Física

para matemáticos

Tomo I

Fundamentos y mecánica

A. Peña

TEORÍA, EJERCICIOS Y PERSPECTIVA

Matemática²biertA

MATEMATICAABIERTA.CL

Física para matemáticos

Tomo I: Fundamentos y mecánica

A. Peña
Matemática Abierta

Previsualización editorial, 21 de octubre de 2026.

© 2026 A. Peña.
matematicaabierta.cl

Índice general

Capítulo 0. El problema de medir 1
La magnitud, el número y la unidad 2
Unidades, dimensiones y ecuaciones que pueden tener sentido 2
Qué sabemos después de leer una escala 3
Calibrar una indicación 4
Precisión y exactitud 5
Hacer medible un intervalo pequeño 6
Una magnitud calculada a partir de otras 7
El resultado como conjunto de valores admisibles 8
Qué puede identificar una calibración 9
Elegir una escala para juzgar el resultado 9
Conservar cifras sin inventar certidumbre 10
Medir como parte del fenómeno 10
Ejercicios 10
Soluciones 13
Lecturas de apoyo 19

Capítulo 1. Describir, medir y estimar un movimiento 20
Un origen y un sentido para describir el movimiento 20
De la velocidad al lugar de detención 21
Posición, desplazamiento y distancia recorrida 22
Relacionar promedios y valores instantáneos 23
Lo que determinan una aceleración y los datos iniciales 23
Hasta cuándo vale una fórmula 24
Qué ocurre si la rapidez inicial se duplica 24
Formular una condición de detención 25
Medir una posición y reconstruir un cambio 25
De una lectura a un intervalo 26
Cuánto cambia la conclusión cuando cambian los datos 27
Estimar antes de terminar la cuenta 28
Lo que los datos no determinaban 28
Ejercicios 29
Soluciones 32
Lecturas de apoyo 39

Capítulo 2. Reconstruir movimientos en una recta 40
Un reloj común para dos movimientos 40
Continuar una historia sin volver a empezar 40
Qué reconstruye el área de una gráfica 41
Buscar un encuentro en el tramo que le corresponde 42
La separación como una nueva incógnita 43
Resolver un problema por tramos 44
Existencia, unicidad y cruce de un encuentro 45
Qué cambia al trasladar el observador 45
Un encuentro puede dejar intacto el orden 46

Cuánta historia contienen unos pocos registros 46
Ejercicios 47
Soluciones 50
Lecturas de apoyo 57

Capítulo 3. Movimiento en el plano 58
Dos coordenadas para un solo movimiento 58
Derivar un vector y leer su dirección 59
Integrar componentes sin separar los instantes 60
La parábola y el tramo que realmente se recorre 61
Alcanzar un punto con una rapidez fijada 62
Cambiar de dirección también requiere aceleración 63
Sumar velocidades exige nombrar al observador 65
Lo que una trayectoria observada permite comprobar 67
Ejercicios 67
Soluciones 70
Lecturas de apoyo 76

Capítulo 4. Fuerzas y leyes de Newton 77
El cuerpo elegido decide qué fuerzas se suman 77
Una resultante no es otra interacción 78
El marco forma parte de la ley 79
Qué relacionan la masa y la aceleración 80
Recuperar el frenado desde las interacciones 80
El apoyo se calcula junto con el movimiento 81
Fuerzas iguales que actúan sobre cuerpos distintos 82
Cambiar de sistema para encontrar una fuerza de contacto 84
Una ley de fuerza completa la ecuación 85
De una fuerza conocida a toda la historia 86
La aceleración radial necesita una interacción 87
Lo que permite inferir una aceleración 88
Ejercicios 88
Soluciones 92
Lecturas de apoyo 98

Capítulo 5. Contactos, tensiones y rozamiento 99
La fuerza que permite seguir en reposo 99
Seguir la caja hasta que vuelva a detenerse 100
Qué contiene el modelo de rozamiento 101
Separar la normal de la condición de contacto 102
La pendiente decide qué fricción se necesita 103
Lo que una cuerda puede transmitir 104
Unir dos ecuaciones sin perder sus direcciones 105
Fricción que acelera en el sentido de la marcha 106
Una desigualdad también puede resolver un problema 107
Ejercicios 108
Soluciones 112
Lecturas de apoyo 118

Capítulo 6. Cuerpos conectados y restricciones 119
La longitud antes que las fuerzas 120
Dos ramales sostienen la carga 121
Posiciones que pueden coexistir 122
Qué significa que una cuerda siga tensa 124
Una masa que se mueve y un extremo que alguien controla 124

Varias cuerdas: reconocer relaciones diferentes 125
Cuando la geometría es curva 126
Qué aprendemos del aparato 128
Ejercicios 128
Soluciones 131
Lecturas de apoyo 136

Capítulo 7. Trabajo y energía cinética 137
Acumular el efecto de la fuerza durante el recorrido 138
La detención después de retirar el tirón 139
Qué llamamos trabajo 140
La cantidad que cambia cuando hay trabajo neto 141
Resolver una rapidez y reconocer el tramo que existe 142
Un resorte como fuerza variable 143
Sumar energías de cuerpos conectados 144
La rapidez con que se realiza trabajo 145
Lo que una medición de trabajo permite inferir 146
Ejercicios 147
Soluciones 150
Lecturas de apoyo 156

Capítulo 8. Potencial, equilibrio y estabilidad 157
La misma integral, leída desde sus extremos 158
Construir un potencial y elegir su referencia 159
Cuándo el trabajo depende sólo de los extremos 160
Energía mecánica y trabajo de las otras fuerzas 161
Leer una línea de energía sin confundirla con una trayectoria 162
Qué se perturba cuando se habla de estabilidad 164
La segunda derivada y los casos que deja abiertos 165
Ejercicios 166
Soluciones 169
Lecturas de apoyo 177

Capítulo 9. Impulso, colisiones y centro de masa 178
Acumular una fuerza durante un intervalo 179
La frontera del sistema decide qué se cancela 180
Un punto que reúne el movimiento colectivo 181
La energía del movimiento relativo 182
Qué condición falta para resolver un choque 183
Cambiar de balance cuando cambia la etapa 184
Del balance a una medición 186
Ejercicios 187
Soluciones 190
Lecturas de apoyo 195

Capítulo 10. El oscilador armónico 196
Una función que conserva su forma al derivar dos veces 197
Amplitud, fase y reloj 198
La energía dibuja los estados posibles 200
Medir desde un equilibrio desplazado 201
Hasta dónde vale una aproximación armónica 202
Lo que permiten reconstruir unas observaciones 203
Ejercicios 205
Soluciones 208
Lecturas de apoyo 213

Capítulo 11. Disipación y respuesta forzada 214
Lo que dice la energía antes de resolver la trayectoria 215
Separar la caída de la oscilación 215
Regresar sin una sucesión de oscilaciones 217
Medir el amortiguamiento 218
Sostener el movimiento con una fuerza periódica 218
Qué magnitud alcanza su máximo 220
Potencia, fase y ancho de la respuesta 221
Qué cambia cuando se elimina la disipación 223
Ejercicios 224
Soluciones 226
Lecturas y conexiones 231

Capítulo 12. Momento angular y torque 232
Medir el efecto de una fuerza respecto de un punto 233
El balance que relaciona torque y momento angular 234
Resolver el movimiento de la cuenta 235
Cambiar el punto del balance 236
Qué deben cumplir las fuerzas internas 237
Separar traslación del centro de masa y movimiento interno 237
Fuerzas centrales y áreas barridas 239
Torque, trabajo y potencia 240
Ejercicios 241
Soluciones 244
Lecturas y conexiones 250

Capítulo 13. Rotación plana y rodadura 251
La posición de cada punto de un cuerpo que gira 252
Calcular el momento de inercia desde la distribución 252
Las dos ecuaciones de movimiento 254
Qué significa rodar sin deslizar 254
Descender por una rampa sin deslizar 255
Cómo actúa la fricción sin quitar energía mecánica 256
Determinar el sentido de la fricción en otro experimento 257
Cuando la rueda comienza deslizando 258
Una polea con inercia 259
Ejercicios 260
Soluciones 263
Lecturas y conexiones 267

Capítulo 14. Gravitación y campo 268
De una interacción entre masas a un campo 269
Un potencial que conserva la información sobre el trabajo 270
Cuánto cuesta aproximar la gravedad por una constante 271
Construir una fuente extensa sin concentrarla de antemano 272
Por qué funciona una fuente puntual fuera de una esfera 273
Usar energía para una caída extensa o un escape 275
Qué puede inferirse de una medición del campo 276
Ejercicios 277
Soluciones 280
Lecturas y conexiones 285

Capítulo 15. Dos cuerpos y fuerzas centrales 286
Elegir variables que permitan recuperar los dos movimientos 287
Reducir las ecuaciones sin inmovilizar una masa 287

Las conservaciones que hacen plano el movimiento relativo 288
Separar el cambio de distancia y el barrido angular 289
Resolver un estado gravitatorio antes de clasificar toda la órbita 291
Mantener un radio y examinar sus perturbaciones 293
Comprobar qué hipótesis sostiene cada conservación 294
Ejercicios 295
Soluciones 298
Lecturas y conexiones 303

Capítulo 16. Órbitas de Kepler 304
Convertir el estado en constantes que se puedan interpretar 304
Encontrar la dirección del periastro 305
Leer la forma y los límites de una cónica 306
Medir el período mediante el área 308
Construir un reloj sobre la elipse 310
Recuperar posiciones y reconocer la información que falta 313
Ejercicios 315
Soluciones 317
Lecturas y conexiones 323

Capítulo 17. Dispersión clásica 324
Preparar un encuentro desde lejos 324
Obtener la desviación a partir del movimiento radial 325
Resolver la interacción inversa del radio 326
Del área de preparación al ángulo sólido 327
Contar partículas dentro de una ventana finita 329
Reconstruir lo que mide el laboratorio 331
Ejercicios 333
Soluciones 336
Lecturas y conexiones 342

Capítulo 18. Marcos acelerados y giratorios 343
Especificar el movimiento del observador 343
Derivar la posición dos veces 345
Formular Newton en las coordenadas móviles 346
Reconstruir la partícula liberada de la plataforma 348
Reconocer qué energía puede conservarse 349
Aplicar un marco giratorio local a la Tierra 352
Ejercicios 353
Soluciones 356
Lecturas y conexiones 361

Capítulo 19. Cuerpo rígido en tres dimensiones 362
Describir un cuerpo que se traslada y gira 362
Reunir la distribución de masa en una transformación 363
Escoger ejes que separen las respuestas 364
Trasladar el punto de referencia 367
Escribir el balance en los ejes del cuerpo 368
Resolver un giro libre y precisar su estabilidad 368
Contrastar una aproximación para el giróscopo 371
Ejercicios 372
Soluciones 375
Lecturas y conexiones 380

Capítulo 20. Oscilaciones acopladas 381

Dos posiciones para un solo aparato 381
Preparar los modos y recuperar los datos 383
La masa decide cómo proyectar 384
Separar las ecuaciones y la energía 385
Frecuencias nulas, crecimiento y periodicidad 386
La aproximación cerca de un equilibrio 386
Lo que una medición de modos permite inferir 387
Elegir qué combinación registrar 388
Ejercicios 389
Soluciones 391
Lecturas y relaciones 397

Capítulo 21. Trabajo virtual, coordenadas generalizadas y acción 398
Elegir posiciones que satisfacen los vínculos 398
Comparar posiciones en un mismo instante 399
La energía cinética conserva la geometría 400
Proyectar Newton mediante el trabajo virtual 400
Variar una trayectoria completa 402
El término de borde y la elección del lagrangiano 404
Distinguir la integral energética del trabajo del soporte 405
Ejercicios 406
Soluciones 408
Lecturas y conexiones 415

Capítulo 22. Mecánica lagrangiana 416
Dos velocidades contribuyen al movimiento del bloque 416
La matriz cinética determina las aceleraciones 417
Usar una coordenada cíclica y reconstruirla 418
Recuperar la reacción y comprobar el contacto 419
Cambiar coordenadas conservando las ecuaciones 420
Hacer la cuenta de energía del aparato correcto 421
Usar el formalismo en un mecanismo con ángulos 422
Ejercicios 423
Soluciones 426
Lecturas y conexiones 433

Capítulo 23. Simetrías y conservación 434
Trasladar el aparato completo 434
Variar el lagrangiano a tiempo fijo 435
Identificar las cantidades de traslación y rotación 436
Transformar también el tiempo 437
Conservar el término de borde 438
Seguir un potencial que acelera 440
Reconocer constantes que guardan la fase 440
Ejercicios 441
Soluciones 444
Lecturas y conexiones 451

Capítulo 24. Mecánica hamiltoniana 452
El resorte visto desde posición y momento 452
Invertir los momentos 453
La matriz cinética y los términos lineales 454
Ecuaciones y balances 455
La acción en posición y momento 456
Cambiar el borde y conservar la trayectoria 457

Ejercicios 457
Soluciones 460
Lecturas y relaciones 467

Capítulo 25. Poisson y geometría del espacio de fases 468
Derivar una magnitud sobre la órbita 468
Una función que genera movimientos 469
Áreas orientadas y parejas conjugadas 470
Comprobar una transformación 471
Cómo evoluciona una región de estados 472
Construir el cambio con una función generadora 473
El reloj de una elipse discreta 474
Ejercicios 475
Soluciones 477
Lecturas y relaciones 485

Capítulo 26. Estabilidad y dinámica no lineal 486
Qué significa permanecer cerca 486
La energía construye una barrera 487
Qué conserva la linealización 489
Disipar energía y demostrar el retorno 491
Mirar una vez por periodo 492
Sensibilidad y horizonte de predicción 493
Ejercicios 496
Soluciones 498
Lecturas y relaciones 503

Capítulo 27. Sistemas abiertos y transferencia de masa 504
Del choque aislado a la recogida continua 504
El balance incluye lo que atraviesa la frontera 505
Comprobar la ecuación desde otro laboratorio 507
La energía de la captura 507
Expulsar materia: el cohete ideal 509
De la corriente discreta a una región del espacio 510
Qué se mide al contrastar un sistema abierto 513
Ejercicios 515
Soluciones 517
Lecturas y relaciones 523

Capítulo 0

El problema de medir

Medir la longitud de una barra parece consistir en apoyar una regla y leer un número. Pero si dos personas obtienen resultados distintos, la lectura deja de ser suficiente: necesitamos saber qué extremos eligieron, cómo colocaron la regla y qué cambios pudo sufrir la barra entre ambas mediciones. Antes de decidir cuál número aceptar, tenemos que precisar qué se quiso medir y cómo se obtuvo cada resultado.

La cantidad que buscamos no se identifica con la indicación del aparato. Una barra puede dilatarse al calentarse; un borde irregular puede admitir distintas maneras de definir su posición; una regla puede tener desplazado el cero. Algunos desacuerdos proceden del instrumento, otros de las condiciones físicas y otros de una pregunta todavía imprecisa. El problema de medir comienza al construir una relación controlable entre el objeto y el resultado que escribimos.

Consideremos una barra apoyada junto a una regla cuyo extremo se ha roto. El borde izquierdo coincide con la lectura de 2,30 cm y el derecho con la de 14,70 cm. La regla sigue siendo útil: la longitud entre esos bordes es la diferencia de las lecturas,

$$L = 14{,}70\,\text{cm} - 2{,}30\,\text{cm} = 12{,}40\,\text{cm}.$$

Para obtener ese resultado tuvimos que identificar dos bordes, alinear la regla y relacionar cada extremo con una marca. Si uno de los bordes es irregular o la barra está inclinada respecto de la escala, el procedimiento requiere una decisión adicional. La expresión «longitud de la barra» se vuelve una pregunta precisa cuando hemos determinado qué extremos se comparan y en qué condiciones. A esa magnitud que pretendemos medir, definida con el detalle necesario para el problema, la llamaremos *mensurando*. El término permite distinguir lo que buscamos de la señal que utilizamos para conocerlo.

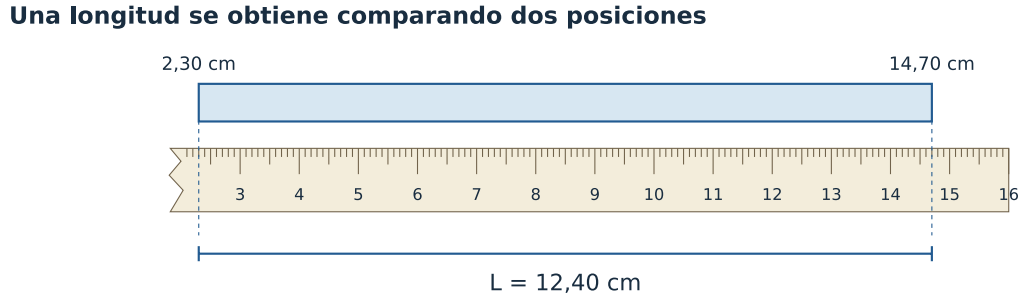


Figura 0.1. La longitud es la separación entre los extremos elegidos. El cero de la regla no tiene que coincidir con uno de ellos para que podamos medirla mediante una diferencia.

La magnitud, el número y la unidad

La barra puede describirse por su longitud, su masa o su temperatura. Elegir la longitud determina qué aspecto investigamos; escoger el centímetro determina la referencia con la que expresamos el resultado. Si cambiamos de unidad y escribimos $L = 0{,}1240\,\mathrm{m}$, hemos cambiado el número sin cambiar la longitud.

Para una longitud podemos escribir $L = \ell u$, donde u es la unidad y ℓ su valor numérico en esa unidad. Si reemplazamos u por otra unidad cien veces mayor, el número se divide por cien. Esta dependencia importa al calcular: sumar 12,4 cm y 0,5 m exige expresar ambas longitudes en una unidad común, de modo que

$$12{,}4\,\mathrm{cm} + 0{,}5\,\mathrm{m} = 12{,}4\,\mathrm{cm} + 50\,\mathrm{cm} = 62{,}4\,\mathrm{cm}.$$

Sumar directamente los valores 12,4 y 0,5 daría un número sin la relación que queremos representar. Las unidades acompañan a las magnitudes durante la cuenta, y al multiplicarlas o dividirlas producen las unidades de la magnitud resultante. Por ejemplo, un área rectangular calculada como longitud por anchura se expresa en unidades de longitud al cuadrado. Puesto que $1\,\mathrm{m} = 100\,\mathrm{cm}$, un metro cuadrado equivale a $10\,000\,\mathrm{cm}^2$, no a cien centímetros cuadrados.

La dimensión física recoge el tipo de magnitud, con independencia de la unidad elegida. Una longitud expresada en metros y otra expresada en centímetros tienen dimensión de longitud, que denotaremos por L. Un tiempo tiene dimensión T y una masa, M. El cociente entre un desplazamiento y un intervalo temporal tiene dimensión L/T; cambiar segundos por milisegundos modifica su valor numérico, pero conserva esa dimensión. La igualdad de dimensiones es una condición necesaria de una suma física: una longitud y un tiempo no se suman para producir otra longitud.

La comprobación dimensional permite detectar algunas equivocaciones antes de conocer el resultado. No decide por sí sola si la fórmula corresponde al fenómeno: dos expresiones dimensionalmente correctas pueden dar predicciones distintas porque describen modelos diferentes.

Unidades, dimensiones y ecuaciones que pueden tener sentido

La longitud de una barra conserva su identidad cuando cambiamos de centímetros a metros. Si u es una unidad, escribimos $Q = \{Q\}_u u$, donde $\{Q\}_u$ es su valor numérico. Al escoger $u' = cu$, con $c > 0$, la igualdad física exige $\{Q\}_{u'} = \{Q\}_u / c$. Así se explica que convertir una medida transforme también su cota, sin cambiar la razón entre ambas.

Definición (dimensión). En el sistema mecánico basado en longitud, masa y tiempo, representamos la dimensión de una magnitud mediante $L^\alpha M^\beta T^\gamma$. Los productos suman los exponentes, los cocientes los restan y una potencia multiplica los exponentes por esa potencia. La dimensión registra cómo responde una magnitud al cambio de las unidades básicas; varias magnitudes físicamente distintas pueden compartirla.

Una suma requiere términos de la misma dimensión. Además, el argumento de una exponencial, un logaritmo o una función trigonométrica en las expresiones que utilizaremos debe ser adimensional. Por ejemplo, $\exp(-t/\tau)$ admite cualquier unidad temporal común a t y τ; escribir $\exp(-t)$ con t entendido como una magnitud temporal deja incompleta la fórmula. Si en una gráfica escribimos el tiempo numérico $\theta = t/(1\,\mathrm{s})$, entonces $\exp(-\theta)$ sí tiene un argumento definido.

Conclusión (alcance del análisis dimensional). La homogeneidad dimensional es una condición necesaria para las ecuaciones entre las magnitudes aquí consideradas. No determina por sí sola una ley ni sus factores numéricos adimensionales. Las expresiones $v_0 t + a t^2$ y $v_0 t + a t^2/2$ tienen la misma dimensión. La segunda satisface $x(0) = 0$, $x'(0) = v_0$ y $x'' = a$ para todo valor constante de a. La primera tiene segunda derivada $2a$, que coincide con la aceleración prescrita sólo en el caso $a = 0$. Esa distinción adquirirá contenido físico en el capítulo 1.

Qué sabemos después de leer una escala

Las dos lecturas de la barra no tienen por qué coincidir exactamente con las posiciones buscadas. Supongamos que el procedimiento permite asegurar, para este ejemplo,

$$x_1 \in [2{,}25, 2{,}35]\,\mathrm{cm}, \qquad x_2 \in [14{,}65, 14{,}75]\,\mathrm{cm}.$$

La longitud es $L = x_2 - x_1$. Para encontrar una cota inferior tomamos el menor extremo derecho y restamos el mayor extremo izquierdo; para la superior hacemos las elecciones opuestas. Resulta

$$L \in [14{,}65 - 2{,}35,\, 14{,}75 - 2{,}25]\,\mathrm{cm} = [12{,}30, 12{,}50]\,\mathrm{cm}.$$

Podemos resumir esa información mediante $L = (12{,}40 \pm 0{,}10)\,\mathrm{cm}$, siempre que expliquemos que aquí el signo $\pm$ representa una cota absoluta. En otras mediciones puede acompañar una incertidumbre estándar o una declaración probabilística; la escritura, por sí sola, no permite decidir qué significa. En este capítulo trabajaremos con intervalos y cotas cuando el enunciado los proporcione. No asignaremos a esos intervalos un porcentaje de confianza que no esté justificado por un modelo estadístico.

La cota no se obtiene simplemente contando decimales. Un dispositivo ideal que únicamente redondea a la décima de centímetro introduce una diferencia de, a lo sumo, media décima. Un instrumento real puede añadir un desplazamiento del cero, un error de escala o una lectura oblicua. La resolución de la indicación informa sobre qué cambios podemos distinguir; para acotar la medición completa necesitamos considerar también los demás efectos relevantes.

Una relación entre los errores puede permitir un cálculo mejor que el de los extremos independientes. Si ambas posiciones recibieran exactamente el mismo desplazamiento desconocido c, sus indicaciones serían $r_1 = x_1 + c$ y $r_2 = x_2 + c$. Al restar,

$$r_2 - r_1 = (x_2 + c) - (x_1 + c) = x_2 - x_1.$$

El desplazamiento común se cancela. Esa ventaja depende de que sea realmente el mismo en ambas lecturas. Si la regla tiene además un factor de escala equivocado, $r = \alpha x + c$, la diferencia se convierte en $r_2 - r_1 = \alpha(x_2 - x_1)$ y conserva el factor α. Conocer la estructura del error puede ser tan útil como conseguir un instrumento con más cifras.

Calibrar una indicación

Una balanza no muestra directamente una masa libre de toda suposición. La indicación depende de cómo se ha calibrado el aparato. Podemos investigar esa relación comparando sus lecturas con masas de referencia cuyo valor conocemos con una incertidumbre adecuada. Para aislar la estructura del cálculo, trataremos como exactos los valores de las referencias y las indicaciones de la siguiente tabla simulada.

Masa de referencia m en gramos	Indicación r en gramos
5,00	5,04
25,00	25,12

Supongamos que, entre esas masas, la relación puede representarse por $r = \alpha m + \beta$. El factor α es adimensional y β tiene unidades de masa. Restar las dos condiciones elimina β y determina la pendiente:

$$\alpha = \frac{25{,}12\,\mathrm{g} - 5{,}04\,\mathrm{g}}{25{,}00\,\mathrm{g} - 5{,}00\,\mathrm{g}} = 1{,}004.$$

Al volver a la primera referencia obtenemos $\beta = 0{,}02\,\mathrm{g}$. Si un objeto produce la indicación $r = 12{,}57\,\mathrm{g}$, debemos invertir la relación para hallar la masa correspondiente:

$$m = \frac{r - \beta}{\alpha} = \frac{12{,}57\,\mathrm{g} - 0{,}02\,\mathrm{g}}{1{,}004} = 12{,}50\,\mathrm{g}.$$

Una corrección constante del cero no habría corregido el factor de escala. El modelo distingue ambos efectos y permite ver por qué restar siempre la misma cantidad puede funcionar cerca de una referencia y fallar más lejos.

Las dos referencias determinaron la recta porque habíamos supuesto una relación afín. Todavía no justifican esa relación para cualquier masa. Si intentamos extenderla y una referencia adicional de 50 g produce una lectura entre 50,79 y 50,81 g, el modelo predice 50,22 g y queda fuera de ese intervalo. La discrepancia impide aceptar sin revisión aquella extensión. Habrá que examinar el rango del aparato, la calibración, la referencia y las condiciones de lectura; los dos puntos usados para ajustar la recta no constituían una prueba independiente de ella.

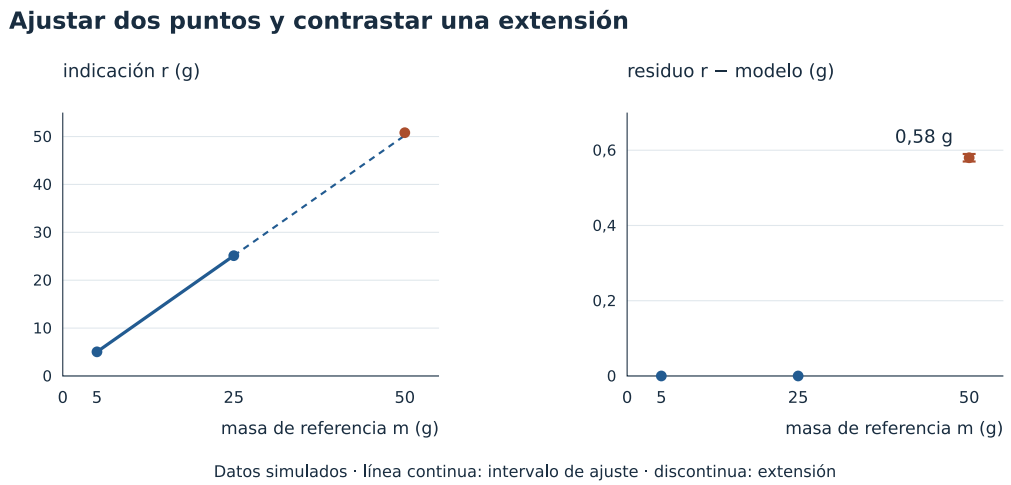


Figura 0.2. Las dos primeras referencias fijan el modelo afín. El tercer punto prueba una extensión de su dominio. La escala ampliada del residuo permite apreciar una discrepancia que el dibujo general deja poco visible.

Precisión y exactitud

Midamos varias veces la misma barra, procurando mantener el procedimiento. Consideremos las lecturas simuladas 12,40, 12,42, 12,39, 12,41 y 12,38 centímetros. Su media aritmética es

$$\overline{L} = \frac{12{,}40 + 12{,}42 + 12{,}39 + 12{,}41 + 12{,}38}{5}\,\text{cm} = 12{,}40\,\text{cm}.$$

El mínimo y el máximo de esta serie son 12,38 y 12,42 cm, con un rango observado de 0,04 cm. La repetición permite describir la dispersión de las lecturas bajo esas condiciones. No demuestra que la longitud esté comprendida entre el mínimo y el máximo observados: un sesgo común podría desplazar todas las lecturas sin ensanchar el grupo.

Si una calibración independiente justificara añadir 0,20 cm a cada resultado, la media corregida sería 12,60 cm y el rango observado seguiría siendo 0,04 cm. La dispersión y la corrección por sesgo describen propiedades diferentes. Por eso una serie muy concentrada puede dar una impresión engañosa de exactitud cuando todavía no se ha contrastado el procedimiento.

La *precisión* describe la proximidad entre los resultados de mediciones repetidas bajo condiciones especificadas. En esta serie la apreciamos mediante la pequeña dispersión de las lecturas. La *exactitud* se refiere a la cercanía de un valor medido al valor verdadero de la magnitud. Como ese valor verdadero normalmente no se conoce exactamente, el contraste práctico utiliza valores de referencia y debe considerar también la incertidumbre de esas referencias. Que las lecturas se agrupen mucho no demuestra que estén cerca de lo que buscamos.

Podemos hacer visible la diferencia con una comparación simulada. Tratemos como exacta, solo dentro de este ejemplo, una longitud de referencia de 12,60 cm. El procedimiento A produce las cinco lecturas anteriores. Otro procedimiento, B, produce 12,56, 12,62, 12,60, 12,64 y 12,58 cm. Los resultados resumidos son:

Procedimiento	Media en centímetros	Rango observado en centímetros	Distancia de la media a la referencia en centímetros
A	12,40	0,04	0,20
B	12,60	0,08	0,00

A tiene menor dispersión en esta comparación, pero todas sus lecturas están más lejos de la referencia que las de B. B ofrece aquí resultados más próximos a ella aunque varían más entre sí. La coincidencia exacta de su media con la referencia es una propiedad de los datos elegidos; cinco observaciones no garantizan que las mediciones futuras mantengan esa coincidencia. El contraste permite separar las dos preguntas sin atribuir al aparato una perfección que no hemos demostrado.

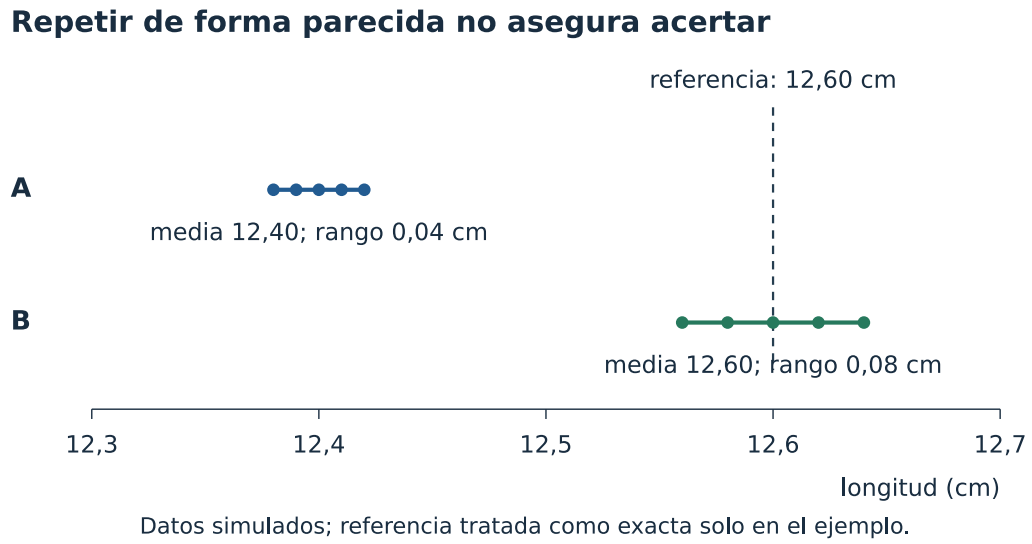


Figura 0.3. La concentración de una serie y su cercanía a la referencia se juzgan mediante comparaciones distintas. Los puntos muestran todas las lecturas de este ejemplo; los segmentos señalan sus rangos observados.

Para referirse específicamente al acuerdo entre el promedio ideal de repeticiones y una referencia, la metrología utiliza además el término *veracidad*. Esta distinción permite estudiar el sesgo sin confundirlo con la dispersión. Una media finita ayuda a investigarlo, pero no coincide por definición con ese promedio ideal. La exactitud, por su parte, no se expresa mediante un número propio como «exactitud de 0,02 centímetros»: esa cifra podría describir un error o una cota, y habría que precisar cuál.

La *incertidumbre de medida* es un parámetro de valor cero o positivo que caracteriza la dispersión de los valores atribuidos al mensurando a partir de la información disponible. Puede recoger contribuciones evaluadas mediante repeticiones y otras obtenidas de calibraciones, especificaciones o modelos. Por eso no se identifica con el rango de cinco lecturas ni con un error cuyo valor ya conociéramos. Las cotas de los ejemplos de este capítulo son condiciones explícitas de sus modelos; una evaluación de incertidumbre estadística requiere justificar su propio procedimiento.

Tampoco conocemos, a partir de cinco repeticiones, una cota garantizada para todas las lecturas futuras. Inferir cómo mejora la estimación al aumentar el número de repeticiones exige hipótesis sobre las variaciones y las relaciones entre ellas. Promediar no elimina automáticamente un desplazamiento común ni autoriza a dividir cualquier incertidumbre por el número de observaciones.

Hacer medible un intervalo pequeño

Un cronómetro manual puede dar resultados poco informativos al medir una sola oscilación. Si la duración indicada es 1,5 s y el error total del intervalo medido está acotado por 0,2 s, la duración queda entre 1,3 y 1,7 s. La contribución del inicio y la detención del cronómetro pesa mucho en comparación con el tiempo buscado.

Podemos iniciar el registro en un paso identificable del movimiento y detenerlo después de diez oscilaciones completas, al volver a la misma posición con el mismo sentido de paso. Si el intervalo indicado es 15,2 s y mantenemos la misma cota total de 0,2 s para ese intervalo, el tiempo medio por oscilación satisface

$$\overline{T} = \frac{\Delta t}{10} \in \left[\frac{15{,}0}{10}, \frac{15{,}4}{10}\right] \text{ s} = [1{,}50, 1{,}54]\,\text{s}.$$

La cota absoluta por ciclo se ha reducido a 0,02 s porque el mismo error total se distribuye entre diez ciclos contados. La mejora depende de que la cota total se mantenga y el conteo sea correcto. No proviene de suponer que diez errores independientes se cancelan.

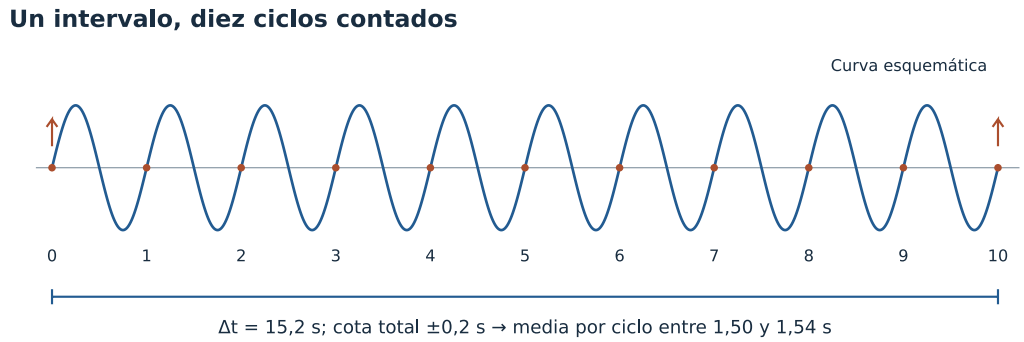


Figura 0.4. Para contar ciclos elegimos eventos equivalentes. Dos pasos por la misma posición con sentidos opuestos pueden estar separados por medio ciclo. La curva ilustra la periodicidad; no es un registro experimental del oscilador.

Si los ciclos duran exactamente lo mismo, $\overline{T}$ coincide con ese período común. Si sus duraciones cambian, el cociente proporciona su media. Una disminución de amplitud, un cambio del dispositivo o una variación del ritmo pueden exigir comprobar qué duración estamos promediando. Medir durante más tiempo amplía la observación y puede hacer visibles efectos que antes eran despreciables.

Una magnitud calculada a partir de otras

La medida indirecta incorpora una relación entre magnitudes. Para obtener el área de una placa rectangular usamos $A = Lw$, donde L y w son los lados. La fórmula exige que el modelo geométrico sea adecuado: si la placa tiene un recorte importante, multiplicar las dimensiones exteriores no da el área del material.

Supongamos una placa rectangular con

$$L \in [12{,}3,\, 12{,}5]\,\mathrm{cm}, \qquad w \in [4{,}9,\, 5{,}1]\,\mathrm{cm}.$$

Ambos lados son positivos, de modo que aumentar cualquiera de ellos aumenta el producto. Las cotas proporcionan

$$A \in [12{,}3 \cdot 4{,}9,\, 12{,}5 \cdot 5{,}1]\,\mathrm{cm}^2 = [60{,}27,\, 63{,}75]\,\mathrm{cm}^2.$$

El producto de los valores centrales es $12{,}4 \cdot 5{,}0 = 62{,}0\,\mathrm{cm}^2$. Sus distancias a los extremos del intervalo son 1,73 y $1{,}75\,\mathrm{cm}^2$: una fórmula no lineal puede transformar intervalos simétricos en una envolvente que no está centrada en el resultado nominal. Si quisiéramos una cota simétrica alrededor de 62,0, tendría que ser al menos la mayor de esas dos diferencias. La escritura $A = (62{,}0 \pm 1{,}8)\,\mathrm{cm}^2$ sería una envolvente conservadora redondeada.

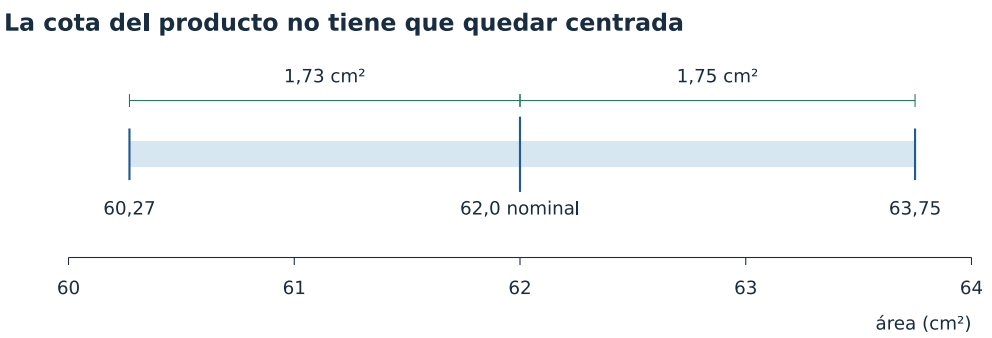


Figura 0.5. La cota del producto se obtiene de los extremos de las magnitudes positivas. El punto nominal no ocupa exactamente el centro de la banda.

