\,\text{J/(kg K)}$. La estimación corresponde al intervalo y a las hipótesis del ensayo.

**SOLUCIÓN 15.12.**
Para la frontera que encierra cuerpos y recipiente, el calor exterior es $-6000\,\text{J}$. Así, $600(\theta_f - 80) + 400(\theta_f - 20) + 200(\theta_f - 20) = -6000$. Resulta $\theta_f = 45\,^\circ\text{C}$. Las contribuciones son $-21000$, $+10000$ y $+5000\,\text{J}$, cuya suma es $-6000\,\text{J}$.

**SOLUCIÓN 15.13.**
Calentar el hielo requiere $0{,}20(2100)(5) = 2100\,\text{J}$. La fusión completa requiere $0{,}20(334000) = 66800\,\text{J}$. El calor total recibido es 68900 J y el estado final es agua a la temperatura de fusión del modelo.

**SOLUCIÓN 15.14.**
El agua puede entregar $0{,}10(4200)(20) = 8400\,\text{J}$ hasta llegar a cero. Se funden $8400/334000 \simeq 0{,}02515\,\text{kg}$. Quedan 0,02485 kg de hielo y 0,12515 kg de agua, ambos a 0 °C. La suma de las masas es 0,150 kg.

**SOLUCIÓN 15.15.**
El agua caliente puede entregar 42000 J hasta cero; fundir el hielo consume 16700 J. La energía restante, 25300 J, calienta 0,250 kg de agua. Por tanto $\theta_f = 25300/[0{,}250(4200)] \simeq 24{,}10\,^\circ\text{C}$. La temperatura positiva confirma la fusión completa.

**SOLUCIÓN 15.16.**
El enfriamiento del líquido entrega $0{,}10(4200)(20) = 8400\,\text{J}$ y congelar 0,040 kg entrega otros 13360 J. Para el sistema, $Q = -21760\,\text{J}$. El estado final reúne 0,040 kg de hielo y 0,060 kg de agua a cero grados Celsius.

**SOLUCIÓN 15.17.**
El agua inicial necesita $0{,}20(4200)(10) = 8400\,\text{J}$. Cada kilogramo de vapor entrega $2260000 + 4200(100 - 30) = 2554000\,\text{J/kg}$ al condensarse y enfriarse. La masa requerida es $8400/2554000 \simeq 0{,}003289\,\text{kg} = 3{,}289\,\text{g}$. El equilibrio a treinta grados es compatible con la condensación completa.

**SOLUCIÓN 15.18.**
En el primer tramo, $\dot{Q} = C\,dT/dt$ da $C = 80/0{,}40 = 200\,\text{J/K}$ y $c = 200/0{,}050 = 4000\,\text{J/(kg K)}$. La transición recibe $80(100) = 8000\,\text{J}$, por lo que $L = 8000/0{,}050 = 160000\,\text{J/kg}$. El tramo inclinado mide una capacidad y el horizontal una energía de transformación.

**SOLUCIÓN 15.19.**
La potencia es $0{,}20(1{,}0)(15)/0{,}050 = 60\,\mathrm{W}$. Cinco minutos equivalen a $300\,\mathrm{s}$, y la energía transferida es $18000\,\mathrm{J}$. Ambos resultados dependen de que se mantenga la diferencia de temperaturas durante el intervalo.

**SOLUCIÓN 15.20.**
La resistencia total es $0{,}50\,\mathrm{K/W}$ y la potencia $25/0{,}50 = 50\,\mathrm{W}$. La primera caída es $50(0{,}40) = 20\,\mathrm{K}$, de modo que la interfaz está a $5\,^{\circ}\mathrm{C}$. La segunda capa completa los $5\,\mathrm{K}$ restantes.

**SOLUCIÓN 15.21.**
El área, la emisividad y la constante se cancelan. La razón es $(600^4 - 300^4)/(400^4 - 300^4) = 243/35 \simeq 6{,}94$. La absorción desde el entorno participa en ambas potencias netas; conservarla en la razón es parte del modelo.

**SOLUCIÓN 15.22.**
El contacto con la mano produce conducción; las distintas tasas explican la diferente sensación térmica del metal y la madera. En el vacío puede haber intercambio radiativo. Un ventilador renueva el fluido junto a la superficie mediante convección forzada. Calcular potencias requiere temperaturas y propiedades de transporte, además de geometría; para radiación hacen falta también emisividad y entorno radiativo.

**SOLUCIÓN 15.23.**
La temperatura absoluta se cuadruplica: la energía cinética media de traslación aumenta por cuatro y la rapidez cuadrática media por dos. A igual temperatura, ambas especies tienen la misma energía media de traslación y $v_{\mathrm{rms},A}/v_{\mathrm{rms},B} = 1/2$ para una masa por partícula cuatro veces mayor.

**SOLUCIÓN 15.24.**
La presión es $p = (1/3)(1{,}20)(500^2) = 100000\,\mathrm{Pa}$. En equilibrio isotrópico se compensan los promedios con signo de las componentes de velocidad. Sus cuadrados conservan un promedio positivo, que fija la tasa de transferencia de momento a las paredes.

## Una experiencia: medir la respuesta térmica de una muestra

### Del registro de temperatura al balance

Utiliza agua templada, un recipiente aislante, una balanza y un termómetro de resolución conocida. Registra masas y temperaturas iniciales, mezcla dos porciones y mide la temperatura a intervalos regulares. Mantén temperaturas de manipulación segura; las experiencias con vapor requieren equipos de laboratorio adecuados.

Predice el equilibrio y compáralo con el registro. Anota la demora del sensor y el tiempo de mezcla. Estima la capacidad del recipiente mediante calibración o explica su efecto en el balance. Conserva las lecturas originales y sus incertidumbres.

Una temperatura que sigue cambiando puede revelar pérdidas, desigualdades internas o respuesta lenta del sensor. Repite con distintas masas. Con un calentador de potencia conocida, compara la pendiente inicial con $dT/dt = \dot{Q}/C$ y estudia cómo evoluciona por las pérdidas.

## Diagnóstico antes de avanzar

Un calorímetro de 60 J/K contiene 0,20 kg de agua, ambos a 20 °C. Se añaden 0,020 kg de hielo a 0 °C y se alcanza equilibrio con aislamiento ideal. Después un calentador de potencia de entrada 125 W funciona durante 60 s, y el 80 % de esa energía llega al agua y al recipiente. Determina las fases y temperaturas después de cada etapa. Explica cómo cambia el cálculo si queda hielo al comenzar el calentamiento.

**Contraste.** Agua y recipiente pueden entregar $[0{,}20(4200) + 60](20) = 18000$ J al llegar a cero. La fusión consume 6680 J; los 11320 J restantes calientan una capacidad final $0{,}220(4200) + 60 = 984$ J/K. La primera temperatura es $11320/984 \simeq 11{,}50$ °C, con toda el agua líquida. El calentador recibe 7500 J y transfiere 6000 J al conjunto. La segunda temperatura es $17320/984 \simeq 17{,}60$ °C. Si coexistieran agua y hielo al inicio de esa etapa, la energía calentadora se repartiría primero según la fusión pendiente y después según la capacidad de las fases finales.

**Lecturas de apoyo.** H. D. Young y R. A. Freedman, *Física universitaria*, volumen 1, 12.ª edición, capítulo 17, secciones 17.1–17.7; capítulo 18, secciones 18.3–18.4. R. A. Serway y C. Vuille, *Fundamentos de física*, volumen 1, 9.ª edición, secciones 10.1–10.3, 10.5 y 11.1–11.5. Los problemas, datos y ayudas visuales de este capítulo se han preparado para esta obra.

# CAPÍTULO 16

# GASES, TRABAJO Y PRINCIPIOS DE LA TERMODINÁMICA

16.1 Describir el estado de un gas . 322
16.2 El trabajo al cambiar el volumen 323
16.3 La energía que permanece y la que cruza la frontera . . . . . 325
16.4 Capacidades caloríficas de un gas ideal . . . . . 326
16.5 Reconocer y calcular una transformación . . . . . 327
16.6 Cerrar la trayectoria: ciclos y área neta . . . . . 330
16.7 Máquinas térmicas, refrigeradores y límites . . . . . 331
16.8 Entropía y sentido de los procesos 334
Ejercicios para reconstruir y transferir 335
Soluciones razonadas . . . . . 338
Una experiencia: comparar dos compresiones . . . . . 340
Diagnóstico antes de avanzar . . . . 341

Una jeringa tapada permite observar una relación entre volumen y presión: al empujar el émbolo, el aire ofrece una resistencia creciente. La temperatura también interviene. Una compresión rápida puede elevarla; una compresión lenta, en contacto con un baño térmico, permite que el gas entregue energía mientras disminuye su volumen.

Para explicar esas diferencias seguiremos dos preguntas: qué estados puede alcanzar una cantidad de gas y qué intercambios permiten pasar de uno a otro. El trabajo del pistón y la transferencia de calor darán un balance de energía. Al cerrar una trayectoria aparecerá una máquina térmica; al examinar el sentido de sus intercambios necesitaremos el segundo principio y la entropía.

## 16.1 Describir el estado de un gas

Consideremos un gas que ha alcanzado equilibrio dentro de un recipiente. Su presión $p$, su volumen $V$, su temperatura absoluta $T$ y la cantidad de sustancia $n$ describen aspectos de ese estado. La ecuación de estado relaciona esas variables. En el modelo de gas ideal,

$$pV = nRT = Nk_BT. \tag{16.1}$$

Aquí $N$ cuenta partículas y $n = N/N_A$ expresa esa cantidad en moles. La constante $R = N_Ak_B$ vincula ambas descripciones. Usaremos $R \simeq 8{,}314\,\mathrm{J/(mol\,K)}$ en los cálculos. El número de Avogadro es $N_A = 6{,}02214076 \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$.

El modelo aproxima un gas suficientemente diluido, con tamaño molecular e interacciones entre partículas pequeños para las condiciones estudiadas. La cercanía a una transición de fase, una densidad elevada o efectos cuánticos importantes exigen una descripción más amplia. Comprobar las condiciones de uso forma parte de interpretar un resultado.

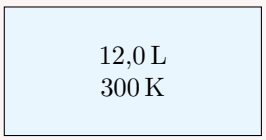
La presión de la ecuación es absoluta, medida respecto del vacío. Un manómetro suele informar la diferencia respecto del ambiente: $p = p_{\mathrm{man}} + p_{\mathrm{amb}}$. La temperatura se expresa en kelvin. En unidades SI, $\mathrm{Pa\,m^3 = J}$; además, $1\,\mathrm{L} = 10^{-3}\,\mathrm{m^3}$ y $1\,\mathrm{kPa\,L} = 1\,\mathrm{J}$. Estas relaciones permiten revisar las conversiones antes de sustituir datos.

**PROBLEMA RESUELTO 16.1 · Contar moles a partir de un estado**

Un gas ideal ocupa 12,0 L a 200 kPa absolutos y 300 K. Estima la cantidad de sustancia y el número de partículas. *Resolución.* El producto presión por volumen es $200(12) = 2400\,\mathrm{J}$. Por tanto,

$$n = \frac{2400}{(8{,}314)(300)}\,\mathrm{mol} \simeq 0{,}9622\,\mathrm{mol}, \qquad N = nN_A \simeq 5{,}795 \times 10^{23}.$$

El volumen describe toda la muestra; el mol permite expresar cuántas partículas contiene. El cálculo presupone que la presión y la temperatura dadas caracterizan el estado de equilibrio.




$p = 200\,\mathrm{kPa}$

$n \simeq 0{,}9622\,\mathrm{mol}$

La presión absoluta, el volumen y la temperatura describen un estado de equilibrio de la muestra.

Cuando la muestra permanece cerrada, $n$ se conserva. Dividir la ecuación entre $T$ proporciona $pV/T = nR$ y permite relacionar dos estados de esa misma cantidad de gas. Si entra o sale materia, conviene escribir la ecuación para cada estado con su propio $n$.

**PROBLEMA RESUELTO 16.2 · Relacionar dos estados de una muestra cerrada**

Una muestra ideal pasa de 100 kPa, 4,00 L y 300 K a 150 kPa y 6,00 L. Calcula su temperatura final e indica qué información falta para hallar el trabajo. *Resolución.* La conservación de la cantidad de gas da

$$T_f = T_i \frac{p_f V_f}{p_i V_i} = 300 \frac{150(6)}{100(4)}\,\mathrm{K} = 675\,\mathrm{K}.$$

El producto $pV$ aumenta por un factor 2,25, igual al de la temperatura absoluta. Para obtener el trabajo necesitamos describir cómo se mueve la frontera y qué presión externa se opone a ella durante el proceso. Los estados extremos permiten fijar la temperatura final y dejan abierta esa trayectoria.

| Estado | $p$ (kPa) | $V$ (L) | $T$ (K) |
|---|---|---|---|
| Inicial | 100 | 4 | 300 |
| Final | 150 | 6 | 675 |

La cantidad de gas se conserva; el producto pV y la temperatura aumentan por el mismo factor.

## 16.2 El trabajo al cambiar el volumen

Tomemos como sistema el gas dentro de un cilindro. Un pistón de área $A$ se desplaza una distancia $dx$ hacia afuera; el volumen aumenta $dV = A\,dx$. Llamamos $p_{\mathrm{ext}}$ a la presión mecánicamente transmitida en la frontera móvil del sistema. El trabajo que cruza esa frontera es $\delta W = p_{\mathrm{ext}} dV$. Para identificar esta presión con la de una carga exterior distante suponemos un pistón ideal, variación despreciable de su energía cinética y pérdidas mecánicas despreciables. Si el pistón acelera o disipa energía, el trabajo recibido por la carga requiere un balance adicional. Para el trabajo de frontera usamos así

$$W = \int_{V_i}^{V_f} p_{\mathrm{ext}}\, dV. \tag{16.2}$$

Un valor positivo corresponde a trabajo realizado por el gas; la compresión, con volumen decreciente y presión positiva, produce $W < 0$. Este convenio se mantendrá durante todo el capítulo.

En una transformación cuasiestática, el gas atraviesa estados próximos al equilibrio. Si el pistón se mueve con diferencias de presión infinitesimales y fricción despreciable, podemos sustituir $p_{\mathrm{ext}}$ por la presión de equilibrio $p$ del gas. Entonces el trabajo se lee como área orientada bajo la trayectoria del diagrama $p$–$V$. Una línea vertical tiene $dV = 0$; un recorrido hacia la derecha aporta área positiva y uno hacia la izquierda, negativa.

En una expansión rápida, la presión del gas puede variar espacialmente; el trabajo exige la fuerza transmitida en su frontera y el desplazamiento correspondiente. Una curva de presión de equilibrio entre los extremos representa una trayectoria idealizada cuya aplicación requiere justificar el proceso.

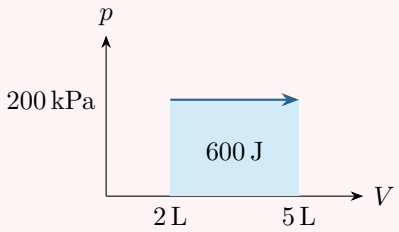
### PROBLEMA RESUELTO 16.3 · Mover un pistón a presión constante

Un gas se expande cuasiestáticamente desde 2,00 hasta 5,00 L a 200 kPa constantes. Calcula el trabajo que entrega y el correspondiente a recorrer la misma transformación en sentido inverso.

*Resolución.* La presión constante sale de la integral:

$$W = p(V_f - V_i) = 200(5 - 2)\,\mathrm{J} = 600\,\mathrm{J}.$$

El gas entrega 600 J al entorno. Al recorrer la misma línea desde 5 hasta 2 L, $W = 200(2 - 5) = -600$ J: el entorno realiza 600 J de trabajo sobre el gas. El signo se obtiene del desplazamiento de la frontera.



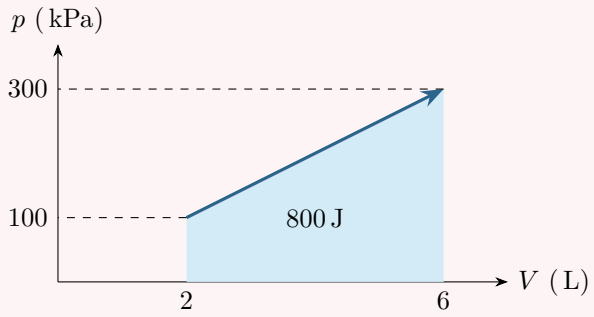

El área se orienta con el recorrido. La expansión entrega trabajo positivo.

### PROBLEMA RESUELTO 16.4 · Sumar un área con presión variable

Durante una expansión cuasiestática la presión aumenta linealmente de 100 a 300 kPa mientras el volumen pasa de 2,00 a 6,00 L. Encuentra el trabajo e interpreta geométricamente el cálculo. *Resolución.* El área bajo la recta es un trapecio. Su altura media es $(100+300)/2 = 200$ kPa y su base es 4,00 L. Así,

$$W = \frac{p_i + p_f}{2}(V_f - V_i) = 200(4)\,\mathrm{J} = 800\,\mathrm{J}.$$

También podemos sumar un rectángulo de 400 J y un triángulo de 400 J. La presión media aritmética sirve aquí porque la dependencia con $V$ es lineal; una curva general requiere su área o la integral correspondiente.




La recta permite sumar el rectángulo y el triángulo que forman el área bajo la trayectoria.

## 16.3 La energía que permanece y la que cruza la frontera

En el desarrollo que sigue, el trabajo intercambiado corresponde al trabajo de frontera. La energía interna $U$ caracteriza el estado del sistema; los intercambios por calor y por trabajo describen un proceso. Para una muestra cerrada cuyos cambios de energía cinética y potencial macroscópicas son despreciables, el primer principio toma la forma

$$\Delta U = Q - W. \tag{16.3}$$

Usamos $Q > 0$ para calor recibido y $W > 0$ para trabajo entregado. Conservar un mismo sistema y una misma convención permite sumar las etapas sin alterar sus signos. Cuando hay otros trabajos, como el eléctrico o el de un agitador, $W$ representa la suma algebraica de los trabajos entregados; la integral de presión por volumen corresponde únicamente al trabajo de frontera.

Esta forma del balance supone además una frontera cerrada a la materia. Una turbina con flujo continuo requiere incorporar la energía transportada por el fluido que entra y sale. En los modelos de este capítulo seguiremos una cantidad fija de gas o una sustancia de trabajo que completa un ciclo idealizado.

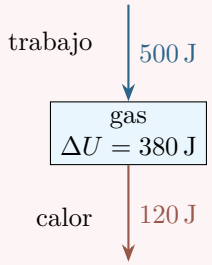
**PROBLEMA RESUELTO 16.5 · Comprimir mientras se entrega calor**

Durante una compresión el entorno realiza 500 J de trabajo sobre un gas y el gas entrega 120 J por calor. Calcula el cambio de energía interna.

*Resolución.* Para el gas, $W = -500\,\mathrm{J}$ y $Q = -120\,\mathrm{J}$. El balance da

$$\Delta U = -120 - (-500) = 380\,\mathrm{J}.$$

La energía interna aumenta: el aporte mecánico supera la energía que sale por calor. En un gas ideal de composición fija ese aumento corresponde a una elevación de temperatura, dentro del modelo de capacidad calorífica empleado.




Las flechas representan las energías recibida por trabajo y entregada por calor. Su diferencia aumenta la energía interna.

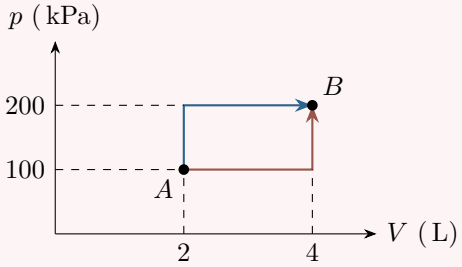
La condición de ser una función de estado tiene una consecuencia práctica. Entre dos estados dados, $\Delta U$ queda fijado, aunque existan varios caminos para conectarlos. Los valores de $Q$ y $W$ pueden cambiar de un camino a otro; su diferencia conserva el cambio de energía interna.

**PROBLEMA RESUELTO 16.6 · Comparar dos caminos entre los mismos estados**

Un gas ideal monoatómico pasa de $A = (2{,}00\,\mathrm{L}, 100\,\mathrm{kPa})$ a $B = (4{,}00\,\mathrm{L}, 200\,\mathrm{kPa})$. Un camino eleva primero la presión a volumen fijo y después expande a 200 kPa. Otro expande primero a 100 kPa y luego eleva la presión a volumen fijo. Compara $W$, $\Delta U$ y $Q$. Usa $U = \frac{3}{2}pV$ más una referencia constante. *Resolución.* Las etapas verticales aportan trabajo cero. En el camino de presión alta, $W_1 = 200(4-2) = 400\,\mathrm{J}$; en el de presión baja, $W_2 = 100(4-2) = 200\,\mathrm{J}$. Ambos comparten

$$\Delta U = \frac{3}{2}[p_B V_B - p_A V_A] = \frac{3}{2}[200(4) - 100(2)]\,\mathrm{J} = 900\,\mathrm{J}.$$

Por el primer principio, $Q_1 = 900 + 400 = 1300\,\mathrm{J}$ y $Q_2 = 900 + 200 = 1100\,\mathrm{J}$. El camino que entrega 200 J más de trabajo necesita recibir 200 J más de calor para alcanzar el mismo estado final.




Los dos caminos comparten extremos y cambio de energía interna. Las áreas bajo sus tramos horizontales son diferentes.

## 16.4 Capacidades caloríficas de un gas ideal

En un gas ideal de composición fija, la energía interna depende de la temperatura. La relación cinética del capítulo anterior da, para un gas monoatómico clásico, $U = \frac{3}{2}nRT$ más una constante de referencia. Al cambiar la temperatura,

$$\Delta U = nC_V \Delta T, \qquad C_V = \frac{3}{2}R \quad \text{(monoatómico clásico)}. \tag{16.4}$$

En este capítulo $C_V$ y $C_p$ designan capacidades caloríficas *molares*, medidas en $\mathrm{J/(mol\,K)}$; la capacidad de toda la muestra incluye el factor $n$. El subíndice de $C_V$ recuerda cómo se determina: a volumen constante, con trabajo de frontera nulo, el calor recibido coincide con $\Delta U$.

Como $U$ depende de $T$, el mismo $nC_V\Delta T$ sirve para obtener su cambio a lo largo de cualquier proceso del gas ideal, cuando $C_V$ puede tomarse constante. Para una dependencia apreciable con la temperatura se usa $\Delta U = n\int C_V(T)\,dT$. La elección del proceso modifica el calor y el trabajo, conservando esa relación entre estados.

A presión constante, el gas además se expande y entrega $W = p\Delta V = nR\Delta T$. Entonces $Q_p = \Delta U + W = n(C_V + R)\Delta T$. Por definición $Q_p = nC_p\Delta T$, de donde

$$C_p - C_V = R, \qquad \gamma = \frac{C_p}{C_V}. \tag{16.5}$$

Para el modelo monoatómico, $C_p = \frac{5}{2}R$ y $\gamma = 5/3$. En un gas diatómico con traslación y rotación activas y vibración despreciable, el modelo clásico da $C_V = \frac{5}{2}R$, $C_p = \frac{7}{2}R$ y $\gamma = 7/5$. El intervalo térmico y los grados de libertad disponibles determinan la aproximación apropiada.

**PROBLEMA RESUELTO 16.7 · Elevar la misma temperatura de dos maneras**

Una muestra de 0,500 mol de gas ideal monoatómico aumenta su temperatura 80,0 K. Compara el calor requerido a volumen constante y a presión constante, suponiendo sólo trabajo de frontera. *Resolución.* El cambio de energía interna es el mismo en ambos casos:

$$\Delta U = 0{,}500\left(\frac{3}{2}\right)(8{,}314)(80{,}0) = 498{,}84\,\text{J}.$$

A volumen constante, $W_V = 0$ y $Q_V = 498{,}84\,\text{J}$. A presión constante, $W_p = nR\Delta T = 332{,}56\,\text{J}$ y $Q_p = 831{,}40\,\text{J}$. La diferencia entre los calores coincide con el trabajo de expansión de la segunda transformación.

| Proceso | $\Delta U$ (J) | $W$ (J) | $Q$ (J) |
|---|---|---|---|
| $V$ constante | 498,84 | 0 | 498,84 |
| $p$ constante | 498,84 | 332,56 | 831,40 |

El calor adicional a presión constante coincide con el trabajo de expansión.

## 16.5 Reconocer y calcular una transformación

Una restricción física permite escoger la relación útil. Un recipiente rígido fija el volumen; un pistón ideal sometido a una carga constante puede mantener la presión; un baño térmico grande puede sostener la temperatura durante un proceso suficientemente lento. El aislamiento térmico favorece una transformación adiabática, definida por $Q = 0$.

En una transformación *isócora*, el trabajo de frontera es cero y $Q = \Delta U$. En una *isobárica*, $W = p\Delta V$ y el calor incluye tanto el cambio interno como el trabajo. Una transformación *isotérmica* mantiene $T$ constante; para un gas ideal de composición fija conserva también $U$. Estas condiciones describen magnitudes distintas y permiten deducir qué términos del balance quedan determinados.

**PROBLEMA RESUELTO 16.8 · Recibir calor en un recipiente rígido**

Un mol de gas ideal monoatómico pasa de 300 a 500 K dentro de un recipiente rígido. Calcula $W$, $\Delta U$, $Q$ y la razón de presiones. Supón sólo trabajo de frontera. *Resolución.* La rigidez impone $W = 0$. Con $\Delta T = 200\,\text{K}$,

$$\Delta U = \frac{3}{2}(1)(8{,}314)(200) = 2494{,}2\,\text{J}, \qquad Q = 2494{,}2\,\text{J}.$$

La ecuación de estado da $p_f/p_i = T_f/T_i = 500/300 = 5/3$. La energía recibida eleva la temperatura y aumenta la presión del gas encerrado.

| Magnitud | Estado inicial | Estado final |
|---|---|---|
| $T$ | 300 K | 500 K |
| $V$ | $V_i$ | $V_i$ |
| $p$ | $p_i$ | $(5/3)p_i$ |

La rigidez conserva el volumen; el cociente de presiones sigue al de temperaturas absolutas.

**PROBLEMA RESUELTO 16.9 · Repartir energía durante una expansión isobárica**

Un mol de gas ideal monoatómico se expande cuasiestáticamente a presión constante al pasar de 300 a 450 K. Calcula el trabajo, el cambio interno y el calor recibido. *Resolución.* La ecuación de estado permite escribir el trabajo sin conocer por separado la presión y los volúmenes:

$$W = nR\Delta T = (8{,}314)(150) = 1247{,}1\,\text{J}.$$

El cambio interno es $\Delta U = \frac{3}{2}(8{,}314)(150) = 1870{,}65\,\text{J}$. Por tanto, $Q = 3117{,}75\,\text{J}$, igual a $nC_p\Delta T$. Dos quintas partes de la energía recibida se entregan como trabajo y tres quintas partes aumentan la energía interna en este modelo.

$$Q = 3117{,}75\,\text{J}$$

| $\Delta U$ | $W$ |
|---|---|
| 1870,65 J | 1247,10 J |

Los anchos representan el reparto: tres quintos a energía interna y dos quintos a trabajo.

Para una expansión isotérmica cuasiestática y mecánicamente reversible del gas ideal, $p = nRT/V$. Integrar la presión da

$$W = nRT\ln\frac{V_f}{V_i}, \qquad \Delta U = 0, \qquad Q = W. \tag{16.6}$$

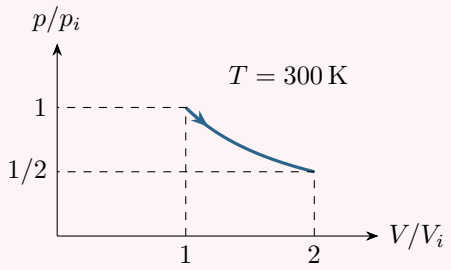
El logaritmo es natural y su argumento es una razón sin unidades. La presión disminuye mientras aumenta el volumen, de modo que el área requiere integrar una hipérbola. Mantener la temperatura durante la expansión exige que el entorno reponga mediante calor la energía entregada como trabajo.

**PROBLEMA RESUELTO 16.10 · Duplicar el volumen sin cambiar la temperatura**

Una muestra de 0,500 mol de gas ideal se expande reversiblemente a 300 K hasta duplicar su volumen, en contacto con un baño a esa temperatura. Calcula $W$, $\Delta U$ y $Q$. *Resolución.* La razón de volúmenes es dos. Entonces

$$W = 0{,}500(8{,}314)(300)\ln 2\,\text{J} \simeq 864{,}42\,\text{J}.$$

Como $T$ se conserva, $\Delta U = 0$ y $Q \simeq 864{,}42\,\text{J}$. La presión final vale la mitad de la inicial. El baño suministra energía durante la expansión mientras el gas mantiene su energía interna.




Los ejes muestran razones respecto del estado inicial. La hipérbola corresponde a temperatura constante.

En una transformación adiabática, el primer principio se reduce a $\Delta U = -W$. La condición térmica por sí sola permite que la temperatura cambie. Para obtener una ley de trayectoria

añadimos hipótesis: gas ideal, capacidades molares constantes, sólo trabajo de frontera y proceso cuasiestático mecánicamente reversible. Así, $nC_V dT = -p\,dV = -nRT\,dV/V$. Dividiendo e integrando,

$$TV^{\gamma-1} = \text{constante}, \qquad pV^{\gamma} = \text{constante}. \tag{16.7}$$

Se usó $R/C_V = \gamma - 1$. La expansión adiabática reversible enfría el gas; la compresión eleva su temperatura. La curva adiabática tiene pendiente $dp/dV = -\gamma p/V$, más pronunciada que la isoterma $dp/dV = -p/V$ que atraviesa el mismo punto. Un proceso rápido puede aproximar $Q = 0$ y, a la vez, presentar desequilibrios internos que exijan otro análisis mecánico.

**PROBLEMA RESUELTO 16.11 · Expandir con aislamiento y equilibrio mecánico límite**

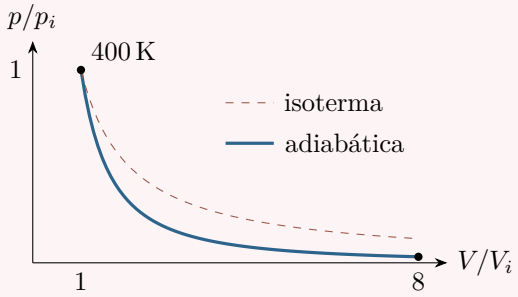
Un mol de gas ideal monoatómico se expande adiabática y reversiblemente desde $T_i = 400\,\text{K}$, $V_i = 10{,}0\,\text{L}$ hasta $V_f = 80{,}0\,\text{L}$. Usa capacidades constantes. Calcula la temperatura y presión finales y el trabajo. *Resolución.* Con $\gamma = 5/3$, la razón de volúmenes es ocho y

$$T_f = 400\left(\frac{1}{8}\right)^{2/3}\text{K} = 100\,\text{K}.$$

La presión inicial es $p_i = (8{,}314)(400)/0{,}010 = 332560\,\text{Pa}$. La relación adiabática da $p_f = p_i/8^{5/3} = 10392{,}5\,\text{Pa}$. También resulta de $p_f = nRT_f/V_f$. Como $Q = 0$,

$$W = -\Delta U = nC_V(T_i - T_f) = \frac{3}{2}(8{,}314)(300) = 3741{,}3\,\text{J}.$$

El trabajo positivo procede de la disminución de energía interna. Las dos comprobaciones de presión verifican la compatibilidad del estado final con la trayectoria.



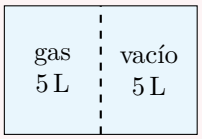

Las curvas parten del mismo estado. La adiabática reversible llega a una presión 1/32 de la inicial y a 100 K; la curva discontinua conserva 400 K.

Una expansión libre ofrece otra situación adiabática. Un tabique separa inicialmente el gas de una región vacía dentro de una envoltura rígida y aislada. Al retirar el tabique, el gas ocupa el espacio disponible. La presión externa que se opone a la expansión es cero, y el recipiente exterior permanece inmóvil. El balance puede aplicarse entre los estados inicial y final de equilibrio aun cuando los estados intermedios sean muy desiguales.

**PROBLEMA RESUELTO 16.12 · Ocupar un espacio vacío**

Un mol de gas ideal a 300 K ocupa 5,00 L y se expande libremente hasta 10,0 L dentro de una envoltura aislada. Encuentra $Q$, $W$, $\Delta U$, $T_f$ y la razón de presiones.

*Resolución.* El aislamiento da $Q = 0$ y la expansión contra el vacío da $W = 0$. Por tanto, $\Delta U = 0$. Para el gas ideal, esto implica $T_f = 300\,\mathrm{K}$; el equilibrio final satisface $p_f/p_i = V_i/V_f = 1/2$. La trayectoria real incluye estados de desequilibrio. La relación $pV^\gamma =$ constante corresponde a las hipótesis de reversibilidad mecánica de la deducción anterior.




$Q = W = 0$

El tabique se retira dentro de una envoltura rígida y aislada. El gas ocupa también el espacio inicialmente vacío.

## 16.6 Cerrar la trayectoria: ciclos y área neta

En un ciclo la sustancia de trabajo vuelve al estado inicial. Por ello $\Delta U_{\text{ciclo}} = 0$ y el primer principio exige $Q_{\text{neto}} = W_{\text{neto}}$. Cada etapa conserva sus propios signos. Una sustancia puede recibir y entregar cantidades importantes de calor y terminar el ciclo con la misma energía interna.

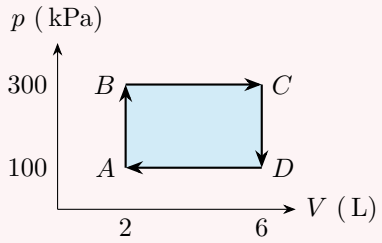
En un ciclo cuasiestático simple, el trabajo neto es el área orientada encerrada en el diagrama $p$–$V$. Un recorrido horario expande a presiones superiores a las de compresión y entrega trabajo neto positivo. Recorrer la misma curva en sentido inverso cambia el signo del trabajo. La geometría ofrece una comprobación independiente de la suma de etapas.

**PROBLEMA RESUELTO 16.13 · Hacer el balance de un ciclo rectangular**

Una muestra de 0,100 mol de gas ideal monoatómico recorre $A \to B \to C \to D \to A$, con estados $A = (2\,\mathrm{L}, 100\,\mathrm{kPa})$, $B = (2\,\mathrm{L}, 300\,\mathrm{kPa})$, $C = (6\,\mathrm{L}, 300\,\mathrm{kPa})$, $D = (6\,\mathrm{L}, 100\,\mathrm{kPa})$. Calcula $W$, $\Delta U$ y $Q$ por etapa, y el rendimiento $W_{\text{neto}}/Q_{\text{entrada}}$ del ciclo. *Resolución.* Usamos $U = \frac{3}{2}pV$ más una referencia. Los cambios internos son 600, 1800, −1800 y −600 J. Las dos etapas isócoras tienen trabajo cero; en las horizontales, $W_{BC} = 300(6-2) = 1200\,\mathrm{J}$ y $W_{DA} = 100(2-6) = -400\,\mathrm{J}$. Aplicar $Q = \Delta U + W$ completa la tabla de la ayuda.
El trabajo neto es 800 J, también igual al área $(300-100)(6-2)\,\mathrm{J}$. El calor entrante suma $Q_{AB} + Q_{BC} = 600 + 3000 = 3600\,\mathrm{J}$; salen $1800 + 1000 = 2800\,\mathrm{J}$. Así,

$$\eta = \frac{800}{3600} = \frac{2}{9} \simeq 0{,}2222 = 22{,}22\,\%.$$

El denominador cuenta todos los aportes positivos de calor. Este ciclo intercambia energía a temperaturas variables; interpretar sus contactos térmicos requiere esa información adicional.




| Etapa | $\Delta U$ ( J) | $W$ ( J) | $Q$ ( J) |
|---|---|---|---|
| $A \to B$ | 600 | 0 | 600 |
| $B \to C$ | 1800 | 1200 | 3000 |
| $C \to D$ | −1800 | 0 | −1800 |
| $D \to A$ | −600 | −400 | −1000 |
| Ciclo | 0 | 800 | 800 |

La suma de calores coincide con el área orientada del ciclo horario. Todas las cifras de la tabla usan el convenio del gas.

## 16.7 Máquinas térmicas, refrigeradores y límites

Una máquina térmica cíclica puede recibir una energía $Q_h$ de un depósito caliente y entregar una energía $Q_c$ a un depósito frío, produciendo trabajo $W_{\text{salida}}$. Aquí $Q_h$ y $Q_c$ son *magnitudes positivas*: para la sustancia de trabajo, los calores con signo son $+Q_h$ y $-Q_c$. El balance y el rendimiento quedan

$$W_{\text{salida}} = Q_h - Q_c, \qquad \eta = \frac{W_{\text{salida}}}{Q_h} = 1 - \frac{Q_c}{Q_h}. \tag{16.8}$$

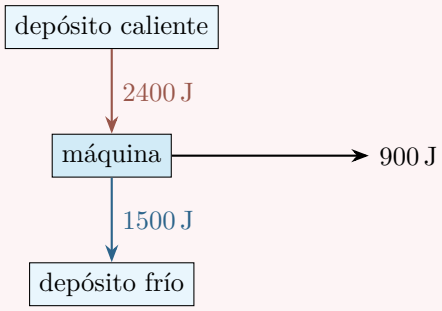
Un depósito térmico ideal conserva su temperatura mientras entrega o recibe las energías consideradas. Este modelo permite separar las propiedades del ciclo de la evolución térmica de un cuerpo pequeño, cuya temperatura sí cambiaría durante el intercambio.

**PROBLEMA RESUELTO 16.14 · Pasar del ciclo a la potencia**

Una máquina recibe 2400 J y entrega 1500 J al depósito frío en cada ciclo. Funciona a 20 ciclos por segundo. Calcula el trabajo por ciclo, el rendimiento y la potencia mecánica media. *Resolución.* El trabajo útil por ciclo es $W_{\text{salida}} = 2400 - 1500 = 900\,\text{J}$. El rendimiento vale $\eta = 900/2400 = 0{,}375 = 37{,}5\,\%$. La frecuencia de ciclos da

$$P = (900\,\text{J})(20\,\text{s}^{-1}) = 18000\,\text{W} = 18{,}0\,\text{kW}.$$

La potencia térmica entrante es 48,0 kW y la que sale hacia el depósito frío es 30,0 kW; su diferencia reproduce la potencia mecánica.




Los valores corresponden a un ciclo. La energía entrante se reparte entre trabajo y calor entregado al depósito frío.

El primer principio conserva la energía; el segundo introduce restricciones sobre los procesos capaces de realizar esa conversión. En el enunciado de Kelvin–Planck, una máquina cíclica que produce trabajo a partir de un único depósito térmico necesita algún otro efecto en el entorno: la conversión íntegra del calor tomado de ese único depósito en trabajo, como único resultado, queda excluida. El enunciado de Clausius establece que trasladar calor de un depósito frío a uno caliente requiere una compensación externa, como el suministro de trabajo. Ambas formulaciones expresan restricciones equivalentes.

Para comprender el límite ideal, llamamos *reversible* a un proceso cuya inversión puede restituir tanto el sistema como el entorno a sus estados iniciales. Esto exige diferencias impulsoras infinitesimales y ausencia de disipación. La lentitud puede favorecer el equilibrio, mientras que la fricción mantiene una fuente de irreversibilidad incluso con movimiento lento.

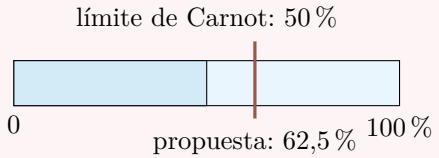
Entre dos depósitos a temperaturas $T_h > T_c > 0$, un ciclo reversible de Carnot establece el rendimiento máximo

$$\eta \leq \eta_C = 1 - \frac{T_c}{T_h}. \tag{16.9}$$

El ciclo de Carnot de gas ideal combina una expansión isotérmica a $T_h$, una expansión adiabática reversible hasta $T_c$, una compresión isotérmica a $T_c$ y una compresión adiabática reversible de regreso. Las dos adiabáticas dan iguales razones de volumen en las isotermas, y las expresiones logarítmicas del calor conducen a $Q_c/Q_h = T_c/T_h$. El segundo principio extiende el límite a cualquier sustancia de trabajo entre esos dos depósitos. Las temperaturas de la razón son absolutas.

**PROBLEMA RESUELTO 16.15 · Examinar una promesa de rendimiento**

Una máquina opera cíclicamente entre 600 y 300 K y recibe 2400 J por ciclo. Determina el máximo trabajo y examina una propuesta que promete entregar 1500 J de trabajo mientras cede 900 J al depósito frío. *Resolución.* El límite es $\eta_C = 1 - 300/600 = 0{,}500$. Por tanto, $W_{\text{máx}} = 1200\,\text{J}$ y el rechazo mínimo de calor es 1200 J. La propuesta conserva la energía, porque $2400 = 1500 + 900$, pero su rendimiento es $1500/2400 = 62{,}5\,\%$, superior al límite del 50 %. El segundo principio la excluye bajo las condiciones dadas. La máquina del problema anterior, con 37,5 %, tiene un rendimiento compatible con este límite si opera entre esos depósitos.




La escala representa rendimiento. La propuesta rebasa el máximo entre los dos depósitos especificados.

Un refrigerador emplea trabajo para retirar calor del depósito frío. Si recibe $W_{\text{entrada}} > 0$, el balance de magnitudes es $Q_h = Q_c + W_{\text{entrada}}$. Su coeficiente de desempeño se define por el efecto buscado:

$$\text{COP}_R = \frac{Q_c}{W_{\text{entrada}}}, \qquad \text{COP}_{\text{BC}} = \frac{Q_h}{W_{\text{entrada}}} = \text{COP}_R + 1. \tag{16.10}$$

La segunda expresión corresponde a una bomba de calor que se utiliza para calentar. Estos cocientes pueden superar uno porque comparan calor trasladado con trabajo suministrado. Para equipos reversibles entre dos depósitos,

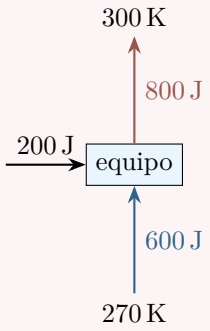
$$\text{COP}_{R,\text{máx}} = \frac{T_c}{T_h - T_c}, \qquad \text{COP}_{\text{BC,máx}} = \frac{T_h}{T_h - T_c}.$$

Una diferencia menor entre temperaturas reduce el trabajo mínimo necesario para trasladar una cantidad dada de energía, dentro de este modelo de depósitos ideales.

**PROBLEMA RESUELTO 16.16 · Contar lo que extrae y lo que entrega un refrigerador**

Un refrigerador retira 600 J de un depósito a 270 K por ciclo y consume 200 J de trabajo. Entrega calor a un depósito a 300 K. Calcula los dos coeficientes de desempeño y compáralos con sus límites.

*Resolución.* Se entregan $Q_h = 600 + 200 = 800\,\text{J}$ al depósito caliente. Así, $\text{COP}_R = 600/200 = 3$ y $\text{COP}_{\text{BC}} = 800/200 = 4$. Los máximos son $270/30 = 9$ y $300/30 = 10$, respectivamente. Los valores dados son compatibles con ambos límites; el balance incluye tanto la energía extraída como el trabajo que recibe el equipo.




La energía entregada al depósito caliente incluye el calor retirado del frío y el trabajo recibido.

## 16.8 Entropía y sentido de los procesos

Dos depósitos a distinta temperatura pueden intercambiar calor espontáneamente y conservar la energía total. Esa conservación también se cumpliría si la energía circulara en sentido contrario. Necesitamos una magnitud que distinga el sentido permitido. La entropía $S$ es una función de estado cuyo cambio se obtiene mediante una trayectoria reversible que conecte los estados considerados:

$$\Delta S = \int_i^f \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T}. \tag{16.11}$$

La unidad es J/K. El subíndice indica una condición del camino de cálculo. Para una transferencia reversible a temperatura constante, $\Delta S = Q_{\text{rev}}/T$. Un depósito ideal que recibe un calor con signo $Q$ cambia su entropía en $Q/T$, pues su temperatura permanece fija.

Para un sistema cerrado, el balance de entropía puede escribirse $\Delta S = \int \delta Q/T_b + S_{\text{gen}}$, con $T_b$ la temperatura absoluta de la frontera por donde cruza cada aporte de calor y $S_{\text{gen}} \geq 0$ la entropía generada por irreversibilidades. Si hay varios contactos, se suman sus contribuciones. El intercambio puede disminuir la entropía de una parte mientras la generación conserva el signo exigido al conjunto aislado.

La desigualdad de Clausius para un ciclo es

$$\oint \frac{\delta Q}{T_b} \leq 0. \tag{16.12}$$

En un ciclo, el balance anterior da $\oint \delta Q/T_b = -S_{\text{gen}}$. La igualdad expresa generación interna nula para el sistema y la frontera elegidos. La reversibilidad del conjunto requiere además que los intercambios con el entorno se produzcan en condiciones reversibles. Al sumar sistema y entorno de modo que el conjunto quede aislado, resulta $\Delta S_{\text{total}} \geq 0$. En un ciclo $\Delta S_{\text{sistema}} = 0$ porque el estado vuelve a ser el inicial; el entorno puede conservar un aumento de entropía.

**PROBLEMA RESUELTO 16.17 · Seguir calor entre dos depósitos**

Se transfieren 1200 J desde un depósito a 600 K hacia otro a 300 K. Considera el conjunto aislado y desprecia almacenamiento en el elemento que los conecta. Calcula los cambios de entropía y examina el traslado inverso como único efecto. *Resolución.* Para el caliente, $\Delta S_h = -1200/600 = -2{,}00\,\text{J/K}$; para el frío, $\Delta S_c = 1200/300 = 4{,}00\,\text{J/K}$. Así,

$$\Delta S_{\text{total}} = 2{,}00\,\text{J/K} > 0.$$

El traslado inverso dejaría $\Delta S_{\text{total}} = -2{,}00\,\text{J/K}$ y queda excluido como único efecto del conjunto aislado. Un refrigerador puede transferir calor hacia mayor temperatura porque incorpora trabajo y produce otros cambios en el entorno.




$$\Delta S_{\text{total}} = 2\,\text{J/K}$$

Los depósitos conservan su temperatura. La energía se conserva y la entropía total aumenta.

La entropía también permite estudiar cambios sin calor en la trayectoria real. Como es función de estado, podemos elegir un camino reversible auxiliar para calcularla. En un gas ideal con capacidades constantes, combinar $\delta Q_{\text{rev}} = nC_V\,dT + p\,dV$ con la ecuación de estado da

$$\Delta S = nC_V \ln\frac{T_f}{T_i} + nR\ln\frac{V_f}{V_i}. \tag{16.13}$$

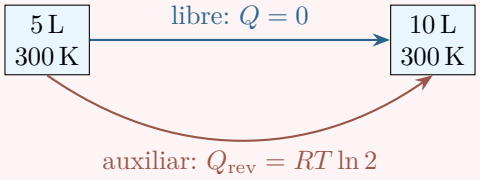
El resultado depende de los estados extremos. La expresión contiene dos contribuciones que pueden tener distinto signo. Su interpretación microscópica se relaciona con cuántos estados microscópicos son compatibles con las restricciones macroscópicas; la fórmula $S = k_B \ln \Omega$, para microestados equiprobables en la descripción microcanónica, expresa ese vínculo. La evaluación macroscópica mediante calor reversible conserva un significado preciso aun cuando una imagen cotidiana de «orden» resulte poco informativa.

**PROBLEMA RESUELTO 16.18 · Calcular entropía en una expansión libre**

Retoma la expansión libre de un mol de gas ideal desde 5,00 hasta 10,0 L, a temperatura inicial y final de 300 K. Calcula el cambio de entropía del gas y del conjunto aislado. *Resolución.* Los estados tienen la misma temperatura. Elegimos como camino auxiliar una expansión isotérmica reversible entre esos volúmenes. Su calor sería $Q_{\text{rev}} = nRT \ln 2$, de modo que

$$\Delta S = \frac{nRT \ln 2}{T} = R \ln 2 \simeq 5{,}763\,\text{J/K}.$$

En la expansión libre real, $Q = 0$ y $W = 0$. La entropía del gas aumenta por generación interna, y el entorno idealmente inalterado tiene cambio cero. Por tanto, $\Delta S_{\text{total}} \simeq 5{,}763\,\text{J/K}$. El camino auxiliar permite calcular una diferencia de estado sin sustituir los intercambios efectivos del proceso real.




Ambas: $\Delta S = R \ln 2$

El camino auxiliar conecta los mismos estados de equilibrio y permite calcular la diferencia de entropía.

## Ejercicios para reconstruir y transferir

Usa $R = 8{,}314\,\text{J/(mol K)}$. Las presiones indicadas son absolutas salvo mención de un manómetro. En los modelos de gas, considera muestra cerrada, comportamiento ideal, capacidades constantes y sólo trabajo de frontera, salvo indicación contraria. Conserva el convenio $\Delta U = Q - W$.

**EJERCICIO 16.1 · Un estado y una cantidad**

Un gas ocupa 5,00 L a 200 kPa y 300 K. Calcula $n$ y explica qué condiciones permiten usar la ecuación ideal.

**EJERCICIO 16.2 · Leer un manómetro**

Un manómetro indica 80,0 kPa sobre una presión ambiental de 100 kPa. El recipiente contiene gas a 300 K en 10,0 L. Calcula la presión absoluta y $n$.

**EJERCICIO 16.3 · Calentar sin cambiar el volumen**

Una muestra cerrada está a 120 kPa y 300 K. En un recipiente rígido alcanza 450 K. Encuentra la presión final.

**EJERCICIO 16.4 · Dos cambios simultáneos**

Un gas cerrado pasa de 110 kPa, 3,00 L y 300 K a 220 kPa y 4,50 L. Calcula $T_f$.

**EJERCICIO 16.5 · Trabajo en una compresión**

Un gas se comprime cuasiestáticamente a 150 kPa desde 8,00 hasta 3,00 L. Calcula el trabajo del gas y el trabajo recibido.

**EJERCICIO 16.6 · Una recta descendente**

La presión disminuye linealmente de 300 a 100 kPa mientras el volumen aumenta de 2,00 a 8,00 L, en un proceso cuasiestático. Calcula el trabajo y su signo.

**EJERCICIO 16.7 · Un balance con dos entradas de signo**

Un gas cede 300 J por calor y recibe 800 J por trabajo durante una compresión. Encuentra $Q$, $W$ y $\Delta U$.

**EJERCICIO 16.8 · Recuperar un intercambio**

Un sistema cerrado recibe 700 J de calor y aumenta su energía interna 450 J. Calcula el trabajo neto que realiza.

**EJERCICIO 16.9 · Dos caminos con el mismo destino**

Entre dos estados, $\Delta U = 600$ J. Por un camino el gas realiza 250 J de trabajo; por otro recibe 100 J de trabajo. Calcula el calor en cada camino y compara sus diferencias.

**EJERCICIO 16.10 · Dos capacidades para una muestra**

Dos moles de gas ideal monoatómico aumentan 60,0 K. Calcula $\Delta U$, el calor a volumen constante y el calor a presión constante.

**EJERCICIO 16.11 · Rotaciones activas**

Una muestra de 0,500 mol de gas diatómico tiene $C_V = 5R/2$ y $C_p = 7R/2$. Aumenta 40,0 K a presión constante. Calcula $\gamma$, $W$, $\Delta U$ y $Q$.

**EJERCICIO 16.12 · Presión como termómetro**

En un recipiente rígido hay 0,200 mol de gas ideal monoatómico a 300 K y 100 kPa. La presión sube a 150 kPa. Calcula $T_f$, $W$ y $Q$.

**EJERCICIO 16.13 · Expandir a presión fija**

Una muestra de 0,200 mol de gas monoatómico ideal pasa de 300 a 600 K mediante expansión cuasiestática isobárica. Calcula las tres cantidades del primer principio.

**EJERCICIO 16.14 · Cuadruplicar el volumen**

Un gas ideal, con $n = 0{,}250$ mol, se expande isotérmica y reversiblemente a 400 K hasta cuadruplicar su volumen. Encuentra $W$, $Q$ y $\Delta U$.

**EJERCICIO 16.15 · Una expansión adiabática**

Medio mol de gas monoatómico ideal a 320 K se expande adiabática y reversiblemente hasta multiplicar su volumen por ocho. Calcula $T_f$, $p_f/p_i$, $Q$ y $W$.

**EJERCICIO 16.16 · Retirar un tabique**

Medio mol de gas ideal a 300 K se expande libremente de 2,00 a 6,00 L dentro de una envoltura rígida y aislada. Encuentra los intercambios, $T_f$ y $p_f/p_i$; explica qué rasgo impide tratar la trayectoria como una adiabática reversible.

**EJERCICIO 16.17 · Invertir un ciclo rectangular**

Un ciclo rectangular cuasiestático abarca volúmenes de 2 y 5 L y presiones de 100 y 300 kPa. Se recorre en sentido antihorario. Encuentra $W_{\text{neto}}$, $Q_{\text{neto}}$ y $\Delta U_{\text{ciclo}}$.

**EJERCICIO 16.18 · Rendimiento y frecuencia**

Una máquina recibe 5000 J por ciclo y produce 1500 J de trabajo. Opera a diez ciclos por segundo. Calcula el calor rechazado, el rendimiento y la potencia útil media.

**EJERCICIO 16.19 · Contrastar con Carnot**

Una máquina entre 500 y 300 K promete un rendimiento del 45 % al recibir 2000 J por ciclo. Calcula el límite de rendimiento y el mínimo calor que debería rechazar; evalúa la propuesta.

**EJERCICIO 16.20 · Dos usos del mismo equipo**

Un equipo retira 900 J del depósito frío y consume 300 J de trabajo por ciclo. Calcula el calor entregado al caliente y los coeficientes de desempeño como refrigerador y como bomba de calor.

**EJERCICIO 16.21 · Trabajo mínimo para calentar**

Una bomba de calor reversible opera entre 270 y 300 K y entrega 3000 J al depósito caliente en cada ciclo. Encuentra el trabajo mínimo y el calor retirado del depósito frío.

**EJERCICIO 16.22 · Un intercambio espontáneo**

Dos depósitos a 450 y 300 K intercambian 900 J desde el caliente al frío. Calcula sus cambios de entropía y el total, considerando aislado el conjunto.

**EJERCICIO 16.23 · Un cuerpo alcanza la temperatura de un baño**

Un cuerpo de capacidad calorífica constante 100 J/K pasa de 300 a 600 K por contacto con un depósito a 600 K. Desprecia trabajo y pérdidas. Calcula el calor, la entropía del cuerpo mediante un camino reversible auxiliar y la entropía total. Usa $\int dT/T = \ln T$ para la diferencia logarítmica.

**EJERCICIO 16.24 · Una trayectoria auxiliar**

Para la expansión libre del ejercicio 16.16, calcula $\Delta S$ del gas y del conjunto aislado. Describe un camino reversible que permita obtener ese cambio y compara su calor con el del proceso real.

## Soluciones razonadas

**SOLUCIÓN 16.1.**
El producto $pV = 200(5) = 1000\,\text{J}$ da $n = 1000/[8{,}314(300)] \simeq 0{,}4009\,\text{mol}$. El modelo requiere un gas suficientemente diluido y estados de equilibrio, con interacciones y tamaño molecular pequeños para esas condiciones. Las temperaturas son absolutas.

**SOLUCIÓN 16.2.**
La presión absoluta es $80 + 100 = 180\,\text{kPa}$. Así, $n = 180(10)/[8{,}314(300)] \simeq 0{,}7217\,\text{mol}$. Sumar la presión ambiental permite usar una presión referida al vacío en la ecuación de estado.

**SOLUCIÓN 16.3.**
Con $n$ y $V$ constantes, $p/T$ se conserva. Resulta $p_f = 120(450/300) = 180\,\text{kPa}$.

**SOLUCIÓN 16.4.**
La conservación de $n$ da $T_f = 300[220(4{,}50)]/[110(3{,}00)] = 900\,\text{K}$. El producto $pV$ se triplica.

**SOLUCIÓN 16.5.**
El trabajo del gas es $W = 150(3 - 8) = -750\,\text{J}$. El entorno realiza 750 J de trabajo sobre el gas. Ambos valores describen el mismo intercambio desde sistemas opuestos.

**SOLUCIÓN 16.6.**
La presión media de la recta es 200 kPa y el aumento de volumen es 6 L. Por tanto, $W = 1200\,\text{J} > 0$. Aunque la presión disminuye, la expansión entrega trabajo positivo durante todo el tramo.

**SOLUCIÓN 16.7.**
Los signos para el gas son $Q = -300\,\text{J}$ y $W = -800\,\text{J}$. El cambio interno es $\Delta U = -300-(-800) = 500\,\text{J}$. El aporte mecánico compensa el calor cedido y deja un aumento de energía interna.

**SOLUCIÓN 16.8.**
De $W = Q - \Delta U$ resulta $W = 700 - 450 = 250\,\text{J}$. El sistema entrega esa energía neta como trabajo.

**SOLUCIÓN 16.9.**
Para el primer camino $W_1 = 250\,\text{J}$ y $Q_1 = 600 + 250 = 850\,\text{J}$. Para el segundo $W_2 = -100\,\text{J}$ y $Q_2 = 600 - 100 = 500\,\text{J}$. Las diferencias $Q_1 - Q_2$ y $W_1 - W_2$ valen ambas $350\,\text{J}$, conservando $\Delta U$.

**SOLUCIÓN 16.10.**
El cambio interno es $\Delta U = 2(3/2)(8{,}314)(60) = 1496{,}52\,\text{J}$. A volumen fijo, $Q_V = 1496{,}52\,\text{J}$; a presión fija, $Q_p = 2(5/2)(8{,}314)(60) = 2494{,}20\,\text{J}$. El trabajo de esta última transformación es $997{,}68\,\text{J}$.

**SOLUCIÓN 16.11.**
$\gamma = (7/2)/(5/2) = 7/5$. El trabajo es $W = 0{,}500(8{,}314)(40) = 166{,}28\,\text{J}$, el cambio interno $\Delta U = 0{,}500(5/2)(8{,}314)(40) = 415{,}70\,\text{J}$ y el calor $Q = 581{,}98\,\text{J}$. Se verifica $Q - W = \Delta U$.