El procedimiento no necesita independencia estadística. Si existen relaciones adicionales entre L y w, la banda puede ser más ancha que el conjunto realmente posible, pero sigue conteniéndolo. Para estrecharla haría falta usar esas relaciones con una justificación física o instrumental.

El resultado como conjunto de valores admisibles

Las cotas utilizadas en los ejemplos permiten precisar la relación entre una indicación y la magnitud buscada. Fijado un procedimiento y sus condiciones de aplicación, podemos representar la información disponible por un conjunto de valores compatibles. Para una longitud suele bastar un intervalo; cuando intervienen varias magnitudes, importa también qué combinaciones de valores admitimos.

Definición (modelo de medida y conjunto admisible). Un modelo de medida es una relación $y = f(q_1, \dots, q_n)$ que expresa la magnitud de salida y mediante magnitudes de entrada. Llamaremos conjunto admisible a un conjunto S de valores de las entradas que recoge las restricciones declaradas. El conjunto de salidas compatibles con esa información es

$$f(S) = \{f(q) : q \in S\}.$$

Aquí q abrevia la lista de entradas y todas las operaciones se realizan con unidades coherentes. Un intervalo J es una envolvente válida si $f(S) \subseteq J$. La inclusión admite que ciertos puntos de J no sean físicamente posibles: una envolvente puede proporcionar una garantía útil sin describir exactamente todas las dependencias.

Proposición (propagación de cotas). Si las entradas reales pertenecen a S y el modelo $y = f(q)$ es aplicable, toda envolvente de $f(S)$ contiene el valor de salida. Si además S es un producto de intervalos cerrados y f es monótona en cada variable, con sentido de monotonía fijo en todo S, sus cotas extremas se obtienen eligiendo en cada variable el extremo correspondiente.

Demostración. La primera afirmación es la definición de imagen: para la entrada real $q \in S$, el valor $f(q)$ pertenece a $f(S)$ y, por inclusión, a su envolvente. Para la segunda, sustituyamos sucesivamente cada coordenada por el extremo que disminuye f. La monotonía asegura que ninguna sustitución aumenta el resultado. El vértice final proporciona una cota inferior, que además se alcanza porque ese vértice pertenece al producto. Las sustituciones opuestas producen la cota superior. Si la función es constante en alguna coordenada, ambos extremos sirven.

El producto de intervalos expresa que todas sus combinaciones se conservan como posibles en el cálculo; no afirma independencia probabilística. Si dos longitudes comparten exactamente el mismo factor de escala, sus pares admisibles pueden ocupar una curva dentro de ese

rectángulo. La envolvente rectangular seguirá siendo segura cuando contenga esa curva, aunque pierda información. El ejercicio 13 permite ver cuánto puede ensancharse un resultado por ignorar esa dependencia.

Tampoco toda declaración de incertidumbre es una cota garantizada. En este capítulo, $|q - q_0| \le \delta$ significa una restricción determinista asumida. Un intervalo de cobertura probabilística exigiría especificar el modelo y el nivel de cobertura. Esa información adicional no puede recuperarse del signo $\pm$ por sí solo.

Qué puede identificar una calibración

Dos referencias determinaron una función afín porque habíamos elegido esa familia. La misma información deja de ser suficiente si permitimos funciones arbitrarias. Supongamos que f reproduce dos referencias distintas q_1, q_2. Para una constante λ de unidades adecuadas, la función

$$g(q) = f(q) + \lambda(q - q_1)(q - q_2)$$

reproduce esas mismas referencias. Fuera de ellas, en general produce indicaciones diferentes. Dos puntos no demuestran la linealidad del instrumento.

Definición (identificabilidad respecto de unos datos). Un parámetro, o una familia de parámetros, es identificable dentro de un modelo cuando dos elecciones admisibles que producen los mismos datos necesariamente coinciden. La definición se refiere a la familia elegida y a los datos disponibles. Una identificación exacta dentro del modelo no prueba que esa familia represente adecuadamente al aparato.

En una calibración afín $r = \alpha q + \beta$, dos referencias de distinto valor identifican α y β: al restar sus ecuaciones obtenemos $\alpha = (r_2 - r_1)/(q_2 - q_1)$, y después cualquiera de ellas fija β. Invertir la calibración requiere además $\alpha \neq 0$. Una tercera referencia permite contrastar una consecuencia que no utilizamos para fijar esos dos parámetros. La distinción entre ajuste y contraste será igual de necesaria cuando nuestros datos sean posiciones de un móvil.

Elegir una escala para juzgar el resultado

Una cota absoluta adquiere significado al compararla con la magnitud que queremos conocer. En la barra de longitud nominal 12,40 cm, una cota de 0,10 cm corresponde a la razón

$$\frac{0{,}10\,\text{cm}}{12{,}40\,\text{cm}} \approx 0{,}00806,$$

aproximadamente el 0,81 % del valor nominal. Expresar el resultado en metros divide por cien tanto la longitud como su cota: $L = (0{,}1240 \pm 0{,}0010)\,\text{m}$. La razón permanece igual. Cambiar de unidad no mejora la medición, aunque el aspecto de sus números sea distinto.

Para anticipar una cuenta puede bastar una estimación de escala. Una placa de unos doce centímetros por unos cinco tiene un área de unas decenas de centímetros cuadrados; un resultado de seiscientos obligaría a revisar unidades y operaciones. Esa estimación puede detectar un error grande sin decidir entre 60,27 y 63,75. La incertidumbre admisible depende de la pregunta: distinguir entre dos piezas separadas por una décima de centímetro exige más información que decidir si una placa cabe en una mesa de un metro.

Una medición útil deja determinado qué magnitud se buscaba, cómo se relacionan las indicaciones con ella y qué alcance tiene el resultado. Al comparar dos procedimientos, la coincidencia o la discrepancia debe juzgarse junto con sus unidades, sus cotas y los supuestos que permitieron obtenerlas. Esa información es la que nos permite utilizar un número para responder una pregunta sobre el objeto medido.

Conservar cifras sin inventar certidumbre

Una calculadora puede mostrar más dígitos de los que una medición permite sostener. Las reglas de cifras significativas ofrecen una convención práctica para presentar resultados: al multiplicar o dividir suele conservarse el número de cifras significativas del dato que tenga menos; al sumar o restar se atiende a la posición decimal menos resuelta. Estas reglas orientan la escritura cuando no se dispone de una descripción más completa de la incertidumbre. Su aplicación no sustituye una propagación de cotas explícitas.

Si declaramos $L \in [L_-, L_+]$, redondear hacia dentro puede excluir longitudes que la declaración inicial admitía. Una envolvente decimal conserva la garantía cuando su extremo inferior no supera L_- y el superior no es menor que L_+. En cambio, redondear un valor nominal al más próximo sólo elige una representación de ese valor; todavía falta declarar qué banda acompaña al número publicado. La cantidad de cifras de una respuesta y la anchura de una banda cumplen funciones diferentes.

Los factores de conversión definidos exactamente tampoco limitan por sí mismos las cifras de una medición. La igualdad $1\,\mathrm{cm} = 10^{-2}\,\mathrm{m}$ transforma todos los valores admisibles sin añadir error. Para evitar que un redondeo intermedio domine la cuenta, conservaremos suficientes dígitos durante las operaciones y ajustaremos al final la escritura del valor y de su cota. Cuando se conocen cotas, comprobaremos además que la banda redondeada contiene la calculada. El ejercicio 19 confronta ambas decisiones en un producto de medidas.

Medir como parte del fenómeno

La medición utiliza interacciones físicas. Un termómetro necesita intercambiar energía con lo que mide, y ese intercambio puede cambiar la temperatura que queríamos conocer. En muchos problemas clásicos podemos reducir ese efecto o incluirlo en el modelo. La confianza en el resultado depende también de haber comprobado cuándo esa aproximación es suficiente.

En física cuántica, una preparación y un procedimiento de medida determinan probabilidades de resultados; la dispersión no se atribuye en general solo a imperfecciones del instrumento. La interacción con el aparato forma parte de la descripción. El *problema de la medida cuántica* incluye explicar cómo esa descripción se relaciona con los resultados definidos que registramos. No se resuelve mejorando la calibración ni se identifica con la distinción entre precisión y exactitud.

La continuidad entre ambos estudios está en preguntar qué sistema se prepara, qué se mide y cómo se produce un registro. La teoría necesaria para responder cambia. Aquí podemos aprender a formular esas preguntas sin anticipar una respuesta que exigirá conceptos cuánticos.

Ejercicios

Los primeros problemas permiten practicar lecturas, conteos y calibración sin utilizar cálculo diferencial. Para una primera sesión pueden trabajarse 1, 2, 3, 4, 6 y 9; después, 5, 7, 8, 15 y 18 conectan esas operaciones con decisiones sobre el procedimiento. Los restantes examinan dependencias entre medidas, modelos no lineales y redondeos. En el 14 vale la pena conservar por escrito la primera cota obtenida: al reunir las tres restricciones se descubre qué información se había dejado sin usar.

1. Cambiar el cero y cambiar la unidad

Los extremos de una varilla producen lecturas nominales de 4,20 y 17,60 cm. Cada lectura tiene una cota absoluta de 0,05 cm. Obtén un intervalo para la longitud y exprésalo en milímetros. Explica qué ocurriría con la diferencia si ambas lecturas incluyeran el mismo desplazamiento desconocido del cero. No supongas que ese desplazamiento es la única fuente de error.

2. Revisar un conteo

Un registro temporal de oscilaciones indica 30,6 s, con una cota total de 0,2 s. Se anotaron veinte ciclos completos. Calcula el intervalo del tiempo medio por ciclo. Una revisión del video muestra que solo habían transcurrido diecinueve ciclos: calcula el intervalo corregido y decide si la primera cota cubría ese error de conteo.

3. Repeticiones concentradas

Tres indicaciones de una balanza son 100,1, 100,2 y 100,0 g. Calcula la media y el rango observado. Decide si esos datos bastan para afirmar que la masa está entre 100,0 y 100,2 g. Construye una descripción del instrumento compatible con las lecturas y con una masa que quede fuera de ese intervalo. Explica qué permite juzgar la concentración de estas lecturas acerca de la precisión y qué falta para juzgar su exactitud.

4. Dos referencias de calibración

Una balanza indica 10,20 g para una referencia de 10,00 g y 50,60 g para otra de 50,00 g. Trata estos datos como exactos dentro del problema y supone $r = \alpha m + \beta$ en el intervalo de calibración. Determina α y β y la masa que corresponde a una indicación de 30,40 g. Compara con la corrección que consistiría en restar siempre 0,20 g.

5. El espesor de una pared

La sección de un tubo es una corona circular concéntrica. Su diámetro exterior pertenece a $[1{,}99, 2{,}01]$ cm y el interior a $[1{,}79, 1{,}81]$ cm. Encuentra un intervalo para el espesor de la pared. Compara la cota relativa respecto del espesor nominal con las cotas relativas de los diámetros respecto de sus valores nominales.

6. Qué garantiza el redondeo

Un dispositivo ideal muestra una longitud redondeada a la décima de centímetro más próxima y no tiene otro error. Su indicación es 10,2 cm. Obtén una cota para la longitud. Considera después un aparato que, antes de redondear del mismo modo, suma 0,30 cm a la longitud: determina la cota corregida para la misma indicación y explica qué no autorizaba a concluir la resolución por sí sola.

7. Densidad media de un cilindro

Una pieza maciza se modela como un cilindro circular de diámetro d y altura h, con volumen $V = \pi d^2 h/4$. Se conocen las cotas

$$m \in [47{,}5, 48{,}5]\,\text{g}, \quad d \in [1{,}98, 2{,}02]\,\text{cm}, \quad h \in [2{,}97, 3{,}03]\,\text{cm}.$$

Calcula la densidad media nominal, usando los puntos medios de los intervalos, y una envolvente para $\rho = m/V$. Justifica qué extremos eliges y escribe las unidades. No se supone una distribución probabilística de los valores.

8. Dos resultados incompatibles

Dos procedimientos para medir la misma longitud, bajo las mismas condiciones físicas, proporcionan las cotas $L \in [12{,}30, 12{,}50]$ cm y $L \in [12{,}52, 12{,}72]$ cm. Determina qué puede concluirse de su comparación y si promediar los puntos medios resuelve la discrepancia. Calcula cuánto habría que aumentar, como mínimo, la cota simétrica de 0,10 cm del primer resultado, conservando su punto medio, para que los intervalos lleguen a intersectarse.

9. Convertir una densidad

Una ficha técnica declara una densidad media de $(2{,}70 \pm 0{,}03)\,\mathrm{g/cm^3}$, donde el signo $\pm$ representa una cota garantizada bajo las condiciones de la ficha. Exprésala en $\mathrm{kg/m^3}$. Un estudiante multiplica el valor numérico por cien porque «un metro tiene cien centímetros». Identifica el error y comprueba que la cota relativa se conserva.

10. Fórmulas que dependen de la unidad

Se propone describir la indicación de un sensor mediante $r = A\exp(-t) + B$, donde r, A, B son longitudes y t es tiempo. Explica qué falta en la expresión. Repárala mediante una constante temporal $\tau > 0$ y convierte la fórmula al tiempo numérico en milisegundos si $\tau = 0{,}25\,\mathrm{s}$. Decide si la corrección dimensional basta para demostrar que el sensor sigue esa ley.

11. Un período construido con dos magnitudes

Se busca un tiempo característico de un sistema que sólo depende de una longitud $\ell > 0$ y una aceleración $g > 0$. Dentro de la familia $T = C\ell^{\alpha} g^{\beta}$, con C adimensional, determina los exponentes. Explica por qué el análisis no determina C y qué hipótesis se añade al excluir otras magnitudes o parámetros adimensionales.

12. Invertir una calibración no lineal

Dentro del intervalo $0 \le q \le 10\,\mathrm{cm}$, una calibración se representa por

$$r = q + \kappa q^2, \qquad \kappa = 0{,}01\,\mathrm{cm^{-1}}.$$

El modelo y κ se consideran exactos en este ejercicio. La indicación pertenece a $[5{,}24, 5{,}26]\,\mathrm{cm}$. Justifica que la longitud compatible es única para cada indicación y encuentra una envolvente de su intervalo redondeada hacia fuera a la milésima de centímetro. Compara con identificar q y r.

13. El mismo factor de escala

Dos lados de una placa se obtienen con el mismo instrumento, cuyo único error es un factor de escala desconocido $k \in [0{,}99, 1{,}01]$. Las indicaciones exactas dentro del problema son $r_L = 20{,}0\,\mathrm{cm}$ y $r_w = 8{,}0\,\mathrm{cm}$ y satisfacen $r_L = kL$, $r_w = kw$. Determina los valores compatibles con L/w. Compara con el resultado de propagar por separado los dos intervalos de longitud y explica la pérdida de información.

14. Promediar con cotas absolutas

Tres indicaciones de una longitud son 10,1, 10,2 y 10,3 cm. Para cada lectura se garantiza $|r_i - L| \le 0{,}2\,\mathrm{cm}$, sin un modelo probabilístico. Obtén una cota válida para el error de la media. Obtén también toda la información conjunta sobre L usando la intersección de las tres restricciones. Decide si puede justificarse dividir automáticamente 0,2 por $\sqrt{3}$.

15. Medir láminas con un término desconocido

Un dispositivo mide el espesor de una pila de N láminas mediante $R_N = Nh + c$, donde h es el espesor común y c es un término fijo de contacto. Se registran $R_{20} = 2{,}30\,\mathrm{mm}$ y $R_{50} = 5{,}30\,\mathrm{mm}$, tratados como exactos dentro del modelo. Determina h, c y predice R_{35}. Explica por qué dividir una sola lectura por N no identifica h y qué comprobaría una tercera pila.

16. Dos marcas de un reloj

Un reloj registra $r_i = t_i + b + e_i$, con el mismo desplazamiento desconocido b en ambas marcas y con $|e_i| \le 0{,}03\,\mathrm{s}$. Las indicaciones son $r_1 = 12{,}40\,\mathrm{s}$ y $r_2 = 15{,}10\,\mathrm{s}$. Acota $t_2 - t_1$ sin imponer una cota a b. Si además el reloj tiene un factor de escala $\alpha \in [0{,}999, 1{,}001]$, de modo que $r_i = \alpha t_i + b + e_i$, obtiene una nueva envolvente del intervalo temporal.

17. Pasar de período a frecuencia

El período de una señal está acotado por $T \in [0{,}98, 1{,}02]\,\mathrm{s}$. Define la frecuencia mediante $f = 1/T$ y determina su intervalo. Compara con escribir $(1{,}00 \pm 0{,}02)\,\mathrm{s}^{-1}$ como cota garantizada. Explica por qué la inversión de una banda simétrica no tiene por qué dar una banda simétrica alrededor del recíproco del centro.

18. Diseñar el número de ciclos

Para estimar el tiempo medio por ciclo se mide el tiempo total de N ciclos completos y se divide por el entero exacto N. La cota absoluta total del cronometraje es $0{,}24\,\mathrm{s}$, cualquiera que sea N, dentro del rango de uso del aparato. Encuentra el menor N que asegure una cota absoluta no mayor que $0{,}01\,\mathrm{s}$ en esa media. Discute qué cambia si se omite un ciclo o si los períodos varían durante el registro.

19. Redondear un área y conservar su cota

Las dimensiones de una placa tienen cotas $L = (12{,}34 \pm 0{,}01)\,\mathrm{cm}$ y $w = (5{,}6 \pm 0{,}05)\,\mathrm{cm}$. Se admiten todas las combinaciones de sus intervalos. Calcula el área nominal y su intervalo. Un estudiante publica únicamente $69\,\mathrm{cm}^2$ siguiendo la regla de dos cifras significativas. Decide qué información proporciona esa escritura y si sería válido interpretarla como una cota de redondeo $[68{,}5, 69{,}5]\,\mathrm{cm}^2$. Propón una declaración decimal breve que preserve la envolvente completa.

Soluciones

1. Cambiar el cero y cambiar la unidad

La longitud buscada es la separación entre dos posiciones, de modo que escribimos primero $L = x_2 - x_1$. Restar las lecturas centrales da $13{,}40\,\mathrm{cm}$, pero aún falta saber cuánto puede apartarse de ese valor. El caso que acorta la varilla combina un extremo derecho menor con uno izquierdo mayor; el que la alarga hace las elecciones contrarias.

El menor extremo derecho es $17{,}55\,\mathrm{cm}$ y el mayor izquierdo, $4{,}25\,\mathrm{cm}$; las elecciones opuestas dan la cota superior. Así,

$$L \in [17{,}55 - 4{,}25,\, 17{,}65 - 4{,}15]\,\mathrm{cm} = [13{,}30,\, 13{,}50]\,\mathrm{cm} = [133{,}0,\, 135{,}0]\,\mathrm{mm}.$$

El desplazamiento común del cero se cancela al restar las dos indicaciones, como muestra la identidad de la exposición. Eso no elimina las demás diferencias de lectura, una posible inclinación ni un factor de escala incorrecto. Si las cotas individuales ya contienen varios efectos sin información adicional, el intervalo calculado sigue siendo una envolvente válida.

2. Revisar un conteo

El intervalo temporal es $[30{,}4,\, 30{,}8]\,\mathrm{s}$. Si el conteo fuera veinte, el tiempo medio pertenecería a $[1{,}52,\, 1{,}54]\,\mathrm{s}$. Con diecinueve ciclos, la información corregida es

$$\overline{T} \in \left[\frac{30{,}4}{19}, \frac{30{,}8}{19}\right]\,\mathrm{s} = [1{,}6,\, 154/95]\,\mathrm{s} \subset [1{,}600,\, 1{,}622]\,\mathrm{s}.$$

Los dos intervalos no se intersectan. La cota de 0,2 s describía el error del intervalo temporal, no un conteo equivocado. El resultado anterior no podía proteger frente a un fallo que sus hipótesis excluían.

3. Repeticiones concentradas

La media es 100,1 g y el rango observado es 0,2 g. Para ver por qué el rango no acota por sí solo la masa, supongamos una masa de 101,1 g y un instrumento cuya indicación tiene un desplazamiento común de $-1{,}0$ g, más variaciones de 0, 0,1 y $-0{,}1$ g. Produce exactamente las tres indicaciones dadas. La masa queda fuera de su rango, aunque las repeticiones sean muy próximas.

La construcción no afirma que esa sea la causa real. Demuestra que las lecturas no bastan para excluirla y, por tanto, que la cota pretendida necesita información adicional de calibración o del procedimiento. Su concentración informa sobre la precisión bajo las condiciones de repetición; no demuestra exactitud, pues el mismo conjunto admite un sesgo común. Para juzgar la cercanía a la magnitud buscada necesitamos un contraste adicional, con una referencia adecuada y su incertidumbre.

4. Dos referencias de calibración

Restar las dos relaciones afines da

$$\alpha = \frac{50{,}60 - 10{,}20}{50{,}00 - 10{,}00} = 1{,}01.$$

La primera referencia determina $\beta = 10{,}20\,\mathrm{g} - 1{,}01(10{,}00\,\mathrm{g}) = 0{,}10\,\mathrm{g}$. Para la indicación del objeto,

$$m = \frac{30{,}40\,\mathrm{g} - 0{,}10\,\mathrm{g}}{1{,}01} = 30{,}00\,\mathrm{g}.$$

Restar siempre 0,20 g daría 30,20 g. Esa corrección coincide con la primera referencia porque fue obtenida en ella, pero no representa el cambio de escala que muestran los dos datos. La masa calculada pertenece al intervalo de calibración y conserva la hipótesis afín del enunciado.

5. El espesor de una pared

La diferencia entre los diámetros incluye dos paredes. Si D es el exterior y d el interior, el espesor es $e = (D - d)/2$, por lo que

$$e \in \left[\frac{1{,}99 - 1{,}81}{2}, \frac{2{,}01 - 1{,}79}{2}\right]\ \mathrm{cm} = [0{,}09, 0{,}11]\,\mathrm{cm}.$$

El espesor nominal es 0,10 cm con una cota absoluta de 0,01 cm, igual al 10 % del nominal. Para los diámetros, la misma cota absoluta de 0,01 cm representa el 0,5 % de 2,00 cm y aproximadamente el 0,56 % de 1,80 cm. Al restar magnitudes próximas podemos obtener una magnitud pequeña cuya cota relativa sea mucho mayor.

6. Qué garantiza el redondeo

En el dispositivo ideal, redondear a la décima más próxima cambia la longitud en, a lo sumo, 0,05 cm. Una envolvente válida es $L \in [10{,}15, 10{,}25]$ cm; incluir ambos extremos conserva una cota aunque el aparato use una regla particular para resolver empates.

En el segundo dispositivo la indicación redondeada corresponde a $L + 0{,}30$ cm. Restamos esa cantidad de los extremos y obtenemos $L \in [9{,}85, 9{,}95]$ cm. La resolución es idéntica, pero el intervalo de la longitud cambió. La cota del primer dispositivo utilizaba la ausencia de otros errores, no solamente su última cifra.

7. Densidad media de un cilindro

Antes de introducir los números conviene identificar la salida: la densidad media es masa total dividida por volumen. La base tiene radio $d/2$, así que su área es $\pi(d/2)^2 = \pi d^2/4$. Multiplicarla por la altura da el volumen del enunciado. Usar $\pi d^2 h$ daría un volumen cuatro veces mayor y una densidad cuatro veces menor. Las cotas se propagan sobre la expresión que corresponde al cilindro declarado.

El modelo da $\rho = 4m/(\pi d^2 h)$. Aumentar la masa aumenta la razón; aumentar el diámetro o la altura positivos aumenta el denominador y disminuye la densidad media. Por eso,

$$\frac{4(47{,}5)}{\pi(2{,}02)^2(3{,}03)}\,\mathrm{g/cm^3} \le \rho \le \frac{4(48{,}5)}{\pi(1{,}98)^2(2{,}97)}\,\mathrm{g/cm^3}.$$

Los extremos son aproximadamente 4,89168 y 5,30353 $\mathrm{g/cm^3}$, contenidos en la envolvente redondeada hacia fuera $[4{,}89, 5{,}31]\,\mathrm{g/cm^3}$. Con los valores nominales, $V = 3\pi\,\mathrm{cm^3}$ y $\rho = 16/\pi\,\mathrm{g/cm^3}$, aproximadamente $5{,}093\,\mathrm{g/cm^3}$.

La densidad media sigue siendo masa total dividida por volumen. Para atribuir ese mismo valor a cualquier porción del material haría falta una hipótesis de homogeneidad adicional. La envolvente también presupone que la geometría de cilindro macizo representa adecuadamente la pieza.

8. Dos resultados incompatibles

Los intervalos están separados por 0,02 cm: no hay un valor de L que satisfaga ambos. Si pretenden ser cotas garantizadas para la misma magnitud en las mismas condiciones, al menos una de las declaraciones o de sus condiciones de aplicación requiere revisión. La comparación no identifica por sí sola cuál falló.

Los puntos medios son 12,40 y 12,62 cm, cuyo promedio es 12,51 cm. Ese valor queda fuera de ambos intervalos. Promediar no repara la incompatibilidad ni proporciona una nueva garantía.

Para que el primer intervalo alcance el borde inferior del segundo, su extremo superior debe llegar a 12,52 cm. Conservando el centro 12,40, la semianchura mínima es 0,12 cm: habría que aumentar la cota en 0,02 cm. Los intervalos se tocarían entonces en un punto. Esa ampliación matemática muestra el tamaño de la discrepancia; adoptarla como cota física requeriría justificar qué efecto estaba omitido.

9. Convertir una densidad

La conversión debe afectar al cociente completo. Un gramo equivale a $10^{-3}\,\mathrm{kg}$ y un centímetro cúbico a $(10^{-2}\,\mathrm{m})^3 = 10^{-6}\,\mathrm{m^3}$. Por tanto,

$$1\,\mathrm{g/cm^3} = 10^3\,\mathrm{kg/m^3}, \qquad \rho = (2700 \pm 30)\,\mathrm{kg/m^3}.$$

La confusión proviene de tratar una unidad de volumen como una de longitud y de omitir la conversión de masa. La razón $30/2700 = 0{,}03/2{,}70 = 1/90$, aproximadamente 1,11 %, confirma que cambió la representación numérica de la misma banda física. La conversión no añade información sobre la homogeneidad del material ni sobre la calidad de la medición original.

10. Fórmulas que dependen de la unidad

El argumento de la exponencial debe ser un número adimensional. Si se pretende que t sea una magnitud temporal, la fórmula queda completa como $r = A\exp(-t/\tau) + B$. La constante τ establece la escala en que cambia la respuesta. Con $\theta = t/(1\,\mathrm{ms})$ y $\tau = 250\,\mathrm{ms}$,

$$r = A\exp(-\theta/250) + B.$$

El número 250 acompaña al tiempo expresado en milisegundos; al usar segundos aparecería $t/(0{,}25\,\mathrm{s})$. Una expresión escrita originalmente con t como número de segundos podría describir una fórmula numérica legítima, pero debería declarar ese convenio. La homogeneidad permite interpretar la expresión y convertir unidades. Que el sensor la cumpla exige calibración y contraste dentro de su régimen de uso.

11. Un período construido con dos magnitudes

Las dimensiones del miembro derecho son $L^{\alpha+\beta}T^{-2\beta}$. Para obtener tiempo, los exponentes deben satisfacer $\alpha+\beta=0$ y $-2\beta=1$. Así, $\beta=-1/2$, $\alpha=1/2$ y

$$T = C\sqrt{\ell/g}.$$

Cambiar C no altera dimensiones, de modo que ninguna comparación de exponentes podrá fijarlo. Incluso esta forma requiere la hipótesis de que la dependencia es monomial y sólo utiliza ℓ, g. Si el sistema incluye un ángulo adimensional φ, una expresión $T = F(\varphi)\sqrt{\ell/g}$ pasa el mismo control para cualquier función adimensional F. La elección de magnitudes relevantes forma parte de la construcción del modelo; el análisis dimensional trabaja después de esa elección.

12. Invertir una calibración no lineal

Para $q_2 > q_1 \geq 0$, la diferencia de indicaciones es $(q_2-q_1)[1+\kappa(q_1+q_2)] > 0$. La calibración es estrictamente creciente y continua, así que cada indicación de su imagen tiene una única preimagen. El intervalo de indicaciones está dentro de $[0, 11]\,\mathrm{cm}$, la imagen del intervalo calibrado. La raíz no negativa de la ecuación cuadrática es

$$q(r) = \frac{-1+\sqrt{1+4\kappa r}}{2\kappa}.$$

La otra raíz es negativa y queda fuera del dominio. Por monotonía basta invertir los extremos: son aproximadamente 4,991 y 5,009 cm, más precisamente 4,990908 y 5,009090 cm. Una envolvente a la milésima es $[4{,}990, 5{,}010]\,\mathrm{cm}$. Identificar indicación y longitud daría $[5{,}24, 5{,}26]\,\mathrm{cm}$, una banda ajena a la calibración. La anchura de una lectura y su corrección son informaciones distintas.

13. El mismo factor de escala

Al dividir las dos ecuaciones, el mismo $k > 0$ se cancela: $L/w = r_L/r_w = 2{,}5$. Todos los pares admisibles dan esa razón. Por separado tendríamos $L \in [20/1{,}01, 20/0{,}99]\,\mathrm{cm}$ y $w \in [8/1{,}01, 8/0{,}99]\,\mathrm{cm}$. Si conservamos sólo esas bandas y admitimos todas sus combinaciones,

$$\frac{L}{w} \in \left[2{,}5\frac{0{,}99}{1{,}01}, 2{,}5\frac{1{,}01}{0{,}99}\right] \subset [2{,}450, 2{,}551].$$

Esta envolvente contiene el valor correcto, pero sus extremos combinan factores de escala distintos para los dos lados. El modelo del enunciado exige uno solo. Recuperar esa relación elimina la incertidumbre de la razón dentro de este modelo ideal; otros errores de lectura o de orientación impedirían esa cancelación exacta.

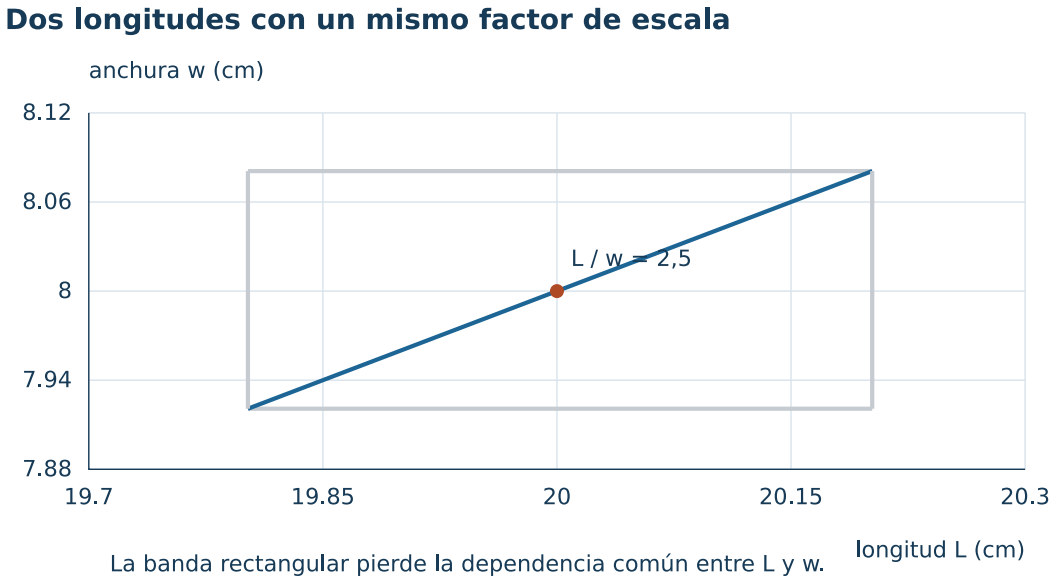


Figura 0.6. La dependencia común restringe los pares a un segmento. Combinar libremente sus cotas individuales admite pares que ningún factor común puede producir.

14. Promediar con cotas absolutas

La media de las indicaciones es 10,2 cm. Hay dos preguntas diferentes: qué garantía ofrecería promediar cualesquiera tres lecturas con la cota dada y qué información añaden estas tres lecturas concretas sobre la misma longitud. Para responder la segunda, escribimos cada restricción como una banda para L; un valor aceptable debe pertenecer a las tres simultáneamente.

Si $\overline{r}$ es la media, la desigualdad triangular da $|\overline{r}-L| \le \sum |r_i - L|/3 \le 0{,}2$ cm. Las tres bandas individuales son $[9{,}9,\,10{,}3]$, $[10{,}0,\,10{,}4]$ y $[10{,}1,\,10{,}5]$ cm. Su intersección es $[10{,}1,\,10{,}3]$ cm. Como $\overline{r} = 10{,}2$ cm, los datos concretos permiten mejorar la cota de su error a 0,1 cm.

Esa mejora procede de la intersección, no de una regla universal sobre tres repeticiones. Para ver por qué no cabe prometer en general $0{,}2/\sqrt{3}$, bastaría repetir tres veces una indicación con el mismo error de 0,2 cm: el error de la media seguiría siendo 0,2 cm. Un resultado estadístico de reducción exige hipótesis sobre las fluctuaciones y un significado probabilístico de la incertidumbre.

15. Medir láminas con un término desconocido

Restar las lecturas elimina el término de contacto: $R_{50} - R_{20} = 30h = 3{,}00$ mm. Resulta $h = 0{,}100$ mm y $c = 2{,}30 - 20(0{,}100) = 0{,}30$ mm. La predicción es $R_{35} = 3{,}80$ mm.

Una sola pila proporciona una ecuación con dos incógnitas; $R_N/N = h + c/N$ coincide con h únicamente si el contacto es nulo o se corrige. El dato de una tercera pila permite contrastar la hipótesis de un espesor constante y un mismo término de contacto. Si no concuerda, habría que revisar, por ejemplo, la compresión o la uniformidad de las láminas. La cuenta identifica los parámetros de la familia afín; no demuestra por sí misma esas hipótesis físicas.

La resta se eligió porque conserva el cambio de espesor al añadir láminas y elimina el contacto común. También podemos comprobar la predicción sin volver a calcular los parámetros: treinta y cinco es el punto medio de veinte y cincuenta, y una función afín conserva ese punto medio. Por eso $R_{35} = (R_{20} + R_{50})/2 = 3{,}80$ mm. Si cada pila tuviera su propio

término de contacto desconocido, la resta contendría además la diferencia entre esos términos. La posibilidad de medir un espesor mediante dos pilas depende de preparar un contacto reproducible.

16. Dos marcas de un reloj

Restar elimina el desplazamiento b, aunque sea grande. La diferencia de errores está entre $-0{,}06$ y $0{,}06\,\mathrm{s}$, así que

$$t_2 - t_1 \in [2{,}64, 2{,}76]\,\mathrm{s}.$$

Con factor de escala, $r_2 - r_1 = \alpha(t_2 - t_1) + e_2 - e_1$. Primero acotamos el numerador corregido y luego dividimos por el factor positivo:

$$t_2 - t_1 \in \left[\frac{2{,}64}{1{,}001}, \frac{2{,}76}{0{,}999}\right]\,\mathrm{s} \subset [2{,}637, 2{,}763]\,\mathrm{s}.$$

Los extremos decimales se redondearon hacia fuera. Un cero común puede cancelarse mientras un error común de escala permanece. Esto explica por qué dos marcas temporales pueden medir bien un intervalo aunque ninguna de ellas indique correctamente la hora absoluta.

17. Pasar de período a frecuencia

El recíproco es estrictamente decreciente para valores positivos. Intercambiamos los extremos al invertir:

$$f \in \left[\frac{1}{1{,}02}, \frac{1}{0{,}98}\right]\,\mathrm{s}^{-1} = \left[\frac{50}{51}, \frac{50}{49}\right]\,\mathrm{s}^{-1}.$$

La banda va aproximadamente de $0{,}980392$ a $1{,}020408\,\mathrm{s}^{-1}$. La declaración simétrica propuesta termina en $1{,}02$ y excluye valores permitidos próximos al extremo superior; por tanto, no constituye una cota garantizada. Una envolvente simétrica válida alrededor de uno es $(1{,}000 \pm 0{,}021)\,\mathrm{s}^{-1}$. La asimetría procede de una función no lineal y puede surgir aun sin probabilidades ni errores adicionales.

18. Diseñar el número de ciclos

Si el tiempo real total es T_N y la lectura es R_N, se conoce $|R_N - T_N| \le 0{,}24\,\mathrm{s}$. Al dividir por el entero positivo exacto N obtenemos una cota $0{,}24/N\,\mathrm{s}$ para la media. La condición solicitada es $0{,}24/N \le 0{,}01$, equivalente a $N \ge 24$. El menor entero admisible es 24.

Un ciclo omitido cambia el denominador correcto y queda fuera de la hipótesis de conteo exacto. Si los períodos individuales son distintos, T_N/N sigue siendo su media aritmética real; ya no tiene por qué representar un período constante ni el del último ciclo. Aumentar N reduce el efecto de la cota de cronometraje asumida, pero puede cambiar la pregunta física si la señal deriva con el tiempo.