**SOLUCIÓN 16.12.**
A volumen fijo $T_f/T_i = p_f/p_i = 1{,}50$, de donde $T_f = 450\,\text{K}$. Como $W = 0$, $Q = \Delta U = 0{,}200(3/2)(8{,}314)(150) = 374{,}13\,\text{J}$.

**SOLUCIÓN 16.13.**
El aumento de $300\,\text{K}$ da $W = 0{,}200(8{,}314)(300) = 498{,}84\,\text{J}$, $\Delta U = 748{,}26\,\text{J}$ y $Q = 1247{,}10\,\text{J}$. Su suma $\Delta U + W$ reproduce el calor a presión constante.

**SOLUCIÓN 16.14.**
Para el camino reversible, $W = 0{,}250(8{,}314)(400)\ln 4 \simeq 1152{,}57\,\text{J}$. La temperatura constante del gas ideal fija $\Delta U = 0$ y por ello $Q = W$.

**SOLUCIÓN 16.15.**
$T_f = 320/8^{2/3} = 80\,\text{K}$ y $p_f/p_i = 8^{-5/3} = 1/32$. El aislamiento da $Q = 0$ y el trabajo es $W = 0{,}500(3/2)(8{,}314)(320 - 80) = 1496{,}52\,\text{J}$. La energía interna disminuye en esa cantidad.

**SOLUCIÓN 16.16.**
Se tiene $Q = 0$ por aislamiento y $W = 0$ por expansión contra vacío. Entonces $\Delta U = 0$, $T_f = 300\,\text{K}$ y $p_f/p_i = 2/6 = 1/3$. Los estados intermedios presentan desequilibrio; la expansión libre tiene una irreversibilidad que se cuantifica en el ejercicio 16.24.

**SOLUCIÓN 16.17.**
El área encerrada tiene magnitud $(300 - 100)(5 - 2) = 600\,\text{J}$. La orientación antihoraria da $W_{\text{neto}} = -600\,\text{J}$. Al cerrar el ciclo, $\Delta U = 0$ y $Q_{\text{neto}} = -600\,\text{J}$. El conjunto recibe trabajo neto y entrega calor neto.

**SOLUCIÓN 16.18.**
El calor rechazado es $Q_c = 5000 - 1500 = 3500\,\text{J}$. El rendimiento es $1500/5000 = 0{,}300 = 30{,}0\,\%$ y la potencia útil $1500(10) = 15000\,\text{W} = 15{,}0\,\text{kW}$.

**SOLUCIÓN 16.19.**
$\eta_C = 1 - 300/500 = 0{,}400 = 40\,\%$. Para $Q_h = 2000\,\text{J}$, el rechazo mínimo es $Q_{c,\text{mín}} = 2000(300/500) = 1200\,\text{J}$. La promesa del $45\,\%$ dejaría sólo $1100\,\text{J}$ al depósito frío; excede el rendimiento permitido entre esos depósitos.

**SOLUCIÓN 16.20.**
$Q_h = 900+300 = 1200\,\text{J}$, $\text{COP}_R = 900/300 = 3$ y $\text{COP}_{\text{BC}} = 1200/300 = 4$. El segundo coeficiente incluye también la energía que llega como trabajo.

**SOLUCIÓN 16.21.**
El máximo coeficiente como bomba de calor es $300/(300-270) = 10$. Así, $W_{\text{mín}} = 3000/10 = 300\,\text{J}$ y $Q_c = 3000 - 300 = 2700\,\text{J}$. El límite se alcanza en el modelo reversible.

**SOLUCIÓN 16.22.**
Para el caliente, $\Delta S_h = -900/450 = -2\,\text{J/K}$; para el frío, $\Delta S_c = 900/300 = 3\,\text{J/K}$. La suma es $1\,\text{J/K} > 0$, compatible con el sentido espontáneo indicado.

**SOLUCIÓN 16.23.**
El cuerpo recibe $Q = C(T_f - T_i) = 30000\,\mathrm{J}$. Un camino auxiliar con contactos a temperaturas infinitesimalmente próximas da $\Delta S_{\text{cuerpo}} = C\ln(T_f/T_i) = 100\ln 2 \simeq 69{,}315\,\mathrm{J/K}$. El depósito real pierde $30000/600 = 50\,\mathrm{J/K}$. El total aumenta $19{,}315\,\mathrm{J/K}$ por el intercambio con diferencia finita de temperatura.

**SOLUCIÓN 16.24.**
Los estados extremos tienen igual temperatura. La expresión del gas ideal da

$$\Delta S = nR\ln(V_f/V_i) = 0{,}500(8{,}314)\ln 3 \simeq 4{,}567\,\mathrm{J/K}.$$

El entorno ideal conserva su estado y el total aumenta lo mismo. Una expansión isotérmica reversible entre los mismos extremos tendría $Q_{\text{rev}} = T\Delta S \simeq 1370{,}08\,\mathrm{J}$. La expansión libre real tiene $Q = 0$; la generación interna explica su aumento de entropía.

## Una experiencia: comparar dos compresiones

**Registrar estados y tiempos**

Utiliza una jeringa de plástico sin aguja, con el extremo cerrado mediante un accesorio adecuado. Trabaja con desplazamientos pequeños y fuerzas moderadas, sin calentar ni presurizar recipientes rígidos. Registra el volumen inicial, comprime lentamente y espera antes de leer el volumen bajo una misma carga. Repite una compresión más rápida y observa la evolución posterior manteniendo la carga.

Compara los tiempos de intercambio térmico y los estados transitorios y finales. Para medir trabajo necesitas además cuantificar la fricción, la presión ambiental y la presión del gas. Registra incertidumbres y condiciones de cada ensayo; un sensor apropiado permite contrastar estados de equilibrio mediante $pV/T$.

## Diagnóstico antes de avanzar

Un mol de gas ideal monoatómico recorre cuasiestáticamente el ciclo $A \to B \to C \to A$, con $A = (10\,\mathrm{L}, 100\,\mathrm{kPa})$, $B = (10\,\mathrm{L}, 200\,\mathrm{kPa})$ y $C = (20\,\mathrm{L}, 200\,\mathrm{kPa})$. El regreso $C \to A$ sigue una recta en el diagrama $p$–$V$. Calcula el balance por etapas, el trabajo neto y el rendimiento. Determina el cambio de entropía del gas al completar el ciclo e indica qué datos hacen falta para hallar el del entorno.

**Contraste.** Los productos $pV$ son 1000, 2000 y 4000 J. Los cambios internos son 1500, 3000 y $-4500$ J. Los trabajos son 0, 2000 y $-1500$ J, el último por el área orientada del trapecio. Por tanto, los calores son 1500, 5000 y $-6000$ J. El trabajo neto es 500 J y el calor entrante suma 6500 J, dando $\eta = 1/13 \simeq 7{,}69\,\%$. El gas vuelve a su estado inicial y tiene $\Delta S_{\mathrm{ciclo}} = 0$. Para calcular el cambio del entorno necesitamos las temperaturas y condiciones de los contactos térmicos; la geometría del ciclo determina el trabajo y deja esa información por especificar.

**Lecturas de apoyo.** H. D. Young y R. A. Freedman, *Física universitaria*, volumen 1, 12.ª edición, sección 18.1 y capítulo 19; capítulo 20, secciones 20.1–20.2 y 20.4–20.7. R. A. Serway y C. Vuille, *Fundamentos de física*, volumen 1, 9.ª edición, secciones 10.4 y 12.1–12.5. Aquí $W$ es trabajo del gas; Serway usa el convenio opuesto. Los problemas y ayudas se han preparado para esta obra.

# CAPÍTULO 17

# CARGAS ELÉCTRICAS, FUERZAS, CAMPOS Y POTENCIAL


17.1 Carga, transferencia y conservación . . . . . 343
17.2 Conductores, aislantes y polarización . . . . . 344
17.3 Fuerzas entre cargas puntuales 345
17.4 El campo como propiedad de la configuración fuente . . . . . 347
17.5 Potencial, energía y trabajo . . 349
17.6 Leer equipotenciales y predecir movimientos . . . . . 351
17.7 Capacitancia y energía almacenada . . . . . 352
17.8 Cambiar el material y combinar capacitores . . . . . 354
Ejercicios para reconstruir y transferir 355
Soluciones razonadas . . . . . 358
Una experiencia: observar una redistribución . . . . . 360
Diagnóstico antes de avanzar . . . . 360


Un globo frotado puede atraer pequeños trozos de papel. Para describir el fenómeno necesitamos seguir tanto la carga que adquiere el globo como la redistribución de carga dentro del papel. La interacción depende del signo de las cargas, de su posición y de la respuesta del material.

Empezaremos contando cargas y calculando fuerzas. El campo permitirá describir lo que una configuración produce en cada punto del espacio; el potencial ofrecerá una descripción energética. Al reunir dos conductores separados por un aislante aparecerá el capacitor, que conecta la distribución de carga con el almacenamiento de energía.

## 17.1 Carga, transferencia y conservación

La carga eléctrica es una propiedad de las partículas. El electrón tiene carga $-e$ y el protón, $+e$, con

$$e = 1{,}602176634 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}.$$

El coulomb, símbolo C, es la unidad de carga del SI. Un cuerpo ordinario contiene enormes cantidades de cargas de ambos signos. Su carga neta resulta de sumarlas algebraicamente. Un objeto neutro tiene igual cantidad de carga positiva y negativa; esa condición admite redistribuciones internas.

En las electrizaciones habituales de sólidos, algunos electrones se transfieren o se redistribuyen mientras los núcleos permanecen ligados a la estructura. Un déficit de electrones produce carga positiva; un exceso produce carga negativa. La carga neta de un cuerpo ordinario aparece en múltiplos enteros de $e$: $q = ze$, con $z$ entero. Las cargas macroscópicas que escribimos con pocas cifras representan valores redondeados de ese conteo.

La carga total se conserva. Al seleccionar un conjunto aislado eléctricamente, podemos escribir $\sum q_i =$ constante. Si conectamos una parte a tierra o permitimos que entre materia cargada, debemos incluir la carga que cruza esa frontera. El frotamiento puede transferir electrones y modificar las energías de los cuerpos, conservando la carga del conjunto completo.

**PROBLEMA RESUELTO 17.1 · Traducir un conteo de electrones**

Un cuerpo inicialmente neutro pierde $3{,}00 \times 10^{12}$ electrones. Calcula su carga final y la variación de carga del cuerpo que recibe esos electrones, suponiendo transferencia exclusiva entre ambos. *Resolución.* Cada electrón que sale retira una carga negativa. El cuerpo queda con

$$q = +(3{,}00 \times 10^{12})e \simeq +4{,}807 \times 10^{-7}\,\mathrm{C} = +0{,}4807\,\mu\mathrm{C}.$$

El receptor cambia su carga en $-4{,}807 \times 10^{-7}\,\mathrm{C}$. La suma de ambas variaciones es cero. El signo del cuerpo que pierde electrones se obtiene del balance entre las cargas que permanecen.

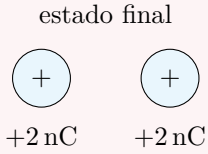



Las cargas indicadas son la carga final del primer cuerpo y la variación del receptor. Sus variaciones se compensan.

**PROBLEMA RESUELTO 17.2 · Compartir carga entre dos esferas iguales**

Dos esferas conductoras idénticas tienen cargas aproximadas de $+6{,}00\,\text{nC}$ y $-2{,}00\,\text{nC}$. Se conectan por un hilo conductor de capacitancia despreciable, con las esferas muy separadas, en un entorno simétrico y sin otros cuerpos próximos. Se espera el equilibrio y se retira el hilo. Encuentra las cargas finales y el sentido de transferencia de electrones.

*Resolución.* La carga total es $+4{,}00\,\text{nC}$. La igualdad geométrica y la simetría del entorno permiten que el equilibrio la reparta por igual: cada esfera termina con $+2{,}00\,\text{nC}$. La primera reduce su carga positiva en $4{,}00\,\text{nC}$: recibe electrones de la segunda. El conteo aproximado transferido es $4{,}00\times10^{-9}/e \simeq 2{,}497\times10^{10}$.




El estado final reparte la carga total por la simetría de esferas y entorno. Los electrones se transfieren de la segunda esfera a la primera.

La igualdad de cargas del ejemplo procede de la simetría. En conductores de formas o tamaños diferentes, el equilibrio exige igual potencial cuando están conectados; la carga se reparte según la geometría y el entorno. Esta distinción será útil al introducir el potencial.

## 17.2 Conductores, aislantes y polarización

En un conductor metálico hay electrones capaces de desplazarse por el material. En un aislante, las cargas permanecen ligadas a regiones mucho más pequeñas, aunque pueden desplazarse ligeramente dentro de átomos o moléculas. La respuesta depende también de la temperatura, la humedad y la escala de tiempo del experimento.

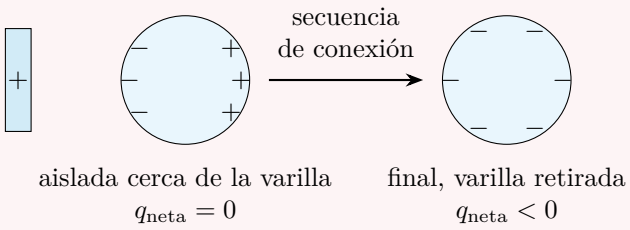
Al acercar una carga positiva a un conductor neutro aislado, los electrones móviles se acumulan hacia el lado próximo y dejan un déficit relativo en el lado lejano. La suma de la carga del conductor sigue siendo cero. Esta separación inducida puede originar una fuerza de atracción: el campo de la fuente es mayor en la región próxima, donde predomina la carga de signo opuesto.

En un dieléctrico, la polarización describe desplazamientos relativos de cargas ligadas o la orientación de dipolos moleculares. Puede producir regiones superficiales de signo opuesto y una respuesta colectiva apreciable. El material puede permanecer globalmente neutro durante esa redistribución.

Un conductor en equilibrio electrostático tiene campo cero en el interior de su material y potencial constante en todo él. La componente tangencial del campo en su superficie es cero; una componente tangencial movería sus cargas libres. La carga neta excedente se localiza en las superficies. Una cavidad requiere distinguir el material conductor de la región vacía: una carga dentro de la cavidad puede producir campo allí e inducir cargas en sus paredes.

**PROBLEMA RESUELTO 17.3 · Cargar por inducción y seguir la conexión a tierra**

Una varilla positiva se acerca, sin tocarla, a una esfera metálica inicialmente neutra sobre un soporte aislante. Describe la esfera aislada. Después se conecta a tierra mientras la varilla sigue cerca, se retira primero la conexión a tierra y finalmente se aleja la varilla. Predice el signo de la carga que conserva la esfera. *Resolución.* Con la esfera aislada, los electrones se desplazan hacia la varilla y aparece déficit de electrones en la región alejada. La carga neta permanece cero. Al conectar a tierra, la atracción de la varilla permite que entren electrones desde la tierra. Retirar la conexión conserva ese exceso en la esfera; al alejar la varilla, los electrones se redistribuyen y la esfera queda con carga neta negativa. La cantidad transferida depende de las dimensiones, distancias y condiciones de conexión. El orden de desconexión fija qué carga queda aislada.




Los signos indican excesos o déficits de carga en regiones de la superficie. La esfera aislada comienza con carga neta cero; tras la secuencia con tierra y la retirada de la varilla, el exceso de electrones se distribuye por la superficie.

## 17.3 Fuerzas entre cargas puntuales

Para dos cargas puntuales en reposo y en el vacío, la ley de Coulomb da la magnitud

$$F = k\frac{|q_1 q_2|}{r^2}, \qquad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \simeq 9{,}00 \times 10^9\,\mathrm{N\,m^2/C^2}. \tag{17.1}$$

Usaremos ese valor redondeado de $k$ en los problemas de fuerzas y potencial. La permitividad del vacío es aproximadamente $\varepsilon_0 = 8{,}854 \times 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$. Las dos aproximaciones se emplean con las cifras indicadas en cada cálculo. Las cargas del mismo signo se repelen y las de signos opuestos se atraen, a lo largo de la recta que las une.

Una carga puntual modela un cuerpo cuyas dimensiones son pequeñas frente a las distancias relevantes. Las distribuciones extensas requieren sumar las contribuciones de sus partes; en un conductor próximo a otros cuerpos, la redistribución superficial puede modificar la aproximación de carga concentrada en su centro.

Para incorporar el sentido directamente, si $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ son posiciones, la fuerza sobre la carga 2 debida a la 1 es

$$\vec{F}_{1\to 2} = kq_1 q_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}.$$

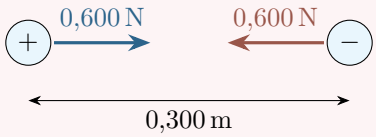
Con varias cargas, el principio de superposición indica que la fuerza neta es la suma vectorial de las fuerzas individuales. Conviene identificar primero sobre qué cuerpo se calcula, dibujar cada contribución y luego sumar componentes. El signo de una componente representa un sentido respecto de un eje elegido.

### PROBLEMA RESUELTO 17.4 · Dar dirección a una fuerza de Coulomb

Una carga $q_1 = +2{,}00\,\mu\text{C}$ está en $x = 0$ y otra $q_2 = -3{,}00\,\mu\text{C}$ en $x = 0{,}300\,\text{m}$. Calcula la fuerza sobre cada una. *Resolución.* La magnitud es

$$F = \frac{(9{,}00 \times 10^9)(2{,}00 \times 10^{-6})(3{,}00 \times 10^{-6})}{(0{,}300)^2} = 0{,}600\,\text{N}.$$

La atracción dirige la fuerza sobre $q_1$ hacia $+x$ y la fuerza sobre $q_2$ hacia $-x$. Son fuerzas iguales en magnitud y opuestas en dirección, aplicadas a cuerpos diferentes. La carga negativa participa en la dirección de la interacción; la magnitud calculada es positiva.



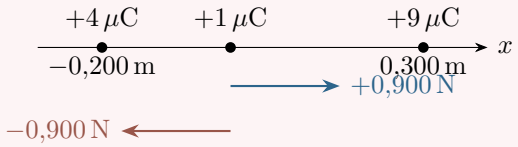

Cada flecha representa la fuerza sobre la carga de la que parte. Las dos fuerzas actúan sobre cuerpos distintos.

### PROBLEMA RESUELTO 17.5 · Encontrar una compensación de fuerzas

Una carga de $+1{,}00\,\mu\text{C}$ está en el origen. Otras dos cargas fijas son $+4{,}00\,\mu\text{C}$ en $x = -0{,}200\,\text{m}$ y $+9{,}00\,\mu\text{C}$ en $x = 0{,}300\,\text{m}$. Calcula la fuerza neta sobre la carga central. *Resolución.* La carga izquierda repele a la central hacia la derecha:

$$F_{x,\text{izq}} = +\frac{(9 \times 10^9)(4 \times 10^{-6})(1 \times 10^{-6})}{0{,}200^2} = +0{,}900\,\text{N}.$$

La carga derecha la repele hacia la izquierda y produce $F_{x,\text{der}} = -0{,}900\,\text{N}$. La suma es cero. Cada interacción permanece presente; sus efectos vectoriales se compensan en esa posición. La estabilidad frente a desplazamientos en otras direcciones requiere examinar el campo alrededor del punto.



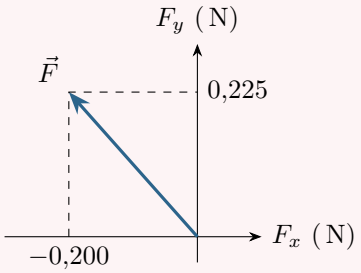

Se muestran las componentes con signo respecto del eje x. Las fuerzas sobre la carga central se compensan.

**PROBLEMA RESUELTO 17.6 · Sumar fuerzas en dos dimensiones**

Una carga de prueba $+1{,}00\,\mu$C está en el origen. Una carga fija $+2{,}00\,\mu$C está en $(0{,}300\,\text{m}, 0)$ y otra $-4{,}00\,\mu$C en $(0, 0{,}400\,\text{m})$. Calcula la fuerza neta sobre la carga del origen. *Resolución.* La primera fuente repele hacia $-x$, con magnitud $0{,}200\,$N. La segunda atrae hacia $+y$, con magnitud $0{,}225\,$N. Por tanto,

$$\vec{F} = (-0{,}200\,\hat{\imath} + 0{,}225\,\hat{\jmath})\,\text{N}, \qquad |\vec{F}| = \sqrt{0{,}200^2 + 0{,}225^2}\,\text{N} \simeq 0{,}3010\,\text{N}.$$

El vector está en el segundo cuadrante, a $48{,}37°$ sobre el semieje negativo de $x$, equivalente a $131{,}63°$ desde $+x$. El dibujo del cuadrante permite elegir correctamente el ángulo al usar la tangente.




Las componentes se dibujan con una escala común. La diagonal corresponde a la suma vectorial.

## 17.4 El campo como propiedad de la configuración fuente

Una misma configuración de cargas puede ejercer fuerzas diferentes sobre cuerpos de prueba diferentes. Al dividir la fuerza por la carga de prueba obtenemos una descripción del efecto de las fuentes en ese punto:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}, \qquad \vec{F} = q_0\vec{E}. \tag{17.2}$$

La carga de prueba debe perturbar de manera despreciable la configuración fuente. El campo apunta en el sentido de la fuerza que experimentaría una carga positiva. Una carga negativa recibe una fuerza opuesta al campo. La unidad es N/C, equivalente a V/m.

Una fuente puntual $Q$, situada en $\vec{r}_Q$, produce

$$\vec{E}(\vec{r}) = kQ\frac{\vec{r} - \vec{r}_Q}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|^3}.$$

Las contribuciones de varias fuentes se suman vectorialmente. La expresión se evalúa en el punto de observación y excluye el campo propio de la carga sobre la que después calculamos una fuerza.

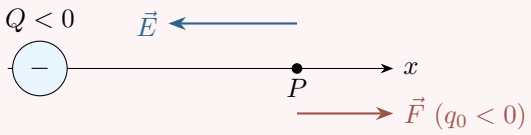
Las líneas de campo ayudan a representar esa distribución: su tangente indica la dirección local y su sentido corresponde al de $\vec{E}$. Para una fuente positiva aislada salen radialmente y para una negativa entran. En electrostática, dos líneas de campo se cruzarían sólo si asignáramos dos direcciones al mismo campo no nulo, de modo que la representación conserva una dirección única en cada punto regular. La trayectoria de una partícula depende además de su velocidad inicial, su masa, el signo de su carga y las otras fuerzas presentes.

### PROBLEMA RESUELTO 17.7 · Separar campo y fuerza de prueba

Una carga fuente $Q = -2{,}00\,\text{nC}$ está en el origen. Calcula el campo en $x = 0{,}300\,\text{m}$ y la fuerza sobre una carga de prueba $q_0 = -3{,}00\,\text{nC}$ colocada allí. *Resolución.* El campo apunta hacia la fuente negativa:

$$E_x = -\frac{(9\times10^{9})(2\times10^{-9})}{0{,}300^2} = -200\,\text{N/C}.$$

La fuerza es $F_x = q_0E_x = (-3\times10^{-9})(-200) = +6{,}00\times10^{-7}\,\text{N}$. La fuente determina el campo; el signo de la carga de prueba invierte el sentido de la fuerza respecto de él.



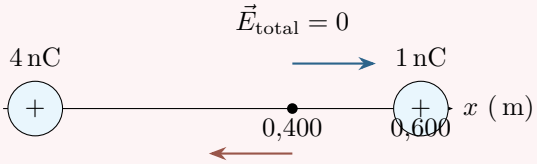

El campo apunta hacia la fuente negativa y la fuerza sobre una prueba negativa tiene el sentido opuesto.

### PROBLEMA RESUELTO 17.8 · Localizar un punto de campo nulo

Dos cargas fijas positivas, $+4{,}00\,\text{nC}$ y $+1{,}00\,\text{nC}$, se encuentran en $x = 0$ y $x = 0{,}600\,\text{m}$. Localiza el punto finito donde el campo total se anula. *Resolución.* Entre las cargas, los campos tienen sentidos opuestos. Fuera de ese intervalo apuntan en el mismo sentido, por lo que buscamos $0 < x < 0{,}600$. Igualar magnitudes da

$$\frac{4}{x^2} = \frac{1}{(0{,}600-x)^2}, \qquad \frac{2}{x} = \frac{1}{0{,}600-x}.$$

Las distancias son positivas en el intervalo seleccionado. Resulta $x = 0{,}400\,\text{m}$. Allí cada fuente produce $225\,\text{N/C}$ y ambas contribuciones se compensan. La mayor distancia a la carga mayor equilibra su mayor magnitud.



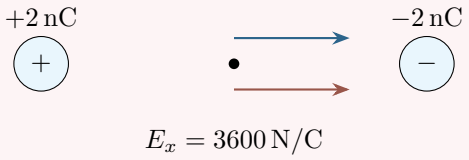

Las dos contribuciones tienen magnitud 225 N/C en el punto indicado. Las flechas muestran sus sentidos opuestos.

**PROBLEMA RESUELTO 17.9 · Sumar el campo en el centro de un dipolo**

Un dipolo tiene $+2{,}00\,\text{nC}$ en $x = -0{,}100\,\text{m}$ y $-2{,}00\,\text{nC}$ en $x = +0{,}100\,\text{m}$. Encuentra el campo en el origen. *Resolución.* La fuente positiva produce campo hacia la derecha y la negativa también, porque desde el origen se apunta hacia ella. Cada contribución vale $(9\times10^{9})(2\times10^{-9})/0{,}100^{2} = 1800\,\text{N/C}$. Por ello,

$$\vec{E} = 3600\,\hat{\imath}\,\text{N/C}.$$

La suma algebraica de las cargas fuente es cero y la suma de sus campos en ese punto es distinta de cero. Para obtener el campo intervienen las posiciones y las direcciones de cada contribución.




Las dos contribuciones apuntan desde la carga positiva hacia la negativa en el punto medio.

## 17.5 Potencial, energía y trabajo

En un campo electrostático, el trabajo de la fuerza eléctrica depende de los extremos del desplazamiento. Esto permite definir una energía potencial $U$ y un potencial $V$ de modo que, para una carga de prueba $q$ en fuentes fijas,

$$\Delta U = q\Delta V, \qquad W_{\text{el}} = -\Delta U = q(V_i - V_f). \tag{17.3}$$

El potencial es energía potencial por unidad de carga, medido en volt: $1\,\text{V} = 1\,\text{J/C}$. Es una magnitud escalar y su referencia de cero puede elegirse. Cambiar esa referencia conserva las diferencias de potencial y los trabajos calculados.

Para una distribución localizada de cargas puntuales, escoger $V = 0$ en el infinito proporciona

$$V(P) = k\sum_{i}\frac{Q_i}{r_i}. \tag{17.4}$$

Aquí se suman contribuciones escalares con el signo de cada fuente. El campo requiere una suma vectorial con dependencia $1/r^{2}$, mientras que el potencial suma términos proporcionales a $1/r$. El valor del potencial en un punto y su variación espacial cumplen funciones diferentes en la descripción.

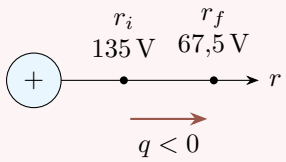
**PROBLEMA RESUELTO 17.10 · Mover una carga negativa hacia menor potencial**

Una fuente fija $Q = +3{,}00\,\text{nC}$ está en el origen. Una carga de prueba $q = -2{,}00\,\text{nC}$ pasa de $r_i = 0{,}200\,\text{m}$ a $r_f = 0{,}400\,\text{m}$. Calcula los potenciales, el cambio de energía potencial y el trabajo eléctrico, con referencia en el infinito.

*Resolución.* Los potenciales son $V_i = kQ/r_i = 135\,\text{V}$ y $V_f = 67{,}5\,\text{V}$. Así, $\Delta V = -67{,}5\,\text{V}$ y

$$\Delta U = (-2 \times 10^{-9})(-67{,}5)\,\text{J} = +1{,}35 \times 10^{-7}\,\text{J}.$$

El trabajo eléctrico es $-1{,}35 \times 10^{-7}\,\text{J}$. La atracción sobre la carga negativa se opone a su desplazamiento hacia afuera; la energía potencial aumenta. Un traslado lento exigiría un trabajo externo positivo de igual magnitud.




El desplazamiento hacia afuera reduce el potencial y aumenta la energía de la prueba negativa. Las distancias radiales guardan la razón dos.

**PROBLEMA RESUELTO 17.11 · Comparar potencial cero y campo no nulo**

Para el dipolo del problema 17.9, calcula el potencial del origen con referencia en el infinito. Una carga de prueba $+1{,}00\,\text{nC}$ se coloca allí: encuentra su energía potencial de interacción con las fuentes y su fuerza inicial. *Resolución.* Las contribuciones al potencial son $+180\,\text{V}$ y $-180\,\text{V}$. Su suma es $V = 0$. Con esa referencia, la energía de interacción de la carga de prueba es $U = qV = 0$. El campo hallado antes es $3600\,\hat{\imath}\,\text{N/C}$, por lo que la fuerza vale $+3{,}60 \times 10^{-6}\,\hat{\imath}\,\text{N}$. Un valor cero del potencial fija un nivel energético local; la fuerza se relaciona con cómo cambia ese potencial alrededor del punto.

| Magnitud en el origen | Valor |
|---|---|
| Potencial | $0\,\text{V}$ |
| Campo | $+3600\,\hat{\imath}\,\text{N/C}$ |
| Energía de la prueba | $0\,\text{J}$ |
| Fuerza sobre $+1\,\text{nC}$ | $+3{,}60 \times 10^{-6}\hat{\imath}\,\text{N}$ |

Los valores de energía corresponden a la interacción de la prueba con las fuentes fijas, con la referencia adoptada.

Cuando calculamos la energía de una configuración completa, contamos cada par una vez. Para tres cargas puntuales, excluyendo sus autoenergías,

$$U_{\text{config}} = k\left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right).$$

Esta energía describe el trabajo externo de ensamblar lentamente la configuración desde cargas separadas en el infinito, con sus energías cinéticas finales despreciables. Los términos negativos representan pares atractivos en esa elección de referencia.

**PROBLEMA RESUELTO 17.12 · Contar pares al ensamblar una configuración**

Tres cargas fijas están en una recta: $q_1 = +2{,}00\,\text{nC}$ en $x = 0$, $q_2 = +3{,}00\,\text{nC}$ en $x = 0{,}300\,\text{m}$ y $q_3 = -1{,}00\,\text{nC}$ en $x = 0{,}600\,\text{m}$. Calcula la energía de interacción de la configuración. *Resolución.* Las distancias entre pares son 0,300, 0,600 y 0,300 m. Los tres términos valen, respectivamente, +180, −30 y −90 nJ. Entonces $U_{\text{config}} = +60\,\text{nJ}$. Si colocamos primero $q_1$ y $q_2$, el trabajo externo es 180 nJ; añadir después $q_3$ aporta −120 nJ. Esa suma reproduce el resultado y cuenta cada par exactamente una vez.

| Par | Separación (m) | Energía (nJ) |
|---|---|---|
| 1, 2 | 0,300 | +180 |
| 1, 3 | 0,600 | −30 |
| 2, 3 | 0,300 | −90 |
| Total | | +60 |

Cada fila cuenta un par. La energía total conserva los signos de sus tres contribuciones.

## 17.6 Leer equipotenciales y predecir movimientos

Una superficie equipotencial reúne puntos con el mismo valor de $V$. Mover una carga entre dos de esos puntos conserva su energía potencial eléctrica y da trabajo eléctrico neto cero. El campo en un punto regular es perpendicular a la superficie equipotencial y apunta hacia potenciales decrecientes.

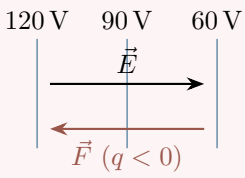
Esta relación se expresa sin cálculo diferencial en un campo uniforme: sobre un tramo paralelo al eje $x$, $\Delta V = -E_x \Delta x$. Así, una caída mayor de potencial en una distancia menor corresponde a una componente de campo mayor. En una distribución general, las equipotenciales próximas señalan un gradiente más intenso cuando se comparan iguales diferencias de potencial. La relación local es $E_x = -dV/dx$; en tres dimensiones se escribe $\vec{E} = -\nabla V$.

La fuerza sobre una carga positiva apunta hacia potencial decreciente y sobre una negativa hacia potencial creciente. El movimiento posterior incorpora también la velocidad inicial. Una partícula puede cruzar una equipotencial con distintas direcciones; para seguirla de manera controlada, las fuerzas externas deben sostener la trayectoria que se haya impuesto.

**PROBLEMA RESUELTO 17.13 · Obtener un campo a partir de una pendiente**

En una región el potencial depende sólo de $x$ mediante $V(x) = 120\,\text{V} - (300\,\text{V/m})x$. Calcula el campo y el trabajo eléctrico sobre $q = -2{,}00\,\mu\text{C}$ al llevarla de $x = 0$ a $x = 0{,}200\,\text{m}$.

*Resolución.* La pendiente es $-300\,\text{V/m}$, de modo que $\vec{E} = +300\,\hat{\imath}\,\text{N/C}$. La fuerza sobre la carga negativa es $-6{,}00 \times 10^{-4}\,\hat{\imath}\,\text{N}$. El potencial cae 60 V, por lo que $\Delta U = (-2 \times 10^{-6})(-60) = +120\,\mu\text{J}$ y $W_{\text{el}} = -120\,\mu\text{J}$. El signo del trabajo también se obtiene porque la fuerza y el desplazamiento tienen sentidos opuestos.




Las líneas representan planos equipotenciales igualmente espaciados. El campo apunta hacia menor potencial.

Si la fuerza eléctrica es la única que realiza trabajo, la conservación de la energía da $\Delta K = -q\Delta V$. Para una partícula soltada desde el reposo, el valor final $K_f$ debe resultar no negativo. Un resultado negativo indica que los extremos propuestos exigen energía adicional para alcanzarse desde ese estado inicial. En un movimiento con otras fuerzas se incorporan sus trabajos al mismo balance.

**PROBLEMA RESUELTO 17.14 · Pasar de una diferencia de potencial a una rapidez**

Una partícula de masa $1{,}00 \times 10^{-6}\,\mathrm{kg}$ y carga $+2{,}00\,\mathrm{nC}$ se suelta desde el reposo en un punto a $300\,\mathrm{V}$ y alcanza otro a $100\,\mathrm{V}$. Supón fuentes fijas y trabajo gravitacional despreciable. Calcula su rapidez final. Compara con una partícula de igual masa y carga $-2{,}00\,\mathrm{nC}$ que se suelta a $100\,\mathrm{V}$ y alcanza $300\,\mathrm{V}$ bajo las mismas hipótesis. *Resolución.* Para la primera, $\Delta V = -200\,\mathrm{V}$ y $K_f = -q\Delta V = 4{,}00 \times 10^{-7}\,\mathrm{J}$. Entonces

$$v_f = \sqrt{\frac{2K_f}{m}} = \sqrt{0{,}800}\,\mathrm{m/s} \simeq 0{,}8944\,\mathrm{m/s}.$$

Para la segunda, tanto la carga como el cambio de potencial invierten su signo. El producto $q\Delta V$ conserva el valor $-4{,}00 \times 10^{-7}\,\mathrm{J}$ y la rapidez final es la misma. El balance energético determina la rapidez para los extremos alcanzados; la trayectoria concreta depende de la geometría del campo.

| $q > 0$ | $q < 0$ |
|---|---|
| $300 \to 100\,\mathrm{V}$ | $100 \to 300\,\mathrm{V}$ |

Ambas: $\Delta U = -4{,}00 \times 10^{-7}\,\mathrm{J}$
$v_f \simeq 0{,}8944\,\mathrm{m/s}$

Las masas y las magnitudes de carga coinciden; los dos desplazamientos producen la misma disminución de energía potencial.

## 17.7 Capacitancia y energía almacenada

Dos conductores separados por un aislante pueden mantener cargas $+Q$ y $-Q$ y una diferencia de potencial. Ese sistema forma un capacitor o condensador. En el modelo lineal, con geometría y material fijos, definimos

$$C = \frac{Q}{\Delta V}. \tag{17.5}$$

Aquí $Q$ es la magnitud positiva de la carga de una placa y $\Delta V$ la diferencia de potencial positiva entre ambas. El farad es $1\,\mathrm{F} = 1\,\mathrm{C/V}$. Usaremos con frecuencia microfarad, nanofarad y picofarad: $10^{-6}$, $10^{-9}$ y $10^{-12}\,\mathrm{F}$.

La capacitancia depende de la geometría y de la respuesta del material entre conductores. Para un capacitor lineal, cambiar la carga modifica proporcionalmente la diferencia de potencial; el cociente permanece fijo. Un capacitor descargado conserva su capacitancia como propiedad de esa configuración, entendida mediante su respuesta al recibir carga.

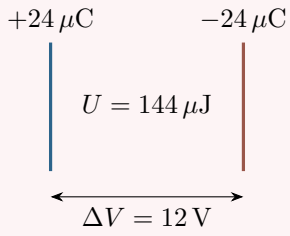
Cargarlo exige trasladar carga entre placas contra una diferencia de potencial que aumenta. Cuando se ha transferido una carga intermedia $q$, esa diferencia es $q/C$. La acumulación del trabajo desde cero hasta $Q$ da

$$U = \int_0^Q \frac{q}{C}\,dq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}Q\Delta V = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2. \tag{17.6}$$

Esta energía corresponde al capacitor lineal, tomando cero en el estado descargado. Su cálculo usa la diferencia de potencial instantánea durante la carga; una fuente ideal que mantiene un voltaje fijo puede intercambiar además energía con otros elementos del circuito.

**PROBLEMA RESUELTO 17.15 · Distinguir carga de placa y carga total**

Un capacitor de $2{,}00\,\mu\text{F}$ está conectado a $12{,}0\,\text{V}$. Calcula las cargas de sus placas, la carga neta del par y la energía almacenada. *Resolución.* La magnitud de cada carga es $Q = C\Delta V = (2{,}00\,\mu\text{F})(12{,}0\,\text{V}) = 24{,}0\,\mu\text{C}$. Las placas tienen $+24{,}0$ y $-24{,}0\,\mu\text{C}$ y la carga neta del conjunto es cero. La energía vale $U = \frac{1}{2}(2{,}00\times10^{-6})(12{,}0)^2 = 144\,\mu\text{J}$. La separación de cargas permite almacenar energía aunque la suma algebraica de ambas cargas sea cero.




Las placas tienen cargas opuestas; su suma es cero y el capacitor conserva energía almacenada.

Para placas planas paralelas de área $A$, separación $d$ mucho menor que sus dimensiones laterales y vacío entre ellas, despreciamos los efectos de borde. Cada lámina extensa aporta un campo de magnitud $\sigma/(2\varepsilon_0)$, con $\sigma = Q/A$; entre las placas las contribuciones se suman y dan $E = Q/(\varepsilon_0 A)$. Con $\Delta V = Ed$ resulta

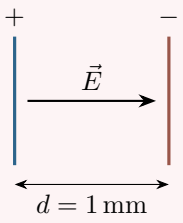
$$C_0 = \varepsilon_0 \frac{A}{d}. \tag{17.7}$$

El aire puede aproximarse al vacío en condiciones ordinarias apropiadas. Aumentar el área aumenta la capacitancia y aumentar la separación la reduce. El subíndice cero identificará el valor con vacío cuando comparemos materiales dieléctricos.

**PROBLEMA RESUELTO 17.16 · Comprobar un capacitor mediante su campo**

Dos placas paralelas en vacío tienen $A = 0{,}0200\,\text{m}^2$, $d = 1{,}00\,\text{mm}$ y $\Delta V = 100\,\text{V}$. Desprecia bordes. Calcula $C$, $Q$, $E$ y $U$ con $\varepsilon_0 = 8{,}854\times10^{-12}\,\text{F/m}$.

*Resolución.* La capacitancia es $C = \varepsilon_0 A/d = 1{,}7708\times10^{-10}\,\text{F} = 177{,}08\,\text{pF}$. Así, $Q = C\Delta V = 17{,}708\,\text{nC}$ y $E = \Delta V/d = 1{,}00\times10^{5}\,\text{V/m}$. La energía es $U = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2 = 8{,}854\times10^{-7}\,\text{J}$. Sustituir $Q/(\varepsilon_0 A)$ reproduce el campo y comprueba la relación entre la carga y la geometría.




El campo es aproximadamente uniforme entre placas lejos de los bordes. El dibujo amplía la separación para facilitar la lectura.

## 17.8 Cambiar el material y combinar capacitores

Al llenar el espacio entre placas con un dieléctrico lineal, homogéneo e isótropo, su polarización modifica el campo. En el modelo de placas ideales, la capacitancia pasa a $C = \kappa C_0$, con $\kappa$ la permitividad relativa. Mantener fija la carga reduce el campo y el voltaje por un factor $\kappa$. Mantener fija la diferencia de potencial exige que la fuente entregue carga adicional.

Antes de calcular una modificación conviene identificar la conexión. Un capacitor aislado conserva la carga libre de sus placas; uno conectado a una batería ideal conserva su diferencia de potencial. Las expresiones de energía son equivalentes, pero la condición física decide qué variables permanecen constantes durante el cambio.

**PROBLEMA RESUELTO 17.17 · Insertar el mismo dieléctrico con dos conexiones**

Un capacitor ideal tiene $C_0 = 100\,\text{pF}$ y está inicialmente a $200\,\text{V}$. Un dieléctrico de $\kappa = 4$ llena lentamente el espacio entre placas. Compara el estado final cuando se desconecta antes la batería y cuando permanece conectado a una batería ideal de $200\,\text{V}$. *Resolución.* Inicialmente $Q_0 = 20{,}0\,\text{nC}$ y $U_0 = 2{,}00\,\mu\text{J}$. En ambos casos $C_f = 400\,\text{pF}$. Aislado, mantiene $Q_f = 20{,}0\,\text{nC}$; entonces $\Delta V_f = 50{,}0\,\text{V}$ y $U_f = 0{,}500\,\mu\text{J}$. Conectado, mantiene $\Delta V_f = 200\,\text{V}$; así, $Q_f = 80{,}0\,\text{nC}$ y $U_f = 8{,}00\,\mu\text{J}$.
En una inserción ideal sin disipación, el caso aislado permite entregar $1{,}50\,\mu\text{J}$ de trabajo mecánico al exterior. Con batería, la fuente entrega $(200)(60{,}0 \times 10^{-9}) = 12{,}0\,\mu\text{J}$: $6{,}00\,\mu\text{J}$ aumentan la energía del capacitor y $6{,}00\,\mu\text{J}$ pueden entregarse como trabajo mecánico. La conexión determina también el balance energético.

| Condición | $C$ (pF) | $Q$ (nC) | $\Delta V$ (V) | $U$ ($\mu$J) |
|---|---|---|---|---|
| Inicial | 100 | 20 | 200 | 2 |
| Final aislado | 400 | 20 | 50 | 0,5 |
| Final conectado | 400 | 80 | 200 | 8 |

Se comparan dos preparaciones desde el mismo estado inicial. La conexión fija qué magnitud se conserva.

Si dos capacitores se conectan a los mismos dos nodos, están en paralelo y comparten $\Delta V$. Las cargas que entrega la fuente se suman: $Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2)\Delta V$, de donde $C_{\text{eq}} = C_1 + C_2$. En serie, un nodo intermedio inicialmente neutro y aislado obliga a que las placas internas adquieran cargas opuestas de igual magnitud. Cada capacitor tiene la misma magnitud $Q$ y los voltajes se suman. Así,

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

Estas relaciones describen las conexiones y el estado electrostático alcanzado. La evolución temporal de la carga se estudiará con los circuitos. Si el nodo intermedio tiene una carga neta inicial, se debe incorporar esa carga al balance del nodo.

**PROBLEMA RESUELTO 17.18 · Comparar una conexión en serie y otra en paralelo**

Dos capacitores ideales de 2,00 y 6,00 $\mu$F se conectan primero en serie a 12,0 V, con nodo intermedio inicialmente neutro. Encuentra la capacitancia equivalente, las cargas, los voltajes y la energía total. Compara con conectarlos en paralelo a la misma fuente, partiendo de capacitores descargados en cada montaje. *Resolución.* En serie, $C_{\text{eq}} = (2{\cdot}6)/(2{+}6) = 1{,}50\,\mu$F. La carga de cada capacitor tiene magnitud $Q = 1{,}50(12{,}0) = 18{,}0\,\mu$C. Los voltajes son 9,00 y 3,00 V, cuya suma es 12,0 V. Las energías son 81,0 y 27,0 $\mu$J; el total, 108 $\mu$J, coincide con $\frac{1}{2}C_{\text{eq}}(12{,}0)^2$.
En paralelo, $C_{\text{eq}} = 8{,}00\,\mu$F; las cargas tienen magnitudes 24,0 y 72,0 $\mu$C y el total suministrado a las placas positivas es 96,0 $\mu$C. La energía final es 576 $\mu$J. Los dos montajes reciben distintas cargas y energías de la fuente durante su preparación.

| Montaje | $C_{\text{eq}}$ ($\mu$F) | $Q_1$ ($\mu$C) | $Q_2$ ($\mu$C) | $U$ ($\mu$J) |
|---|---|---|---|---|
| Serie | 1,50 | 18 | 18 | 108 |
| Paralelo | 8,00 | 24 | 72 | 576 |

Las cargas tabuladas son magnitudes de placa. En serie los voltajes son 9 V y 3 V; en paralelo ambos son 12 V.

## Ejercicios para reconstruir y transferir

Usa $k = 9{,}00 \times 10^9\,\text{N m}^2/\text{C}^2$, $e = 1{,}602176634 \times 10^{-19}\,\text{C}$ y $\varepsilon_0 = 8{,}854 \times 10^{-12}\,\text{F/m}$. Considera fuentes fijas, pruebas de perturbación despreciable y cargas puntuales en vacío en los problemas de Coulomb. Para potencial de fuentes localizadas toma cero en el infinito, salvo indicación distinta. Los capacitores son ideales y lineales.

**EJERCICIO 17.1 · Un exceso de electrones**

Un cuerpo tiene carga $-8{,}01088317 \times 10^{-10}\,\text{C}$. Calcula su exceso de electrones respecto del estado neutro.

**EJERCICIO 17.2 · Equilibrar dos esferas**

Dos esferas conductoras idénticas, muy separadas en un entorno simétrico, tienen +10 nC y −4 nC. Se conectan, alcanzan equilibrio y se desconectan. Calcula las cargas finales y describe la transferencia de electrones.

**EJERCICIO 17.3 · Invertir el signo de la varilla**

Una varilla negativa se acerca sin contacto a un conductor neutro aislado. Describe la redistribución. Después se conecta a tierra, se retira primero la conexión y finalmente la varilla. Predice la carga neta conservada y explica el papel de la tierra.

**EJERCICIO 17.4 · Dos cargas positivas**

Dos cargas de $+1{,}00$ y $+2{,}00\,\mu$C distan $0{,}300\,$m. Calcula la fuerza sobre cada una, con dirección y sentido.

**EJERCICIO 17.5 · Escalar cargas y distancias**

La distancia entre dos cargas se triplica. Además, la magnitud de la primera se duplica y la de la segunda se triplica, conservando sus signos. Encuentra el factor de cambio de la fuerza y describe el efecto de cada modificación por separado.

**EJERCICIO 17.6 · Dos fuerzas en el mismo sentido**

Una carga $+2{,}00\,$nC está en el origen; otras dos cargas fijas son $+3{,}00\,$nC en $x = -0{,}100\,$m y $-12{,}0\,$nC en $x = 0{,}200\,$m. Calcula la fuerza neta sobre la central.

**EJERCICIO 17.7 · Una resultante diagonal**

Una carga de prueba $+1{,}00\,$nC está en el origen. Dos fuentes de $+2{,}00\,$nC están en $(0{,}300\,\text{m}, 0)$ y $(0, 0{,}300\,\text{m})$. Calcula las componentes y la magnitud de la fuerza sobre la prueba.

**EJERCICIO 17.8 · Campo y fuerza con signo**

Una fuente de $+8{,}00\,$nC está en el origen. Halla el campo en $x = 0{,}400\,$m y la fuerza sobre $-2{,}00\,$nC colocados allí.

**EJERCICIO 17.9 · Multiplicar un vector por una carga**

En un punto, $\vec{E} = (300\hat{\imath} - 400\hat{\jmath})\,\text{N/C}$. Calcula la fuerza y su magnitud para $q = -2{,}00\,\mu$C.

**EJERCICIO 17.10 · El punto medio de dos cargas iguales**

Dos cargas positivas iguales están en $x = -0{,}200\,$m y $x = +0{,}200\,$m. Determina el campo en el origen y la fuerza sobre una carga de prueba de cualquiera de los dos signos situada allí.

**EJERCICIO 17.11 · Potencial de una fuente negativa**

Una fuente de $-4{,}00\,$nC produce un potencial a $0{,}200\,$m. Calcúlalo y encuentra la energía potencial de interacción de una prueba de $+3{,}00\,$nC colocada allí.

**EJERCICIO 17.12 · Un dipolo y dos sumas**

Las cargas $+3{,}00\,$nC y $-3{,}00\,$nC están en $x = 0$ y $x = 0{,}400\,$m. Calcula el potencial y el campo en el punto medio. Encuentra la fuerza sobre una prueba de $+1{,}00\,$nC.

**EJERCICIO 17.13 · Trabajo con una carga negativa**

Una carga $-2{,}00\,\mu\text{C}$ se lleva de un punto a 20 V a otro a 80 V. Calcula $\Delta U$ y el trabajo eléctrico.

**EJERCICIO 17.14 · Tres pares iguales**

Tres cargas de $+1{,}00\,\text{nC}$ ocupan los vértices de un triángulo equilátero de lado 0,300 m. Calcula la energía de interacción de la configuración.

**EJERCICIO 17.15 · Un mapa de potencial uniforme**

El potencial depende sólo de $x$ y vale 90, 60 y 30 V en $x = 0$, 0,100 y 0,200 m, con dependencia lineal. Encuentra el campo y el trabajo eléctrico sobre una carga de $+1{,}00\,\mu\text{C}$ que se desplaza paralelamente al eje $y$.

**EJERCICIO 17.16 · Comparar dos separaciones entre niveles**

Un potencial que depende sólo de $x$ vale 100 V en $x = 0$, 80 V en $x = 0{,}100\,\text{m}$ y 60 V en $x = 0{,}150\,\text{m}$. Supón que es lineal dentro de cada intervalo. Calcula el campo en cada tramo y explica dónde es más intenso.

**EJERCICIO 17.17 · Una rapidez por energía**

Una partícula de $2{,}00 \times 10^{-6}\,\text{kg}$ y $+1{,}00\,\mu\text{C}$ se suelta desde el reposo a 200 V y alcanza 100 V. Si sólo la fuerza eléctrica realiza trabajo, calcula su rapidez final.

**EJERCICIO 17.18 · Carga y energía de un capacitor**

Un capacitor de $3{,}00\,\mu\text{F}$ tiene 20,0 V entre sus placas. Calcula la magnitud de sus cargas y la energía almacenada.

**EJERCICIO 17.19 · Placas con vacío**

Un capacitor de placas paralelas tiene $A = 0{,}0100\,\text{m}^2$ y $d = 2{,}00\,\text{mm}$. A 200 V, calcula $C$, $Q$, $E$ y $U$, despreciando bordes.

**EJERCICIO 17.20 · Separar placas de un capacitor aislado**

Un capacitor de placas paralelas tiene inicialmente $C_i = 200\,\text{pF}$ y $\Delta V_i = 100\,\text{V}$. Se desconecta y se duplica lentamente la separación, manteniendo área y medio. Encuentra $C_f$, $Q_f$, $\Delta V_f$, $U_i$ y $U_f$. Interpreta el cambio de energía.

**EJERCICIO 17.21 · Separar placas con la batería conectada**

Repite la modificación geométrica anterior manteniendo conectada una batería ideal de 100 V. Calcula $C_f$, $Q_f$ y $U_f$, e indica el sentido de transferencia de carga respecto de la fuente.

**EJERCICIO 17.22 · Insertar un aislante polarizable**

Un capacitor aislado tiene $C_0 = 100\,\text{pF}$ y carga de placa $Q = 10{,}0\,\text{nC}$. Un dieléctrico de $\kappa = 5$ llena el espacio entre placas. Calcula la capacitancia, la diferencia de potencial y la energía finales, comparándolas con las iniciales.

**EJERCICIO 17.23 · Dos capacitores en paralelo**

Capacitores de 2,00 y 4,00 $\mu$F están conectados en paralelo a 9,00 V. Calcula $C_{\text{eq}}$, las cargas de placa y la energía total.

**EJERCICIO 17.24 · Dos capacitores en serie**

Capacitores de 3,00 y 6,00 $\mu$F están conectados en serie a 9,00 V, con nodo intermedio inicialmente neutro. Calcula la capacitancia equivalente, la carga, los voltajes y la energía total.

## Soluciones razonadas

**SOLUCIÓN 17.1.**
El signo negativo corresponde a exceso de electrones. El conteo es $N = |q|/e = 5{,}00 \times 10^9$. Se divide una carga en coulomb entre la carga de un electrón en la misma unidad.

**SOLUCIÓN 17.2.**
La carga total es +6 nC; por simetría, cada esfera termina con +3 nC. La esfera inicialmente a +10 nC recibe electrones que reducen su carga en 7 nC. La segunda pierde esos electrones y pasa de −4 a +3 nC.

**SOLUCIÓN 17.3.**
La varilla repele electrones hacia el lado lejano y deja carga positiva relativa en el próximo. Aislado, el conductor mantiene carga neta cero. La conexión a tierra permite que salgan electrones; desconectarla antes de retirar la varilla conserva un déficit de electrones y, por tanto, carga neta positiva.

**SOLUCIÓN 17.4.**
La magnitud es $F = (9 \times 10^9)(1 \times 10^{-6})(2 \times 10^{-6})/0{,}300^2 = 0{,}200\,\text{N}$. Las fuerzas son repulsivas, iguales en magnitud y opuestas en sentido sobre la recta que une las cargas.

**SOLUCIÓN 17.5.**
Triplicar la distancia aporta el factor 1/9; duplicar una carga aporta dos y triplicar la otra aporta tres. El factor total es $6/9 = 2/3$. El tipo de interacción, atractivo o repulsivo, se conserva porque se mantienen los signos.

**SOLUCIÓN 17.6.**
La carga izquierda repele la central hacia $+x$, con $5{,}40 \times 10^{-6}\,\text{N}$. La derecha la atrae en el mismo sentido, con igual magnitud. Así, $F_x = +1{,}08 \times 10^{-5}\,\text{N}$. Se suman las contribuciones después de establecer sus sentidos.

**SOLUCIÓN 17.7.**
Cada fuente repele la prueba alejándola de su eje positivo. Las componentes son $F_x = F_y = -2{,}00 \times 10^{-7}\,\text{N}$. La magnitud es $2{,}00\sqrt{2} \times 10^{-7}\,\text{N} \simeq 2{,}828 \times 10^{-7}\,\text{N}$, dirigida al tercer cuadrante.
**SOLUCIÓN 17.8.**
El campo es $E_x = kQ/r^2 = +450\,\text{N/C}$. La prueba negativa experimenta $F_x = (-2\times10^{-9})(450) = -9{,}00 \times 10^{-7}\,\text{N}$, hacia la fuente positiva.
**SOLUCIÓN 17.9.**
Multiplicar ambas componentes por la carga da $\vec{F} = (-6{,}00 \times 10^{-4}\hat{\imath} + 8{,}00 \times 10^{-4}\hat{\jmath})\,\text{N}$. Su magnitud es $1{,}00 \times 10^{-3}\,\text{N}$. El campo tiene magnitud 500 N/C y la fuerza apunta en sentido opuesto.
**SOLUCIÓN 17.10.**
Las fuentes producen campos de igual magnitud y sentidos opuestos en el origen. Su suma es cero y la fuerza eléctrica sobre una prueba de cualquiera de los dos signos es cero allí. La descripción del movimiento tras una perturbación exige estudiar otros puntos del campo.
**SOLUCIÓN 17.11.**
$V = kQ/r = -180\,\text{V}$. La energía de interacción de la prueba es $U = qV = (3 \times 10^{-9})(-180) = -5{,}40 \times 10^{-7}\,\text{J}$. El signo se refiere al cero energético elegido en el infinito.
**SOLUCIÓN 17.12.**
A 0,200 m de cada fuente, los potenciales +135 y −135 V suman cero. Los campos apuntan ambos de la fuente positiva a la negativa y suman 1350 N/C hacia $+x$. La fuerza sobre la prueba positiva es $+1{,}35 \times 10^{-6}\hat{\imath}\,\text{N}$.
**SOLUCIÓN 17.13.**
$\Delta V = 60\,\text{V}$, por lo que $\Delta U = (-2 \times 10^{-6})(60) = -120\,\mu\text{J}$. El trabajo eléctrico es $+120\,\mu\text{J}$. Para una carga negativa, ir hacia mayor potencial reduce la energía potencial eléctrica.
**SOLUCIÓN 17.14.**
Hay tres pares, cada uno a 0,300 m. Cada término vale 30,0 nJ; sumarlos da $U = 90{,}0\,\text{nJ}$. Los tres términos son positivos porque todos los pares reúnen cargas del mismo signo.
**SOLUCIÓN 17.15.**
La pendiente del potencial es −300 V/m, así que $\vec{E} = +300\hat{\imath}\,\text{N/C}$. Un desplazamiento paralelo a $y$ mantiene $x$ y el potencial: $\Delta V = 0$ y $W_{\text{el}} = 0$. La fuerza eléctrica es perpendicular al desplazamiento impuesto.
**SOLUCIÓN 17.16.**
En el primer tramo, $E_x = -(80 - 100)/0{,}100 = +200\,\text{V/m}$. En el segundo, $E_x = -(60 - 80)/0{,}050 = +400\,\text{V/m}$. La misma caída de 20 V ocurre en la mitad de distancia, por lo que el segundo campo tiene doble magnitud. Las expresiones valen dentro de los intervalos lineales del modelo.
**SOLUCIÓN 17.17.**
La energía cinética final es $K_f = -q\Delta V = (1 \times 10^{-6})(100) = 1{,}00 \times 10^{-4}\,\text{J}$. Con $K_f = mv_f^2/2$, resulta $v_f = 10{,}0\,\text{m/s}$.
**SOLUCIÓN 17.18.**
$Q = C\Delta V = 60{,}0\,\mu\text{C}$ y $U = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2 = 600\,\mu\text{J}$. Las placas tienen cargas opuestas de esa magnitud.
**SOLUCIÓN 17.19.**
La capacitancia es $C = \varepsilon_0 A/d = 44{,}27\,\text{pF}$. La carga es $Q = C(200) = 8{,}854\,\text{nC}$, el campo $E = 200/0{,}002 = 1{,}00 \times 10^5\,\text{V/m}$ y la energía $U = \frac{1}{2}C(200)^2 = 0{,}8854\,\mu\text{J}$.
**SOLUCIÓN 17.20.**
Duplicar $d$ reduce la capacitancia a 100 pF. La carga aislada permanece en 20,0 nC; el voltaje pasa a 200 V. La energía aumenta de 1,00 a 2,00 $\mu$J. En un cambio cuasiestático ideal sin disipación, ese aumento procede del trabajo externo de separar las placas contra su atracción.
**SOLUCIÓN 17.21.**
$C_f = 100\,\text{pF}$ y el voltaje permanece en 100 V. Por tanto, $Q_f = 10{,}0\,\text{nC}$ y $U_f = 0{,}500\,\mu\text{J}$. La magnitud de la carga de cada placa disminuye y la batería recibe energía durante el cambio. Con voltaje fijo, su intercambio energético es distinto del cambio de energía del capacitor porque interviene también trabajo mecánico.