19. Redondear un área y conservar su cota

El producto nominal es $A_0 = 12{,}34(5{,}6) = 69{,}104\,\mathrm{cm}^2$. Ambas longitudes son positivas, por lo que el área crece con cada entrada. Los extremos son

$$A \in [12{,}33(5{,}55), 12{,}35(5{,}65)]\,\mathrm{cm}^2 = [68{,}4315, 69{,}7775]\,\mathrm{cm}^2.$$

La escritura $69\,\mathrm{cm}^2$ da un valor nominal redondeado; por sí sola no declara una banda garantizada. La banda propuesta por el estudiante excluye valores admisibles en ambos extremos: $68{,}4315 < 68{,}5$ y $69{,}7775 > 69{,}5$. La regla práctica sobre cifras no prueba esa nueva cota. Una declaración breve que sí conserva la información como envolvente es $A = (69{,}1 \pm 0{,}7)\,\mathrm{cm}^2$, pues $[68{,}4, 69{,}8]$ contiene todo el intervalo calculado.

El centro de la banda exacta es $69{,}1045\,\mathrm{cm}^2$ y difiere ligeramente del producto nominal. La diferencia viene del término cruzado $\delta L\,\delta w$ al multiplicar los extremos; no cabe suponer que una transformación no lineal conserva el centro de una banda. Convertir el área a metros cuadrados multiplicaría ambos extremos por el factor exacto 10^{-4}, conservando la misma información.

Lecturas de apoyo

La distinción entre exactitud, veracidad, precisión e incertidumbre sigue el *Vocabulario Internacional de Metrología*, JCGM 200:2012, §§2.13–2.15 y 2.26. Los ejemplos numéricos y los problemas están redactados para esta obra. La selección de familias de la ampliación se contrastó con las colecciones indicadas a continuación.

La breve conexión con la física cuántica puede ampliarse en John Preskill, *Lecture Notes for Physics 229: Quantum Information and Computation*, capítulo 3, §§3.1 y 3.6. La referencia presenta un tratamiento y una discusión de la medida; no se adopta aquí una interpretación de la teoría cuántica.

Para ampliar la práctica se consultaron Bueche y Hecht, *Física general*, 10.ª ed. (Schaum), capítulo 1; Cristian Quinzacara, *Problemas resueltos de mecánica* (2021), §§1.1–1.2 y 2.1–2.2; Atilio del C. Fabián, *Problemas resueltos de Física I*, temas 1–2; y Rodrigo Sabaj Saavedra, *Problemas resueltos para el curso FI1001 Introducción a la física newtoniana* (2013), unidades de análisis dimensional y cinemática. Las situaciones, datos y soluciones añadidos aquí se desarrollan para este libro a partir de familias habituales de problemas, con atención al análisis de hipótesis y a la comprobación física.

El cotejo de teoría y práctica incluye también Young y Freedman, *Sears y Zemansky. Física universitaria*, vol. 1, 13.ª ed. (Pearson, 2013), §§1.3–1.6 y 2.1–2.6, con consulta complementaria de la 12.ª ed.; Serway y Jewett, *Física para ciencias e ingeniería*, vol. 1, 10.ª ed. en español (Cengage, 2019), §§1.2–1.6 y 2.1–2.9; y Serway y Vuille, *Fundamentos de física*, vol. 1, 9.ª ed., §§1.3–1.6 y capítulo 2. Las precisiones metrológicas conservan el criterio del VIM citado en el capítulo 0.

Capítulo 1

Describir, medir y estimar un movimiento

Un carro avanza por un riel recto. Cuando comienza a frenar, su rapidez es de ocho metros por segundo. Quedan veinte metros de riel. Queremos saber si se detendrá antes de llegar al extremo. Seguiremos la posición del frente del carro y mediremos desde él la distancia disponible, de modo que el tamaño del vehículo no obligue a corregir después el lugar de detención.

La rapidez inicial y la longitud disponible permiten imaginar la escena, pero todavía no permiten contestar. Un frenado suave y uno intenso pueden partir de la misma rapidez y terminar en lugares distintos. Necesitamos describir cómo cambia la velocidad mientras el carro frena.

Supongamos que, durante ese tramo, su velocidad disminuye dos metros por segundo en cada segundo. Esta es una hipótesis sobre el movimiento. Podría proceder de mediciones previas o ser una primera aproximación al comportamiento del freno. La utilizaremos para construir una predicción y después examinaremos qué depende de ella.

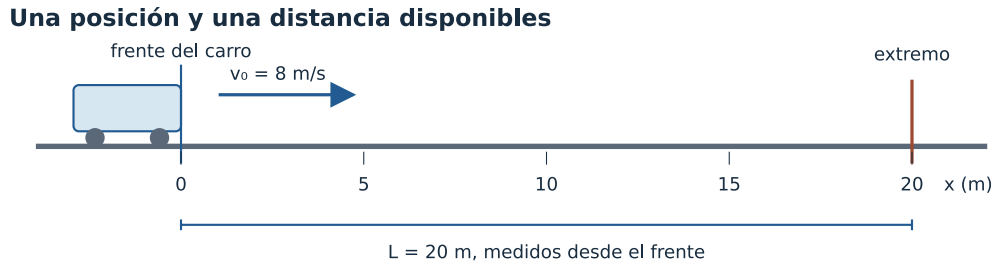


Figura 1.1. La distancia disponible se mide desde el frente del carro, que será el punto cuya posición seguimos. La flecha representa su velocidad inicial. El esquema no asigna una longitud física al dibujo del carro.

Un origen y un sentido para describir el movimiento

Escribiremos $x(t)$ para la posición del frente del carro y $v(t)$ para su velocidad con signo. La velocidad describe cómo cambia la posición y se calcula como $v = x'(t)$; la aceleración describe cómo cambia esa velocidad, $a = v'(t)$. Ambas derivadas se toman respecto del tiempo. Para decidir si el carro cabe en el riel, primero reconstruiremos estas funciones a partir del frenado y de sus valores iniciales.

Tomamos como origen el lugar en que comienza el frenado y medimos el tiempo desde ese instante. El sentido positivo del eje coincide con el avance inicial. Así, la posición y la velocidad iniciales son

$$x(0) = 0, \qquad v(0) = 8\,\mathrm{m/s}.$$

Decir que la velocidad disminuye dos metros por segundo cada segundo equivale a suponer una aceleración constante

$$a = -2\,\mathrm{m/s^2}.$$

El signo negativo expresa la orientación respecto del eje que elegimos. Durante el avance, la velocidad es positiva y la aceleración negativa, de modo que la rapidez disminuye. Si hubiéramos orientado el eje hacia el otro lado, ambos signos cambiarían y el carro seguiría realizando el mismo movimiento.

La aceleración es la derivada de la velocidad. Al integrar esa aceleración constante, la única libertad es una constante aditiva, que queda fijada por el dato inicial. En este caso, la velocidad debe tener derivada constante $-2\,\mathrm{m/s^2}$ y comenzar en $8\,\mathrm{m/s}$, de modo que

$$v(t) = 8\,\mathrm{m/s} - (2\,\mathrm{m/s^2})t.$$

Podemos verificarla sin memorizar una fórmula: al derivarla obtenemos la aceleración declarada; al poner $t = 0$ recuperamos la velocidad inicial. Esta comprobación reúne la ley de cambio y el dato que determina de cuál de las posibles historias estamos hablando.

El primer instante de detención satisface $v(t_*) = 0$. Por tanto,

$$t_* = \frac{8\,\mathrm{m/s}}{2\,\mathrm{m/s^2}} = 4\,\mathrm{s}.$$

Las unidades del cociente también responden: una velocidad dividida por una aceleración produce un tiempo.

De la velocidad al lugar de detención

Conocer el tiempo no basta para compararlo con los veinte metros de riel. Necesitamos la posición. Como $x' = v$ y $x(0) = 0$, integramos:

$$x(t) = \int_0^t v(s)\,ds = (8\,\mathrm{m/s})t - \frac{1}{2}(2\,\mathrm{m/s^2})t^2.$$

Cada término tiene unidades de longitud. En el instante de detención,

$$x(4\,\mathrm{s}) = 32\,\mathrm{m} - 16\,\mathrm{m} = 16\,\mathrm{m}.$$

Según este modelo, el carro se detiene cuatro metros antes del extremo. La conclusión depende de que el frenado empiece donde fijamos el origen y mantenga la aceleración supuesta hasta detenerse.

La gráfica proporciona otra comprobación de la distancia. Entre cero y cuatro segundos, la velocidad es positiva y desciende linealmente. El área bajo ella es un triángulo de base $4\,\mathrm{s}$ y altura $8\,\mathrm{m/s}$:

$$\frac{1}{2}(4\,\mathrm{s})(8\,\mathrm{m/s}) = 16\,\mathrm{m}.$$

En este intervalo el carro avanza siempre en el mismo sentido; por eso el desplazamiento coincide con la distancia recorrida. Si una historia incluyera un retroceso, el área firmada de la velocidad seguiría dando el desplazamiento, pero las distancias de ambos tramos tendrían que sumarse con valores positivos.

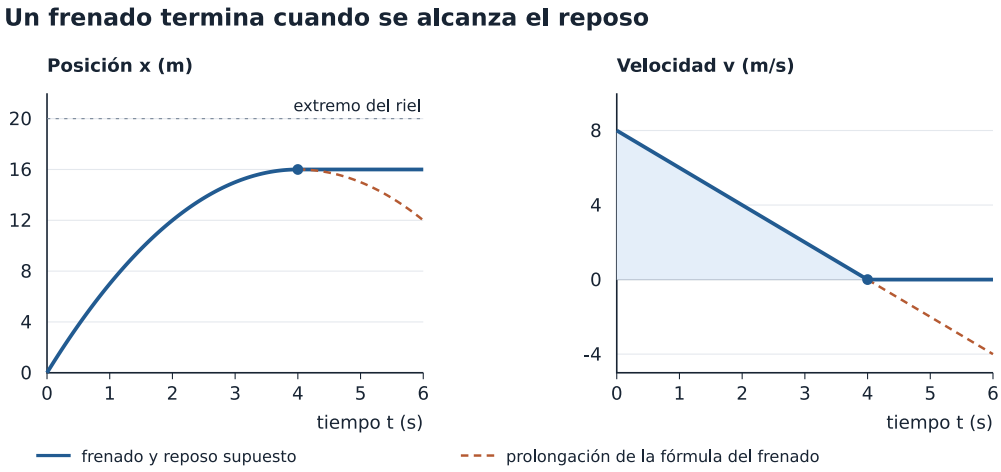


Figura 1.2. La región sombreada bajo la velocidad representa dieciséis metros de desplazamiento. Las curvas discontinuas prolongan la fórmula del frenado más allá de la primera detención y describirían un retroceso; el modelo por tramos mantiene el reposo.

Posición, desplazamiento y distancia recorrida

En el frenado hemos reconstruido la posición del punto elegido. Podemos precisar las magnitudes utilizadas y distinguir su cambio neto del recorrido acumulado durante un intervalo, incluso cuando el móvil regrese.

Definición (movimiento rectilíneo y magnitudes cinemáticas). Un movimiento rectilíneo se representa, una vez fijados eje y reloj, por una función de posición $x : I \to \mathbb{R}$ con unidades de longitud, definida en un intervalo temporal I. Para $t_1 < t_2$, el desplazamiento y la velocidad media son

$$\Delta x = x(t_2) - x(t_1), \qquad \overline{v} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Cuando existen las derivadas correspondientes, la velocidad es $v(t) = x'(t)$, la rapidez es $|v(t)|$ y la aceleración es $a(t) = v'(t)$. Si x es continuamente derivable por tramos, la distancia recorrida entre esos instantes es

$$D = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\, dt,$$

y la rapidez media es $D/(t_2 - t_1)$. La derivada se entiende como límite del cociente de incrementos; por ejemplo, $x'(t) = \lim_{h \to 0} [x(t+h) - x(t)]/h$, cuando ese límite existe dentro del dominio. Una lectura entre dos sensores da un cociente finito. Identificarlo con una velocidad instantánea exige examinar cómo cambia el movimiento entre ambos registros.

Proposición (distancia y desplazamiento). Bajo la regularidad anterior, $D \geq |\Delta x|$. Si la velocidad conserva un signo en todo el intervalo, se cumple la igualdad. Si la velocidad es continua y toma valores estrictamente positivos y estrictamente negativos, la desigualdad es estricta.

Demostración. El teorema fundamental del cálculo da $\Delta x = \int v$. La desigualdad triangular para la integral produce $|\int v| \leq \int |v|$. También podemos separar las contribuciones positivas y negativas: si $P = \int \max(v, 0)$ y $N = \int \max(-v, 0)$, entonces $D = P + N$ y $\Delta x = P - N$. Si uno se anula, hay igualdad; si ambos son positivos, $|P - N| < P + N$. La continuidad y la presencia de ambos signos garantizan intervalos de contribución positiva de cada tipo.

Un regreso al punto de partida da desplazamiento nulo aunque D pueda ser grande. El ejercicio 9 calcula ambas magnitudes para un mismo movimiento; el 10 muestra por qué promediar velocidades de tramos exige ponderar por sus duraciones.

Relacionar promedios y valores instantáneos

La aceleración también puede describirse a partir de dos registros. Para $t_1 < t_2$ y una velocidad definida en ambos instantes, su aceleración media es

$$\overline{a} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

La aceleración instantánea, cuando existe, es el límite de ese cociente al acercarse los instantes y coincide con $v'(t)$. Una aceleración media nula indica que las velocidades extremas coinciden; durante el intervalo puede haber cambios importantes. Un móvil puede conservar la misma velocidad inicial y final después de un frenado y una recuperación de rapidez.

Proposición (un valor instantáneo igual al promedio). Si x es continua en $[t_1, t_2]$ y derivable en su interior, existe al menos un instante $c \in (t_1, t_2)$ con $v(c) = \overline{v}$. Si v es continua en el intervalo cerrado y derivable en su interior, existe al menos un instante $d \in (t_1, t_2)$ con $a(d) = \overline{a}$. Los instantes de ambas afirmaciones no tienen por qué coincidir ni ser únicos.

Demostración. Restemos a $x(t)$ la recta que une sus posiciones extremas: $F(t) = x(t) - x(t_1) - \overline{v}(t - t_1)$. Esta función es continua en el intervalo cerrado, derivable en su interior y se anula en los dos extremos. El teorema de Rolle proporciona un c interior con $F'(c) = 0$, es decir, $v(c) - \overline{v} = 0$. Aplicar el mismo argumento a $v(t) - v(t_1) - \overline{a}(t - t_1)$ demuestra la segunda afirmación, bajo sus propias hipótesis.

La existencia de ese instante no permite localizarlo con sólo dos lecturas. Si retiramos la derivabilidad, tampoco podemos asegurar la conclusión: el recorrido de ida y regreso del ejercicio 9 tiene velocidad media cero, pero sus velocidades son dos y menos tres metros por segundo, y en el cambio instantáneo no existe derivada. Una transición física suave entre ambos sentidos sí pasaría por velocidad cero; la idealización por tramos había omitido esa transición. El ejercicio 19 estudia un movimiento suave en que la aceleración media es nula y el valor de la velocidad media se alcanza dos veces.

Lo que determinan una aceleración y los datos iniciales

Al integrar el frenado elegimos dos constantes mediante la velocidad y la posición iniciales. Podemos precisar en qué condiciones ese procedimiento determina una historia completa.

Proposición (reconstrucción desde una aceleración prescrita). Sea $a(t)$ una función continua en un intervalo I que contiene a t_0. Dados x_0 y v_0, existe una única posición x de clase C^2 que satisface $x''(t) = a(t)$, $x(t_0) = x_0$ y $x'(t_0) = v_0$. Viene dada por

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(s)\,ds, \qquad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(s)\,ds.$$

Demostración. La continuidad de a permite aplicar el teorema fundamental del cálculo: la primera función tiene derivada a y toma el valor v_0 en t_0. Integrarla produce una función de clase C^2 con los datos exigidos. Para comprobar unicidad, si x_1, x_2 son dos soluciones, su diferencia z satisface $z'' = 0$ y $z(t_0) = z'(t_0) = 0$. El teorema del valor medio implica primero que z' es constante y luego que z lo es. Ambos valores iniciales fuerzan que sean cero, por lo que $x_1 = x_2$ en I.

Si a es constante, integrar da $v = v_0 + a(t - t_0)$ y $x = x_0 + v_0(t - t_0) + a(t - t_0)^2/2$. El factor $1/2$ resulta de integrar el tiempo. Esta proposición trata una aceleración ya dada como función del tiempo; una ley que dependa de la posición o de la velocidad necesitará

un estudio adicional de ecuaciones diferenciales. Tampoco decide durante cuánto tiempo representa correctamente al freno.

Para una aceleración continua por tramos podemos efectuar la misma integración y transportar los valores finales entre tramos. La posición y la velocidad resultan continuas; la segunda derivada puede dejar de existir en los puntos donde la aceleración salta. Esto explica la idealización del cambio de régimen sin atribuirle una suavidad que el modelo no tiene.

Hasta cuándo vale una fórmula

Si evaluamos la expresión de la velocidad en seis segundos obtenemos $-4\,\mathrm{m/s}$. La expresión de la posición daría doce metros. Matemáticamente, prolongar esas funciones describe un carro que se detuvo y comenzó a retroceder.

Nuestro modelo de frenado había sido formulado para el tramo de avance hasta la primera detención. No disponemos de información que justifique prolongar la misma aceleración después. Para completar la descripción supondremos que el dispositivo mantiene entonces el carro en reposo. Con esa hipótesis adicional, la historia es

$$v(t) = \begin{cases} 8\,\mathrm{m/s} - (2\,\mathrm{m/s^2})t, & 0 \le t \le 4\,\mathrm{s}, \\ 0, & t \ge 4\,\mathrm{s}, \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{cases} (8\,\mathrm{m/s})t - \tfrac{1}{2}(2\,\mathrm{m/s^2})t^2, & 0 \le t \le 4\,\mathrm{s}, \\ 16\,\mathrm{m}, & t \ge 4\,\mathrm{s}. \end{cases}$$

La posición y la velocidad enlazan continuamente en la detención. La aceleración cambia allí de régimen: la descripción ideal utiliza $-2\,\mathrm{m/s^2}$ antes y cero después, sin exigir una aceleración clásica definida exactamente en ese instante. Los cambios instantáneos son idealizaciones que habrá que revisar si nos interesa el funcionamiento del mecanismo durante la transición.

Qué ocurre si la rapidez inicial se duplica

El mismo carro comienza ahora a frenar a $16\,\mathrm{m/s}$. Mantengamos la hipótesis de una disminución de dos metros por segundo cada segundo. La intensidad del frenado es la misma, pero la velocidad tarda más en llegar a cero.

Para reunir ambos casos, llamemos $v_0 > 0$ a la rapidez inicial y $b > 0$ al módulo de la aceleración de frenado. Con el eje orientado en el sentido del avance,

$$v(t) = v_0 - bt, \qquad t_* = \frac{v_0}{b}.$$

La distancia hasta la primera detención se obtiene integrando hasta ese instante:

$$d = \int_0^{v_0/b} (v_0 - bt)\,dt = v_0\frac{v_0}{b} - \frac{b}{2}\frac{v_0^2}{b^2} = \frac{v_0^2}{2b}.$$

Duplicar v_0 duplica el tiempo de frenado y multiplica la distancia por cuatro. La gráfica de velocidad explica ambas contribuciones: el triángulo se vuelve dos veces más alto y dos veces más ancho.

Rapidez inicial	Tiempo hasta detenerse	Distancia de frenado, con $b = 2\,\mathrm{m/s^2}$
$4\,\mathrm{m/s}$	$2\,\mathrm{s}$	$4\,\mathrm{m}$
$8\,\mathrm{m/s}$	$4\,\mathrm{s}$	$16\,\mathrm{m}$
$16\,\mathrm{m/s}$	$8\,\mathrm{s}$	$64\,\mathrm{m}$

En el último caso, el modelo predice sesenta y cuatro metros para detenerse si hubiera riel suficiente. Con solo veinte metros disponibles, el carro alcanza el extremo antes de detenerse. La historia real posterior al extremo requiere otra descripción; no podemos atribuirle los sesenta y cuatro metros como si hubiera continuado sobre un riel inexistente.

Formular una condición de detención

El valor $v = 0$ identifica un instante; afirmar que el carro permanece detenido después introduce otra ley de movimiento. Sea $v_0 > 0$ y supongamos una aceleración $-b$, con $b > 0$, únicamente hasta la primera detención. Durante ese régimen,

$$t_* - t_0 = \frac{v_0}{b}, \qquad x(t_*) - x_0 = \frac{v_0^2}{2b}.$$

Corolario (criterio de espacio disponible). Si el frente del carro dispone de una longitud $L > 0$, se detiene estrictamente antes del extremo exactamente cuando $v_0^2/(2b) < L$. La igualdad significa detenerse en el extremo. Si la frenada comienza tras un retraso $\tau \geq 0$ durante el cual mantiene v_0, la condición pasa a ser

$$v_0\tau + \frac{v_0^2}{2b} < L.$$

En efecto, los dos desplazamientos corresponden a intervalos consecutivos y se suman. La condición sólo es física bajo las hipótesis sobre el frente seguido, el retraso y la ley de frenado; el ejercicio 13 estudia su umbral y el 14 examina una ley distinta que nunca alcanza velocidad cero en tiempo finito.

El análisis de signos también puede formularse con precisión. En un intervalo donde $v \neq 0$ y existe a, la derivación del valor absoluto da $d|v|/dt = \operatorname{sgn}(v)a$. Por tanto, la rapidez aumenta cuando $va > 0$ y disminuye cuando $va < 0$. El signo de la aceleración por sí solo no distingue ambos comportamientos. En un cero de la velocidad, la rapidez puede tener una esquina y esa fórmula requiere un examen lateral.

Medir una posición y reconstruir un cambio

Para comparar el movimiento con el cálculo necesitamos un procedimiento que produzca posiciones y tiempos. Podemos colocar una escala junto al riel y registrar el paso del frente del carro mediante una cámara sincronizada. La lectura depende entonces de qué punto seguimos, dónde fijamos el cero y cómo relacionamos cada imagen con un instante. Una lista de números adquiere significado físico cuando esas elecciones están determinadas.

Consideremos la siguiente tabla de datos simulados. Servirá para practicar el contraste; no procede de un experimento real. Trataremos los tiempos como exactos dentro de este ejemplo y supondremos que cada posición posterior al inicio difiere de su lectura en, a lo sumo, 0,05 m. El cero inicial fija el origen y se toma exacto. En una experiencia efectiva habría que justificar esas cotas y examinar también el registro temporal.

Tiempo t en segundos	Posición indicada x_{obs} en metros	Posición del modelo en metros
0	0	0
1	7,02	7,00
2	12,01	12,00
3	15,03	15,00
4	15,99	16,00

La gráfica completa muestra una coincidencia visual estrecha, pero la escala de dieciséis metros puede ocultar diferencias de centímetros. Para examinarlas definimos el residuo como la posición indicada menos la posición predicha. En los cuatro registros posteriores al origen

los residuos son 0,02, 0,01, 0,03 y −0,01 metros. Todos quedan dentro de las cotas supuestas. Esto significa que las observaciones del ejemplo son compatibles con la predicción a esa resolución de contraste; no prueba que el movimiento real tenga aceleración exactamente constante.

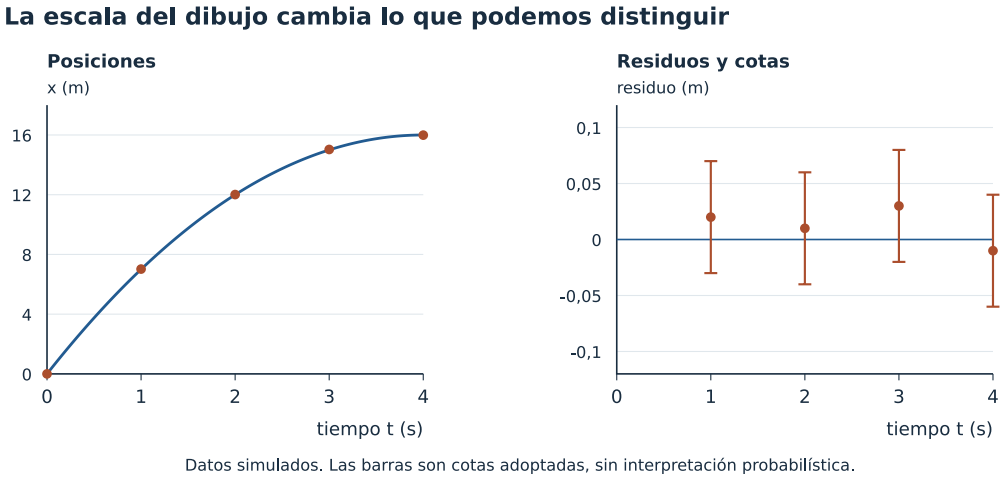


Figura 1.3. El panel de residuos cambia la escala para hacer visibles las diferencias. Las barras representan las cotas adoptadas en el ejemplo; no son intervalos de confianza ni describen una distribución de probabilidades.

Podemos usar dos posiciones para calcular una velocidad media. Entre uno y dos segundos, los valores centrales dan

$$\overline{v}_{[1,2]} = \frac{12{,}01\,\mathrm{m} - 7{,}02\,\mathrm{m}}{2\,\mathrm{s} - 1\,\mathrm{s}} = 4{,}99\,\mathrm{m/s}.$$

El resultado describe el desplazamiento durante el intervalo dividido por su duración. La velocidad instantánea del modelo vale $6\,\mathrm{m/s}$ al comienzo de ese intervalo y $4\,\mathrm{m/s}$ al final. Para una variación lineal, su promedio es $5\,\mathrm{m/s}$, próximo al valor que acabamos de obtener de las lecturas. Atribuir $4{,}99\,\mathrm{m/s}$ a todos los instantes del tramo borraría justamente el cambio que pretendemos estudiar.

Las cotas de posición también afectan a esa velocidad media. La primera lectura admite posiciones entre 6,97 y 7,07 metros; la segunda, entre 11,96 y 12,06 metros. El menor desplazamiento compatible con estas cotas es $11{,}96 - 7{,}07 = 4{,}89$ metros y el mayor es $12{,}06 - 6{,}97 = 5{,}09$ metros. Como el intervalo temporal se ha tomado exacto, obtenemos

$$\overline{v}_{[1,2]} \in [4{,}89,\, 5{,}09]\,\mathrm{m/s}.$$

No hemos supuesto que los errores de ambas posiciones sean independientes: la suma de sus cotas limita cualquier combinación posible. Si conociéramos una relación adicional entre los errores, por ejemplo un desplazamiento común del cero que se cancela al restar, podríamos obtener una cota más estrecha.

De una lectura a un intervalo

El capítulo 0 distinguió la resolución de una indicación y la cota de una medida. Apliquemos ahora ese razonamiento a la velocidad que utilizaremos al comenzar el frenado: además de calcular un cociente, tendremos que justificar qué velocidad representa.

Supongamos que dos sensores detectan el paso del mismo punto del carro y que, durante ese paso, obtenemos las cotas

$$\ell \in [0{,}3995, 0{,}4005]\,\mathrm{m}, \qquad \Delta t \in [0{,}04975, 0{,}05025]\,\mathrm{s}.$$

El cociente $\ell/\Delta t$ representa la velocidad media entre ambos sensores, con el eje orientado hacia el segundo. Para utilizarlo como velocidad inicial del frenado suponemos además que, antes de que actúe el freno, la velocidad permanece constante y no cambia entre el segundo sensor y el comienzo del frenado. Si esa condición falla, el cociente sigue siendo una media sobre su intervalo, pero deja de determinar por sí solo la velocidad en el inicio que nos interesa.

La longitud y el tiempo son positivos. El cociente crece al aumentar el numerador y disminuye al aumentar el denominador; por eso toda velocidad compatible con las cotas satisface

$$\frac{0{,}3995}{0{,}05025}\,\mathrm{m/s} \le v_0 \le \frac{0{,}4005}{0{,}04975}\,\mathrm{m/s}.$$

Los extremos valen aproximadamente 7,95025 y 8,05025 m/s. Una envolvente más sencilla, redondeada hacia fuera, es

$$v_0 \in [7{,}9, 8{,}1]\,\mathrm{m/s}.$$

Como en las medidas del capítulo 0, esta envolvente conserva las cotas dadas sin añadirles probabilidades. No hemos demostrado que sus extremos puedan alcanzarse simultáneamente con los de cualquier otra magnitud; la envolvente permite proteger el cálculo incluso cuando desconocemos esas dependencias.

Cuánto cambia la conclusión cuando cambian los datos

La predicción inicial utilizaba los valores $v_0 = 8\,\mathrm{m/s}$ y $b = 2\,\mathrm{m/s^2}$ como si estuvieran fijados exactamente. Conservemos el modelo de aceleración constante hasta la detención y consideremos ahora parámetros acotados. Además del intervalo anterior de velocidad, adoptemos para este ejemplo

$$b \in [1{,}9, 2{,}1]\,\mathrm{m/s^2}, \qquad L \in [19{,}9, 20{,}1]\,\mathrm{m}.$$

La primera cota tendría que justificarse mediante una calibración del frenado; aquí es una condición del problema. Es distinta de suponer que la aceleración oscila arbitrariamente entre esos límites durante una misma historia: cada historia de esta familia tiene un valor constante de b, aunque no sepamos cuál es. La longitud L es la distancia desde el frente del carro al extremo cuando comienza a frenar, sin retraso adicional.

Para decidir si todas las historias admitidas se detienen antes del extremo, necesitamos la mayor distancia que puede exigir el frenado y la menor longitud que puede estar disponible. La fórmula $d = v_0^2/(2b)$ crece con la rapidez inicial positiva y disminuye con b. De ahí resulta la cota

$$\frac{(7{,}9\,\mathrm{m/s})^2}{2(2{,}1\,\mathrm{m/s^2})} \le d \le \frac{(8{,}1\,\mathrm{m/s})^2}{2(1{,}9\,\mathrm{m/s^2})}.$$

Los extremos son aproximadamente 14,85952 y 17,26579 metros. Al redondear hacia fuera a centésimas obtenemos $d \in [14{,}85, 17{,}27]\,\mathrm{m}$. La menor longitud disponible es 19,9 m, de modo que aun usando la cota superior redondeada del frenado queda un margen de al menos

$$19{,}9\,\mathrm{m} - 17{,}27\,\mathrm{m} = 2{,}63\,\mathrm{m}.$$

La conclusión de detención anterior al extremo es robusta dentro de estos supuestos. El margen no protege frente a un retraso que omitimos ni frente a un freno cuya aceleración

deja de ajustarse al modelo. El razonamiento identifica qué afirmación está respaldada por las cotas y qué cambios del aparato exigirían otro cálculo.

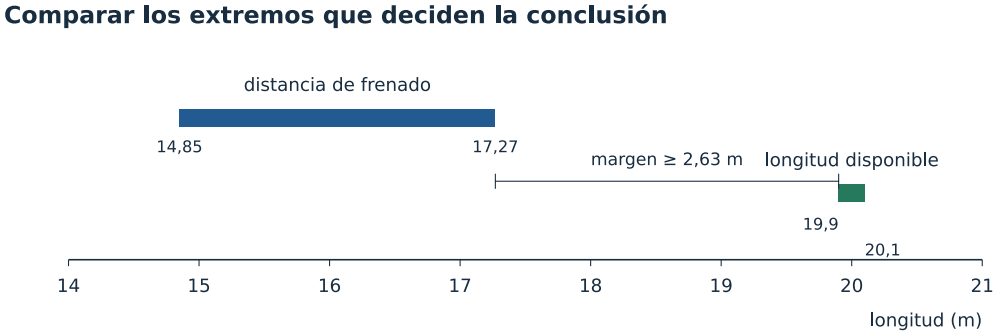


Figura 1.4. Las dos bandas comparten unidades y escala. Su separación permite comparar la peor distancia de frenado con la menor longitud disponible, sin atribuir una distribución probabilística a las bandas.

Estimar antes de terminar la cuenta

El modelo permite reconocer dos escalas incluso antes de resolverlo. La razón v_0/b tiene unidades de tiempo y aumenta cuando el carro comienza más rápido o frena con menor intensidad. Durante un tiempo de ese orden, una rapidez de orden v_0 produce una distancia de orden v_0^2/b. Para nuestros valores, esas escalas son cuatro segundos y treinta y dos metros. El cálculo exacto de dieciséis metros pertenece al mismo orden de magnitud y determina el factor que la estimación había dejado abierto.

La homogeneidad dimensional permite descartar una fórmula que intente expresar la distancia mediante v_0/b, porque ese cociente es un tiempo. En cambio, tanto v_0^2/b como $v_0^2/(2b)$ tienen dimensiones de longitud. Las unidades no pueden decidir cuál es la distancia del modelo: la integración, o el área triangular de la velocidad, fija el factor $1/2$.

También necesitamos comparar magnitudes de igual tipo. Para saber si el carro cabe en el riel, importa el cociente d/L; un valor menor que uno expresa detención anterior al extremo. Para saber cuánto influye un retraso τ, habrá que comparar la distancia adicional $v_0\tau$ con la distancia de frenado. Esas comparaciones dan significado físico a expresiones que, contempladas solo como fórmulas, podrían parecer intercambiables.

Lo que los datos no determinaban

El primer cálculo partió de una rapidez y de una aceleración constante supuesta. Si solo supiéramos que el carro comienza a $8\,\mathrm{m/s}$ y recorre dieciséis metros antes de detenerse, no podríamos concluir que tarda cuatro segundos.

Para comprobarlo, consideremos otra historia de frenado, con $T = 6\,\mathrm{s}$:

$$\widetilde{v}(t) = v_0\left(1 - \frac{t}{T}\right)^2, \qquad v_0 = 8\,\mathrm{m/s}, \quad 0 \le t \le T.$$

Esta velocidad empieza en el mismo valor, permanece positiva antes de T y termina en cero. La distancia es

$$\int_0^T \widetilde{v}(t)\,dt = v_0 T \int_0^1 (1-s)^2\,ds = \frac{v_0 T}{3} = 16\,\mathrm{m}.$$

El cambio de variable $s = t/T$ convierte el intervalo temporal en $[0, 1]$. Hemos obtenido la misma distancia con un tiempo de detención de seis segundos. La aceleración de esta segunda historia,

$$\widetilde{a}(t) = -\frac{2v_0}{T}\left(1 - \frac{t}{T}\right),$$

varía durante el frenado. Así queda localizada la información decisiva: los cuatro segundos del primer cálculo dependían de mantener constante la aceleración. Una medición de velocidad a mitad del recorrido o una serie temporal permitiría empezar a contrastar las dos historias.

Los dieciséis metros utilizados para construir ambas historias no sirven después como una predicción independiente que permita decidir entre ellas. El contraste necesita otra observación: registrar velocidades durante el frenado permitiría comprobar si disminuyen linealmente o siguen una historia diferente.

Los datos simulados de la tabla ofrecen una comparación concreta. En el primer segundo, el modelo de aceleración constante predice siete metros; para la segunda historia, integrar su velocidad da

$$\widetilde{x}(t) = v_0\left(t - \frac{t^2}{T} + \frac{t^3}{3T^2}\right).$$

Con $T = 6\,\mathrm{s}$, en $t = 1\,\mathrm{s}$ resulta $\widetilde{x} = 182/27\,\mathrm{m}$, aproximadamente $6{,}74074\,\mathrm{m}$. La lectura de ese instante admite posiciones entre 6,97 y 7,07 metros. Bajo las cotas y los tiempos supuestos, el segundo modelo es incompatible con esa lectura, mientras que el primero sigue siendo compatible. Los dieciséis metros totales no los distinguían; una posición intermedia sí lo hace en este ejemplo.

La comparación conserva una obligación experimental: si las cotas fueran mayores o los tiempos menos precisos, habría que repetir el contraste con esa información. Los datos apoyan o excluyen un modelo junto con el procedimiento que los produce, y una coincidencia dentro de las cotas mantiene abierta la posibilidad de otras historias compatibles.

Ejercicios

La práctica inicial puede comenzar por 1, 3, 4, 6, 7, 9 y 10. En ella se aprende a separar tramos, distinguir promedios y comprobar una predicción. Los problemas 2, 5, 8 y 13 reutilizan esas decisiones con un parámetro desconocido, cotas o una nueva ley de frenado. Los ejercicios 11, 12 y 14–19 requieren además trabajar con aproximaciones, exponenciales o propiedades de las funciones; pueden retomarse después de afianzar las primeras reconstrucciones.

1. El retraso del mecanismo

Un carro avanza a $8\,\mathrm{m/s}$ cuando un sensor da la orden de frenar. Desde ese punto quedan veinte metros de riel. El mecanismo tarda $0{,}5\,\mathrm{s}$ en actuar; durante el retraso la velocidad permanece constante. Después, el carro frena con aceleración $-2\,\mathrm{m/s^2}$ hasta la primera detención y permanece en reposo. Determina dónde y cuándo se detiene, midiendo posición y tiempo desde la orden. Decide si se detiene estrictamente antes del extremo.

2. Qué velocidades iniciales son admisibles

Conserva el retraso, la aceleración de frenado y la longitud disponible del ejercicio anterior, pero deja desconocida la rapidez inicial positiva. Determina qué valores permiten detener el carro a más tardar en el extremo y cuáles permiten detenerlo estrictamente antes. Justifica qué parte de la solución algebraica tiene interpretación física.

3. Lo que miden dos sensores

Dos sensores detectan el paso del mismo punto de un carro. La separación entre ellos pertenece a $[0{,}395, 0{,}405]\,\mathrm{m}$ y el tiempo de tránsito a $[0{,}049, 0{,}051]\,\mathrm{s}$. El carro avanza en el sentido del segundo sensor. Obtén una cota para su velocidad media y decide si estos datos determinan la velocidad instantánea al pasar por el segundo sensor. No se supone que el movimiento sea uniforme.

4. Dos fórmulas propuestas

Para un frenado de rapidez inicial $v_0 > 0$ y aceleración constante $-b$, con $b > 0$, se proponen las expresiones $d_A = v_0/b$ y $d_B = v_0^2/b$ para la distancia hasta detenerse. Decide qué puede descartarse mediante unidades y qué requiere estudiar el movimiento. Explica la discrepancia de la segunda expresión con el resultado obtenido en la exposición.

5. Una conclusión sensible al retraso

El dispositivo recibe la orden de frenar cuando quedan L metros y mantiene su rapidez inicial durante un retraso τ. Después frena con un valor constante de b hasta detenerse. Se admiten todas las combinaciones de

$$v_0 \in [7{,}9, 8{,}1]\,\mathrm{m/s}, \qquad b \in [1{,}9, 2{,}1]\,\mathrm{m/s^2},$$
$$\tau \in [0{,}45, 0{,}55]\,\mathrm{s}, \qquad L \in [19{,}9, 20{,}1]\,\mathrm{m}.$$

Decide si estas condiciones garantizan la detención antes del extremo. Si no la garantizan, determina si todas las combinaciones producen una llegada al extremo o si las cotas permiten resultados distintos. Fundamenta la conclusión sin asignar probabilidades a los intervalos.

6. El movimiento de un robot

Un robot de inspección parte del origen y su controlador prescribe, durante cinco segundos, la velocidad

$$v(t) = 6\,\mathrm{m/s} - (2\,\mathrm{m/s^2})t, \qquad 0 \le t \le 5\,\mathrm{s}.$$

Determina su posición al terminar ese intervalo y la distancia que ha recorrido. La guía permite avanzar y retroceder, y no se prescribe reposo después del primer instante de velocidad cero.

7. Reconstruir el frenado desde posiciones

Un carro comienza a frenar en $x = 0$ y $t = 0$. A un segundo está en $x = 6\,\mathrm{m}$ y a dos segundos en $x = 8\,\mathrm{m}$. Trata los datos como exactos y supone aceleración constante durante todo el tramo registrado. Determina la velocidad inicial y la aceleración. Decide si el segundo registro coincide con la primera detención y si diez metros de riel habrían bastado para detenerse, suponiendo reposo posterior.

8. Un frenado que se intensifica

Otro mecanismo prescribe una aceleración $a(t) = -kt$, con $k > 0$, desde el comienzo del frenado hasta la primera detención. La velocidad inicial es $v_0 > 0$ y no hay retraso. Determina las dimensiones de k, el tiempo hasta detenerse y la distancia que exigiría el frenado si hubiera riel suficiente. Para $v_0 = 8\,\mathrm{m/s}$ y $k = 1\,\mathrm{m/s^3}$, decide si bastarían veinte metros. Establece cómo cambia la distancia al duplicar la rapidez inicial manteniendo fijo k.

9. Volver al punto de partida

Un punto se mueve sobre un eje con velocidad $2\,\mathrm{m/s}$ durante tres segundos y luego con velocidad $-3\,\mathrm{m/s}$ durante dos segundos. Parte de $x = 1\,\mathrm{m}$. Determina posición final, desplazamiento, distancia recorrida, velocidad media y rapidez media. Los cambios de velocidad se idealizan como instantáneos. Explica qué información pierde la velocidad media.

10. Dos maneras de dividir un trayecto

Un vehículo recorre un tramo recto siempre en el mismo sentido. Durante la mitad de la distancia mantiene $4\,\mathrm{m/s}$ y durante la otra mitad $12\,\mathrm{m/s}$. Calcula su rapidez media sin fijar la distancia total. Compara con el caso en que esas velocidades se mantienen durante mitades iguales del tiempo total y justifica los pesos de cada promedio.

11. Una diferencia simétrica

Considera el movimiento $x(t) = [\theta^3 - 2\theta]\,\mathrm{m}$, con $\theta = t/(1\,\mathrm{s})$. Compara $v(2\,\mathrm{s})$ con la estimación simétrica

$$V_h = \frac{x(2\,\mathrm{s}+h) - x(2\,\mathrm{s}-h)}{2h}, \qquad h > 0.$$

Obtén su error exacto en función de h. Explica por qué para una posición cuadrática el mismo procedimiento daría la velocidad exacta en el centro, siempre que ambas muestras pertenezcan al tramo cuadrático.

12. Acercar los registros tiene un costo

La velocidad v es continua en $[t, t+h]$ y derivable en su interior, con $h > 0$; allí su aceleración satisface $|a(u)| \le A$. Cada lectura de posición tiene error absoluto no mayor que ε. Se estima $v(t)$ mediante la diferencia de las lecturas dividida por h. Justifica la cota

$$|V_h - v(t)| \le \frac{Ah}{2} + \frac{2\varepsilon}{h}.$$

Para $A = 2\,\mathrm{m/s^2}$ y $\varepsilon = 0{,}01\,\mathrm{m}$, encuentra el h que minimiza esta cota y compáralo con $h = 0{,}10\,\mathrm{s}$. Supón que la cota de aceleración vale en todo el intervalo utilizado y que los tiempos son exactos.

13. La rapidez límite con retraso

Un carro dispone de $30\,\mathrm{m}$ desde su frente hasta un extremo. Su mecanismo demora $0{,}50\,\mathrm{s}$ en actuar; durante ese tiempo mantiene su rapidez inicial $v_0 > 0$. Después frena con aceleración de magnitud $3\,\mathrm{m/s^2}$ hasta detenerse. Determina las rapideces iniciales que permiten detenerse estrictamente antes del extremo. Explica qué representa el valor frontera.

14. Frenar sin alcanzar el reposo

Otro modelo prescribe $v(t) = 6\exp[-t/(2\,\mathrm{s})]\,\mathrm{m/s}$ para $t \ge 0$, con $x(0) = 0$. Obtén $x(t)$ y decide si existe un primer instante de detención. Calcula la distancia total límite y el tiempo necesario para que la rapidez baje hasta $0{,}01\,\mathrm{m/s}$. Distingue reposo exacto y un umbral operativo de detención.

15. Aceleración negativa y rapidez creciente

Para $0 \le t \le 4\,\mathrm{s}$, la posición es $x(t) = [\theta^3 - 6\theta^2 + 9\theta]\,\mathrm{m}$, con $\theta = t/(1\,\mathrm{s})$. Determina los intervalos en que aumenta y disminuye la rapidez. Calcula desplazamiento y distancia recorrida. Señala un intervalo en que una aceleración negativa acompañe un aumento de rapidez.

16. La forma del frenado

Dos modelos de velocidad, válidos hasta $T > 0$, son

$$v_p(t) = v_0(1 - t/T)^p, \qquad 0 \le t \le T,$$

con $v_0 > 0$, y con $p = 1$ o $p = 2$. Después de T permanecen en reposo. Calcula la distancia de detención de cada uno y sus aceleraciones iniciales. Decide si conocer sólo v_0 y el tiempo de detención determina la distancia. Compara la continuidad de la aceleración en T al unir cada modelo con el reposo.

17. Una ecuación que pierde el sentido de marcha

Para una aceleración constante demuestra $v(t)^2 = v_0^2 + 2a[x(t) - x_0]$ sin dividir por v. Aplica la identidad a $x_0 = 0$, $v_0 = 4\,\mathrm{m/s}$, $a = -2\,\mathrm{m/s^2}$ y a la posición $x = 3\,\mathrm{m}$. Encuentra todos los instantes y velocidades de la prolongación parabólica y decide cuáles corresponden al régimen de frenado hasta la primera detención.

18. Lo que falta cuando sólo conocemos una velocidad media

Un movimiento con aceleración constante tiene $x(0) = 0$ y velocidad media $5\,\mathrm{m/s}$ entre cero y cuatro segundos. Encuentra todas las parejas (v_0, a) compatibles. Después añade el registro $x(2\,\mathrm{s}) = 8\,\mathrm{m}$ y reconstruye el movimiento. Justifica la unicidad de la reconstrucción dentro de esa familia y comprueba el dato medio original.

19. Aceleración media nula durante un movimiento variable

Durante $0 \le t \le 2\,\mathrm{s}$, un punto tiene velocidad $v(t) = [2 + (\theta - 1)^2]\,\mathrm{m/s}$, con $\theta = t/(1\,\mathrm{s})$, y parte de $x(0) = 0$. Calcula su aceleración media, la aceleración instantánea y su posición. Obtén la velocidad media y encuentra todos los instantes interiores en que la velocidad instantánea coincide con ella. Explica por qué una aceleración media nula no implica movimiento uniforme.

Soluciones

1. El retraso del mecanismo

La orden del sensor y el comienzo del frenado son dos eventos distintos. Como la aceleración cambia entre ambos tramos, calculamos primero el desplazamiento durante el retraso y después el que exige reducir la velocidad hasta cero.

Durante el retraso $\tau = 0{,}5\,\mathrm{s}$, la distancia recorrida es

$$d_{\mathrm{retraso}} = v_0\tau = (8\,\mathrm{m/s})(0{,}5\,\mathrm{s}) = 4\,\mathrm{m}.$$

El carro comienza a frenar con la misma rapidez que en el primer caso. Por eso el tramo de frenado sigue midiendo dieciséis metros y dura cuatro segundos. Desde la orden del sensor, la distancia total es

$$d_{\mathrm{total}} = v_0\tau + \frac{v_0^2}{2b} = 4\,\mathrm{m} + 16\,\mathrm{m} = 20\,\mathrm{m}.$$

Se detiene justo en el extremo a los $4{,}5\,\mathrm{s}$ de la orden. Si se exige detenerlo estrictamente antes del extremo, la igualdad no cumple esa condición. La diferencia entre «antes» y «a más tardar en el extremo» modifica la desigualdad que debemos resolver.

2. Qué velocidades iniciales son admisibles

La rapidez inicial aparece tanto en la distancia que se recorre durante el retraso como en la distancia de frenado. Sumando ambas contribuciones y comparando con la longitud disponible, obtenemos

$$v_0\tau + \frac{v_0^2}{2b} \le L, \qquad L = 20\,\mathrm{m}.$$

Para resolver la desigualdad con números, definimos $u = v_0/(1\,\mathrm{m/s})$, el valor numérico de la rapidez expresada en metros por segundo. Al introducir $\tau = 0{,}5\,\mathrm{s}$ y $b = 2\,\mathrm{m/s^2}$, y dividir la desigualdad por un metro, queda

$$0{,}5u + \frac{u^2}{4} \le 20, \qquad (u-8)(u+10) \le 0.$$

La desigualdad admite $-10 \le u \le 8$; la condición de rapidez inicial $u > 0$ selecciona $0 < u \le 8$. Para detenerse estrictamente antes del extremo se requiere $0 < v_0 < 8\,\mathrm{m/s}$. Un resultado algebraico adquiere su significado al volver a las condiciones físicas que introdujimos.

3. Lo que miden dos sensores

La velocidad media es la separación dividida por el tiempo de tránsito. Ambos son positivos, de modo que la mayor razón usa la mayor separación y el menor tiempo, mientras que la menor razón usa las elecciones opuestas. Por tanto,

$$\overline{v} \in \left[\frac{0{,}395}{0{,}051}, \frac{0{,}405}{0{,}049}\right]\ \mathrm{m/s} \subset [7{,}74, 8{,}27]\,\mathrm{m/s},$$

con la última envolvente redondeada hacia fuera. No se requiere independencia estadística para obtener esta cota.

Una separación y un tiempo de tránsito no determinan la velocidad final. Para comprobarlo incluso con valores exactos dentro de las cotas, tomemos $\ell = 0{,}4\,\mathrm{m}$ y $T = 0{,}05\,\mathrm{s}$. Durante ese intervalo, las historias

$$v_1(t) = 8\,\mathrm{m/s}, \qquad v_2(t) = 8\,\mathrm{m/s} + c\left(\frac{2t}{T} - 1\right), \quad c = 1\,\mathrm{m/s},$$

son siempre positivas y tienen la misma integral, porque el término añadido en la segunda tiene promedio cero. Ambas recorren $0{,}4\,\mathrm{m}$ en $0{,}05\,\mathrm{s}$, pero llegan al segundo sensor a 8 y $9\,\mathrm{m/s}$, respectivamente. La diferencia no procede de las cotas: persiste aunque conociéramos exactamente el desplazamiento y la duración.

4. Dos fórmulas propuestas

El cociente v_0/b tiene dimensiones de tiempo, por lo que d_A no puede representar una distancia. La expresión d_B sí tiene dimensiones de longitud y supera ese primer control, pero las dimensiones no fijan su coeficiente numérico.

Con aceleración constante, la velocidad cae linealmente desde v_0 hasta cero durante $T = v_0/b$. Su integral es el área del triángulo correspondiente, $v_0T/2 = v_0^2/(2b)$. La expresión $d_B = v_0T$ cuenta el área del rectángulo de altura v_0: equivale a mantener la rapidez inicial durante todo el tiempo de frenado. Por eso duplica la distancia correcta del modelo.

5. Una conclusión sensible al retraso

La distancia exigida desde la orden es

$$D(v_0, b, \tau) = v_0\tau + \frac{v_0^2}{2b}.$$

Con $v_0, b > 0$ y $\tau \ge 0$, crece al aumentar v_0 o τ y disminuye al aumentar b. Para la primera dependencia basta comparar dos velocidades $w > u > 0$, manteniendo fijos b y τ:

la diferencia de distancias es $(w-u)[\tau+(w+u)/(2b)]>0$. Las otras dependencias se leen directamente en la fórmula. Los extremos sobre la familia rectangular admitida son

$$D_{\mín}=(7{,}9)(0{,}45)\,\mathrm{m}+\frac{7{,}9^2}{2(2{,}1)}\,\mathrm{m}\approx 18{,}41452\,\mathrm{m},$$

$$D_{\máx}=(8{,}1)(0{,}55)\,\mathrm{m}+\frac{8{,}1^2}{2(1{,}9)}\,\mathrm{m}\approx 21{,}72079\,\mathrm{m}.$$

La elección más favorable puede detenerse antes de incluso la menor longitud disponible, 19,9 m. La más desfavorable necesita más que la mayor longitud disponible, 20,1 m. Como el enunciado admite esas combinaciones, las cotas permiten ambos resultados: no garantizan la detención anterior ni obligan a alcanzar el extremo en todas las historias.

El cálculo con valores centrales da veinte metros, pero esa igualdad no resuelve lo que sucede en toda la familia. Un valor nominal situado en el umbral hace especialmente importante conservar las cotas. Para estimar una probabilidad de llegada al extremo necesitaríamos información adicional que no proporciona este problema.

6. El movimiento de un robot

La posición final depende del desplazamiento con signo, mientras que la distancia cuenta también el regreso. Por eso buscamos primero los ceros de v: son candidatos a separar avances y retrocesos. En este problema la ley sigue siendo válida después de llegar a velocidad cero; no corresponde copiar la hipótesis de reposo del freno del ejemplo central.

Al integrar la velocidad y usar la posición inicial resulta

$$x(t)=(6\,\mathrm{m/s})t-(1\,\mathrm{m/s^2})t^2,\qquad x(5\,\mathrm{s})=5\,\mathrm{m}.$$

La velocidad se anula a los tres segundos. Hasta entonces el robot avanza y llega a $x(3\,\mathrm{s})=9\,\mathrm{m}$; después la velocidad es negativa y regresa hasta los cinco metros. La distancia recorrida suma los tramos sin cancelar sus orientaciones:

$$s=9\,\mathrm{m}+(9\,\mathrm{m}-5\,\mathrm{m})=13\,\mathrm{m}.$$

El desplazamiento es de cinco metros y la distancia es de trece. Imponer reposo a partir de tres segundos contradiría la velocidad prescrita por el controlador. La hipótesis de reposo del ejemplo de frenado pertenecía a aquel dispositivo; aquí el dominio de la ley de velocidad incluye expresamente el retroceso.

7. Reconstruir el frenado desde posiciones

La aceleración constante implica $x(t)=v_0t+at^2/2$ con el origen elegido. Para resolver las dos condiciones con números, escribamos $u=v_0/(1\,\mathrm{m/s})$ y $\alpha=a/(1\,\mathrm{m/s^2})$. Los registros proporcionan

$$u+\frac{\alpha}{2}=6,\qquad 2u+2\alpha=8.$$

Restar el doble de la primera ecuación a la segunda da $\alpha=-4$; al sustituir en la primera obtenemos $u=8$. Así, $v_0=8\,\mathrm{m/s}$ y $a=-4\,\mathrm{m/s^2}$. La velocidad del modelo es positiva hasta los dos segundos y se anula allí por primera vez. El segundo registro coincide, por tanto, con la primera detención, a ocho metros del origen. Con reposo posterior, diez metros bastan y queda un margen de dos metros.

La conclusión utiliza la aceleración constante. Sin ella, dos posiciones posteriores al inicio no determinarían por sí solas la velocidad inicial, las velocidades intermedias ni el primer instante de detención.

8. Un frenado que se intensifica

Como $a = -kt$, el parámetro k tiene dimensiones de longitud dividida por tiempo al cubo. La aceleración ya no es constante, así que reconstruimos la velocidad integrando la nueva ley en vez de utilizar la fórmula anterior de distancia:

$$v(t) = v_0 - \frac{k}{2}t^2.$$

La primera raíz positiva es $T = \sqrt{2v_0/k}$. Antes de ella, la velocidad es positiva, de modo que la integral de v da tanto desplazamiento como distancia:

$$d = v_0 T - \frac{kT^3}{6} = \frac{2}{3}v_0 T = \frac{2}{3}v_0\sqrt{\frac{2v_0}{k}}.$$

Usamos $kT^2 = 2v_0$ para simplificar el segundo término. La raíz tiene unidades de tiempo y, al multiplicarla por v_0, recuperamos una longitud. Para los valores propuestos, $T = 4\,\mathrm{s}$ y $d = 64/3\,\mathrm{m}$, aproximadamente 21,33 m. Veinte metros no bastan: el carro alcanzaría el extremo antes de detenerse y el movimiento posterior necesitaría otra descripción.

Con k fijo, la distancia es proporcional a $v_0^{3/2}$. Duplicar la rapidez inicial multiplica la distancia por $2^{3/2} = 2\sqrt{2}$, no por cuatro. La ley cuadrática del primer ejemplo dependía de mantener constante la aceleración; al cambiar esa hipótesis cambia también la relación entre rapidez y distancia.

9. Volver al punto de partida

Durante el primer tramo el desplazamiento es $6\,\mathrm{m}$, por lo que el punto llega a $x = 7\,\mathrm{m}$. En el segundo se desplaza $-6\,\mathrm{m}$ y regresa a $x = 1\,\mathrm{m}$. El desplazamiento total es cero y la distancia recorrida es $6 + 6 = 12\,\mathrm{m}$. El tiempo total es cinco segundos, de modo que la velocidad media es cero y la rapidez media es $12/5 = 2{,}4\,\mathrm{m/s}$.

La velocidad media conserva el desplazamiento neto por unidad de tiempo. En este ejemplo tiene el mismo valor que en un reposo de cinco segundos, aunque las historias sean distintas. Los cambios instantáneos de velocidad tampoco admiten una aceleración clásica finita en sus fronteras; la cuenta de desplazamientos y distancias sigue siendo válida para el modelo continuo de posición por tramos.

10. Dos maneras de dividir un trayecto

La definición de rapidez media pide dividir la distancia total por el tiempo total. El enunciado reparte distancias, de modo que todavía hay que calcular cuánto dura cada mitad. Tomar de entrada $(4 + 12)/2$ equivaldría a atribuir el mismo tiempo a los dos movimientos, precisamente la condición que sólo se cumple en la segunda parte.

Llamemos $D > 0$ a la distancia total. Los tiempos son $(D/2)/(4\,\mathrm{m/s})$ y $(D/2)/(12\,\mathrm{m/s})$; el primer tramo ocupa tres veces el tiempo del segundo. Al dividir distancia total por tiempo total,

$$\overline{s} = \frac{2}{1/(4\,\mathrm{m/s}) + 1/(12\,\mathrm{m/s})} = 6\,\mathrm{m/s}.$$

Se trata de la media armónica de las rapideces para distancias iguales. Para duraciones iguales, la distancia total es $4\,\mathrm{m/s}$ por la mitad del tiempo más $12\,\mathrm{m/s}$ por la otra mitad; al dividir por el tiempo resulta $8\,\mathrm{m/s}$. La media aritmética sirve en ese segundo reparto porque sus pesos son tiempos iguales. En el primero, el vehículo permanece más tiempo a la rapidez menor y el promedio queda más cerca de ella.

11. Una diferencia simétrica

Derivar da $v(t) = (3\theta^2 - 2)\,\mathrm{m/s}$, por lo que $v(2\,\mathrm{s}) = 10\,\mathrm{m/s}$. Introduzcamos el número adimensional $\eta = h/(1\,\mathrm{s})$. Las dos posiciones divididas por un metro son $4 + 10\eta + 6\eta^2 + \eta^3$ y $4 - 10\eta + 6\eta^2 - \eta^3$. Al restarlas, el término constante y el término cuadrático se cancelan:

$$x(2\,\mathrm{s}+h)-x(2\,\mathrm{s}-h)=(20\eta+2\eta^3)\,\mathrm{m}.$$

Como $h=\eta(1\,\mathrm{s})$, dividir por $2h$ produce

$$V_h=(10+\eta^2)\,\mathrm{m/s}.$$

El error es η^2 m/s y disminuye cuadráticamente con h en este modelo sin error de medida. Por ejemplo, $h=0{,}2\,\mathrm{s}$ da 10,04 m/s. Para $x=c+bt+dt^2$, la diferencia simétrica es $2h(b+2dt)$: al dividir por $2h$ queda $x'(t)$ exactamente. Esta cancelación depende de que la misma ley cuadrática sea válida a ambos lados; no autoriza atravesar un cambio de régimen con esa conclusión.

12. Acercar los registros tiene un costo

Separaremos el error de aproximar una velocidad instantánea por una media y el error de utilizar lecturas en lugar de posiciones exactas. Si $\widetilde{x}(u)=x(u)+e_u$, con $|e_u|\le\varepsilon$, la diferencia entre el cociente medido y el cociente exacto es $(e_{t+h}-e_t)/h$. Esto permite controlar el aparato sin confundirlo con el cambio real de velocidad durante el intervalo.

La diferencia exacta de posiciones dividida por h es la media de la velocidad entre los registros. Para $0<s\le h$, el teorema del valor medio aplicado a v en $[t,t+s]$ da $v(t+s)-v(t)=a(\xi_s)s$ para algún ξ_s interior. La cota de aceleración implica $|v(t+s)-v(t)|\le As$; en $s=0$ la desigualdad también se cumple. Integrar esta cota y dividir por h muestra que la diferencia entre la media exacta y $v(t)$ no supera $Ah/2$. Por otra parte, la resta de dos lecturas añade un error de módulo no mayor que 2ε; dividido por h produce el segundo término. La desigualdad triangular reúne ambos efectos.

La función $B(h)=Ah/2+2\varepsilon/h$ crece en su primer término y decrece en el segundo. Su derivada se anula cuando $A/2=2\varepsilon/h^2$, es decir,

$$h_*=2\sqrt{\varepsilon/A}=\sqrt{0{,}02}\,\mathrm{s}\approx 0{,}1414\,\mathrm{s}.$$

La derivada es negativa antes de ese punto y positiva después; allí está el mínimo, $B(h_*)=2\sqrt{A\varepsilon}\approx 0{,}2828$ m/s. Con $h=0{,}10\,\mathrm{s}$ la cota es 0,30 m/s. El mínimo calculado corresponde a la cota que estamos utilizando. La historia $x(t+s)=x(t)+v(t)s+As^2/2$, con error de lectura $-\varepsilon$ al comienzo y $+\varepsilon$ al final, alcanza esa cota: la diferencia finita excede $v(t)$ en $Ah/2+2\varepsilon/h$. Por tanto, para cada h admisible el límite superior contempla un caso realizable dentro de las hipótesis. Los errores de una experiencia concreta pueden ser menores y favorecer otra separación temporal. Al reducir h indefinidamente con $\varepsilon>0$, la contribución instrumental de la cota crece sin límite; esa información impide certificar la mejora que tendría la diferencia finita con posiciones exactas.

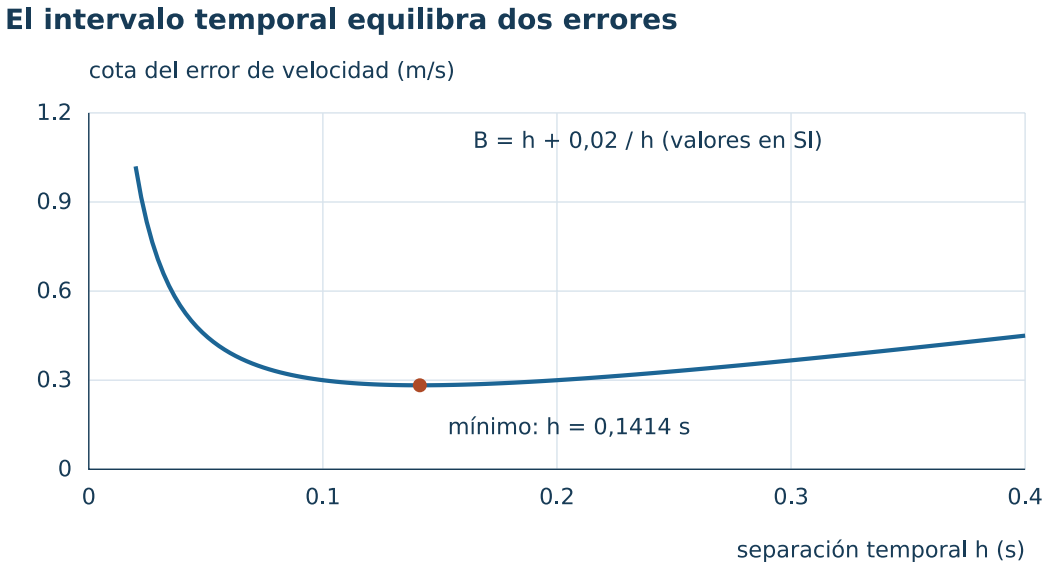


Figura 1.5. En el modelo de cotas del ejercicio, reducir la separación temporal disminuye el error de aproximación y amplifica el de lectura. La curva muestra la suma, no un error observado.

13. La rapidez límite con retraso

El desplazamiento total es $v_0\tau + v_0^2/(2b)$. La igualdad con la longitud disponible proporciona la frontera; para conservar las unidades podemos resolver primero en general:

$$v_{\mathrm{crit}} = -b\tau + \sqrt{b^2\tau^2 + 2bL}.$$

La otra raíz es negativa y no corresponde a la rapidez inicial considerada. En los datos del problema, $b\tau = 1{,}5\,\mathrm{m/s}$ y la raíz cuadrada vale $13{,}5\,\mathrm{m/s}$, de modo que $v_{\mathrm{crit}} = 12\,\mathrm{m/s}$. Como la distancia de detención crece estrictamente con $v_0 > 0$, las rapideces buscadas son $0 < v_0 < 12\,\mathrm{m/s}$.

En la frontera se recorren seis metros durante el retraso y veinticuatro durante el frenado; la detención ocurre justo en el extremo. La palabra «antes» excluye ese caso. Una regla que usara únicamente $v_0^2/(2b)$ omitiría el primer tramo y admitiría rapideces demasiado altas para las condiciones del problema.

La monotonía permite decidir qué lado de la frontera satisface la pregunta. En efecto, para $D(u) = u\tau + u^2/(2b)$ se tiene $D'(u) = \tau + u/b > 0$ cuando $u > 0$. Por eso una sola raíz positiva separa todas las rapideces que caben de las que exigen más riel. Sustituir una rapidez de prueba comprueba un caso; este argumento justifica el intervalo completo.

14. Frenar sin alcanzar el reposo

Al integrar desde cero,

$$x(t) = 12\,(1 - \exp[-t/(2\,\mathrm{s})])\ \mathrm{m}.$$

Su derivada recupera la velocidad y $x(0) = 0$. La exponencial es positiva en todo tiempo finito, de modo que no existe un instante con $v = 0$. En cambio, $x(t) \to 12\,\mathrm{m}$ cuando $t \to \infty$: puede haber una distancia total finita sin una detención exacta en tiempo finito.

El umbral se alcanza cuando $\exp[-t/(2\,\mathrm{s})] = 1/600$, por lo que $t = 2\ln(600)\,\mathrm{s} \approx 12{,}794\,\mathrm{s}$. Allí $x = 12(1 - 1/600) = 11{,}98\,\mathrm{m}$. Declarar «detenido» al bajar de esa rapidez es un criterio operativo adicional. La aceleración del modelo es $-3\exp[-t/(2\,\mathrm{s})]\,\mathrm{m/s^2}$; su magnitud decrece, a diferencia de la aceleración constante del ejemplo central.

15. Aceleración negativa y rapidez creciente

Derivar produce $v = 3(\theta-1)(\theta-3)\,\mathrm{m/s}$ y $a = 6(\theta-2)\,\mathrm{m/s^2}$. Los puntos de cambio relevantes son uno, dos y tres segundos. Entre cero y uno, $v>0, a<0$ y la rapidez disminuye; entre uno y dos, $v<0, a<0$ y aumenta. Entre dos y tres disminuye porque $v<0, a>0$; entre tres y cuatro aumenta porque ambos son positivos. En los extremos examinamos valores laterales; no extendemos la fórmula de derivación de $|v|$ a los ceros de v sin ese examen.

Las posiciones en cero, uno, tres y cuatro segundos son $0, 4, 0, 4\,\mathrm{m}$. Los puntos de retorno son uno y tres segundos; dos segundos sólo separa regímenes de rapidez. La distancia es $4+4+4=12\,\mathrm{m}$ y el desplazamiento, $4\,\mathrm{m}$. El intervalo de uno a dos segundos constituye el contraejemplo solicitado: acelerar hacia el sentido negativo aumenta la rapidez de un móvil que ya se mueve hacia ese lado.

16. La forma del frenado

Ambas velocidades son no negativas hasta T, por lo que la distancia es su integral. Con $u = t/T$, obtenemos

$$D_p = v_0 T \int_0^1 (1-u)^p\,du = \frac{v_0 T}{p+1}.$$

Así, $D_1 = v_0T/2$ y $D_2 = v_0T/3$. Sus aceleraciones iniciales son $-v_0/T$ y $-2v_0/T$. Tener la misma rapidez inicial y el mismo instante de reposo deja abierta la forma de la velocidad entre ambos; esa forma modifica el área y, por tanto, la distancia.

Para $p=1$, la aceleración lateral antes de T es $-v_0/T$ y después es cero: hay un salto. Para $p=2$, la aceleración es $-2v_0(1-t/T)/T$ y tiende a cero en T, coincidiendo con el reposo posterior. La posición y la velocidad se empalman continuamente en ambos; la aceleración sólo lo hace en el segundo. Suponer una forma suave exige información distinta de los dos datos extremos.

17. Una ecuación que pierde el sentido de marcha

Sustituimos $v = v_0 + a(t-t_0)$ y $x - x_0 = v_0(t-t_0) + a(t-t_0)^2/2$. Expandir el cuadrado del primero y restar v_0^2 da $2a(x-x_0)$, incluso cuando a o v se anulan. No hubo ninguna división por esas cantidades.

Con los valores dados, $v^2 = 16 - 4x$ en unidades coherentes. En $x = 3\,\mathrm{m}$, el módulo de la velocidad es dos metros por segundo, pero la identidad cuadrática no decide el signo. Resolver $4\theta - \theta^2 = 3$ da $\theta = 1$ y $\theta = 3$; al recuperar la velocidad resultan $+2$ y $-2\,\mathrm{m/s}$. La primera detención ocurre en dos segundos. Sólo la primera visita pertenece al frenado; la segunda pertenece a la prolongación que hace volver al móvil. Si después de detenerse permanece en reposo, esa segunda visita no existe.

18. Lo que falta cuando sólo conocemos una velocidad media

La media especificada equivale a $x(4\,\mathrm{s}) = 20\,\mathrm{m}$. Para aceleración constante, $\overline{v} = v_0 + a(4\,\mathrm{s})/2$, de modo que todas las parejas con $v_0 + (2\,\mathrm{s})a = 5\,\mathrm{m/s}$ satisfacen el dato. Una sola ecuación no fija los dos parámetros; por ejemplo, el movimiento uniforme con $v_0 = 5\,\mathrm{m/s}$ y otro con $v_0 = 3\,\mathrm{m/s}$, $a = 1\,\mathrm{m/s^2}$ son compatibles.

El registro intermedio añade $v_0 + (1\,\mathrm{s})a = 4\,\mathrm{m/s}$ al dividir su ecuación de posición por dos segundos. Restar las relaciones da $a = 1\,\mathrm{m/s^2}$ y luego $v_0 = 3\,\mathrm{m/s}$. Por tanto,

$$x(t) = (3\,\mathrm{m/s})t + \tfrac{1}{2}(1\,\mathrm{m/s^2})t^2.$$

La eliminación determinó ambos parámetros de manera única. La comprobación entrega ocho metros en dos segundos y veinte en cuatro, cuya media sobre cuatro segundos es cinco metros por segundo. Otras funciones de posición podrían reproducir esos registros si se retirara la hipótesis de aceleración constante.

19. Aceleración media nula durante un movimiento variable

Las velocidades inicial y final valen ambas $3\,\mathrm{m/s}$, por lo que $\overline{a} = 0$. Al derivar, $a(t) = 2(\theta - 1)\,\mathrm{m/s^2}$: es negativa antes de un segundo, nula en ese instante y positiva después. La rapidez disminuye de tres a dos metros por segundo y vuelve a aumentar a tres. La velocidad se mantiene positiva durante todo el intervalo.

Integrar conservando la condición inicial produce

$$x(t) = \left(3\theta - \theta^2 + \frac{\theta^3}{3}\right)\ \mathrm{m}.$$

En dos segundos resulta $x = 14/3\,\mathrm{m}$, así que la velocidad media es $7/3\,\mathrm{m/s}$. Igualarla a $2 + (\theta - 1)^2$ da $(\theta - 1)^2 = 1/3$, con dos instantes interiores $t = (1 \pm 1/\sqrt{3})\,\mathrm{s}$. Ambos satisfacen la ecuación y el dominio. El teorema del valor medio asegura al menos uno, sin afirmar que sea único. La aceleración media cero registra una compensación de cambios de velocidad; las aceleraciones negativas y positivas no han desaparecido del movimiento.

Lecturas de apoyo

Las unidades, la calibración, las cotas y la diferencia entre dispersión y sesgo se desarrollan en el capítulo 0, «El problema de medir». Aquí se aplican al registro de posiciones y al uso de velocidades en el modelo de frenado.

Se utilizan derivadas de polinomios, primitivas, integrales definidas y resolución de una desigualdad cuadrática. La interpretación de la derivada y la velocidad media puede recuperarse en *Elementos del cálculo*, capítulo 1, §§1.2–1.4; el cálculo por primitivas y las constantes de integración, en el capítulo 6, §§6.6–6.7. Ambos desarrollos son matemáticos: en el presente capítulo se ha explicado cómo sus variables, unidades y dominios se relacionan con una descripción física.

Para ampliar la práctica se consultaron Bueche y Hecht, *Física general*, 10.ª ed. (Schaum), capítulo 1; Cristian Quinzacara, *Problemas resueltos de mecánica* (2021), §§1.1–1.2 y 2.1–2.2; Atilio del C. Fabián, *Problemas resueltos de Física I*, temas 1–2; y Rodrigo Sabaj Saavedra, *Problemas resueltos para el curso FI1001 Introducción a la física newtoniana* (2013), unidades de análisis dimensional y cinemática. Las situaciones, datos y soluciones añadidos aquí se desarrollan para este libro a partir de familias habituales de problemas, con atención al análisis de hipótesis y a la comprobación física.

El cotejo de teoría y práctica incluye también Young y Freedman, *Sears y Zemansky. Física universitaria*, vol. 1, 13.ª ed. (Pearson, 2013), §§1.3–1.6 y 2.1–2.6, con consulta complementaria de la 12.ª ed.; Serway y Jewett, *Física para ciencias e ingeniería*, vol. 1, 10.ª ed. en español (Cengage, 2019), §§1.2–1.6 y 2.1–2.9; y Serway y Vuille, *Fundamentos de física*, vol. 1, 9.ª ed., §§1.3–1.6 y capítulo 2. Las precisiones metrológicas conservan el criterio del VIM citado en el capítulo 0.

Capítulo 2

Reconstruir movimientos en una recta

Un carro pasa frente al origen de una escala y avanza a dos metros por segundo. Otro carro está seis metros detrás, inicialmente detenido. Dos segundos después comienza a acelerar; durante tres segundos su velocidad aumenta dos metros por segundo en cada segundo, y luego permanece constante. Queremos saber cuándo estarán a la misma altura.

Los carros circulan por guías paralelas y sus posiciones se comparan sobre un mismo eje. Coincidir en posición significará pasar a la misma altura, sin una colisión que cambie sus movimientos. Los datos de este ejemplo se tratarán como exactos dentro del modelo. En una experiencia habría que obtenerlos mediante procedimientos de medida y justificar su incertidumbre.

La dificultad está en que el segundo carro cambia de régimen. Una ecuación obtenida mientras acelera puede tener una raíz positiva que corresponda a un instante en que ya dejó de acelerar. Para decidir cuándo se encuentran tendremos que reconstruir la historia antes de resolver la igualdad de posiciones.

Un reloj común para dos movimientos

Llamemos A al primer carro y B al segundo. Tomamos como origen temporal el paso de A por el origen espacial. El sentido positivo coincide con su avance. Hasta los ocho segundos, A mantiene la velocidad indicada, de modo que

$$x_A(t) = (2\,\mathrm{m/s})t, \qquad 0 \le t \le 8\,\mathrm{s}.$$

B permanece en $x_B = -6\,\mathrm{m}$ hasta $t = 2\,\mathrm{s}$. Para describir su aceleración conviene utilizar el tiempo transcurrido desde que comenzó a moverse,

$$\tau = t - 2\,\mathrm{s}.$$

El nuevo reloj marca cero cuando arranca B. Durante los tres segundos siguientes, $0 \le \tau \le 3\,\mathrm{s}$, su aceleración es $2\,\mathrm{m/s^2}$ y su velocidad inicial es cero. Por integración,

$$v_B(t) = (2\,\mathrm{m/s^2})\tau, \qquad x_B(t) = -6\,\mathrm{m} + (1\,\mathrm{m/s^2})\tau^2.$$

Al sustituir $t = 2\,\mathrm{s}$ recuperamos tanto la posición de espera como la velocidad nula. Usar t donde corresponde τ habría atribuido a B dos segundos de aceleración que no ocurrieron. Cambiar el origen temporal exige cambiar las condiciones que acompañan a la fórmula.