**SOLUCIÓN 17.22.**
Inicialmente $\Delta V_0 = 100\,\mathrm{V}$ y $U_0 = 0{,}500\,\mu\mathrm{J}$. La inserción da $C_f = 500\,\mathrm{pF}$ y conserva $Q = 10{,}0\,\mathrm{nC}$. Entonces $\Delta V_f = 20{,}0\,\mathrm{V}$ y $U_f = 0{,}100\,\mu\mathrm{J}$. La capacitancia se multiplica por cinco y voltaje y energía se reducen por ese factor a carga fija.

**SOLUCIÓN 17.23.**
En paralelo $C_{\mathrm{eq}} = 6{,}00\,\mu\mathrm{F}$ y ambos voltajes son 9,00 V. Las cargas de placa tienen magnitudes 18,0 y $36{,}0\,\mu\mathrm{C}$, sumando $54{,}0\,\mu\mathrm{C}$ en las placas positivas. La energía total es $\frac{1}{2}(6\times10^{-6})(9)^2 = 243\,\mu\mathrm{J}$.

**SOLUCIÓN 17.24.**
En serie $C_{\mathrm{eq}} = (3\cdot6)/(3+6) = 2{,}00\,\mu\mathrm{F}$. La carga tiene magnitud $18{,}0\,\mu\mathrm{C}$ en cada capacitor. Los voltajes son 6,00 y 3,00 V; las energías, 54,0 y $27{,}0\,\mu\mathrm{J}$. El total $81{,}0\,\mu\mathrm{J}$ coincide con $\frac{1}{2}C_{\mathrm{eq}}(9)^2$.

## Una experiencia: observar una redistribución

**Atracción y modelo de materia**

Frota suavemente una regla de plástico con un paño seco y acércala a pequeños trozos de papel sin tocarlos. Registra la distancia aproximada a la que comienza la respuesta y repite con materiales y tamaños distintos. Mantén el montaje alejado de equipos electrónicos sensibles y de sustancias inflamables; trabaja únicamente con electrización por frotamiento, sin fuentes de alta tensión.

Describe qué observación respalda una atracción y qué información adicional haría falta para determinar la carga neta del papel. La polarización ofrece una explicación de la atracción inicial de un cuerpo neutro. Si después hay contacto, incluye la posible transferencia de carga en el análisis. Registra humedad, materiales y secuencia de contactos: esas condiciones afectan la repetibilidad.

## Diagnóstico antes de avanzar

Un capacitor ideal de 20,0 pF se carga a 100 V y se desconecta. Después se inserta un dieléctrico de $\kappa = 2$ que llena el espacio entre placas. Calcula cargas, voltajes y energías antes y después. En el estado final, una carga de prueba de $-1{,}00\,\mathrm{pC}$ se desplaza de la placa de menor potencial a la de mayor potencial, tratando el campo del capacitor como inalterado. Calcula el cambio de su energía potencial y el trabajo eléctrico.

**Contraste.** Inicialmente $Q = 2{,}00\,\mathrm{nC}$ y $U = 0{,}100\,\mu\mathrm{J}$. Tras la inserción, $C = 40{,}0\,\mathrm{pF}$, la carga libre conserva su magnitud, el voltaje vale 50,0 V y la energía es $0{,}0500\,\mu\mathrm{J}$. En el modelo de prueba, $\Delta U = q\Delta V = (-1{,}00\times10^{-12})(50{,}0) = -5{,}00\times10^{-11}\,\mathrm{J}$ y $W_{\mathrm{el}} = +5{,}00\times10^{-11}\,\mathrm{J}$. La prueba tiene una carga mucho menor que la de las placas; el cálculo supone perturbación despreciable. El balance de energía de la inserción y el del traslado de la prueba describen dos procesos diferentes.

**Lecturas de apoyo.** H. D. Young y R. A. Freedman, *Física universitaria*, volumen 2, 12.ª edición, secciones 21.1–21.7, capítulo 23 y secciones 24.1–24.4. R. A. Serway y C. Vuille, *Fundamentos de física*, volumen 2, 9.ª edición, secciones 15.1–15.6 y 16.1–16.4, 16.6–16.10. Los problemas, datos y ayudas visuales se han preparado para esta obra.

# CAPÍTULO 18

# CORRIENTE ELÉCTRICA Y CIRCUITOS


18.1 Corriente: seguir la carga que atraviesa una sección . . . . . 362
18.2 Resistencia, material y temperatura . . . . . 364
18.3 Fuentes: energía por unidad de carga . . . . . 366
18.4 Potencia y energía transferida 368
18.5 Reconocer conexiones y reducir una red . . . . . 369
18.6 Leyes de Kirchhoff y elección de signos . . . . . 371
18.7 Medir también forma parte del circuito . . . . . 373
18.8 Límites de operación y decisiones de diseño . . . . . 375
Ejercicios para reconstruir y transferir 376
Soluciones razonadas . . . . . 379
Una experiencia: reconstruir conexiones y comprobar lecturas . . . 380
Diagnóstico antes de avanzar . . . . 381


Al conectar una pila a un resistor, las cargas del conductor adquieren un movimiento de deriva y la pila comienza a entregar energía. Para describir lo que ocurre necesitamos conocer cuánta carga atraviesa cada sección por segundo y qué energía se transfiere por unidad de carga. Esas dos preguntas conducirán a la corriente y al voltaje de los elementos.

Un circuito puede dibujarse de muchas maneras conservando sus conexiones. Aprenderemos a reconocerlas, a seguir el potencial por distintos recorridos y a comprobar que la energía entregada por las fuentes coincide con la que reciben los otros elementos. Las mediciones entrarán en esa misma descripción: al conectar un instrumento también estamos modificando la red.

## 18.1 Corriente: seguir la carga que atraviesa una sección

Imaginemos una sección transversal fija de un cable. La carga que la atraviesa durante un intervalo permite definir la corriente media,

$$I_{\text{med}} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}, \qquad I(t) = \frac{dQ}{dt}. \tag{18.1}$$

El ampere, símbolo A, equivale a un coulomb por segundo. La función $Q(t)$ cuenta la transferencia acumulada con signo respecto de un sentido elegido. Una corriente de 0,20 A mantenida durante 5 s corresponde al paso de 1 C de carga convencional en ese sentido. Para una corriente variable, la carga transferida es el área con signo bajo su gráfica:

$$\Delta Q = \int_{t_i}^{t_f} I(t)\, dt.$$

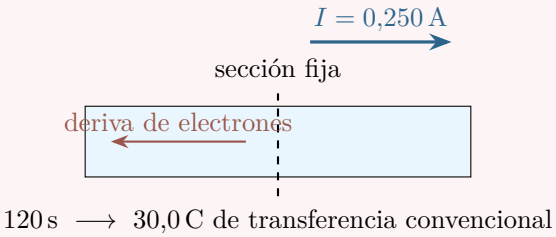
El sentido convencional de la corriente es el del transporte de carga positiva. En un metal, los portadores móviles son electrones: su deriva apunta en sentido opuesto. En una disolución pueden contribuir iones de ambos signos; un ion positivo hacia la derecha y uno negativo hacia la izquierda aportan corriente convencional hacia la derecha. Al asignar una flecha a una rama fijamos una referencia. Un valor negativo del cálculo indica corriente convencional en el sentido contrario.

**PROBLEMA RESUELTO 18.1 · Contar la transferencia de carga**

Un cable metálico conduce una corriente constante de 0,250 A durante 120 s. Halla la carga convencional transferida y el número neto de electrones que atraviesa una sección. Usa $e = 1{,}602176634 \times 10^{-19}$ C. *Resolución.* La corriente fija una tasa de transferencia, de modo que

$$\Delta Q = I\Delta t = (0{,}250)(120) = 30{,}0\,\text{C}, \qquad N = \frac{|\Delta Q|}{e} \simeq 1{,}87 \times 10^{20}.$$

Los electrones cruzan en sentido opuesto a la flecha de corriente. El conteo expresa el transporte neto durante esos dos minutos; en el cable hay además movimiento microscópico en muchas direcciones.



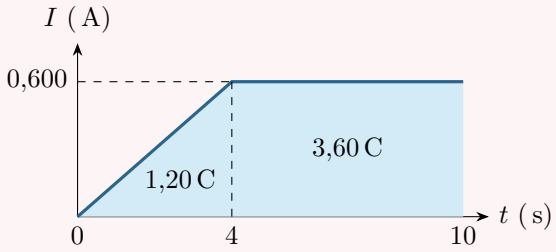

La carga convencional y el transporte de electrones se describen con sentidos opuestos en el metal.

**PROBLEMA RESUELTO 18.2 · Acumular carga con una corriente variable**

Una corriente aumenta linealmente de cero a 0,600 A entre $t = 0$ y $t = 4{,}00\,\text{s}$, y conserva ese valor hasta $t = 10{,}0\,\text{s}$. Calcula la carga transferida y la corriente media de los diez segundos. *Resolución.* El primer intervalo aporta el área de un triángulo y el segundo, la de un rectángulo:

$$\Delta Q = \frac{1}{2}(4{,}00)(0{,}600) + (6{,}00)(0{,}600) = 1{,}20 + 3{,}60 = 4{,}80\,\text{C}.$$

La corriente media es $4{,}80/10{,}0 = 0{,}480\,\text{A}$. El área reúne la transferencia de ambos intervalos y permite compararla con una corriente constante equivalente en ese tiempo.




Las áreas sombreadas dan carga: ampere multiplicado por segundo equivale a coulomb.

En un modelo uniforme, con $n$ portadores por unidad de volumen, carga de magnitud $|q|$, sección $A$ y rapidez de deriva $v_d$, durante $\Delta t$ atraviesan la sección los portadores contenidos en un volumen $Av_d\Delta t$. Por tanto, la magnitud de la corriente es

$$|I| = n|q|Av_d. \tag{18.2}$$

La rapidez de deriva describe un promedio del movimiento. Al cerrar un interruptor, el campo electromagnético se reorganiza a lo largo del circuito y pone en deriva cargas que ya estaban distribuidas por él. La propagación de esa perturbación depende del medio y de la geometría; puede ser mucho más rápida que la deriva de cada electrón. La corriente mide transferencia de carga por tiempo, mientras que $v_d$ mide distancia por tiempo.

En un conductor resistivo con corriente estacionaria hay un campo eléctrico interno que sostiene esa deriva. La condición de campo cero del capítulo anterior corresponde al equilibrio electrostático. Las interacciones de los portadores con el material transfieren energía a sus grados de libertad microscópicos y permiten una deriva media estable.

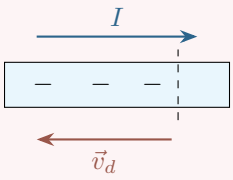
**PROBLEMA RESUELTO 18.3 · Obtener una rapidez de deriva**

Un conductor contiene $n = 8{,}00 \times 10^{28}\,\mathrm{m}^{-3}$ electrones móviles, tiene sección $1{,}00\,\mathrm{mm}^2$ y conduce 1,60 A. Calcula la rapidez de deriva.

*Resolución.* La conversión de área es $1\,\mathrm{mm}^2 = 10^{-6}\,\mathrm{m}^2$. Así,

$$v_d = \frac{1{,}60}{(8{,}00 \times 10^{28})e(10^{-6})} \simeq 1{,}25 \times 10^{-4}\,\mathrm{m/s}.$$

Un desplazamiento medio de un metro a esa rapidez tomaría aproximadamente $8{,}01 \times 10^{3}\,\mathrm{s}$, unas 2,23 h. Ese tiempo caracteriza el desplazamiento medio de portadores, y la respuesta eléctrica del circuito se establece mediante la propagación del campo.




$|I| = neAv_d$

La deriva electrónica apunta en sentido opuesto a la corriente convencional.

## 18.2 Resistencia, material y temperatura

Para estudiar un elemento de dos terminales, llamemos $a$ al terminal por el que entra la corriente de referencia $I$ y definamos $V_{ab} = V_a - V_b$. En un resistor óhmico, dentro del intervalo de operación y temperatura considerado,

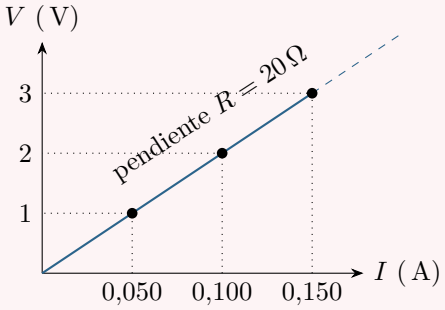
$$V_{ab} = RI. \tag{18.3}$$

La resistencia $R$ se mide en ohms: $1\,\Omega = 1\,\mathrm{V/A}$. La gráfica de $V_{ab}$ frente a $I$ es una recta que pasa por el origen, con pendiente $R$. Cuando $R > 0$, la corriente convencional atraviesa el resistor hacia potenciales menores.

La proporcionalidad expresa un comportamiento experimental de determinados elementos bajo condiciones dadas. El cociente $V/I$ también puede calcularse en un punto de operación de un dispositivo de respuesta curva, pero ese valor por sí solo describe únicamente ese punto. Una lámpara incandescente, por ejemplo, cambia considerablemente su temperatura al variar la corriente y presenta una relación voltaje–corriente que exige tomar en cuenta ese calentamiento.

**PROBLEMA RESUELTO 18.4 · Reconocer una respuesta óhmica**

Manteniendo la temperatura de un elemento, se miden los pares $(I, V) = (0{,}050\,\text{A}, 1{,}00\,\text{V})$, $(0{,}100\,\text{A}, 2{,}00\,\text{V})$ y $(0{,}150\,\text{A}, 3{,}00\,\text{V})$. Encuentra su resistencia y predice la corriente a 4,00 V si la proporcionalidad continúa. *Resolución.* Los tres cocientes son iguales: $V/I = 20{,}0\,\Omega$. Los puntos son compatibles con un modelo óhmico en el intervalo medido. Su prolongación hasta 4,00 V da $I = 4{,}00/20{,}0 = 0{,}200\,\text{A}$. La predicción mantiene explícitas la temperatura y la continuidad del modelo fuera de los datos medidos.




Los puntos medidos definen una recta en el intervalo considerado. El trazo discontinuo prolonga el modelo.

Para un alambre homogéneo, de sección uniforme, longitud $L$ y resistividad $\rho$,

$$R = \rho \frac{L}{A}. \tag{18.4}$$

La resistividad, en $\Omega\,\text{m}$, caracteriza la respuesta del material en las condiciones indicadas. Al aumentar la longitud se suma resistencia a lo largo del recorrido; al aumentar el área se ofrecen más caminos de transporte simultáneo. La resistencia depende de ambos aspectos geométricos. Si la sección es circular, $A = \pi d^2/4$, y duplicar el diámetro multiplica el área por cuatro.

**PROBLEMA RESUELTO 18.5 · Cambiar la geometría conservando material**

Un alambre tiene $\rho = 2{,}00 \times 10^{-8}\,\Omega\,\text{m}$, longitud 2,00 m y sección $0{,}500\,\text{mm}^2$. Se fabrica con el mismo volumen otro alambre de longitud 4,00 m. Supón resistividad y temperatura constantes. Calcula ambas resistencias.

*Resolución.* Inicialmente,

$$R = \frac{(2{,}00 \times 10^{-8})(2{,}00)}{0{,}500 \times 10^{-6}} = 0{,}0800\,\Omega.$$

Conservar $AL$ exige reducir la sección a $0{,}250\,\text{mm}^2$. La nueva longitud se duplica y el área se reduce a la mitad, de modo que $R' = 4R = 0{,}320\,\Omega$. Hay que seguir los dos cambios geométricos.

| | Inicial | Final |
|---|---|---|
| $L$ (m) | 2,00 | 4,00 |
| $A$ ($\text{mm}^2$) | 0,500 | 0,250 |
| $R$ ($\Omega$) | 0,0800 | 0,320 |

El volumen $AL$ y la resistividad se conservan. Los dos cambios geométricos multiplican la resistencia por cuatro.

En muchos metales, para un intervalo de temperatura suficientemente limitado, se usa la aproximación lineal

$$R(T) \simeq R_0[1 + \alpha(T - T_0)].$$

Aquí $R_0$ corresponde a $T_0$ y $\alpha$ es el coeficiente referido a esa temperatura, con unidades $\text{K}^{-1}$ o $^\circ\text{C}^{-1}$ para diferencias de temperatura. Su empleo supone que la respuesta puede aproximarse

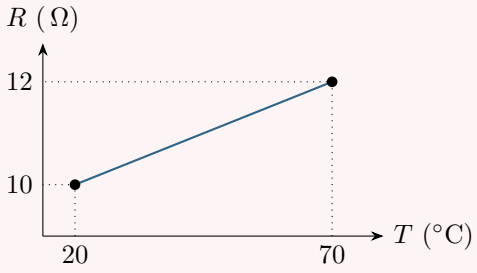
por una recta en el intervalo dado; también suele despreciar la pequeña contribución del cambio geométrico. Otros materiales pueden tener coeficientes de distinto signo y respuestas que requieren otro modelo.

**PROBLEMA RESUELTO 18.6 · Incluir el calentamiento de un resistor**

Un resistor tiene $R_0 = 10{,}0\,\Omega$ a $20{,}0\,^\circ\mathrm{C}$ y $\alpha = 4{,}00 \times 10^{-3}\,\mathrm{K}^{-1}$. El modelo lineal es válido hasta $70{,}0\,^\circ\mathrm{C}$. Halla su resistencia a esa temperatura y la corriente si se mantienen 6,00 V entre sus terminales. *Resolución.* El aumento de temperatura es 50,0 K. Por tanto,

$$R = 10{,}0[1 + (0{,}00400)(50{,}0)] = 12{,}0\,\Omega, \qquad I = \frac{6{,}00}{12{,}0} = 0{,}500\,\mathrm{A}.$$

A $20\,^\circ\mathrm{C}$ la misma diferencia de potencial produciría 0,600 A. El modelo relaciona el estado térmico con la corriente; para predecir cómo se alcanza esa temperatura haría falta además estudiar los intercambios térmicos.




Intervalo de validez indicado

La recta aproxima la resistencia entre las dos temperaturas indicadas. El origen vertical se ha recortado.

## 18.3 Fuentes: energía por unidad de carga

Un resistor con corriente transforma energía eléctrica en energía interna. Para sostener el proceso, el circuito necesita una fuente que transfiera energía a los portadores mediante procesos químicos, mecánicos u otros. La fuerza electromotriz, o fem, se define como la energía que esos procesos aportan por unidad de carga transportada en el sentido de elevación de potencial de la fuente ideal:

$$\mathcal{E} = \frac{W_{\text{fuente}}}{Q}.$$

Su unidad es el volt. El nombre histórico designa una energía por carga. Una fuente ideal mantiene entre sus terminales el voltaje $\mathcal{E}$; la corriente depende de la red conectada. Los alambres ideales de nuestros esquemas tienen resistencia despreciable y cada tramo conectado sin elementos intermedios constituye un mismo nodo, de potencial único dentro de este modelo.

En los esquemas, un rectángulo representa un resistor y un círculo con signos + y − representa una fuente ideal de voltaje. Los puntos sólidos señalan uniones de conductores. Los instrumentos de medición aparecerán como círculos con las letras A o V.

Una fuente real puede representarse, en un intervalo de operación, mediante una fem ideal $\mathcal{E}$ en serie con una resistencia interna $r$. Durante la descarga, si sale una corriente $I$ por el terminal positivo, su voltaje terminal es

$$V_{\text{term}} = \mathcal{E} - Ir. \tag{18.5}$$

Al conectar un resistor externo $R$, el balance por unidad de carga da $\mathcal{E} = I(R + r)$, luego $I = \mathcal{E}/(R + r)$. En circuito abierto, la corriente estacionaria es cero y el modelo da $V_{\text{term}} = \mathcal{E}$. La

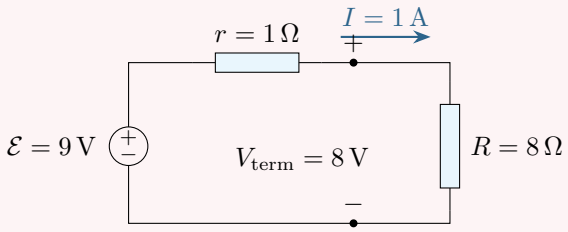
fem y $r$ de una pila real pueden cambiar con su estado de carga, su temperatura y el régimen de uso.

### PROBLEMA RESUELTO 18.7 · Separar voltaje terminal y fem

Una fuente tiene $\mathcal{E} = 9{,}00\,\text{V}$ y $r = 1{,}00\,\Omega$. Alimenta un resistor de $8{,}00\,\Omega$. Calcula la corriente, el voltaje terminal y la energía transferida por coulomb en cada parte. *Resolución.* La corriente es

$$I = \frac{9{,}00}{8{,}00 + 1{,}00} = 1{,}00\,\text{A}, \qquad V_{\text{term}} = 9{,}00 - (1{,}00)(1{,}00) = 8{,}00\,\text{V}.$$

Por cada coulomb convencional, los procesos de la fuente entregan 9 J; el resistor externo recibe 8 J y la resistencia interna, 1 J. El voltaje terminal también se comprueba con $IR = 8\,\text{V}$.




La fuente ideal eleva el potencial en 9 volt; las caídas son 1 volt interna y 8 volt externa.

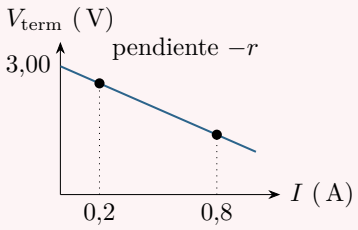
### PROBLEMA RESUELTO 18.8 · Inferir un modelo de fuente a partir de mediciones

Una fuente en descarga presenta 2,90 V cuando entrega 0,200 A y 2,60 V cuando entrega 0,800 A. Supón constantes $\mathcal{E}$ y $r$ entre ambas mediciones. Halla sus valores.

*Resolución.* Al restar $V_1 = \mathcal{E} - I_1 r$ y $V_2 = \mathcal{E} - I_2 r$, resulta

$$r = \frac{2{,}90 - 2{,}60}{0{,}800 - 0{,}200} = 0{,}500\,\Omega.$$

Entonces $\mathcal{E} = 2{,}90 + (0{,}200)(0{,}500) = 3{,}00\,\text{V}$. En la gráfica de voltaje terminal frente a corriente, la ordenada en el origen es $\mathcal{E}$ y la pendiente es $-r$.




El eje vertical está recortado. La ordenada extrapolada al origen es la fem. Cada medición relaciona una corriente con su voltaje terminal.

## 18.4 Potencia y energía transferida

Si una carga $\Delta Q$ atraviesa un elemento desde $a$ hacia $b$, la disminución de su energía potencial es $V_{ab}\Delta Q$. Con la corriente de referencia entrando por $a$, la potencia eléctrica recibida por el elemento es

$$P = V_{ab} I. \tag{18.6}$$

Esta convención permite interpretar el signo: $P > 0$ corresponde a recepción de energía eléctrica y $P < 0$, a entrega. En un resistor óhmico, sustituir $V_{ab} = RI$ produce

$$P = I^2 R = \frac{V_{ab}^2}{R}.$$

Las tres expresiones se refieren al mismo estado de operación. Para comparar estados, hay que identificar qué mantiene el circuito: una fuente de voltaje fijo y una fuente de corriente fija conducen a comparaciones diferentes.

En régimen constante, la energía transferida durante $\Delta t$ es $E_{\text{trans}} = P\Delta t$. Si la potencia varía, se integra sobre el tiempo. El joule es la unidad SI; el kilowatt-hora es otra unidad de energía, con

$$1\,\text{kWh} = 10^3\,\text{W} \times 3600\,\text{s} = 3{,}60 \times 10^6\,\text{J}.$$

El producto potencia por tiempo mide una acumulación. Al hablar de consumo de energía, seguimos su transferencia y transformación en el dispositivo y su entorno, de acuerdo con la conservación de la energía estudiada en los capítulos anteriores.

**PROBLEMA RESUELTO 18.9 · Pasar de voltaje y resistencia a energía**

Un resistor óhmico de $24{,}0\,\Omega$ se mantiene a $12{,}0\,\text{V}$ durante $5{,}00\,\text{min}$. Supón resistencia constante. Calcula corriente, potencia y energía en joules y kilowatt-horas. *Resolución.* La corriente es $I = 12{,}0/24{,}0 = 0{,}500\,\text{A}$. La potencia recibida es $P = VI = (12{,}0)(0{,}500) = 6{,}00\,\text{W}$. En $300\,\text{s}$ se transfieren

$$E_{\text{trans}} = (6{,}00)(300) = 1{,}80 \times 10^3\,\text{J} = 5{,}00 \times 10^{-4}\,\text{kWh}.$$

Si la temperatura del resistor permaneciera constante, esa energía tendría que salir hacia el entorno a la misma tasa media a la que entra, una vez alcanzado el régimen térmico estacionario.

| Magnitud | Relación | Valor |
|---|---|---|
| Corriente | $I = V/R$ | $0{,}500\,\text{A}$ |
| Potencia | $P = VI$ | $6{,}00\,\text{W}$ |
| Tiempo | $5\,\text{min}$ | $300\,\text{s}$ |
| Energía | $P\Delta t$ | $1800\,\text{J}$ |
| Energía | $E/(3{,}60 \times 10^6\,\text{J/kWh})$ | $0{,}000500\,\text{kWh}$ |

La potencia es una tasa de transferencia de energía; multiplicarla por la duración da la energía acumulada.

**PROBLEMA RESUELTO 18.10 · Comparar potencias y explicitar qué se mantiene**

Compara resistores de 6,00 Ω y 12,0 Ω cuando cada uno se conecta por separado a 6,00 V. Repite la comparación si una fuente mantiene 0,500 A en cada ensayo.

*Resolución.* A voltaje fijo, $P = V^2/R$: las potencias son 6,00 W y 3,00 W, respectivamente. A corriente fija, $P = I^2R$: son 1,50 W y 3,00 W. En el segundo ensayo la fuente ajusta el voltaje a 3,00 V o 6,00 V para sostener la misma corriente. La condición impuesta por la fuente determina cómo cambia la potencia.

| | 6 Ω | 12 Ω |
|---|---|---|
| $V = 6$ V | 6 W | 3 W |
| $I = 0{,}5$ A | 1,5 W | 3 W |

Cada fila mantiene una magnitud distinta. Los valores interiores son las potencias de cada resistor.

## 18.5 Reconocer conexiones y reducir una red

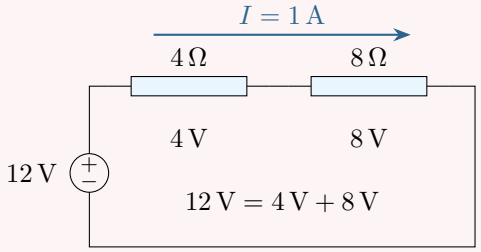
La información decisiva de un esquema reside en qué terminales están conectados. Dos resistores están en serie cuando comparten una unión sin derivaciones y, por tanto, llevan la misma corriente en régimen estacionario. El voltaje entre los extremos del conjunto se obtiene sumando las caídas:

$$V = IR_1 + IR_2 = I(R_1 + R_2), \qquad R_{\text{eq,serie}} = \sum_i R_i.$$

El equivalente reproduce la relación entre el voltaje aplicado al conjunto y la corriente que entra por sus terminales. La suma es mayor que cualquiera de sus resistencias positivas individuales.

**PROBLEMA RESUELTO 18.11 · Repartir voltajes en una conexión en serie**

Una fuente ideal de 12,0 V alimenta resistores de 4,00 Ω y 8,00 Ω en serie. Calcula la corriente, los voltajes y las potencias. *Resolución.* La resistencia equivalente es 12,0 Ω y la corriente común, 1,00 A. Los voltajes son 4,00 V y 8,00 V; su suma recupera los 12,0 V de la fuente. Las potencias son 4,00 W y 8,00 W, que suman los 12,0 W entregados. En cada resistor entra y sale la misma corriente: la transferencia de energía se manifiesta en la caída de potencial.




La unión intermedia carece de derivaciones. La corriente es común y los voltajes se suman.

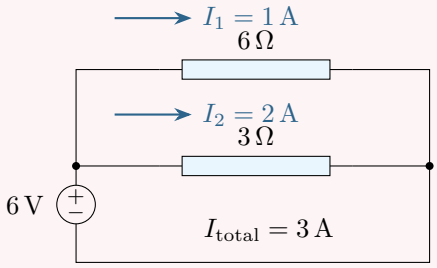
Dos resistores están en paralelo cuando sus terminales se conectan a los mismos dos nodos. Ambos tienen el mismo voltaje $V$ y las corrientes de rama se suman a la entrada. Así,

$$I = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2}, \qquad \frac{1}{R_{\text{eq,paralelo}}} = \sum_i \frac{1}{R_i}.$$

Para dos resistores, $R_{\text{eq}} = R_1 R_2/(R_1 + R_2)$. Agregar una rama conductora ofrece otra vía a la corriente y reduce la resistencia equivalente por debajo de la menor resistencia individual positiva. Esa conclusión supone los mismos dos nodos de comparación.

**PROBLEMA RESUELTO 18.12 · Repartir corrientes en una conexión en paralelo**

Resistores de 6,00 Ω y 3,00 Ω se conectan en paralelo a una fuente ideal de 6,00 V. Obtén las corrientes y verifica la potencia total. *Resolución.* Cada rama tiene 6,00 V. Sus corrientes son $I_1 = 6/6 = 1{,}00$ A e $I_2 = 6/3 = 2{,}00$ A. La fuente entrega $I = 3{,}00$ A, coherente con $R_{\text{eq}} = 2{,}00\,\Omega$. Las potencias son 6,00 W y 12,0 W, cuya suma 18,0 W coincide con $VI$. Cada rama aporta su propia transferencia de energía por segundo.




Ambas ramas comparten sus dos nodos. El voltaje es común y las corrientes se suman.

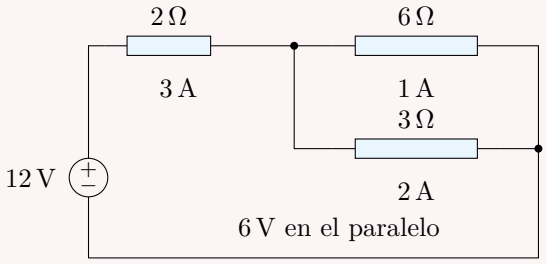
Para reducir una red mixta, conviene marcar primero los nodos unidos por alambres ideales y buscar grupos que satisfagan las condiciones anteriores. Después de cada sustitución se vuelve a examinar la conexión. Una vez obtenida la corriente total, se recorre la reducción en sentido inverso para recuperar voltajes y corrientes de rama. La posición de los símbolos en la página puede cambiar libremente mientras se conserven esos nodos.

**PROBLEMA RESUELTO 18.13 · Resolver un circuito mixto y reconstruir sus ramas**

Una fuente ideal de 12,0 V alimenta $R_0 = 2{,}00\,\Omega$ en serie con el paralelo de $R_1 = 6{,}00\,\Omega$ y $R_2 = 3{,}00\,\Omega$. Calcula todas las corrientes y potencias. *Resolución.* El paralelo equivale a $2{,}00\,\Omega$, así que el conjunto equivale a $4{,}00\,\Omega$ y toma 3,00 A. En $R_0$ caen $(3)(2) = 6{,}00$ V y quedan 6,00 V para el paralelo. Sus corrientes son 1,00 A y 2,00 A, cuya suma recupera los 3,00 A de entrada. Las potencias resultan

$$P_0 = 18{,}0\,\text{W}, \qquad P_1 = 6{,}00\,\text{W}, \qquad P_2 = 12{,}0\,\text{W}.$$

La suma es $36{,}0\,\text{W} = (12{,}0\,\text{V})(3{,}00\,\text{A})$. Conocer únicamente la resistencia equivalente permite calcular la corriente total; reconstruir la red permite conocer el estado de cada elemento.




El resistor de 2 ohms conduce la suma de las dos corrientes de rama. La fuente mantiene 12 volt.

## 18.6 Leyes de Kirchhoff y elección de signos

La conservación de la carga en una región que contiene una unión exige

$$\frac{dQ_{\text{nodo}}}{dt} = \sum I_{\text{entra}} - \sum I_{\text{sale}}.$$

En el régimen estacionario que estudiamos, la carga del nodo permanece constante y la suma de corrientes entrantes iguala la de salientes. Esta es la ley de nodos de Kirchhoff. La pequeña redistribución superficial que establece los campos y potenciales del circuito ocurre durante el proceso de conexión; el modelo estacionario describe el estado posterior.

La ley de recorridos cerrados establece que la suma algebraica de cambios de potencial en un lazo es cero. Se aplica aquí al modelo de elementos concentrados, con régimen estacionario y efectos de inducción variables despreciables. Partir de un punto y regresar al mismo punto exige recuperar su potencial. Una fuente ideal se representa por un aumento $+\mathcal{E}$ al recorrerla del terminal negativo al positivo, o por $-\mathcal{E}$ en el recorrido opuesto. En un resistor, avanzar en el sentido de su corriente de referencia aporta $-IR$, y avanzar al contrario aporta $+IR$.

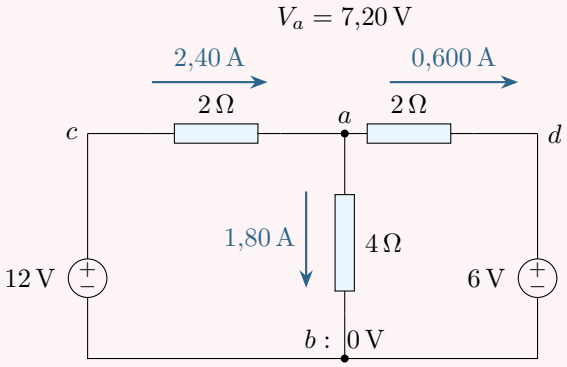
Las flechas y los sentidos de recorrido pueden elegirse antes de conocer la solución. Lo necesario es conservarlos en todas las ecuaciones. Los resultados con signo permiten recuperar el sentido físico y comprobar que cada resistor recibe potencia $I^2R$. Una red con varios lazos puede resolverse mediante ecuaciones de nodos o mediante un conjunto independiente de ecuaciones de lazo, junto con las relaciones entre corrientes.

**PROBLEMA RESUELTO 18.14 · Resolver un nodo alimentado por dos fuentes**

Toma un nodo inferior $b$ como 0 V. Una fuente ideal fija un terminal $c$ a 12,0 V y otra fija un terminal $d$ a 6,00 V. Hay un resistor de 2,00 Ω entre $c$ y un nodo $a$, uno de 2,00 Ω entre $a$ y $d$, y uno de 4,00 Ω entre $a$ y $b$. Los terminales negativos de ambas fuentes están unidos a $b$. Halla el potencial de $a$ y las corrientes. *Resolución.* Definimos las tres corrientes de referencia saliendo de $a$. La ley de nodos da

$$\frac{V_a - 12}{2} + \frac{V_a - 6}{2} + \frac{V_a}{4} = 0, \qquad 5V_a = 36, \qquad V_a = 7{,}20\,\text{V}.$$

En la rama hacia $c$ se obtiene −2,40 A: físicamente entran 2,40 A desde la fuente de 12 V. Salen 0,600 A hacia $d$ y 1,80 A hacia $b$. Se verifica $2{,}40 = 0{,}600 + 1{,}80$.
La fuente de 12 V entrega 28,8 W. La de 6 V recibe 3,60 W, pues la corriente entra por su terminal positivo. Los resistores reciben 11,52 W, 0,720 W y 12,96 W, que suman 25,20 W. El balance es $28{,}8 = 25{,}2 + 3{,}6$. La fuente ideal receptora representa un elemento capaz de absorber esa energía; la posibilidad de recargar una batería concreta exige además que su tecnología y control lo permitan.




Las flechas muestran las corrientes físicas obtenidas. Ambas fuentes tienen su terminal positivo arriba.

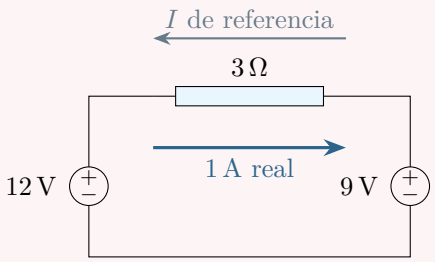
También podemos resolver el problema anterior con dos corrientes de lazo, $i_1$ en el lazo izquierdo e $i_2$ en el derecho, ambas en sentido horario. El resistor central conduce $i_1 - i_2$ hacia abajo. Las ecuaciones son $6i_1 - 4i_2 = 12$ y $-4i_1 + 6i_2 = -6$. Dan $i_1 = 2{,}40$ A e $i_2 = 0{,}600$ A. El mismo circuito admite distintas incógnitas; los voltajes y las corrientes físicas coinciden.

**PROBLEMA RESUELTO 18.15 · Interpretar una corriente de referencia negativa**

Dos fuentes ideales de 12,0 V y 9,00 V se conectan en oposición en un único lazo, con una resistencia total de 3,00 Ω. Elige como referencia una corriente que recorra la fuente de 9 V de negativo a positivo y la de 12 V de positivo a negativo. Calcula e interpreta el resultado.
*Resolución.* Con esa referencia, la ecuación del lazo es

$$9 - 12 - 3I = 0, \qquad I = -1{,}00\,\text{A}.$$

La corriente real tiene magnitud 1,00 A y sentido opuesto al elegido: sale del terminal positivo de la fuente de 12 V y entra en el positivo de la de 9 V. La primera entrega 12,0 W, la segunda recibe 9,00 W y el resistor recibe 3,00 W. La ecuación con signo conserva la elección inicial y el balance de energía verifica su interpretación.




Con la flecha elegida, $I = -1$ A indica una corriente convencional de 1 A en el sentido opuesto. La fuente de 12 V entrega energía y la de 9 V la recibe.

## 18.7 Medir también forma parte del circuito

Un amperímetro se intercala en la rama cuya corriente se quiere medir. En el modelo ideal su resistencia es cero, así que reemplaza un tramo de alambre sin añadir caída de potencial. Un voltímetro se conecta entre los dos puntos cuyo voltaje se quiere conocer; en el modelo ideal su resistencia es infinita y su corriente es cero. Esas idealizaciones permiten atribuir la lectura al circuito original.

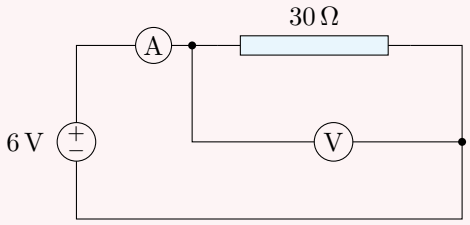
Los instrumentos reales tienen resistencias de entrada finitas y otras limitaciones. Para incluir su efecto, se incorporan como elementos de la red: la resistencia del amperímetro queda en serie y la del voltímetro, en paralelo con la parte medida. La precisión del valor mostrado y la perturbación que produce el instrumento son cuestiones relacionadas, pero diferentes. Un instrumento puede leer con mucha precisión el voltaje del circuito que él mismo ha modificado.

### PROBLEMA RESUELTO 18.16 · Comparar amperímetros ideal y real

Una fuente ideal de 6,00 V alimenta un resistor de 30,0 Ω. Un voltímetro ideal se conecta entre los extremos del resistor. Halla las lecturas con un amperímetro ideal en serie y luego con uno de resistencia 2,00 Ω. *Resolución.* Con instrumentos ideales, el amperímetro lee $6/30 = 0{,}200$ A y el voltímetro, 6,00 V. Con el amperímetro real, la resistencia total pasa a 32,0 Ω, luego

$$I = \frac{6{,}00}{32{,}0} = 0{,}1875\,\text{A}, \qquad V_R = (0{,}1875)(30{,}0) = 5{,}625\,\text{V}.$$

Los otros 0,375 V caen en el amperímetro. La corriente disminuye un 6,25 % respecto del circuito con amperímetro ideal. El voltímetro continúa conectado exclusivamente entre los extremos del resistor de 30 Ω.




A en serie; V entre los extremos del resistor

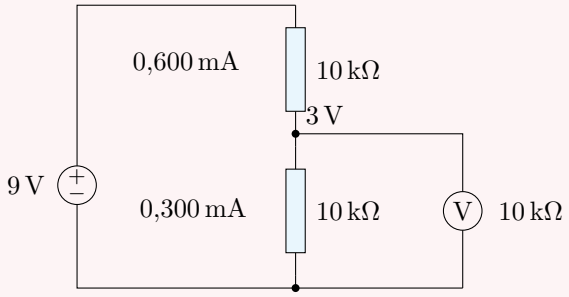
El voltímetro tiene resistencia infinita en ambos ensayos. Solo cambia la resistencia del amperímetro.

### PROBLEMA RESUELTO 18.17 · Calcular el efecto de conectar un voltímetro

Dos resistores de 10,0 kΩ están en serie a una fuente ideal de 9,00 V. Se conecta un voltímetro de resistencia 10,0 kΩ entre los extremos del resistor inferior. Calcula su lectura y compárala con el voltaje anterior a conectarlo. *Resolución.* Antes de medir, la corriente es $9/20\,000 = 0{,}450$ mA y cada resistor tiene 4,50 V. Al conectar el instrumento, este queda en paralelo con el resistor inferior: ambos equivalen a 5,00 kΩ. La corriente que pasa por el resistor superior aumenta a $9/15\,000 = 0{,}600$ mA. El voltaje inferior y la lectura son

$$V_{\text{lectura}} = (0{,}600\,\text{mA})(5{,}00\,\text{k}\Omega) = 3{,}00\,\text{V}.$$

Por el resistor inferior y por el voltímetro pasan 0,300 mA en cada rama. La lectura es dos tercios del voltaje previo. Una resistencia de entrada mucho mayor que la del tramo medido reduciría esta perturbación.




El voltímetro aporta una segunda rama de 10 kiloohms sobre el resistor inferior y reduce el voltaje medido.

## 18.8 Límites de operación y decisiones de diseño

Las ecuaciones de una red deben contrastarse con los límites de sus componentes. Un resistor tiene una potencia nominal que depende de las condiciones térmicas especificadas; los cables y las fuentes también tienen límites de corriente. Para un resistor ideal de valor constante, una cota de potencia $P_{\text{máx}}$ permite obtener $|I| \le \sqrt{P_{\text{máx}}/R}$ y $|V| \le \sqrt{P_{\text{máx}}R}$. En un montaje real se consideran además tolerancias, ventilación y condiciones de uso.

La conexión directa de un amperímetro de baja resistencia entre los terminales de una fuente crea una rama de corriente potencialmente muy elevada. Su lugar de medición es en serie, con rango, bornes y protección apropiados. Un cortocircuito ofrece un camino de resistencia pequeña que puede llevar la fuente y los conductores fuera de sus límites. En el modelo de fuente con resistencia interna, $I = \mathcal{E}/(R+r)$ aumenta al reducirse $R$; cerca del cortocircuito pueden hacerse importantes efectos térmicos y limitaciones que ese modelo simple omite.

Los límites nominales de un componente y la seguridad de una persona describen problemas diferentes. Esta depende de la trayectoria de corriente, del contacto, del entorno y del tiempo de exposición, entre otros factores. Las prácticas de este capítulo se restringen a fuentes de laboratorio de baja tensión y energía limitada o a simulaciones, con supervisión y componentes adecuados. Las instalaciones conectadas a la red requieren personal competente y protecciones reglamentarias. El cálculo elemental de un circuito sirve para interpretar su funcionamiento dentro de las hipótesis establecidas.

**PROBLEMA RESUELTO 18.18 · Comprobar límites en una red de baja tensión**

Una fuente regulada mantiene 12,0 V hasta una corriente total de 50,0 mA. Se conectan ramas iguales, cada una con un resistor de 1,20 kΩ y potencia nominal 0,250 W en las condiciones especificadas. Calcula el máximo número de ramas permitido por esos dos límites ideales y el estado de operación con cuatro ramas. Supón valores exactos para esta comprobación. *Resolución.* Cada rama toma $12/1200 = 0{,}0100$ A y recibe $12^2/1200 = 0{,}120$ W, dentro de la potencia indicada. El límite de corriente admite $50/10 = 5$ ramas en este modelo. Con cuatro ramas,

$$R_{\text{eq}} = 300\,\Omega, \qquad I_{\text{total}} = 40{,}0\,\text{mA}, \qquad P_{\text{total}} = 0{,}480\,\text{W}.$$

Quedan 10,0 mA hasta la cota de corriente. Una sexta rama exigiría 60 mA si el voltaje continuara en 12 V, y esa exigencia supera el intervalo regulado declarado. El estado real entonces dependería de la respuesta de protección de la fuente. La comprobación realizada usa las condiciones nominales dadas; un diseño concreto debe incluir sus tolerancias y condiciones térmicas.

| Estado | $I_{\text{total}}$ | $P_{\text{total}}$ | Cota de corriente |
|---|---|---|---|
| Una rama | 10 mA | 0,120 W | Dentro |
| Cuatro ramas | 40 mA | 0,480 W | Dentro |
| Cinco ramas | 50 mA | 0,600 W | En el límite |
| Seis ramas a 12 V | 60 mA | 0,720 W | Excede |

Cada resistor recibe 0,120 watt mientras se mantienen 12 volt. La última fila expresa una exigencia fuera del intervalo regulado.

## Ejercicios para reconstruir y transferir

Usa $e = 1{,}602176634 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$. Supón alambres ideales, resistores óhmicos de valor constante y fuentes ideales, salvo indicación explícita. Las fem indicadas son positivas del terminal negativo al positivo. Representa los nodos antes de reducir una red.

**EJERCICIO 18.1 · Una corriente durante un intervalo**

Por un cable metálico pasan $0{,}0800\,\mathrm{A}$ durante $75{,}0\,\mathrm{s}$. Calcula la carga convencional transferida y el conteo neto de electrones que cruza una sección.

**EJERCICIO 18.2 · El área de un trapecio**

Una corriente aumenta linealmente desde $0{,}200\,\mathrm{A}$ a $0{,}600\,\mathrm{A}$ en $5{,}00\,\mathrm{s}$. Halla la carga transferida y la corriente media.

**EJERCICIO 18.3 · Deriva y sección**

Un conductor tiene $n = 5{,}00 \times 10^{28}\,\mathrm{m^{-3}}$ electrones móviles, sección $2{,}00\,\mathrm{mm^2}$ y corriente $0{,}800\,\mathrm{A}$. Calcula $v_d$ y predice su cambio si la sección se reduce a la mitad manteniendo $n$ e $I$.

**EJERCICIO 18.4 · Una recta de operación**

A temperatura fija se miden $(V, I) = (2{,}00\,\mathrm{V}, 0{,}100\,\mathrm{A})$, $(4{,}00\,\mathrm{V}, 0{,}200\,\mathrm{A})$ y $(6{,}00\,\mathrm{V}, 0{,}300\,\mathrm{A})$. Halla $R$ y la corriente predicha a $12{,}0\,\mathrm{V}$ si continúa el modelo óhmico.

**EJERCICIO 18.5 · Tres cocientes diferentes**

Un dispositivo presenta $(V, I) = (1{,}00\,\mathrm{V}, 0{,}100\,\mathrm{A})$, $(2{,}00\,\mathrm{V}, 0{,}160\,\mathrm{A})$ y $(3{,}00\,\mathrm{V}, 0{,}200\,\mathrm{A})$. Calcula $V/I$ en cada punto y evalúa si un único resistor óhmico representa los tres datos exactamente.

**EJERCICIO 18.6 · Resistencia de un alambre**

Un alambre uniforme tiene $\rho = 1{,}50 \times 10^{-6}\,\Omega\,\mathrm{m}$, $L = 0{,}800\,\mathrm{m}$ y $A = 0{,}200\,\mathrm{mm^2}$. Calcula su resistencia.

**EJERCICIO 18.7 · Triplicar la longitud con el mismo volumen**

Se rehace un alambre con el triple de longitud y el mismo volumen. Se conservan material, temperatura y resistividad. Encuentra $A'/A$ y $R'/R$.

**EJERCICIO 18.8 · Una resistencia a otra temperatura**

Un resistor tiene $100\,\Omega$ a $20{,}0\,^\circ\mathrm{C}$ y $\alpha = 3{,}00 \times 10^{-3}\,\mathrm{K}^{-1}$. Calcula $R$ a $70{,}0\,^\circ\mathrm{C}$ usando el modelo lineal en ese intervalo.

**EJERCICIO 18.9 · Una fuente con resistencia interna**

Una fuente de fem $6{,}00\,\mathrm{V}$ y resistencia interna $0{,}500\,\Omega$ alimenta $2{,}50\,\Omega$. Halla $I$, $V_{\mathrm{term}}$, la potencia aportada por la fem y las potencias recibidas por ambas resistencias.

**EJERCICIO 18.10 · Dos mediciones de una fuente**

Una fuente en descarga tiene $4{,}40\,\mathrm{V}$ al entregar $0{,}200\,\mathrm{A}$ y $4{,}00\,\mathrm{V}$ al entregar $0{,}600\,\mathrm{A}$. Obtén $\mathcal{E}$ y $r$ en el modelo lineal.

**EJERCICIO 18.11 · Energía en un resistor**

Un resistor de $50{,}0\,\Omega$ permanece a $10{,}0\,\mathrm{V}$ durante $15{,}0\,\mathrm{min}$. Calcula $I$, $P$ y la energía en joules y kilowatt-horas.

**EJERCICIO 18.12 · Potencia y tiempo de uso**

Un dispositivo recibe una potencia constante de $60{,}0\,\mathrm{W}$ durante $2{,}00\,\mathrm{h}$. Expresa la energía transferida en kilowatt-horas y joules.

**EJERCICIO 18.13 · Reducir resistencia a voltaje fijo**

Un resistor conectado a una fuente de voltaje fijo se reemplaza por otro cuya resistencia es la mitad. Halla los factores de cambio de corriente y potencia.

**EJERCICIO 18.14 · Dos resistores en serie**

Una fuente de $24{,}0\,\mathrm{V}$ alimenta resistores de $3{,}00\,\Omega$ y $9{,}00\,\Omega$ en serie. Calcula corriente, voltajes y potencias individuales.

**EJERCICIO 18.15 · Dos resistores en paralelo**

Resistores de $4{,}00\,\Omega$ y $12{,}0\,\Omega$ comparten los terminales de una fuente de $12{,}0\,\mathrm{V}$. Halla $R_{\mathrm{eq}}$, corrientes y potencia total.

**EJERCICIO 18.16 · Reconstruir un circuito mixto**

Una fuente de $21{,}0\,\mathrm{V}$ alimenta $3{,}00\,\Omega$ en serie con el paralelo de $6{,}00\,\Omega$ y $12{,}0\,\Omega$. Encuentra las corrientes, los voltajes y las potencias de los tres resistores.

**EJERCICIO 18.17 · Leer conexiones por sus nodos**

Un resistor de 2,00 Ω conecta $a$ con $b$ y uno de 4,00 Ω conecta $b$ con $c$. Solo esos dos elementos llegan a $b$. Un tercer resistor de 6,00 Ω conecta $a$ con $c$. Encuentra la resistencia equivalente entre $a$ y $c$ y dibuja una representación del circuito.

**EJERCICIO 18.18 · Balance de corrientes en una unión**

En régimen estacionario entran 0,700 A en un nodo. Salen 0,200 A por una rama y 0,100 A por otra. Halla la corriente de una tercera rama y su sentido.

**EJERCICIO 18.19 · Un nodo entre dos fuentes**

Repite la conexión del problema 18.14 con $V_c = 10{,}0\,\text{V}$, $V_d = 4{,}00\,\text{V}$, resistores laterales de 2,00 Ω y resistor central de 5,00 Ω. Halla $V_a$ y las corrientes físicas de las tres ramas.

**EJERCICIO 18.20 · Fuentes en oposición**

En un único lazo hay fuentes ideales de 8,00 V y 5,00 V en oposición, y una resistencia total de 6,00 Ω. Halla la corriente e identifica la potencia entregada o recibida por cada elemento.

**EJERCICIO 18.21 · La resistencia del amperímetro**

Una fuente de 5,00 V alimenta 9,00 Ω. Se intercala en serie un amperímetro de 1,00 Ω y se mide con un voltímetro ideal el voltaje del resistor de 9 Ω. Halla ambas lecturas y compáralas con las del amperímetro ideal.

**EJERCICIO 18.22 · Un voltímetro sobre un divisor**

Una fuente de 12,0 V alimenta en serie un resistor superior de 20,0 kΩ y uno inferior de 10,0 kΩ. Un voltímetro de 20,0 kΩ se conecta en paralelo con el inferior. Halla el voltaje inferior antes y después de conectar el instrumento.

**EJERCICIO 18.23 · Comprobar corriente y potencia nominal**

Una fuente regulada de 5,00 V admite hasta 40,0 mA. Cada rama conectada en paralelo contiene 500 Ω con potencia nominal 0,250 W. Usando los valores indicados como exactos, calcula el máximo número de ramas compatible con ambos límites y la potencia total en ese estado.

**EJERCICIO 18.24 · Abrir una rama de un paralelo**

Resistores de 6,00 Ω y 3,00 Ω están en paralelo a 6,00 V. La rama de 3 Ω queda abierta. Compara corrientes y potencias totales antes y después, y explica qué ocurre con la corriente del resistor de 6 Ω.

## Soluciones razonadas

**SOLUCIÓN 18.1.**
La transferencia convencional es $\Delta Q = (0{,}0800)(75{,}0) = 6{,}00\,\mathrm{C}$. El conteo neto es $N = 6/e \simeq 3{,}74 \times 10^{19}$ electrones, con deriva opuesta al sentido convencional.

**SOLUCIÓN 18.2.**
La corriente media de una variación lineal es la media de los extremos: $I_{\mathrm{med}} = (0{,}200 + 0{,}600)/2 = 0{,}400\,\mathrm{A}$. El área del trapecio da $\Delta Q = (0{,}400)(5{,}00) = 2{,}00\,\mathrm{C}$.

**SOLUCIÓN 18.3.**
$v_d = I/(neA) = 0{,}800/[(5{,}00 \times 10^{28})e(2{,}00 \times 10^{-6})] \simeq 4{,}99 \times 10^{-5}\,\mathrm{m/s}$. Mantener la corriente con la mitad de sección exige duplicar la rapidez de deriva, a $9{,}99 \times 10^{-5}\,\mathrm{m/s}$.

**SOLUCIÓN 18.4.**
Los tres cocientes dan $R = 20{,}0\,\Omega$. La prolongación del modelo a 12,0 V predice $I = 0{,}600\,\mathrm{A}$ bajo las condiciones estipuladas.

**SOLUCIÓN 18.5.**
Los cocientes son $10{,}0\,\Omega$, $12{,}5\,\Omega$ y $15{,}0\,\Omega$. La resistencia que reproduce cada punto cambia entre ellos; los tres datos requieren una respuesta más general que un único resistor óhmico de valor fijo.

**SOLUCIÓN 18.6.**
Convertir el área da $A = 2{,}00 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}^2$. Así, $R = (1{,}50 \times 10^{-6})(0{,}800)/(2{,}00 \times 10^{-7}) = 6{,}00\,\Omega$.

**SOLUCIÓN 18.7.**
Conservar volumen implica $A'L' = AL$, luego $A'/A = 1/3$. La razón de resistencias es $(L'/L)(A/A') = 3 \times 3 = 9$.

**SOLUCIÓN 18.8.**
El incremento térmico es 50,0 K. Resulta $R = 100[1 + (0{,}00300)(50{,}0)] = 115\,\Omega$.

**SOLUCIÓN 18.9.**
$I = 6/(2{,}50 + 0{,}500) = 2{,}00\,\mathrm{A}$ y $V_{\mathrm{term}} = IR = 5{,}00\,\mathrm{V}$. La fem aporta $\mathcal{E}I = 12{,}0\,\mathrm{W}$; las resistencias reciben $I^2r = 2{,}00\,\mathrm{W}$ e $I^2R = 10{,}0\,\mathrm{W}$. Las potencias recibidas suman la entregada.

**SOLUCIÓN 18.10.**
$r = (4{,}40 - 4{,}00)/(0{,}600 - 0{,}200) = 1{,}00\,\Omega$ y $\mathcal{E} = 4{,}40 + (0{,}200)(1{,}00) = 4{,}60\,\mathrm{V}$. Ambos puntos satisfacen $V = \mathcal{E} - Ir$.

**SOLUCIÓN 18.11.**
$I = 10/50 = 0{,}200\,\mathrm{A}$ y $P = VI = 2{,}00\,\mathrm{W}$. En 900 s se transfieren $1800\,\mathrm{J} = 5{,}00 \times 10^{-4}\,\mathrm{kWh}$.

**SOLUCIÓN 18.12.**
$E_{\mathrm{trans}} = (0{,}0600\,\mathrm{kW})(2{,}00\,\mathrm{h}) = 0{,}120\,\mathrm{kWh} = 4{,}32 \times 10^5\,\mathrm{J}$. La duración convierte la potencia en energía acumulada.

**SOLUCIÓN 18.13.**
A voltaje fijo, $I = V/R$ y $P = V^2/R$. Reducir la resistencia a la mitad duplica ambas magnitudes.

**SOLUCIÓN 18.14.**
$R_{\mathrm{eq}} = 12{,}0\,\Omega$ e $I = 2{,}00\,\mathrm{A}$. Los voltajes son 6,00 V y 18,0 V, y las potencias, 12,0 W y 36,0 W. Sus sumas verifican 24 V y $48\,\mathrm{W} = VI$.