Continuar una historia sin volver a empezar

A los cinco segundos termina la aceleración de B. Su velocidad y su posición en ese instante son

$$v_B(5\,\mathrm{s}) = 6\,\mathrm{m/s}, \qquad x_B(5\,\mathrm{s}) = -6\,\mathrm{m} + 9\,\mathrm{m} = 3\,\mathrm{m}.$$

En adelante conserva esa velocidad. La posición adquirida no desaparece al cambiar de régimen: el desplazamiento posterior debe añadirse a los tres metros que ya alcanzó. Así,

$$x_B(t) = 3\,\mathrm{m} + (6\,\mathrm{m/s})(t - 5\,\mathrm{s}), \qquad t \geq 5\,\mathrm{s}.$$

Completemos también la historia de A. A partir de ocho segundos frena con aceleración $-1\,\mathrm{m/s^2}$ hasta su primera detención, y suponemos que después permanece detenido. Escribiendo $u = t - 8\,\mathrm{s}$ durante el frenado, obtenemos

$$v_A(t) = 2\,\mathrm{m/s} - (1\,\mathrm{m/s^2})u, \qquad x_A(t) = 16\,\mathrm{m} + (2\,\mathrm{m/s})u - \frac{1}{2}(1\,\mathrm{m/s^2})u^2.$$

La detención ocurre cuando $u = 2\,\mathrm{s}$, es decir, en $t = 10\,\mathrm{s}$, y A queda en $x_A = 18\,\mathrm{m}$. Estas expresiones completan el modelo para todos los tiempos no negativos si mantenemos la marcha uniforme de B.

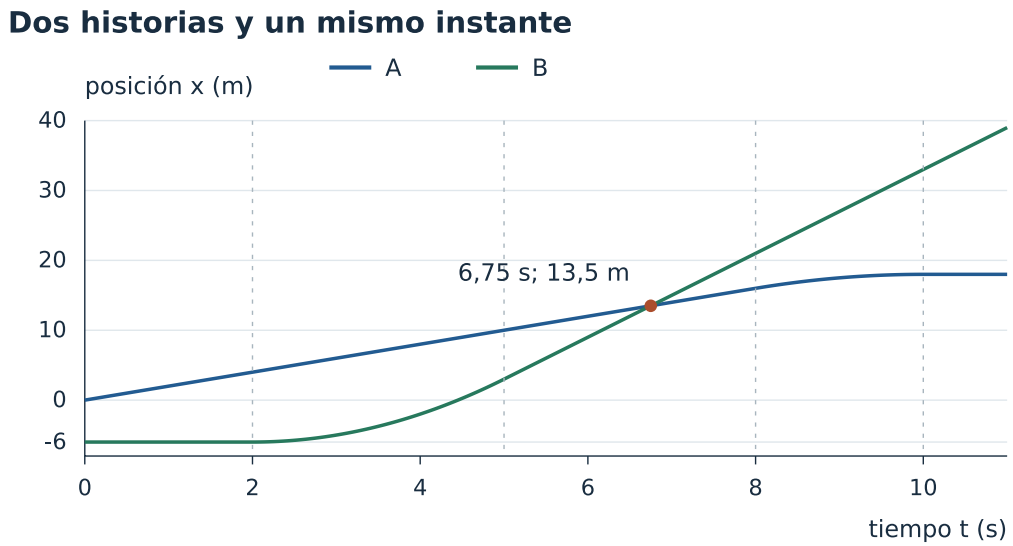


Figura 2.1. Las curvas representan dos historias completas. Su intersección compara posiciones en un mismo instante; visitar una misma posición en tiempos distintos no produce una intersección.

Cada expresión debe conservar el estado final del tramo anterior. En este modelo la posición y la velocidad son continuas en los cambios de régimen; la aceleración puede cambiar bruscamente. No se presupone una aceleración clásica definida exactamente en esos instantes. Son idealizaciones de transiciones cuya duración estamos despreciando.

La continuidad de la velocidad tampoco debe imponerse indiscriminadamente a cualquier modelo por tramos. Una ley idealizada que prescriba un cambio instantáneo de velocidad tendrá otra regularidad y requerirá reconocer esa aproximación. Aquí la continuidad se verifica a partir de las leyes que hemos elegido.

Qué reconstruye el área de una gráfica

Podemos verificar la posición de B sin volver a integrar una expresión. Entre dos y cinco segundos, su gráfica de velocidad forma un triángulo de base $3\,\mathrm{s}$ y altura $6\,\mathrm{m/s}$. El área es

$$\frac{1}{2}(3\,\mathrm{s})(6\,\mathrm{m/s}) = 9\,\mathrm{m}.$$

Esos nueve metros son un desplazamiento. Para obtener la posición sumamos la posición inicial de $-6\,\mathrm{m}$; el resultado es $3\,\mathrm{m}$. Confundir el área con la posición habría desplazado toda la historia seis metros.

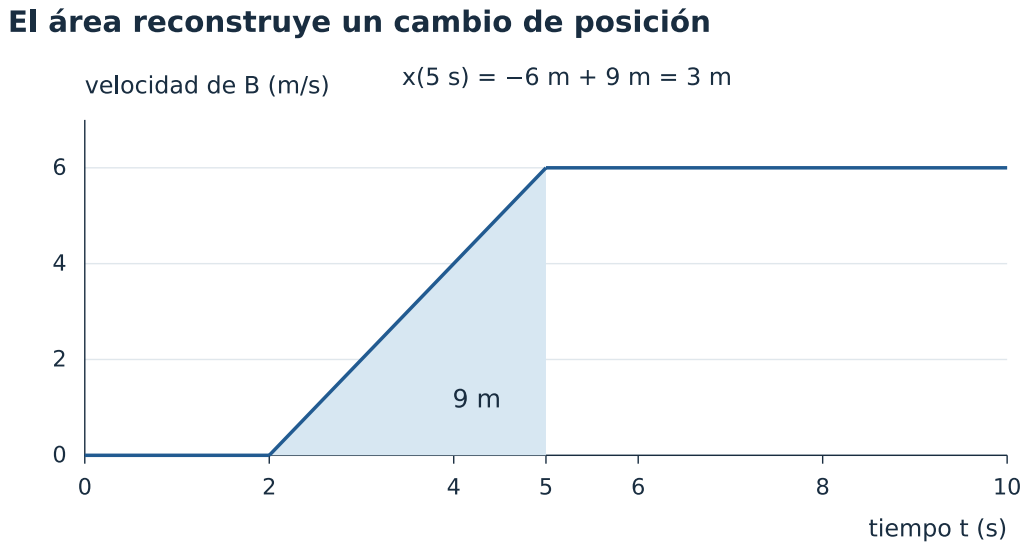


Figura 2.2. El área bajo la velocidad proporciona el cambio de posición. Una condición inicial permite situar ese cambio sobre el eje espacial.

Para una posición continua y continuamente derivable por tramos, la relación que reconstruye su evolución es

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(s)\,ds.$$

La relación análoga para una aceleración prescrita es $v(t) - v(t_0) = \int_{t_0}^{t} a(s)\,ds$. El área con signo bajo una gráfica de aceleración da un cambio de velocidad; sus unidades son $(\mathrm{m/s^2})\mathrm{s} = \mathrm{m/s}$. Una velocidad inicial conocida fija el nivel de la curva $v(t)$, y la posición inicial permite después reconstruir $x(t)$. El ejercicio 19 desarrolla las dos integraciones para una aceleración triangular y compara las tres gráficas.

Si conocemos solamente la aceleración, necesitamos además la velocidad en algún instante para reconstruir v, y una posición para reconstruir x. Dos cuerpos pueden tener la misma aceleración y distintas velocidades; también pueden tener la misma velocidad y posiciones separadas por una constante. Las condiciones iniciales contienen información física que las derivadas han eliminado.

Buscar un encuentro en el tramo que le corresponde

Los cambios de ambos carros deben colocarse en el mismo reloj. El comienzo y el final de la aceleración de B ocurren en dos y cinco segundos; el frenado y la detención de A, en ocho y diez. La partición común indica qué pareja de fórmulas puede compararse en cada tramo.

Intervalo temporal	Régimen de A	Régimen de B
$0 \le t \le 2\,\mathrm{s}$	Velocidad constante	Reposo
$2 \le t/(1\,\mathrm{s}) \le 5$	Velocidad constante	Aceleración constante
$5 \le t/(1\,\mathrm{s}) \le 8$	Velocidad constante	Velocidad constante
$8 \le t/(1\,\mathrm{s}) \le 10$	Frenado	Velocidad constante
$t \ge 10\,\mathrm{s}$	Reposo	Velocidad constante

Las fronteras repetidas no duplican un evento: las posiciones coinciden a ambos lados de cada unión. Esta tabla organiza las ecuaciones; todavía hay que resolverlas y revisar sus raíces.

Durante la espera de B, A avanza desde el origen y B permanece seis metros detrás. No se encuentran en ese intervalo. Entre dos y cinco segundos debemos resolver

$$-6\,\mathrm{m} + (1\,\mathrm{m/s^2})(t - 2\,\mathrm{s})^2 = (2\,\mathrm{m/s})t.$$

Para hacer la cuenta con números introduzcamos $\theta = t/(1\,\mathrm{s})$. Dividiendo la igualdad por un metro obtenemos

$$-6 + (\theta - 2)^2 = 2\theta, \qquad \theta^2 - 6\theta - 2 = 0.$$

Sus raíces son $\theta = 3 \pm \sqrt{11}$. La positiva corresponde aproximadamente a 6,317 s, fuera del intervalo de dos a cinco segundos. La negativa también queda fuera. Ninguna es un encuentro de los carros durante la aceleración de B.

Rechazar solo las raíces negativas habría dejado una respuesta falsa. La raíz positiva resuelve correctamente una prolongación matemática de la parábola, pero a esa hora B ya se mueve con velocidad constante. Tenemos que emplear su otra expresión:

$$3\,\mathrm{m} + (6\,\mathrm{m/s})(t - 5\,\mathrm{s}) = (2\,\mathrm{m/s})t.$$

La igualdad numérica es $6\theta - 27 = 2\theta$. Por tanto,

$$t = \frac{27}{4}\,\mathrm{s} = 6{,}75\,\mathrm{s}, \qquad x_A(t) = x_B(t) = 13{,}5\,\mathrm{m}.$$

El instante pertenece al dominio de ambas expresiones: es posterior al cambio de régimen de B y anterior al frenado de A. Sustituirlo en las dos posiciones comprueba además que la igualdad no procede de un error algebraico.

B visita $x = 18\,\mathrm{m}$ a los 7,5 s, mientras que A llega a esa posición a los diez segundos. La coincidencia de lugares, sin coincidencia de tiempos, responde una pregunta distinta de la del encuentro.

La separación como una nueva incógnita

En vez de seguir dos posiciones por separado podemos estudiar su diferencia,

$$g(t) = x_B(t) - x_A(t).$$

Un valor negativo significa que B está detrás; un valor positivo, que está delante. Un encuentro satisface $g(t) = 0$. Su derivada, cuando existe, es la velocidad relativa $v_B - v_A$.

Entre cinco y ocho segundos esa velocidad relativa es $4\,\mathrm{m/s}$. Al comenzar el tramo, A está en diez metros y B en tres: faltan siete metros de separación. Cerrarlos requiere $7/4\,\mathrm{s}$, que añadimos a los cinco segundos del reloj común. Recuperamos 6,75 s mediante una cuenta que hace visible qué se está cerrando y desde cuándo.

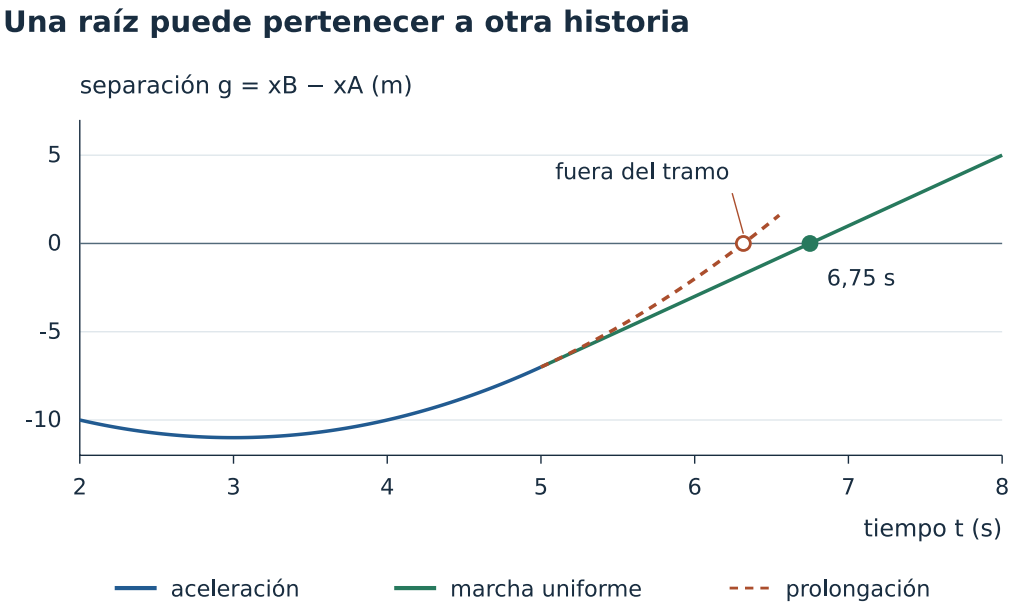


Figura 2.3. La curva discontinua permite localizar el error de dominio. La separación efectiva continúa por la recta y se anula en 6,75 s.

Después de ocho segundos, A frena y su velocidad disminuye desde dos metros por segundo hasta cero, mientras B conserva seis. La separación crece durante todo ese frenado y sigue creciendo cuando A queda detenido. No habrá un segundo encuentro. Esta conclusión se obtiene comparando velocidades, sin resolver otra cuadrática y revisar sus raíces.

Una vez elegida la diferencia, importa conservar su orientación. Si hubiéramos definido $h = x_A - x_B$, los signos de la separación y de la velocidad relativa serían los opuestos; los ceros y los instantes de encuentro serían los mismos.

Resolver un problema por tramos

La raíz descartada del ejemplo central permite formular con precisión qué significa resolver una ley por tramos. Sean $I_1, \dots, I_k$ los intervalos en que utilizamos fórmulas distintas. Para buscar un evento dentro del intervalo total debemos resolver la ecuación de cada tramo y conservar únicamente sus soluciones pertenecientes a ese tramo. El conjunto de soluciones es la unión de esos conjuntos restringidos. Una raíz de una prolongación algebraica queda fuera de la respuesta cuando no pertenece al dominio físico de su fórmula.

Definición (empalme de historias). Dos leyes de posición definidas a ambos lados de un instante t_c se empalman continuamente si sus valores laterales coinciden allí y se asigna ese valor común a $x(t_c)$. El empalme es de clase C^1 si además las velocidades laterales coinciden y las derivadas son continuas hasta ese instante desde cada lado.

La primera condición conserva la posición del móvil. La segunda evita un cambio instantáneo de velocidad. Si las aceleraciones laterales difieren, el empalme puede ser C^1 sin ser C^2. Las fórmulas por tramos deben indicar qué ocurre en las fronteras; incluir el mismo extremo en ambos tramos es inocuo cuando ambas expresiones dan allí el mismo valor.

Proposición (reconstrucción de un tramo uniforme o uniformemente acelerado). Dos posiciones en instantes distintos determinan una única ley afín $x(t) = c + vt$. Tres posiciones en instantes distintos determinan una única ley polinómica de grado a lo sumo dos. Estas afirmaciones son internas a las familias indicadas.

Demostración. En el primer caso, restar las dos ecuaciones determina la pendiente porque la diferencia temporal no es cero; después cualquiera fija c. En el segundo, existe un polinomio interpolador: para los registros (t_i, x_i), con $i = 0, 1, 2$, podemos construirlo como

$$x(t) = \sum_{i=0}^{2} x_i \prod_{\substack{0 \le j \le 2 \\ j \neq i}} \frac{t - t_j}{t_i - t_j}.$$

Los denominadores no se anulan. En $t = t_i$, el factor del índice i vale uno y los otros sumandos se anulan, por lo que se reproducen los tres registros. Si dos polinomios de grado a lo sumo dos los reprodujeran, su diferencia tendría tres raíces distintas; un polinomio no nulo de ese grado no puede tenerlas. La diferencia es, por tanto, idénticamente cero.

Cada producto temporal de la fórmula es adimensional y cada sumando tiene unidades de posición. En los cálculos concretos suele resultar más sencillo resolver las ecuaciones para x_0, v_0, a, como en el ejercicio 3. La fórmula permite ver la existencia para cualquier terna de instantes distintos. Si falta la hipótesis de familia, el ejercicio 4 construye infinitas historias con los mismos registros.

Existencia, unicidad y cruce de un encuentro

Definición (encuentro y cambio de orden). Para dos movimientos sobre un mismo eje y con un reloj común, un encuentro es un instante del dominio común en que $x_A(t) = x_B(t)$. Hay cambio de orden en un encuentro aislado interior t_* si la diferencia $g = x_B - x_A$ tiene signos opuestos inmediatamente antes y después de t_*. La definición exige comparar los signos laterales: una igualdad aislada no los determina.

Proposición (existencia y unicidad por separación). Si g es continua en $[a, b]$ y $g(a)g(b) < 0$, existe un encuentro interior. Si además g es estrictamente monótona en todo $[a, b]$, ese encuentro es único. Una condición suficiente para esa monotonía es que g sea continua en $[a, b]$, derivable en su interior y que g' tenga allí un signo estricto constante.

Demostración. El teorema del valor intermedio aplicado a g proporciona un cero entre valores de signos opuestos. Dos ceros distintos contradirían la monotonía estricta, pues ésta obliga a que sus valores sean distintos. Por último, el teorema del valor medio expresa cada incremento de g entre dos instantes como $g'(c)$ por el incremento temporal positivo; el signo de la derivada fija el del incremento.

La primera parte sólo da existencia y la segunda, unicidad. Una función continua puede anularse sin cambiar de signo; el ejemplo tangencial del capítulo tiene precisamente esa forma. También puede tener varios ceros entre extremos de signos distintos. Si la separación es estrictamente creciente y cambia de negativa a positiva, el móvil B pasa de detrás a delante. La comparación funciona en guías paralelas porque el encuentro no altera las leyes supuestas.

Qué cambia al trasladar el observador

Un origen distinto y un reloj trasladado reorganizan los números de la descripción. En cinemática clásica podemos además usar un observador que se mueve con velocidad constante U respecto del primero. Si sus coordenadas satisfacen $y = x - X_0 - Ut$ y $\tau = t - t_c$, entonces $dy/d\tau = v - U$ y $d^2y/d\tau^2 = a$. Se trata de describir las mismas trayectorias con otros ejes y relojes; aquí no estamos afirmando todavía una ley dinámica sobre fuerzas.

Conclusión (invariancia de los encuentros). Si la misma transformación se aplica a ambos móviles, $y_B - y_A = x_B - x_A$. Por ello los eventos de encuentro y los cambios de orden se conservan, con sus tiempos expresados mediante $\tau = t - t_c$. Las velocidades individuales cambian en $-U$, mientras la velocidad relativa $v_B - v_A$ permanece igual.

Esta identidad ofrece una comprobación y, en ciertos casos, simplifica el cálculo. Cuando ambos cuerpos tienen la misma aceleración prescrita, ésta se cancela en la segunda derivada

de la separación. Los movimientos individuales pueden ser parabólicos y el encuentro quedar gobernado por una ecuación afín, como muestra el ejercicio 9.

Un encuentro puede dejar intacto el orden

Una intersección no siempre representa un adelantamiento. Consideremos dos puntos móviles en guías paralelas, durante $0 \le t \le 3\,\mathrm{s}$, con posiciones

$$x_P(t) = (7\,\mathrm{m/s})t - (1\,\mathrm{m/s^2})t^2, \qquad x_Q(t) = 4\,\mathrm{m} + (3\,\mathrm{m/s})t.$$

Usando nuevamente $\theta = t/(1\,\mathrm{s})$, su diferencia es

$$x_P(t) - x_Q(t) = -(\theta - 2)^2\,\mathrm{m}.$$

Se anula en dos segundos y es negativa a ambos lados. P llega a la misma altura que Q, en $x = 10\,\mathrm{m}$, pero vuelve a quedar detrás. En ese instante las dos velocidades son $3\,\mathrm{m/s}$. La igualdad de velocidades explica la tangencia de las gráficas; el signo de la diferencia antes y después decide si hubo adelantamiento.

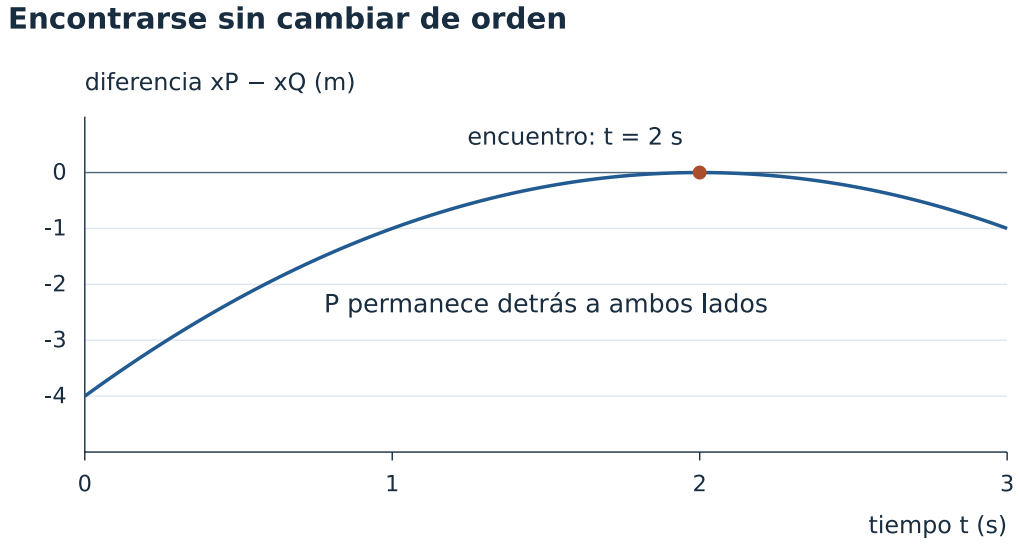


Figura 2.4. Un cero doble puede representar un encuentro sin cambio de orden. Buscar únicamente cambios de signo omitiría este evento.

La misma distinción importa al trabajar con datos o métodos numéricos: comprobar que una función no cambia de signo entre dos registros no demuestra que nunca se haya anulado. La información disponible debe permitir excluir también contactos tangenciales y cambios que hayan ocurrido entre las observaciones.

Cuánta historia contienen unos pocos registros

Una tabla de posiciones proporciona valores de una función, no su ley completa. Si suponemos velocidad constante, dos posiciones en instantes distintos permiten determinar esa recta. Si suponemos aceleración constante, tres posiciones en instantes distintos permiten determinar la parábola. Son conclusiones dentro de familias de modelos ya elegidas.

La proposición de reconstrucción demuestra esa unicidad dentro de la familia cuadrática. Su conclusión no obliga al movimiento real a ser parabólico: identificar una función en la familia elegida y justificar la elección de esa familia son tareas distintas.

Para contrastar la hipótesis necesitamos otros registros o información física que no se haya consumido al ajustarla. Tampoco una diferencia pequeña entre posiciones medidas proporciona automáticamente una velocidad instantánea: el cociente de incrementos es una media sobre un intervalo. Reducir ese intervalo exige examinar simultáneamente la resolución temporal y la incertidumbre de las posiciones.

En la reconstrucción del encuentro, los datos iniciales y las leyes por tramos permitieron decidir qué ecuaciones usar. En otro problema quizá conozcamos posiciones, duraciones o eventos y debamos recuperar parámetros. La pregunta útil es qué familia de historias sigue siendo compatible con esa información y qué observación permitiría distinguir sus miembros.

Ejercicios

Los ejercicios 2, 3, 5 y 10 permiten comenzar con la reconstrucción y sus dominios. El 1 recupera el cambio de origen una vez entendido el encuentro; 6, 7, 9, 11, 13 y 15 amplían el trabajo con separación, datos y empalmes. Los restantes requieren combinar esas ideas con familias de funciones, cotas funcionales o un procedimiento numérico. Para comprobar autonomía, el 15 puede intentarse sin consultar antes su solución: obliga a decidir en qué orden conviene usar una posición y una velocidad.

1. El mismo encuentro desde otro origen

En el encuentro de A y B del capítulo, introduce la coordenada $y = 20\,\mathrm{m} - x$ y el reloj $\tau = t - 2\,\mathrm{s}$. Expresa las posiciones de los dos carros en estas variables durante el tramo del encuentro. Calcula sus velocidades respecto de y y determina las nuevas coordenadas del evento. Explica qué cambió y qué hecho físico permanece.

2. Una raíz antes del cambio de fórmula

Dos carros circulan por guías paralelas. A parte de $x = 0$ en $t = 0$ con velocidad constante de $3\,\mathrm{m/s}$. B espera en $x = -12\,\mathrm{m}$ hasta $t = 2\,\mathrm{s}$; acelera desde el reposo a $2\,\mathrm{m/s^2}$ hasta $t = 6\,\mathrm{s}$ y después mantiene la velocidad alcanzada. Encuentra su primer encuentro para $t \geq 0$. Comprueba qué posiciones tendrían realmente a los ocho segundos y explica por qué una raíz de la fórmula acelerada no basta.

3. Reconstruir una parábola y recorrerla

Un móvil tiene aceleración constante durante $0 \leq t \leq 4\,\mathrm{s}$. Sus posiciones son $x(0) = 1\,\mathrm{m}$, $x(2\,\mathrm{s}) = 9\,\mathrm{m}$ y $x(4\,\mathrm{s}) = 9\,\mathrm{m}$. Determina la velocidad inicial y la aceleración; localiza el cambio de sentido y calcula desplazamiento y distancia recorrida. Explica qué papel desempeña la hipótesis de aceleración constante.

4. Tres datos y muchas historias

Una tabla registra las posiciones 0, 4 y 8 m en $t = 0$, 2 y 4 s. Con $\theta = t/(1\,\mathrm{s})$, considera la familia

$$x_\lambda(t) = \big[2\theta + \lambda\theta(\theta - 2)(\theta - 4)\big]\,\mathrm{m},$$

donde λ es adimensional. Comprueba que todos sus miembros reproducen la tabla. Compara los casos $\lambda = 0$ y $\lambda = 1/8$ en $t = 1\,\mathrm{s}$ y demuestra que ambos avanzan siempre durante el intervalo observado. ¿La tabla y la ausencia de retroceso bastan para determinar el movimiento?

5. Parar, esperar y volver

Un robot parte de $x = 1\,\mathrm{m}$. Durante los primeros tres segundos avanza a $2\,\mathrm{m/s}$; permanece detenido hasta los cinco segundos y luego regresa a $1\,\mathrm{m/s}$ hasta $t = 9\,\mathrm{s}$. Construye su posición por tramos, determina todos los instantes en que pasa por $x = 5\,\mathrm{m}$ y calcula la distancia total y el desplazamiento. El cambio de velocidad se idealiza como instantáneo; indica qué derivada de la posición deja de existir en esos cambios.

6. Un encuentro con datos acotados

B está delante de A y ambos avanzan uniformemente en el mismo sentido. En el instante inicial su separación pertenece a $[9{,}8, 10{,}2]\,\mathrm{m}$. Sus velocidades pertenecen a $v_A \in [2{,}9, 3{,}1]\,\mathrm{m/s}$ y $v_B \in [0{,}9, 1{,}1]\,\mathrm{m/s}$. Cualquier combinación dentro de esas bandas es admisible en este problema. Obtén una envolvente para el instante del encuentro. Decide si a los cinco segundos ya se habrá producido con seguridad y muestra dos historias admisibles que fundamenten la respuesta.

7. Encontrarse sin adelantarse

Durante $0 \le t \le 4\,\mathrm{s}$, dos puntos en guías paralelas tienen posiciones

$$x_P(t) = (8\,\mathrm{m/s})t - (1\,\mathrm{m/s^2})t^2, \qquad x_Q(t) = 9\,\mathrm{m} + (2\,\mathrm{m/s})t.$$

Determina los encuentros, las velocidades en ellos y si P llega a quedar delante de Q. Explica qué fallaría en un procedimiento que buscase encuentros exclusivamente mediante cambios de signo de la diferencia de posiciones.

8. Un arranque progresivo

A pasa por $x = 0$ en $t = 0$ y avanza a $2\,\mathrm{m/s}$. Otro carro B parte de $x = -6\,\mathrm{m}$ con la velocidad prescrita

$$v_B(t) = V(3u^2 - 2u^3), \qquad u = t/T, \qquad 0 \le t \le T,$$

con $V = 4\,\mathrm{m/s}$ y $T = 2\,\mathrm{s}$. Después conserva la velocidad V. Reconstruye su posición y calcula el primer encuentro. Comprueba la continuidad de la velocidad y de la aceleración en $t = T$, y compara la aceleración inicial con la del arranque del ejemplo central. Las guías permiten continuar ambos movimientos después del encuentro.

9. La misma aceleración en dos historias

Dos puntos en guías paralelas tienen $x_A(0) = 0$, $v_A(0) = 1\,\mathrm{m/s}$, $x_B(0) = 12\,\mathrm{m}$ y $v_B(0) = -3\,\mathrm{m/s}$. Ambos experimentan la misma aceleración prescrita $a(t)$, continua para $t \ge 0$. Determina cuándo se encuentran sin conocer a. Después calcula posición y velocidades del encuentro para $a(t) = 2\,\mathrm{m/s^2}$. Explica qué conclusiones sobreviven cuando a deja de ser constante.

10. Un móvil que tiene longitud

Un carro rígido de $30\,\mathrm{m}$ se desplaza a $5\,\mathrm{m/s}$ frente a una zona de control que ocupa $[0, 20]\,\mathrm{m}$. En $t = 0$, su frente está en $x = 0$ y su parte trasera en $x = -30\,\mathrm{m}$. Determina el intervalo temporal durante el que algún punto del carro coincide con algún punto de la zona. Calcula cuándo el frente sale y cuándo termina de salir todo el carro. Explica por qué seguir sólo el frente no responde las dos preguntas.

11. Dos encuentros y dos cambios de orden

Para $0 \le t \le 5\,\mathrm{s}$, dos puntos en guías paralelas tienen posiciones $x_A(t) = 4\theta\,\mathrm{m}$ y $x_B(t) = (3+\theta^2)\,\mathrm{m}$, con $\theta = t/(1\,\mathrm{s})$. Obtén todos sus encuentros, posiciones y velocidades. Determina quién va delante en cada intervalo y explica por qué comparar sólo las posiciones en cero y cinco segundos no detectaría ambos eventos.

12. Cuántas veces se alcanza una posición

Una ley de posición es $x(t) = (6\theta - \theta^2)\,\mathrm{m}$ para $0 \le \theta \le 6$. Clasifica el número de instantes en que se alcanza $x = H\,\mathrm{m}$ para cada valor real de H. Obtén las raíces admisibles y distingue el caso de una visita tangencial. Repite la clasificación si la ley sólo vale hasta $\theta = 3$ y después el punto permanece en $x = 9\,\mathrm{m}$.

13. Construir un empalme suave de velocidad

Una posición viene dada por $x(t) = \theta^2\,\mathrm{m}$ hasta $t = 2\,\mathrm{s}$. Entre dos y cuatro segundos se busca una ley

$$x(t) = [c + d(\theta - 2) + e(\theta - 2)^2]\,\mathrm{m},$$

con c, d, e adimensionales. Exige continuidad de posición y velocidad en dos segundos y el registro $x(4\,\mathrm{s}) = 10\,\mathrm{m}$. Determina la ley, comprueba si la aceleración es continua en la unión y decide si hay cambio de sentido en el segundo tramo.

14. Tres velocidades no fijan el área

Se registran velocidades 0, 4 y $0\,\mathrm{m/s}$ en $t = 0, 2, 4\,\mathrm{s}$, respectivamente. Un modelo interpola linealmente entre registros; otro propone $v(t) = 4\sin(\pi\theta/4)\,\mathrm{m/s}$, con $\theta = t/(1\,\mathrm{s})$. Ambos parten de $x(0) = 0$. Calcula sus posiciones finales y decide qué puede concluirse sobre el desplazamiento sólo a partir de los tres datos. Propón un registro de velocidad adicional que distinga ambos modelos.

15. Mezclar posiciones y velocidades

Un punto tiene aceleración constante $-2\,\mathrm{m/s^2}$, cumple $x(1\,\mathrm{s}) = 4\,\mathrm{m}$ y $v(3\,\mathrm{s}) = 2\,\mathrm{m/s}$. Reconstruye $x(t)$ en $0 \le t \le 4\,\mathrm{s}$ y encuentra sus pasos por el origen dentro de ese dominio. Explica por qué hay información suficiente para identificar los dos datos iniciales y qué cambia si se elimina el dato de velocidad.

16. Acotar un encuentro sin fijar la velocidad relativa

B está diez metros detrás de A en $t = 0$. La velocidad relativa de cierre $w(t) = v_B(t) - v_A(t)$ es continua y satisface $1 \le w(t)/(1\,\mathrm{m/s}) \le 3$ para $0 \le t \le 12\,\mathrm{s}$. Demuestra que existe un único primer encuentro y acota su tiempo. Muestra que ambos extremos de la cota pueden alcanzarse con historias admisibles, aunque la función w no esté especificada.

17. Encontrar un instante mediante bisección

Un punto A permanece en $x_A = 5\,\mathrm{m}$ y otro tiene $x_B(t) = (\theta^3 + \theta)\,\mathrm{m}$ en $0 \le \theta \le 2$, con $\theta = t/(1\,\mathrm{s})$. Justifica que existe un único encuentro. Partiendo del intervalo $[1, 2]\,\mathrm{s}$, realiza cuatro pasos de bisección y da una banda garantizada para su instante. Explica qué hipótesis hacen que el procedimiento conserve el encuentro.

18. Elegir un observador que acompaña a A

En un eje, $x_A(t) = (2 + 3\theta)\,\mathrm{m}$ y $x_B(t) = (-4 + \theta^2)\,\mathrm{m}$ para $0 \le \theta \le 6$, donde $\theta = t/(1\,\mathrm{s})$. Usa la coordenada $y = x - 2\,\mathrm{m} - (3\,\mathrm{m/s})t$ y el reloj $\tau = t - 2\,\mathrm{s}$. Escribe ambas posiciones en función de τ, encuentra el encuentro y devuelve el resultado al eje original. Compara las velocidades relativas en las dos descripciones.

19. De una aceleración triangular a la historia completa

Un punto parte de $x(0) = 0$ con velocidad $-1\,\mathrm{m/s}$. Su aceleración prescrita es

$$a(t) = \begin{cases} 2\theta\,\mathrm{m/s^2}, & 0 \le \theta \le 1, \\ 2(2-\theta)\,\mathrm{m/s^2}, & 1 \le \theta \le 2, \\ 0, & \theta \ge 2, \end{cases} \qquad \theta = \frac{t}{1\,\mathrm{s}}.$$

Reconstruye velocidad y posición para $t \ge 0$, transportando los datos entre tramos. Calcula el cambio total de velocidad, el desplazamiento y la distancia recorrida entre cero y dos segundos. Determina cuándo cambia de sentido y cuándo regresa al origen. Comprueba la regularidad de los empalmes y explica qué magnitud representa el área del triángulo de aceleración.

Soluciones

1. El mismo encuentro desde otro origen

En el tramo pertinente las expresiones originales son $x_A = (2\,\mathrm{m/s})t$ y $x_B = 3\,\mathrm{m} + (6\,\mathrm{m/s})(t - 5\,\mathrm{s})$. Sustituimos $t = \tau + 2\,\mathrm{s}$ antes de cambiar la coordenada espacial. Resulta

$$y_A(\tau) = 16\,\mathrm{m} - (2\,\mathrm{m/s})\tau, \qquad y_B(\tau) = 35\,\mathrm{m} - (6\,\mathrm{m/s})\tau.$$

Ambas fórmulas corresponden conjuntamente a $3 \le \tau/(1\,\mathrm{s}) \le 6$. Sus velocidades son -2 y $-6\,\mathrm{m/s}$. Al igualarlas obtenemos $\tau = 19/4\,\mathrm{s} = 4{,}75\,\mathrm{s}$ y $y = 6{,}5\,\mathrm{m}$. Son las coordenadas del mismo evento que antes tenía $t = 6{,}75\,\mathrm{s}$ y $x = 13{,}5\,\mathrm{m}$. El origen del reloj y la orientación del eje cambiaron sus números, pero los carros siguen estando a la misma altura en ese instante.

2. Una raíz antes del cambio de fórmula

Antes de buscar raíces, el reloj común separa espera, aceleración y marcha uniforme. En cada tramo igualaremos las posiciones que realmente rigen allí. El objetivo es el primer encuentro, por lo que también debemos excluir los intervalos anteriores al candidato que aceptemos; una raíz positiva aislada no satisface esa obligación.

Mientras B acelera, $x_B = -12\,\mathrm{m} + (1\,\mathrm{m/s^2})(t - 2\,\mathrm{s})^2$. Igualar a $x_A = (3\,\mathrm{m/s})t$ da, en valores numéricos de segundos,

$$\theta^2 - 7\theta - 8 = (\theta - 8)(\theta + 1) = 0.$$

Ni ocho segundos ni menos un segundo pertenecen al tramo de dos a seis segundos. Durante la espera tampoco hay encuentro. Al terminar la aceleración, B está en cuatro metros y tiene velocidad de ocho metros por segundo. La continuación es

$$x_B(t) = 4\,\mathrm{m} + (8\,\mathrm{m/s})(t - 6\,\mathrm{s}).$$

La igualdad con A proporciona $8\theta - 44 = 3\theta$ y, por tanto, $t = 44/5\,\mathrm{s} = 8{,}8\,\mathrm{s}$, en $x = 26{,}4\,\mathrm{m}$. Es admisible y es el primer encuentro: desde seis segundos la separación se cierra uniformemente, sin un cero anterior. A los ocho segundos las posiciones reales del modelo son $x_A = 24\,\mathrm{m}$ y $x_B = 20\,\mathrm{m}$. La prolongación de la parábola había sustituido la marcha uniforme de B por dos segundos adicionales de aceleración.