**SOLUCIÓN 18.15.**
El paralelo equivale a $3{,}00\,\Omega$. Las corrientes son 3,00 A y 1,00 A, con total 4,00 A. La potencia total es 48,0 W, igual a la suma de 36,0 W y 12,0 W.

**SOLUCIÓN 18.16.**
El paralelo equivale a $4{,}00\,\Omega$ y el total a $7{,}00\,\Omega$. La corriente total es 3,00 A. En el resistor de $3\,\Omega$ caen 9,00 V y se reciben 27,0 W. El paralelo tiene 12,0 V: pasan 2,00 A por $6\,\Omega$ y 1,00 A por $12\,\Omega$, con potencias 24,0 W y 12,0 W. La suma es $63{,}0\,\mathrm{W} = (21)(3)$.

**SOLUCIÓN 18.17.**
El nodo $b$ sin derivación pone en serie $2\,\Omega$ y $4\,\Omega$, con equivalente $6\,\Omega$ entre $a$ y $c$. Esa rama está en paralelo con el tercer resistor de $6\,\Omega$, y el conjunto equivale a $3{,}00\,\Omega$. El dibujo puede mostrar dos caminos de $a$ a $c$, uno con los dos resistores consecutivos y el otro con el tercero.

**SOLUCIÓN 18.18.**
La corriente restante sale del nodo y vale $0{,}700 - 0{,}200 - 0{,}100 = 0{,}400\,\text{A}$. Con ella se conserva la carga del nodo en el régimen dado.
**SOLUCIÓN 18.19.**
La ecuación $(V_a - 10)/2 + (V_a - 4)/2 + V_a/5 = 0$ da $V_a = 35/6\,\text{V} \simeq 5{,}83\,\text{V}$. Desde el terminal de $10\,\text{V}$ entran $25/12\,\text{A} \simeq 2{,}08\,\text{A}$; salen $11/12\,\text{A} \simeq 0{,}917\,\text{A}$ hacia el de $4\,\text{V}$ y $7/6\,\text{A} \simeq 1{,}17\,\text{A}$ hacia el nodo inferior. Los valores exactos verifican el balance.
**SOLUCIÓN 18.20.**
La fem neta en el sentido impulsado por la fuente de $8\,\text{V}$ es $8 - 5 = 3\,\text{V}$, de modo que $I = 3/6 = 0{,}500\,\text{A}$. La fuente mayor entrega $4{,}00\,\text{W}$, la menor recibe $2{,}50\,\text{W}$ y el resistor recibe $1{,}50\,\text{W}$.
**SOLUCIÓN 18.21.**
La resistencia total es $10\,\Omega$ y el amperímetro lee $0{,}500\,\text{A}$. El voltímetro lee $(0{,}500)(9) = 4{,}50\,\text{V}$. Con amperímetro ideal las lecturas serían $5/9\,\text{A} \simeq 0{,}556\,\text{A}$ y $5{,}00\,\text{V}$.
**SOLUCIÓN 18.22.**
Sin voltímetro, el divisor da $V = 12(10)/(20 + 10) = 4{,}00\,\text{V}$. Conectado el instrumento, la parte inferior equivale a $(10)(20)/(10 + 20) = 20/3\,\text{k}\Omega$. El voltaje inferior es $12(20/3)/(20 + 20/3) = 3{,}00\,\text{V}$. La corriente del resistor superior aumenta de $0{,}400\,\text{mA}$ a $0{,}450\,\text{mA}$.
**SOLUCIÓN 18.23.**
Cada rama toma $5/500 = 10{,}0\,\text{mA}$ y recibe $5^2/500 = 0{,}0500\,\text{W}$. La cota de corriente admite cuatro ramas, con potencia total $0{,}200\,\text{W}$. Una quinta exigiría $50{,}0\,\text{mA}$ si la fuente mantuviera su voltaje, fuera del intervalo declarado.
**SOLUCIÓN 18.24.**
Antes de la apertura, las corrientes de rama son $1{,}00\,\text{A}$ y $2{,}00\,\text{A}$, con total $3{,}00\,\text{A}$ y potencia $18{,}0\,\text{W}$. Después solo conduce el resistor de $6\,\Omega$: el total pasa a $1{,}00\,\text{A}$ y $6{,}00\,\text{W}$. Su propia corriente permanece en $1{,}00\,\text{A}$ porque conserva $6\,\text{V}$ entre sus terminales con la fuente ideal indicada.

## Una experiencia: reconstruir conexiones y comprobar lecturas

### Dos dibujos del mismo circuito

Usa un simulador o un equipo docente con fuente regulada de baja tensión y limitación de corriente, bajo supervisión. En el montaje físico, selecciona resistores y rangos de instrumentos apropiados con el docente y realiza las conexiones con la fuente desconectada. Se excluyen los experimentos con la red eléctrica.

Dibuja dos resistores en serie y después cambia su posición en el papel conservando exactamente los nodos. Predice corrientes y voltajes antes de observar las lecturas. Repite el procedimiento con una conexión en paralelo. En cada caso, contrasta la suma de caídas de potencial de un recorrido cerrado y el balance de corrientes de una unión. Para estudiar el efecto de los instrumentos, modifica sus resistencias de entrada en la simulación y vuelve a calcular la red resultante. Registra qué conexiones conservaste, qué condición mantuvo la fuente y qué cambió al medir.

## Diagnóstico antes de avanzar

Una fuente de $\mathcal{E} = 12{,}0\,\text{V}$ y $r = 1{,}00\,\Omega$ alimenta un resistor de $3{,}00\,\Omega$ en serie con el paralelo de $12{,}0\,\Omega$ y $6{,}00\,\Omega$. Halla las corrientes, el voltaje terminal y las potencias. Predice qué leería un voltímetro ideal sobre el paralelo y cómo cambiaría esa lectura si la rama de $6\,\Omega$ quedara abierta.

**Contraste.** El paralelo equivale a $4\,\Omega$; la resistencia externa es $7\,\Omega$ y la total, $8\,\Omega$. La corriente es 1,50 A y el voltaje terminal, 10,5 V. El resistor de $3\,\Omega$ tiene 4,50 V y el paralelo, 6,00 V. Sus corrientes son 0,500 A y 1,00 A. La fuente aporta 18,0 W; la resistencia interna recibe 2,25 W y las externas, 6,75 W, 3,00 W y 6,00 W, que suman 15,75 W. El voltímetro ideal lee 6,00 V. Al abrir la rama de $6\,\Omega$, la resistencia total pasa a $16\,\Omega$, la corriente baja a 0,750 A y la lectura sobre el resistor restante de $12\,\Omega$ aumenta a 9,00 V. La menor corriente total reduce las caídas en las resistencias que quedan en serie con él. Su potencia aumenta de 3,00 W a 6,75 W.

**Lecturas de apoyo.** H. D. Young y R. A. Freedman, *Física universitaria*, volumen 2, 12.ª edición, capítulo 25 y secciones 26.1–26.3. R. A. Serway y C. Vuille, *Fundamentos de física*, volumen 2, 9.ª edición, secciones 17.1–17.6, 18.1–18.4 y 18.6–18.7. Los problemas, los datos y las ayudas visuales de este capítulo se han preparado para esta obra.

# CAPÍTULO 19

# MAGNETISMO E INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA


19.1 Campo magnético y fuerza sobre una carga . . . . . 383
19.2 Trayectorias y campos cruzados 384
19.3 Fuerza sobre conductores y giro de una espira . . . . . 386
19.4 Campos generados por corrientes 388
19.5 Flujo: orientar una superficie . 390
19.6 Faraday y Lenz: responder a un cambio de flujo . . . . . 391
19.7 Movimiento, generación y balance de energía . . . . . 394
19.8 Autoinducción y campos que se propagan . . . . . 396
Ejercicios para reconstruir y transferir 398
Soluciones razonadas . . . . . 401
Una experiencia: observar el sentido de la inducción . . . . . 403
Diagnóstico antes de avanzar . . . . 403


Una corriente desvía una brújula y un imán en movimiento puede producir corriente en una bobina. El primer fenómeno permite reconocer el campo magnético de las cargas que se mueven; el segundo conecta la variación de ese campo con la transferencia de energía eléctrica. Su descripción exige seguir direcciones, orientar superficies y distinguir el valor de una magnitud de su rapidez de cambio.

La fuerza magnética relaciona el movimiento de una carga con el campo que encuentra. Una corriente reúne muchas cargas en movimiento y produce a su vez un campo; al estudiar cuánto atraviesa una superficie aparece el flujo magnético. Su variación conecta el movimiento mecánico con la generación eléctrica. El almacenamiento de energía en bobinas y la propagación de ondas electromagnéticas amplían esa relación entre corrientes y campos.

## 19.1 Campo magnético y fuerza sobre una carga

Una pequeña brújula orienta su aguja según el campo magnético local. Representamos ese campo mediante un vector $\vec{B}$ en cada punto. Fuera de un imán de barra, sus líneas salen por el polo norte y entran por el sur; dentro continúan cerrando los recorridos. En la descripción clásica usada aquí, el flujo magnético neto a través de una superficie cerrada es cero. Las líneas dibujadas representan la dirección y la distribución del campo, y su densidad gráfica permite comparar intensidades dentro de una misma representación.

La unidad SI del campo magnético es el tesla, símbolo T. Su efecto sobre una partícula con carga $q$ y velocidad $\vec{v}$, medidas en un mismo sistema de referencia, está descrito por

$$\vec{F}_B = q\,\vec{v}\times\vec{B}, \qquad F_B = |q|vB\sin\theta. \tag{19.1}$$

El ángulo $\theta$ se mide entre $\vec{v}$ y $\vec{B}$. El producto vectorial señala una dirección perpendicular a ambos. Para una carga positiva, la regla de la mano derecha se aplica girando los dedos desde $\vec{v}$ hacia $\vec{B}$ por el ángulo menor; el pulgar señala $\vec{v}\times\vec{B}$. Una carga negativa invierte ese sentido. En ejes derechos, $\hat{\imath}\times\hat{\jmath}=\hat{k}$, $\hat{\jmath}\times\hat{k}=\hat{\imath}$ y $\hat{k}\times\hat{\imath}=\hat{\jmath}$; invertir el orden cambia el signo.

Un punto dentro de un círculo, $\odot$, representa una flecha que sale de la página hacia el lector. Una cruz, $\otimes$, representa una flecha que entra. Esta convención permitirá dibujar tres direcciones espaciales en una página. De la fórmula se obtiene $1\,\mathrm{T} = 1\,\mathrm{N/(A\,m)}$.

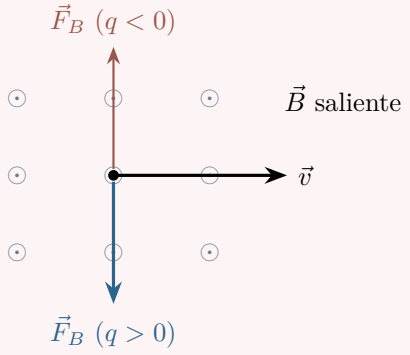
**PROBLEMA RESUELTO 19.1 · Obtener la fuerza y su dirección**

Una carga $q = +2{,}00\,\mathrm{nC}$ tiene velocidad $\vec{v} = (3{,}00\times10^{5}\,\mathrm{m/s})\hat{\imath}$ en un campo $\vec{B} = (0{,}400\,\mathrm{T})\hat{k}$. Halla la fuerza y describe qué cambiaría para una carga de igual magnitud y signo negativo.

*Resolución.* El producto $\hat{\imath}\times\hat{k} = -\hat{\jmath}$ fija el sentido. Así,

$$\vec{F}_B = -(2{,}00\times10^{-9})(3{,}00\times10^{5})(0{,}400)\hat{\jmath} = -(2{,}40\times10^{-4}\,\mathrm{N})\hat{\jmath}.$$

Para la carga negativa, la fuerza apunta hacia $+y$ y conserva la magnitud. En ambos casos es perpendicular a la velocidad instantánea.




La velocidad apunta a la derecha y el campo sale de la página. El signo de la carga fija el sentido de la fuerza.

La fuerza magnética es cero para una carga en reposo y para un movimiento paralelo o antiparalelo al campo. Su magnitud es máxima cuando la velocidad es perpendicular. Además, su potencia instantánea sobre una partícula puntual es

$$P_B = \vec{F}_B\cdot\vec{v} = q(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\vec{v} = 0.$$

Por tanto, la fuerza magnética por sí sola conserva la energía cinética de la partícula y puede modificar la dirección de su velocidad. Si también hay campo eléctrico, la fuerza total es

$q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ y la potencia eléctrica $q\vec{E} \cdot \vec{v}$ puede cambiar esa energía. En los circuitos inducidos, el campo eléctrico permitirá transferir energía a los portadores.

**PROBLEMA RESUELTO 19.2 · Usar la componente perpendicular**

Una carga de $+4{,}00\,\text{nC}$ se mueve a $2{,}00 \times 10^4\,\text{m/s}$ formando $30{,}0°$ con un campo de $0{,}500\,\text{T}$. Calcula la magnitud de la fuerza y compárala con los casos paralelo y perpendicular.

*Resolución.* La componente perpendicular es $v_\perp = v \sin 30° = 1{,}00 \times 10^4\,\text{m/s}$. Por tanto,

$$F_B = |q| v_\perp B = 2{,}00 \times 10^{-5}\,\text{N}.$$

En el caso paralelo la fuerza es cero. Con la misma rapidez y orientación perpendicular al campo, alcanza $4{,}00 \times 10^{-5}\,\text{N}$. El ángulo controla qué parte del movimiento participa en la fuerza.

| $\theta$ | $F_B$ ($\mu$N) |
|---|---|
| 0° | 0 |
| 30° | 20,0 |
| 90° | 40,0 |

La fuerza depende de $v_\perp = v \sin\theta$. Los otros datos se mantienen iguales en las tres filas.

## 19.2 Trayectorias y campos cruzados

Consideremos un campo magnético uniforme y estático, con fuerza eléctrica, gravedad y pérdidas radiativas despreciables. Si la velocidad inicial es perpendicular al campo, la fuerza permanece perpendicular al movimiento y actúa como fuerza centrípeta. En el régimen no relativista,

$$|q| v B = \frac{m v^2}{r}, \qquad r = \frac{m v}{|q| B}, \qquad T = \frac{2\pi m}{|q| B}. \tag{19.2}$$

La rapidez permanece constante y el sentido de giro depende del signo de la carga. El período se obtiene con $T = 2\pi r / v$: en este modelo es independiente de la rapidez. Estas expresiones requieren velocidades suficientemente pequeñas frente a la rapidez de la luz para emplear la mecánica newtoniana.

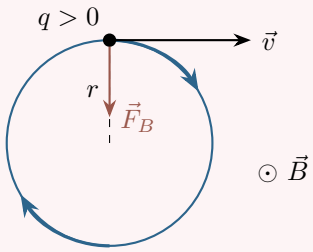
Si la velocidad tiene componentes $v_\perp$ y $v_\parallel$, la primera produce el movimiento circular y la segunda permanece constante a lo largo del campo. La trayectoria resulta helicoidal, con radio $m v_\perp / (|q| B)$ y avance por vuelta, o paso, $h = v_\parallel T$. El campo fija un eje espacial; descomponer el movimiento respecto de ese eje permite reconstruir la trayectoria.

**PROBLEMA RESUELTO 19.3 · Calcular una órbita circular de un protón**

Un protón entra perpendicularmente en un campo uniforme de 0,200 T con rapidez $2{,}00 \times 10^6$ m/s. Usa $m_p = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg y $e = 1{,}602176634 \times 10^{-19}$ C. Halla radio, período y energía cinética. *Resolución.* Con las condiciones del modelo,

$$r = \frac{(1{,}67 \times 10^{-27})(2{,}00 \times 10^6)}{e(0{,}200)} \simeq 0{,}104\,\text{m}, \qquad T = \frac{2\pi(1{,}67 \times 10^{-27})}{e(0{,}200)} \simeq 3{,}27 \times 10^{-7}\,\text{s}.$$

La energía cinética es $K = \frac{1}{2}m_p v^2 = 3{,}34 \times 10^{-15}$ J y conserva ese valor en la órbita idealizada. La rapidez es aproximadamente 0,0067 veces la de la luz, compatible con la aproximación usada. Para un campo saliente y velocidad inicial hacia la derecha, la trayectoria comienza curvándose hacia abajo.




$K =$ constante

El protón gira en sentido horario visto desde el lado del campo saliente. La fuerza apunta hacia el centro.

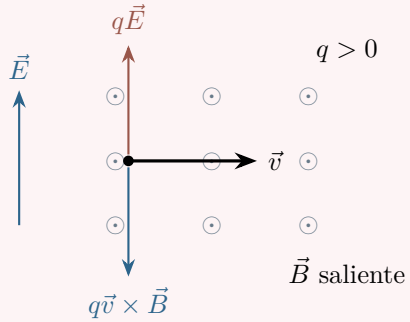
Los campos eléctrico y magnético también pueden producir fuerzas que se compensen. Si ambos campos son perpendiculares entre sí y a la velocidad seleccionada, sus magnitudes se igualan cuando $|q|E = |q|vB$, de donde $v = E/B$. La compensación vectorial exige además que $\vec{E}$ apunte en sentido opuesto a $\vec{v} \times \vec{B}$. Esa geometría define un selector de velocidades para partículas cargadas.

**PROBLEMA RESUELTO 19.4 · Seleccionar una velocidad con dos campos**

En una región, $\vec{E} = (3{,}00 \times 10^4\,\mathrm{V/m})\hat{\jmath}$ y $\vec{B} = (0{,}100\,\mathrm{T})\hat{k}$. Un haz entra con velocidad hacia $+x$. Halla la rapidez que permite atravesar la región sin desviación y el sentido de la fuerza sobre un protón que entra a $4{,}00 \times 10^5\,\mathrm{m/s}$. *Resolución.* La fuerza eléctrica sobre el protón apunta hacia $+y$ y la magnética hacia $-y$. La compensación ocurre a

$$v = \frac{E}{B} = 3{,}00 \times 10^5\,\mathrm{m/s}.$$

Para la rapidez mayor, $F_y = e(E - vB) = e(30\,000 - 40\,000) \simeq -1{,}60 \times 10^{-15}\,\mathrm{N}$. El haz positivo se desvía hacia $-y$. Con la rapidez seleccionada, la compensación funciona también para una carga negativa, porque ambas fuerzas invierten su sentido.




Para una carga positiva, las fuerzas se compensan a $v = E/B$. Las flechas de fuerza representan ese caso.

## 19.3 Fuerza sobre conductores y giro de una espira

Una corriente representa el transporte de muchos portadores. Al sumar sus fuerzas magnéticas y considerar su interacción con el material conductor, obtenemos para un tramo recto en un campo externo uniforme

$$\vec{F} = I\,\vec{\ell} \times \vec{B}. \tag{19.3}$$

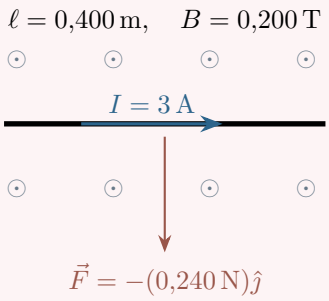
El vector $\vec{\ell}$ tiene la longitud del tramo y apunta según la corriente convencional, con $I$ tomado positivo en ese sentido. El modelo considera el campo externo sobre el conductor; al estudiar dos alambres, cada uno siente el campo generado por el otro. En una geometría general se suman las contribuciones $I\,d\vec{\ell} \times \vec{B}$.

**PROBLEMA RESUELTO 19.5 · Encontrar la fuerza sobre un tramo de alambre**

Un tramo recto de 0,400 m lleva 3,00 A hacia $+x$ en un campo uniforme de 0,200 T dirigido hacia $+z$. Halla su fuerza magnética. *Resolución.* El tramo y el campo son perpendiculares, de modo que $F = I\ell B = (3{,}00)(0{,}400)(0{,}200) = 0{,}240\,\text{N}$. El producto $\hat{\imath} \times \hat{k} = -\hat{\jmath}$ da

$$\vec{F} = -(0{,}240\,\text{N})\hat{\jmath}.$$

Invertir la corriente o invertir el campo invierte la fuerza. Si ambos cambian simultáneamente de sentido, se conserva la fuerza inicial.




La corriente convencional fija el vector longitud del tramo. El campo externo saliente produce fuerza hacia abajo.

En una espira cerrada sometida a un campo uniforme, las fuerzas sobre sus lados suman cero, aunque pueden formar un par. Para una bobina plana de $N$ vueltas, cada una de área $A$, definimos el momento magnético

$$\vec{\mu} = NIA\,\hat{n}, \qquad \vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}, \qquad \tau = NIAB\sin\theta.$$

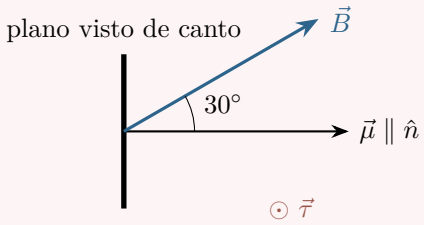
La normal $\hat{n}$ se determina enrollando los dedos de la mano derecha según la corriente: el pulgar señala la normal positiva. Aquí $\theta$ es el ángulo entre esa normal y el campo. El par tiende a alinear $\vec{\mu}$ con $\vec{B}$. Con corriente mantenida y la referencia habitual, la energía de orientación es $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$; la alineación paralela corresponde a un mínimo. Esta relación describe la orientación de un dipolo en un campo externo dado.

**PROBLEMA RESUELTO 19.6 · Calcular el par sobre una bobina**

Una bobina plana de 20 vueltas lleva 0,500 A y cada vuelta abarca $0{,}0200\,\mathrm{m}^2$. Su normal forma 30,0° con un campo uniforme de 0,300 T. Calcula el momento magnético, el par y la energía de orientación. *Resolución.* La magnitud del momento es $\mu = (20)(0{,}500)(0{,}0200) = 0{,}200\,\mathrm{A\,m}^2$. Entonces,

$$\tau = (0{,}200)(0{,}300)\sin 30^\circ = 0{,}0300\,\mathrm{N\,m}, \qquad U = -(0{,}200)(0{,}300)\cos 30^\circ \simeq -0{,}0520\,\mathrm{J}.$$

El par modifica la orientación hacia la alineación paralela. El ángulo de la fórmula se refiere a la normal; el plano de la bobina forma el ángulo complementario con el campo.




La normal y el momento magnético son paralelos. El par saliente gira el momento hacia el campo.

## 19.4 Campos generados por corrientes

Alrededor de un alambre recto largo, las líneas de campo son círculos centrados en su eje. La mano derecha vuelve a fijar un sentido: el pulgar señala la corriente convencional y los dedos, el campo que la rodea. A distancia $r$ del eje, por fuera de un alambre delgado en el vacío o aproximadamente en aire,

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \tag{19.4}$$

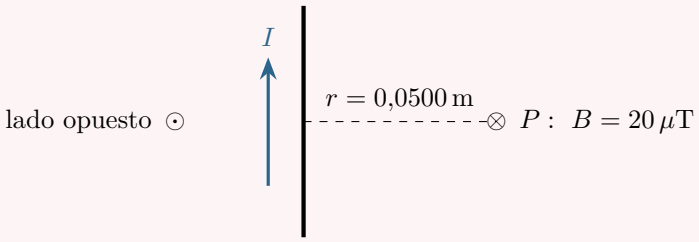
En los cálculos emplearemos $\mu_0 \simeq 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{T\,m/A}$. La aproximación de hilo largo requiere que los extremos estén muy alejados en comparación con $r$. Un núcleo magnético o una geometría diferente puede modificar el campo de forma importante.

**PROBLEMA RESUELTO 19.7 · Dar magnitud y sentido al campo de un hilo**

Un alambre recto muy largo lleva 5,00 A hacia $+y$. Calcula su campo a 0,0500 m a la derecha del eje, despreciando otros campos. *Resolución.* La magnitud es

$$B = \frac{(4\pi \times 10^{-7})(5{,}00)}{2\pi(0{,}0500)} = 2{,}00 \times 10^{-5}\,\mathrm{T} = 20{,}0\,\mu\mathrm{T}.$$

La regla de la mano derecha da sentido entrante en la página, $-z$, en el punto situado a la derecha. En un punto simétrico a la izquierda, el campo tiene igual magnitud y sentido saliente.




El hilo se ve en el plano de la página. La corriente hacia arriba produce campo entrante a la derecha.

Los campos producidos por varias corrientes se suman vectorialmente. Dos alambres paralelos se ejercen fuerzas: las corrientes del mismo sentido se atraen y las opuestas se repelen. Para alambres muy largos, separados una distancia $d$ y en las condiciones anteriores, la magnitud por unidad de longitud es

$$\frac{F}{\ell} = I_2 B_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}.$$

La dirección se obtiene aplicando $I_2\vec{\ell} \times \vec{B}_1$ al segundo alambre y repitiendo para el primero.

**PROBLEMA RESUELTO 19.8 · Superponer campos y calcular la fuerza entre hilos**

Dos hilos muy largos, paralelos al eje $y$, están en $x = -0{,}100$ m y $x = +0{,}100$ m. Cada uno lleva 4,00 A hacia $+y$. Calcula el campo en el punto medio, el campo en $x = 0{,}300$ m y la fuerza por longitud entre los hilos. *Resolución.* En el punto medio, cada hilo aporta 8,00 $\mu$T: el izquierdo produce campo entrante y el derecho, saliente. Se compensan. En $x = 0{,}300$ m, las distancias son 0,400 m y 0,200 m; ambos campos entran en la página y sus magnitudes son 2,00 $\mu$T y 4,00 $\mu$T. El campo total allí es $(6{,}00\,\mu\mathrm{T})(-\hat{k})$.
La separación entre hilos es $d = 0{,}200$ m, luego $F/\ell = (4\pi \times 10^{-7})(4)(4)/[2\pi(0{,}200)] = 1{,}60 \times 10^{-5}$ N/m. Las corrientes del mismo sentido se atraen. La distancia entre los alambres y la distancia de cada alambre al punto de observación cumplen funciones distintas en estos cálculos.

| Punto | $B_{z,\mathrm{izq}}$ ($\mu$T) | $B_{z,\mathrm{der}}$ ($\mu$T) | $B_{z,\mathrm{total}}$ ($\mu$T) |
|---|---|---|---|
| $x = 0$ | −8,00 | +8,00 | 0 |
| $x = 0{,}300$ m | −2,00 | −4,00 | −6,00 |

La tabla contiene componentes sobre $+z$, saliente. Las contribuciones se suman con sus signos.

En el centro de una espira circular de radio $a$, el campo tiene magnitud $B = \mu_0 I/(2a)$ y dirección normal al plano, según la corriente. Para $N$ vueltas circulares coincidentes o suficientemente

próximas, se multiplica por $N$. Un solenoide largo reúne muchas vueltas a lo largo de una longitud $\ell_s$. Lejos de sus extremos, con devanado denso y núcleo de aire, su campo interior es aproximadamente uniforme:

$$B \simeq \mu_0 \frac{N}{\ell_s} I.$$

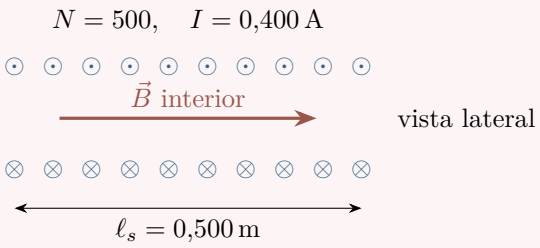
Esta aproximación depende de la densidad de vueltas por longitud y de que la longitud sea grande frente al radio. La regla de la mano derecha aplicada a las vueltas determina la dirección del campo interior.

**PROBLEMA RESUELTO 19.9 · Estimar el campo interior de un solenoide**

Un solenoide de aire tiene 500 vueltas distribuidas uniformemente en 0,500 m, radio 0,0100 m y corriente 0,400 A. Estima su campo cerca del centro. *Resolución.* Hay $N/\ell_s = 1000\,\mathrm{m}^{-1}$ vueltas por longitud. La longitud es 50 veces el radio, y el punto central está lejos de los extremos en esa escala. El modelo de solenoide largo da

$$B \simeq (4\pi \times 10^{-7})(1000)(0{,}400) \simeq 5{,}03 \times 10^{-4}\,\mathrm{T} = 0{,}503\,\mathrm{mT}.$$

El valor describe el interior próximo al centro. Cerca de los extremos aparecen variaciones espaciales y un campo exterior que el modelo interior uniforme deja fuera de su cálculo.




Los puntos y cruces representan la corriente en las partes del devanado vistas de canto. El campo interior apunta a la derecha.

## 19.5 Flujo: orientar una superficie

Para comparar el campo que atraviesa una superficie plana, elegimos primero una normal unitaria $\hat{n}$ y definimos su vector área $\vec{A} = A\hat{n}$. En un campo uniforme, el flujo magnético es

$$\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{A} = BA\cos\theta. \tag{19.5}$$

El ángulo $\theta$ se mide entre el campo y la normal. El weber, Wb, equivale a $\mathrm{T\,m^2}$. El flujo es positivo cuando el campo atraviesa la superficie según la normal elegida, negativo en el sentido opuesto y cero si el campo es paralelo al plano. Invertir la normal cambia el signo del flujo y conserva la situación física.

Un campo que varía de un punto a otro exige dividir la superficie en pequeñas áreas y sumar sus contribuciones orientadas: $\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$. La fórmula $BA\cos\theta$ corresponde al caso uniforme. Para una bobina de $N$ vueltas atravesadas por el mismo flujo, el enlace de flujo es $N\Phi_B$. Cuando las vueltas enlazan flujos diferentes, se suman los flujos de todas ellas.

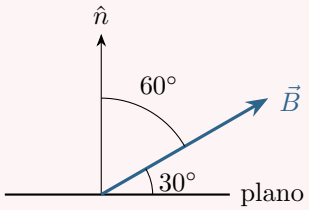
**PROBLEMA RESUELTO 19.10 · Distinguir el ángulo con el plano y con la normal**

Una superficie de $0{,}0300\,\mathrm{m}^2$ está en un campo uniforme de $0{,}400\,\mathrm{T}$. El campo forma $60{,}0°$ con la normal positiva, equivalentes a $30{,}0°$ con el plano. Calcula el flujo y el valor referido a la normal opuesta.

*Resolución.* El ángulo de la fórmula es el de la normal:

$$\Phi_B = (0{,}400)(0{,}0300)\cos 60° = 6{,}00 \times 10^{-3}\,\mathrm{Wb}.$$

Con la normal opuesta, el ángulo pasa a $120°$ y el flujo resulta $-6{,}00 \times 10^{-3}\,\mathrm{Wb}$. La elección de orientación fija el signo con el que describimos el mismo campo y la misma superficie.




El ángulo de flujo se mide con la normal: aquí es $60°$. El ángulo con el plano es su complementario.

**PROBLEMA RESUELTO 19.11 · Separar flujo por vuelta y enlace de flujo**

Una vuelta plana abarca $0{,}0100\,\mathrm{m}^2$ en un campo uniforme de $0{,}200\,\mathrm{T}$, paralelo a su normal positiva. Compara el flujo por vuelta y el enlace total para bobinas ideales de 1, 50 y 100 vueltas iguales en ese mismo campo prescrito.

*Resolución.* Cada vuelta enlaza $\Phi_B = BA = 2{,}00 \times 10^{-3}\,\mathrm{Wb}$. Los enlaces totales son $0{,}00200\,\mathrm{Wb}$, $0{,}100\,\mathrm{Wb}$ y $0{,}200\,\mathrm{Wb}$. El número de vueltas es adimensional. Aumentarlo suma más contribuciones iguales al enlace, manteniendo el flujo por cada vuelta bajo las condiciones dadas.

| $N$ | $\Phi_B$ (Wb) | $N\Phi_B$ (Wb) |
|---|---|---|
| 1 | 0,00200 | 0,00200 |
| 50 | 0,00200 | 0,100 |
| 100 | 0,00200 | 0,200 |

Cada vuelta enlaza el mismo flujo prescrito. La última columna suma las contribuciones de todas las vueltas.

## 19.6 Faraday y Lenz: responder a un cambio de flujo

Una bobina puede presentar fem inducida cuando cambia el flujo que enlaza, sea por variación del campo, del área o de la orientación. Para fijar los signos, elegimos una normal y asociamos el sentido positivo del recorrido mediante la mano derecha: los dedos recorren la frontera en sentido positivo mientras el pulgar señala la normal. En una vista desde el extremo hacia el que apunta esa normal, el recorrido positivo es antihorario.

La ley de Faraday para $N$ vueltas con flujo común es

$$\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi_B}{dt}, \qquad \mathcal{E}_{\mathrm{med}} = -N\frac{\Phi_f - \Phi_i}{\Delta t}. \tag{19.6}$$

El signo expresa la ley de Lenz. En un circuito resistivo cerrado, la corriente inducida genera un campo que se opone al cambio del flujo externo que origina la respuesta. Si aumenta un flujo saliente, la corriente crea campo entrante; si disminuye ese mismo flujo saliente, crea campo saliente. En ambos casos interviene el cambio respecto del estado anterior.

La fem se refiere a un recorrido orientado. En una espira fija atravesada por un campo magnético variable, el campo eléctrico inducido puede realizar trabajo alrededor del recorrido cerrado:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

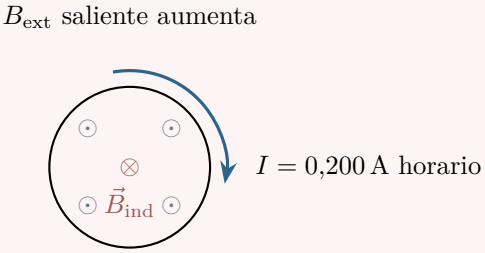
El símbolo $\oint$ indica la suma integral por la curva cerrada. Este campo eléctrico tiene circulación y su descripción completa requiere conservar el recorrido, además de los puntos extremos. La suma de diferencias de potencial usada en el capítulo anterior se aplicó a redes con efectos de inducción variables despreciables. Cuando incluimos una fem inducida en una ecuación de circuito, incorporamos precisamente esa transferencia de energía por unidad de carga.

**PROBLEMA RESUELTO 19.12 · Obtener fem y sentido de corriente en una bobina fija**

Una bobina fija de 40 vueltas tiene área $0{,}0200\,\mathrm{m}^2$ por vuelta y resistencia total $4{,}00\,\Omega$. El campo externo uniforme sale de la página y aumenta linealmente de $0{,}100\,\mathrm{T}$ a $0{,}400\,\mathrm{T}$ en $0{,}300\,\mathrm{s}$. Elige normal saliente y desprecia la autoinducción. Calcula la fem y la corriente durante el aumento. *Resolución.* El cambio de flujo por vuelta es $\Delta\Phi = (0{,}0200)(0{,}400 - 0{,}100) = 0{,}00600\,\mathrm{Wb}$. Como el aumento es lineal,

$$\mathcal{E} = -\frac{(40)(0{,}00600)}{0{,}300} = -0{,}800\,\mathrm{V}, \qquad I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -0{,}200\,\mathrm{A}.$$

La referencia positiva es antihoraria; la corriente física es horaria y crea campo entrante, que se opone al aumento del flujo saliente. La energía que recibe el resistor procede del sistema que mantiene la variación del campo externo.



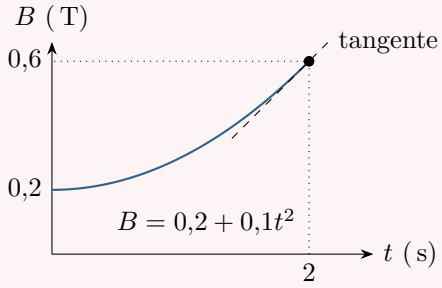

El campo externo saliente aumenta. La corriente horaria crea un campo inducido entrante.

**PROBLEMA RESUELTO 19.13 · Distinguir una tasa instantánea de una tasa media**

Una bobina fija tiene $N = 10$, área por vuelta $0{,}0300\,\mathrm{m}^2$ y resistencia total $3{,}00\,\Omega$. Con normal saliente, el campo externo es $B(t) = 0{,}200\,\mathrm{T} + (0{,}100\,\mathrm{T/s^2})t^2$, saliente. Desprecia la autoinducción. Halla la fem y la corriente a $t = 2{,}00\,\mathrm{s}$, y la fem media entre cero y ese instante. *Resolución.* La derivada es $dB/dt = (0{,}200\,\mathrm{T/s^2})t$. Así, $\mathcal{E}(t) = -NA\,dB/dt = -(0{,}0600\,\mathrm{V/s})t$. A los dos segundos se obtiene $\mathcal{E} = -0{,}120\,\mathrm{V}$ e $I = -0{,}0400\,\mathrm{A}$, de sentido horario. La fem media es

$$\mathcal{E}_{\mathrm{med}} = -NA\frac{B(2) - B(0)}{2{,}00\,\mathrm{s}} = -0{,}0600\,\mathrm{V}.$$

En $t = 0$ hay campo y flujo, mientras que la fem instantánea es cero porque la pendiente en ese instante es cero. El valor de la pendiente permite distinguir la inducción instantánea del flujo existente.



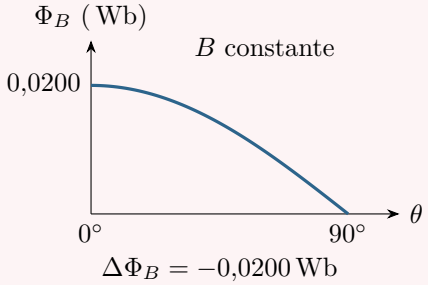

La tangente a los dos segundos describe la tasa instantánea. La tasa media se obtiene con los valores de los extremos.

**PROBLEMA RESUELTO 19.14 · Inducir fem al cambiar la orientación**

Una espira de $0{,}0400\,\mathrm{m}^2$ gira en un campo uniforme estático de $0{,}500\,\mathrm{T}$. El ángulo de su normal con el campo aumenta monótonamente de $0°$ a $90°$ en $0{,}200\,\mathrm{s}$. Su resistencia total es $4{,}00\,\Omega$. Desprecia autoinducción. Calcula la fem media y la carga neta transferida, con el sentido positivo ligado a la normal escogida durante el giro. *Resolución.* El flujo cambia de $0{,}0200\,\mathrm{Wb}$ a cero. Por tanto,

$$\mathcal{E}_{\mathrm{med}} = -\frac{0 - 0{,}0200}{0{,}200} = +0{,}100\,\mathrm{V}, \qquad \Delta Q = \int I\,dt = -\frac{\Delta\Phi}{R} = +0{,}00500\,\mathrm{C}.$$

La carga neta depende del cambio total de flujo y de la resistencia constante. La fem instantánea depende también de la rapidez angular durante el giro. El campo conserva su valor; la orientación es la que modifica el flujo enlazado.




El flujo cambia por el giro de la superficie en un campo constante. Su disminución da fem media positiva con la orientación elegida.

## 19.7 Movimiento, generación y balance de energía

Una varilla conductora que se desplaza en un campo magnético ofrece otra forma de producir separación de carga. Para una varilla de longitud $\ell$, perpendicular a su velocidad y al campo, la magnitud de la fem de movimiento es $B\ell v$. Los portadores sienten la contribución $q\vec{v} \times \vec{B}$. En circuito abierto, la redistribución de carga puede establecer un campo eléctrico que la compensa; bajo esas condiciones, el voltaje entre extremos tiene magnitud $B\ell v$ después del transitorio.

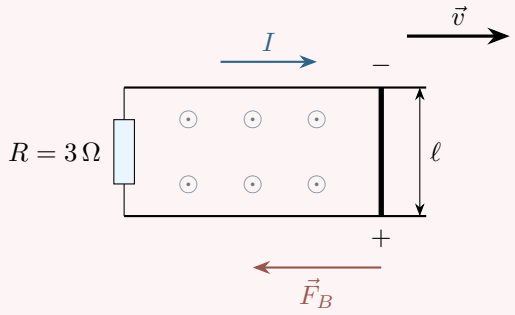
Si la varilla cierra un circuito de rieles, su movimiento modifica el área enlazada y la ley de Faraday da el mismo resultado. Con resistencia total $R$, autoinducción despreciable y velocidad mantenida, la corriente tiene magnitud $I = B\ell v/R$. La fuerza magnética sobre la varilla se opone al movimiento en el caso de generación resistiva. El agente que la arrastra aporta la potencia $F_{\mathrm{ext}}v$, que coincide con $I^2R$ en este modelo.

**PROBLEMA RESUELTO 19.15 · Vincular la fem de movimiento con el trabajo mecánico**

Una varilla vertical de longitud 0,300 m se mueve a 2,00 m/s hacia la derecha sobre rieles horizontales. Un resistor a la izquierda cierra el circuito, de resistencia total 3,00 Ω. Un campo uniforme de 0,500 T sale de la página. Desprecia rozamiento y autoinducción. Calcula fem, corriente, fuerza de arrastre necesaria y potencia. *Resolución.* El área aumenta, de modo que aumenta el flujo saliente. La corriente inducida es horaria y baja por la varilla. Su extremo inferior es el de mayor potencial. Las magnitudes son

$$|\mathcal{E}| = B\ell v = 0{,}300\,\text{V}, \quad |I| = 0{,}100\,\text{A}, \quad F_B = I\ell B = 0{,}0150\,\text{N}.$$

La fuerza magnética sobre la varilla apunta a la izquierda; el agente externo debe ejercer 0,0150 N hacia la derecha para mantener la velocidad. Su potencia es $(0{,}0150)(2{,}00) = 0{,}0300\,\text{W}$, igual a $I^2R = (0{,}100)^2(3{,}00)$. La energía térmica procede del trabajo de arrastre.




La corriente baja por la varilla móvil y el campo saliente ejerce sobre ella una fuerza hacia la izquierda.

La expresión $q\vec{v} \times \vec{B}$ emplea la velocidad total de cada portador y conserva potencia magnética instantánea cero sobre esa partícula. En el conductor móvil, el balance incluye además el movimiento macroscópico del material, sus restricciones sobre los portadores y el campo eléctrico. El trabajo externo que mantiene el movimiento permite la transferencia de energía a la corriente y al resistor. Analizar el sistema completo conecta el resultado de arrastre con la propiedad de la fuerza sobre una carga individual.

Una bobina que gira en un campo uniforme funciona como generador. Si su normal forma el ángulo $\theta = \omega t$ con el campo, su enlace de flujo es $NBA\cos(\omega t)$ y

$$\mathcal{E}(t) = NBA\omega \sin(\omega t).$$

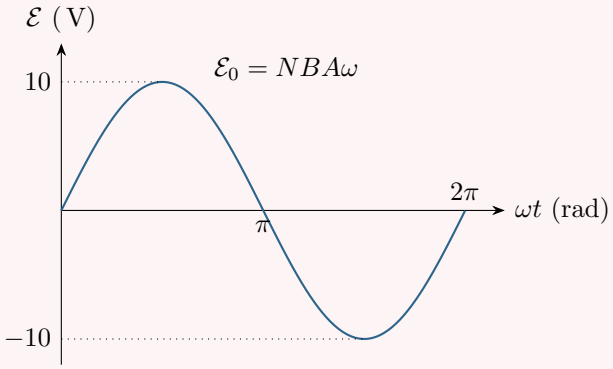
La fem cambia de signo cada media vuelta. Con un circuito puramente resistivo y efectos inductivos despreciables, la corriente tiene la misma dependencia temporal. La potencia recibida por el resistor es siempre $I^2R \geq 0$, aunque cambie el sentido de la corriente. Mantener el giro bajo carga exige aporte mecánico de energía.

**PROBLEMA RESUELTO 19.16 · Obtener una fem alterna de una bobina giratoria**

Un generador ideal tiene 50 vueltas de $0{,}0100\,\mathrm{m}^2$ cada una en un campo de $0{,}200\,\mathrm{T}$. Gira a $100\,\mathrm{rad/s}$, con la normal inicialmente paralela al campo. Alimenta una resistencia total de $20{,}0\,\Omega$ y se desprecian efectos inductivos. Halla la fem máxima, la frecuencia, la corriente máxima y la potencia media recibida por la resistencia. *Resolución.* La amplitud es $\mathcal{E}_0 = NBA\omega = 10{,}0\,\mathrm{V}$ y la frecuencia, $f = \omega/(2\pi) \simeq 15{,}9\,\mathrm{Hz}$. Así,

$$\mathcal{E}(t) = (10{,}0\,\mathrm{V})\sin(100t), \qquad I(t) = (0{,}500\,\mathrm{A})\sin(100t),$$

con $t$ en segundos. La potencia instantánea es $(5{,}00\,\mathrm{W})\sin^2(100t)$. Sobre un período completo, el promedio de $\sin^2$ es $1/2$, luego $P_{\mathrm{med}} = 2{,}50\,\mathrm{W}$. En operación ideal periódica, esa es también la potencia mecánica media aportada al generador.




La fem cambia de signo cada media vuelta. Una resistencia recibe potencia positiva durante ambas mitades del ciclo.

## 19.8 Autoinducción y campos que se propagan

La corriente de una bobina produce su propio campo y su propio enlace de flujo. Si el material responde linealmente y la geometría permanece fija, podemos escribir $N\Phi_{\mathrm{propio}} = LI$. La inductancia $L$ se mide en henrys, con $1\,\mathrm{H} = 1\,\mathrm{V\,s/A}$. La variación de corriente produce una fem de autoinducción

$$\mathcal{E}_{\mathrm{propia}} = -L\frac{dI}{dt}.$$

Para un inductor ideal sin resistencia, usando la convención de corriente que entra por el terminal $a$, el voltaje terminal es $V_{ab} = L\,dI/dt$. El signo positivo de este voltaje y el negativo de la fem propia describen el mismo fenómeno con referencias diferentes: el voltaje aplicado sostiene el aumento de corriente frente a la fem inducida. La potencia recibida es $LI\,dI/dt$ y, al acumularla desde corriente cero,

$$U_B = \int_0^I LI'\,dI' = \frac{1}{2}LI^2.$$

Esta energía está asociada al campo magnético y puede devolverse al circuito cuando disminuye la corriente. En problemas anteriores se ha despreciado la autoinducción para aislar el efecto del flujo externo y obtener $I = \mathcal{E}/R$ de manera inmediata. Incluir $L$ permite estudiar también los transitorios.

**PROBLEMA RESUELTO 19.17 · Calcular la respuesta de un inductor ideal**

Un inductor ideal de 0,200 H aumenta linealmente su corriente de 0,500 A a 2,50 A en 0,0400 s. Halla la fem propia, el voltaje terminal con convención receptora y el cambio de energía almacenada.

*Resolución.* La tasa es $dI/dt = 2{,}00/0{,}0400 = 50{,}0\,\text{A/s}$. Por tanto, $\mathcal{E}_{\text{propia}} = -10{,}0\,\text{V}$ y $V_{ab} = +10{,}0\,\text{V}$. Las energías son

$$U_i = 0{,}0250\,\text{J}, \quad U_f = 0{,}625\,\text{J},$$
$$\Delta U_B = +0{,}600\,\text{J}.$$

La potencia recibida durante el intervalo aumenta con $I$; su integral entrega esos 0,600 J al campo del inductor.

| | $I$ (A) | $U_B$ (J) |
|---|---|---|
| Inicial | 0,500 | 0,0250 |
| Final | 2,50 | 0,625 |

El aumento de energía es 0,600 joule. Durante la rampa, la fem propia es −10 volt y el voltaje receptor es +10 volt.

La inducción enlaza también circuitos distintos: al cambiar la corriente de una bobina puede cambiar el flujo que atraviesa otra y producir en ella una fem. El acoplamiento depende de la geometría y del material entre ambas. Esa transferencia permite comprender el principio de un transformador, donde un régimen variable sostiene el intercambio entre circuitos.

La descripción se amplía con las ecuaciones de Maxwell. La ley de Gauss eléctrica relaciona el flujo eléctrico con la carga encerrada. Su versión magnética expresa flujo neto cero a través de superficies cerradas. La ley de Faraday vincula la circulación eléctrica con la variación del flujo magnético. La ley de Ampère–Maxwell relaciona la circulación magnética tanto con la corriente de conducción como con la variación del flujo eléctrico.

Un capacitor que se carga ayuda a comprender este último término. Por los cables circula corriente mientras cambia el campo eléctrico entre las placas. En el espacio entre las placas de un capacitor ideal cambia el flujo eléctrico mientras en sus superficies se acumulan cargas opuestas. La contribución de Maxwell permite obtener una descripción magnética consistente al considerar superficies que atraviesan el cable o el espacio entre placas. Las variaciones de ambos campos forman parte de una misma descripción electromagnética.

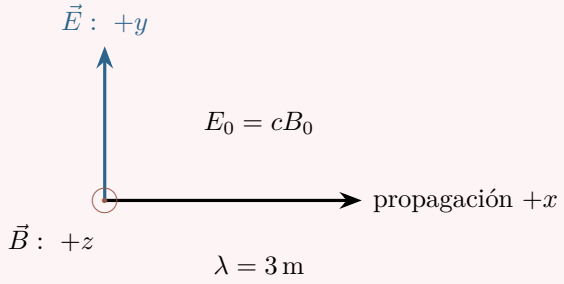
En el vacío, las ecuaciones admiten ondas que transportan energía mediante campos eléctricos y magnéticos variables, relacionados por las leyes de Maxwell. Para una onda plana progresiva, $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares entre sí y a la propagación, oscilan en fase y cumplen $E_0 = cB_0$. La dirección de propagación coincide con $\vec{E} \times \vec{B}$. Su rapidez es $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$, donde $\varepsilon_0$ es la permitividad del vacío. En los cálculos usaremos $c \simeq 3{,}00 \times 10^8\,\text{m/s}$. La relación ondulatoria $c = \lambda f$ conecta frecuencia y longitud de onda. Radio, microondas y luz visible pertenecen a esta misma familia de campos, con distintas frecuencias.

**PROBLEMA RESUELTO 19.18 · Relacionar los campos de una onda electromagnética**

Una onda plana en el vacío tiene frecuencia 100 MHz y amplitud eléctrica $E_0 = 6{,}00\,\mathrm{V/m}$. En un punto y un instante con campos no nulos, $\vec{E}$ apunta hacia $+y$ y $\vec{B}$ hacia $+z$. Halla su longitud de onda, amplitud magnética y dirección de propagación. *Resolución.* La frecuencia es $1{,}00 \times 10^8\,\mathrm{Hz}$, luego

$$\lambda = \frac{c}{f} = 3{,}00\,\mathrm{m}, \qquad B_0 = \frac{E_0}{c} = 2{,}00 \times 10^{-8}\,\mathrm{T} = 20{,}0\,\mathrm{nT}.$$

El producto $\hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath}$ indica propagación hacia $+x$. Cuando ambos campos invierten simultáneamente su signo durante la oscilación, su producto vectorial conserva ese sentido. Las dos amplitudes pertenecen a la misma onda y están relacionadas por su propagación en el vacío.




Orientación local de los campos en un instante. En una onda plana de vacío, ambas amplitudes satisfacen $E_0 = cB_0$.

## Ejercicios para reconstruir y transferir

Usa $e = 1{,}602176634 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$, $m_p = 1{,}67 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$, $\mu_0 \simeq 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{T\,m/A}$ y $c \simeq 3{,}00 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$. Los ejes son derechos. Supón régimen no relativista, campos prescritos y modelos geométricos ideales en las condiciones indicadas. En los circuitos inducidos resistivos, desprecia la autoinducción salvo indicación contraria.

**EJERCICIO 19.1 · Una carga negativa en movimiento**

Una carga $-3{,}00\,\mathrm{nC}$ se mueve con $\vec{v} = (2{,}00 \times 10^5\,\mathrm{m/s})\hat{\imath}$ en $\vec{B} = (0{,}100\,\mathrm{T})\hat{k}$. Halla $\vec{F}_B$.

**EJERCICIO 19.2 · Comparar dos ángulos**

Una carga de magnitud $2{,}00\,\mu\mathrm{C}$ se mueve a $1000\,\mathrm{m/s}$ en un campo de $0{,}200\,\mathrm{T}$. Calcula la fuerza para ángulos de $90°$ y $30°$ entre velocidad y campo.

**EJERCICIO 19.3 · Calcular por componentes**

Una carga $+1{,}00\,\mathrm{nC}$ tiene $\vec{v} = (2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath})10^4\,\mathrm{m/s}$ en $\vec{B} = (0{,}200\,\mathrm{T})\hat{k}$. Obtén la fuerza por componentes y verifica $\vec{F}_B \cdot \vec{v} = 0$.

**EJERCICIO 19.4 · Una órbita circular**

Un protón entra perpendicularmente en $B = 0{,}100\,\mathrm{T}$ con rapidez $1{,}00 \times 10^6\,\mathrm{m/s}$. Halla radio y período de su órbita ideal.

**EJERCICIO 19.5 · Agregar movimiento paralelo**

El protón del ejercicio anterior tiene además componente de velocidad $v_{\parallel} = 2{,}00 \times 10^5\,\mathrm{m/s}$ a lo largo del campo; conserva $v_{\perp} = 1{,}00 \times 10^6\,\mathrm{m/s}$. Halla el radio y el avance de la hélice en una vuelta.

**EJERCICIO 19.6 · Un selector para ambos signos**

Un haz entra hacia $+x$ en campos $\vec{E} = (2{,}00 \times 10^4\,\mathrm{V/m})\hat{\jmath}$ y $\vec{B} = (0{,}0500\,\mathrm{T})\hat{k}$. Halla la rapidez sin desviación y explica qué sucede con partículas negativas a esa misma velocidad.

**EJERCICIO 19.7 · Una fuerza sobre un conductor**

Un tramo de $0{,}500\,\mathrm{m}$ conduce $2{,}00\,\mathrm{A}$ hacia $+y$ en $\vec{B} = (0{,}300\,\mathrm{T})\hat{\imath}$. Halla magnitud y sentido de la fuerza.

**EJERCICIO 19.8 · Par y orientación de una bobina**

Una bobina de 10 vueltas, área $0{,}0500\,\mathrm{m}^2$ por vuelta y corriente $0{,}200\,\mathrm{A}$ está en $B = 0{,}400\,\mathrm{T}$. Calcula el par para ángulos de $90^\circ$ y $0^\circ$ entre normal y campo. Identifica la orientación de energía mínima.

**EJERCICIO 19.9 · Campo de un hilo recto**

Un hilo muy largo lleva $3{,}00\,\mathrm{A}$ hacia arriba en la página. Halla su campo a $0{,}0200\,\mathrm{m}$ a la derecha y a igual distancia a la izquierda, en aire.

**EJERCICIO 19.10 · Campo en el centro de una espira**

Una espira circular de radio $0{,}100\,\mathrm{m}$ lleva $4{,}00\,\mathrm{A}$ en sentido antihorario vista de frente. Calcula el campo en su centro y su sentido.

**EJERCICIO 19.11 · Un solenoide largo**

Un solenoide de aire tiene 1000 vueltas en $0{,}400\,\mathrm{m}$ y conduce $0{,}200\,\mathrm{A}$. Su radio es mucho menor que su longitud. Estima el campo interior lejos de los extremos.

**EJERCICIO 19.12 · Superposición y fuerza entre hilos**

Dos hilos paralelos muy largos separados 0,100 m llevan 3,00 A en el mismo sentido. Halla el campo en el punto medio y la fuerza por longitud. Predice qué cambia si se invierte una corriente, manteniendo su magnitud.

**EJERCICIO 19.13 · Flujo con normal orientada**

Un campo uniforme de 0,300 T forma 60,0° con la normal positiva de un área plana de $0{,}0200\,\mathrm{m}^2$. Calcula el flujo y su valor con la normal opuesta.

**EJERCICIO 19.14 · Un ángulo dado con el plano**

El campo uniforme de 0,400 T forma 30,0° con un plano de área $0{,}0500\,\mathrm{m}^2$. Escoge la normal que forme ángulo agudo con el campo y calcula el flujo.

**EJERCICIO 19.15 · Ochenta vueltas en el mismo campo**

Una bobina tiene 80 vueltas, cada una de área $0{,}0100\,\mathrm{m}^2$, en $B = 0{,}250\,\mathrm{T}$ paralelo a la normal positiva. Halla flujo por vuelta y enlace total.

**EJERCICIO 19.16 · Un flujo saliente que aumenta**

Una bobina fija de 20 vueltas, área por vuelta $0{,}0400\,\mathrm{m}^2$ y resistencia total $8{,}00\,\Omega$ está en un campo saliente que aumenta linealmente de 0,100 T a 0,300 T en 0,200 s. Con normal saliente, calcula fem, corriente y sentido físico.

**EJERCICIO 19.17 · Un flujo saliente que disminuye**

Una bobina fija de 10 vueltas, área por vuelta $0{,}0200\,\mathrm{m}^2$ y resistencia total $4{,}00\,\Omega$ está en un campo saliente que disminuye linealmente de 0,500 T a 0,100 T en 0,400 s. Con normal saliente, halla fem y corriente.

**EJERCICIO 19.18 · Derivar un campo que varía con el tiempo**

Una bobina fija de 5 vueltas y área $0{,}100\,\mathrm{m}^2$ por vuelta tiene normal saliente. El campo saliente es $B(t) = 0{,}400\,\mathrm{T} + (0{,}0200\,\mathrm{T/s^3})t^3$. Halla la fem a 2,00 s y la fem media entre cero y ese instante.

**EJERCICIO 19.19 · Una media vuelta y un instante de flujo cero**

Una bobina de 10 vueltas y área $0{,}0200\,\mathrm{m}^2$ por vuelta gira uniformemente en $B = 0{,}500\,\mathrm{T}$. Su normal pasa de $\theta = 0$ a $\theta = \pi$ en 0,500 s. Calcula la fem media y la fem instantánea cuando $\theta = \pi/2$, con el sentido positivo asociado a la normal.

**EJERCICIO 19.20 · Arrastrar una varilla y calentar un resistor**

Repite la geometría del problema 19.15 con $\ell = 0{,}400\,\text{m}$, $v = 3{,}00\,\text{m/s}$, $B = 0{,}250\,\text{T}$ y resistencia total $6{,}00\,\Omega$. Halla fem, corriente, fuerza de arrastre y potencia mecánica.

**EJERCICIO 19.21 · Una varilla en circuito abierto**

Una varilla vertical aislada de $0{,}200\,\text{m}$ se mueve a $4{,}00\,\text{m/s}$ hacia la derecha en un campo de $0{,}500\,\text{T}$ saliente. Después del transitorio de redistribución, halla el voltaje entre extremos, su polaridad y la corriente longitudinal sostenida en el modelo ideal abierto.

**EJERCICIO 19.22 · Amplitudes de un generador**

Un generador ideal tiene 100 vueltas de $0{,}00500\,\text{m}^2$ cada una, $B = 0{,}400\,\text{T}$ y $\omega = 50{,}0\,\text{rad/s}$. Alimenta una resistencia total de $10{,}0\,\Omega$, con efectos inductivos despreciables. Calcula fem máxima, frecuencia, corriente máxima y potencia media.

**EJERCICIO 19.23 · Disminuir la corriente de un inductor**

Un inductor ideal de $0{,}0500\,\text{H}$ reduce linealmente su corriente de $3{,}00\,\text{A}$ a $1{,}00\,\text{A}$ en $0{,}0200\,\text{s}$. Halla la fem propia, el voltaje terminal con convención receptora y el cambio de energía almacenada.

**EJERCICIO 19.24 · Otra onda electromagnética**

Una onda plana en el vacío tiene $f = 60{,}0\,\text{MHz}$ y $E_0 = 9{,}00\,\text{V/m}$. En un punto e instante, $\vec{E}$ apunta hacia $+x$ y $\vec{B}$ hacia $-z$. Halla $\lambda$, $B_0$ y la dirección de propagación.

## Soluciones razonadas

**SOLUCIÓN 19.1.**
El producto $\hat{\imath} \times \hat{k} = -\hat{\jmath}$, multiplicado por una carga negativa, da sentido $+y$. La fuerza es $\vec{F}_B = (6{,}00 \times 10^{-5}\,\text{N})\hat{\jmath}$.

**SOLUCIÓN 19.2.**
Para $90°$, $F = (2 \times 10^{-6})(1000)(0{,}200) = 4{,}00 \times 10^{-4}\,\text{N}$. Para $30°$, el factor seno reduce el valor a $2{,}00 \times 10^{-4}\,\text{N}$.

**SOLUCIÓN 19.3.**
$\vec{F}_B = (6\hat{\imath} - 4\hat{\jmath})10^{-6}\,\text{N}$. El producto escalar es $(6 \times 10^{-6})(2 \times 10^{4}) - (4 \times 10^{-6})(3 \times 10^{4}) = 0$. La potencia magnética instantánea es cero.

**SOLUCIÓN 19.4.**
$r = m_p v/(eB) \simeq 0{,}104\,\text{m}$ y $T = 2\pi m_p/(eB) \simeq 6{,}55 \times 10^{-7}\,\text{s}$. La fuerza cambia la dirección y conserva la rapidez en el modelo dado.

**SOLUCIÓN 19.5.**
El radio permanece en $0{,}104\,\text{m}$ porque depende de $v_\perp$. El período es el del ejercicio anterior y el paso es $h = v_\parallel T \simeq (2{,}00 \times 10^{5})(6{,}55 \times 10^{-7}) = 0{,}131\,\text{m}$.

**SOLUCIÓN 19.6.**
$v = E/B = 4{,}00 \times 10^{5}\,\text{m/s}$. La fuerza eléctrica y la magnética se compensan también para partículas negativas a esa velocidad: ambas cambian de sentido al cambiar el signo de la carga.

**SOLUCIÓN 19.7.**
$F = I\ell B = (2{,}00)(0{,}500)(0{,}300) = 0{,}300\,\text{N}$. El producto $\hat{\jmath} \times \hat{\imath} = -\hat{k}$ fija sentido entrante, $-z$.
**SOLUCIÓN 19.8.**
$\mu = NIA = 0{,}100\,\text{A m}^2$. El par a 90° es $0{,}0400\,\text{N m}$ y a 0° es cero. La energía $U = -\mu B\cos\theta$ es mínima para normal y campo paralelos con el mismo sentido.
**SOLUCIÓN 19.9.**
$B = \mu_0 I/(2\pi r) = 3{,}00 \times 10^{-5}\,\text{T} = 30{,}0\,\mu\text{T}$. A la derecha entra en la página y a la izquierda sale, según la mano derecha con el pulgar hacia arriba.
**SOLUCIÓN 19.10.**
$B = \mu_0 I/(2a) = 8\pi \times 10^{-6}\,\text{T} \simeq 25{,}1\,\mu\text{T}$. La corriente antihoraria produce campo saliente en el centro.
**SOLUCIÓN 19.11.**
$B \simeq \mu_0(N/\ell_s)I = (4\pi \times 10^{-7})(1000/0{,}400)(0{,}200) \simeq 6{,}28 \times 10^{-4}\,\text{T} = 0{,}628\,\text{mT}$, dentro de la región aproximada indicada.
**SOLUCIÓN 19.12.**
En el punto medio, cada hilo aporta $12{,}0\,\mu\text{T}$ y los campos se compensan. La fuerza por longitud es $\mu_0(3)(3)/[2\pi(0{,}100)] = 1{,}80 \times 10^{-5}\,\text{N/m}$, atractiva. Al invertir una corriente, los campos en el punto medio se suman y dan magnitud $24{,}0\,\mu\text{T}$; la fuerza conserva su magnitud y pasa a ser repulsiva.
**SOLUCIÓN 19.13.**
$\Phi_B = (0{,}300)(0{,}0200)\cos 60° = 3{,}00 \times 10^{-3}\,\text{Wb}$. La normal opuesta da $-3{,}00 \times 10^{-3}\,\text{Wb}$.
**SOLUCIÓN 19.14.**
El ángulo con la normal escogida es 60°. Resulta $\Phi_B = (0{,}400)(0{,}0500)\cos 60° = 0{,}0100\,\text{Wb}$.
**SOLUCIÓN 19.15.**
El flujo por vuelta es $0{,}250(0{,}0100) = 0{,}00250\,\text{Wb}$ y el enlace total, $80\Phi_B = 0{,}200\,\text{Wb}$. Se mantiene separado el flujo individual de su suma sobre las vueltas.
**SOLUCIÓN 19.16.**
$\mathcal{E} = -NA\Delta B/\Delta t = -(20)(0{,}0400)(0{,}200)/0{,}200 = -0{,}800\,\text{V}$. La corriente es $-0{,}100\,\text{A}$ respecto del recorrido antihorario: físicamente gira en sentido horario y produce campo entrante.
**SOLUCIÓN 19.17.**
$\mathcal{E} = -(10)(0{,}0200)(0{,}100 - 0{,}500)/0{,}400 = +0{,}200\,\text{V}$. La corriente es $+0{,}0500\,\text{A}$, antihoraria. Su campo saliente se opone a la disminución del flujo externo saliente.
**SOLUCIÓN 19.18.**
$dB/dt = (0{,}0600\,\text{T/s}^3)t^2$. A 2 s, $\mathcal{E} = -(5)(0{,}100)(0{,}240) = -0{,}120\,\text{V}$. La fem media es $-(5)(0{,}100)[B(2) - B(0)]/2 = -0{,}0400\,\text{V}$. La pendiente inicial es cero y la fem instantánea inicial también.
**SOLUCIÓN 19.19.**
El flujo por vuelta pasa de $+0{,}0100\,\text{Wb}$ a $-0{,}0100\,\text{Wb}$, así que $\mathcal{E}_{\text{med}} = -(10)(-0{,}0200)/0{,}500 = +0{,}400\,\text{V}$. Como $\omega = 2\pi\,\text{rad/s}$, al pasar por $\theta = \pi/2$ la fem es $NBA\omega = 0{,}200\pi\,\text{V} \simeq 0{,}628\,\text{V}$. El flujo cero en ese instante coincide con una rapidez de cambio máxima en magnitud.
**SOLUCIÓN 19.20.**
$|\mathcal{E}| = B\ell v = 0{,}300\,\text{V}$ e $|I| = 0{,}0500\,\text{A}$, horario. La fuerza magnética es $(0{,}0500)(0{,}400)(0{,}250) = 0{,}00500\,\text{N}$ hacia la izquierda y el arrastre requerido tiene esa magnitud hacia la derecha. La potencia mecánica es $0{,}0150\,\text{W} = I^2R$.
**SOLUCIÓN 19.21.**
El voltaje tiene magnitud $B\ell v = (0{,}500)(0{,}200)(4{,}00) = 0{,}400\,\text{V}$. El producto $\vec{v} \times \vec{B}$ apunta hacia abajo para carga positiva, por lo que el extremo inferior queda a mayor potencial. En el estado abierto ideal, la corriente longitudinal sostenida es cero.
**SOLUCIÓN 19.22.**
$\mathcal{E}_0 = NBA\omega = (100)(0{,}400)(0{,}00500)(50{,}0) = 10{,}0\,\text{V}$. La frecuencia es $50/(2\pi) \simeq 7{,}96\,\text{Hz}$ y la amplitud de corriente es $1{,}00\,\text{A}$. La potencia media es $\mathcal{E}_0^2/(2R) = 5{,}00\,\text{W}$.
**SOLUCIÓN 19.23.**
La tasa es $(1 - 3)/0{,}0200 = -100\,\text{A/s}$. La fem propia es $+5{,}00\,\text{V}$ y el voltaje receptor, $-5{,}00\,\text{V}$. Las energías inicial y final son $0{,}225\,\text{J}$ y $0{,}0250\,\text{J}$, con $\Delta U_B = -0{,}200\,\text{J}$. El inductor ideal devuelve esa energía al circuito.

**SOLUCIÓN 19.24.**
$\lambda = c/f = 5{,}00\,\mathrm{m}$ y $B_0 = E_0/c = 3{,}00 \times 10^{-8}\,\mathrm{T} = 30{,}0\,\mathrm{nT}$. El producto $\hat{\imath} \times (-\hat{k}) = +\hat{\jmath}$ indica propagación hacia $+y$.

## Una experiencia: observar el sentido de la inducción

**Un imán y una bobina de demostración**

Usa un simulador o un equipo docente de bobina, imán y medidor sensible, bajo supervisión. Trabaja con el equipo desconectado de la red y con imanes apropiados para la demostración. Acerca lentamente un polo del imán a la bobina y registra el signo de la lectura; mantenlo quieto y después aléjalo. Repite con el otro polo, conservando las conexiones del instrumento. Antes de cada movimiento, dibuja el campo del imán en la bobina, decide si su flujo aumenta o disminuye y predice el campo de la corriente inducida. Relaciona el signo observado con los terminales del medidor. En el modelo de bobina resistiva, una lectura durante el movimiento refleja la variación de flujo; una vez detenido el imán y extinguido el transitorio, la corriente vuelve a cero. Compara desplazamientos semejantes realizados en tiempos distintos y registra qué ocurre con la lectura máxima.

## Diagnóstico antes de avanzar

Una bobina fija de 30 vueltas y $0{,}0200\,\mathrm{m}^2$ por vuelta tiene resistencia total $3{,}00\,\Omega$. Su normal positiva sale de la página. El campo externo saliente es $B(t) = 0{,}100\,\mathrm{T} + (0{,}200\,\mathrm{T/s})t$ entre cero y 1,00 s, y después permanece constante. Desprecia autoinducción. Calcula fem, corriente, carga neta transferida y energía recibida por el resistor durante el primer segundo. Predice la respuesta posterior e interpreta qué cambia si se invierte la normal de referencia.

**Contraste.** Durante la rampa, $\mathcal{E} = -NA\,dB/dt = -0{,}120\,\mathrm{V}$ e $I = -0{,}0400\,\mathrm{A}$, de sentido horario. La carga convencional transferida con signo es $-0{,}0400\,\mathrm{C}$ y la energía recibida es $I^2R\Delta t = 0{,}00480\,\mathrm{J}$. El flujo por vuelta aumenta de $0{,}00200\,\mathrm{Wb}$ a $0{,}00600\,\mathrm{Wb}$. Después de la rampa, el flujo conserva ese valor, la fem es cero y la corriente es cero en el modelo sin autoinducción. Invertir la normal invierte los signos del flujo, la fem y la corriente de referencia, manteniendo la misma corriente física durante la rampa y la misma energía térmica. La energía proviene del sistema externo que produce la variación de campo, a través del campo eléctrico inducido.

**Lecturas de apoyo.** H. D. Young y R. A. Freedman, *Física universitaria*, volumen 2, 12.ª edición, capítulos 27–29, secciones 30.2–30.3 y 32.1–32.2. R. A. Serway y C. Vuille, *Fundamentos de física*, volumen 2, 9.ª edición, capítulo 19, secciones 20.1–20.5, 20.7 y 21.8–21.11. Los problemas, los datos y las ayudas visuales de este capítulo se han preparado para esta obra.

# CAPÍTULO 20

# ÓPTICA GEOMÉTRICA Y ONDULATORIA


20.1 Rayos, reflexión e imagen en un espejo plano . . . . . 405
20.2 Refracción y reflexión interna total . . . . . 406
20.3 Espejos esféricos y aumento lateral . . . . . 408
20.4 Lentes delgadas y convención de signos . . . . . 410
20.5 Sistemas de lentes y potencia óptica . . . . . 412
20.6 Interferencia y doble rendija . 413
20.7 Difracción y resolución . . . . 414
20.8 Dispersión, espectro y color . . 416
Ejercicios para reconstruir y transferir 418
Soluciones razonadas . . . . . 421
Una experiencia: localizar una imagen real . . . . . 423
Diagnóstico antes de avanzar . . . . 423


Una cuchara sumergida parece quebrarse en la superficie del agua. Una lente proyecta la imagen de una ventana sobre una hoja y dos rendijas iluminadas producen franjas claras y oscuras. Cada observación revela una relación entre la propagación de la luz, los materiales y la geometría del montaje.

El modelo de rayos permite localizar imágenes y seguir cambios de dirección. La descripción ondulatoria explica la superposición y la extensión de los haces al atravesar aberturas. Elegir la escala adecuada conecta ambas descripciones: una lente puede formar una imagen cuyo detalle queda limitado por la difracción.

## 20.1 Rayos, reflexión e imagen en un espejo plano

Un rayo representa la dirección local de propagación de la luz. En un medio homogéneo e isótropo, los rayos son rectos. La óptica geométrica ofrece una buena aproximación cuando las longitudes características de aberturas, obstáculos y superficies son grandes frente a la longitud de onda, y se estudian trayectorias e imágenes lejos de detalles de difracción. Un haz contiene muchos rayos; el dibujo de una sola línea selecciona una dirección.

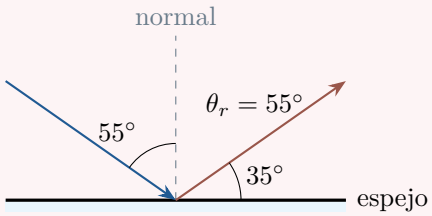
En cada punto de una superficie trazamos una recta perpendicular, llamada normal. El ángulo de incidencia $\theta_i$ y el de reflexión $\theta_r$ se miden desde esa normal. La ley de reflexión establece

$$\theta_r = \theta_i. \tag{20.1}$$

El rayo incidente, el reflejado y la normal pertenecen al mismo plano. En una superficie rugosa, cada pequeña zona cumple esta ley con su propia normal; las distintas orientaciones distribuyen la luz reflejada en muchas direcciones. Esa reflexión difusa permite ver una hoja desde diferentes lugares.

**PROBLEMA RESUELTO 20.1 · Construir el rayo reflejado desde la normal**

Un rayo incide sobre un espejo plano formando 35,0° con su superficie. Determina los ángulos de incidencia y reflexión y el ángulo entre las dos ramas del trazado, vistas desde el punto de incidencia. *Resolución.* La normal forma 90° con la superficie, por lo que $\theta_i = 90° - 35° = 55{,}0°$. La ley de reflexión da $\theta_r = 55{,}0°$. Las ramas incidente y reflejada, dirigidas desde el punto hacia sus respectivos lados, abarcan $2\theta_i = 110°$. Dibujar primero la normal fija la referencia angular.



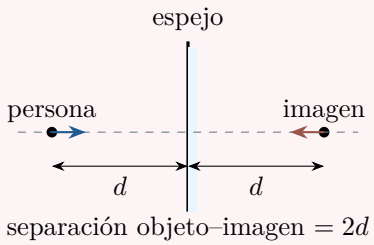

Los ángulos de incidencia y reflexión se miden desde la normal. El ángulo dado con la superficie es su complemento.

Un punto luminoso envía luz en muchas direcciones. Después de reflejarse en un espejo plano, los rayos que llegan al ojo divergen como si procedieran de un punto situado detrás del espejo. Sus prolongaciones hacia atrás se cortan en una *imagen virtual*. Una imagen real corresponde a la convergencia efectiva de los rayos y puede recibirse sobre una pantalla colocada en ese lugar. La imagen virtual se observa mirando el sistema óptico; su posición se obtiene prolongando los rayos.

La simetría de la reflexión coloca la imagen de un espejo plano a la misma distancia detrás de la superficie que el objeto delante. Conserva el tamaño y la orientación vertical. Cada punto cambia su coordenada perpendicular al plano del espejo; esa inversión espacial explica la apariencia especular.

**PROBLEMA RESUELTO 20.2 · Seguir la imagen cuando se acerca el objeto**

Una persona está a 1,20 m de un espejo plano fijo y avanza 0,300 m hacia él. Halla la separación entre la persona y su imagen antes y después del movimiento. *Resolución.* Al comienzo, la imagen está a 1,20 m detrás del espejo y la separación es 2,40 m. Al final, la persona queda a 0,900 m delante y la imagen a 0,900 m detrás: la separación es 1,80 m. La imagen se desplaza 0,300 m hacia el plano por el lado posterior. La separación disminuye 0,600 m.




El objeto y su imagen se acercan al plano desde lados opuestos. La separación cambia el doble que la distancia del objeto al espejo.

## 20.2 Refracción y reflexión interna total

El índice de refracción de un medio transparente se define como $n = c/v$, donde $v$ es la rapidez de fase de la luz en ese medio y $c \simeq 3{,}00 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$ es la rapidez en el vacío. En los materiales considerados aquí, el índice es positivo y depende de la frecuencia. La continuidad temporal de la oscilación en una interfaz estacionaria conserva la frecuencia $f$. La relación $v = \lambda f$ determina entonces el cambio de longitud de onda:

$$v = \frac{c}{n}, \qquad f = \frac{c}{\lambda_0}, \qquad \lambda = \frac{\lambda_0}{n}. \tag{20.2}$$

El subíndice cero designa la longitud de onda en el vacío. Para los cálculos de este capítulo, el aire se aproxima por $n = 1$.

**PROBLEMA RESUELTO 20.3 · Conservar la frecuencia al entrar en vidrio**

Una luz de longitud de onda en el vacío 600 nm entra en un vidrio de índice 1,50. Calcula su frecuencia, rapidez y longitud de onda interior.

*Resolución.* Con $600\,\mathrm{nm} = 6{,}00 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}$,

$$f = 5{,}00 \times 10^{14}\,\mathrm{Hz},$$
$$v = 2{,}00 \times 10^{8}\,\mathrm{m/s},$$
$$\lambda = 400\,\mathrm{nm}.$$

La frecuencia conserva su valor al cruzar la interfaz. La rapidez y la longitud de onda se reducen por el factor $1/n$.

| medio | $\lambda$ ( nm) |
|---|---|
| vacío | 600 |
| vidrio | 400 |

La interfaz estacionaria conserva la frecuencia de la componente.

La ley de Snell relaciona las direcciones a ambos lados de una interfaz entre medios homogéneos e isótropos:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2. \tag{20.3}$$

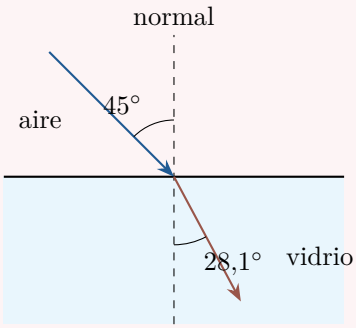
Ambos ángulos se miden con la normal. Al pasar a un índice mayor, el rayo transmitido se acerca a ella; al pasar a un índice menor, se aleja. Para incidencia normal la dirección se conserva, aunque cambien rapidez y longitud de onda. En general, una parte de la energía se refleja y otra se transmite. Snell determina la dirección de la transmisión; calcular las fracciones de energía requiere información adicional sobre los campos y la polarización.

**PROBLEMA RESUELTO 20.4 · Refractar un rayo hacia la normal**

Un rayo en aire incide a 45,0° sobre vidrio de índice 1,50. Calcula el ángulo refractado y verifica hacia qué lado cambia la dirección. *Resolución.* De Snell,

$$\sin\theta_2 = \frac{1}{1{,}50}\sin 45^\circ = 0{,}4714, \qquad \theta_2 \simeq 28{,}1^\circ.$$

El ángulo menor confirma el acercamiento a la normal. La reflexión parcial, cuando está presente, conserva 45° con la normal en el aire. Los dos ángulos describen ramas distintas del haz.




Al aumentar el índice de refracción, el ángulo con la normal disminuye. El rayo dibujado corresponde a la transmisión.

Cuando $n_1 > n_2$, el ángulo refractado alcanza 90° para el ángulo crítico $\theta_c$:

$$\sin\theta_c = \frac{n_2}{n_1}, \qquad n_1 > n_2. \tag{20.4}$$

Para $\theta_1 > \theta_c$ ocurre reflexión interna total. En el modelo de interfaz plana entre medios transparentes, con el segundo medio suficientemente extenso, la potencia reflejada iguala la incidente. En el segundo medio existe un campo evanescente, cuya amplitud decae con la distancia a la interfaz. El ángulo crítico marca el límite de la rama refractada propagante. Las fibras ópticas guían luz mediante sucesivas reflexiones internas bajo las condiciones adecuadas de índices y ángulos.

**PROBLEMA RESUELTO 20.5 · Decidir si existe un rayo transmitido propagante**

Un haz viaja desde vidrio de índice 1,50 hacia aire. Compara incidencias de 40,0° y 45,0°.

*Resolución.* El límite es $\theta_c = \arcsin(1/1{,}50) \simeq 41{,}8°$. Para 40°,

$$\theta_2 = \arcsin(1{,}50 \sin 40°) \simeq 74{,}6°.$$

La incidencia de 45° supera el límite y produce reflexión interna total. Allí $1{,}50 \sin 45° > 1$ identifica el dominio fuera de la transmisión propagante.

| $\theta_1$ | respuesta |
|---|---|
| 40° | $\theta_2 = 74{,}6°$ |
| 41,8° | límite crítico |
| 45° | reflexión total |

El límite se aplica al paso del vidrio al aire.

## 20.3 Espejos esféricos y aumento lateral

Un espejo esférico tiene un eje principal que pasa por su vértice y su centro de curvatura. Para rayos próximos al eje y con ángulos pequeños, llamados paraxiales, un espejo cóncavo concentra un haz paralelo en el foco. Su distancia focal es $f = R/2$, positiva para el cóncavo. Un espejo convexo hace divergir ese haz; sus prolongaciones pasan por un foco virtual, con $f < 0$. La aproximación paraxial reduce las aberraciones que aparecen al usar zonas alejadas del eje.

Usaremos la convención de *distancias reales positivas*: $s > 0$ para un objeto real que envía rayos incidentes al espejo; $s' > 0$ para una imagen real delante de él, en el lado de los rayos reflejados, y $s' < 0$ para una imagen virtual detrás. Las alturas se miden con signo respecto del eje. En esta convención,

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}, \qquad m = \frac{h'}{h} = -\frac{s'}{s}. \tag{20.5}$$

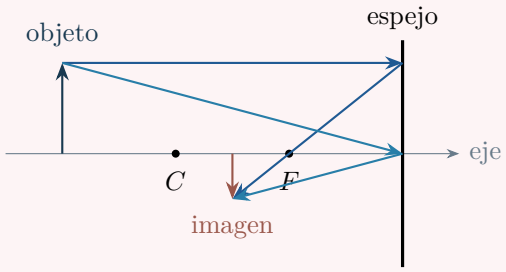
El aumento $m > 0$ indica imagen derecha respecto del objeto; $m < 0$, imagen invertida. Su magnitud compara tamaños. Para construir una imagen bastan dos rayos: uno paralelo al eje se refleja pasando por el foco o alejándose de su prolongación; uno dirigido al centro de curvatura retorna sobre su trayectoria. También puede usarse un rayo que llegue al vértice: se refleja simétricamente respecto del eje, que allí coincide con la normal. El cruce de los rayos reflejados, o de sus prolongaciones, localiza la imagen.

### PROBLEMA RESUELTO 20.6 · Proyectar con un espejo cóncavo

Un espejo cóncavo tiene $f = 20{,}0\,\text{cm}$. Un objeto real de 4,00 cm de altura está a 60,0 cm del vértice. Halla posición, altura y naturaleza de la imagen. *Resolución.* Todas las distancias se expresan en centímetros:

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{20} - \frac{1}{60} = \frac{1}{30}, \qquad s' = 30{,}0\,\text{cm}, \qquad m = -\frac{30}{60} = -0{,}500.$$

La imagen es real, está delante del espejo y tiene $h' = -2{,}00\,\text{cm}$. El signo de la altura indica inversión. Una pantalla situada a 30 cm puede recibir la imagen dentro de la aproximación paraxial.



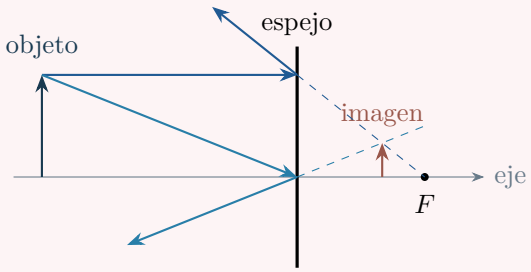

Construcción paraxial en un espejo cóncavo, representado por su plano en el vértice. Los rayos reflejados se cruzan entre el foco y el centro de curvatura.

### PROBLEMA RESUELTO 20.7 · Localizar una imagen virtual en un espejo convexo

Un espejo convexo tiene $f = -15{,}0\,\text{cm}$. Frente a él hay un objeto de altura 6,00 cm a $s = 30{,}0\,\text{cm}$. Determina su imagen. *Resolución.* La focal negativa expresa la divergencia:

$$\frac{1}{s'} = -\frac{1}{15} - \frac{1}{30} = -\frac{1}{10}, \qquad s' = -10{,}0\,\text{cm}, \qquad m = +\frac{1}{3}.$$

La imagen virtual queda 10,0 cm detrás del espejo, es derecha y tiene altura 2,00 cm. Las prolongaciones de los rayos reflejados se encuentran en ese punto. El signo positivo del aumento concuerda con el trazado.




En el espejo convexo, las prolongaciones discontinuas de los rayos reflejados localizan la imagen virtual detrás del espejo. Representación paraxial en el vértice.

## 20.4 Lentes delgadas y convención de signos

Una lente desvía luz por refracción en sus superficies. El modelo de lente delgada aproxima su espesor como pequeño frente a las distancias relevantes y trabaja con rayos paraxiales. Consideraremos lentes en aire por ambos lados. Una lente convergente tiene focal $f > 0$ y una divergente $f < 0$. La acción depende tanto de las superficies como de los índices de la lente y del entorno.

Para cada lente se toma $s > 0$ cuando el objeto real está en el lado de incidencia. Una imagen real en el lado de salida tiene $s' > 0$; una imagen virtual en el lado de incidencia tiene $s' < 0$. La ecuación y el aumento conservan la forma

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}, \qquad m = -\frac{s'}{s}. \tag{20.6}$$

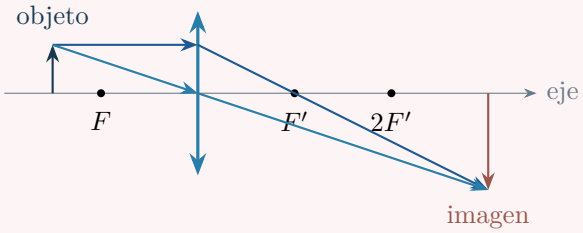
El significado geométrico de los lados se adapta a la transmisión a través de la lente. Un rayo paralelo al eje sale por el foco posterior de una convergente; en una divergente, su prolongación hacia atrás pasa por el foco del lado de incidencia. Un rayo por el centro óptico atraviesa la lente delgada con dirección aproximadamente constante. Esos dos rayos permiten construir las imágenes de los ejemplos siguientes.

**PROBLEMA RESUELTO 20.8 · Formar una imagen real aumentada**

Una lente convergente de $f = 12{,}0\,\text{cm}$ recibe luz de un objeto de 2,00 cm de altura situado a 18,0 cm. Halla la imagen y la posición de una pantalla para verla proyectada. *Resolución.* Como el objeto está entre $f$ y $2f$,

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{12} - \frac{1}{18} = \frac{1}{36}, \qquad s' = 36{,}0\,\text{cm}, \qquad m = -2{,}00.$$

La imagen real se forma al otro lado de la lente, es invertida y tiene altura $h' = -4{,}00\,\text{cm}$. La pantalla se coloca a 36,0 cm de la lente. El trazado concuerda con el aumento de tamaño.



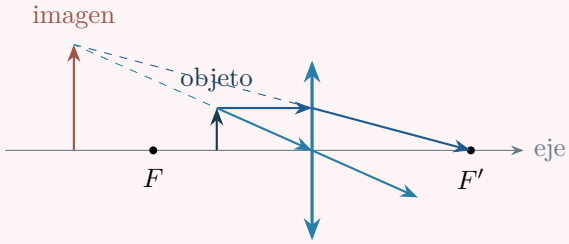

Dos rayos que salen de la punta del objeto convergen en la punta de la imagen real. Las alturas con signo describen su inversión.

### PROBLEMA RESUELTO 20.9 · Usar una convergente como lupa

Un objeto de 2,00 cm de altura se coloca a 6,00 cm de una lente convergente de focal 10,0 cm. Determina su imagen y explica cómo observarla. *Resolución.* El objeto queda dentro de la distancia focal:

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{10} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{15}, \qquad s' = -15{,}0\,\text{cm}, \qquad m = +2{,}50.$$

La imagen virtual está en el lado del objeto, a 15,0 cm de la lente, y tiene altura 5,00 cm. Se observa mirando desde el lado de salida. El ojo recibe rayos divergentes cuyas prolongaciones sitúan la imagen. Este aumento lateral describe tamaños; el aumento angular de una lupa también depende de la posición del ojo y de la referencia de observación.




Con el objeto dentro del foco, los rayos emergen divergentes. Sus prolongaciones sitúan una imagen virtual derecha y aumentada.

### PROBLEMA RESUELTO 20.10 · Interpretar una focal negativa

Una lente divergente de focal −20,0 cm tiene un objeto real a 30,0 cm. Calcula posición y aumento.

*Resolución.* Con la convención declarada,

$$\frac{1}{s'} = -\frac{1}{20} - \frac{1}{30} = -\frac{1}{12}.$$

Así, $s' = -12{,}0\,\text{cm}$ y $m = +0{,}400$. La imagen es virtual, derecha y reducida. Queda entre la lente y el foco del lado del objeto.

| magnitud | valor |
|---|---|
| $f$ | −20,0 cm |
| $s'$ | −12,0 cm |
| $m$ | +0,400 |

Los signos sitúan una imagen virtual derecha.

Si un objeto real está justo en el foco de una lente convergente, los rayos emergentes de cada punto son paralelos. La ecuación da $1/s' = 0$, expresado como imagen en el infinito. Para enfocar un objeto muy lejano, los rayos incidentes son aproximadamente paralelos y la imagen se forma cerca del plano focal posterior. Una cámara modifica la separación entre la lente y el sensor para ajustar el enfoque a otras distancias.

## 20.5 Sistemas de lentes y potencia óptica

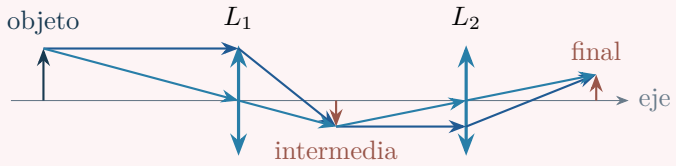
En un sistema de dos lentes se sigue la luz en su orden de propagación. La primera imagen actúa como objeto de la segunda. Conviene ubicar las lentes y las imágenes en un eje de posiciones $x$, y luego asignar $s$ y $s'$ para cada elemento. Si los rayos llegan a la segunda lente divergiendo desde un punto anterior a ella, su objeto es real. Si llegan convergiendo hacia un punto posterior, ese punto es un objeto virtual y se usa $s < 0$ para la segunda lente. El aumento total es el producto de los aumentos de las etapas.

### PROBLEMA RESUELTO 20.11 · Reconstruir una imagen en dos etapas

Dos lentes convergentes de focal 10,0 cm están en $x_1 = 0$ y $x_2 = 35{,}0\,\text{cm}$. Un objeto de altura 4,00 cm está en $x = -30{,}0\,\text{cm}$. La luz viaja hacia $+x$. Halla las dos imágenes y el aumento final. *Resolución.* Para la primera lente, $s_1 = 30\,\text{cm}$ y $1/s_1' = 1/10 - 1/30 = 1/15$, luego la imagen intermedia está en $x = 15\,\text{cm}$. Su aumento es $m_1 = -15/30 = -0{,}500$. Ese punto está 20 cm antes de la segunda lente, de modo que $s_2 = 20\,\text{cm}$. Por tanto,

$$s_2' = 20{,}0\,\text{cm}, \qquad x_{\text{final}} = 55{,}0\,\text{cm}, \qquad m_2 = -1, \qquad m = m_1 m_2 = +0{,}500.$$

La imagen final es real y derecha respecto del objeto original, con altura 2,00 cm. Cada etapa invierte la orientación; el producto registra ambas inversiones.




Construcción sucesiva de dos etapas: la primera imagen sirve como objeto real de la segunda. Se muestran dos rayos de construcción en cada etapa; la escala horizontal es común.

La potencia óptica $P = 1/f$, con $f$ en metros, se mide en dioptrías: $1\,\text{D} = 1\,\text{m}^{-1}$. Una potencia positiva corresponde a una lente convergente y una negativa a una divergente. Para lentes delgadas en contacto, en el mismo medio y dentro de la aproximación paraxial, las potencias se suman: $P_{\text{eq}} = P_1 + P_2$. La separación finita entre lentes requiere el tratamiento por etapas o una fórmula que incluya esa separación.

### PROBLEMA RESUELTO 20.12 · Combinar potencias en contacto

Dos lentes delgadas en aire se colocan en contacto. Sus focales son $+20{,}0\,\text{cm}$ y $-30{,}0\,\text{cm}$. Halla la potencia y la focal equivalentes.

*Resolución.* Al convertir las focales a metros, $P_1 = +5{,}00\,\text{D}$ y $P_2 = -3{,}33\,\text{D}$. Entonces,

$$P_{\text{eq}} = +1{,}67\,\text{D}, \qquad f_{\text{eq}} = +0{,}600\,\text{m}.$$

El conjunto conserva acción convergente y presenta una focal mayor que la de la primera lente aislada. Se han sumado potencias con signo.

| elemento | $P$ (D) |
|---|---|
| lente 1 | +5,00 |
| lente 2 | −3,33 |
| conjunto | +1,67 |

En contacto, las potencias se suman con signo.

## 20.6 Interferencia y doble rendija

Los campos de dos ondas luminosas se superponen. Para obtener un patrón estable, su diferencia de fase debe mantenerse suficientemente definida durante la observación: esa relación se llama coherencia. Dos rendijas iluminadas por una misma fuente apropiada pueden actuar como fuentes coherentes. La frecuencia común, la polarización compatible y una diferencia de fase estable permiten observar franjas de interferencia.

Consideremos dos rendijas estrechas separadas una distancia $d$, iluminadas en fase con luz monocromática, y una pantalla lejana a distancia $L$. En la dirección $\theta$, medida desde el eje central perpendicular al plano de las rendijas, la diferencia de caminos es aproximadamente $\delta = d\sin\theta$. Los máximos y mínimos de interferencia cumplen

$$\begin{aligned} d\sin\theta &= m\lambda && \text{(máximos)}, \quad m = 0, \pm1, \pm2, \dots, \\ d\sin\theta &= (m+\tfrac{1}{2})\lambda && \text{(mínimos)}, \quad m \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{20.7}$$

Aquí $\lambda$ es la longitud de onda en el medio que llena los caminos. El patrón completo incluye también la difracción de cada rendija de ancho finito. La aproximación de fuentes estrechas describe las franjas dentro de su envolvente.

En una pantalla plana, $y = L\tan\theta$. Para $|y| \ll L$, $\sin\theta \simeq \tan\theta \simeq y/L$ y

$$y_m \simeq \frac{m\lambda L}{d}, \qquad \Delta y \simeq \frac{\lambda L}{d}. \tag{20.8}$$

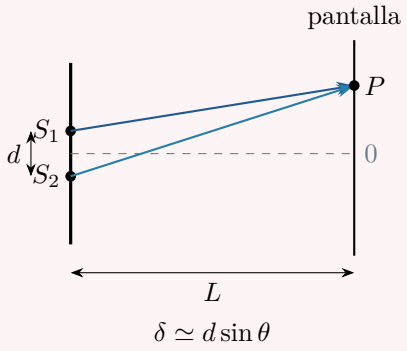
Así aparecen franjas aproximadamente equidistantes cerca del centro. Para ángulos grandes se conservan la condición angular y la relación con la tangente. Con haces de igual intensidad individual $I_0$, la intensidad ideal es $I = 4I_0\cos^2(\Delta\varphi/2)$, con $\Delta\varphi = 2\pi\delta/\lambda$. Los mínimos redistribuyen la energía en el patrón; al considerar todo el sistema se mantiene el balance energético.

**PROBLEMA RESUELTO 20.13 · Medir una longitud de onda con franjas**

Dos rendijas separadas 0,250 mm producen franjas con luz de 500 nm en aire. La pantalla está a 2,00 m. Calcula la separación entre máximos y la posición del máximo $m = 2$. *Resolución.* En metros, $d = 2{,}50\times10^{-4}$ y $\lambda = 5{,}00\times10^{-7}$. Por tanto,

$$\Delta y = \frac{(5{,}00\times10^{-7})(2{,}00)}{2{,}50\times10^{-4}} = 4{,}00\,\text{mm}, \qquad y_2 = 8{,}00\,\text{mm}.$$

El cociente $y_2/L = 0{,}00400$ respalda la aproximación de ángulos pequeños. Si se mide $y_2$, la misma relación permite despejar $\lambda = y_2 d/(2L)$.



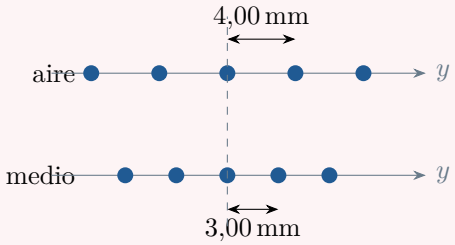

Dos caminos coherentes llegan al mismo punto de la pantalla. Esquema con separación vertical ampliada; las posiciones numéricas se calculan con la geometría del problema.

**PROBLEMA RESUELTO 20.14 · Sumergir todo el montaje de interferencia**

El montaje del problema 20.13, incluidos los caminos hasta la pantalla, se llena con un medio transparente homogéneo de índice $4/3$ para esa luz. Se conservan la geometría y la frecuencia de la fuente. Halla la nueva separación entre máximos. *Resolución.* La longitud de onda se reduce a $\lambda = 500/(4/3) = 375\,\text{nm}$. Así,

$$\Delta y_{\text{medio}} = \frac{\Delta y_{\text{aire}}}{n} = 3{,}00\,\text{mm}.$$

La frecuencia permanece en $c/\lambda_0 = 6{,}00 \times 10^{14}\,\text{Hz}$. El patrón se contrae porque los mismos incrementos de diferencia de fase requieren menores diferencias geométricas de caminos. Se ha supuesto que ambos recorridos están enteramente en el mismo medio.




Los puntos marcan máximos de interferencia. La misma geometría en un medio de índice $4/3$ reduce la separación entre ellos por el factor $3/4$.

## 20.7 Difracción y resolución

Una abertura iluminada produce un haz con extensión angular. La superposición de las contribuciones de distintas zonas de la abertura determina la difracción. Para una rendija de ancho $a$, con iluminación monocromática uniforme y observación en campo lejano, los mínimos satisfacen

$$a \sin\theta = p\lambda, \qquad p = \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{20.9}$$

El centro, $\theta = 0$, es un máximo. La cancelación del primer mínimo puede entenderse dividiendo la rendija en dos mitades: a cada punto de una mitad le corresponde otro, separado $a/2$, cuya diferencia de caminos es $\lambda/2$ cuando $a \sin\theta = \lambda$. Las contribuciones emparejadas llegan en oposición de fase. El valor $p = 0$ pertenece al máximo central y se trata por separado.

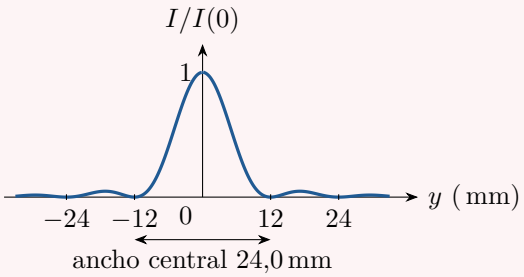
En una pantalla lejana y para ángulos pequeños, los primeros mínimos están en $y_{\pm 1} \simeq \pm \lambda L/a$. El ancho del máximo central entre ellos es $2\lambda L/a$. La condición práctica de campo lejano es $L \gg a^2/\lambda$, o un montaje óptico que observe el patrón angular mediante una lente. Reducir $a$ aumenta la extensión angular del máximo central.

**PROBLEMA RESUELTO 20.15 · Calcular el ancho del máximo central**

Una rendija de ancho 0,100 mm se ilumina con luz de 600 nm en aire. La pantalla está a 2,00 m. Halla el primer mínimo positivo y el ancho central. *Resolución.* El cociente $\lambda/a = 0{,}00600$ corresponde a un ángulo pequeño. Por ello,

$$y_1 \simeq \frac{(6{,}00\times10^{-7})(2{,}00)}{1{,}00\times10^{-4}} = 0{,}0120\,\text{m}, \qquad 2y_1 = 24{,}0\,\text{mm}.$$

Los primeros mínimos están a $\pm 12{,}0$ mm. Además, $a^2/\lambda \simeq 0{,}0167$ m, mucho menor que $L$, coherente con campo lejano. El máximo central ocupa el intervalo entre esos dos mínimos.




Perfil ideal de una rendija con iluminación uniforme. Los primeros mínimos delimitan el máximo central; los máximos laterales son menos intensos.

Una abertura circular forma un disco central de difracción rodeado por anillos. Para una abertura ideal de diámetro $D$ con iluminación uniforme, el primer mínimo está a un ángulo pequeño $\theta \simeq 1{,}22\lambda/D$, en radianes. El criterio de Rayleigh considera apenas resueltas dos fuentes puntuales incoherentes de brillo comparable cuando el máximo de una coincide con el primer mínimo de la otra:

$$\theta_{\text{mín}} \simeq 1{,}22\frac{\lambda}{D}. \tag{20.10}$$

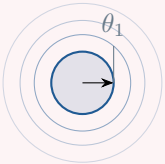
Es un criterio convencional para ese patrón ideal. Las aberraciones, el contraste, el detector y la atmósfera también influyen en la resolución de un instrumento real. El aumento agranda una imagen; la resolución determina qué detalles próximos pueden distinguirse.

**PROBLEMA RESUELTO 20.16 · Distinguir aumento de resolución**

Un instrumento ideal tiene abertura circular de diámetro 5,00 mm y observa luz de 550 nm en aire. Dos fuentes puntuales incoherentes, de brillo comparable, están separadas transversalmente 1,00 m a 10,0 km. Aplica Rayleigh y halla el diámetro mínimo ideal para alcanzar su separación angular. *Resolución.* La separación angular es $\alpha \simeq 1/10\,000 = 1{,}00 \times 10^{-4}$ rad. La abertura dada produce

$$\theta_{\text{mín}} = 1{,}22\frac{550 \times 10^{-9}}{5{,}00 \times 10^{-3}} = 1{,}342 \times 10^{-4}\,\text{rad}.$$

Como $\alpha < \theta_{\text{mín}}$, la pareja queda por debajo del umbral de Rayleigh. Para alcanzar ese umbral se requiere $D = 1{,}22\lambda/\alpha = 6{,}71$ mm. Aumentar la imagen con la misma abertura conserva la relación angular entre separación y difracción.




$\theta_1 \simeq 1{,}22\lambda/D$
$\alpha = 1{,}00 \times 10^{-4}$ rad
$\theta_1 = 1{,}342 \times 10^{-4}$ rad

patrón angular esquemático

El primer mínimo rodea el disco central de una abertura circular. El criterio de Rayleigh compara su radio angular con la separación de dos fuentes.

## 20.8 Dispersión, espectro y color

La dispersión es la dependencia del índice con la frecuencia. En muchos vidrios transparentes y dentro del visible, el índice para luz violeta es mayor que para roja: la luz violeta cambia más su dirección al atravesar un prisma. Cada componente cumple Snell con su propio índice. La luz blanca contiene un conjunto amplio de frecuencias; un prisma puede separar sus componentes en distintas direcciones.

En un prisma de ángulo de vértice $A$, situado en aire, los ángulos internos cumplen $r_1 + r_2 = A$. La desviación total es $\delta = i + e - A$, donde $i$ y $e$ son los ángulos externos con las normales. En el recorrido simétrico de desviación mínima, $i = e$ y $r_1 = r_2 = A/2$, de modo que

$$\delta_{\text{mín}} = 2\arcsin\left(n \sin\frac{A}{2}\right) - A. \tag{20.11}$$

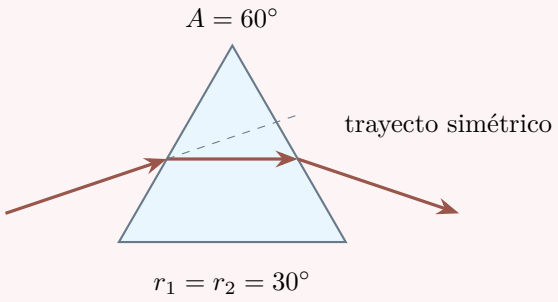
Esta expresión requiere un recorrido transmitido y el ajuste de orientación correspondiente a cada índice.

**PROBLEMA RESUELTO 20.17 · Comparar la desviación mínima de dos colores**

Un prisma de $A = 60{,}0°$ tiene índices $n_r = 1{,}50$ para luz roja y $n_v = 1{,}53$ para violeta. Calcula la desviación mínima de cada componente al ajustar el prisma por separado para cada una. *Resolución.* Como $\sin(A/2) = 0{,}500$,

$$\delta_{r,\text{mín}} = 2\arcsin(0{,}750) - 60° \simeq 37{,}2°,$$
$$\delta_{v,\text{mín}} = 2\arcsin(0{,}765) - 60° \simeq 39{,}8°.$$

La diferencia entre los dos mínimos es aproximadamente 2,63°. El mayor índice violeta exige mayor desviación mínima. Estas mediciones corresponden a dos orientaciones ajustadas; la separación simultánea a una orientación fija se obtiene aplicando Snell en ambas caras para ese montaje.



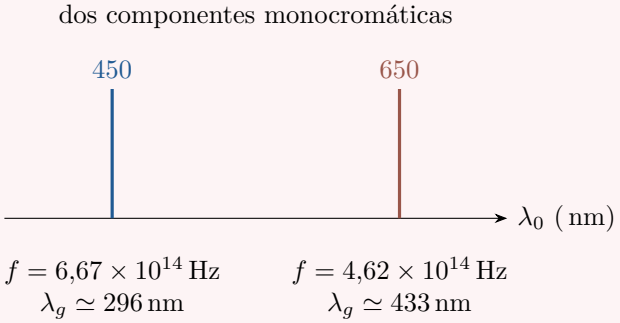

Trayecto simétrico de la componente roja en su ajuste de desviación mínima. Cada componente requiere su propio ajuste para comparar los valores mínimos.

El espectro describe cómo se distribuye la radiación entre frecuencias o longitudes de onda. Para una componente monocromática visible, la frecuencia conserva su identidad al atravesar una interfaz estacionaria; las etiquetas de color se suelen asociar a su longitud de onda en el vacío. El color percibido depende del espectro que llega al ojo, de la respuesta de sus receptores y de las condiciones de observación. Mezclas espectrales diferentes pueden producir apariencias de color semejantes.

La amplitud del campo influye en la intensidad: para una misma onda en un mismo medio, la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud. La frecuencia y la composición espectral aportan información distinta. Bajo iluminación blanca, un objeto puede reflejar selectivamente unas componentes y absorber otras; la iluminación modifica el espectro disponible. Estas relaciones permiten explicar colores de fuentes, filtros y superficies con sus respectivos mecanismos físicos.

**PROBLEMA RESUELTO 20.18 · Separar frecuencia, longitud de onda e intensidad**

Dos haces monocromáticos tienen longitudes de onda en el vacío 450 nm y 650 nm. En un vidrio sus índices son 1,52 y 1,50, respectivamente. Halla sus frecuencias y longitudes de onda interiores. Describe qué ocurre con la intensidad de cada haz si su amplitud eléctrica se duplica en el mismo medio. *Resolución.* Para la componente de 450 nm, $f = c/\lambda_0 \simeq 6{,}67\times10^{14}$ Hz y $\lambda = 450/1{,}52 \simeq 296$ nm. Para la de 650 nm, $f \simeq 4{,}62\times10^{14}$ Hz y $\lambda \simeq 433$ nm. Cada frecuencia conserva su valor en el vidrio. La longitud interior de 296 nm corresponde aquí a la componente visible de 450 nm en el vacío. Duplicar la amplitud multiplica por cuatro la intensidad de cada haz y conserva su frecuencia.




La posición de cada marca identifica la longitud de onda en el vacío; su altura es esquemática. Debajo se indican la frecuencia y la longitud de onda en el vidrio.

## Ejercicios para reconstruir y transferir

Usa $c = 3{,}00 \times 10^8$ m/s y $n_{\text{aire}} = 1$. En espejos esféricos y lentes delgadas, trabaja en régimen paraxial con la convención de distancias reales positivas de este capítulo. Para interferencia, supone fuentes coherentes en fase y polarizaciones compatibles. En los cálculos de franjas y difracción sobre pantallas, verifica la aproximación de ángulos pequeños.

**EJERCICIO 20.1 · Reconocer la referencia angular**

Un rayo forma 20,0° con la superficie de un espejo plano. Dibuja la normal y calcula los ángulos de incidencia y reflexión.

**EJERCICIO 20.2 · Separación en un espejo plano**

Un objeto está a 0,800 m de un espejo plano fijo. Se aleja de él 0,250 m. Halla la separación final objeto–imagen y su cambio.

**EJERCICIO 20.3 · Rapidez y longitud de onda**

Una luz de 540 nm en el vacío entra en un medio de índice 1,80. Halla frecuencia, rapidez y longitud de onda interior.

**EJERCICIO 20.4 · Entrada en agua**

Un rayo entra desde aire en agua de índice $4/3$ con incidencia de $30{,}0°$. Calcula el ángulo refractado.

**EJERCICIO 20.5 · Salir a través de caras paralelas**

Un rayo entra desde aire a una lámina de vidrio de caras paralelas, índice $1{,}50$, con incidencia de $30{,}0°$. Calcula los ángulos interiores y de salida al aire. Explica la relación entre las direcciones incidente y emergente.

**EJERCICIO 20.6 · Límite crítico en agua**

Un haz pasa de agua, $n = 4/3$, hacia aire. Halla el ángulo crítico y clasifica incidencias de $45{,}0°$ y $50{,}0°$.

**EJERCICIO 20.7 · Imagen en un espejo cóncavo**

Un objeto de altura $3{,}00\,\text{cm}$ está a $40{,}0\,\text{cm}$ de un espejo cóncavo de focal $15{,}0\,\text{cm}$. Halla $s'$, $m$ y $h'$ y clasifica la imagen.

**EJERCICIO 20.8 · Objeto dentro del foco de un espejo**

Un objeto está a $5{,}00\,\text{cm}$ de un espejo cóncavo de focal $10{,}0\,\text{cm}$. Obtén posición y aumento de la imagen y describe cómo se construye con rayos.

**EJERCICIO 20.9 · Espejo convexo**

Un espejo convexo tiene radio de curvatura de magnitud $40{,}0\,\text{cm}$. Un objeto real está a $60{,}0\,\text{cm}$. Determina focal con signo, posición y aumento.

**EJERCICIO 20.10 · Una lente con objeto en el doble del foco**

Una lente convergente de focal $8{,}00\,\text{cm}$ tiene un objeto de altura $2{,}50\,\text{cm}$ a $16{,}0\,\text{cm}$. Halla su imagen.

**EJERCICIO 20.11 · Imagen virtual aumentada**

Una lente convergente tiene focal $15{,}0\,\text{cm}$ y objeto a $10{,}0\,\text{cm}$. Halla posición y aumento, y explica desde qué lado se observa la imagen virtual.

**EJERCICIO 20.12 · Imagen en una lente divergente**

Un objeto real a $20{,}0\,\text{cm}$ de una lente divergente produce una imagen a $s' = -5{,}00\,\text{cm}$. Halla la focal y el aumento.

**EJERCICIO 20.13 · Ajustar una proyección**

Un objeto y una pantalla están separados 90,0 cm. Se desea una imagen real con aumento lateral $m = -2{,}00$ usando una lente delgada. Halla la distancia objeto–lente y la focal requerida.

**EJERCICIO 20.14 · Sumar potencias con signo**

Dos lentes delgadas en contacto tienen potencias $+4{,}00\,\mathrm{D}$ y $-1{,}50\,\mathrm{D}$. Calcula la focal equivalente y clasifica el conjunto.

**EJERCICIO 20.15 · Una imagen intermedia como objeto real**

Repite el problema 20.11 con la segunda lente en $x_2 = 45{,}0\,\mathrm{cm}$, conservando ambas focales y la posición y altura del objeto. Halla la posición final y el aumento total.

**EJERCICIO 20.16 · Objeto virtual para la segunda lente**

Una primera lente haría converger un haz hacia $x = 30{,}0\,\mathrm{cm}$. Antes de llegar allí, el haz atraviesa una segunda lente convergente en $x = 20{,}0\,\mathrm{cm}$, de focal 10,0 cm. Asigna $s_2$ con signo y halla la nueva posición de convergencia.

**EJERCICIO 20.17 · Máximos y mínimos de doble rendija**

Dos rendijas separadas 0,300 mm se iluminan con luz de 600 nm en aire. La pantalla está a 1,50 m. Halla la separación entre máximos y la posición del primer mínimo positivo.

**EJERCICIO 20.18 · Obtener una longitud de onda**

Un máximo de orden $m = 3$ está a 9,00 mm del centro, con $d = 0{,}400\,\mathrm{mm}$ y $L = 2{,}00\,\mathrm{m}$. Calcula la longitud de onda en aire.

**EJERCICIO 20.19 · Inferir un índice desde las franjas**

Al llenar por completo un montaje de doble rendija con un medio homogéneo, la separación entre máximos pasa de 4,50 mm en aire a 3,00 mm. La frecuencia y la geometría se conservan. Halla el índice del medio.

**EJERCICIO 20.20 · Ancho de una rendija**

Con luz de 500 nm en aire y pantalla a 2,00 m, el primer mínimo de una rendija está a 10,0 mm del centro. Halla el ancho de la rendija y el ancho del máximo central.

**EJERCICIO 20.21 · Cambiar la abertura**

Una rendija de 0,200 mm iluminada con 600 nm en aire tiene pantalla a 1,00 m. Halla el ancho central y predice su valor al reducir la rendija a 0,100 mm.

**EJERCICIO 20.22 · Resolver dos fuentes con una abertura circular**

Una abertura ideal de diámetro 10,0 mm observa luz de 500 nm en aire. Halla el umbral de Rayleigh y decide si dos fuentes puntuales incoherentes de brillo comparable, con separación angular $8{,}00 \times 10^{-5}$ rad, lo superan.

**EJERCICIO 20.23 · Índice de un prisma**

Un prisma en aire tiene $A = 60{,}0°$ y desviación mínima medida $40{,}0°$ para una componente monocromática. Obtén el índice de refracción para esa componente.

**EJERCICIO 20.24 · Espectro y amplitud**

Una luz monocromática de 600 nm en el vacío se propaga en un vidrio de índice 1,50. Halla frecuencia y longitud de onda interior. Si la amplitud eléctrica se reduce a la mitad en ese mismo medio, calcula la razón de intensidades y explica qué propiedad espectral conserva.

## Soluciones razonadas

**SOLUCIÓN 20.1.**
La perpendicular al espejo fija $\theta_i = 90° - 20° = 70{,}0°$. La reflexión conserva ese ángulo: $\theta_r = 70{,}0°$. Ambos se señalan entre cada rama y la normal.

**SOLUCIÓN 20.2.**
La distancia final al espejo es 1,05 m. La imagen queda a igual distancia detrás y la separación final es 2,10 m. La separación inicial era 1,60 m, por lo que aumenta 0,500 m.

**SOLUCIÓN 20.3.**
$f = c/\lambda_0 \simeq 5{,}56 \times 10^{14}$ Hz, $v = c/1{,}80 \simeq 1{,}67 \times 10^{8}$ m/s y $\lambda = 540/1{,}80 = 300$ nm. La frecuencia es común a ambos medios.

**SOLUCIÓN 20.4.**
$\sin\theta_2 = (3/4)\sin 30° = 0{,}375$. Resulta $\theta_2 \simeq 22{,}0°$, más cerca de la normal.

**SOLUCIÓN 20.5.**
Dentro del vidrio, $\theta_g = \arcsin(\sin 30°/1{,}50) \simeq 19{,}5°$. Las normales de ambas caras son paralelas, de modo que la segunda incidencia interior también es 19,5°. Al salir, $\sin\theta_{\text{salida}} = 1{,}50\sin\theta_g = 0{,}500$, luego sale a 30,0°. El rayo emergente es paralelo al incidente, con un desplazamiento lateral que depende del espesor.

**SOLUCIÓN 20.6.**
$\theta_c = \arcsin(3/4) \simeq 48{,}6°$. A 45° hay transmisión propagante, con $\theta_2 \simeq 70{,}5°$, además de reflexión parcial. A 50° hay reflexión interna total en el modelo de interfaz descrito.

**SOLUCIÓN 20.7.**
$1/s' = 1/15 - 1/40 = 1/24$, de donde $s' = 24{,}0$ cm. El aumento es $m = -24/40 = -0{,}600$ y $h' = -1{,}80$ cm. La imagen real e invertida se forma delante del espejo.

**SOLUCIÓN 20.8.**
$1/s' = 1/10 - 1/5 = -1/10$, así que $s' = -10{,}0$ cm y $m = +2{,}00$. La imagen virtual, derecha y aumentada, queda detrás del espejo. Se construye prolongando hacia atrás dos rayos reflejados.