3. Reconstruir una parábola y recorrerla

Escribimos $x(t) = 1\,\mathrm{m} + v_0 t + a t^2/2$. Si $U = v_0/(1\,\mathrm{m/s})$ y $A = a/(1\,\mathrm{m/s^2})$, los dos registros posteriores dan $2U + 2A = 8$ y $4U + 8A = 8$. Restar el doble de la primera igualdad a la segunda produce $4A = -8$. Así, $a = -2\,\mathrm{m/s^2}$ y $v_0 = 6\,\mathrm{m/s}$.

La posición reconstruida es

$$x(t) = 1\,\mathrm{m} + (6\,\mathrm{m/s})t - (1\,\mathrm{m/s^2})t^2.$$

La velocidad se anula a los tres segundos y cambia allí de positiva a negativa. El máximo es $x(3\,\mathrm{s}) = 10\,\mathrm{m}$. El desplazamiento total es $9 - 1 = 8\,\mathrm{m}$; la distancia suma nueve metros de avance y uno de regreso, por lo que vale diez metros. Las dos posiciones iguales no significan que el móvil haya permanecido detenido entre ellas. La reconstrucción es única dentro de las parábolas, pero los tres datos no demuestran por sí solos que la aceleración sea constante.

4. Tres datos y muchas historias

El término añadido se anula cuando $\theta = 0$, 2 o 4, cualquiera que sea λ. Todas las curvas pasan por los tres registros. En un segundo, el caso uniforme está en dos metros y el caso $\lambda = 1/8$ en $19/8\,\mathrm{m} = 2{,}375\,\mathrm{m}$.

Para este último caso derivamos teniendo en cuenta $d\theta/dt = 1/(1\,\mathrm{s})$:

$$v_{1/8}(t) = \left[2 + \frac{1}{8}(3\theta^2 - 12\theta + 8)\right]\ \mathrm{m/s} = \left[\frac{3}{2} + \frac{3}{8}(\theta - 2)^2\right]\ \mathrm{m/s}.$$

La velocidad es al menos $1{,}5\,\mathrm{m/s}$ en todo el intervalo. El caso $\lambda = 0$ también avanza siempre, con velocidad de dos metros por segundo. Tenemos dos historias distintas que satisfacen tanto la tabla como la ausencia de retroceso. Para elegir entre ellas hace falta información adicional; por ejemplo, sus predicciones de posición a un segundo son diferentes y podrían contrastarse con un nuevo registro y su incertidumbre.

5. Parar, esperar y volver

El primer tramo termina en $x = 7\,\mathrm{m}$. Esa posición se conserva durante la espera y proporciona la condición inicial del regreso:

$$x(t) = \begin{cases} 1\,\mathrm{m} + (2\,\mathrm{m/s})t, & 0 \le t \le 3\,\mathrm{s}, \\ 7\,\mathrm{m}, & 3\,\mathrm{s} \le t \le 5\,\mathrm{s}, \\ 7\,\mathrm{m} - (1\,\mathrm{m/s})(t - 5\,\mathrm{s}), & 5\,\mathrm{s} \le t \le 9\,\mathrm{s}. \end{cases}$$

En el avance pasa por cinco metros a los dos segundos. Durante la espera no está allí. En el regreso llega de nuevo a cinco metros a los siete segundos. Las dos raíces pertenecen a sus respectivos tramos. La posición final es tres metros: el desplazamiento es de dos metros y la distancia, de seis más cuatro, igual a diez metros.

La posición es continua, pero sus pendientes laterales difieren en tres y cinco segundos; su derivada, la velocidad, no existe exactamente allí en el sentido clásico. Los tramos de velocidad constante no describen las transiciones reales del motor. Idealizarlas como instantáneas permite esta representación, pero impide atribuir una aceleración finita en esos cambios.

6. Un encuentro con datos acotados

La rapidez de cierre es $v_A - v_B \in [1{,}8, 2{,}2]\,\mathrm{m/s}$ y permanece positiva. Si d es la separación inicial, el tiempo de cierre es $T = d/(v_A - v_B)$. El cociente aumenta con d y disminuye con la rapidez de cierre. Por ello,

$$T \in \left[\frac{9{,}8}{2{,}2}, \frac{10{,}2}{1{,}8}\right] \text{ s} = \left[\frac{49}{11}, \frac{17}{3}\right] \text{ s} \subset [4{,}45, 5{,}67]\,\text{s}.$$

El redondeo exterior conserva la cota. A los cinco segundos no podemos garantizar que el encuentro ya haya ocurrido. Con $d = 9{,}8\,\text{m}$, $v_A = 3{,}1\,\text{m/s}$ y $v_B = 0{,}9\,\text{m/s}$ ocurre a los $49/11\,\text{s}$, antes de cinco. Con $d = 10{,}2\,\text{m}$, $v_A = 2{,}9\,\text{m/s}$ y $v_B = 1{,}1\,\text{m/s}$ ocurre a los $17/3\,\text{s}$, después. Ambas historias son admisibles. No hemos asignado probabilidades a ninguna de ellas ni a la banda de tiempos.

7. Encontrarse sin adelantarse

Al restar las posiciones y utilizar el tiempo numérico en segundos encontramos

$$x_P(t) - x_Q(t) = -(\theta - 3)^2\,\text{m}.$$

El único encuentro es a los tres segundos, en $x = 15\,\text{m}$. Las velocidades son $v_P = 8\,\text{m/s} - (2\,\text{m/s}^2)t$ y $v_Q = 2\,\text{m/s}$; en el encuentro ambas valen dos metros por segundo. La diferencia es negativa antes y después, de modo que P no llega a quedar delante. El cero es doble y no cambia el signo de la función. Un procedimiento que exigiera un cambio de signo para aceptar un encuentro excluiría precisamente este caso.

8. Un arranque progresivo

Integramos la velocidad desde el origen temporal del arranque, usando $dt = T\,du$. Para $0 \le t \le T$ resulta

$$x_B(t) = -6\,\text{m} + VT\left(u^3 - \frac{1}{2}u^4\right).$$

En $u = 1$, B ha recorrido $VT/2 = 4\,\text{m}$ y está en $-2\,\text{m}$. Durante el arranque la velocidad es no negativa y la posición no supera ese valor, mientras A tiene posición no negativa: no se han encontrado. Después,

$$x_B(t) = -2\,\text{m} + (4\,\text{m/s})(t - 2\,\text{s}).$$

Igualar esta expresión a $x_A = (2\,\text{m/s})t$ da $t = 5\,\text{s}$ y $x = 10\,\text{m}$. El instante pertenece al tramo uniforme.

La velocidad del arranque vale cero en $u = 0$ y V en $u = 1$. Su aceleración es

$$a_B(t) = \frac{V}{T}(6u - 6u^2),$$

que se anula en ambos extremos. Por tanto, en $t = T$ coinciden la velocidad y la aceleración de los dos tramos; la posición también coincide porque transportamos su valor final. A diferencia del ejemplo central, el arranque comienza aquí con aceleración nula y la incrementa gradualmente. Las dos leyes son modelos distintos, aunque compartan un reposo inicial y una marcha uniforme final.

9. La misma aceleración en dos historias

Para la separación $g = x_B - x_A$ se cumple $g'' = a - a = 0$. Sus datos iniciales son $g(0) = 12\,\text{m}$ y $g'(0) = -4\,\text{m/s}$. Integrar da $g(t) = 12\,\text{m} - (4\,\text{m/s})t$, que se anula una sola vez, en $t = 3\,\text{s}$. No necesitamos reconstruir las dos posiciones individuales para responder por el instante.

Si $a = 2\,\text{m/s}^2$, las posiciones son $x_A = (\theta + \theta^2)\,\text{m}$ y $x_B = (12 - 3\theta + \theta^2)\,\text{m}$. En tres segundos ambas valen doce metros y las velocidades son siete y tres metros por segundo. A alcanza a B desde atrás, aunque B había partido moviéndose hacia el otro lado. Si la aceleración común

varía, se conservan la separación, el instante y el cambio de orden, mientras la posición y las velocidades individuales dependen de la integral de a. Es esencial que las aceleraciones sean iguales en cada instante, no sólo que coincidan sus valores iniciales.

La elección de la separación puede hacerse antes de integrar: el evento buscado compara posiciones, y restarlas elimina una parte común de sus leyes. Para recuperar después el lugar del encuentro basta reconstruir una de las dos posiciones. Si se pidiera únicamente cuándo ocurre, integrar ambas historias introduciría información que acabaría cancelándose.

10. Un móvil que tiene longitud

La posición del frente es $x_f = (5\,\mathrm{m/s})t$ y la trasera es $x_r = x_f - 30\,\mathrm{m}$. El carro ocupa el intervalo $[x_r, x_f]$. Dos intervalos cerrados se intersectan cuando el extremo derecho de cada uno alcanza o supera el extremo izquierdo del otro; aquí las condiciones son $x_f \geq 0$ y $x_r \leq 20\,\mathrm{m}$. Se traducen en $0 \leq t \leq 10\,\mathrm{s}$.

El frente sale de la zona en $t = 4\,\mathrm{s}$, pero la parte trasera no alcanza su borde final hasta diez segundos. En los instantes extremos hay contacto en un punto; si se exigiera una superposición de longitud positiva, el intervalo temporal sería abierto. Reemplazar el carro por el punto de su frente respondería cuándo ese punto cruza la zona, de cero a cuatro segundos, y perdería los seis segundos restantes de ocupación parcial. La pertinencia de una idealización puntual depende de la pregunta.

11. Dos encuentros y dos cambios de orden

La separación es $g = (\theta^2 - 4\theta + 3)\,\mathrm{m} = (\theta - 1)(\theta - 3)\,\mathrm{m}$. Los encuentros ocurren en uno y tres segundos, ambos dentro del dominio; sus posiciones son cuatro y doce metros. A mantiene $4\,\mathrm{m/s}$ y B tiene $v_B = 2\theta\,\mathrm{m/s}$: en el primer encuentro B va a dos y en el segundo a seis metros por segundo.

El signo de g es positivo antes de un segundo, negativo entre uno y tres y positivo después de tres. B comienza delante, es sobrepasado por A y luego vuelve a adelantarlo. Las separaciones de los extremos son tres y ocho metros, ambas positivas. Igual signo en dos registros no excluye ceros intermedios, incluso si ambas trayectorias son suaves y ambos puntos avanzan siempre. La fórmula conocida en todo el intervalo permite detectar los dos cruces que las muestras extremas omiten.

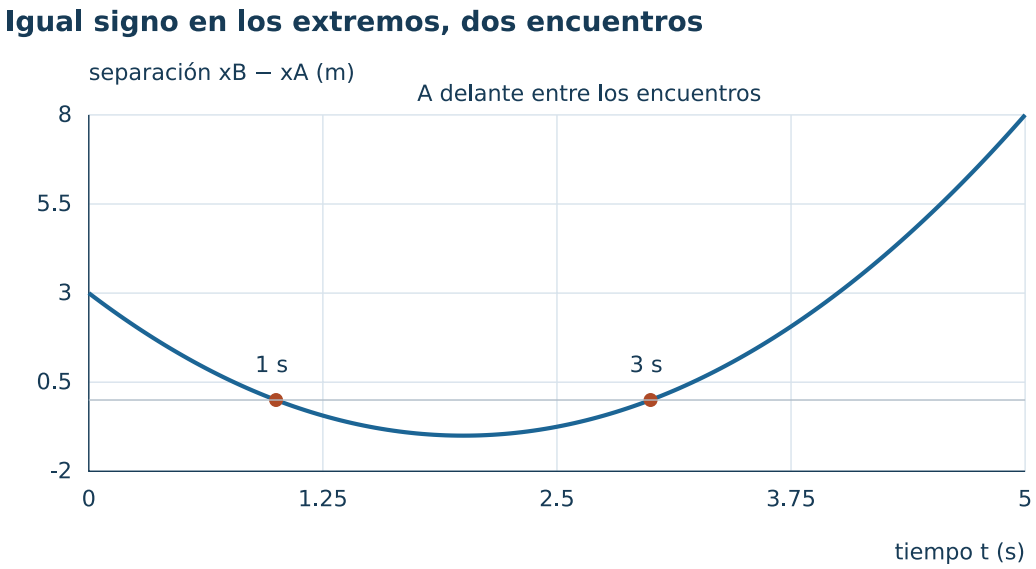


Figura 2.5. Los dos ceros cambian el signo de la separación. Los valores positivos en los extremos del registro no bastan para excluir encuentros interiores.

12. Cuántas veces se alcanza una posición

Completamos el cuadrado: $x = [9 - (\theta - 3)^2]\,\mathrm{m}$. La imagen del intervalo $[0, 6]$ es $[0, 9]\,\mathrm{m}$. Para $0 \le H < 9$, las dos soluciones $\theta = 3 \pm \sqrt{9 - H}$ pertenecen al dominio y son distintas; en $H = 0$ corresponden a sus extremos. Para $H = 9$ hay una sola, $\theta = 3$, donde la velocidad se anula. Para $H < 0$ o $H > 9$ no hay ninguna. En el máximo la posición alcanza el nivel y regresa sin cruzarlo: es una visita tangencial.

Si el modelo termina la parábola en tres segundos y conserva el reposo posterior, cada nivel $0 \le H < 9$ se alcanza una sola vez, mediante la raíz menor. Para $H = 9$ hay infinitos instantes, todos los de $t \ge 3\,\mathrm{s}$; ya no se trata de un encuentro aislado con ese nivel. Los niveles exteriores siguen sin alcanzarse. La clasificación depende tanto de la ecuación como del dominio y de su continuación física.

13. Construir un empalme suave de velocidad

Cada condición debe aplicarse a una magnitud del mismo instante. La continuidad de posición fija dónde empieza el segundo tramo; la de velocidad fija su pendiente inicial. Sólo después utilizamos la posición final para determinar la curvatura que queda libre. No igualamos aceleraciones, porque el enunciado no exige esa tercera condición.

En dos segundos el primer tramo tiene posición $4\,\mathrm{m}$ y velocidad $4\,\mathrm{m/s}$. Por ello $c = 4$ y $d = 4$. El registro final exige $10 = 4 + 4(2) + e(2)^2$, así que $e = -1/2$. El segundo tramo queda

$$x(t) = \left[4 + 4(\theta - 2) - \tfrac{1}{2}(\theta - 2)^2\right]\ \mathrm{m}.$$

Su velocidad es $[4 - (\theta - 2)]\,\mathrm{m/s}$: desciende de cuatro a dos metros por segundo y permanece positiva. La posición crece sin retorno. La aceleración es $2\,\mathrm{m/s^2}$ a la izquierda de la unión y $-1\,\mathrm{m/s^2}$ a la derecha. El empalme de posición es C^1, pero no C^2: no hay una segunda derivada clásica en el instante de unión. Cada condición fijó uno de los coeficientes; exigir además igualdad de aceleraciones sería incompatible con el registro final dentro de esta familia cuadrática.

14. Tres velocidades no fijan el área

La interpolación lineal produce dos triángulos, cada uno de base dos segundos y altura cuatro metros por segundo. Su área total es ocho metros. La ley sinusoidal reproduce los tres registros y es no negativa en todo el intervalo, pero su integral es

$$x(4\,\mathrm{s}) = 4\,\mathrm{m/s}\int_0^{4\,\mathrm{s}} \sin\!\left(\frac{\pi t}{4\,\mathrm{s}}\right) dt = \frac{32}{\pi}\,\mathrm{m} \approx 10{,}186\,\mathrm{m}.$$

Los registros coincidentes no fijan el área entre ellos. Adoptar segmentos rectos es una hipótesis de interpolación, no una consecuencia de las tres muestras. Una lectura en un segundo daría $2\,\mathrm{m/s}$ para el modelo lineal y $2\sqrt{2}\,\mathrm{m/s}$ para el sinusoidal. Distinguirlos experimentalmente requeriría que la incertidumbre del registro permitiera separar esas predicciones. Todavía habría otras funciones compatibles con cuatro muestras si no restringiéramos la familia.

15. Mezclar posiciones y velocidades

La aceleración constante da $v(t) = v_0 - (2\,\mathrm{m/s^2})t$. El dato de tres segundos determina $v_0 = 8\,\mathrm{m/s}$. Después, $x(1\,\mathrm{s}) = x_0 + 8\,\mathrm{m} - 1\,\mathrm{m} = 4\,\mathrm{m}$ fija $x_0 = -3\,\mathrm{m}$. Resulta

$$x(t) = (-3 + 8\theta - \theta^2)\,\mathrm{m}.$$

Las raíces son $\theta = 4 \pm \sqrt{13}$. La menor es aproximadamente 0,3944 y la mayor 7,6056; sólo la primera pertenece al dominio hasta cuatro segundos. Allí el móvil lleva velocidad positiva, pues $8 - 2(4 - \sqrt{13}) = 2\sqrt{13}$.

La reconstrucción fue única porque la aceleración ya estaba prescrita, la velocidad en un instante fijó v_0 y una posición fijó después x_0. Si retiramos el dato de velocidad, queda una ecuación $x_0 + v_0(1\,\mathrm{s}) = 5\,\mathrm{m}$ con dos incógnitas. La posición medida y la aceleración constante, por sí solas, admiten infinitos movimientos de esa familia.

16. Acotar un encuentro sin fijar la velocidad relativa

La separación es $g(t) = -10\,\mathrm{m} + \int_0^t w(s)\,ds$. La cota inferior positiva de w hace que g sea estrictamente creciente. A los doce segundos, $g \geq 2\,\mathrm{m} > 0$, mientras $g(0) < 0$; continuidad y monotonía proporcionan un único encuentro. En su instante T, la integral acumulada es diez metros. Al integrar las cotas de w,

$$(1\,\mathrm{m/s})T \leq 10\,\mathrm{m} \leq (3\,\mathrm{m/s})T, \qquad \frac{10}{3}\,\mathrm{s} \leq T \leq 10\,\mathrm{s}.$$

El cierre constante de tres metros por segundo alcanza el extremo inferior y el de uno alcanza el superior. Ambos satisfacen las condiciones, por lo que no podemos estrechar universalmente esa banda. Cada función intermedia puede cambiar el instante, pero conserva la garantía. La información funcional acotada permite concluir existencia y un rango sin identificar una historia exacta.

17. Encontrar un instante mediante bisección

La bisección mantiene una banda cuyos extremos producen signos opuestos. En cada paso calculamos su punto medio; si allí la separación es negativa, ese punto reemplaza al extremo negativo, y si es positiva reemplaza al positivo. Si diera cero, habríamos encontrado el encuentro exacto y podríamos terminar. La elección del intervalo siguiente se deduce de la continuidad, en vez de adivinar hacia qué lado está la raíz.

En unidades de metro, la separación es $G(\theta) = \theta^3 + \theta - 5$. Es continua y su derivada $3\theta^2 + 1$ es positiva en todo el intervalo. Como $G(1) = -3$ y $G(2) = 5$, hay un único cero

entre ambos. En cada paso evaluamos el punto medio y conservamos los extremos de signos opuestos. Las evaluaciones sucesivas son

$$G(3/2) = -1/8, \qquad G(7/4) = 135/64,$$
$$G(13/8) = 469/512, \quad G(25/16) = 1545/4096.$$

Los intervalos retenidos son $[3/2, 2]$, $[3/2, 7/4]$, $[3/2, 13/8]$ y $[3/2, 25/16]$ en segundos. La banda final es $[1{,}5000, 1{,}5625]\,\mathrm{s}$, de anchura $1/16\,\mathrm{s}$. Su punto medio da una aproximación con error absoluto no mayor que $1/32\,\mathrm{s}$. La continuidad garantiza que cada banda de signos opuestos conserva un cero; la monotonía asegura que se trata siempre del mismo encuentro único. Sin un cambio de signo inicial, esta variante del procedimiento no detectaría necesariamente un contacto tangencial.

18. Elegir un observador que acompaña a A

Introduzcamos $\eta = \tau/(1\,\mathrm{s})$, de modo que $\theta = \eta + 2$. La transformación resta precisamente la posición de A, por lo que

$$y_A = 0, \qquad y_B = (\theta^2 - 3\theta - 6)\,\mathrm{m} = (\eta^2 + \eta - 8)\,\mathrm{m}.$$

El dominio se transforma en $-2 \le \eta \le 4$. Las raíces son $\eta = (-1 \pm \sqrt{33})/2$; la menor queda fuera de ese dominio y la mayor vale aproximadamente 2,3723. El tiempo original del encuentro es $t = (3 + \sqrt{33})\,\mathrm{s}/2 \approx 4{,}3723\,\mathrm{s}$, dentro del intervalo previsto, y su posición es $x = (13 + 3\sqrt{33})\,\mathrm{m}/2 \approx 15{,}1168\,\mathrm{m}$.

En el eje original las velocidades son 3 y 2θ en metros por segundo, con diferencia $(2\theta - 3)\,\mathrm{m/s}$. En el nuevo son cero y $(2\eta + 1)\,\mathrm{m/s}$; sustituir $\theta = \eta + 2$ muestra que la velocidad relativa coincide. En el encuentro vale $\sqrt{33}\,\mathrm{m/s} > 0$, y B pasa de detrás a delante. El cambio de observador simplificó una trayectoria sin cambiar el evento.

19. De una aceleración triangular a la historia completa

El área bajo $a(t)$ tiene unidades de velocidad. El triángulo completo tiene base dos segundos y altura dos metros por segundo al cuadrado: su área es $2\,\mathrm{m/s}$. La velocidad, por tanto, cambia de menos uno a más uno, aunque el desplazamiento todavía exige otra integración.

En el primer tramo, integrar desde el dato inicial da $v = (\theta^2 - 1)\,\mathrm{m/s}$ y $x = (\theta^3/3 - \theta)\,\mathrm{m}$. En un segundo el móvil se detiene momentáneamente en $x = -2/3\,\mathrm{m}$. Estos valores fijan el segundo tramo. La historia completa es

$$v(t) = \begin{cases} (\theta^2 - 1)\,\mathrm{m/s}, & 0 \le \theta \le 1, \\ [1 - (\theta - 2)^2]\,\mathrm{m/s}, & 1 \le \theta \le 2, \\ 1\,\mathrm{m/s}, & \theta \ge 2, \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{cases} (\theta^3/3 - \theta)\,\mathrm{m}, & 0 \le \theta \le 1, \\ (2\theta^2 - \theta^3/3 - 3\theta + 2/3)\,\mathrm{m}, & 1 \le \theta \le 2, \\ (\theta - 2)\,\mathrm{m}, & \theta \ge 2. \end{cases}$$

Al sustituir uno y dos se comprueba que coinciden posición y velocidad a cada lado. Las aceleraciones también coinciden: dos metros por segundo al cuadrado en la primera unión y cero en la segunda. La posición es de clase C^2 en ambas, aunque la derivada de la aceleración tenga saltos. La velocidad cambia de negativa a positiva en un segundo, por lo que hay un único cambio de sentido. El móvil regresa al origen en dos segundos y después sigue avanzando.

Entre cero y dos segundos el desplazamiento es nulo, pero la distancia es $2/3 + 2/3 = 4/3\,\mathrm{m}$. El área bajo la aceleración representa Δv, el área con signo bajo la velocidad representa Δx y

el área bajo su valor absoluto representa distancia. Las tres integrales se refieren a la misma historia y responden preguntas distintas.

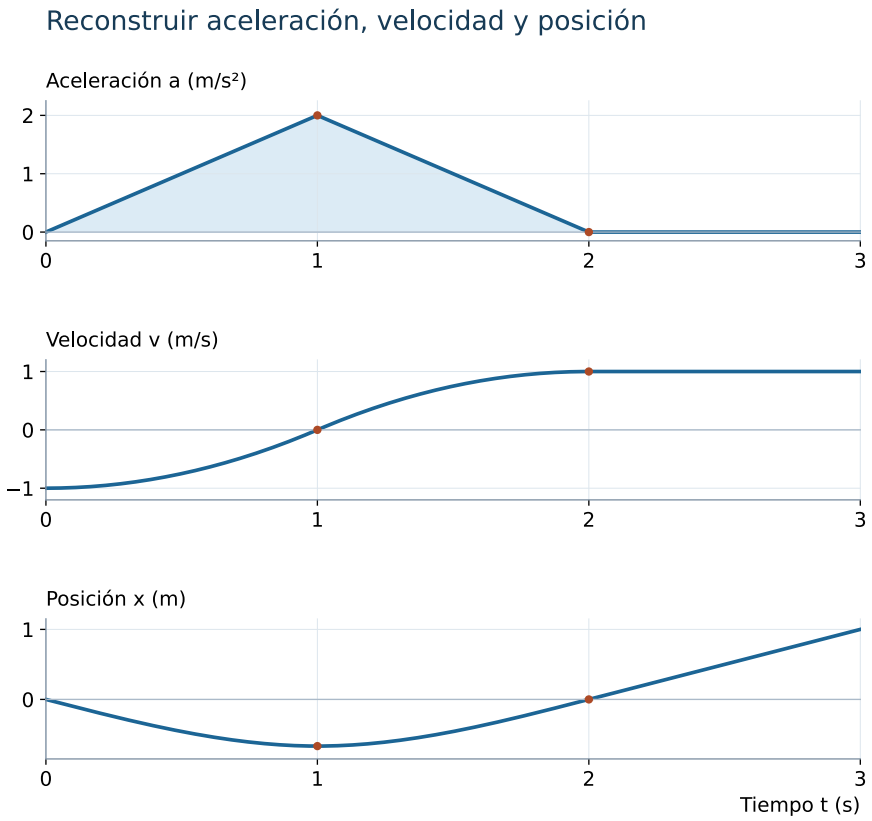


Figura 2.6. Los mismos instantes alinean tres magnitudes distintas. El área de la aceleración cambia la velocidad; la posición primero disminuye y luego aumenta, aunque la aceleración permanezca no negativa.

Lecturas de apoyo

La diferencia entre dato, hipótesis y predicción, la integración de una velocidad y los límites de un régimen se desarrollan en el capítulo 1, «Describir, medir y estimar un movimiento». Las cotas del ejercicio 6 utilizan el razonamiento de intervalos del capítulo 0, «El problema de medir».

La base matemática es cálculo de una variable y álgebra elemental. La derivada y la velocidad media pueden recuperarse en *Elementos del cálculo*, capítulo 1, §§1.2–1.4; las primitivas y la integral definida, en el capítulo 6, §§6.6–6.7. Los problemas y soluciones están redactados para esta obra; sus datos son didácticos y no proceden de una medición real.

Para ampliar la práctica se consultaron Bueche y Hecht, *Física general*, 10.ª ed. (Schaum), capítulo 1; Cristian Quinzacara, *Problemas resueltos de mecánica* (2021), §§1.1–1.2 y 2.1–2.2; Atilio del C. Fabián, *Problemas resueltos de Física I*, temas 1–2; y Rodrigo Sabaj Saavedra, *Problemas resueltos para el curso FI1001 Introducción a la física newtoniana* (2013), unidades de análisis dimensional y cinemática. Las situaciones, datos y soluciones añadidos aquí se desarrollan para este libro a partir de familias habituales de problemas, con atención al análisis de hipótesis y a la comprobación física.

El cotejo de teoría y práctica incluye también Young y Freedman, *Sears y Zemansky. Física universitaria*, vol. 1, 13.ª ed. (Pearson, 2013), §§1.3–1.6 y 2.1–2.6, con consulta complementaria de la 12.ª ed.; Serway y Jewett, *Física para ciencias e ingeniería*, vol. 1, 10.ª ed. en español (Cengage, 2019), §§1.2–1.6 y 2.1–2.9; y Serway y Vuille, *Fundamentos de física*, vol. 1, 9.ª ed., §§1.3–1.6 y capítulo 2. Las precisiones metrológicas conservan el criterio del VIM citado en el capítulo 0.

Capítulo 3

Movimiento en el plano

Una pelota debe pasar por una abertura cuyo centro está doce metros a la derecha y cuatro metros por encima del punto de lanzamiento. Un dispositivo le comunica una componente horizontal de velocidad de seis metros por segundo. Queremos ajustar la componente vertical para alcanzar la abertura. Apuntar hacia su centro parece razonable, pero la aceleración de la pelota apunta hacia abajo desde que abandona el dispositivo, incluso mientras asciende: habrá que distinguir la dirección inicial del movimiento de la recta que une el lanzamiento con el objetivo.

Representaremos la pelota por un punto. Supondremos una aceleración vertical constante de módulo $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ y omitiremos la resistencia del aire. Este valor de g es un dato didáctico del modelo; los resultados numéricos no se presentan como mediciones locales. El lanzamiento define el instante cero y el origen espacial. La coordenada x crece hacia la abertura y la coordenada y hacia arriba. El modelo se aplicará desde la liberación hasta el primer contacto con un obstáculo o con el suelo.

Dos coordenadas para un solo movimiento

En la recta, una coordenada bastaba para localizar el móvil. En el plano necesitamos dos. Elegimos vectores unitarios perpendiculares y fijos, $\mathbf{e}_x$ y $\mathbf{e}_y$, y escribimos

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{e}_x + y(t)\mathbf{e}_y.$$

Definición. Fijados un origen y una base cartesiana ortonormal, el vector $\mathbf{r}(t)$ que une el origen con la posición de la partícula se llama *vector de posición*. Su incremento entre t_1 y t_2 es el *desplazamiento*,

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1).$$

El punto ocupado y el vector que lo representa cumplen funciones diferentes. Si trasladamos el origen, cambia el vector de posición, aunque la pelota siga en el mismo lugar físico. El desplazamiento entre dos posiciones conserva sus componentes bajo una traslación del origen con los ejes paralelos: el mismo término constante se resta en ambos extremos.

Las componentes de un vector son cantidades con signo. Un desplazamiento de tres metros a la derecha y cuatro hacia arriba tiene componentes $(3, 4)$ m y módulo cinco metros. Escribir su módulo no permite recuperar ambas componentes. Tampoco indica qué camino siguió la partícula entre los extremos.

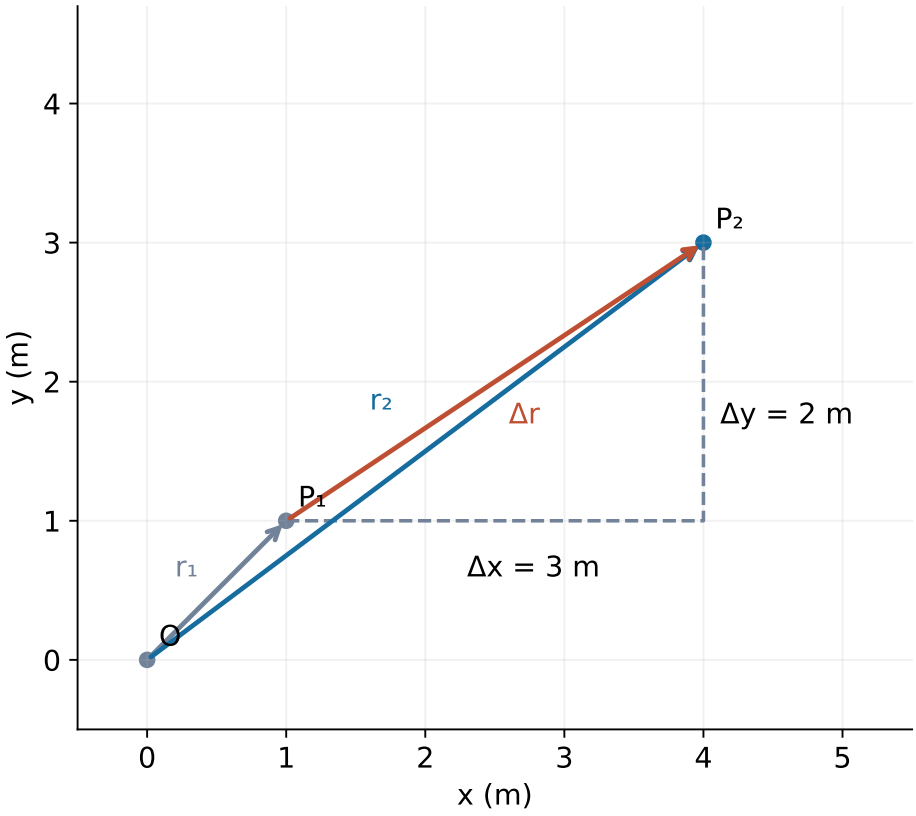


Figura 3.1. El vector de posición parte del origen elegido; el desplazamiento parte de la posición inicial. Los segmentos auxiliares representan componentes, no etapas del recorrido.

Derivar un vector y leer su dirección

Las dos coordenadas describen posiciones en un mismo instante. Su evolución comparte el reloj, incluso cuando podemos resolver sus ecuaciones por separado.

Definición. La velocidad media en un intervalo de duración positiva es $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$. Si $\mathbf{r}$ es diferenciable, la *velocidad instantánea* es $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$. Si además $\mathbf{v}$ es diferenciable, la *aceleración* es $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$. La *rapidez* es el módulo de la velocidad, $q = \|\mathbf{v}\|$.

Como la base elegida permanece fija,

$$\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y, \qquad \mathbf{a} = \ddot{x}\mathbf{e}_x + \ddot{y}\mathbf{e}_y, \qquad q = \sqrt{\dot{x}^{\,2} + \dot{y}^{\,2}}.$$

Un punto sobre una letra denota derivada respecto del tiempo: $\dot{x} = dx/dt$ y $\ddot{x} = d^2x/dt^2$. La norma de un vector con componentes (u_x, u_y) en esta base es $\sqrt{u_x^2 + u_y^2}$. Estas igualdades se obtienen derivando cada componente; no hay términos procedentes de los vectores de base. Más adelante aparecerá una base que gira y será necesario derivarla también. Las unidades de $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{a}$ son, respectivamente, longitud, longitud dividida por tiempo y longitud dividida por tiempo al cuadrado.

Cuando $\mathbf{v}(t) \neq \mathbf{0}$, su dirección es la tangente orientada por el movimiento. En efecto, la identidad de diferenciabilidad

$$\mathbf{r}(t + h) - \mathbf{r}(t) = h\mathbf{v}(t) + o(h)$$

muestra que el desplazamiento para un incremento temporal positivo y pequeño tiene esa dirección en primer orden.

La notación $o(h)$ representa aquí un vector de error cuyo módulo dividido por $|h|$ tiende a cero. Para $h > 0$, dividir la igualdad por h deja un cociente de desplazamientos que tiende a $\mathbf{v}(t)$; cuando ese vector límite es distinto de cero, su dirección fija la de los desplazamientos próximos. Si la velocidad se anula, esta justificación ya no proporciona una dirección; puede existir una tangente geométrica, pero habrá que determinarla por otro argumento.

Para una posición de clase C^1, la distancia recorrida entre t_1 y t_2 se expresa como

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \|\mathbf{v}(t)\|\, dt.$$

Es la longitud de la curva parametrizada, contando las partes que se recorran más de una vez. La rapidez media es $s/(t_2 - t_1)$. El módulo de la velocidad media puede ser menor: una vuelta completa a un circuito deja desplazamiento cero y distancia positiva. La fórmula integral utiliza el resultado de longitud de arco del cálculo; los ejemplos circulares siguientes permiten comprobar directamente su interpretación sin necesitar aquí su demostración general.

La trayectoria geométrica tampoco determina por sí sola la velocidad. Con $\theta = t/(1\,\mathrm{s})$, las posiciones

$$\mathbf{r}_1(t) = (\theta \mathbf{e}_x + \theta^2 \mathbf{e}_y)\,\mathrm{m}, \qquad \mathbf{r}_2(t) = (\theta^2 \mathbf{e}_x + \theta^4 \mathbf{e}_y)\,\mathrm{m}, \qquad t \geq 0,$$

recorren la misma semiparábola $y = x^2/(1\,\mathrm{m})$ con $x \geq 0$. En el primer movimiento, la velocidad inicial es $(1, 0)\,\mathrm{m/s}$; en el segundo es cero. Saber por dónde pasa un cuerpo deja abierta la pregunta de cuándo pasa y cuánto tarda.

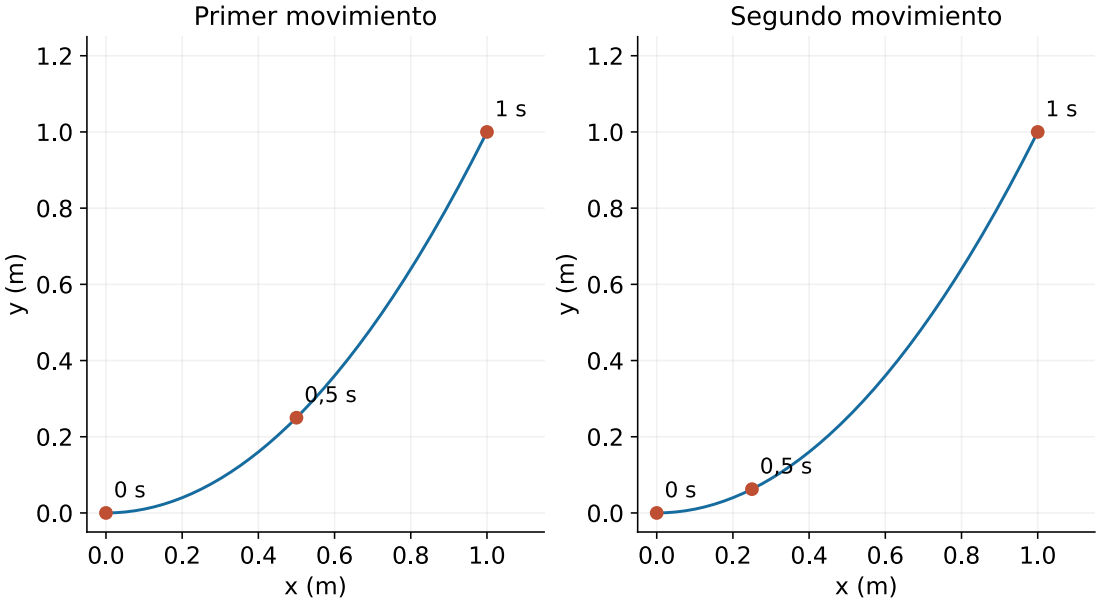


Figura 3.2. La curva común no contiene el reloj. Cada panel usa los instantes $t = 0$, $0,5\,\mathrm{s}$ y $1\,\mathrm{s}$ para su propio movimiento.