**SOLUCIÓN 20.9.**
El espejo convexo tiene $f = -20{,}0\,\text{cm}$. Entonces $1/s' = -1/20 - 1/60 = -1/15$, $s' = -15{,}0\,\text{cm}$ y $m = +0{,}250$. La imagen es virtual, derecha y reducida.
**SOLUCIÓN 20.10.**
$1/s' = 1/8 - 1/16 = 1/16$, de modo que $s' = 16{,}0\,\text{cm}$. Con $m = -1$, la imagen es real, invertida y de altura $h' = -2{,}50\,\text{cm}$, al otro lado de la lente.
**SOLUCIÓN 20.11.**
$1/s' = 1/15 - 1/10 = -1/30$, por lo que $s' = -30{,}0\,\text{cm}$ y $m = +3{,}00$. La imagen es virtual y derecha. Se mira desde el lado de salida de la luz; sus rayos divergentes parecen proceder de la imagen del lado del objeto.
**SOLUCIÓN 20.12.**
$1/f = 1/20 - 1/5 = -3/20\,\text{cm}^{-1}$, luego $f = -20/3\,\text{cm} \simeq -6{,}67\,\text{cm}$. El aumento es $m = -(-5)/20 = +0{,}250$, coherente con una imagen virtual reducida.
**SOLUCIÓN 20.13.**
De $s'/s = 2$ y $s + s' = 90\,\text{cm}$ se obtiene $s = 30{,}0\,\text{cm}$ y $s' = 60{,}0\,\text{cm}$. La focal es $f = ss'/(s + s') = 20{,}0\,\text{cm}$. La imagen real está invertida y duplica el tamaño.
**SOLUCIÓN 20.14.**
$P_{\text{eq}} = 4{,}00 - 1{,}50 = +2{,}50\,\text{D}$. Su focal es $f = 1/P = +0{,}400\,\text{m}$. El signo positivo identifica acción convergente bajo las hipótesis de lentes en contacto.
**SOLUCIÓN 20.15.**
La imagen intermedia permanece en $x = 15\,\text{cm}$, con $m_1 = -0{,}500$. Para la segunda lente, $s_2 = 45 - 15 = 30\,\text{cm}$, luego $s_2' = 15\,\text{cm}$ y $m_2 = -0{,}500$. La imagen final está en $x = 60{,}0\,\text{cm}$ y el aumento total es $+0{,}250$, con altura $1{,}00\,\text{cm}$.
**SOLUCIÓN 20.16.**
El punto hacia el que converge el haz está 10 cm después de la segunda lente: es un objeto virtual para ella, con $s_2 = -10\,\text{cm}$. La ecuación da $1/s_2' = 1/10 - 1/(-10) = 1/5$. La convergencia final ocurre $5{,}00\,\text{cm}$ después de esa lente, en $x = 25{,}0\,\text{cm}$. El signo del objeto registra la convergencia previa.
**SOLUCIÓN 20.17.**
$\Delta y = \lambda L/d = (600 \times 10^{-9})(1{,}50)/(0{,}300 \times 10^{-3}) = 3{,}00\,\text{mm}$. El primer mínimo positivo está a la mitad: $y = 1{,}50\,\text{mm}$. Su cociente con $L$ es 0,00100, dentro de ángulos pequeños.
**SOLUCIÓN 20.18.**
$\lambda = y_3 d/(3L) = (9{,}00 \times 10^{-3})(0{,}400 \times 10^{-3})/(3 \times 2{,}00) = 600\,\text{nm}$. El cociente $y_3/L = 0{,}00450$ respalda la aproximación usada.
**SOLUCIÓN 20.19.**
Como $\Delta y_{\text{medio}} = \Delta y_{\text{aire}}/n$, resulta $n = 4{,}50/3{,}00 = 1{,}50$. La longitud de onda se reduce en esa proporción y la frecuencia se conserva.
**SOLUCIÓN 20.20.**
$a \simeq \lambda L/y_1 = (500 \times 10^{-9})(2{,}00)/(0{,}0100) = 1{,}00 \times 10^{-4}\,\text{m} = 0{,}100\,\text{mm}$. El ancho central es $2y_1 = 20{,}0\,\text{mm}$. Aquí $y_1/L = 0{,}00500$ y $a^2/\lambda = 0{,}0200\,\text{m} \ll L$.
**SOLUCIÓN 20.21.**
Al principio, $2\lambda L/a = 6{,}00\,\text{mm}$. Al reducir $a$ a la mitad, el ancho central se duplica hasta $12{,}0\,\text{mm}$. Los ángulos de los primeros mínimos son aproximadamente 0,00300 y $0{,}00600\,\text{rad}$, ambos pequeños.
**SOLUCIÓN 20.22.**
$\theta_{\text{mín}} = 1{,}22(500 \times 10^{-9})/(10{,}0 \times 10^{-3}) = 6{,}10 \times 10^{-5}\,\text{rad}$. La separación dada es mayor: las fuentes superan el umbral ideal de Rayleigh en estas condiciones.
**SOLUCIÓN 20.23.**
Al despejar, $n = \sin[(\delta_{\text{mín}} + A)/2]/\sin(A/2) = \sin 50^\circ/\sin 30^\circ \simeq 1{,}532$. El índice corresponde a la componente usada en la medición y al recorrido de desviación mínima.
**SOLUCIÓN 20.24.**
$f = 5{,}00 \times 10^{14}\,\text{Hz}$ y $\lambda = 400\,\text{nm}$. Como $I \propto E_0^2$ en el mismo medio, $I_{\text{final}}/I_{\text{inicial}} = (1/2)^2 = 1/4$. La frecuencia, que caracteriza esa componente espectral, conserva su valor.

## Una experiencia: localizar una imagen real

**Una lente y una pantalla de papel**

Usa una lupa convergente, una hoja blanca y un objeto bien iluminado, como una figura junto a una lámpara LED difusa. Trabaja con luz ambiental o una fuente de baja potencia. Mantén la lente orientada hacia el objeto y desplaza la hoja al otro lado hasta obtener una imagen definida. Mide las distancias aproximadas $s$ y $s'$ desde la lente y estima $f = ss'/(s + s')$.

Repite con tres posiciones del objeto, manteniéndolo más lejos que la focal estimada. Registra tamaño, orientación y distancia de la imagen. Compara los valores de $f$ e identifica la incertidumbre al localizar la máxima nitidez y al medir desde una lente de espesor finito. Luego coloca el objeto dentro de la distancia focal y observa a través de la lupa desde el lado de salida: dibuja las prolongaciones que explican la imagen virtual. Para cuidar los ojos y evitar concentraciones intensas de luz, realiza toda la experiencia con fuentes difusas y mantén la lente alejada de la dirección del Sol.

## Diagnóstico antes de avanzar

Una lente convergente ideal de focal 10,0 cm forma en aire la imagen de un objeto de 2,00 cm de altura situado a 30,0 cm. Su abertura circular tiene diámetro 5,00 mm y se usa luz de 500 nm en el vacío. Calcula la posición y la altura de la imagen. Estima el radio del disco de difracción hasta el primer mínimo en el plano de imagen usando $r \simeq 1{,}22\lambda s'/D$. Después, en un montaje independiente de doble rendija con la misma luz, $d = 0{,}250$ mm y $L = 1{,}00$ m, calcula la separación entre máximos. Explica qué cambia al reducir cada abertura o separación a la mitad.

**Contraste.** La ecuación de lentes da $s' = 15{,}0$ cm y $m = -0{,}500$, por lo que $h' = -1{,}00$ cm: la imagen es real e invertida. Su radio de difracción ideal es $r \simeq 1{,}22(500 \times 10^{-9})(0{,}150)/(0{,}00500) = 18{,}3\,\mu$m. Reducir el diámetro $D$ a la mitad duplica ese radio hasta $36{,}6\,\mu$m, conservando la posición geométrica paraxial. En el montaje de doble rendija, $\Delta y = \lambda L/d = 2{,}00$ mm; reducir $d$ a la mitad duplica la separación a 4,00 mm. El primer cambio ensancha la respuesta de una abertura circular y el segundo redistribuye las franjas de dos fuentes coherentes. Las dos predicciones proceden de la superposición ondulatoria aplicada a geometrías diferentes.

**Lecturas de apoyo.** H. D. Young y R. A. Freedman, *Física universitaria*, volumen 2, 12.ª edición, secciones 33.1–33.4, 34.1–34.4, 35.1–35.3, 36.1–36.3 y 36.7. R. A. Serway y C. Vuille, *Fundamentos de física*, volumen 2, 9.ª edición, capítulos 22–24 y sección 25.6. Los problemas, los datos y las ayudas visuales de este capítulo se han preparado para esta obra.

# CAPÍTULO 21

# FÍSICA DEL UNIVERSO: ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA INTRODUCTORIA


21.1 Distancias y tiempos de viaje de la luz . . . . . 425
21.2 Paralaje: una distancia a partir de un ángulo . . . . . 426
21.3 Tamaño angular y resolución de los instrumentos . . . . . 428
21.4 Órbitas y masas: una aplicación de Kepler . . . . . 429
21.5 Luminosidad y flujo recibido . 431
21.6 Espectro térmico, temperatura y radio . . . . . 433
21.7 Líneas espectrales y velocidad radial . . . . . 436
21.8 Reunir observaciones para construir un modelo estelar . . . . 437
Ejercicios para reconstruir y transferir 438
Soluciones razonadas . . . . . 441
Una experiencia: medir un desplazamiento de paralaje . . . . . 443
Diagnóstico antes de avanzar . . . . 443


Una estrella puede aparecer como un punto y ofrecer, aun así, información sobre su distancia, su temperatura y su movimiento. Esa información llega distribuida entre posiciones angulares, intensidades y longitudes de onda. Las mediciones adquieren significado al relacionarlas mediante geometría, gravitación y modelos de emisión.

La inferencia astronómica reúne observaciones distintas de un mismo objeto. Una paralaje permite convertir un flujo recibido en luminosidad; un espectro aporta una temperatura y una velocidad radial; una órbita puede revelar masas. Cada relación conserva las condiciones que permiten usarla y transmite parte de la incertidumbre de los datos al resultado.

## 21.1 Distancias y tiempos de viaje de la luz

La unidad astronómica, símbolo internacional au, es una unidad de longitud definida exactamente por $1\,\mathrm{au} = 149\,597\,870\,700\,\mathrm{m}$. Su escala corresponde aproximadamente a la separación media entre la Tierra y el Sol. En cálculos de tres cifras significativas usaremos $1\,\mathrm{au} \simeq 1{,}496 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$ y $c \simeq 3{,}00 \times 10^{8}\,\mathrm{m/s}$. Una señal luminosa recorre una distancia $d$ en el tiempo

$$t = \frac{d}{c}. \tag{21.1}$$

La ecuación supone propagación aproximadamente rectilínea en el vacío, con distancia y movimiento de los extremos tratados según el modelo indicado. Para una señal que va y regresa, el tiempo total comprende los dos trayectos.

**PROBLEMA RESUELTO 21.1 · Estimar el tiempo de una señal solar**

Calcula cuánto tarda la luz en recorrer 1,00 au y cuánto tardaría un intercambio de ida y vuelta entre dos puntos fijos separados esa distancia.

*Resolución.* Con las aproximaciones declaradas,

$$t = \frac{1{,}496 \times 10^{11}}{3{,}00 \times 10^{8}} \simeq 499\,\mathrm{s} = 8{,}31\,\mathrm{min}.$$

El recorrido de ida y vuelta tiene longitud $2d$, de modo que tarda aproximadamente $997\,\mathrm{s} = 16{,}6\,\mathrm{min}$. Cada tiempo corresponde a la trayectoria indicada.

| trayecto | $t$ (min) |
|---|---|
| ida | 8,31 |
| ida y vuelta | 16,6 |

Los tiempos suman las longitudes de cada recorrido.

El año luz es la distancia que recorre la luz en el vacío durante un año juliano de 365,25 días, es decir, $31\,557\,600\,\mathrm{s}$. Su valor es aproximadamente $9{,}461 \times 10^{15}\,\mathrm{m}$. Una distancia de cuatro años luz corresponde a un tiempo de viaje de cuatro años en el modelo de extremos fijos. La imagen recibida permite estudiar el estado emisor asociado a ese tiempo de propagación.

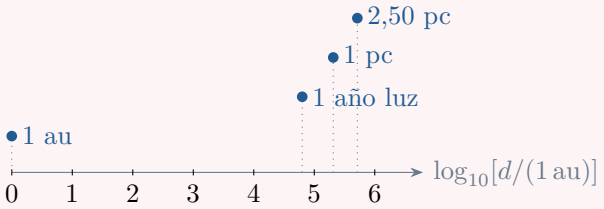
El parsec, símbolo pc, está ligado a la medición angular de distancias. Su definición exacta es $1\,\mathrm{pc} = (648\,000/\pi)\,\mathrm{au}$, aproximadamente $3{,}086 \times 10^{16}\,\mathrm{m}$ o 3,262 años luz. El segundo de arco, $1'' = 1/3600$ de grado, es una unidad angular. En radianes, $1'' = \pi/648\,000 \simeq 4{,}848 \times 10^{-6}$. Esta pequeña unidad permite expresar desplazamientos aparentes de estrellas.

**PROBLEMA RESUELTO 21.2 · Expresar una distancia estelar en varias escalas**

Una estrella está a 2,50 pc. Expresa esa distancia en metros, unidades astronómicas y años luz. Estima el tiempo de viaje de la señal recibida, suponiendo distancia constante. *Resolución.* Con las equivalencias redondeadas,

$$d \simeq 7{,}72 \times 10^{16}\,\mathrm{m} \simeq 5{,}16 \times 10^{5}\,\mathrm{au} \simeq 8{,}16 \text{ años luz}.$$

El tiempo de propagación es aproximadamente 8,16 años. Las tres longitudes describen la misma separación y permiten compararla con escalas terrestres, orbitales y de propagación.




La escala logarítmica sitúa longitudes muy distintas en un mismo eje. Un avance de una unidad horizontal multiplica la distancia por diez.

## 21.2 Paralaje: una distancia a partir de un ángulo

Al observar un objeto desde posiciones distintas, su dirección cambia respecto de un fondo más lejano. Ese efecto geométrico se llama paralaje. Para una estrella, el desplazamiento anual debido a la órbita terrestre se describe mediante el ángulo de paralaje $p$, asociado a una base de 1 au. En la geometría ideal con la línea de base perpendicular a la dirección central, $\tan p = (1\,\mathrm{au})/d$. Como $p$ es muy pequeño,

$$p\ (\mathrm{rad}) \simeq \frac{1\,\mathrm{au}}{d}, \qquad d\ (\mathrm{pc}) \simeq \frac{1}{p\ (\mathrm{arcsec})}. \tag{21.2}$$

La definición del parsec fija la conversión a partir de un radián y una unidad astronómica; la forma recíproca procede de la aproximación angular. A esta escala, la diferencia respecto de la tangente resulta despreciable para la precisión de los ejercicios.

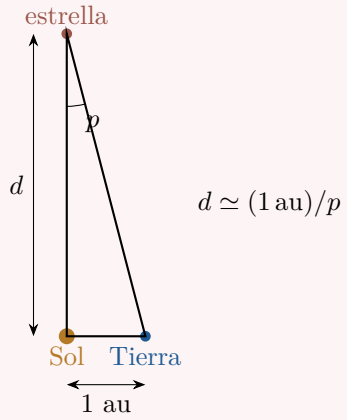
Dos posiciones de observación separadas por medio año pueden abarcar una base de 2 au. En una orientación favorable, el desplazamiento angular extremo a extremo es $2p$. La paralaje $p$ representa la semiamplitud del movimiento aparente correspondiente. En una dirección general, la proyección de la órbita produce una elipse aparente y las observaciones se ajustan teniendo en cuenta su geometría.

### PROBLEMA RESUELTO 21.3 · Convertir una paralaje en distancia

Se ha obtenido una paralaje anual de $0{,}0500''$ para una estrella cercana. Calcula su distancia en parsecs y años luz. *Resolución.* La paralaje indicada es $p$, por lo que

$$d \simeq \frac{1}{0{,}0500} = 20{,}0\,\text{pc} \simeq 65{,}2 \text{ años luz.}$$

Una paralaje menor corresponde a una distancia mayor. La medición angular conecta la posición aparente con una escala de longitud conocida: la unidad astronómica.



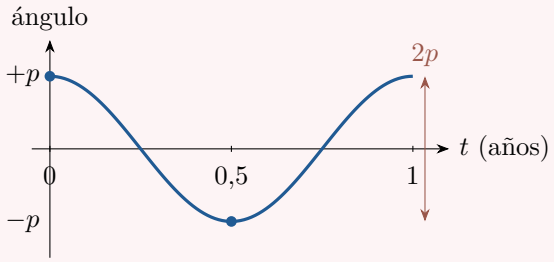

Geometría ideal de paralaje con base de una unidad astronómica. El ángulo se ha ampliado para hacer visible el triángulo.

### PROBLEMA RESUELTO 21.4 · Reconocer la semiamplitud de la oscilación anual

En un montaje ideal favorable, dos observaciones separadas por medio año muestran un desplazamiento extremo a extremo de $0{,}0800''$, una vez separado el movimiento propio de la estrella. Halla la paralaje y la distancia. *Resolución.* El desplazamiento observado equivale a $2p$. Por tanto,

$$p = 0{,}0400'', \qquad d \simeq \frac{1}{0{,}0400} = 25{,}0\,\text{pc}.$$

El movimiento propio es el cambio secular de dirección aparente debido al movimiento relativo de la estrella. La oscilación de paralaje repite su geometría anualmente; las mediciones en varias fechas permiten ajustar ambas contribuciones.




Una componente ideal de la oscilación anual tiene semiamplitud $p$. La diferencia entre sus dos extremos es $2p$. El movimiento propio se ha separado.

La función recíproca amplifica la importancia de la incertidumbre cuando la paralaje es pequeña. Para un valor positivo $p$ medido con incertidumbre pequeña $\Delta p \ll p$, la propagación lineal da $\Delta d/d \simeq \Delta p/p$. Un intervalo de paralaje $[p-\Delta p, p+\Delta p]$ se transforma en el intervalo asimétrico de distancias $[1/(p+\Delta p), 1/(p-\Delta p)]$, usando las unidades de la ecuación anterior. Con grandes errores relativos, el análisis de distancias incorpora el modelo estadístico de la medición y otra información disponible.

**PROBLEMA RESUELTO 21.5 · Transmitir la incertidumbre de una paralaje**

Un ajuste entrega $p = 40{,}0\,\text{mas}$, con intervalo considerado de 38,0 a 42,0 mas. Un milisegundo de arco, 1 mas, equivale a $0{,}001''$. Calcula la distancia central y transforma los extremos del intervalo.

*Resolución.* El valor central es $p = 0{,}0400''$, luego $d = 25{,}0\,\text{pc}$. Los límites se invierten al tomar recíprocos:

$$d_{\text{mín}} = 1/0{,}0420 \simeq 23{,}8\,\text{pc},$$
$$d_{\text{máx}} = 1/0{,}0380 \simeq 26{,}3\,\text{pc}.$$

La estimación lineal es $\Delta d \simeq 25(2/40) = 1{,}25\,\text{pc}$. El intervalo transformado conserva su ligera asimetría.

| $p$ ( mas) | $d$ ( pc) |
|---|---|
| 38,0 | 26,3 |
| 40,0 | 25,0 |
| 42,0 | 23,8 |

La transformación recíproca invierte los extremos del intervalo.

## 21.3 Tamaño angular y resolución de los instrumentos

Una separación angular $\theta$ entre dos puntos, observados a distancia común $d$, corresponde a una separación transversal $\ell \simeq d\theta$ cuando $\theta \ll 1$ se expresa en radianes. La misma geometría permite relacionar el diámetro angular completo $\Theta$ de un disco con su diámetro físico $D_\star$:

$$D_\star \simeq d\Theta, \qquad R_\star \simeq \frac{d\Theta}{2}. \tag{21.3}$$

La conversión entre parsecs, segundos de arco y unidades astronómicas ofrece una forma práctica: $D_\star\ (\text{au}) \simeq d\ (\text{pc})\,\Theta\ (\text{arcsec})$.

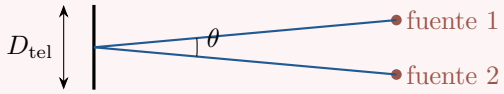
La resolución angular caracteriza qué estructuras próximas permite distinguir un instrumento en condiciones dadas. Para una abertura circular ideal, iluminación monocromática y dos fuentes puntuales incoherentes de brillo comparable, el criterio de Rayleigh del capítulo 20 da $\theta_{\text{mín}} \simeq 1{,}22\lambda/D_{\text{tel}}$. Aquí $D_{\text{tel}}$ es el diámetro de abertura. La precisión con que se estima la posición de una fuente también depende de la señal, la calibración y el ajuste de su perfil. Una buena estimación del centro de una imagen puede alcanzar incertidumbres inferiores al ancho de ese perfil. Esa posibilidad es relevante al medir paralajes.

**PROBLEMA RESUELTO 21.6 · Estimar la abertura requerida para separar dos fuentes**

Dos fuentes puntuales incoherentes, de brillo comparable, tienen separación $0{,}100''$. Estima el diámetro mínimo de una abertura circular ideal para alcanzar el umbral de Rayleigh a 550 nm. *Resolución.* La separación en radianes es $\theta = (0{,}100)(4{,}848 \times 10^{-6}) = 4{,}848 \times 10^{-7}$. Entonces,

$$D_{\mathrm{tel}} \simeq \frac{1{,}22(550 \times 10^{-9})}{4{,}848 \times 10^{-7}} \simeq 1{,}38\,\mathrm{m}.$$

La estimación describe el límite por difracción del instrumento ideal. La turbulencia atmosférica, las aberraciones y la respuesta del detector forman parte de la evaluación de un telescopio real.




$$\theta_{\mathrm{mín}} \simeq 1{,}22\lambda / D_{\mathrm{tel}}$$

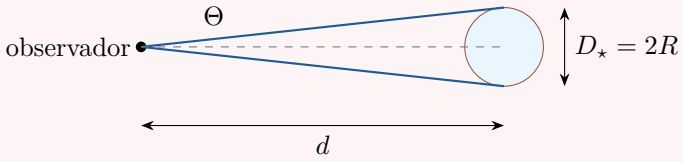
La separación angular de dos fuentes se compara con el ancho del patrón de difracción de la abertura. Esquema con ángulo ampliado.

**PROBLEMA RESUELTO 21.7 · Pasar de diámetro angular a radio físico**

Una estrella está a 10,0 pc y presenta un diámetro angular completo de 1,00 mas. Estima su diámetro y su radio mediante el modelo de disco pequeño. *Resolución.* Como $\Theta = 0{,}00100''$,

$$D_\star \simeq (10{,}0)(0{,}00100)\,\mathrm{au} = 0{,}0100\,\mathrm{au}, \qquad R_\star \simeq 7{,}48 \times 10^8\,\mathrm{m}.$$

El radio es la mitad del diámetro físico, 0,00500 au. La medida angular utilizada abarca el disco completo; esa elección fija el factor dos.




El diámetro angular completo corresponde al diámetro físico. Para un disco pequeño, $2R \simeq d\Theta$. La extensión angular se amplía en el esquema.

## 21.4 Órbitas y masas: una aplicación de Kepler

La gravitación del capítulo 11 permite inferir masas a partir de órbitas. En un sistema aislado de dos cuerpos, el movimiento relativo describe una elipse de semieje mayor $a$. Su período satisface

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(M+m)}. \tag{21.4}$$

Para un planeta de masa pequeña frente a la estrella, $M + m \simeq M$. En una binaria estelar se conserva la suma de ambas masas. El semieje de la órbita relativa es $a = a_1 + a_2$, donde $a_1$ y $a_2$

describen las órbitas respecto del centro de masas. La relación $Ma_1 = ma_2$ permite repartir la masa total entre los componentes.

Con períodos en años, semiejes en unidades astronómicas y masas expresadas en masas solares, la normalización usual, a la precisión de estos problemas, es

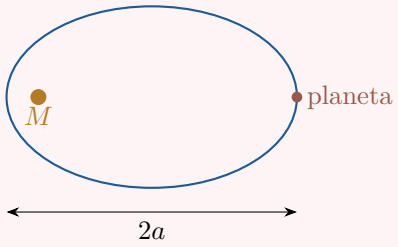
$$\left(\frac{T}{1\ \text{año}}\right)^2 \simeq \frac{[a/(1\,\text{au})]^3}{(M+m)/M_\odot}. \tag{21.5}$$

Usaremos esta forma redondeada en las comparaciones. $M_\odot$ designa la masa solar. Para una órbita elíptica, $a$ es el promedio de las distancias de periastro y apoastro; en una órbita circular coincide con el radio. La reconstrucción de una órbita observada también considera su inclinación y su proyección en el cielo.

**PROBLEMA RESUELTO 21.8 · Comparar períodos alrededor de otra estrella**

Un planeta de masa despreciable frente a su estrella tiene semieje mayor 4,00 au. La masa estelar es $2{,}00M_\odot$. Calcula el período y compáralo con el de una órbita de igual semieje alrededor de una estrella de masa $M_\odot$. *Resolución.* La normalización da $T^2 \simeq 4^3/2 = 32$ años$^2$, luego $T \simeq 5{,}66$ años. Para una masa solar, $T \simeq \sqrt{64} = 8{,}00$ años. A semieje fijo, el período varía como $M^{-1/2}$; el aumento de masa reduce el tiempo orbital por el factor $1/\sqrt{2}$.

$$T \propto a^{3/2} M^{-1/2}$$




En la órbita de un planeta ligero, la estrella ocupa un foco de la elipse. El semieje mayor y la masa central determinan el período del modelo de dos cuerpos.

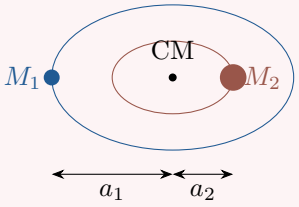
**PROBLEMA RESUELTO 21.9 · Obtener las masas de una binaria idealizada**

Dos estrellas tienen período 5,00 años y semieje mayor de la órbita relativa $a = 5{,}00\,\text{au}$. Sus semiejes respecto del centro de masas cumplen $a_1/a_2 = 2{,}00$. Halla la masa total y las masas individuales. *Resolución.* Primero se usa la órbita relativa:

$$\frac{M_1 + M_2}{M_\odot} \simeq \frac{5^3}{5^2} = 5{,}00.$$

La relación $M_1 a_1 = M_2 a_2$ da $M_2/M_1 = 2$. Por tanto, $M_1 \simeq 1{,}67 M_\odot$ y $M_2 \simeq 3{,}33 M_\odot$. La estrella más masiva describe la órbita menor alrededor del centro de masas. La suma $a_1 + a_2$ vale 5 au.

$$M_1 a_1 = M_2 a_2, \quad a = a_1 + a_2$$




Representación circular vista en perspectiva de una binaria con razón de masas $M_2/M_1 = 2$. El componente más masivo tiene menor semieje respecto del centro de masas.

**PROBLEMA RESUELTO 21.10 · Inferir una masa central desde una órbita**

Un planeta de masa despreciable recorre una órbita de semieje 3,00 au con período 6,00 años. Estima la masa de su estrella y predice el período de otro planeta con semieje 1,00 au alrededor de ella.

*Resolución.* De la ecuación normalizada,

$$\frac{M}{M_\odot} \simeq \frac{3^3}{6^2} = 0{,}750.$$

Para el segundo planeta, $T^2 \simeq 1/0{,}750$ en años cuadrados, así que $T \simeq 1{,}15$ años. La masa obtenida pertenece al mismo sistema central en ambas predicciones.

| $a$ (au) | $T$ (años) |
|---|---|
| 3,00 | 6,00 |
| 1,00 | 1,15 |

Las dos órbitas corresponden a la misma masa central inferida.

## 21.5 Luminosidad y flujo recibido

La luminosidad $L$ es la potencia total radiada por una fuente. El flujo radiativo recibido $F$ es la potencia que atraviesa una unidad de área de un detector orientado perpendicularmente a la propagación; se mide en $\text{W/m}^2$. Para una fuente isotrópica a distancia $d$, la energía emitida se distribuye sobre una esfera de área $4\pi d^2$. En un entorno transparente y aproximadamente estático,

$$F = \frac{L}{4\pi d^2}, \qquad L = 4\pi d^2 F. \tag{21.6}$$

Aquí $L$ y $F$ son bolométricos: integran todas las longitudes de onda. Una observación a través de un filtro mide solo una banda y requiere una conversión apropiada para obtener el flujo bolométrico. El polvo interestelar y la atmósfera pueden absorber o dispersar luz; las aplicaciones siguientes suponen que esos efectos son despreciables o que el flujo ya ha sido corregido.

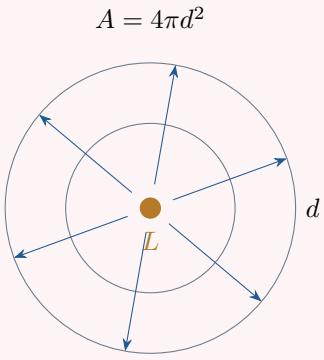
Para comparar potencias se usa la luminosidad solar nominal, $L_\odot^{\mathrm{N}} = 3{,}828 \times 10^{26}\,\mathrm{W}$, fijada por la Unión Astronómica Internacional como factor de conversión. En los problemas escribiremos $L_\odot$ para esta referencia. Las variaciones físicas del Sol se estudian mediante mediciones y sus incertidumbres.

**PROBLEMA RESUELTO 21.11 · Calcular la irradiancia a una unidad astronómica**

Modela la emisión solar como isotrópica, con luminosidad $L_\odot = 3{,}828 \times 10^{26}\,\mathrm{W}$. Calcula el flujo a 1,00 au, antes de cualquier interacción con la atmósfera. *Resolución.* La potencia atraviesa una esfera centrada en el Sol:

$$F = \frac{3{,}828 \times 10^{26}}{4\pi(1{,}496 \times 10^{11})^2} \simeq 1{,}36 \times 10^{3}\,\mathrm{W/m^2}.$$

Un detector de $1\,\mathrm{m}^2$ perpendicular a los rayos recibe aproximadamente 1,36 kW en este modelo. La inclinación de una superficie y el paso por la atmósfera modifican la potencia que llega a una superficie terrestre.



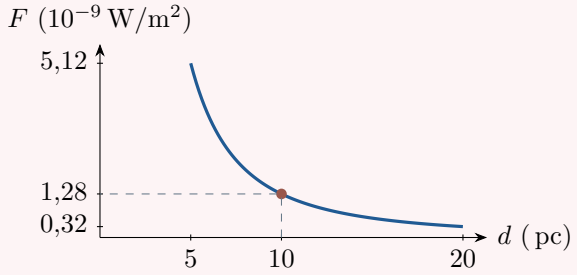

Sección de dos superficies esféricas centradas en la fuente. La misma potencia atraviesa ambas; el área mayor distribuye esa potencia entre más unidades de superficie.

**PROBLEMA RESUELTO 21.12 · Reconstruir una luminosidad estelar**

Una estrella a 10,0 pc produce flujo bolométrico corregido $F = 1{,}28 \times 10^{-9}\,\mathrm{W/m^2}$. Estima su luminosidad en vatios y en luminosidades solares. *Resolución.* La distancia es $d = 3{,}086 \times 10^{17}\,\mathrm{m}$. Por tanto,

$$L = 4\pi(3{,}086 \times 10^{17})^2(1{,}28 \times 10^{-9}) \simeq 1{,}53 \times 10^{27}\,\mathrm{W} \simeq 4{,}00 L_\odot.$$

La distancia convierte la potencia recibida por área en una potencia de emisión. Para una misma medición de $F$, una distancia inferida mayor llevaría a una luminosidad mayor, proporcional a $d^2$.




Ley inversa del cuadrado para la luminosidad inferida, aproximadamente $4L_\odot$. La altura gráfica se expresa en unidades indicadas por el eje vertical.

**PROBLEMA RESUELTO 21.13 · Comparar dos estrellas de igual flujo aparente**

Dos estrellas isotrópicas A y B producen el mismo flujo bolométrico recibido. Sus luminosidades son $L_A = L_\odot$ y $L_B = 4L_\odot$. Si A está a 10,0 pc, halla la distancia de B.

*Resolución.* Al igualar flujos,

$$\frac{L_A}{d_A^2} = \frac{L_B}{d_B^2}, \qquad \frac{d_B}{d_A} = \sqrt{\frac{L_B}{L_A}} = 2.$$

Así, $d_B = 20{,}0$ pc. La mayor potencia de B compensa exactamente la mayor superficie esférica sobre la que se reparte. Una distancia o una luminosidad conocida aporta la información adicional para interpretar el flujo.

| estrella | $L/L_\odot$ | $d$ ( pc) |
|---|---|---|
| A | 1 | 10 |
| B | 4 | 20 |

Ambas estrellas entregan el mismo flujo bolométrico.

## 21.6 Espectro térmico, temperatura y radio

Un cuerpo negro es un modelo de materia en equilibrio térmico que absorbe toda la radiación incidente y emite un espectro térmico determinado por su temperatura. El continuo de muchas estrellas puede aproximarse por un espectro térmico; las líneas y otros efectos de sus atmósferas añaden estructura. La ley de desplazamiento de Wien relaciona la temperatura absoluta con la longitud de onda del máximo de la distribución espectral por unidad de longitud de onda:

$$\lambda_{\mathrm{máx}} T = b, \qquad b \simeq 2{,}898 \times 10^{-3}\,\mathrm{m\,K}. \tag{21.7}$$

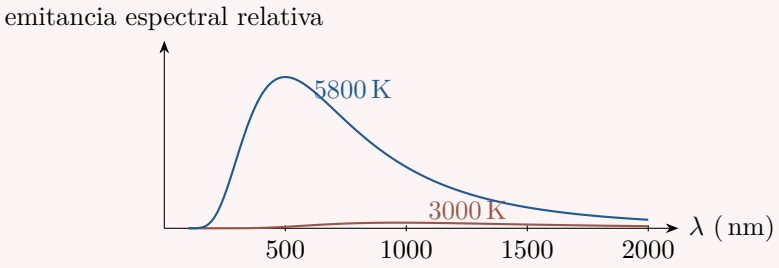
Se especifica la representación espectral porque las distribuciones por unidad de frecuencia y por unidad de longitud de onda alcanzan su máximo en posiciones diferentes al transformarse entre sí. La aplicación de Wien utiliza un continuo corregido por la respuesta instrumental y la absorción en el trayecto. Los colores aparentes reúnen información de bandas y de percepción visual; inferir una temperatura a partir de ellos exige un modelo espectral y del medio.

**PROBLEMA RESUELTO 21.14 · Inferir una temperatura desde un continuo térmico**

El continuo de una estrella, aproximado por un cuerpo negro y expresado por unidad de longitud de onda, tiene máximo en 500 nm una vez corregida la propagación. Calcula la temperatura del modelo. *Resolución.* Con $\lambda_{\mathrm{máx}} = 5{,}00 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}$,

$$T = \frac{2{,}898 \times 10^{-3}}{5{,}00 \times 10^{-7}} \simeq 5{,}80 \times 10^{3}\,\mathrm{K}.$$

La temperatura caracteriza el continuo térmico idealizado. Ese continuo abarca un intervalo amplio de longitudes de onda; la posición del máximo identifica una propiedad de su distribución.




Continuos ideales por unidad de longitud de onda, con una normalización vertical común. Al aumentar la temperatura, el máximo se desplaza hacia longitudes menores y crece la emisión total.

La ley de Stefan–Boltzmann da la potencia emitida por unidad de superficie de un cuerpo negro, $F_{\mathrm{sup}} = \sigma T^4$, con $\sigma \simeq 5{,}670 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$. Para una estrella esférica de radio $R$,

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{\mathrm{ef}}^4. \tag{21.8}$$

La temperatura efectiva $T_{\mathrm{ef}}$ es la temperatura del cuerpo negro que emitiría la misma potencia bolométrica por unidad de superficie estelar. Esta definición resulta útil incluso cuando el espectro real posee líneas y otras desviaciones respecto del continuo ideal. En los ejemplos de cuerpo negro identificaremos la temperatura de Wien con la efectiva, dentro del modelo.

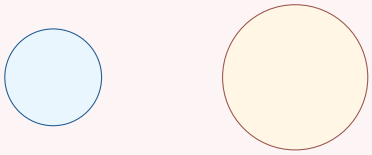
**PROBLEMA RESUELTO 21.15 · Separar los efectos de radio y temperatura**

Una estrella B tiene temperatura efectiva doble y luminosidad 36 veces mayor que una estrella A. Modela ambas como esferas y compara sus radios y sus potencias emitidas por unidad de superficie. *Resolución.* Al dividir las leyes de emisión,

$$\frac{L_B}{L_A} = \left(\frac{R_B}{R_A}\right)^2 \left(\frac{T_B}{T_A}\right)^4, \qquad 36 = 16 \left(\frac{R_B}{R_A}\right)^2.$$

Resulta $R_B/R_A = 1{,}50$. La superficie total aumenta por un factor 2,25 y la potencia emitida por unidad de superficie por un factor $2^4 = 16$. Su producto recupera el factor 36 de luminosidad.

$$L_B/L_A = 2{,}25 \times 16 = 36$$



A
$R_A,\ T_A$

B
$1{,}5R_A,\ 2T_A$

Los radios guardan la proporción calculada. El factor de área y el factor de potencia por unidad de superficie contribuyen conjuntamente a la luminosidad.

**PROBLEMA RESUELTO 21.16 · Obtener un radio con distancia, flujo y temperatura**

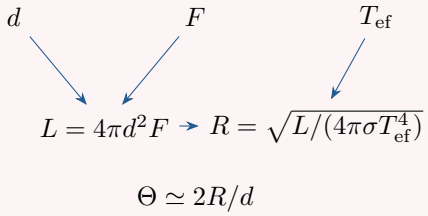
Una estrella está a 10,0 pc, tiene flujo bolométrico corregido $1{,}00\times10^{-9}\,\mathrm{W/m^2}$ y temperatura efectiva 6000 K. Estima luminosidad, radio y diámetro angular completo, usando el modelo esférico. *Resolución.* Primero,

$$L = 4\pi d^2 F \simeq 1{,}20\times10^{27}\,\mathrm{W}.$$

Al combinar esa expresión con Stefan–Boltzmann,

$$R = d\sqrt{\frac{F}{\sigma T_{\mathrm{ef}}^4}} \simeq 1{,}14\times10^{9}\,\mathrm{m}.$$

El diámetro angular es $\Theta \simeq 2R/d \simeq 7{,}38\times10^{-9}\,\mathrm{rad} \simeq 1{,}52\,\mathrm{mas}$. Las unidades de $F$ y de $\sigma T^4$ son iguales, por lo que su cociente es adimensional. La distancia fija la escala lineal del radio inferido.




Las flechas muestran qué mediciones alimentan la luminosidad y el radio. La distancia también permite predecir un diámetro angular para contrastar el modelo.

## 21.7 Líneas espectrales y velocidad radial

Un espectro registra cómo se distribuye la radiación con la longitud de onda o la frecuencia. Los átomos y los iones emiten y absorben en transiciones características, que producen líneas espectrales. Un continuo que atraviesa gas adecuado puede presentar líneas de absorción. Al identificar varias líneas de una misma especie y compararlas con referencias de laboratorio, se obtiene información sobre composición y movimiento.

Definimos el corrimiento espectral como

$$z = \frac{\lambda_{\mathrm{obs}} - \lambda_0}{\lambda_0}. \tag{21.9}$$

$\lambda_0$ es la longitud de onda de referencia en reposo y $\lambda_{\mathrm{obs}}$ la observada, expresadas ambas en la misma convención, aquí en el vacío. Para movimiento radial con rapidez pequeña frente a $c$ y corrimiento dominado por Doppler,

$$v_r \simeq cz, \qquad |v_r| \ll c. \tag{21.10}$$

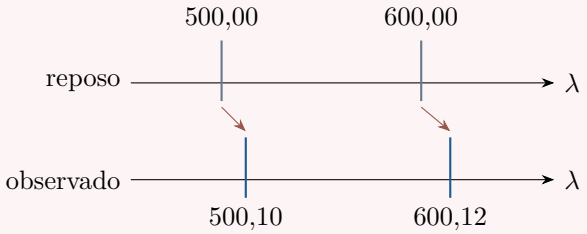
La velocidad radial positiva indica alejamiento y da $z > 0$, con longitudes de onda mayores. La negativa indica acercamiento y da $z < 0$. Las componentes transversales requieren otras mediciones, como el movimiento propio junto con la distancia. El ajuste corrige el movimiento del observador y fija un sistema de referencia.

**PROBLEMA RESUELTO 21.17 · Comprobar un mismo corrimiento con dos líneas**

Dos líneas de reposo 500,00 nm y 600,00 nm se observan en 500,10 nm y 600,12 nm. Supón un corrimiento Doppler radial dominante, con los datos ya corregidos al sistema de referencia elegido. Estima $z$ y $v_r$ para cada línea. *Resolución.* Los cambios absolutos son distintos y las razones coinciden:

$$z_1 = \frac{0{,}10}{500{,}00} = 2{,}00 \times 10^{-4}, \qquad z_2 = \frac{0{,}12}{600{,}00} = 2{,}00 \times 10^{-4}.$$

Ambas líneas dan $v_r \simeq (3{,}00 \times 10^8)(2{,}00 \times 10^{-4}) = +60{,}0\,\mathrm{km/s}$. El signo indica alejamiento y $|v_r|/c = 0{,}000200$ respalda la aproximación. La coincidencia de varias líneas ayuda a comprobar su identificación y su corrimiento común.




Posiciones de dos líneas, en nanómetros. El desplazamiento se amplía esquemáticamente: cada incremento absoluto es distinto y ambos producen el mismo corrimiento relativo $z$.

Los corrimientos también pueden contener contribuciones gravitatorias y, para fuentes cosmológicas, la expansión del universo. Su interpretación usa modelos específicos y sistemas de referencia apropiados. La relación $v_r \simeq cz$ de este capítulo se aplica a la velocidad radial local en el régimen indicado. Las observaciones de galaxias lejanas se estudian mediante una descripción cosmológica de la propagación y de la distancia.

## 21.8 Reunir observaciones para construir un modelo estelar

Una distancia geométrica permite pasar del flujo a la luminosidad. Un modelo de emisión relaciona luminosidad, temperatura y radio. Una órbita añade información dinámica sobre la masa. Estas inferencias utilizan datos complementarios y se pueden contrastar: un radio obtenido por emisión térmica predice un diámetro angular que puede compararse con una medición independiente.

La secuencia de cálculo conserva las dependencias. De $L = 4\pi d^2 F$ se deduce que un error relativo pequeño en $d$ contribuye aproximadamente con el doble al error relativo de $L$ cuando $F$ se mantiene fijo. De $R = d\sqrt{F/(\sigma T^4)}$ resulta $R \propto d\sqrt{F}/T^2$. A flujo y distancia fijos, una temperatura efectiva mayor lleva a un radio inferido menor. La evaluación conjunta considera incertidumbres, correlaciones y correcciones de propagación.

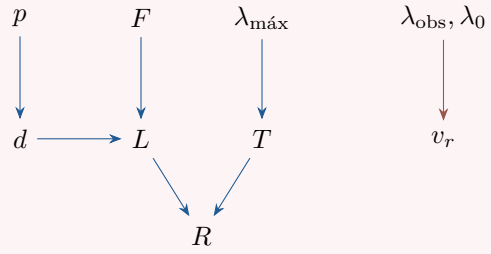
**PROBLEMA RESUELTO 21.18 · Reconstruir las propiedades de una estrella idealizada**

Un conjunto de observaciones entrega $p = 0{,}0500''$, flujo bolométrico corregido $F = 3{,}20 \times 10^{-10}\,\mathrm{W/m^2}$ y máximo del continuo térmico por unidad de longitud de onda en 483 nm, referido al marco de reposo de la estrella. Una línea de reposo 500,00 nm aparece en 499,95 nm. Estima distancia, temperatura, luminosidad, radio y velocidad radial. Supón esfera térmica, emisión isotrópica y Doppler radial de baja velocidad. *Resolución.* La geometría da $d = 20{,}0\,\mathrm{pc} = 6{,}172 \times 10^{17}\,\mathrm{m}$. Wien entrega $T = b/\lambda_{\mathrm{máx}} = 6000\,\mathrm{K}$. Con esos datos,

$$L = 4\pi d^2 F \simeq 1{,}53 \times 10^{27}\,\mathrm{W} \simeq 4{,}00 L_\odot,$$

$$R = d\sqrt{\frac{F}{\sigma T^4}} \simeq 1{,}29 \times 10^{9}\,\mathrm{m}.$$

La línea tiene $z = -0{,}05/500 = -1{,}00 \times 10^{-4}$ y, por tanto, $v_r \simeq -30{,}0\,\mathrm{km/s}$: la estrella se acerca en el sistema de referencia elegido. El diámetro angular predicho es $\Theta \simeq 2R/d \simeq 0{,}861$ mas. Cada propiedad se apoya en una combinación identificable de datos y supuestos.




La reconstrucción combina geometría, potencia radiada y espectro. El corrimiento de líneas aporta una velocidad radial en el marco y el régimen elegidos.

## Ejercicios para reconstruir y transferir

Usa $c = 3{,}00 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$, $1\,\mathrm{au} = 1{,}496 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$, $1\,\mathrm{pc} = 3{,}086 \times 10^{16}\,\mathrm{m} \simeq 3{,}262$ años luz, $1'' = 4{,}848 \times 10^{-6}\,\mathrm{rad}$, $L_\odot = 3{,}828 \times 10^{26}\,\mathrm{W}$, $b = 2{,}898 \times 10^{-3}\,\mathrm{m\,K}$ y $\sigma = 5{,}670 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$. Las órbitas se ajustan al modelo aislado de dos cuerpos y a la normalización redondeada de Kepler. Los flujos son bolométricos y están corregidos por propagación, salvo indicación expresa.

**EJERCICIO 21.1 · Una señal de ida**

Una señal luminosa recorre 3,00 au en el vacío entre puntos tratados como fijos. Estima su tiempo de viaje en minutos.

**EJERCICIO 21.2 · Medir por eco**

Un pulso tarda 1200 s en ir hasta un reflector y volver. Desprecia el movimiento de los extremos. Halla la distancia al reflector en metros y unidades astronómicas.

**EJERCICIO 21.3 · Una distancia en parsecs**

Expresa 5,00 pc en metros y años luz. Estima el tiempo de propagación asociado a esa distancia constante.

**EJERCICIO 21.4 · Convertir una unidad angular**

Expresa 2,00 mas en segundos de arco, grados y radianes. Describe qué magnitud mide cada unidad.

**EJERCICIO 21.5 · Paralaje anual**

Una estrella tiene paralaje $0{,}125''$. Halla su distancia en parsecs y años luz.

**EJERCICIO 21.6 · Dos extremos del desplazamiento anual**

Una geometría favorable produce desplazamiento extremo a extremo $0{,}0200''$ entre observaciones separadas por medio año, con movimiento propio ya separado. Halla $p$ y $d$.

**EJERCICIO 21.7 · Comparar incertidumbres relativas**

Dos medidas tienen paralajes 50,0 mas y 5,00 mas, ambas con incertidumbre pequeña estimada de 0,500 mas. Obtén las distancias centrales y las incertidumbres relativas lineales en distancia.

**EJERCICIO 21.8 · Invertir un intervalo**

Una paralaje central de 20,0 mas tiene intervalo considerado $[18{,}0, 22{,}0]$ mas. Transforma ese intervalo a distancias y compara con la estimación lineal.

**EJERCICIO 21.9 · Diámetro de un disco estelar**

Una estrella a 25,0 pc tiene diámetro angular completo 0,800 mas. Halla su diámetro y su radio físicos.

**EJERCICIO 21.10 · Resolución por difracción**

Una abertura circular ideal de 2,00 m observa a 500 nm. Calcula el umbral de Rayleigh en radianes y segundos de arco para dos fuentes puntuales incoherentes de brillo comparable.

**EJERCICIO 21.11 · Órbita alrededor de una estrella más masiva**

Un planeta de masa despreciable tiene semieje 2,00 au alrededor de una estrella de $2{,}00 M_{\odot}$. Estima el período.

**EJERCICIO 21.12 · Masa central desde período y semieje**

Un planeta ligero tiene semieje 4,00 au y período 8,00 años. Estima la masa estelar.

**EJERCICIO 21.13 · Una binaria con masas distintas**

Una binaria tiene semieje relativo 6,00 au y período 6,00 años. Además, $a_1/a_2 = 2{,}00$. Halla masa total, masas individuales y semiejes individuales.

**EJERCICIO 21.14 · Semieje de una órbita elíptica**

Un planeta ligero orbita una estrella de $M_\odot$. Sus distancias extremas son 1,00 au y 3,00 au. Halla semieje mayor y período en el modelo de dos cuerpos.

**EJERCICIO 21.15 · La misma potencia a mayor distancia**

Una estrella produce $8{,}00 \times 10^{-10}\,\mathrm{W/m^2}$ a cierta distancia. ¿Qué flujo produciría una fuente idéntica situada tres veces más lejos, bajo las mismas condiciones de propagación?

**EJERCICIO 21.16 · Luminosidad a partir de flujo y paralaje**

Una estrella tiene $p = 0{,}100''$ y flujo bolométrico corregido $2{,}00 \times 10^{-10}\,\mathrm{W/m^2}$. Halla su luminosidad y exprésala en $L_\odot$.

**EJERCICIO 21.17 · Igual flujo, distintas luminosidades**

Dos estrellas de luminosidades $L_A = L_\odot$ y $L_B = 9L_\odot$ producen el mismo flujo. Si A está a 12,0 pc, halla la distancia de B.

**EJERCICIO 21.18 · Corregir una transmisión parcial**

El flujo observado de una estrella es $6{,}00 \times 10^{-11}\,\mathrm{W/m^2}$. Un modelo de propagación indica que llega el 75,0 % del flujo bolométrico que alcanzaría al observador por un trayecto transparente. Calcula el flujo corregido y el factor por el que cambiaría la luminosidad inferida a distancia fija.

**EJERCICIO 21.19 · Dos máximos térmicos**

Dos continuos ideales, por unidad de longitud de onda, tienen máximos en 966 nm y 483 nm, referidos a sus respectivos marcos de reposo. Obtén sus temperaturas y su razón.

**EJERCICIO 21.20 · Misma luminosidad con temperaturas distintas**

Dos estrellas esféricas tienen igual luminosidad y $T_B = 2T_A$. Halla $R_B/R_A$ y la razón de potencias emitidas por unidad de superficie.

**EJERCICIO 21.21 · Sensibilidad del radio a la temperatura**

En el problema 21.16, conserva distancia y flujo y sustituye $T_{\mathrm{ef}} = 6000\,\mathrm{K}$ por $6600\,\mathrm{K}$. Obtén la razón entre el radio nuevo y el anterior y estima el radio nuevo.

**EJERCICIO 21.22 · Una línea desplazada hacia longitudes menores**

Una línea de reposo 600,00 nm se observa en 599,94 nm. Calcula $z$ y $v_r$ bajo Doppler radial de baja velocidad y explica el signo.

**EJERCICIO 21.23 · Predecir la posición de una línea**

Una estrella se aleja con $v_r = +90{,}0\,\mathrm{km/s}$. Predice la posición de una línea de reposo 500,00 nm con la aproximación de baja velocidad.

**EJERCICIO 21.24 · Contrastar dos identificaciones de líneas**

Se proponen líneas de reposo 500,00 nm y 600,00 nm para dos líneas observadas en 500,10 nm y 600,18 nm. Calcula el $z$ que daría cada identificación y decide si un único corrimiento Doppler reproduce exactamente ambos datos. Trata los valores como exactos para esta comparación.

## Soluciones razonadas

**SOLUCIÓN 21.1.**
$t = d/c = 3(1{,}496 \times 10^{11})/(3{,}00 \times 10^{8}) = 1496\,\mathrm{s} \simeq 24{,}9\,\mathrm{min}$. La trayectoria indicada es de ida.

**SOLUCIÓN 21.2.**
El pulso recorre $2d$, de modo que $d = ct/2 = 1{,}80 \times 10^{11}\,\mathrm{m} \simeq 1{,}20\,\mathrm{au}$. El factor dos procede de sumar ida y regreso.

**SOLUCIÓN 21.3.**
$d = 5(3{,}086 \times 10^{16}) = 1{,}543 \times 10^{17}\,\mathrm{m} \simeq 16{,}3$ años luz. Para distancia constante, la propagación tarda aproximadamente 16,3 años.

**SOLUCIÓN 21.4.**
$2{,}00\,\mathrm{mas} = 0{,}00200'' = 5{,}56 \times 10^{-7}\,\mathrm{grados} \simeq 9{,}70 \times 10^{-9}\,\mathrm{rad}$. Las tres unidades expresan un ángulo, que puede describir una separación entre direcciones de observación.

**SOLUCIÓN 21.5.**
$d \simeq 1/0{,}125 = 8{,}00\,\mathrm{pc} \simeq 26{,}1$ años luz. La ecuación emplea la paralaje anual $p$.

**SOLUCIÓN 21.6.**
El desplazamiento favorable es $2p$, luego $p = 0{,}0100''$ y $d \simeq 100\,\mathrm{pc}$. La base de los dos extremos es el diámetro orbital en la orientación supuesta.

**SOLUCIÓN 21.7.**
Las distancias centrales son 20,0 pc y 200 pc. Las incertidumbres relativas aproximadas son $0{,}500/50{,}0 = 1{,}00\,\%$ y $0{,}500/5{,}00 = 10{,}0\,\%$. Para la segunda, el carácter aproximado de la linealización es más relevante. Las incertidumbres absolutas lineales serían 0,200 pc y 20,0 pc.

**SOLUCIÓN 21.8.**
El centro es $d = 50{,}0\,\mathrm{pc}$. El intervalo se transforma en $[1/0{,}0220, 1/0{,}0180]\,\mathrm{pc} \simeq [45{,}5, 55{,}6]\,\mathrm{pc}$. La estimación lineal es $\Delta d \simeq 50(2/20) = 5{,}00\,\mathrm{pc}$; los extremos exactos del intervalo muestran la asimetría de la transformación.

**SOLUCIÓN 21.9.**
El diámetro es $D_\star \simeq 25(0{,}000800)\,\text{au} = 0{,}0200\,\text{au} \simeq 2{,}99 \times 10^9\,\text{m}$. El radio es $0{,}0100\,\text{au} \simeq 1{,}50 \times 10^9\,\text{m}$.

**SOLUCIÓN 21.10.**
$\theta_{\text{mín}} \simeq 1{,}22(500 \times 10^{-9})/2 = 3{,}05 \times 10^{-7}\,\text{rad}$. Al dividir por $4{,}848 \times 10^{-6}\,\text{rad}$ por segundo de arco se obtiene $0{,}0629''$.

**SOLUCIÓN 21.11.**
$T^2 \simeq 2^3/2 = 4$ en años cuadrados, por lo que $T \simeq 2{,}00$ años. El denominador incorpora la masa de la estrella del sistema.

**SOLUCIÓN 21.12.**
$M/M_\odot \simeq a^3/T^2 = 4^3/8^2 = 1{,}00$. La órbita permite inferir una masa aproximadamente solar con los supuestos indicados.

**SOLUCIÓN 21.13.**
La masa total es $(6^3/6^2)M_\odot = 6{,}00M_\odot$. Como $M_2/M_1 = a_1/a_2 = 2$, resulta $M_1 = 2{,}00M_\odot$ y $M_2 = 4{,}00M_\odot$. Con $a_1 + a_2 = 6\,\text{au}$ se obtiene $a_1 = 4{,}00\,\text{au}$ y $a_2 = 2{,}00\,\text{au}$. Los productos $M_1a_1$ y $M_2a_2$ coinciden.

**SOLUCIÓN 21.14.**
$a = (1+3)/2 = 2{,}00\,\text{au}$. La normalización solar da $T \simeq \sqrt{2^3} = 2{,}83$ años. Las distancias extremas determinan el semieje requerido por Kepler.

**SOLUCIÓN 21.15.**
La superficie de distribución aumenta por $3^2 = 9$, así que $F_2 = F_1/9 \simeq 8{,}89 \times 10^{-11}\,\text{W/m}^2$. La luminosidad de la fuente conserva su valor en la comparación.

**SOLUCIÓN 21.16.**
La paralaje da $d = 10{,}0\,\text{pc}$. Por tanto, $L = 4\pi(3{,}086 \times 10^{17})^2(2{,}00 \times 10^{-10}) \simeq 2{,}39 \times 10^{26}\,\text{W} \simeq 0{,}625L_\odot$.

**SOLUCIÓN 21.17.**
Al igualar flujos, $d_B/d_A = \sqrt{9} = 3$, luego $d_B = 36{,}0\,\text{pc}$. La mayor luminosidad compensa una distancia tres veces mayor.

**SOLUCIÓN 21.18.**
$F_{\text{corr}} = F_{\text{obs}}/0{,}750 = 8{,}00 \times 10^{-11}\,\text{W/m}^2$. A distancia fija, la luminosidad inferida aumenta por $1/0{,}750 = 4/3$, aproximadamente un $33{,}3\,\%$.

**SOLUCIÓN 21.19.**
Wien entrega $T_A = b/(966 \times 10^{-9}) = 3000\,\text{K}$ y $T_B = b/(483 \times 10^{-9}) = 6000\,\text{K}$. La razón es $T_B/T_A = 2{,}00$, inversa a la razón de longitudes de onda de los máximos.

**SOLUCIÓN 21.20.**
Al conservar $L$, se cumple $(R_B/R_A)^2(2)^4 = 1$. Por tanto, $R_B/R_A = 1/4$. La potencia por unidad de superficie aumenta por 16 y el área total se reduce por ese mismo factor.

**SOLUCIÓN 21.21.**
$R \propto T^{-2}$ a distancia y flujo fijos. Así, $R_{\text{nuevo}}/R_{\text{anterior}} = (6000/6600)^2 = 100/121 \simeq 0{,}826$. Aplicado al radio sin redondear del problema, se obtiene aproximadamente $9{,}41 \times 10^8\,\text{m}$.

**SOLUCIÓN 21.22.**
$z = (599{,}94 - 600{,}00)/600{,}00 = -1{,}00 \times 10^{-4}$. Entonces $v_r \simeq -30{,}0\,\text{km/s}$. La longitud menor corresponde a acercamiento en el sistema de referencia considerado.

**SOLUCIÓN 21.23.**
$z \simeq v_r/c = 90/(3{,}00 \times 10^5) = 3{,}00 \times 10^{-4}$, usando velocidades en km/s. Por tanto, $\lambda_{\text{obs}} \simeq \lambda_0(1+z) = 500{,}15\,\text{nm}$. La línea se desplaza hacia longitudes mayores.

**SOLUCIÓN 21.24.**
La primera identificación da $z_1 = 0{,}10/500 = 2{,}00\times10^{-4}$ y la segunda $z_2 = 0{,}18/600 = 3{,}00\times10^{-4}$. Esos valores implican velocidades radiales distintas, 60,0 y 90,0 km/s. Los datos tratados como exactos exigen revisar la identificación o el modelo de un único corrimiento. En una observación real también se cuantifican errores de calibración y medida.

## Una experiencia: medir un desplazamiento de paralaje

**Dos puntos de observación y un objeto cercano**

Coloca un lápiz vertical frente a un fondo con marcas más lejanas. Observa sucesivamente desde dos puntos separados por una base conocida $B$, conservando una orientación de referencia. Registra la dirección hacia la punta del lápiz en cada posición mediante fotografías con el mismo encuadre de referencia o un transportador sencillo. Describe cómo cambia el desplazamiento al duplicar la distancia al lápiz, manteniendo la base.
En una disposición simétrica, con el lápiz frente al punto medio de la base, el ángulo total entre las dos visuales es $\Delta\theta$ y la distancia perpendicular es $d = (B/2)/\tan(\Delta\theta/2) \simeq B/\Delta\theta$ para ángulos pequeños. Mide al menos tres veces, estima la dispersión y compara con una medición directa de $d$. En el caso estelar, la base de dos posiciones terrestres opuestas es aproximadamente 2 au y el ángulo total favorable es $2p$: la misma geometría recupera $d \simeq (1\,\text{au})/p$.

## Diagnóstico antes de avanzar

Una estrella idealizada tiene paralaje $0{,}100''$, flujo bolométrico corregido $F = 2{,}00\times10^{-10}\,\text{W/m}^2$ y continuo de cuerpo negro con máximo por unidad de longitud de onda en 966 nm, referido a su reposo. Una línea de reposo 600,00 nm aparece en 600,06 nm. Calcula distancia, temperatura, luminosidad, radio y velocidad radial. Un planeta de masa despreciable tiene órbita de semieje 1,00 au y período 2,00 años alrededor de la estrella. Estima la masa central. Identifica qué medición sustenta cada inferencia.

**Contraste.** La paralaje da $d = 10{,}0\,\text{pc}$. Wien da $T = 3000\,\text{K}$. El flujo y la distancia entregan $L \simeq 2{,}39\times10^{26}\,\text{W} \simeq 0{,}625L_\odot$. Con $R = d\sqrt{F/(\sigma T^4)}$ se obtiene $R \simeq 2{,}04\times10^9\,\text{m}$. La línea tiene $z = 0{,}06/600 = 1{,}00\times10^{-4}$, de donde $v_r \simeq +30{,}0\,\text{km/s}$, con alejamiento. Kepler entrega $M/M_\odot \simeq 1^3/2^2 = 0{,}250$. La masa proviene de la dinámica orbital; el radio y la luminosidad se apoyan en geometría y emisión. Estos datos constituyen un modelo de observación idealizado; evaluar su correspondencia con una población estelar real requiere información adicional sobre estructura y evolución.

**Lecturas de apoyo.** H. D. Young y R. A. Freedman, *Física universitaria*, volumen 2, 12.ª edición, secciones 36.7 y 38.8. R. A. Serway y C. Vuille, *Fundamentos de física*, volumen 2, 9.ª edición, secciones 25.6 y 27.1. Las equivalencias astronómicas siguen las resoluciones de la UAI de 2012 y 2015; las referencias precisas y los recursos de ESA y NASA consultados se consignan en el informe de fuentes adjunto. Los problemas y las ayudas visuales se han preparado para esta obra.

# CAPÍTULO 22

# PRIMER ENCUENTRO CON LA FÍSICA MODERNA


22.1 Escalas y alcance de los modelos 445
22.2 Fotones: energía de la radiación y potencia de un haz . . . . . 446
22.3 Efecto fotoeléctrico y frecuencia umbral . . . . . 448
22.4 Potencial de frenado e interpretación de datos . . . . . 450
22.5 Espectros de líneas y niveles de energía . . . . . 452
22.6 Núcleos y transformaciones radiactivas . . . . . 454
22.7 Semivida, actividad y predicción estadística . . . . . 454
22.8 Conectar mediciones, balances y modelos . . . . . 457
Ejercicios para desarrollar autonomía 458
Soluciones razonadas . . . . . 461
Una experiencia: representar una población que se transforma . . . 463
Diagnóstico antes de avanzar . . . . 463


Una superficie iluminada puede emitir electrones; un gas excitado produce líneas de colores definidos; una muestra radiactiva transforma parte de sus núcleos con un ritmo estadístico característico. En cada caso, la observación permite establecer relaciones entre cantidades medibles y estructura de la materia. La energía sigue proporcionando un hilo conductor, ahora acompañada por la cuantización y la probabilidad.

La física moderna amplía los modelos de movimiento, radiación y materia al estudiar velocidades comparables con la de la luz y procesos atómicos y nucleares. Los modelos clásicos conservan su utilidad en los regímenes donde sus predicciones alcanzan la precisión requerida. Elegir un modelo exige identificar la escala del proceso, la interacción relevante y la observación que se desea explicar.

## 22.1 Escalas y alcance de los modelos

Una predicción física tiene un dominio de aplicación y una precisión. La mecánica de Newton describe con gran exactitud numerosos movimientos cotidianos cuando la rapidez es pequeña respecto de $c$ y las condiciones gravitatorias admiten el tratamiento clásico. La relatividad especial relaciona las mediciones de observadores inerciales y establece la misma rapidez de la luz en el vacío para todos ellos. El cociente $\beta = v/c$ ayuda a valorar las correcciones relativistas.

Un factor que aparece en las relaciones relativistas es

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{22.1}$$

Para $v/c$ pequeño, su desarrollo comienza con $\gamma \simeq 1 + v^2/(2c^2)$. Así se puede estimar el tamaño de algunas correcciones antes de efectuar un cálculo completo. La exigencia experimental también importa: una corrección pequeña puede ser medible en instrumentos precisos. En este capítulo utilizaremos este factor para comparar escalas; el desarrollo sistemático de la relatividad corresponde a un curso posterior.

**PROBLEMA RESUELTO 22.1 · Comparar dos velocidades**

Calcula $\gamma$ para $v = 0{,}0100c$ y para $v = 0{,}800c$. Interpreta cuánto se aparta de uno en cada caso.

*Resolución.* La sustitución en la ecuación da $\gamma \simeq 1{,}000050$ y $\gamma = 1{,}6667$, respectivamente. Los excesos relativos respecto de uno son aproximadamente 0,00500 % y 66,7 %. La primera rapidez permite aproximar este factor por uno con un error pequeño; la segunda exige conservar la relación relativista. El porcentaje calculado corresponde a este factor y sirve como criterio inicial de escala.

| $v/c$ | $\gamma$ |
|---|---|
| 0,0100 | 1,000050 |
| 0,800 | 1,6667 |

La rapidez relativa permite comparar la magnitud del factor relativista.

La física cuántica describe estados y probabilidades de resultados de medida. Una escala útil para materia con momento $p$ es la longitud de onda de de Broglie, $\lambda_{\mathrm{dB}} = h/p$. Para velocidades pequeñas frente a $c$, $p \simeq mv$. Al comparar esa longitud con la separación de rendijas o la escala espacial de un sistema se puede valorar la posibilidad de observar interferencia. El contraste depende también de la preparación del estado y de las interacciones con el entorno.

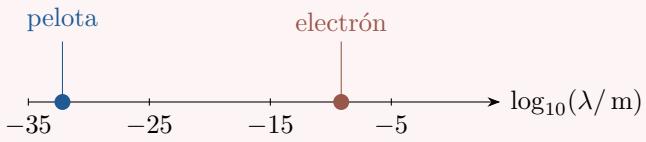
Usaremos valores redondeados $c = 2{,}998 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$, $h = 6{,}626 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$, $e = 1{,}602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$ y $m_e = 9{,}109 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$. En electronvoltios, $h \simeq 4{,}136 \times 10^{-15}\,\mathrm{eV\,s}$ y $hc \simeq 1240\,\mathrm{eV\,nm}$. Los resultados conservarán la precisión de estas aproximaciones. El símbolo $e$ representa la magnitud positiva de la carga electrónica.

**PROBLEMA RESUELTO 22.2 · Reconocer una escala ondulatoria de materia**

Compara $\lambda_{\mathrm{dB}}$ de un electrón con $v = 1{,}00 \times 10^{6}\,\mathrm{m/s}$ y la de una pelota de $0{,}100\,\mathrm{kg}$ con $v = 1{,}00\,\mathrm{m/s}$. *Resolución.* Ambas velocidades permiten usar $p \simeq mv$. Para el electrón,

$$\lambda_{\mathrm{dB}} = \frac{6{,}626 \times 10^{-34}}{(9{,}109 \times 10^{-31})(1{,}00 \times 10^{6})} \simeq 7{,}27 \times 10^{-10}\,\mathrm{m}.$$

Para la pelota resulta $6{,}63 \times 10^{-33}\,\mathrm{m}$. La longitud del electrón es comparable con distancias interatómicas; su difracción puede estudiarse con estructuras apropiadas. La escala de la pelota es extraordinariamente menor que sus dimensiones y que las aberturas de un montaje cotidiano. Esta comparación explica la pertinencia de descripciones diferentes para las dos situaciones.




Cada unidad horizontal del dibujo abarca cinco potencias de diez. Las longitudes calculadas ocupan escalas muy distintas.

## 22.2 Fotones: energía de la radiación y potencia de un haz

Un fotón es un cuanto del campo electromagnético. Su energía y su momento están relacionados con la frecuencia y la longitud de onda de la radiación. En el vacío,

$$E_{\gamma} = hf = \frac{hc}{\lambda}, \qquad c = \lambda f. \tag{22.2}$$

La frecuencia determina la energía intercambiada en un proceso de absorción de un fotón. La propagación y la interferencia conservan su descripción ondulatoria en los experimentos correspondientes. El modelo cuántico vincula ambos aspectos y permite calcular probabilidades de detección.

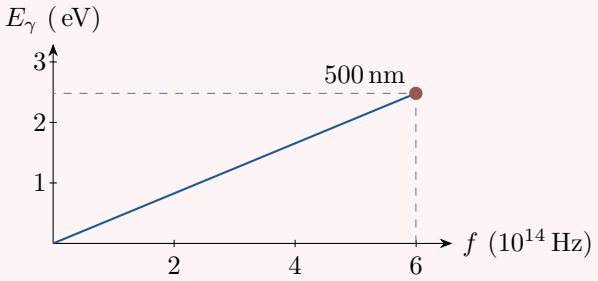
El electronvoltio es una unidad de energía: $1\,\mathrm{eV} = 1{,}602 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$ con el redondeo adoptado. Corresponde al cambio de energía de una carga de magnitud $e$ al atravesar una diferencia de potencial de un voltio. Es útil para expresar energías atómicas. Para convertir una energía en joules a electronvoltios se divide por la energía equivalente de un electronvoltio.

### PROBLEMA RESUELTO 22.3 · Calcular la energía de un fotón verde

Un haz tiene longitud de onda en el vacío 500 nm. Determina la frecuencia y la energía de cada fotón en joules y electronvoltios. *Resolución.* Primero se convierte $\lambda = 5{,}00 \times 10^{-7}\,\text{m}$. Así,

$$f = \frac{2{,}998 \times 10^{8}}{5{,}00 \times 10^{-7}} = 5{,}996 \times 10^{14}\,\text{Hz}, \qquad E_\gamma \simeq 3{,}97 \times 10^{-19}\,\text{J}.$$

Dividiendo por $1{,}602 \times 10^{-19}\,\text{J/eV}$ se obtiene $E_\gamma \simeq 2{,}48\,\text{eV}$. La forma abreviada $1240/500 = 2{,}48$ entrega el mismo valor a la precisión indicada.




La energía de un fotón es proporcional a su frecuencia. El punto representa el fotón de la longitud de onda indicada.

### PROBLEMA RESUELTO 22.4 · Comparar fotones de dos longitudes de onda

Dos fuentes emiten en 400 nm y 800 nm. Compara las energías por fotón y el número de fotones emitidos por segundo si las potencias son iguales. *Resolución.* Las energías son $1240/400 = 3{,}10\,\text{eV}$ y $1240/800 = 1{,}55\,\text{eV}$. Un fotón de 400 nm transporta el doble de energía. La potencia es energía por unidad de tiempo, de modo que una fuente de igual potencia en 800 nm emite el doble de fotones por segundo. La energía individual y el ritmo de emisión describen propiedades distintas del haz.




Grupos ilustrativos de igual energía total: tres fotones de longitud menor y seis de longitud mayor. Para igual potencia, estas proporciones se mantienen en las tasas medias.

Si un haz monocromático de potencia $P$ contiene fotones de energía $E_\gamma$, su tasa media de fotones es $\dot{N} = P/E_\gamma$. La intensidad media, para iluminación uniforme de un área $S$, es $I = P/S$. A frecuencia fija, aumentar la intensidad aumenta el número de fotones incidentes por unidad de área y tiempo. Esta separación entre energía individual y tasa de llegada será decisiva al estudiar la emisión electrónica.

**PROBLEMA RESUELTO 22.5 · Contar fotones a partir de una potencia**

Un haz de 620 nm lleva 2,00 mW. Calcula su tasa de fotones y la cantidad que incide durante 5,00 s.

*Resolución.* Cada fotón tiene $E_\gamma \simeq 1240/620 = 2{,}00\,\text{eV} = 3{,}204 \times 10^{-19}\,\text{J}$. Por tanto,

$$\dot{N} = \frac{2{,}00 \times 10^{-3}}{3{,}204 \times 10^{-19}} \simeq 6{,}24 \times 10^{15}\,\text{s}^{-1}.$$

En cinco segundos llegan aproximadamente $3{,}12 \times 10^{16}$ fotones. Estos valores representan cantidades medias para potencia constante y radiación monocromática.

| magnitud | valor |
|---|---|
| $E_\gamma$ | 2,00 eV |
| $\dot{N}$ | $6{,}24 \times 10^{15}\,\text{s}^{-1}$ |
| $N(5\,\text{s})$ | $3{,}12 \times 10^{16}$ |

La potencia fija el número medio de fotones que llegan en cada intervalo.

## 22.3 Efecto fotoeléctrico y frecuencia umbral

El efecto fotoeléctrico externo consiste en la emisión de electrones desde una superficie al absorber radiación. La función de trabajo $\phi$ es la energía mínima necesaria para extraer un electrón desde el material en las condiciones de su superficie. Su valor depende del material y de su estado superficial. Para luz monocromática en el régimen de absorción de un fotón por electrón, el balance energético de Einstein es

$$K_{\text{máx}} = hf - \phi. \tag{22.3}$$

Esta expresión corresponde al régimen de emisión, $hf \geq \phi$. El valor máximo se asocia a los electrones que escapan con el menor costo energético efectivo. La distribución de energías iniciales y las pérdidas dentro del sólido producen electrones de energías menores.

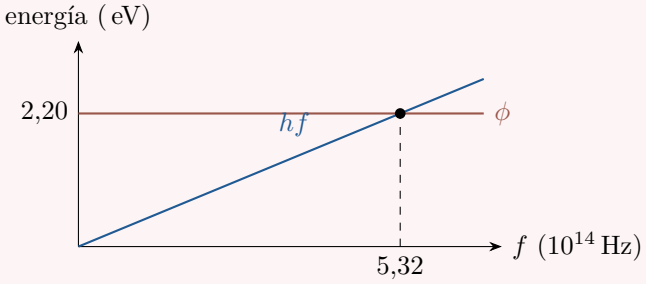
La frecuencia umbral satisface $hf_0 = \phi$, y la longitud de onda umbral en el vacío es $\lambda_0 = hc/\phi$. La emisión de este modelo requiere $f \geq f_0$, equivalente a $\lambda \leq \lambda_0$. La igualdad representa el límite ideal con energía cinética máxima nula. La detección de una corriente apreciable exige además tasas de emisión y condiciones de colección adecuadas.

### PROBLEMA RESUELTO 22.6 · Hallar el umbral de una superficie

Una superficie tiene función de trabajo $\phi = 2{,}20\,\text{eV}$. Calcula $f_0$ y $\lambda_0$. *Resolución.* Con unidades de electronvoltios,

$$f_0 = \frac{2{,}20}{4{,}136 \times 10^{-15}} \simeq 5{,}32 \times 10^{14}\,\text{Hz}, \qquad \lambda_0 \simeq \frac{1240}{2{,}20} = 564\,\text{nm}.$$

Las frecuencias mayores aportan más energía por fotón que el costo mínimo de extracción. En longitudes de onda, esa condición corresponde a valores menores que el umbral calculado.



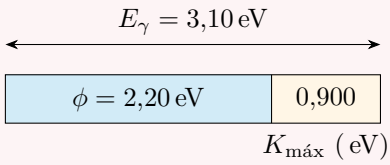

El umbral se localiza en la intersección entre la energía del fotón y la función de trabajo. A la derecha queda energía disponible para movimiento electrónico.

### PROBLEMA RESUELTO 22.7 · Distribuir la energía de un fotón absorbido

Se ilumina la superficie anterior con 400 nm. Calcula la energía cinética máxima y expresa el balance físico. *Resolución.* El fotón lleva 3,10 eV. La extracción requiere 2,20 eV y queda

$$K_{\text{máx}} = 3{,}10 - 2{,}20 = 0{,}900\,\text{eV} = 1{,}44 \times 10^{-19}\,\text{J}.$$

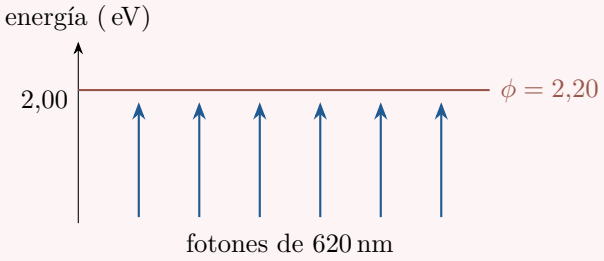
El balance $3{,}10 = 2{,}20 + 0{,}900$, en electronvoltios, asigna la energía entre extracción y movimiento del electrón más energético. Las energías cinéticas de los demás electrones emitidos pueden ser menores.




Las longitudes de los segmentos son proporcionales a las energías del balance: extracción y energía cinética máxima.

**PROBLEMA RESUELTO 22.8 · Examinar una iluminación de baja frecuencia**

La misma superficie recibe luz de 620 nm. Se aumenta diez veces la intensidad manteniendo la longitud de onda. Predice el resultado del modelo de un fotón. *Resolución.* Cada fotón tiene 2,00 eV, por debajo de $\phi = 2{,}20$ eV. El balance presenta un déficit de 0,200 eV por evento de absorción individual. La intensidad multiplicada por diez proporciona diez veces más fotones por unidad de área y tiempo, cada uno con la misma energía. La emisión fotoeléctrica de un fotón queda fuera de las condiciones energéticas de este caso. Procesos multifotónicos a intensidades altas requieren otro tratamiento.




Cada flecha representa la misma energía individual. Aumentar el número de fotones conserva la altura de cada flecha y el déficit por absorción individual.

La observación reúne tres dependencias: el umbral está ligado a la superficie, la energía cinética máxima aumenta con la frecuencia y la corriente de saturación crece con el flujo de fotones, a frecuencia fija por encima del umbral y en condiciones estables. El modelo clásico de absorción continua por un electrón ligado conduce a otras dependencias y tiempos de acumulación. La comparación experimental de esas predicciones motivó la descripción mediante fotones. Las ondas electromagnéticas clásicas siguen describiendo la propagación de numerosos haces y sus patrones de interferencia.

## 22.4 Potencial de frenado e interpretación de datos

Una diferencia de potencial que se opone al movimiento de los electrones permite medir su energía máxima. El potencial de frenado $V_s$ se define aquí como la magnitud positiva de la tensión retardadora que lleva la fotocorriente al límite de corte. En la geometría ideal de colección,

$$eV_s = K_{\text{máx}}, \qquad V_s = \frac{h}{e}f - \frac{\phi}{e}. \tag{22.4}$$

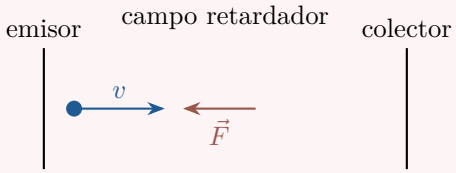
El signo del voltaje de un electrodo depende de la referencia elegida; $V_s$ expresa una magnitud. El voltímetro y la superficie pueden introducir potenciales de contacto que un experimento real debe considerar. Los ejemplos adoptan datos ya corregidos.

### PROBLEMA RESUELTO 22.9 · Relacionar frenado y rapidez electrónica

Para $K_{\text{máx}} = 0{,}900\,\text{eV}$, calcula $V_s$ y la rapidez máxima mediante $K = mv^2/2$. Comprueba el régimen de la aproximación. *Resolución.* El valor numérico de $V_s$ en voltios es 0,900. En unidades del SI,

$$v_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{2(0{,}900)(1{,}602\times10^{-19})}{9{,}109\times10^{-31}}} \simeq 5{,}63\times10^{5}\,\text{m/s}.$$

El cociente $v/c \simeq 1{,}88\times10^{-3}$ justifica la energía cinética clásica a la precisión usada. El frenado mide energía; la rapidez se infiere incorporando la masa del electrón y una relación dinámica válida.




$$eV_s = K_{\text{máx}} = 0{,}900\,\text{eV}$$

Esquema de una colección ideal con fuerza eléctrica opuesta al movimiento del electrón. El voltaje de corte permite medir la energía cinética máxima.

### PROBLEMA RESUELTO 22.10 · Inferir una pendiente y una función de trabajo

Se miden $V_s = 0{,}400\,\text{V}$ con $f = 6{,}00\times10^{14}\,\text{Hz}$ y $V_s = 1{,}230\,\text{V}$ con $f = 8{,}00\times10^{14}\,\text{Hz}$. Ajusta la recta a estos datos idealizados y estima $h$, $\phi$ y $f_0$.

*Resolución.* La pendiente es $a = \Delta V_s/\Delta f = 4{,}15\times10^{-15}\,\text{V s}$. De $V_s = af + b$ resulta $b = -2{,}09\,\text{V}$. Así, $h = ea \simeq 6{,}65\times10^{-34}\,\text{J s}$, $\phi = 2{,}09\,\text{eV}$ y $f_0 = -b/a \simeq 5{,}04\times10^{14}\,\text{Hz}$. La estimación de $h$ refleja la precisión de los datos propuestos. La recta física de frenado se utiliza en el intervalo con emisión.

| $f/(10^{14}\,\text{Hz})$ | $V_s/\,\text{V}$ |
|---|---|
| 6,00 | 0,400 |
| 8,00 | 1,230 |

La diferencia entre los puntos fija la pendiente; el intercepto permite inferir la función de trabajo.

Una serie de varios puntos permite estimar pendiente, dispersión e incertidumbre. La prolongación algebraica de la recta hacia frecuencias menores que $f_0$ sirve para localizar el intercepto; la fotocorriente de un fotón presenta su corte en el umbral. A frecuencia e intensidad fijas, modificar el potencial colector cambia cuántos electrones alcanzan el electrodo. Con colección suficiente se llega a la corriente de saturación. Cada medición debe distinguir estas variables de control.

## 22.5 Espectros de líneas y niveles de energía

Un átomo aislado posee estados ligados con energías discretas. Una transición radiativa entre dos estados intercambia un fotón cuya energía coincide con la diferencia de energías del átomo, dentro de la aproximación que desprecia el retroceso. Para emisión desde $E_i$ hacia $E_f < E_i$,

$$hf = E_i - E_f > 0. \tag{22.5}$$

En absorción, el fotón aporta la energía para pasar a un estado de mayor energía. Las probabilidades y reglas de selección determinan cuáles transiciones aparecen con intensidad apreciable. Un diagrama de niveles enumera energías posibles; las flechas indican procesos entre estados.

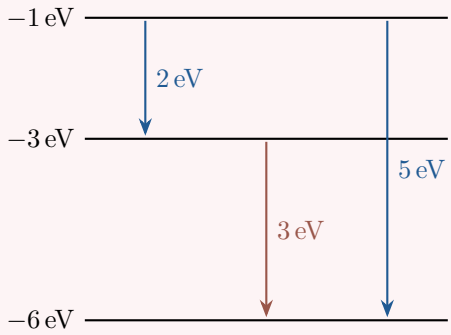
La distribución espacial de un electrón en un estado atómico se expresa mediante una función de onda y probabilidades de posición. Los niveles del hidrógeno también admiten una aproximación histórica de Bohr, que predice bien varias energías y frecuencias. La descripción cuántica de los estados incorpora distribuciones espaciales y propiedades adicionales. Un diagrama de energías se interpreta con este significado de estados y diferencias energéticas.

**PROBLEMA RESUELTO 22.11 · Asociar tres diferencias de energía a tres líneas**

Un sistema ideal tiene estados de $-6{,}00$, $-3{,}00$ y $-1{,}00\,\mathrm{eV}$. Supón permitidas las tres transiciones descendentes. Calcula las longitudes de onda. *Resolución.* Desde el estado superior al intermedio se liberan $2{,}00\,\mathrm{eV}$; del intermedio al inferior, $3{,}00\,\mathrm{eV}$; y del superior al inferior, $5{,}00\,\mathrm{eV}$. Por $\lambda = hc/\Delta E$,

$$\lambda_{32} = 620\,\mathrm{nm}, \qquad \lambda_{21} \simeq 413\,\mathrm{nm}, \qquad \lambda_{31} = 248\,\mathrm{nm}.$$

La suma $2 + 3 = 5$ corresponde a las energías de las transiciones. Las longitudes de onda se relacionan mediante sus inversas: $1/248 = 1/620 + 1/(1240/3)$ al conservar los valores sin redondear.



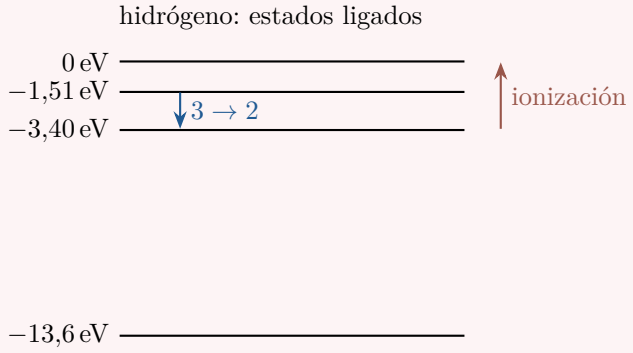

Las separaciones verticales representan diferencias energéticas. Tres niveles pueden producir las tres líneas indicadas si las transiciones están permitidas.

### PROBLEMA RESUELTO 22.12 · Estudiar una línea del hidrógeno

Usa $E_n = -13{,}6\,\text{eV}/n^2$ para la transición del hidrógeno $n = 3$ a $n = 2$. Calcula la energía y longitud de onda del fotón. Estima también la energía de ionización desde $n = 2$. *Resolución.* La energía emitida es

$$\Delta E = 13{,}6\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) \simeq 1{,}89\,\text{eV}, \qquad \lambda \simeq 656\,\text{nm}.$$

El estado $n = 2$ tiene $E_2 = -3{,}40\,\text{eV}$. El límite de ionización se sitúa en $E = 0$, de modo que requiere 3,40 eV. El cero de energía corresponde al electrón y al protón separados en reposo relativo en este modelo. Los valores negativos expresan estados ligados.




Escala vertical proporcional a la energía. El nivel cero marca el continuo de ionización; los niveles ligados se aproximan a él al aumentar el número cuántico principal.

### PROBLEMA RESUELTO 22.13 · Comparar una emisión directa y una cascada

El sistema del problema 22.11 pasa de −1,00 a −6,00 eV. Compara la emisión directa con el paso por el estado intermedio. Cuenta fotones y energía total.

*Resolución.* La transición directa produce un fotón de 5,00 eV y 248 nm. La cascada produce dos: uno de 2,00 eV y otro de 3,00 eV. La suma de sus energías es 5,00 eV. Ambas rutas conectan los mismos estados inicial y final y conservan la energía. La distribución entre fotones depende de la ruta de transición.

| ruta | fotones |
|---|---|
| directa | 1 (5 eV) |
| cascada | 2 (2 y 3 eV) |

Cada ruta libera la misma energía total de cinco electronvoltios.

La posición de una línea informa sobre una diferencia de energías; su intensidad depende además de poblaciones, probabilidades de transición y condiciones de excitación. Una muestra gaseosa tenue y una fuente térmica densa presentan espectros diferentes por su estructura y sus interacciones. La observación de líneas de emisión y absorción permite identificar especies y estudiar su estado físico, con las correcciones de movimiento consideradas en el capítulo anterior.

## 22.6 Núcleos y transformaciones radiactivas

El núcleo atómico contiene protones y neutrones. El número atómico $Z$ cuenta protones y determina el elemento; el número másico $A$ cuenta nucleones, $A = Z + N$. La notación ${}^{A}_{Z}X$ identifica un nucleido. Los isótopos de un elemento comparten $Z$ y tienen distintos números de neutrones. Las energías y transformaciones nucleares corresponden a grados de libertad del núcleo, mientras los espectros atómicos ordinarios reflejan principalmente cambios de los estados electrónicos.

La radiactividad es la transformación espontánea de núcleos inestables con emisión de partículas o radiación. En una desintegración alfa se emite un núcleo de helio ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$; el núcleo hijo tiene $A-4$ y $Z-2$. En beta menos, un neutrón del núcleo se transforma en un protón con emisión de un electrón y un antineutrino electrónico. El hijo conserva $A$ y aumenta $Z$ en uno. En una transición gamma, el núcleo libera energía electromagnética y conserva $A$ y $Z$. La conservación de carga, energía y momento permite analizar cada proceso.

**PROBLEMA RESUELTO 22.14 · Seguir dos transformaciones nucleares**

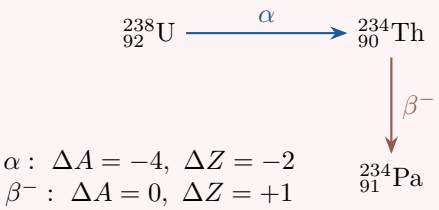
Completa la cadena alfa y beta menos que comienza en ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$. Verifica los números másicos y las cargas. *Resolución.* En la emisión alfa,

$$ {}^{238}_{92}\mathrm{U} \longrightarrow {}^{234}_{90}\mathrm{Th} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}. $$

Se cumple $238 = 234 + 4$ y $92 = 90 + 2$. En la transformación beta menos posterior,

$$ {}^{234}_{90}\mathrm{Th} \longrightarrow {}^{234}_{91}\mathrm{Pa} + {}^{0}_{-1}e + \bar{\nu}_e. $$

La carga se conserva porque $90 = 91 - 1$; el número de nucleones permanece en 234. El electrón y el antineutrino son productos de la transformación. Las ecuaciones identifican especies y balances; la distribución de energías requiere datos nucleares adicionales.




La cadena registra cómo cambian los números del núcleo hijo. Las partículas emitidas completan los balances de cada ecuación nuclear.

## 22.7 Semivida, actividad y predicción estadística

Para una población de núcleos del mismo radionucleido, cada núcleo superviviente tiene una probabilidad aproximadamente $\lambda\,\Delta t$ de transformarse durante un intervalo corto $\Delta t$. La constante de desintegración $\lambda$ tiene dimensión de tiempo inverso. Bajo condiciones de desintegración independiente y $\lambda$ constante, la población media de núcleos progenitores sigue

$$ \overline{N}(t) = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/T_{1/2}}, \qquad T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}. \tag{22.6} $$

La semivida $T_{1/2}$ es el intervalo en que la población media de progenitores se reduce a la mitad. Para muestras con muchos núcleos, las fluctuaciones relativas suelen ser pequeñas y se usa $N(t)$

para esa población macroscópica. Cada núcleo posee un tiempo de transformación aleatorio. La probabilidad de supervivencia hasta $t$ es $e^{-\lambda t}$.

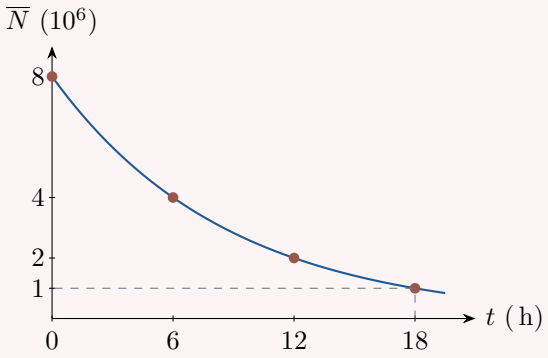
Algunos textos llaman vida media al período de semidesintegración. Aquí reservamos *semivida* para $T_{1/2}$ y *tiempo de vida medio* para $\tau = 1/\lambda$. Este último es el promedio estadístico de los tiempos de supervivencia. Su relación es $T_{1/2} = \tau \ln 2$. Explicitar ambas definiciones permite interpretar correctamente datos y gráficas.

**PROBLEMA RESUELTO 22.15 · Calcular la población tras varias semividas**

Una muestra ideal contiene inicialmente $8{,}00 \times 10^6$ núcleos progenitores con semivida 6,00 h. Calcula la población media después de 18,0 h y la fracción transformada. *Resolución.* Transcurren $18/6 = 3$ semividas. Por tanto,

$$\overline{N} = 8{,}00 \times 10^6 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1{,}00 \times 10^6.$$

Permanece $1/8 = 12{,}5\,\%$ de los progenitores y se ha transformado $7/8 = 87{,}5\,\%$. La población de hijos debe analizarse según su estabilidad y la cadena de transformaciones. La expresión utilizada sigue a los progenitores de la muestra inicial.




La curva muestra la población media de progenitores. Cada intervalo de seis horas reduce su valor a la mitad.

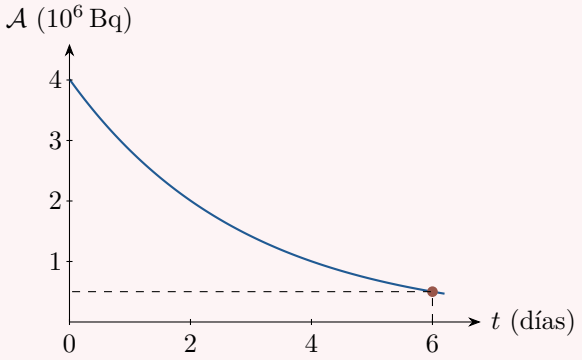
La actividad $\mathcal{A}$ es la tasa media de desintegraciones de la especie considerada: $\mathcal{A} = \lambda \overline{N}$. Su unidad SI es el becquerel, $1\,\mathrm{Bq} = 1\,\mathrm{s}^{-1}$, correspondiente a una desintegración por segundo en promedio. Si $\lambda$ es constante, actividad y población disminuyen con el mismo factor. Un detector registra una fracción de los eventos emitidos, condicionada por eficiencia, geometría y fondo. La actividad de una cadena puede incluir contribuciones de varios radionucleidos.

**PROBLEMA RESUELTO 22.16 · Obtener actividad y tiempos característicos**

Una muestra de un único radionucleido tiene $N_0 = 1{,}00 \times 10^{12}$ núcleos y semivida de 2,00 días. Calcula $\lambda$, $\tau$, $\mathcal{A}_0$ y la actividad a los seis días. Considera un día de 86400 s. *Resolución.* La semivida equivale a 172800 s. Así,

$$\lambda = \frac{\ln 2}{172800} \simeq 4{,}01 \times 10^{-6}\,\mathrm{s}^{-1}, \qquad \tau = \frac{1}{\lambda} \simeq 2{,}89 \text{ días}.$$

La actividad inicial es $\mathcal{A}_0 = \lambda N_0 \simeq 4{,}01 \times 10^6\,\mathrm{Bq}$. A los seis días han transcurrido tres semividas, por lo que $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0/8 \simeq 5{,}01 \times 10^5\,\mathrm{Bq}$. Los tiempos representan propiedades estadísticas de la población de progenitores.



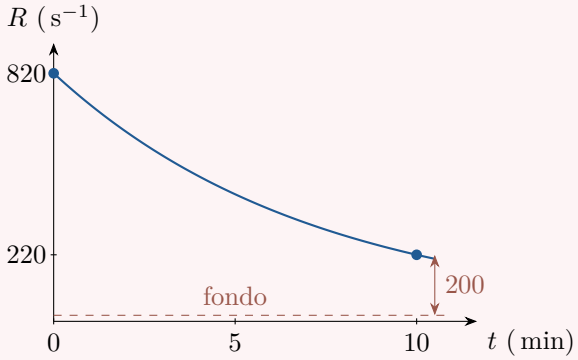

Actividad del progenitor con semivida de dos días. El factor constante de desintegración hace que su curva tenga la misma forma que la población.

**PROBLEMA RESUELTO 22.17 · Estimar una semivida desde cuentas corregidas**

Un detector registra una tasa total de $820\,\mathrm{s^{-1}}$ al inicio y $220\,\mathrm{s^{-1}}$ tras 10,0 min. El fondo constante es $20{,}0\,\mathrm{s^{-1}}$. Estima la semivida del progenitor, suponiendo eficiencia y geometría constantes y una única contribución radiactiva. *Resolución.* Las tasas netas son $800\,\mathrm{s^{-1}}$ y $200\,\mathrm{s^{-1}}$. Su razón 1/4 corresponde a dos semividas. En consecuencia, $T_{1/2} = 5{,}00\,\mathrm{min}$. La forma logarítmica reproduce el resultado:

$$T_{1/2} = \frac{t\ln 2}{\ln(R_0/R_t)} = \frac{10{,}0\ln 2}{\ln 4} = 5{,}00\,\mathrm{min}.$$

La corrección de fondo permite asociar la razón de cuentas con la razón de actividades. Una medición real requiere además tiempos de conteo suficientes para estimar la incertidumbre estadística.




La curva representa cuentas totales: señal decreciente más fondo constante. La flecha mide la contribución neta al cabo de diez minutos.

El modelo exponencial supone una población bien definida, ausencia de aporte de progenitores y una constante de desintegración estable para el proceso considerado. La producción de núcleos, el crecimiento de hijos radiactivos y las mezclas de especies originan curvas distintas. Una gráfica de $\ln N$ frente a $t$ permite contrastar la forma exponencial mediante una recta de pendiente $-\lambda$. Para pocos núcleos se deben estudiar probabilidades y fluctuaciones de los conteos individuales.

## 22.8 Conectar mediciones, balances y modelos

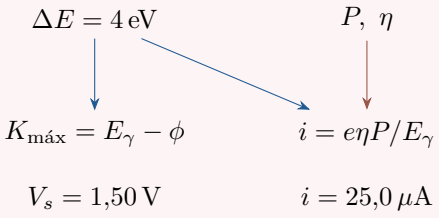
La energía del fotón conecta el espectro con la extracción electrónica y con las diferencias entre niveles. La tasa de llegada de fotones conecta potencia y corriente, al incorporar la eficiencia del dispositivo. La desintegración añade una predicción estadística: el balance energético de un evento y la evolución de una población responden a preguntas complementarias. La conservación de energía puede aplicarse a cada proceso, mientras las probabilidades describen qué eventos aparecen y con qué frecuencia.

**PROBLEMA RESUELTO 22.18 · De una transición atómica a una fotocorriente**

Una fuente ideal produce una línea de 4,00 eV mediante transiciones atómicas y entrega 1,00 mW de esa línea a una superficie con $\phi = 2{,}50\,\text{eV}$. La probabilidad efectiva de emitir y recoger un electrón por fotón incidente es 0,100. Calcula longitud de onda, potencial de frenado y corriente de saturación. *Resolución.* La línea corresponde a $\lambda = 1240/4 = 310\,\text{nm}$. El balance fotoeléctrico da $K_{\text{máx}} = 1{,}50\,\text{eV}$ y $V_s = 1{,}50\,\text{V}$. La tasa de fotones es

$$\dot{N}_\gamma = \frac{1{,}00 \times 10^{-3}}{4(1{,}602 \times 10^{-19})} \simeq 1{,}56 \times 10^{15}\,\text{s}^{-1}.$$

La tasa de electrones recogidos es $0{,}100\dot{N}_\gamma$, y la corriente resulta $i = e(0{,}100)\dot{N}_\gamma = 2{,}50 \times 10^{-5}\,\text{A} = 25{,}0\,\mu\text{A}$. El potencial de frenado informa sobre la energía máxima individual; la corriente combina energía, potencia y eficiencia.




La misma energía individual interviene en el frenado y en la tasa de fotones. La potencia y la eficiencia determinan además la corriente recogida.

Al analizar datos conviene escribir el observable y las condiciones de cada ecuación. Una energía cinética máxima exige fotones por encima del umbral; un espectro de líneas informa sobre diferencias entre estados; una semivida caracteriza una población de progenitores bajo el modelo indicado. Estas relaciones permiten construir explicaciones que enlazan las mediciones con propiedades de la materia y delimitan la precisión de las inferencias.

## Ejercicios para desarrollar autonomía

**EJERCICIO 22.1 · Valorar una corrección relativista**

Calcula $\gamma$ para $v = 0{,}600c$ y el porcentaje en que supera a uno. Explica qué indica sobre aproximar este factor por uno.

**EJERCICIO 22.2 · Cambiar el momento de una partícula**

Una partícula tiene longitud de onda de de Broglie 0,200 nm. ¿Cuál será su longitud de onda si su momento se triplica? Fundamenta mediante la relación correspondiente.

**EJERCICIO 22.3 · Calcular energía y frecuencia**

Para luz de 400 nm en el vacío, calcula frecuencia y energía por fotón en electronvoltios y joules.

**EJERCICIO 22.4 · Convertir una energía en longitud de onda**

Un fotón lleva 2,50 eV. Calcula su longitud de onda en el vacío y la energía de cuatro de esos fotones.

**EJERCICIO 22.5 · Relacionar potencia y ritmo de llegada**

Un haz de 500 nm tiene potencia 1,00 mW. Estima cuántos fotones llegan en 2,00 s. Usa $hc = 1240\,\text{eV nm}$.

**EJERCICIO 22.6 · Mantener la potencia al cambiar el color**

Se sustituye un haz de 450 nm por otro de 900 nm con igual potencia. Compara las energías por fotón y sus tasas de llegada.

**EJERCICIO 22.7 · Obtener un umbral**

Una superficie tiene $\phi = 2{,}00\,\text{eV}$. Calcula $f_0$ y $\lambda_0$. Indica la condición de emisión en términos de frecuencia.

**EJERCICIO 22.8 · Determinar la energía cinética máxima**

La superficie del ejercicio anterior recibe 400 nm. Calcula $K_{\text{máx}}$ y $V_s$ en el modelo ideal.

**EJERCICIO 22.9 · Interpretar el aumento de intensidad**

Una superficie con $\phi = 2{,}50\,\text{eV}$ recibe 600 nm. Evalúa la posibilidad de emisión de un fotón. Describe qué magnitud cambia al duplicar la intensidad a longitud de onda fija.

**EJERCICIO 22.10 · Inferir una función de trabajo**

Con luz de 300 nm se mide $V_s = 1{,}20\,\text{V}$. Calcula $\phi$ y la longitud de onda umbral. Usa los valores sin redondear durante el cálculo.

**EJERCICIO 22.11 · Obtener una rapidez desde el frenado**

Se mide $V_s = 2{,}00\,\text{V}$. Calcula la rapidez máxima de los fotoelectrones y $v/c$ mediante la aproximación clásica.

**EJERCICIO 22.12 · Distinguir frecuencia e intensidad**

Una superficie con $\phi = 2{,}00\,\text{eV}$ recibe inicialmente fotones de 3,00 eV. Se comparan dos cambios: duplicar la intensidad a frecuencia fija y elevar la energía por fotón a 4,00 eV con la misma tasa de fotones. Calcula el potencial de frenado en ambos casos y explica la corriente de saturación para eficiencia constante.

**EJERCICIO 22.13 · Leer un diagrama de niveles**

Dos niveles tienen energías $-5{,}00$ y $-2{,}00\,\mathrm{eV}$. Calcula la longitud de onda de emisión en la transición descendente y la energía necesaria para la absorción inversa.

**EJERCICIO 22.14 · Analizar una transición al estado fundamental**

Para hidrógeno con $E_n = -13{,}6\,\mathrm{eV}/n^2$, calcula la energía y longitud de onda de la transición $n = 2$ a $n = 1$.

**EJERCICIO 22.15 · Contar fotones de una cascada**

Un sistema tiene niveles 0, 2,00 y 5,00 eV. Desde el superior desciende al fundamental pasando por el intermedio. Calcula las dos energías emitidas, sus longitudes de onda y la energía total.

**EJERCICIO 22.16 · Reconstruir una diferencia de energías**

Una línea de absorción tiene longitud de onda 620 nm. Si el estado inicial está en $-4{,}00\,\mathrm{eV}$, determina la energía del estado final. Supón una transición de un fotón y retroceso despreciable.

**EJERCICIO 22.17 · Identificar un hijo alfa**

En una emisión alfa de $^{226}_{88}\mathrm{Ra}$, determina $A$, $Z$ y número de neutrones del hijo. El elemento con $Z = 86$ es radón.

**EJERCICIO 22.18 · Completar una transformación beta menos**

Completa la ecuación de desintegración beta menos de $^{14}_{6}\mathrm{C}$. El elemento con $Z = 7$ es nitrógeno. Verifica la conservación de carga.

**EJERCICIO 22.19 · Calcular la fracción de progenitores**

Un radionucleido tiene semivida de 3,00 h. Calcula la fracción de progenitores que permanece tras 12,0 h y la que se ha transformado.

**EJERCICIO 22.20 · Invertir la ley exponencial**

Una muestra conserva 1/32 de sus progenitores después de 20,0 días. Calcula la semivida y el tiempo de vida medio.

**EJERCICIO 22.21 · Calcular actividad en becquereles**

Una muestra de semivida 10,0 s contiene inicialmente $1{,}00 \times 10^{6}$ núcleos. Calcula la actividad inicial y a los 20,0 s.

**EJERCICIO 22.22 · Restar un fondo de conteo**

Las tasas totales de un detector son $510\,\mathrm{s}^{-1}$ y $135\,\mathrm{s}^{-1}$, separadas por 8,00 min. El fondo constante es $10{,}0\,\mathrm{s}^{-1}$. Estima la semivida con eficiencia y geometría constantes.

**EJERCICIO 22.23 · Interpretar una supervivencia individual**

Un núcleo tiene semivida 4,00 h. Calcula la probabilidad de supervivencia hasta ocho horas y la probabilidad de sobrevivir cuatro horas adicionales, condicionada a haber sobrevivido las primeras ocho. Explica el significado estadístico.

**EJERCICIO 22.24 · Conectar un espectro con un detector**

Una línea de 248 nm entrega 0,800 mW a una superficie con $\phi = 2{,}00$ eV. La eficiencia efectiva de emisión y colección es 0,250. Calcula energía por fotón, potencial de frenado y corriente de saturación.

## Soluciones razonadas

**SOLUCIÓN 22.1.**
$\gamma = 1/\sqrt{1 - 0{,}600^2} = 1{,}25$. Supera a uno en 25,0 %, una corrección relevante para cantidades que contienen este factor.

**SOLUCIÓN 22.2.**
Como $\lambda = h/p$, triplicar $p$ divide la longitud por tres: $\lambda' = 0{,}0667$ nm. El resultado se refiere al momento, con independencia de la relación concreta entre momento y rapidez.

**SOLUCIÓN 22.3.**
$f = c/\lambda \simeq 7{,}50 \times 10^{14}$ Hz. La energía es $hc/\lambda \simeq 3{,}10$ eV $\simeq 4{,}97 \times 10^{-19}$ J. La conversión a metros precede al cálculo en el SI.

**SOLUCIÓN 22.4.**
$\lambda = 1240/2{,}50 = 496$ nm. Cuatro fotones suman 10,0 eV $= 1{,}60 \times 10^{-18}$ J; cada fotón conserva su energía individual.

**SOLUCIÓN 22.5.**
Cada fotón lleva 2,48 eV $= 3{,}97296 \times 10^{-19}$ J. La energía total incidente es $Pt = 2{,}00 \times 10^{-3}$ J. El cociente da aproximadamente $5{,}03 \times 10^{15}$ fotones.

**SOLUCIÓN 22.6.**
Al duplicarse $\lambda$, la energía por fotón se reduce a la mitad. Para mantener $P = \dot{N} E_\gamma$, la tasa de llegada se duplica. La energía total recibida por segundo conserva su valor.

**SOLUCIÓN 22.7.**
$f_0 = 2/(4{,}136 \times 10^{-15}) \simeq 4{,}84 \times 10^{14}$ Hz y $\lambda_0 = 1240/2 = 620$ nm. La condición energética de emisión es $f \geq f_0$ en el modelo de un fotón.

**SOLUCIÓN 22.8.**
El fotón aporta 3,10 eV, por lo que $K_{\text{máx}} = 1{,}10$ eV y $V_s = 1{,}10$ V. La función de trabajo consume la parte restante de la energía.

**SOLUCIÓN 22.9.**

$E_\gamma = 1240/600 \simeq 2{,}07\,\text{eV} < 2{,}50\,\text{eV}$. La energía individual queda por debajo del umbral. Duplicar la intensidad duplica el flujo de fotones con la misma energía individual; la condición de emisión de un fotón sigue incumplida.

**SOLUCIÓN 22.10.**

$\phi = 1240/300 - 1{,}20 = 2{,}9333\ldots\,\text{eV} \simeq 2{,}93\,\text{eV}$. La longitud umbral es $1240/(2{,}9333\ldots) \simeq 423\,\text{nm}$. Se conserva precisión interna para calcular el cociente final.

**SOLUCIÓN 22.11.**

$K_{\text{máx}} = 2{,}00\,\text{eV}$ y $v_{\text{máx}} = \sqrt{2eV_s/m_e} \simeq 8{,}39 \times 10^5\,\text{m/s}$. El cociente es $v/c \simeq 2{,}80 \times 10^{-3}$, compatible con el cálculo clásico a esta precisión.

**SOLUCIÓN 22.12.**

Inicialmente $V_s = (3-2)\,\text{V} = 1{,}00\,\text{V}$. Duplicar la intensidad a frecuencia fija conserva ese valor y duplica la corriente de saturación bajo los supuestos dados. Con fotones de 4,00 eV, $V_s = 2{,}00\,\text{V}$. La misma tasa de fotones y la misma eficiencia conservan la corriente de saturación, aunque la potencia del haz aumenta.

**SOLUCIÓN 22.13.**

La diferencia descendente es 3,00 eV y produce $\lambda = 1240/3 \simeq 413\,\text{nm}$. La absorción inversa requiere un fotón de 3,00 eV que eleva el átomo al estado superior.

**SOLUCIÓN 22.14.**

$\Delta E = 13{,}6(1 - 1/4) = 10{,}2\,\text{eV}$ y $\lambda = 1240/10{,}2 \simeq 122\,\text{nm}$. La transición tiene mayor diferencia energética y menor longitud de onda que la de $n = 3$ a $n = 2$.

**SOLUCIÓN 22.15.**

Se emiten 3,00 eV al bajar de 5 a 2 y 2,00 eV al bajar de 2 a 0. Las longitudes son aproximadamente 413 nm y 620 nm. Los dos fotones suman 5,00 eV.

**SOLUCIÓN 22.16.**

El fotón aporta $1240/620 = 2{,}00\,\text{eV}$. El estado final tiene energía $-4 + 2 = -2{,}00\,\text{eV}$. La absorción aumenta la energía del átomo en la cantidad recibida.

**SOLUCIÓN 22.17.**

El hijo es $^{222}_{86}\text{Rn}$: tiene $A = 226 - 4 = 222$, $Z = 88 - 2 = 86$ y $N = 222 - 86 = 136$ neutrones. La partícula alfa contiene los otros cuatro nucleones y dos protones.

**SOLUCIÓN 22.18.**

$^{14}_{6}\text{C} \longrightarrow {}^{14}_{7}\text{N} + {}^{0}_{-1}e + \bar{\nu}_e$. La carga se conserva como $6 = 7 - 1$ y el número de nucleones permanece en 14. La conversión de un neutrón en protón explica el aumento de $Z$.

**SOLUCIÓN 22.19.**

Transcurren cuatro semividas y permanece $(1/2)^4 = 1/16 = 6{,}25\,\%$. La fracción transformada es $15/16 = 93{,}75\,\%$. Ambas fracciones se refieren a la población inicial de progenitores.

**SOLUCIÓN 22.20.**

Como $1/32 = 2^{-5}$, han transcurrido cinco semividas. Así, $T_{1/2} = 4{,}00$ días y $\tau = T_{1/2}/\ln 2 \simeq 5{,}77$ días. Los dos tiempos caracterizan aspectos distintos de la misma distribución exponencial.

**SOLUCIÓN 22.21.**

$\lambda = \ln 2/10 \simeq 0{,}0693\,\text{s}^{-1}$. Por tanto, $\mathcal{A}_0 \simeq 6{,}93 \times 10^4\,\text{Bq}$. A los veinte segundos quedan 1/4 de los progenitores y la actividad es aproximadamente $1{,}73 \times 10^4\,\text{Bq}$.

**SOLUCIÓN 22.22.**

Las tasas netas son $500\,\text{s}^{-1}$ y $125\,\text{s}^{-1}$. La reducción a un cuarto corresponde a dos semividas en ocho minutos, de modo que $T_{1/2} = 4{,}00\,\text{min}$. El fondo se resta antes de formar la razón.

**SOLUCIÓN 22.23.**

La supervivencia hasta ocho horas tiene probabilidad $2^{-8/4} = 1/4$. Condicionada a esa supervivencia, la probabilidad de otras cuatro horas es $2^{-4/4} = 1/2$. La independencia temporal del riesgo del modelo exponencial mantiene la misma probabilidad de supervivencia durante intervalos iguales.

**SOLUCIÓN 22.24.**

La energía individual es $1240/248 = 5{,}00\,\text{eV}$. El balance da $K_{\text{máx}} = 3{,}00\,\text{eV}$ y $V_s = 3{,}00\,\text{V}$. La corriente es $i = e\eta P/E_\gamma = \eta P/(5{,}00\,\text{V}) = 4{,}00 \times 10^{-5}\,\text{A} = 40{,}0\,\mu\text{A}$. La eficiencia multiplica la tasa incidente para obtener la tasa de electrones recogidos.

## Una experiencia: representar una población que se transforma

**Semividas con monedas y variación entre ensayos**

Reúne cien monedas o fichas con dos caras equiprobables. Lánzalas, retira las que muestran una cara elegida y vuelve a lanzar únicamente las supervivientes. Registra la población después de cada ronda hasta completar seis. Repite el experimento varias veces y compara los conteos y su promedio con $100(1/2)^n$ para la ronda $n$.
Cada ficha superviviente tiene probabilidad $1/2$ de permanecer en la ronda siguiente. Una ronda representa una semivida de la población media. El procedimiento describe tiempos discretos y reproduce la supervivencia en esos instantes; los tiempos nucleares reales se modelan de forma continua. Dibuja la curva media y los resultados individuales. Explica por qué los ensayos difieren y por qué una ficha que ha sobrevivido varias rondas mantiene la misma probabilidad en el lanzamiento siguiente. El modelo usa independencia y equilibrio entre las dos caras.

## Diagnóstico antes de avanzar

Un sistema emite una línea al pasar de $-1{,}00$ a $-5{,}00\,\mathrm{eV}$. La línea entrega $0{,}600\,\mathrm{mW}$ a una superficie con $\phi = 2{,}50\,\mathrm{eV}$ y eficiencia efectiva de emisión y colección $0{,}200$. Calcula longitud de onda, energía cinética máxima, potencial de frenado y corriente de saturación. En otro experimento, una muestra de un único radionucleido tiene actividad inicial de $800\,\mathrm{Bq}$ y semivida de $3{,}00\,\mathrm{h}$. Calcula su actividad a las nueve horas y la probabilidad de supervivencia de un progenitor durante ese intervalo. Explica qué cantidades describen eventos individuales y cuáles describen tasas medias.

**Contraste.** La diferencia entre niveles es $4{,}00\,\mathrm{eV}$, por lo que $\lambda = 310\,\mathrm{nm}$. El balance fotoeléctrico entrega $K_{\mathrm{máx}} = 1{,}50\,\mathrm{eV}$ y $V_s = 1{,}50\,\mathrm{V}$. La corriente resulta $i = e\eta P/E_\gamma = 30{,}0\,\mu\mathrm{A}$. La muestra radiactiva atraviesa tres semividas y su actividad se reduce a $100\,\mathrm{Bq}$. La probabilidad individual de supervivencia es $1/8$. Las energías se asignan a transiciones o electrones; potencia, corriente y actividad describen tasas medias. La probabilidad de supervivencia caracteriza la incertidumbre sobre la transformación de un núcleo individual.

**Lecturas de apoyo.** H. D. Young y R. A. Freedman, *Física universitaria*, volumen 2, 12.ª edición, secciones 37.3, 38.2, 38.3, 38.5, 39.1, 43.3 y 43.4. R. A. Serway y C. Vuille, *Fundamentos de física*, volumen 2, 9.ª edición, secciones 26.4, 27.2, 27.6, 28.2, 28.3, 29.3 y 29.4. El informe de fuentes precisa los pasajes cotejados y las constantes del SI. Los problemas, la experiencia y las ayudas visuales se han preparado para esta obra.

# CAPÍTULO 23

# LABORATORIO DE MODELIZACIÓN, DATOS Y PROBLEMAS INTEGRADORES


23.1 De una pregunta a un procedimiento de medida . . . . . 465
23.2 Tablas, transformaciones y gráficas fieles . . . . . 466
23.3 Ajuste lineal, parámetros y residuos . . . . . 468
23.4 Incertidumbres de magnitudes indirectas . . . . . 470
23.5 Dimensiones, límites y comparación de modelos . . . . . 472
23.6 Integración numérica y estudio de convergencia . . . . . 473
23.7 Una serie observada: calibración de instrumentos . . . . . 475
23.8 Una conclusión que otra persona pueda reconstruir . . . . . 477
Ejercicios para desarrollar autonomía 478
Soluciones razonadas . . . . . 481
Una experiencia: un pequeño estudio reproducible del péndulo . . . 483
Diagnóstico de cierre del recorrido . 484


Dos grupos pueden medir el mismo péndulo y obtener valores ligeramente distintos de la aceleración gravitatoria. Para entender la diferencia hace falta reconstruir sus mediciones: qué longitud tomaron, cómo contaron las oscilaciones, qué instrumentos usaron y qué relación eligieron para calcular el resultado. La conclusión adquiere fuerza cuando esos pasos quedan disponibles para otra persona.