Integrar componentes sin separar los instantes

Volvamos al lanzamiento. La hipótesis de aceleración se escribe

$$\mathbf{a} = -g\mathbf{e}_y, \qquad a_x = 0, \quad a_y = -g.$$

La componente horizontal de la velocidad permanece constante. Por tanto, la pelota alcanza la vertical de la abertura cuando

$$12\,\mathrm{m} = (6\,\mathrm{m/s})t, \qquad t = 2\,\mathrm{s}.$$

Ese mismo tiempo debe satisfacer la condición vertical. Si llamamos v_{0y} a la componente buscada,

$$4\,\mathrm{m} = v_{0y}(2\,\mathrm{s}) - \frac{1}{2}(10\,\mathrm{m/s^2})(2\,\mathrm{s})^2,$$

y obtenemos $v_{0y} = 12\,\mathrm{m/s}$. La velocidad inicial tiene componentes $(6, 12)\,\mathrm{m/s}$: su pendiente es dos, mientras que la recta hacia el objetivo tiene pendiente $4/12 = 1/3$. La diferencia corresponde a la caída que se acumula durante el vuelo.

La cuenta utiliza un resultado que vale para cualquier aceleración vectorial constante.

Proposición. Sea $\mathbf{r}$ de clase C^2 en un intervalo que contiene t_0, con $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{a}_0$ constante. Si $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$ y $\dot{\mathbf{r}}(t_0) = \mathbf{v}_0$, entonces

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}_0(t - t_0), \qquad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\mathbf{a}_0(t - t_0)^2.$$

Estas expresiones determinan la única posición con esa aceleración y esos datos iniciales.

Demostración. En una base fija, cada componente satisface la ecuación escalar $\ddot{r}_i = a_{0i}$. Integrar desde t_0 hasta t da $\dot{r}_i(t) - v_{0i} = a_{0i}(t - t_0)$; una segunda integración da $r_i(t) - r_{0i} = v_{0i}(t - t_0) + a_{0i}(t - t_0)^2/2$. Reunir las componentes produce las fórmulas. Para justificar la unicidad, la diferencia de dos soluciones tiene segunda derivada cero y datos de posición y velocidad nulos en t_0. Su primera derivada es constante e igual a cero, y la diferencia de posiciones también es cero. $\square$

Resolver por componentes es una operación matemática. Que las ecuaciones físicas queden desacopladas depende del modelo: aquí la aceleración horizontal es cero y la vertical es una constante prescrita. Una aceleración que dependiera del módulo de la velocidad podría relacionar ambas componentes. Compartir un reloj tampoco significa independencia estadística de las mediciones.

La parábola y el tramo que realmente se recorre

Para el lanzamiento calculado,

$$x(t) = (6\,\mathrm{m/s})t, \qquad y(t) = (12\,\mathrm{m/s})t - (5\,\mathrm{m/s^2})t^2.$$

Como x crece estrictamente, podemos eliminar t y obtener

$$y = 2x - \frac{5}{36\,\mathrm{m}}x^2.$$

El coeficiente del término cuadrático tiene unidades de longitud inversa. Suprimirlas dejaría una suma dimensionalmente incoherente cuando x e y representan magnitudes.

La altura máxima ocurre cuando $v_y = 12\,\mathrm{m/s} - gt$ se anula: $t = 1,2\,\mathrm{s}$, $x = 7,2\,\mathrm{m}$ y $y = 7,2\,\mathrm{m}$. Allí la velocidad es horizontal, de seis metros por segundo, y la aceleración sigue siendo vertical hacia abajo. La pelota continúa cambiando de dirección mientras atraviesa la cima.

Al llegar a la abertura, $t = 2\,\mathrm{s}$, tenemos $\mathbf{v} = (6, -8)\,\mathrm{m/s}$ y rapidez $10\,\mathrm{m/s}$. Llega descendiendo. Si no encontrara la abertura ni otro obstáculo, el primer retorno al nivel del lanzamiento sería en $t = 2,4\,\mathrm{s}$, a $14,4\,\mathrm{m}$ del origen. La parábola algebraica también contiene puntos correspondientes a tiempos negativos y al movimiento posterior a un eventual choque; esos puntos no quedan autorizados por el dominio físico declarado.

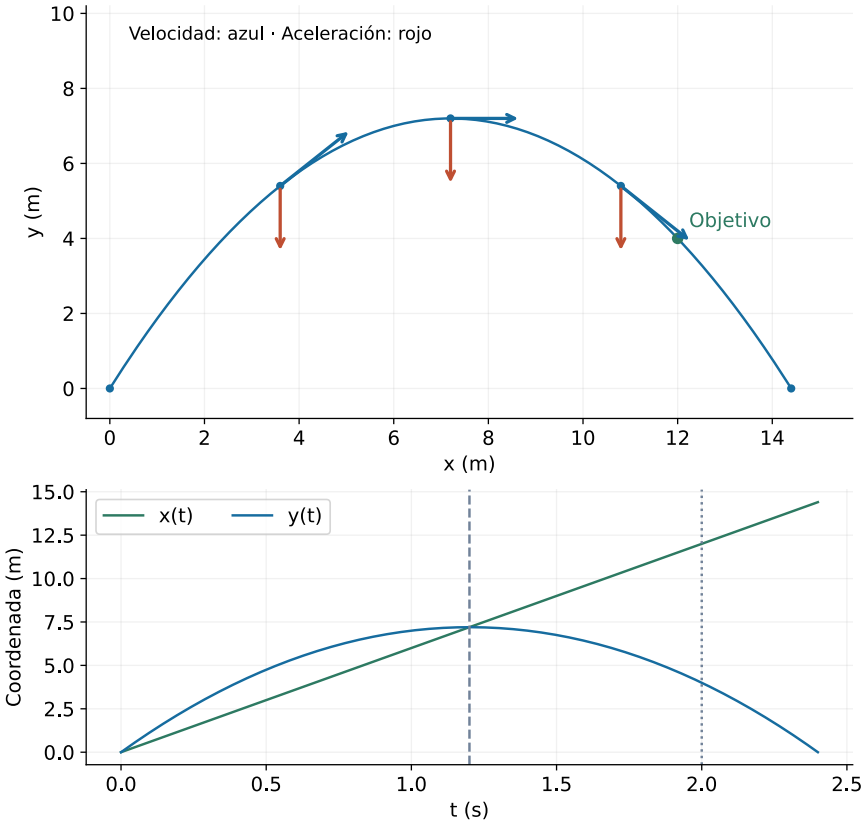


Figura 3.3. En la cima se anula la componente vertical de la velocidad. Las flechas de aceleración mantienen dirección y módulo; se dibujan con una escala distinta de las de velocidad.

Alcanzar un punto con una rapidez fijada

El dispositivo podría imponer la rapidez inicial u y permitir elegir el ángulo α con la horizontal. Para un objetivo situado en (X, Y) respecto del lanzamiento, con $X > 0$ y $\cos\alpha > 0$,

$$v_{0x} = u\cos\alpha, \qquad v_{0y} = u\sin\alpha, \qquad t = \frac{X}{u\cos\alpha}.$$

Sustituir este tiempo en la coordenada vertical da

$$Y = X\tan\alpha - \frac{gX^2}{2u^2\cos^2\alpha}.$$

Elegir un ángulo que satisfaga esta igualdad impone que ambas coordenadas alcancen el objetivo simultáneamente. Para resolverla escribimos $z = \tan\alpha$ y usamos $1/\cos^2\alpha = 1 + z^2$:

$$\frac{gX^2}{2u^2}z^2 - Xz + \left(Y + \frac{gX^2}{2u^2}\right) = 0.$$

Su discriminante decide cuántos ángulos reales pueden alcanzar ese punto dentro del modelo de vuelo libre. Después corresponde verificar el tiempo positivo y los obstáculos. La existencia de una raíz real no elimina esas comprobaciones.

En nuestro ejemplo, la rapidez inicial es $u = 6\sqrt{5}\,\mathrm{m/s}$. Para $X = 12\,\mathrm{m}$, $Y = 4\,\mathrm{m}$, la ecuación se reduce a

$$z^2 - 3z + 2 = 0.$$

Hay dos soluciones: $z = 1$ y $z = 2$. La segunda es el lanzamiento ya calculado. La primera corresponde a $45°$, con componentes iguales a $3\sqrt{10}\,\mathrm{m/s}$ y tiempo de llegada $4/\sqrt{10}\,\mathrm{s}$. Las dos historias alcanzan el mismo punto con la misma rapidez inicial, pero duran tiempos diferentes y pasan por alturas distintas. A seis metros del origen, sus alturas son cuatro y siete metros, respectivamente; una pared de cinco metros en esa vertical descarta la primera y permite el paso de la segunda.

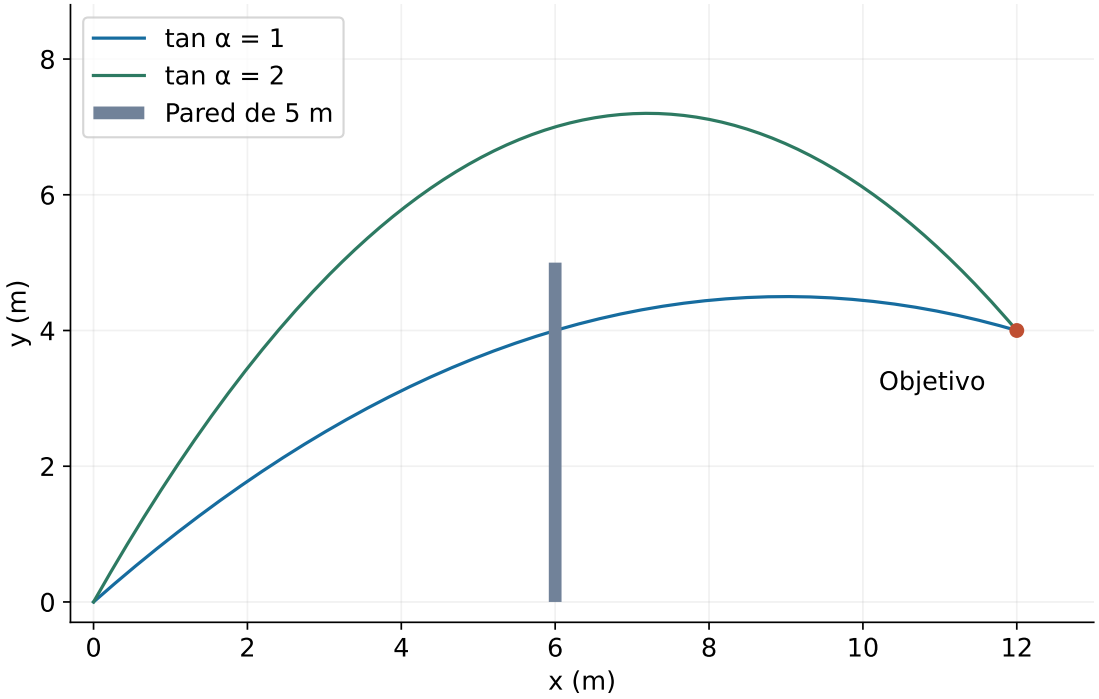


Figura 3.4. La ecuación del objetivo ofrece candidatos; la geometría de los obstáculos decide cuáles permanecen admisibles. Se muestran los tramos anteriores a la vertical del objetivo.

La fórmula habitual del alcance $R = u^2 \sin(2\alpha)/g$ se obtiene poniendo $Y = 0$, suponiendo $0 < \alpha < \pi/2$ y buscando el retorno posterior al lanzamiento al mismo nivel. Su máximo es u^2/g y se alcanza a $45°$. Cambiar la altura de llegada o añadir un obstáculo modifica el problema de optimización; conservar el ángulo sin revisar la derivación perdería las hipótesis que lo justifican.

Cambiar de dirección también requiere aceleración

En una base ortonormal, el producto escalar se calcula como $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = u_x w_x + u_y w_y$. Para vectores no nulos también vale $\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{w}\| \cos\beta$, donde β es el ángulo entre ellos. Su signo permite distinguir componentes que favorecen o se oponen al movimiento; un producto nulo expresa perpendicularidad cuando ambos vectores son no nulos.

La cima del proyectil muestra que una aceleración perpendicular a la velocidad puede cambiar su dirección sin alterar instantáneamente su módulo. Podemos precisar la relación.

Proposición. Si $\mathbf{v}$ es de clase C^1 y $q = \|\mathbf{v}\| > 0$ en un instante, entonces

$$\dot{q} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{q}.$$

En ese instante, la rapidez tiene derivada cero si y sólo si $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = 0$. Que esto ocurra en un instante no implica rapidez constante en un intervalo.

Demostración. Derivar $q^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ da $2q\dot{q} = 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}$. La condición $q > 0$ permite dividir. □

En la cima del lanzamiento, el producto escalar vale cero; antes es negativo y después positivo. La rapidez disminuye al subir y aumenta al bajar. Cuando el cuerpo está instantáneamente en reposo, la división anterior no es válida y el comportamiento de $\|\mathbf{v}\|$ debe analizarse directamente.

Una trayectoria circular permite mantener esa perpendicularidad durante todo un intervalo. Sea su centro fijo $\mathbf{c}$, su radio $R > 0$ y un ángulo $\varphi(t)$ de clase C^2, medido en radianes y elegido de manera continua durante el intervalo de estudio. Puede superar una vuelta completa; no lo reducimos al intervalo de ángulos principales. Escribimos

$$\mathbf{r} = \mathbf{c} + R\mathbf{e}_r, \qquad \mathbf{e}_r = \cos\varphi\,\mathbf{e}_x + \sin\varphi\,\mathbf{e}_y, \qquad \mathbf{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\mathbf{e}_x + \cos\varphi\,\mathbf{e}_y.$$

Los dos vectores son unitarios y perpendiculares, pero giran con la posición. Al derivarlos,

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi, \qquad \dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\mathbf{e}_r.$$

Proposición. Para un movimiento de clase C^2 sobre un círculo de centro y radio fijos,

$$\mathbf{v} = R\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi, \qquad \mathbf{a} = -R\dot{\varphi}^{\,2}\mathbf{e}_r + R\ddot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi.$$

Demostración. La primera igualdad se obtiene derivando $\mathbf{r} = \mathbf{c} + R\mathbf{e}_r$ y usando que R y $\mathbf{c}$ son constantes. Derivar de nuevo produce $R\ddot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi + R\dot{\varphi}\dot{\mathbf{e}}_\varphi$. Sustituir la derivada de la base da la segunda igualdad. □

La componente radial es siempre hacia el centro y tiene módulo $R\dot{\varphi}^2 = q^2/R$. La componente tangencial orientada según $\mathbf{e}_\varphi$ es $R\ddot{\varphi}$. Si $\dot{\varphi} < 0$, la velocidad apunta en sentido opuesto a ese vector de base; por eso el signo de la componente tangencial, por sí solo, no dice si la rapidez aumenta. La fórmula del producto escalar o la derivada de $q = R|\dot{\varphi}|$ resuelven esa cuestión.

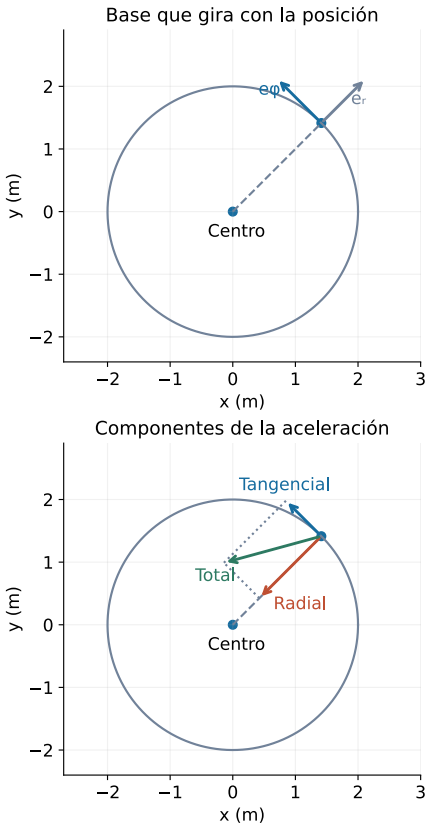


Figura 3.5. Las flechas representan direcciones y componentes de aceleración en un punto. La parte radial apunta hacia el centro tanto para un giro horario como para uno antihorario. Los vectores de base y de aceleración utilizan escalas gráficas propias; sus longitudes no se comparan entre paneles.

En el movimiento circular uniforme, $\varphi = \varphi_0 + \omega t$ con ω constante no nula. Entonces $q = R|\omega|$, el período es $T = 2\pi/|\omega|$ y la aceleración es $-R\omega^2\mathbf{e}_r$. Por ejemplo, con $R = 2\,\mathrm{m}$ y $\omega = \pi/(2\,\mathrm{s})$, la vuelta dura cuatro segundos, la rapidez es $\pi\,\mathrm{m/s}$ y el módulo de la aceleración es $\pi^2/2\,\mathrm{m/s^2}$. La aceleración cambia de dirección durante el giro, aunque su módulo permanezca constante.

Estas son conclusiones cinemáticas. Todavía falta identificar qué interacción mantiene un cuerpo sobre el círculo; llamar centrípeta a la componente radial describe su orientación y no introduce por sí mismo una interacción adicional.

Sumar velocidades exige nombrar al observador

Una embarcación avanza respecto del agua mientras el agua se desplaza respecto de la orilla. Las dos velocidades pertenecen a descripciones distintas. Tomemos ejes paralelos, relojes sincronizados y un marco cuyo origen se mueve con velocidad constante $\mathbf{U}$ respecto del primero. Si su posición inicial es $\mathbf{b}$, las coordenadas se relacionan por

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{b} - \mathbf{U}t.$$

Proposición. Bajo esta transformación, con bases cartesianas fijas y paralelas,

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{U}, \qquad \mathbf{a}' = \mathbf{a}.$$

Demostración. Se deriva la relación de posiciones una vez y luego otra. La primera derivada de $\mathbf{b}$ es cero y la segunda de $\mathbf{U}t$ también. □

Esta es la transformación galileana de una traslación uniforme. La fórmula no incluye ejes que giran ni orígenes acelerados. Para dos cuerpos expresados en un mismo marco, la velocidad relativa es además la derivada de su separación: $d(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A)/dt = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A$. Ambas construcciones permiten comparar movimientos, pero debe quedar claro qué origen, ejes y cuerpos intervienen.

Supongamos un río recto de veinticuatro metros de ancho, corriente uniforme de $1,5\,\mathrm{m/s}$ y rapidez de la embarcación respecto del agua de $2,5\,\mathrm{m/s}$. Elegimos x río abajo e y hacia la otra orilla. Si apunta perpendicularmente a las orillas, su velocidad respecto de tierra es $(1,5\mathbf{e}_x + 2,5\mathbf{e}_y)\,\mathrm{m/s}$: cruza en $9,6\,\mathrm{s}$ y deriva $14,4\,\mathrm{m}$.

Para llegar justo enfrente, la componente x de la velocidad respecto del agua debe ser $-1,5\,\mathrm{m/s}$. Su componente transversal positiva es entonces

$$v_{y,\mathrm{barca/agua}} = \sqrt{(2,5\,\mathrm{m/s})^2 - (1,5\,\mathrm{m/s})^2} = 2\,\mathrm{m/s}.$$

El cruce dura doce segundos. Cancelar la deriva reduce la velocidad transversal disponible. Si la rapidez respecto del agua fuera menor que la corriente, no podría anularse la deriva; si fuera igual, cancelarla consumiría toda la velocidad y no quedaría avance transversal.

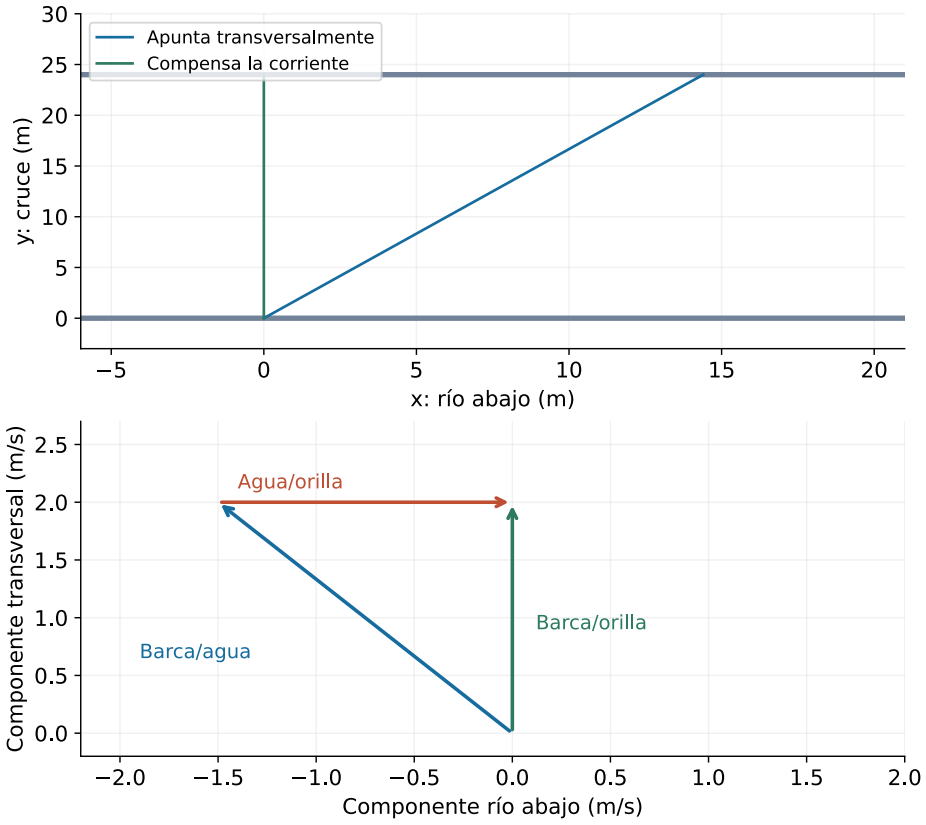


Figura 3.6. Las flechas forman una suma vectorial. Apuntar río arriba permite que la velocidad respecto de tierra sea transversal, a costa de aumentar el tiempo de cruce.

Lo que una trayectoria observada permite comprobar

La integración predice una parábola porque supusimos aceleración constante vertical. Una fotografía de la curva no basta para verificar esa aceleración: las dos parametrizaciones de la figura 3.2 muestran que una misma curva admite relojes diferentes. Para contrastar el modelo necesitamos posiciones con tiempos asociados, una escala espacial y una estimación de la incertidumbre de ambos registros.

En el lanzamiento ideal, intervalos de tiempo iguales producen incrementos horizontales iguales; las segundas diferencias verticales son constantes si los tiempos están igualmente espaciados. Una variación sistemática de esas cantidades, mayor que lo explicable por las cotas de medida, obliga a revisar el modelo y el procedimiento de observación. Puede haber resistencia del aire, un error de perspectiva o una escala temporal incorrecta. El residuo por sí solo no identifica su causa.

La separación entre cálculo y experiencia también alcanza a los objetivos y obstáculos. Una pelota real tiene tamaño; una abertura tiene bordes; la velocidad inicial varía entre ensayos. El modelo puntual calcula un paso por un punto. Para garantizar el paso de un objeto con extensión y datos inciertos hay que reservar márgenes geométricos y propagar las cotas de las magnitudes que se midieron. El ejercicio 19 desarrolla esa comprobación sin atribuir un significado probabilístico a los intervalos.

Ejercicios

Una primera práctica puede reunir 1, 2, 6, 7, 8, 9 y 14. Antes de leer la solución del 7, conviene reconstruir por escrito por qué una coordenada permite hallar el tiempo y la otra permite ajustar el lanzamiento. Los problemas 3–5, 11–13, 15, 16 y 18 amplían las representaciones y los regímenes; 10, 17, 19 y 20 profundizan en optimización, cotas y límites de una generalización.

En los problemas de proyectiles, usa $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$, aceleración vertical uniforme y resistencia del aire despreciable, salvo indicación contraria. Los datos numéricos son exactos dentro de cada modelo. En los problemas parametrizados, $\theta = t/(1\,\mathrm{s})$. Los vectores se expresan en una base cartesiana ortonormal fija.

1. Un camino con una esquina

Un robot recorre el segmento de $(0,0)$ a $(3,0)\,\mathrm{m}$ en tres segundos y después el segmento hasta $(3,4)\,\mathrm{m}$ en dos segundos. Calcula su desplazamiento, la distancia recorrida, la velocidad media y la rapidez media durante los cinco segundos. Explica por qué el módulo de la velocidad media no coincide con la rapidez media. No se pide asignar una aceleración al cambio instantáneo de dirección.

2. Leer una posición vectorial

Sea $\mathbf{r}(t) = (2\theta\mathbf{e}_x + \theta^2\mathbf{e}_y)\,\mathrm{m}$ para $0 \le t \le 2\,\mathrm{s}$. Halla la velocidad, la aceleración y la rapidez; evalúalas en un segundo. Obtén la ecuación cartesiana de la trayectoria y la velocidad media entre cero y dos segundos. ¿Coincide en este ejemplo con alguna velocidad instantánea?

3. Cambiar los ejes sin cambiar el movimiento

Una velocidad tiene componentes $(3,4)\,\mathrm{m/s}$ y una aceleración tiene componentes $(0,-10)\,\mathrm{m/s^2}$. La nueva base se obtiene girando los ejes 45° en sentido antihorario: $\mathbf{e}'_x = (\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y)/\sqrt{2}$, $\mathbf{e}'_y = (-\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y)/\sqrt{2}$. Calcula las nuevas componentes y comprueba que se conservan el módulo de la velocidad y el producto escalar $\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}$.

4. Acelerar mientras una componente disminuye

Una partícula parte de $\mathbf{r}_0 = (1, -1)\,\mathrm{m}$ con $\mathbf{v}_0 = (2, 3)\,\mathrm{m/s}$ y aceleración constante $\mathbf{a} = (1, -2)\,\mathrm{m/s^2}$. Halla su posición y velocidad en dos segundos. Decide si en ese instante la rapidez aumenta o disminuye y determina el instante de rapidez mínima para $t \geq 0$.

5. Reconstruir con una hipótesis explícita

En los instantes cero, uno y dos segundos se registran las posiciones $(0, 1)$, $(2, 3)$ y $(6, 1)\,\mathrm{m}$. Suponiendo aceleración vectorial constante, determina la velocidad inicial, la aceleración y la posición a los tres segundos. Explica qué parte de la respuesta depende de esa hipótesis y propone un registro que pueda contrastarla.

6. Salir horizontalmente

Una pelota sale horizontalmente a $6\,\mathrm{m/s}$ desde una plataforma situada veinte metros sobre un suelo horizontal. Calcula el tiempo hasta el primer contacto, el desplazamiento horizontal y la velocidad inmediatamente anterior al impacto. Compara el tiempo con el de otra pelota que se suelta desde el reposo a la misma altura, en el mismo instante.

7. Ajustar el lanzamiento

Una partícula parte del origen con componente horizontal de velocidad $6\,\mathrm{m/s}$. Debe pasar por $(12, 4)\,\mathrm{m}$. Determina la componente vertical inicial, el instante de paso y la velocidad en ese instante. Calcula además la altura máxima y decide si pasa por el objetivo al subir o al bajar.

8. Un alcance con sus hipótesis

Desde un suelo horizontal se lanza una pelota a $10\,\mathrm{m/s}$ formando 30° con la horizontal. Calcula el tiempo de vuelo, el alcance y la altura máxima. Compara su alcance con el de un lanzamiento a 45° con la misma rapidez. Explica por qué esa comparación no resuelve un lanzamiento hacia un piso de altura diferente.

9. Llegar a un nivel más bajo

Una pelota parte de $(0, 15)\,\mathrm{m}$ con velocidad $(4, 5)\,\mathrm{m/s}$. El suelo es $y = 0$. Halla el instante del primer impacto, su posición y su velocidad. Interpreta la otra raíz de la ecuación vertical y comprueba el signo de la componente vertical de impacto.

10. Una frontera de alcance

Con rapidez inicial $6\sqrt{5}\,\mathrm{m/s}$, se desea alcanzar la vertical $x = 12\,\mathrm{m}$. Determina la mayor altura alcanzable en esa vertical variando la dirección inicial entre $-\pi/2$ y $\pi/2$. Cuenta los ángulos que permiten pasar por las alturas de cuatro, cinco y seis metros. Supón vuelo libre hasta esa vertical, sin suelo ni obstáculos intermedios que lo interrumpan.

11. El objetivo no es la única restricción

Los dos lanzamientos del texto, con rapidez $6\sqrt{5}\,\mathrm{m/s}$, llegan a $(12, 4)\,\mathrm{m}$. Hay una pantalla vertical en $x = 9\,\mathrm{m}$ cuya única abertura está entre $y = 5\,\mathrm{m}$ e $y = 6\,\mathrm{m}$. Decide si alguno atraviesa esa abertura antes de alcanzar el objetivo. La pantalla bloquea todos los demás valores de y y se mantiene el modelo de partícula puntual.

12. Encontrar un suelo inclinado

Una partícula sale horizontalmente del origen a $4\,\mathrm{m/s}$. El suelo es la semirrecta $y = -x/2$, $x \geq 0$. Calcula el siguiente contacto con el suelo y la distancia desde el origen medida sobre la pendiente. Comprueba que antes del contacto la partícula permanece por encima del suelo.

13. Un encuentro que el suelo impide

Dos partículas comienzan simultáneamente en $(0, 0)$ y $(8, 6)\,\mathrm{m}$, con velocidades iniciales $(4, 8)$ y $(0, 5)\,\mathrm{m/s}$. Ambas tienen la misma aceleración vertical. Busca el encuentro que predicen las fórmulas de vuelo libre. Si el modelo de cada vuelo termina en su primer contacto posterior al lanzamiento con el suelo $y = 0$, decide si ese encuentro pertenece a los vuelos admisibles.

14. Una vuelta con rapidez constante

Una partícula describe con rapidez constante y en sentido antihorario un círculo de radio tres metros y centro en el origen. Su período es seis segundos y parte de $(3, 0)\,\mathrm{m}$. Escribe $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{v}(t)$ y $\mathbf{a}(t)$. Evalúa los tres vectores tras un cuarto de vuelta y compara la velocidad media y la rapidez media durante una vuelta completa.

15. Empezar a girar desde el reposo

En un círculo de radio un metro y centro fijo, el ángulo es $\varphi(t) = \theta^2$ para $t \geq 0$. Determina las componentes radial y tangencial de la aceleración y su módulo en un segundo. Halla también la aceleración inicial y explica por qué puede ser tangencial aunque la rapidez inicial sea cero.

16. Girar en el sentido contrario

Considera $\mathbf{r}(t) = 2[\cos\theta\,\mathbf{e}_x - \sin\theta\,\mathbf{e}_y]\,\mathrm{m}$. Calcula posición, velocidad y aceleración en $t = (\pi/2)\,\mathrm{s}$. Decide el sentido del giro, comprueba si cambia la rapidez y localiza la dirección de la aceleración respecto del centro.

17. Una corriente demasiado rápida

Un río recto tiene doce metros de ancho y corriente uniforme de $3\,\mathrm{m/s}$. Una embarcación mantiene rapidez $2\,\mathrm{m/s}$ respecto del agua y una dirección constante durante cada intento. ¿Puede llegar justo enfrente? Calcula el tiempo y la deriva si apunta perpendicularmente a las orillas. Entre las direcciones que permiten cruzar, determina además la que minimiza la deriva río abajo. Omitimos aceleración de arranque, tamaño de la embarcación y variaciones de corriente.

18. Dos máximos de altura para dos observadores

El lanzamiento del texto tiene $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$ y $\mathbf{v}_0 = (6, 12)\,\mathrm{m/s}$. Otro observador utiliza ejes paralelos cuyo origen coincide inicialmente con el lanzamiento y se mueve con velocidad constante $(2, 1)\,\mathrm{m/s}$. Escribe la posición y la velocidad respecto de ese observador. Compara los instantes en que se maximiza la coordenada vertical en ambos marcos y explica por qué sus aceleraciones siguen siendo iguales.

19. Garantizar el paso con datos acotados

El lanzamiento se realiza desde el origen, pero sólo se conocen las cotas $v_{0x} \in [5,9; 6,1]\,\mathrm{m/s}$ y $v_{0y} \in [11,9; 12,1]\,\mathrm{m/s}$. Todos los pares del rectángulo son admisibles; $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ y la vertical $x = 12\,\mathrm{m}$ se tratan como exactos. Obtén la cota más ajustada para la altura de paso y decide si se garantiza el paso de una partícula puntual por una abertura vertical $y \in [3,5; 4,5]\,\mathrm{m}$. Repite la decisión para $[3,8; 4,2]\,\mathrm{m}$. Supón que no hay obstáculos anteriores.

20. Un teorema escalar que no se traslada entero

El capítulo 1 prueba que, bajo las hipótesis del teorema del valor medio, alguna velocidad instantánea coincide con la velocidad media de un movimiento en una recta. Examina la pretendida extensión vectorial usando

$$\mathbf{r}(t) = [\cos\theta\,\mathbf{e}_x + \sin\theta\,\mathbf{e}_y]\,\mathrm{m}, \qquad 0 \le t \le 2\pi\,\mathrm{s}.$$

Calcula la velocidad media y decide si coincide con $\mathbf{v}(c)$ para algún instante interior. Explica cómo puede seguir siendo válido el teorema del valor medio para cada componente por separado.

Soluciones

1. Un camino con una esquina

El desplazamiento sólo utiliza los extremos: $\Delta\mathbf{r} = (3,4)\,\mathrm{m}$, de módulo cinco metros. La distancia cuenta ambos segmentos y vale $3+4 = 7\,\mathrm{m}$. Al dividir entre los cinco segundos obtenemos

$$\overline{\mathbf{v}} = \left(\frac{3}{5}\mathbf{e}_x + \frac{4}{5}\mathbf{e}_y\right)\,\mathrm{m/s}, \qquad \overline{q} = \frac{7}{5}\,\mathrm{m/s}.$$

El módulo de $\overline{\mathbf{v}}$ es $1\,\mathrm{m/s}$. La rapidez media es mayor porque el camino con una esquina tiene longitud mayor que el segmento directo que une los extremos. No hay contradicción entre los cocientes: sus numeradores miden cantidades diferentes. El cambio instantáneo de dirección es una idealización que no proporciona una aceleración ordinaria finita en la esquina; los promedios del recorrido siguen estando definidos.

2. Leer una posición vectorial

Al derivar hay que recordar que $d\theta/dt = 1/(1\,\mathrm{s})$. Por tanto,

$$\mathbf{v} = (2\mathbf{e}_x + 2\theta\mathbf{e}_y)\,\mathrm{m/s}, \qquad \mathbf{a} = 2\mathbf{e}_y\,\mathrm{m/s^2}, \qquad q = 2\sqrt{1+\theta^2}\,\mathrm{m/s}.$$

En un segundo la velocidad es $(2,2)\,\mathrm{m/s}$ y la rapidez $2\sqrt{2}\,\mathrm{m/s}$. La aceleración mantiene el valor indicado. De $x = 2\theta\,\mathrm{m}$ resulta $y = x^2/(4\,\mathrm{m})$, con $0 \le x \le 4\,\mathrm{m}$. El dominio espacial procede del intervalo temporal, no de la ecuación de la parábola completa.

Los extremos son $(0,0)$ y $(4,4)\,\mathrm{m}$. Su diferencia dividida entre dos segundos da $(2,2)\,\mathrm{m/s}$, que coincide aquí con la velocidad en un segundo. Esta coincidencia se comprueba en este movimiento concreto; el ejercicio 20 muestra por qué no debe convertirse en un teorema vectorial general.

3. Cambiar los ejes sin cambiar el movimiento

Las nuevas componentes se obtienen proyectando sobre los nuevos vectores unitarios. No se gira físicamente la velocidad. Así,

$$v'_x = \frac{3+4}{\sqrt{2}}\,\mathrm{m/s}, \qquad v'_y = \frac{-3+4}{\sqrt{2}}\,\mathrm{m/s},$$

mientras que $a'_x = a'_y = -5\sqrt{2}\,\mathrm{m/s^2}$. La rapidez calculada con las nuevas componentes es $\sqrt{49/2 + 1/2} = 5\,\mathrm{m/s}$, igual que antes. El producto escalar vale

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{a} = -40\,\mathrm{m^2/s^3} = \left[\frac{7}{\sqrt{2}}(-5\sqrt{2}) + \frac{1}{\sqrt{2}}(-5\sqrt{2})\right]\mathrm{m^2/s^3}.$$

La rotación ortonormal conserva las magnitudes geométricas. Una componente horizontal nula en una base no tiene por qué seguir siendo nula en otra; eso depende de qué direcciones llamamos ejes.

4. Acelerar mientras una componente disminuye

La aceleración es constante, por lo que podemos integrar las dos componentes con sus respectivos datos iniciales. En términos de θ,

$$\mathbf{r} = [(1 + 2\theta + \theta^2/2)\mathbf{e}_x + (-1 + 3\theta - \theta^2)\mathbf{e}_y]\,\mathrm{m},$$

$$\mathbf{v} = [(2 + \theta)\mathbf{e}_x + (3 - 2\theta)\mathbf{e}_y]\,\mathrm{m/s}.$$

En dos segundos obtenemos $\mathbf{r} = (7, 1)\,\mathrm{m}$ y $\mathbf{v} = (4, -1)\,\mathrm{m/s}$. Su producto con la aceleración es $6\,\mathrm{m^2/s^3}$, de modo que $\dot{q} = 6/\sqrt{17}\,\mathrm{m/s^2} > 0$. La rapidez aumenta aunque la componente y de la velocidad disminuya.

Para encontrar el mínimo podemos minimizar q^2, evitando derivar una raíz:

$$\frac{q^2}{(1\,\mathrm{m/s})^2} = (2 + \theta)^2 + (3 - 2\theta)^2 = 5\theta^2 - 8\theta + 13.$$

La parábola tiene su único mínimo en $\theta = 4/5$, que pertenece al dominio. Allí $\mathbf{v} = (14/5, 7/5)\,\mathrm{m/s}$ y $q = 7/\sqrt{5}\,\mathrm{m/s}$. La aceleración no se anula: en ese instante es perpendicular a la velocidad.