Este capítulo reúne herramientas desarrolladas a lo largo del libro y las lleva a una investigación pequeña. El péndulo permitirá estudiar mediciones y ajustes; una serie pública de calibración aportará datos observados; la caída de un cuerpo servirá para comprobar algoritmos. Los ejemplos didácticos usan datos construidos y los identifican expresamente. El trabajo experimental del lector producirá sus propios registros y sus propias conclusiones.

## 23.1 De una pregunta a un procedimiento de medida

Una pregunta experimental se vuelve operacional cuando precisa una magnitud que se medirá, una variable que se modificará y condiciones que se mantendrán controladas. Para un péndulo simple, la pregunta puede ser: ¿cómo depende el período de la longitud efectiva, al mantener pequeña la amplitud angular? La longitud efectiva va desde el punto de suspensión hasta el centro de masas de la pesa. El período es el tiempo de una oscilación completa, con regreso a la misma posición y sentido de movimiento.

El modelo de pequeña amplitud relaciona ambas magnitudes mediante $T = 2\pi\sqrt{L/g}$. Supone una pesa de dimensiones pequeñas frente a $L$, un hilo de masa despreciable, un soporte estable y pérdidas débiles durante la medida. Una amplitud inicial próxima a cinco grados facilita esa aproximación. Conviene registrar también la amplitud para valorar su posible influencia. La pesa debe ser ligera, estar sujeta a un soporte firme y oscilar sobre una zona despejada.

En el capítulo 1 expresamos la información de medición mediante intervalos compatibles. En $(10{,}0 \pm 0{,}2)\,\mathrm{cm}$, la semianchura de $0{,}2\,\mathrm{cm}$ delimita el intervalo adoptado. Al sumar longitudes con cotas de 0,2 y 0,3 cm, la suma tiene una cota conservadora de 0,5 cm. En este capítulo describimos la incertidumbre estándar mediante desviaciones estándar: para estimaciones independientes con incertidumbres estándar de 0,2 y 0,3 cm, la suma tiene $u = \sqrt{0{,}2^2 + 0{,}3^2}\,\mathrm{cm} \simeq 0{,}36\,\mathrm{cm}$. Las contribuciones correlacionadas incorporan $2\,\mathrm{cov}(x, y)$ a la varianza de la suma. Una cota se convierte en incertidumbre estándar al adoptar una distribución: para una uniforme de semianchura $a$, $u = a/\sqrt{3}$. Una contribución de calibración común permanece al repetir la medida. Cada informe precisa la interpretación de $\pm$ y las hipótesis que sostienen su cálculo.

**PROBLEMA RESUELTO 23.1 · Convertir una pregunta sobre el péndulo en un protocolo**

Se dispone de una regla, un cronómetro y un péndulo con longitud cercana a un metro. Propón una medición del período y distingue variables y controles.

*Resolución.* Se mide $L$ hasta el centro de la pesa y se registra el tiempo $t_{20}$ de veinte oscilaciones completas. Se calcula $T = t_{20}/20$. Para estudiar la dependencia con $L$ se eligen varias longitudes, conservando la pesa, el soporte y una amplitud inicial próxima a cinco grados. Se repite cada cronometraje, se anota el instrumento y se describe el criterio de inicio y final. El promedio temporal y la dispersión permitirán caracterizar la repetibilidad.

| variable | registro |
|---|---|
| $L$ | se modifica |
| $t_{20}$ | se mide |
| amplitud | se controla |

El protocolo establece qué cambia y qué se registra en cada ensayo.

Una observación registra un resultado: una longitud, una lectura o una secuencia de posiciones. La explicación vincula esos registros con un modelo. En el experimento, un período mayor al aumentar $L$ constituye una tendencia observada. La ecuación del péndulo propone una relación cuantitativa que permite contrastar esa tendencia. Conservar ambas capas de información ayuda a revisar el razonamiento.

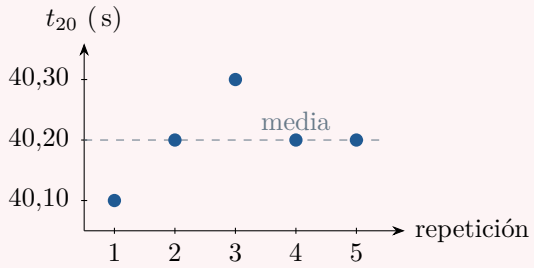
Para $n$ repeticiones independientes $t_i$, la media es $\bar{t} = (\sum t_i)/n$, la desviación muestral es $s_t = \sqrt{\sum (t_i - \bar{t})^2/(n-1)}$ y la incertidumbre estándar de la media debida a repetibilidad es $u_{\bar{t}} = s_t/\sqrt{n}$. El factor $\sqrt{n}$ corresponde a esa componente aleatoria. Las contribuciones comunes de calibración, longitud o procedimiento requieren estimaciones propias.

**PROBLEMA RESUELTO 23.2 · Estimar la repetibilidad del cronometraje**

En un ejemplo didáctico construido, cinco tiempos de veinte oscilaciones son 40,10, 40,20, 40,30, 40,20 y 40,20 s. Calcula la media, la desviación muestral y la componente de incertidumbre de $T$ asociada a la media temporal. *Resolución.* La media es $\bar{t} = 40{,}20\,\mathrm{s}$. La suma de desviaciones cuadradas es $0{,}0200\,\mathrm{s}^2$, de modo que $s_t = 0{,}0707\,\mathrm{s}$ y $u_{\bar{t}} = 0{,}0316\,\mathrm{s}$. Al dividir por veinte,

$$T = 2{,}0100\,\mathrm{s}, \qquad u_T = \frac{0{,}0316}{20} \simeq 0{,}0016\,\mathrm{s}.$$

El resultado temporal, considerando esta componente, se expresa como $(2{,}0100 \pm 0{,}0016)\,\mathrm{s}$. Las cifras adicionales permiten mostrar la estimación de repetibilidad; una evaluación completa incorporará las demás contribuciones.




Tiempos didácticos construidos para cinco repeticiones. La recta horizontal representa la media; la dispersión caracteriza la repetibilidad de los registros.

## 23.2 Tablas, transformaciones y gráficas fieles

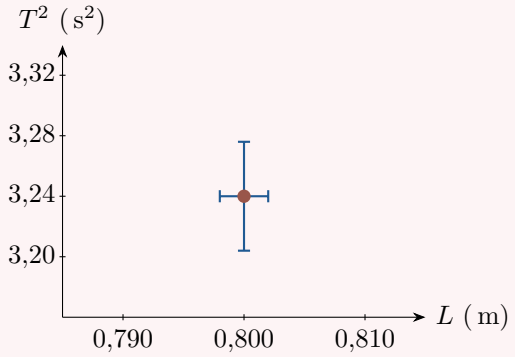
Una tabla de trabajo conserva los registros originales, las unidades y las transformaciones usadas. Para el péndulo conviene guardar $L$, cada tiempo de varias oscilaciones, el número de oscilaciones y las estimaciones de incertidumbre. A partir de ellos se calculan $T$ y $T^2$. La relación esperada se vuelve lineal al representar $T^2$ frente a $L$:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} L. \tag{23.1}$$

Esta transformación conserva la relación física y modifica la escala de incertidumbre de la variable vertical. Para incertidumbres pequeñas, $u_{T^2} \simeq 2|T|u_T$. El resultado procede de la sensibilidad de $T^2$ ante un pequeño cambio de $T$.

**PROBLEMA RESUELTO 23.3 · Representar una medición con su incertidumbre**

Para un punto didáctico, $L = (0{,}800 \pm 0{,}002)\,\mathrm{m}$ y $T = (1{,}800 \pm 0{,}010)\,\mathrm{s}$, donde las incertidumbres son estándar. Obtén el punto y las barras para la gráfica $T^2$ frente a $L$. *Resolución.* Se calcula $T^2 = 3{,}240\,\mathrm{s}^2$ y $u_{T^2} \simeq 2(1{,}800)(0{,}010) = 0{,}036\,\mathrm{s}^2$. El punto es $(0{,}800\,\mathrm{m}, 3{,}240\,\mathrm{s}^2)$, con barra horizontal de semiancho $0{,}002\,\mathrm{m}$ y vertical de semiancho $0{,}036\,\mathrm{s}^2$. Estas barras representan incertidumbres estándar de las coordenadas. Su interpretación probabilística completa depende de las distribuciones y del procedimiento de estimación.




Barras de incertidumbre estándar de las dos coordenadas del punto construido. Los ejes muestran un intervalo ampliado alrededor de la medición.

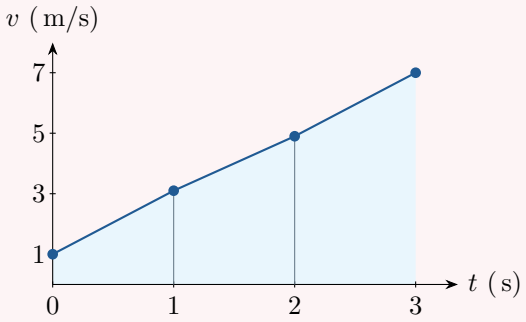
Los ejes identifican magnitud y unidad; la escala debe permitir distinguir los datos y su incertidumbre. Los puntos medidos se muestran como tales. Una línea puede representar un modelo ajustado o una interpolación declarada. La superficie bajo una gráfica de velocidad frente a tiempo tiene además una interpretación física: el desplazamiento. Con datos discretos, una aproximación por trapecios supone variación lineal entre mediciones contiguas.

**PROBLEMA RESUELTO 23.4 · Integrar una gráfica de velocidad muestreada**

Una serie construida da $v = 1{,}0,\ 3{,}1,\ 4{,}9$ y $7{,}0\,\mathrm{m/s}$ en $t = 0,\ 1,\ 2$ y $3\,\mathrm{s}$. Estima el desplazamiento mediante trapecios. *Resolución.* Cada intervalo dura un segundo. Por tanto,

$$\Delta x \simeq \frac{1{,}0+3{,}1}{2}(1)+\frac{3{,}1+4{,}9}{2}(1)+\frac{4{,}9+7{,}0}{2}(1)=12{,}0\,\mathrm{m}.$$

La unidad resulta de multiplicar velocidad por tiempo. El cálculo es exacto para la interpolación lineal elegida. El movimiento real entre muestras puede introducir una diferencia que se estudia aumentando la frecuencia de muestreo o proponiendo un modelo dinámico.




Los trapecios representan el desplazamiento de la interpolación lineal entre las velocidades construidas. Su área total corresponde a doce metros.

## 23.3 Ajuste lineal, parámetros y residuos

El ajuste de una recta $y = ax + b$ busca parámetros que aproximen los datos según un criterio declarado. Los mínimos cuadrados ordinarios minimizan $S = \sum_i [y_i - (ax_i + b)]^2$. Para pesos iguales y abscisas con incertidumbre despreciable frente al efecto de la incertidumbre vertical, las estimaciones son

$$a = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}, \qquad b = \bar{y} - a\bar{x}. \tag{23.2}$$

El modelo estadístico usual escribe cada dato como la predicción de una recta poblacional más un error de media cero. Para el ajuste considerado, esos errores se suponen independientes y con varianza común. Los residuos se calculan respecto de la recta estimada y permiten examinar las hipótesis mediante sus patrones; el ajuste introduce relaciones entre ellos. Incertidumbres verticales muy distintas sugieren pesos diferentes; incertidumbres horizontales relevantes requieren un tratamiento que incorpore ambas coordenadas. En el péndulo, $a$ tiene unidades $\mathrm{s^2/m}$ y el modelo ideal da $g = 4\pi^2/a$.

### PROBLEMA RESUELTO 23.5 · Estimar g a partir de cinco puntos

Usa los cinco pares didácticos de la tabla, construidos para este capítulo, con $x = L$ e $y = T^2$. Ajusta $y = ax + b$ y obtén $g$.

*Resolución.* Las medias son $\bar{x} = 0{,}600\,\mathrm{m}$ y $\bar{y} = 2{,}434\,\mathrm{s}^2$. Las sumas centradas son $S_{xx} = 0{,}400\,\mathrm{m}^2$ y $S_{xy} = 1{,}616\,\mathrm{m\,s}^2$. Así,

$$a = 4{,}040\,\mathrm{s}^2/\mathrm{m}, \quad b = 0{,}0100\,\mathrm{s}^2, \qquad g \simeq 9{,}772\,\mathrm{m/s}^2.$$

La pendiente determina $g$ bajo las hipótesis del péndulo y del ajuste. El intercepto queda disponible para examinar el comportamiento del modelo y del procedimiento.

| $L$ (m) | $T^2$ ($\mathrm{s}^2$) |
|---|---|
| 0,200 | 0,820 |
| 0,400 | 1,622 |
| 0,600 | 2,438 |
| 0,800 | 3,238 |
| 1,000 | 4,052 |

Cinco pares construidos para estudiar la pendiente y los residuos.

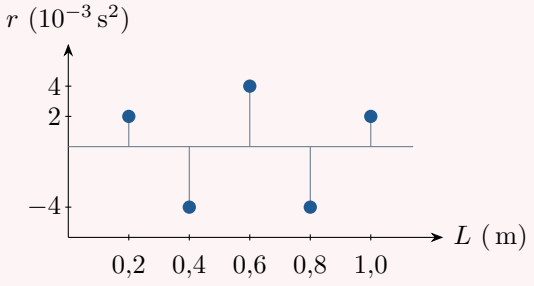
El residuo $r_i = y_i - (ax_i + b)$ expresa la separación vertical entre cada dato y la predicción ajustada. Su signo indica el lado de la recta y su unidad coincide con la de $y$. Una gráfica de residuos puede revelar curvatura, dispersión variable o dependencia con el orden de medida. La presencia de un patrón orienta nuevas pruebas del modelo, de los instrumentos o de las variables de control.

### PROBLEMA RESUELTO 23.6 · Examinar residuos y dispersión del ajuste

Calcula los residuos del ajuste anterior y estima la desviación residual $s_r$ y la incertidumbre de la pendiente debida a la dispersión, con $s_r = \sqrt{\sum r_i^2/(n-2)}$ y $u_a = s_r/\sqrt{S_{xx}}$. *Resolución.* En orden creciente de longitud, los residuos son 0,002, −0,004, 0,004, −0,004 y $0{,}002\,\mathrm{s}^2$. Su suma es cero por la condición de mínimos cuadrados asociada al intercepto libre; esta restricción pertenece al ajuste. Su suma de cuadrados es $5{,}60 \times 10^{-5}\,\mathrm{s}^4$. Resulta

$$s_r \simeq 0{,}00432\,\mathrm{s}^2, \qquad u_a \simeq 0{,}00683\,\mathrm{s}^2/\mathrm{m}.$$

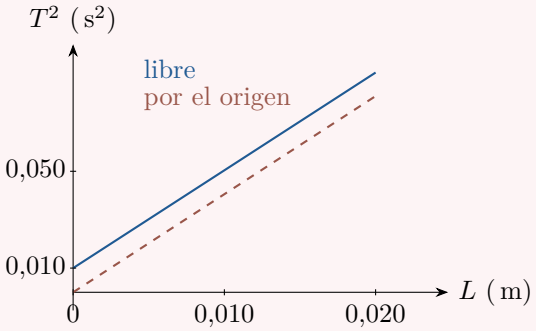
La incertidumbre asociada de $g$ es $u_g \simeq (g/a)u_a \simeq 0{,}017\,\mathrm{m/s}^2$. Esta es una estimación condicionada al modelo estadístico adoptado y a tratar las longitudes como abscisas conocidas. La calibración de longitudes y los efectos de amplitud requieren componentes adicionales para un resultado experimental completo.




Residuos del ajuste libre a los cinco pares construidos. La unidad vertical se ha ampliado para hacer visible la separación respecto de la recta.

**PROBLEMA RESUELTO 23.7 · Comparar una recta libre con una recta por el origen**

Repite el ajuste de los cinco pares imponiendo $b = 0$. Usa $a_0 = (\sum x_i y_i)/(\sum x_i^2)$ y compara el valor de $g$. *Resolución.* Las sumas dan $\sum x_i^2 = 2{,}20\,\mathrm{m}^2$ y $\sum x_i y_i = 8{,}918\,\mathrm{m\,s}^2$. Por tanto, $a_0 \simeq 4{,}05364\,\mathrm{s}^2/\mathrm{m}$ y $g_0 \simeq 9{,}739\,\mathrm{m/s}^2$. La diferencia respecto del ajuste libre es aproximadamente $-0{,}033\,\mathrm{m/s}^2$. Imponer el origen incorpora una hipótesis adicional. La elección se justifica mediante el modelo, el origen de las coordenadas y la evaluación de posibles desplazamientos de medida. Un intercepto distinto de cero ofrece una pista que se estudia con esas comprobaciones.




Ampliación de la extrapolación cerca del origen, fuera del intervalo de los datos construidos. Las rectas casi coinciden en la escala completa; su diferencia revela la hipótesis adicional impuesta.

## 23.4 Incertidumbres de magnitudes indirectas

La incertidumbre estándar caracteriza la dispersión atribuida a una magnitud mediante una desviación estándar. Para $z = x + y$ o $z = x - y$, con entradas independientes, $u_z = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$. Para $q = Cx^\alpha y^\beta$, una aproximación lineal en incertidumbres relativas pequeñas da

$$\left(\frac{u_q}{|q|}\right)^2 \simeq \left(\alpha\frac{u_x}{x}\right)^2 + \left(\beta\frac{u_y}{y}\right)^2. \tag{23.3}$$

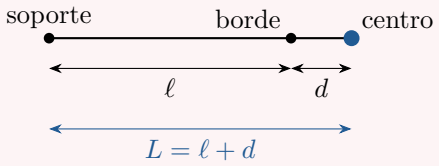
La fórmula supone entradas independientes y una constante $C$ tratada como conocida. Se puede obtener desarrollando el cambio de $q$ ante pequeños cambios de las entradas y sumando sus varianzas. Una cota máxima de error corresponde a otro criterio de combinación y debe identificarse como tal.

### PROBLEMA RESUELTO 23.8 · Combinar dos longitudes independientes

La distancia desde el soporte hasta la parte superior de una pesa es $\ell = (0{,}800 \pm 0{,}002)\,\mathrm{m}$ y desde allí hasta su centro de masas es $d = (0{,}025 \pm 0{,}001)\,\mathrm{m}$. Las incertidumbres son estándar e independientes. Calcula la longitud efectiva. *Resolución.* La longitud es $L = \ell + d = 0{,}825\,\mathrm{m}$. Su incertidumbre es

$$u_L = \sqrt{0{,}002^2 + 0{,}001^2}\,\mathrm{m} \simeq 0{,}0022\,\mathrm{m}.$$

Con dos cifras significativas en la incertidumbre, el resultado se puede escribir $(0{,}8250 \pm 0{,}0022)\,\mathrm{m}$. La suma geométrica exige describir con precisión los extremos de cada medición.



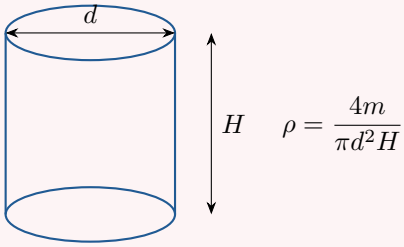

Esquema de los extremos que definen cada longitud. La distancia desde el borde hasta el centro se amplía para distinguir sus puntos de referencia.

### PROBLEMA RESUELTO 23.9 · Obtener densidad e incertidumbre de un cilindro

Un cilindro macizo tiene $m = (54{,}0 \pm 0{,}1)\,\mathrm{g}$, diámetro $d = (2{,}000 \pm 0{,}010)\,\mathrm{cm}$ y altura $H = (3{,}000 \pm 0{,}020)\,\mathrm{cm}$. Calcula $\rho$ y su incertidumbre estándar, suponiendo entradas independientes y forma cilíndrica ideal. *Resolución.* El volumen es $V = \pi d^2 H/4 \simeq 9{,}425\,\mathrm{cm}^3$ y la densidad $\rho = 4m/(\pi d^2 H) \simeq 5{,}7296\,\mathrm{g/cm}^3$. Los exponentes dan

$$\frac{u_\rho}{\rho} \simeq \sqrt{\left(\frac{0{,}1}{54{,}0}\right)^2 + \left(\frac{2(0{,}010)}{2{,}000}\right)^2 + \left(\frac{0{,}020}{3{,}000}\right)^2} \simeq 0{,}0122.$$

Así, $u_\rho \simeq 0{,}070\,\mathrm{g/cm}^3$ y se informa $(5{,}730 \pm 0{,}070)\,\mathrm{g/cm}^3$. El factor dos del diámetro procede de su exponente en el volumen. Su contribución domina entre las tres consideradas.




Geometría del cilindro ideal. El diámetro entra al cuadrado en el volumen y duplica su contribución relativa de primer orden a la densidad.

Cuando dos mediciones comparten una contribución, su relación estadística modifica la combinación. Para una diferencia $D = x - y$, $u_D^2 = u_x^2 + u_y^2 - 2\,\mathrm{cov}(x, y)$. La covarianza registra la variación conjunta. Un desplazamiento aditivo común se cancela al restar las lecturas; una incertidumbre de escala multiplicativa sigue otra relación.

**PROBLEMA RESUELTO 23.10 · Reconocer una contribución común que se cancela**

Dos lecturas de una misma regla son $x = 0{,}500\,\mathrm{m}$ e $y = 0{,}300\,\mathrm{m}$. Cada una tiene una contribución independiente de $0{,}001\,\mathrm{m}$ y ambas comparten el mismo desplazamiento de cero, de incertidumbre estándar $0{,}002\,\mathrm{m}$. Calcula $D = x - y$ y su incertidumbre.

*Resolución.* En el modelo $x = x_{\mathrm{real}} + \delta + \epsilon_x$ e $y = y_{\mathrm{real}} + \delta + \epsilon_y$, la diferencia elimina $\delta$. Quedan las dos contribuciones independientes, por lo que

$$D = 0{,}200\,\mathrm{m}, \qquad u_D = \sqrt{2}(0{,}001)\,\mathrm{m} \simeq 0{,}0014\,\mathrm{m}.$$

La covarianza común equivale a $u_\delta^2$ y reproduce esta cancelación en la fórmula general. El modelo de error compartido debe justificarse para el instrumento y las lecturas concretas.

| aporte a $D$ | incertidumbre |
|---|---|
| cero común | 0 |
| $\epsilon_x$ | 1,0 mm |
| $\epsilon_y$ | 1,0 mm |

Las dos contribuciones independientes se combinan cuadráticamente.

## 23.5 Dimensiones, límites y comparación de modelos

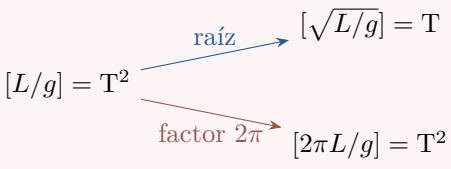
Las dimensiones permiten comprobar la compatibilidad entre magnitudes antes de ajustar parámetros. Los límites examinan cómo se comporta una expresión en regímenes conocidos. El orden de magnitud compara la predicción con escalas físicas razonables. Estos controles se complementan con los datos: varias expresiones pueden compartir dimensiones y límites y diferir en su evolución intermedia.

**PROBLEMA RESUELTO 23.11 · Examinar dos expresiones para el período**

Se proponen $T_A = 2\pi\sqrt{L/g}$ y $T_B = 2\pi L/g$ para un período. Comprueba sus dimensiones y calcula la primera para $L = 1{,}00\,\mathrm{m}$ y $g = 9{,}80\,\mathrm{m/s^2}$. *Resolución.* El cociente $L/g$ tiene dimensión $\mathrm{T}^2$. Su raíz cuadrada posee dimensión temporal, compatible con $T_A$. La expresión $T_B$ conserva dimensión de tiempo al cuadrado y exige una modificación para representar un período. Para la primera,

$$T_A = 2\pi\sqrt{\frac{1{,}00}{9{,}80}} \simeq 2{,}01\,\mathrm{s}.$$

La consistencia dimensional establece una condición necesaria. La relación con el péndulo exige además la derivación dinámica y la evaluación experimental de sus hipótesis.



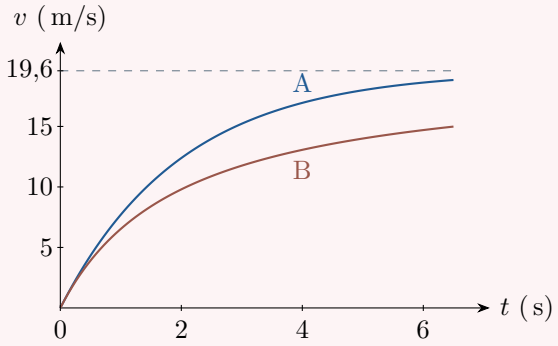

La raíz cambia el exponente dimensional del tiempo. El factor numérico conserva las dimensiones de la cantidad que multiplica.

**PROBLEMA RESUELTO 23.12 · Distinguir modelos con los mismos límites**

Para una caída desde reposo se proponen $v_A = g\tau(1 - e^{-t/\tau})$ y $v_B = gt/(1 + t/\tau)$, con $g = 9{,}80\,\mathrm{m/s^2}$ y $\tau = 2{,}00\,\mathrm{s}$. Compara el comienzo, el límite a tiempos grandes y el valor en $t = 1{,}00\,\mathrm{s}$. *Resolución.* Para $t/\tau$ pequeño, ambas expresiones comienzan con $v \simeq gt$. A tiempos grandes, ambas se aproximan a $g\tau = 19{,}6\,\mathrm{m/s}$. En un segundo,

$$v_A \simeq 7{,}71\,\mathrm{m/s}, \qquad v_B \simeq 6{,}53\,\mathrm{m/s}.$$

Los datos en el régimen intermedio permiten distinguirlas. La primera surge de $dv/dt = g - v/\tau$, correspondiente a rozamiento lineal por unidad de masa. La segunda describe otra evolución. Compartir el comienzo y el límite terminal deja abierta la selección física entre ambas.




Los dos modelos comparten rapidez terminal y pendiente inicial. La evolución entre ambos regímenes ofrece información para contrastar sus predicciones.

## 23.6 Integración numérica y estudio de convergencia

Un algoritmo de integración aproxima la evolución temporal mediante pasos finitos. Para una caída con coordenada $y$ positiva hacia abajo y aceleración $a(v)$, el método de Euler explícito usa los valores del instante anterior:

$$y_{n+1} = y_n + v_n \Delta t, \qquad v_{n+1} = v_n + a(v_n)\Delta t. \tag{23.4}$$

Las dos actualizaciones parten del mismo estado $(y_n, v_n)$. Usar la velocidad recién actualizada en la primera ecuación define otro método. El estudio de convergencia compara resultados al reducir $\Delta t$ manteniendo los mismos datos iniciales, parámetros y tiempo final. Cuando existe una solución analítica, permite calcular directamente el error numérico.

### PROBLEMA RESUELTO 23.13 · Probar convergencia en caída con aceleración constante

Aplica Euler explícito a $a = g = 10{,}0\,\mathrm{m/s^2}$, con $y_0 = v_0 = 0$, hasta $t_f = 1{,}00\,\mathrm{s}$. Compara pasos de 0,250, 0,125 y 0,0625 s con la solución analítica.

*Resolución.* En cada paso la velocidad aumenta $g\Delta t$. Al sumar las velocidades previas para la posición se obtiene

$$y_N = \frac{g\Delta t^2 N(N-1)}{2} = \frac{g t_f^2}{2} - \frac{g t_f \Delta t}{2}.$$

La solución exacta es $y(t_f) = 5{,}00\,\mathrm{m}$. Los errores de posición son 1,25, 0,625 y 0,3125 m. Cada reducción del paso a la mitad reduce el error a la mitad. La velocidad final es 10,0 m/s en los tres casos.

| $\Delta t$ (s) | $y_N$ (m) |
|---|---|
| 0,250 | 3,7500 |
| 0,125 | 4,3750 |
| 0,0625 | 4,6875 |

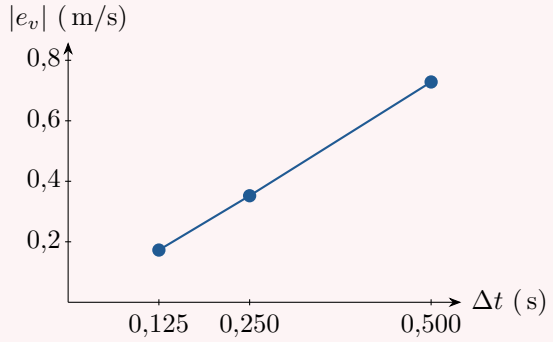
Posiciones de Euler explícito en un segundo. La referencia analítica es cinco metros.

### PROBLEMA RESUELTO 23.14 · Integrar una caída con rozamiento lineal

Usa $a(v) = g - v/\tau$, con $g = 10{,}0\,\mathrm{m/s^2}$, $\tau = 1{,}00\,\mathrm{s}$ y reposo inicial. Calcula la rapidez en $t_f = 2{,}00\,\mathrm{s}$ con Euler para pasos de 0,500, 0,250 y 0,125 s. *Resolución.* La recurrencia es $v_{n+1} = (1 - \Delta t/\tau)v_n + g\Delta t$. Su aplicación entrega 9,375, 8,99887 y 8,81933 m/s. La solución analítica del modelo es

$$v(2) = g\tau(1 - e^{-2/\tau}) \simeq 8{,}64665\,\mathrm{m/s}.$$

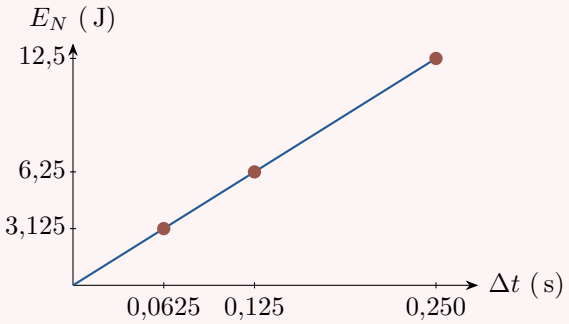
Los errores son aproximadamente 0,72835, 0,35222 y 0,17268 m/s; sus razones sucesivas son cercanas a dos. Para esta ecuación, Euler es estable si $|1 - \Delta t/\tau| < 1$ y se acerca de forma monótona a la rapidez terminal cuando $0 < \Delta t \le \tau$. La elección del paso atiende tanto a estabilidad como a precisión.




Errores de rapidez a los dos segundos para los tres pasos. Las líneas unen resultados de refinamiento; cada punto corresponde a una ejecución completa.

**PROBLEMA RESUELTO 23.15 · Usar la energía como control de un algoritmo**

En la caída sin rozamiento del problema 23.13, toma $m = 1{,}00\,\text{kg}$ y $U = -mgy$, con cero inicial. Calcula la energía mecánica numérica final para los pasos estudiados. *Resolución.* La velocidad final da $K = mv^2/2 = 50{,}0\,\text{J}$. Para $\Delta t = 0{,}250\,\text{s}$, $y_N = 3{,}75\,\text{m}$ y $U = -37{,}5\,\text{J}$, luego $E_N = 12{,}5\,\text{J}$. Los otros pasos dan $E_N = 6{,}25$ y $3{,}125\,\text{J}$. El valor exacto es $E = 0$ durante toda la caída. La deriva numérica se reduce con el paso y ofrece un control adicional de la aproximación. En el sistema con rozamiento, el balance incorpora la energía transferida por esa interacción.




La deriva de energía en un segundo es proporcional al paso para este método y problema. La solución conservativa de referencia tiene energía mecánica cero.

La convergencia comprueba cómo un algoritmo aproxima las ecuaciones elegidas. La correspondencia de esas ecuaciones con un objeto físico se evalúa mediante mediciones, parámetros y condiciones del experimento. La carpeta de laboratorio adjunta incluye un programa Python con Euler explícito, sus parámetros, tablas de convergencia y pruebas frente a las soluciones analíticas. El código utiliza la biblioteca estándar y conserva los datos iniciales en su documentación.

## 23.7 Una serie observada: calibración de instrumentos

La colección pública StRD del NIST incluye la serie Norris, con 36 pares observados de una calibración de monitores de ozono. La variable $x$ corresponde a la medición de concentración del NIST y $y$ a la del instrumento del cliente. La ficha proporciona su significado y valores numéricos. Conservaremos su unidad de concentración como $u_N$; una conversión al SI exige documentar la escala física original. La carpeta de datos contiene los pares en el orden publicado, con su fuente y fecha de consulta.

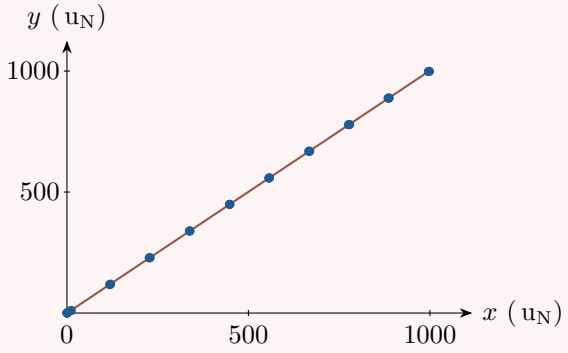
Para comparar procedimientos numéricos, NIST publica parámetros certificados del ajuste ordinario $y = ax + b$. Esa certificación se refiere al resultado del cálculo para esa serie y ese modelo. Una calibración metrológica completa incorpora además la incertidumbre de la referencia, la del instrumento y las condiciones de uso.

**PROBLEMA RESUELTO 23.16 · Reproducir un ajuste con datos públicos**

Ajusta los 36 pares Norris suministrados en el archivo adjunto y compara la pendiente, el intercepto y la desviación residual con los valores publicados. *Resolución.* Aplicando las sumas centradas de la ecuación 23.2 se obtiene

$$a \simeq 1{,}002116818, \qquad b \simeq -0{,}262323074\,\mathrm{u_N}, \qquad s_r \simeq 0{,}884796396\,\mathrm{u_N}.$$

La pendiente es adimensional porque ambas coordenadas usan la misma unidad. El programa adjunto reproduce estos resultados y los compara con los certificados. Para el par publicado $x = 884{,}6\,\mathrm{u_N}$, $y = 888{,}0\,\mathrm{u_N}$, el residuo es aproximadamente $+1{,}790\,\mathrm{u_N}$. La gráfica de residuos conserva la variación que resulta difícil de percibir en la escala completa de concentraciones.



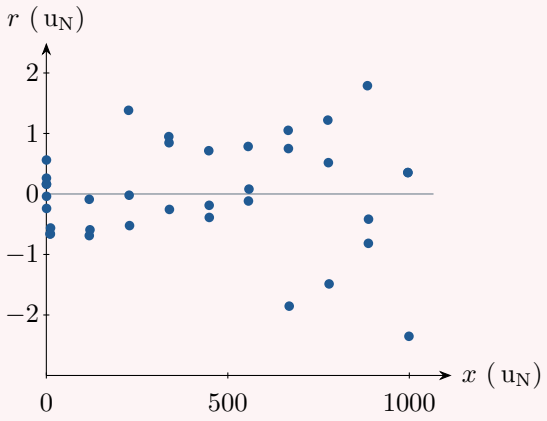

Treinta y seis pares observados de la serie Norris, NIST StRD, con su ajuste ordinario. Las repeticiones cercanas se superponen en esta escala. La unidad se conserva como se explica en el texto.

**PROBLEMA RESUELTO 23.17 · Invertir una relación de calibración**

Con el ajuste anterior, estima la lectura equivalente de la referencia para una indicación del cliente $y = 500{,}0\,\mathrm{u_N}$. Explica qué información permitiría evaluar la incertidumbre de la estimación. *Resolución.* La inversión de la recta da

$$x_{\mathrm{est}} = \frac{y - b}{a} = \frac{500{,}0 + 0{,}262323074}{1{,}002116818} \simeq 499{,}206\,\mathrm{u_N}.$$

Las cifras mostradas permiten verificar el cálculo. Un informe de medida necesita estimar la incertidumbre de la nueva lectura, la dispersión residual, la incertidumbre de los parámetros y su covarianza, junto con la contribución de la referencia. La inversión algebraica entrega el valor central condicionado al ajuste.




Residuos del mismo ajuste a los datos observados. La ampliación vertical permite examinar diferencias entre indicaciones que la gráfica de concentraciones apenas distingue.

## 23.8 Una conclusión que otra persona pueda reconstruir

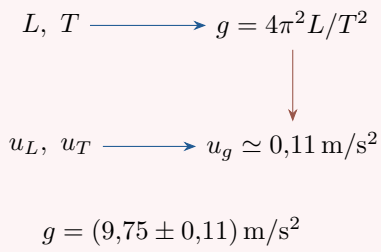
Un informe reproducible reúne la pregunta, el procedimiento, los datos originales, las transformaciones, el modelo y una conclusión cuyo alcance corresponde a las evidencias. Un lector debe poder identificar el significado de cada columna y reconstruir cada cantidad final. Los cambios de datos, criterios de exclusión y versiones del programa se registran para que las decisiones queden trazables.

**PROBLEMA RESUELTO 23.18 · Redactar una conclusión con sus condiciones**

Usa $L = (0{,}800 \pm 0{,}002)\,\mathrm{m}$ y $T = (1{,}800 \pm 0{,}010)\,\mathrm{s}$, con incertidumbres estándar independientes, para informar una estimación de $g$. Elabora una conclusión breve e identifica un control pendiente. *Resolución.* Del modelo de pequeña amplitud,

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} \simeq 9{,}748\,\mathrm{m/s^2}, \qquad \frac{u_g}{g} \simeq \sqrt{\left(\frac{0{,}002}{0{,}800}\right)^2 + \left(\frac{2(0{,}010)}{1{,}800}\right)^2}.$$

Resulta $u_g \simeq 0{,}11\,\mathrm{m/s^2}$. Una conclusión posible es: «Con el modelo de péndulo simple a pequeña amplitud y las incertidumbres indicadas, los datos construidos entregan $g = (9{,}75 \pm 0{,}11)\,\mathrm{m/s^2}$, con incertidumbre estándar. El resultado depende de la longitud hasta el centro de masas y del período medido. Para una experiencia real se evaluarán la amplitud, la calibración y la repetibilidad con registros propios». Cada condición orienta una comprobación concreta.




La estimación central y su incertidumbre se reconstruyen desde las entradas declaradas. Las condiciones del péndulo y las componentes incluidas acompañan el reporte.

En un proyecto breve conviene empezar con una pregunta acotada y conservar desde el principio los registros que permitirán responderla. La revisión de dimensiones, residuos, incertidumbres y convergencia actúa sobre partes distintas del razonamiento. Al reunirlas, la explicación física queda abierta a nuevas mediciones y a una revisión fundamentada.

## Ejercicios para desarrollar autonomía

**EJERCICIO 23.1 · Precisar una variable experimental**

Formula una pregunta sobre la dependencia del período del péndulo con la amplitud. Identifica la variable que se modifica, la que se mide y dos controles.

**EJERCICIO 23.2 · Estimar una media y su incertidumbre**

Tres tiempos construidos de quince oscilaciones son 30,0, 30,2 y 30,4 s. Calcula media, desviación muestral, incertidumbre estándar de la media y período con su componente de repetibilidad.

**EJERCICIO 23.3 · Interpretar la resolución de una regla**

Una regla redondea al milímetro más próximo. Modela el error de redondeo como uniforme entre $-0{,}5$ y $+0{,}5\,\mathrm{mm}$. Usa $u = a/\sqrt{3}$ para una distribución uniforme en $[-a, a]$ y calcula su incertidumbre estándar.

**EJERCICIO 23.4 · Transformar una barra de incertidumbre**

Para $T = (1{,}50 \pm 0{,}02)\,\mathrm{s}$, calcula $T^2$ y su incertidumbre estándar por aproximación lineal.

**EJERCICIO 23.5 · Integrar velocidades discretas**

Las velocidades construidas son 0, 2 y $4\,\mathrm{m/s}$ en $t = 0$, 1 y $2\,\mathrm{s}$. Calcula el desplazamiento por trapecios e identifica la hipótesis entre muestras.

**EJERCICIO 23.6 · Hallar una pendiente con unidades**

Una recta de $T^2$ frente a $L$ pasa por $(0{,}250\,\mathrm{m}, 1{,}010\,\mathrm{s}^2)$ y $(0{,}750\,\mathrm{m}, 3{,}030\,\mathrm{s}^2)$. Calcula pendiente, intercepto y $g$ inferido.

**EJERCICIO 23.7 · Calcular e interpretar un residuo**

Para $L = 0{,}600\,\mathrm{m}$ se obtiene $T^2 = 2{,}460\,\mathrm{s}^2$. Calcula el residuo respecto de $T^2 = (4{,}040\,\mathrm{s}^2/\mathrm{m})L + 0{,}010\,\mathrm{s}^2$ e interpreta su signo.

**EJERCICIO 23.8 · Propagar la incertidumbre de una pendiente**

Un ajuste entrega $a = (4{,}00 \pm 0{,}04)\,\mathrm{s}^2/\mathrm{m}$. Calcula $g = 4\pi^2/a$ y la componente de incertidumbre que proviene de $a$.

**EJERCICIO 23.9 · Examinar una extrapolación**

Una recta empírica es $T^2 = (4{,}10\,\mathrm{s}^2/\mathrm{m})L - 0{,}020\,\mathrm{s}^2$. Encuentra dónde cruza el eje $L$ y analiza su extrapolación hasta $L = 0$ como modelo de período al cuadrado.

**EJERCICIO 23.10 · Combinar dos mediciones independientes**

Dos segmentos miden $(20{,}0 \pm 0{,}2)\,\mathrm{cm}$ y $(30{,}0 \pm 0{,}3)\,\mathrm{cm}$. Calcula su suma con incertidumbre estándar independiente.

**EJERCICIO 23.11 · Calcular una incertidumbre de área**

Un rectángulo tiene lados $a = (10{,}0 \pm 0{,}1)\,\mathrm{cm}$ y $b = (5{,}00 \pm 0{,}05)\,\mathrm{cm}$, independientes. Calcula área e incertidumbre estándar.

**EJERCICIO 23.12 · Reconocer la sensibilidad de una potencia**

El radio de una esfera es $(2{,}00 \pm 0{,}01)\,\mathrm{cm}$. Calcula el volumen y su incertidumbre estándar mediante aproximación lineal.

**EJERCICIO 23.13 · Cambiar una contribución común**

Dos lecturas comparten un error aditivo $\delta$ con incertidumbre estándar $0{,}20\,\mathrm{cm}$. Sus otras contribuciones son despreciables. Calcula la incertidumbre debida a $\delta$ en la suma y en la diferencia.

**EJERCICIO 23.14 · Comprobar dimensiones y escala**

Para una caída desde reposo se propone $y = gt^2/2$. Verifica dimensiones y calcula la distancia para $g = 10{,}0\,\mathrm{m/s^2}$ y $t = 0{,}200\,\mathrm{s}$.

**EJERCICIO 23.15 · Usar un límite terminal**

En el modelo $dv/dt = g - v/\tau$, con $g = 9{,}80\,\mathrm{m/s^2}$ y $\tau = 0{,}500\,\mathrm{s}$, calcula la rapidez terminal y la aceleración cuando $v = 2{,}45\,\mathrm{m/s}$.

**EJERCICIO 23.16 · Dar los primeros pasos de Euler**

Usa Euler explícito con $g = 10{,}0\,\mathrm{m/s^2}$, $\Delta t = 0{,}100\,\mathrm{s}$ y $y_0 = v_0 = 0$. Calcula posición y velocidad en los dos primeros pasos.

**EJERCICIO 23.17 · Estimar una tolerancia de paso**

Para caída con aceleración constante y Euler explícito, el error de posición en $t_f$ tiene magnitud $gt_f\Delta t/2$. Con $g = 10{,}0\,\mathrm{m/s^2}$ y $t_f = 1{,}00\,\mathrm{s}$, determina un paso que dé error de posición menor o igual que $0{,}050\,\mathrm{m}$ y alcance exactamente el tiempo final.

**EJERCICIO 23.18 · Comparar errores de dos mallas**

Una aproximación tiene errores de 0,080 y $0{,}020\,\mathrm{m}$ al usar pasos $h$ y $h/2$. Estima el orden observado mediante $p = \log_2(|e_h/e_{h/2}|)$. Explica el alcance de esa estimación.

**EJERCICIO 23.19 · Examinar estabilidad en rozamiento lineal**

Para $\tau = 1{,}00\,\mathrm{s}$, calcula el factor $q = 1 - \Delta t/\tau$ con $\Delta t = 0{,}500$, 1,50 y $2{,}50\,\mathrm{s}$. Describe cómo evoluciona la diferencia respecto de la rapidez terminal en cada caso.

**EJERCICIO 23.20 · Calcular una deriva energética**

En caída libre con $m = 1{,}00\,\mathrm{kg}$ y $g = 10{,}0\,\mathrm{m/s^2}$, Euler explícito entrega al segundo $v = 10{,}0\,\mathrm{m/s}$ e $y = 4{,}50\,\mathrm{m}$. Calcula $E = mv^2/2 - mgy$ y compara con la energía inicial nula.

**EJERCICIO 23.21 · Revisar un par de datos observados**

Para el par Norris $x = 0{,}2\,\mathrm{u_N}$, $y = 0{,}1\,\mathrm{u_N}$, calcula el residuo de $y = 1{,}002116818x - 0{,}262323074\,\mathrm{u_N}$. Identifica el significado de ambas variables.

**EJERCICIO 23.22 · Aplicar una calibración sencilla**

Una calibración didáctica da $y = 1{,}020x + 0{,}500\,\mathrm{V}$, con ambas variables en voltios. Para $y = 5{,}600\,\mathrm{V}$, calcula la lectura equivalente $x$.

**EJERCICIO 23.23 · Separar dispersión y contribución común**

Una media tiene componente aleatoria de incertidumbre $0{,}040\,\mathrm{s}$ y una componente de calibración independiente de $0{,}030\,\mathrm{s}$. Calcula la combinación y el valor que quedaría si una repetición ampliada redujera la componente aleatoria a $0{,}020\,\mathrm{s}$.

**EJERCICIO 23.24 · Hacer reconstruible una conclusión**

Un informe afirma: «La simulación confirma el movimiento con precisión». Reescribe la conclusión incorporando el modelo $a = g - v/\tau$, $g = 10{,}0\,\mathrm{m/s^2}$, $\tau = 1{,}00\,\mathrm{s}$, reposo inicial, $t_f = 2{,}00\,\mathrm{s}$ y Euler con $\Delta t = 0{,}125\,\mathrm{s}$. Usa el resultado del problema 23.14 y propone una comprobación experimental adicional.

## Soluciones razonadas

**SOLUCIÓN 23.1.**
Una pregunta posible es: «¿Cómo cambia $T$ al variar la amplitud inicial entre cinco y veinte grados?». Se modifica la amplitud, se mide el período y se conservan la longitud efectiva y la misma pesa. Registrar el procedimiento de liberación permite estudiar también su repetibilidad.

**SOLUCIÓN 23.2.**
$\bar{t} = 30{,}2\,\mathrm{s}$, $s_t = 0{,}200\,\mathrm{s}$ y $u_{\bar{t}} = 0{,}200/\sqrt{3} \simeq 0{,}115\,\mathrm{s}$. El período es $T = 30{,}2/15 \simeq 2{,}0133\,\mathrm{s}$ y su componente de incertidumbre es $u_T \simeq 0{,}0077\,\mathrm{s}$. Se informa $(2{,}0133 \pm 0{,}0077)\,\mathrm{s}$ para esa componente.

**SOLUCIÓN 23.3.**
El semiancho es $a = 0{,}5\,\mathrm{mm}$. Por tanto, $u = 0{,}5/\sqrt{3} \simeq 0{,}289\,\mathrm{mm} = 2{,}89 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}$. La resolución y la incertidumbre estándar se vinculan aquí mediante la distribución uniforme declarada.

**SOLUCIÓN 23.4.**
$T^2 = 2{,}25\,\mathrm{s^2}$ y $u_{T^2} \simeq 2(1{,}50)(0{,}02) = 0{,}06\,\mathrm{s^2}$. La barra vertical tiene ese semiancho en la gráfica transformada.

**SOLUCIÓN 23.5.**
Los trapecios aportan $(0+2)/2 = 1\,\mathrm{m}$ y $(2+4)/2 = 3\,\mathrm{m}$, para un total de $4\,\mathrm{m}$. La interpolación adoptada hace variar linealmente la velocidad en cada intervalo.

**SOLUCIÓN 23.6.**
$a = (3{,}030 - 1{,}010)/(0{,}750 - 0{,}250) = 4{,}040\,\mathrm{s^2/m}$. El intercepto es cero para esos dos puntos. Entonces $g = 4\pi^2/4{,}040 \simeq 9{,}772\,\mathrm{m/s^2}$, condicionado al modelo del péndulo.

**SOLUCIÓN 23.7.**
La predicción es $4{,}040(0{,}600) + 0{,}010 = 2{,}434\,\mathrm{s^2}$. El residuo es $+0{,}026\,\mathrm{s^2}$, de modo que el punto queda por encima de la recta.

**SOLUCIÓN 23.8.**
$g \simeq 9{,}8696\,\mathrm{m/s^2}$ y $u_g = (g/a)u_a \simeq 0{,}0987\,\mathrm{m/s^2}$. Con redondeo coherente, $(9{,}87 \pm 0{,}10)\,\mathrm{m/s^2}$ representa la componente procedente de la pendiente.

**SOLUCIÓN 23.9.**
El cruce está en $L = 0{,}020/4{,}10 \simeq 0{,}00488\,\mathrm{m}$. En $L = 0$ la extrapolación produce $T^2 = -0{,}020\,\mathrm{s^2}$. Un período real al cuadrado tiene valor positivo o nulo; esa extrapolación queda fuera de una interpretación física directa. El ajuste puede evaluarse en el intervalo de longitudes que sustentan sus datos.

**SOLUCIÓN 23.10.**
La suma es $50{,}0\,\mathrm{cm}$ y $u = \sqrt{0{,}2^2 + 0{,}3^2} \simeq 0{,}36\,\mathrm{cm}$. Un reporte coherente es $(50{,}00 \pm 0{,}36)\,\mathrm{cm}$, bajo independencia.

**SOLUCIÓN 23.11.**
$A = 50{,}0\,\mathrm{cm^2}$. La incertidumbre relativa es $\sqrt{(0{,}1/10)^2 + (0{,}05/5)^2} \simeq 0{,}0141$, por lo que $u_A \simeq 0{,}71\,\mathrm{cm^2}$. Se puede escribir $(50{,}00 \pm 0{,}71)\,\mathrm{cm^2}$.

**SOLUCIÓN 23.12.**
$V = 4\pi r^3/3 \simeq 33{,}510\,\mathrm{cm^3}$. La incertidumbre relativa es $3u_r/r = 0{,}0150$, y $u_V \simeq 0{,}50\,\mathrm{cm^3}$. El resultado es $(33{,}51 \pm 0{,}50)\,\mathrm{cm^3}$.

**SOLUCIÓN 23.13.**
En la suma aparece $2\delta$, con incertidumbre $2u_\delta = 0{,}40\,\mathrm{cm}$. En la diferencia la contribución común se cancela y aporta cero. Otros efectos del instrumento requerirían componentes propias.

**SOLUCIÓN 23.14.**
$[g][t]^2 = (\mathrm{LT^{-2}})\mathrm{T^2} = \mathrm{L}$. La predicción es $y = 10(0{,}200)^2/2 = 0{,}200\,\mathrm{m}$.

**SOLUCIÓN 23.15.**
La condición terminal $a = 0$ da $v_\infty = g\tau = 4{,}90\,\mathrm{m/s}$. Para $v = 2{,}45\,\mathrm{m/s}$, $a = 9{,}80 - 2{,}45/0{,}500 = 4{,}90\,\mathrm{m/s^2}$, hacia abajo con la convención elegida.

**SOLUCIÓN 23.16.**
Primer paso: $y_1 = 0$ y $v_1 = 1{,}00\,\mathrm{m/s}$. Segundo paso: $y_2 = 0{,}100\,\mathrm{m}$ y $v_2 = 2{,}00\,\mathrm{m/s}$. Cada posición usa la velocidad del estado anterior.

**SOLUCIÓN 23.17.**
$gt_f\Delta t/2 \le 0{,}050\,\mathrm{m}$ exige $\Delta t \le 0{,}0100\,\mathrm{s}$. Elegir $0{,}0100\,\mathrm{s}$ produce cien pasos y un error de $0{,}050\,\mathrm{m}$ al tiempo final.

**SOLUCIÓN 23.18.**
La razón de errores es cuatro y $p = \log_2 4 = 2$. Es un orden observado para esos pasos y ese problema; se contrasta con refinamientos adicionales y con el régimen asintótico del método.

**SOLUCIÓN 23.19.**
Los factores son $0{,}500$, $-0{,}500$ y $-1{,}50$. El primero reduce la diferencia de forma monótona; el segundo alterna su signo y reduce su magnitud; el tercero alterna el signo y aumenta la magnitud. La condición $|q| < 1$ explica las dos primeras evoluciones estables.

**SOLUCIÓN 23.20.**
$K = 50{,}0\,\mathrm{J}$ y $U = -45{,}0\,\mathrm{J}$, de modo que $E = 5{,}00\,\mathrm{J}$. La diferencia respecto del valor inicial es una deriva del resultado numérico para el sistema conservativo.

**SOLUCIÓN 23.21.**
La predicción es $-0{,}0618997\,\mathrm{u_N}$ y el residuo $0{,}1 - (-0{,}0618997) \simeq +0{,}161900\,\mathrm{u_N}$. $x$ corresponde a la referencia NIST y $y$ a la lectura del cliente. Las variables conservan la unidad de concentración de la serie.

**SOLUCIÓN 23.22.**
$x = (5{,}600 - 0{,}500)/1{,}020 = 5{,}000\,\mathrm{V}$. La inversión se aplica al rango y las condiciones para los que se obtuvo la recta.

**SOLUCIÓN 23.23.**

La combinación inicial es $\sqrt{0{,}040^2 + 0{,}030^2} = 0{,}050\,\text{s}$. Al reducir la componente aleatoria, la combinación pasa a 0,036 s, obtenida al sumar cuadráticamente 0,020 s y 0,030 s. La componente común de calibración mantiene su valor al ampliar las repeticiones.

**SOLUCIÓN 23.24.**

Una redacción posible es: «Euler explícito, con paso 0,125 s, da $v(2\,\text{s}) = 8{,}81933\,\text{m/s}$ para el modelo y las condiciones indicadas. La solución analítica da 8,64665 m/s, con error numérico de $+0{,}17268\,\text{m/s}$. Los pasos de 0,500 y 0,250 s presentan errores mayores y la reducción observada es aproximadamente de primer orden». Una prueba física adicional mediría velocidades y estimaría $\tau$ para el cuerpo y el medio elegidos.

## Una experiencia: un pequeño estudio reproducible del péndulo

### De los registros propios a una conclusión revisable

Prepara un péndulo ligero con soporte firme y zona de oscilación despejada. Elige al menos cinco longitudes, mide hasta el centro de masas y registra la amplitud inicial próxima a cinco grados. Cronometra veinte oscilaciones completas y realiza al menos cinco repeticiones por longitud. Alterna el orden de longitudes para examinar posibles cambios del procedimiento durante la sesión.

Conserva los tiempos originales en una tabla con fecha, instrumentos, unidades y criterio de conteo. Calcula $T$, su repetibilidad y $T^2$. Estima también la contribución de la longitud y del instrumento temporal, indicando cómo las obtuviste. Traza la gráfica con barras de incertidumbre y examina si sus tamaños permiten el ajuste ordinario o requieren otro tratamiento. Compara un ajuste libre con el paso por el origen y dibuja los residuos.

Redacta una conclusión que informe el valor inferido de $g$, las componentes incluidas en su incertidumbre y las condiciones del modelo. Adjunta datos, fórmulas o programa y decisiones de análisis. La carpeta de laboratorio ofrece archivos didácticos y un ejemplo computacional; los registros de esta experiencia corresponden a las mediciones que realice cada grupo.

## Diagnóstico de cierre del recorrido

Un grupo obtiene $a = (4{,}050 \pm 0{,}020)\,\mathrm{s^2/m}$ al ajustar $T^2$ frente a $L$. La incertidumbre indicada procede de la dispersión del ajuste. Calcula $g$ y esa componente de incertidumbre. El grupo también implementa Euler explícito para caída sin rozamiento con $g = 10{,}0\,\mathrm{m/s^2}$, reposo inicial y $t_f = 1{,}00\,\mathrm{s}$, y obtiene $y = 4{,}50\,\mathrm{m}$ para $\Delta t = 0{,}100\,\mathrm{s}$ y $y = 4{,}75\,\mathrm{m}$ para $\Delta t = 0{,}050\,\mathrm{s}$. Calcula los errores y su razón. Formula una conclusión sobre el algoritmo y otra sobre la estimación experimental, precisando qué información adicional permite evaluar esta última.

**Contraste.** La pendiente entrega $g = 4\pi^2/4{,}050 \simeq 9{,}748\,\mathrm{m/s^2}$ y $u_g \simeq (g/a)(0{,}020) \simeq 0{,}048\,\mathrm{m/s^2}$. Esta componente depende de las hipótesis del ajuste. La caída analítica alcanza $5{,}00\,\mathrm{m}$; los errores son $-0{,}500$ y $-0{,}250\,\mathrm{m}$, con razón de magnitudes dos. Los resultados muestran convergencia de primer orden de la posición en ese caso. La estimación experimental requiere además registros originales, medición de la longitud efectiva, amplitudes, calibración y evaluación de las incertidumbres omitidas. Las dos conclusiones corresponden a comprobaciones diferentes del estudio.

**Lecturas y datos de apoyo.** Las relaciones del péndulo y de la caída retoman los capítulos de oscilaciones y dinámica del proyecto, cotejados con los textos de Sears–Zemansky y Serway–Vuille en su desarrollo. El tratamiento del ajuste y de incertidumbre se apoya en el *NIST/SEMATECH e-Handbook of Statistical Methods*, apartados sobre mínimos cuadrados y propagación de incertidumbre. Los datos observados proceden de NIST StRD, serie Norris. El informe de fuentes adjunto precisa enlaces, metadatos y alcance de las consultas. El resto de los datos de práctica y las ayudas visuales se preparó para esta obra.