5. Reconstruir con una hipótesis explícita

En intervalos unitarios de tiempo, la segunda diferencia de las posiciones es la aceleración multiplicada por $(1\,\mathrm{s})^2$. Por tanto,

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{r}(2\,\mathrm{s}) - 2\mathbf{r}(1\,\mathrm{s}) + \mathbf{r}(0)}{(1\,\mathrm{s})^2} = (2, -4)\,\mathrm{m/s^2}.$$

La primera diferencia, $(2, 2)\,\mathrm{m}$, es $\mathbf{v}_0(1\,\mathrm{s}) + \mathbf{a}(1\,\mathrm{s})^2/2$, de donde $\mathbf{v}_0 = (1, 4)\,\mathrm{m/s}$. La historia reconstruida es

$$\mathbf{r} = [(\theta + \theta^2)\mathbf{e}_x + (1 + 4\theta - 2\theta^2)\mathbf{e}_y]\,\mathrm{m}.$$

Predice $(12, -5)\,\mathrm{m}$ a los tres segundos. Las tres posiciones fijan una única historia dentro de la familia de aceleración constante. Sin esa restricción, añadir por ejemplo $\lambda\theta(\theta-1)(\theta-2)\mathbf{e}_x\,\mathrm{m}$, con λ adimensional, conserva todos los registros y cambia la predicción posterior. Una cuarta posición, obtenida a los tres segundos y comparada con sus cotas, permitiría contrastar la familia cuadrática sin reutilizar uno de los datos de ajuste como prueba independiente.

6. Salir horizontalmente

El evento que termina el vuelo es llegar a $y = 0$, de modo que empezamos por la ecuación vertical y conservamos su primer cero positivo. Ese tiempo se usa después en la componente horizontal. Igualar por separado un tiempo horizontal y otro vertical describiría dos posiciones que la pelota no ocupa simultáneamente.

Tomamos el origen en el suelo bajo el punto de salida. La coordenada vertical es $y = 20\,\mathrm{m} - gt^2/2$. Su primer cero positivo es $t = 2\,\mathrm{s}$. En ese tiempo, el avance horizontal es $x = (6\,\mathrm{m/s})(2\,\mathrm{s}) = 12\,\mathrm{m}$ y la velocidad es

$$\mathbf{v} = (6, -20)\,\mathrm{m/s}, \qquad q = \sqrt{6^2 + 20^2}\,\mathrm{m/s} = 2\sqrt{109}\,\mathrm{m/s}.$$

La pelota soltada tiene la misma coordenada vertical inicial, la misma velocidad vertical inicial nula y la misma aceleración vertical. Sus historias verticales coinciden, de modo que llega al suelo en el mismo instante. La igualdad de tiempos depende de esas condiciones y del modelo sin resistencia del aire; la velocidad horizontal adicional no aparece en su ecuación vertical.

7. Ajustar el lanzamiento

El dato horizontal ya fija el tiempo disponible: mientras esa componente sea constante y positiva, alcanzar la vertical del objetivo obliga a $t = X/v_{0x}$. La componente vertical inicial se ajusta después para que la misma pelota tenga la altura requerida en ese mismo instante. Esta es la elección que hay que reconstruir al estudiar el ejemplo, antes de repetir sus números.

Con los datos propuestos, $t = 12/6\,\mathrm{s} = 2\,\mathrm{s}$. La condición vertical exige $4\,\mathrm{m} = v_{0y}(2\,\mathrm{s}) - 20\,\mathrm{m}$, así que $v_{0y} = 12\,\mathrm{m/s}$. Al pasar por el objetivo,

$$\mathbf{v} = (6, -8)\,\mathrm{m/s}.$$

La componente negativa muestra que llega al bajar. Su componente vertical se anula antes, en $t = v_{0y}/g = 1,2\,\mathrm{s}$; la altura allí es $v_{0y}^2/(2g) = 7,2\,\mathrm{m}$. El valor se obtiene sustituyendo el instante en la posición y conserva unidades de longitud. La aceleración en la cima sigue siendo $(0, -10)\,\mathrm{m/s^2}$: ninguna de las ecuaciones de este modelo permite que se apague cuando $v_y = 0$.

Como variación del mismo método, si la componente horizontal fuera $24\,\mathrm{m/s}$ y se mantuviera el objetivo en $(12, 4)\,\mathrm{m}$, el tiempo sería $0{,}5\,\mathrm{s}$. La ecuación vertical daría $v_{0y} = 10{,}5\,\mathrm{m/s}$ y la velocidad vertical de llegada sería $5{,}5\,\mathrm{m/s} > 0$: esta vez pasaría al subir. El punto de llegada por sí solo no decide si la pelota asciende o desciende; también interviene el tiempo que impone la componente horizontal.

8. Un alcance con sus hipótesis

Las componentes iniciales son $v_{0x} = 5\sqrt{3}\,\mathrm{m/s}$ y $v_{0y} = 5\,\mathrm{m/s}$. El retorno al nivel de salida satisface $0 = t(v_{0y} - gt/2)$. La raíz cero es el lanzamiento; la otra es $T = 2v_{0y}/g = 1\,\mathrm{s}$. Entonces

$$R = 5\sqrt{3}\,\mathrm{m}, \qquad h_{\mathrm{máx}} = \frac{v_{0y}^2}{2g} = 1,25\,\mathrm{m}.$$

A 45° y con la misma rapidez, el alcance es $u^2/g = 10\,\mathrm{m}$, mayor que $5\sqrt{3}\,\mathrm{m}$. Para un nivel final diferente habría que resolver $Y = v_{0y}t - gt^2/2$ con ese valor de Y. La raíz positiva ya no sería en general $2v_{0y}/g$ y la expresión usada para comparar alcances dejaría de corresponder al evento de llegada.

9. Llegar a un nivel más bajo

La coordenada vertical es $y = (15 + 5\theta - 5\theta^2)\,\mathrm{m}$. Sus ceros satisfacen $\theta^2 - \theta - 3 = 0$, por lo que

$$t_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}\,\mathrm{s}.$$

La raíz negativa pertenece a la prolongación de la parábola antes del lanzamiento y queda fuera del dominio. La raíz positiva es el primer impacto. Su posición y velocidad son

$$\mathbf{r}(t_+) = \big(2(1 + \sqrt{13}), 0\big)\,\mathrm{m}, \qquad \mathbf{v}(t_+) = \big(4, -5\sqrt{13}\big)\,\mathrm{m/s}.$$

La rapidez es $\sqrt{341}\,\mathrm{m/s}$. La componente vertical negativa confirma la llegada descendente; el impacto ocurre después de la cima, situada en medio segundo. Las fórmulas de vuelo libre dejan de describir la pelota al producirse el contacto.

10. Una frontera de alcance

En la vertical elegida, la altura como función de $z = \tan\alpha$ es

$$Y(z) = [12z - 4(1 + z^2)]\,\mathrm{m} = [5 - 4(z - 3/2)^2]\,\mathrm{m}.$$

Completar el cuadrado muestra tanto el máximo como la cantidad de soluciones. La mayor altura es cinco metros y corresponde a $z = 3/2$. Para cuatro metros se obtiene $(z-3/2)^2 = 1/4$, de donde $z = 1$ o $z = 2$. Para cinco metros hay una sola solución; para seis, ninguna real.

Los valores reales de z corresponden de manera única a ángulos entre $-\pi/2$ y $\pi/2$, con componente horizontal positiva, y por tanto a tiempos positivos hasta $x = 12\,\mathrm{m}$. El supuesto de vuelo libre hasta esa vertical permite contarlos como soluciones del problema. Añadir un suelo o una pantalla requeriría filtrar otra vez esos candidatos.

La variable z conserva toda la elección de dirección permitida por el enunciado. Al completar el cuadrado escribimos la altura como un valor fijo menos una cantidad no negativa; así, la misma cuenta resuelve la optimización y cuenta las direcciones de llegada. Por debajo del máximo aparecen dos valores equidistantes de $3/2$; en el máximo coinciden. Esta simetría corresponde a las tangentes de los ángulos: sus diferencias angulares se obtienen aplicando la arcotangente y tienen otra escala.

11. El objetivo no es la única restricción

Las dos trayectorias son $y = x - x^2/(18\,\mathrm{m})$ y $y = 2x - 5x^2/(36\,\mathrm{m})$. En $x = 9\,\mathrm{m}$ sus alturas respectivas son

$$y_1 = 4{,}5\,\mathrm{m}, \qquad y_2 = 6{,}75\,\mathrm{m}.$$

La primera queda por debajo de la abertura y la segunda por encima. Ninguna atraviesa la pantalla. Que ambas alcancen el objetivo en ausencia de obstáculos no responde a esta nueva pregunta: el modelo de vuelo termina en la pantalla antes del instante de llegada calculado. Una búsqueda limitada a verificar el punto final omitiría la condición decisiva.

12. Encontrar un suelo inclinado

La posición es $x = 4\theta\,\mathrm{m}$, $y = -5\theta^2\,\mathrm{m}$. Al imponer $y = -x/2$ obtenemos $-5\theta^2 = -2\theta$. La raíz cero corresponde a la salida; la siguiente es $\theta = 2/5$. El contacto ocurre en

$$t = 0{,}4\,\mathrm{s}, \qquad (x, y) = (1{,}6;\ -0{,}8)\,\mathrm{m}.$$

La distancia sobre la recta inclinada entre ambos puntos es $\sqrt{(1,6)^2 + (0,8)^2}\,\mathrm{m} = (4\sqrt{5}/5)\,\mathrm{m}$. Es una distancia sobre el suelo, diferente de la longitud del vuelo curvo. Para comprobar que elegimos el siguiente contacto, restamos la altura del terreno a la del proyectil:

$$y_{\text{pelota}} - y_{\text{suelo}} = (2\theta - 5\theta^2)\,\mathrm{m} = \theta(2 - 5\theta)\,\mathrm{m} > 0 \quad \text{si } 0 < \theta < 2/5.$$

La partícula permanece por encima durante todo ese intervalo, de modo que no hay otro contacto anterior que invalide el cálculo.

13. Un encuentro que el suelo impide

La separación inicial es $(8, 6)\,\mathrm{m}$ y la diferencia de velocidades iniciales es $(-4, -3)\,\mathrm{m/s}$. Como las aceleraciones coinciden, su diferencia es cero. Por tanto,

$$\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A = [(8 - 4\theta)\mathbf{e}_x + (6 - 3\theta)\mathbf{e}_y]\,\mathrm{m}.$$

Las dos componentes se anulan simultáneamente en dos segundos. Sustituir ese instante en cualquiera de las posiciones da el encuentro formal $(8, -4)\,\mathrm{m}$.

El primer proyectil regresa al suelo cuando $8\theta - 5\theta^2 = 0$, en $t = 8/5\,\mathrm{s}$. Para el segundo, $6 + 5\theta - 5\theta^2 = 0$ da el cero positivo $t = (5 + \sqrt{145})/10\,\mathrm{s}$, aproximadamente $1,704\,\mathrm{s}$. Ambos vuelos terminan antes de dos segundos. El encuentro formal queda fuera de los dos dominios admisibles; el enunciado no proporciona leyes posteriores al contacto que autoricen prolongarlos. La cancelación de la aceleración simplificó el cálculo del candidato y dejó intacta la obligación de revisar su régimen.

14. Una vuelta con rapidez constante

El ángulo aumenta 2π en seis segundos, así que $\omega = \pi/(3\,\mathrm{s})$. Las condiciones iniciales fijan

$$\mathbf{r} = 3[\cos(\pi\theta/3)\mathbf{e}_x + \sin(\pi\theta/3)\mathbf{e}_y]\,\mathrm{m},$$

$$\mathbf{v} = \pi[-\sin(\pi\theta/3)\mathbf{e}_x + \cos(\pi\theta/3)\mathbf{e}_y]\,\mathrm{m/s},$$

$$\mathbf{a} = -\frac{\pi^2}{3}[\cos(\pi\theta/3)\mathbf{e}_x + \sin(\pi\theta/3)\mathbf{e}_y]\,\mathrm{m/s^2}.$$

En un cuarto de vuelta, $t = 1,5\,\mathrm{s}$, son $\mathbf{r} = (0, 3)\,\mathrm{m}$, $\mathbf{v} = (-\pi, 0)\,\mathrm{m/s}$ y $\mathbf{a} = (0, -\pi^2/3)\,\mathrm{m/s^2}$. La aceleración apunta hacia el origen.

Durante una vuelta los extremos coinciden y la velocidad media es cero. La distancia recorrida es $2\pi R = 6\pi\,\mathrm{m}$, por lo que la rapidez media es $\pi\,\mathrm{m/s}$, igual a la rapidez instantánea constante. El contraste entre ambos promedios no depende de pequeñas irregularidades del movimiento: ya ocurre en el círculo uniforme ideal.

15. Empezar a girar desde el reposo

La velocidad angular es $\dot\varphi = 2\theta\,\mathrm{s^{-1}}$ y su derivada es $\ddot\varphi = 2\,\mathrm{s^{-2}}$. Con $R = 1\,\mathrm{m}$,

$$\mathbf{a} = (-4\theta^2\mathbf{e}_r + 2\mathbf{e}_\varphi)\,\mathrm{m/s^2}.$$

En un segundo, la componente radial orientada hacia afuera es $-4\,\mathrm{m/s^2}$ y la tangencial orientada según $\mathbf{e}_\varphi$ es $2\,\mathrm{m/s^2}$. Por ser perpendiculares, el módulo total es $\sqrt{16 + 4} = 2\sqrt{5}\,\mathrm{m/s^2}$.

En el instante inicial, $\varphi = 0$, $\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_x$ y $\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_y$. La aceleración inicial es $2\mathbf{e}_y\,\mathrm{m/s^2}$, aunque la velocidad inicial sea cero. El círculo ya tiene una tangente geométrica en ese punto; la aceleración inicia el movimiento en esa dirección. La componente radial se anula al partir porque depende del cuadrado de la rapidez, y aparece cuando ésta crece. No hemos utilizado $\dot q = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})/q$ en el reposo, donde esa expresión no está definida.

16. Girar en el sentido contrario

Derivar las componentes da

$$\mathbf{v} = 2[-\sin\theta\,\mathbf{e}_x - \cos\theta\,\mathbf{e}_y]\,\mathrm{m/s}, \qquad \mathbf{a} = 2[-\cos\theta\,\mathbf{e}_x + \sin\theta\,\mathbf{e}_y]\,\mathrm{m/s^2}.$$

En $\theta = \pi/2$ resultan $\mathbf{r} = (0, -2)\,\mathrm{m}$, $\mathbf{v} = (-2, 0)\,\mathrm{m/s}$ y $\mathbf{a} = (0, 2)\,\mathrm{m/s^2}$. El ángulo puede escribirse $\varphi = -\theta$: el giro es horario. La rapidez vale siempre $2\,\mathrm{m/s}$ y el producto $\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}$ es cero. En el punto inferior, el centro queda arriba y la aceleración apunta precisamente hacia él. Invertir el sentido del giro cambia la velocidad tangencial, pero conserva la dirección radial hacia el centro para una misma posición y rapidez.

17. Una corriente demasiado rápida

Tomamos x río abajo e y transversalmente hacia la otra orilla. La corriente aporta $3\,\mathrm{m/s}$ a la componente x. La embarcación sólo puede aportar, como máximo, $2\,\mathrm{m/s}$ río arriba respecto del agua, así que su componente x respecto de tierra siempre es positiva. No puede llegar justo enfrente con ninguna dirección constante; tampoco podría hacerlo variando la dirección mientras mantenga esa cota de rapidez y esta corriente uniforme.

Si apunta perpendicularmente a las orillas, su velocidad respecto de tierra es $(3, 2)\,\mathrm{m/s}$. Cruza en seis segundos y deriva dieciocho metros.

Para minimizar la deriva con dirección constante, escribimos la velocidad respecto del agua como $(2\sin\beta, 2\cos\beta)\,\mathrm{m/s}$, donde $-\pi/2 < \beta < \pi/2$ garantiza avance transversal. El tiempo de cruce es $12/(2\cos\beta)\,\mathrm{s}$ y la deriva es

$$D(\beta) = 6\frac{3 + 2\sin\beta}{\cos\beta}\,\mathrm{m}.$$

Derivar el cociente produce

$$\frac{dD}{d\beta} = 6\frac{2 + 3\sin\beta}{\cos^2\beta}\,\mathrm{m}.$$

La única raíz es $\sin\beta = -2/3$, con $\cos\beta = \sqrt{5}/3$. La derivada cambia de negativa a positiva allí, y D tiende a infinito en ambos extremos del intervalo; es el mínimo global. La velocidad respecto del agua tiene componentes $(-4/3, 2\sqrt{5}/3)\,\mathrm{m/s}$; respecto de tierra son $(5/3, 2\sqrt{5}/3)\,\mathrm{m/s}$. El cruce dura $18/\sqrt{5}\,\mathrm{s}$ y la deriva mínima es $6\sqrt{5}\,\mathrm{m}$, aproximadamente $13,42\,\mathrm{m}$. Apuntar algo río arriba reduce la deriva, pero una orientación casi paralela a la orilla haría crecer demasiado el tiempo de cruce.

18. Dos máximos de altura para dos observadores

La transformación resta el desplazamiento del nuevo origen en cada instante. Obtenemos

$$\mathbf{r}' = [4\theta\mathbf{e}_x + (11\theta - 5\theta^2)\mathbf{e}_y]\,\mathrm{m}, \qquad \mathbf{v}' = [4\mathbf{e}_x + (11 - 10\theta)\mathbf{e}_y]\,\mathrm{m/s}.$$

La coordenada vertical de este observador se maximiza en $t = 1,1\,\mathrm{s}$, cuando $v_y' = 0$; su máximo es $121/20\,\mathrm{m} = 6,05\,\mathrm{m}$. En el marco original, el máximo ocurre en $1,2\,\mathrm{s}$ y vale $7,2\,\mathrm{m}$. Se están comparando alturas respecto de orígenes cuya separación vertical aumenta: son funciones distintas y sus extremos pueden corresponder a eventos distintos.

Al derivar otra vez, ambos observadores obtienen $\mathbf{a} = -10\mathbf{e}_y\,\mathrm{m/s^2}$. La velocidad constante que los separa desaparece en esa derivación. La igualdad de aceleraciones no obliga a que coincidan las velocidades ni los instantes de sus componentes verticales nulas.

19. Garantizar el paso con datos acotados

El instante de paso no es un dato independiente de v_{0x}: cada componente horizontal admisible produce su propio tiempo. Por eso sustituimos $t = X/v_{0x}$ antes de propagar las cotas. Para estudiar la función de dos entradas mantendremos una fija y derivaremos respecto de la otra; eso es lo que indican los símbolos ∂ de las derivadas parciales siguientes. Sólo necesitamos derivadas de funciones de una variable en cada comparación.

Como $v_{0x} > 0$, cada lanzamiento alcanza la vertical elegida en el tiempo $t = X/v_{0x}$. Su altura allí es

$$Y(v_{0x}, v_{0y}) = \frac{X v_{0y}}{v_{0x}} - \frac{gX^2}{2v_{0x}^2}, \qquad X = 12\,\mathrm{m}.$$

No basta con sustituir límites sin examinar cómo varía esta expresión: v_{0x} aparece en dos denominadores con efectos opuestos. Sus derivadas son

$$\frac{\partial Y}{\partial v_{0y}} = \frac{X}{v_{0x}} > 0, \qquad \frac{\partial Y}{\partial v_{0x}} = \frac{X(gX - v_{0y}v_{0x})}{v_{0x}^3}.$$

En el rectángulo dado, $v_{0y}v_{0x} \le (12,1)(6,1)\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2 = 73,81\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$, mientras que $gX = 120\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$. La derivada respecto de v_{0x} también es positiva en todo el dominio. La altura aumenta con ambas componentes; sus extremos se alcanzan en la esquina con ambas componentes mínimas y en la esquina con ambas máximas, respectivamente:

$$Y_{\mathrm{mín}} = \frac{12252}{3481}\,\mathrm{m}, \qquad Y_{\mathrm{máx}} = \frac{16572}{3721}\,\mathrm{m}.$$

La imagen completa del rectángulo es ese intervalo: la continuidad y la variación a lo largo de la diagonal que une las esquinas aseguran todos los valores intermedios. Redondeando hacia afuera obtenemos una cota práctica $Y \in [3,519; 4,454]\,\mathrm{m}$. Está contenida en $[3,5; 4,5]\,\mathrm{m}$, por lo que se garantiza el paso de la partícula puntual por esa abertura. No está contenida en $[3,8; 4,2]\,\mathrm{m}$: algunos lanzamientos admisibles pasan fuera y no hay garantía para la abertura más estrecha.

Las cotas se han propagado como restricciones deterministas. No se ha supuesto independencia estadística, distribución de errores ni una probabilidad de éxito. Una pelota de radio conocido exigiría reducir previamente el intervalo de alturas permitido para su centro, y la incertidumbre de g o de X añadiría variables al problema de cotas.

20. Un teorema escalar que no se traslada entero

Los extremos del movimiento coinciden. Por tanto, $\overline{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$. Sin embargo,

$$\mathbf{v}(t) = [-\sin\theta\,\mathbf{e}_x + \cos\theta\,\mathbf{e}_y]\,\mathrm{m/s}, \qquad \|\mathbf{v}(t)\| = 1\,\mathrm{m/s}$$

en todo el intervalo. Ninguna velocidad instantánea es el vector cero, aunque la posición sea suave y se satisfagan todas las hipótesis escalares de regularidad.

Para $x(t)$, el teorema del valor medio encuentra una derivada nula en el instante interior $t = \pi\,\mathrm{s}$. Para $y(t)$ encuentra derivadas nulas en $t = (\pi/2)\,\mathrm{s}$ y $t = (3\pi/2)\,\mathrm{s}$. Los instantes que funcionan para una componente no funcionan para la otra. Aplicar el teorema por componentes garantiza la existencia de instantes que pueden ser diferentes; pedir un solo instante común añade una conclusión que el teorema no proporciona. El ejemplo del ejercicio 2 conserva su coincidencia particular sin autorizar esa generalización.

Lecturas de apoyo

Las coordenadas temporales, las condiciones iniciales y la selección de eventos admisibles se desarrollan en los capítulos 1 y 2. El tratamiento de intervalos del capítulo 0 permite interpretar el ejercicio 19. Se utiliza cálculo de una variable aplicado componente a componente, producto escalar en una base ortonormal y trigonometría elemental; las derivadas de la base circular se construyen en el texto.

Para el cotejo de la exposición se consultaron Young y Freedman, *Sears y Zemansky. Física universitaria*, vol. 1, 13.ª ed. (Pearson, 2013), pasajes de §§3.1, 3.3–3.5, sobre velocidad vectorial, proyectiles, movimiento circular y velocidad relativa; y Serway y Jewett, *Física para ciencias e ingeniería*, vol. 1, 10.ª ed. en español (Cengage, 2019), pasajes de §§4.2–4.4, sobre aceleración constante en el plano, proyectiles y movimiento circular. La coincidencia temática no implica reproducir sus enunciados: los datos, problemas, soluciones y figuras de este capítulo se han desarrollado para esta obra. El registro editorial distingue los pasajes consultados de los contenidos que no fueron objeto de cotejo.

Capítulo 4

Fuerzas y leyes de Newton

El carro del capítulo 1 avanzaba a ocho metros por segundo y disponía de veinte metros de riel. Al suponer una aceleración constante de menos dos metros por segundo al cuadrado, calculamos que se detenía en cuatro segundos después de recorrer dieciséis metros. La aceleración era un dato del modelo. Para diseñar el freno necesitamos relacionarla con las interacciones que actúan sobre el carro: un mismo dispositivo no producirá necesariamente el mismo frenado si cambia la carga.

Añadamos un dato: la masa total del carro y su carga es de cuatro kilogramos. El carro se traslada sobre un riel horizontal sin cambiar de orientación; la aceleración de su frente coincide con la de los demás puntos. Lo representaremos como una partícula de esa masa y mantendremos el frente como referencia de posición. Un dispositivo de frenado fijo al laboratorio ejerce una fuerza horizontal controlada sobre el carro mientras éste avanza. Despreciaremos las demás resistencias horizontales y trataremos el laboratorio como un marco inercial aproximado para la duración y precisión del ensayo.

La descripción cinemática nos dice qué aceleración queremos obtener. Las leyes de Newton permitirán calcular qué fuerza resultante debe producirla. Para utilizarlas habrá que decidir qué pertenece al carro y qué queda fuera de él.

El cuerpo elegido decide qué fuerzas se suman

Definición. Un *sistema mecánico* es el cuerpo o conjunto de cuerpos que se elige para el análisis. Una fuerza es *externa* si su agente pertenece al entorno y actúa sobre un cuerpo del sistema; es *interna* si relaciona dos cuerpos incluidos en él.

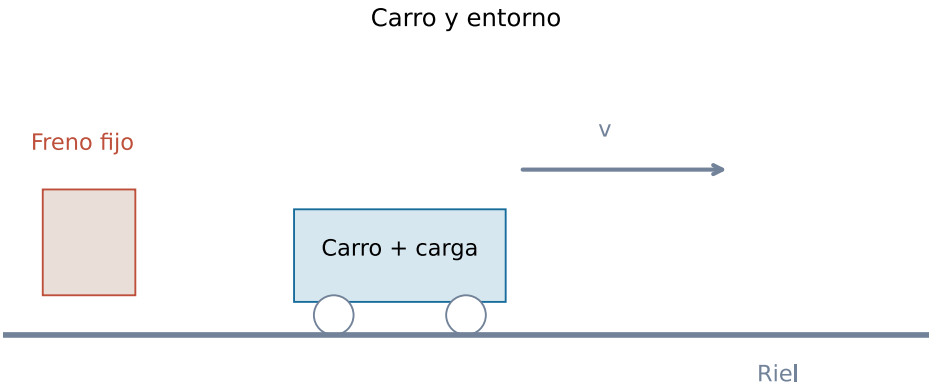
Esta clasificación depende de la frontera elegida. La fuerza de una cuerda sobre un carro es externa al sistema formado por el carro solo; si incluimos también la cuerda, esa interacción queda dentro del sistema y aparecen otras fuerzas externas, por ejemplo las que se ejercen sobre el otro extremo de la cuerda. Cambiar la frontera exige revisar el inventario de interacciones.

En nuestro primer análisis, el sistema contiene el carro y la carga que se mueve con él. Quedan fuera la Tierra, el riel y el freno fijo. La Tierra ejerce la fuerza gravitatoria; el riel ejerce una fuerza de contacto; el freno ejerce una fuerza horizontal opuesta al avance. Un dispositivo de frenado instalado enteramente dentro de un carro aislado requeriría otro análisis: sus interacciones internas no pueden sustituir, sin más, la fuerza externa que aquí proporciona el freno fijo.

Representaremos cada fuerza mediante un vector e identificaremos a su agente. La notación

$$\mathbf{F}_{A\to B}$$

significa fuerza ejercida por A sobre B. El cuerpo B es quien recibe esa fuerza. En un diagrama del carro sólo entran fuerzas que terminan en el carro; las que éste ejerce sobre el riel o el freno pertenecen a los diagramas de esos otros cuerpos.



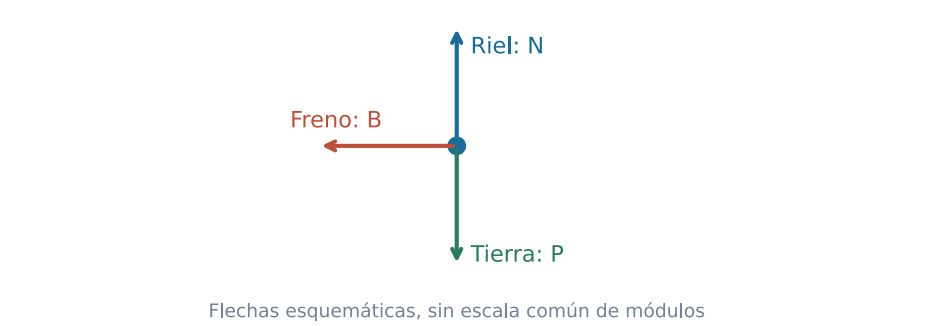


Figura 4.1. La flecha de velocidad pertenece a la descripción del movimiento. En el diagrama de cuerpo libre aparecen únicamente las tres fuerzas externas del modelo. El freno permanece fuera del sistema carro y carga.

Un diagrama de cuerpo libre conserva el sistema elegido y reemplaza el entorno por sus fuerzas.

Para construir el del carro, imaginamos que lo retiramos del dibujo junto con su carga y conservamos un punto que los representa. A cada contacto o interacción con el entorno le corresponde una flecha recibida por ese punto: el riel empuja, la Tierra atrae y el freno actúa horizontalmente. El inventario se construye antes de sumar y antes de conocer la aceleración. Si desconocemos un módulo, conservamos una letra para él; elegir su valor para que salga el movimiento deseado ocultaría la pregunta que intentamos resolver. En el modelo de partícula, todas pueden dibujarse desde un mismo punto porque sólo estudiamos la traslación. Cuando interese la rotación, el lugar de aplicación de cada fuerza aportará información que esta representación ha omitido.

Una resultante no es otra interacción

Definición. La *fuerza resultante* o *fuerza neta* sobre una partícula es la suma vectorial de las fuerzas externas incluidas en su modelo:

$$\mathbf{F}_{\text{neta}} = \sum_{A} \mathbf{F}_{A\to B}.$$

Para el carro, usando ejes horizontal y vertical,

$$\mathbf{F}_{\text{neta}} = -B\mathbf{e}_x + (N - P)\mathbf{e}_y.$$

Aquí $B \geq 0$ es el módulo de la fuerza del freno, $N \geq 0$ el de la componente normal del contacto del riel y $P \geq 0$ el del peso. La normal es perpendicular a la superficie de contacto; una componente tangencial, si fuera relevante, exigiría su propio modelo. Despreciarla es una hipótesis de este ensayo, no una propiedad universal de los rieles.

La resultante reúne las interacciones ya enumeradas. Si se dibujan las tres fuerzas y después se añade su resultante como una cuarta fuerza, se las cuenta dos veces. Tampoco se agrega una fuerza en la dirección de la velocidad por el hecho de que el carro avance. La flecha de velocidad comunica cómo cambia la posición; cada fuerza del inventario necesita un agente.

Las componentes sirven para calcular la suma. Si una fuerza oblicua se expresa como $F_x\mathbf{e}_x + F_y\mathbf{e}_y$, ambos términos representan esa misma fuerza. Podemos utilizar el vector completo o sus componentes, conservando esa equivalencia durante la cuenta.

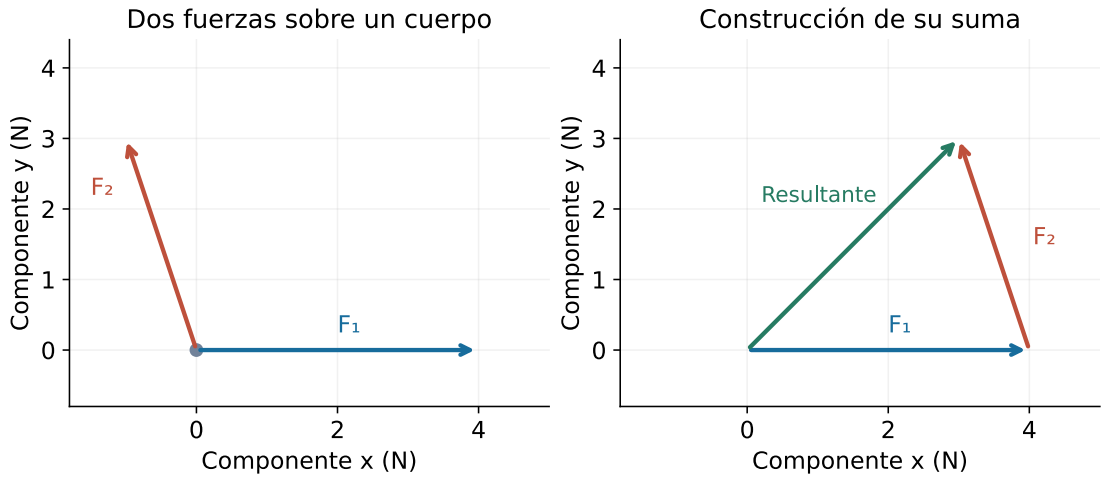


Figura 4.2. La construcción punta con cola calcula la suma. La resultante pertenece al cálculo del efecto conjunto, mientras que las fuerzas individuales conservan sus agentes.

El marco forma parte de la ley

Una partícula que se mueve libremente dentro de un vagón puede parecer acelerada para un pasajero si el vagón acelera. El observador del andén y el del vagón asignan coordenadas distintas al mismo movimiento. Antes de relacionar una aceleración con fuerzas hay que precisar qué clase de marco utiliza la ecuación.

Definición. Llamaremos *inercial* a un marco en el que todo cuerpo suficientemente aislado conserva una velocidad vectorial constante. La palabra aislado expresa que las interacciones residuales son despreciables para la precisión y el intervalo de estudio.

Primera ley de Newton. La descripción newtoniana admite marcos inerciales: en ellos, un cuerpo libre permanece en reposo o se mueve en línea recta con velocidad constante.

Esta ley establece una referencia física para la ausencia de aceleración. La posición de reposo depende del observador; el movimiento rectilíneo uniforme puede convertirse en reposo al pasar a un marco que acompañe al cuerpo. El capítulo 3 mostró que las traslaciones uniformes con ejes fijos y paralelos conservan las aceleraciones, por lo que la familia de marcos inerciales contiene todos los obtenidos así a partir de uno de ellos.

Un solo cuerpo con aceleración nula no basta para declarar inercial un marco: quizá una interacción compensa su aceleración respecto de otra referencia. El criterio involucra el comportamiento de cuerpos suficientemente aislados y debe sostenerse en el régimen examinado. En los problemas de laboratorio de este capítulo adoptaremos la aproximación inercial del

suelo; sus límites deberán revisarse en movimientos suficientemente prolongados, extensos o precisos.

Qué relacionan la masa y la aceleración

Segunda ley de Newton. Para una partícula de masa inercial constante $m > 0$, descrita desde un marco inercial,

$$\sum_{A} \mathbf{F}_{A\to B} = m\mathbf{a}.$$

Las fuerzas que aparecen en el miembro izquierdo deben especificarse mediante las interacciones del modelo. La aceleración del derecho es la segunda derivada de la posición del mismo cuerpo y respecto del mismo marco. Con bases cartesianas fijas, la igualdad equivale a una ecuación por componente:

$$\sum_{A} F_{A\to B,x} = m\ddot{x}, \qquad \sum_{A} F_{A\to B,y} = m\ddot{y}.$$

La ley es un principio físico que contrastamos mediante experiencias; no se obtiene demostrando un teorema del cálculo. Podemos inferir la fuerza neta requerida por una aceleración observada, o predecir una aceleración a partir de fuerzas determinadas de otra manera. Si toda fuerza se asignara únicamente después de medir la aceleración, escribir la igualdad no ofrecería una predicción independiente. Un ensayo útil calibra el dispositivo, mide la masa y compara el movimiento posterior con el calculado bajo esas condiciones.

La masa inercial mide la respuesta a una fuerza neta. Si la misma fuerza produce aceleraciones de módulos a_1 y a_2 en dos cuerpos, la ley exige $m_1 a_1 = m_2 a_2$, de modo que sus masas son inversamente proporcionales a esas aceleraciones. La comparación requiere que la fuerza neta sea realmente la misma; repetir una posición de un mando no garantiza ese hecho sin un modelo o una calibración del dispositivo.

En el SI, la relación de unidades es

$$1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg\,m/s^2}.$$

La masa se expresa en kilogramos y la fuerza en newtons. Un dinamómetro calibrado mide una fuerza a través de una respuesta instrumental; una balanza puede mostrar una estimación de masa bajo las condiciones de su calibración. El número que aparece en la pantalla necesita esa interpretación antes de entrar en una ecuación.

El producto $m\mathbf{a}$ expresa el resultado que debe igualar la suma. No corresponde a una interacción adicional que se dibuje junto a las fuerzas del entorno. Al resolver $-B = ma_x$, por ejemplo, ya se ha relacionado la fuerza del freno con la aceleración; añadir otra fuerza de módulo $m|a_x|$ duplicaría ese papel.

Recuperar el frenado desde las interacciones

Cerca de la superficie terrestre modelaremos el peso como $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$, con $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_y$. El uso de la misma masa en la respuesta inercial y en esta ley gravitatoria recoge una propiedad experimental; no se deduce de la definición de derivada. Usaremos $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ como valor didáctico en los ejemplos numéricos.

Para el carro de cuatro kilogramos que permanece sobre el riel horizontal, la coordenada vertical es constante durante el ensayo. Por tanto, $a_y = 0$ y la ecuación vertical da

$$N - mg = 0, \qquad N = 40\,\mathrm{N}.$$

La igualdad entre normal y módulo del peso se obtuvo usando la restricción vertical y la ausencia de otras fuerzas con componente vertical. El mero hecho de que exista una superficie no la garantiza.

La aceleración horizontal deseada es $-2\,\mathrm{m/s^2}$. En consecuencia,

$$-B = (4\,\mathrm{kg})(-2\,\mathrm{m/s^2}), \qquad B = 8\,\mathrm{N}.$$

Si el freno proporciona esa fuerza neta constante mientras el carro avanza, recuperamos la historia anterior:

$$v(t) = 8\,\mathrm{m/s} - (2\,\mathrm{m/s^2})t, \qquad x(t) = (8\,\mathrm{m/s})t - (1\,\mathrm{m/s^2})t^2, \qquad 0 \le t \le 4\,\mathrm{s}.$$

Supondremos que al detenerse se retira la fuerza horizontal del freno y el carro permanece en reposo. Mantener después la fuerza $-8\,\mathrm{N}$ sería otro modelo y predeciría una inversión del movimiento. La condición de parada no aparece por resolver una ecuación cuadrática: hay que explicar qué cambia físicamente al llegar a ella.

Con una carga que elevara la masa total a ocho kilogramos, la misma fuerza neta produciría $a_x = -1\,\mathrm{m/s^2}$. En una guía ilimitada, el carro tardaría ocho segundos en detenerse y recorrería treinta y dos metros. En el riel disponible alcanzaría el extremo antes de parar; la prolongación hasta treinta y dos metros sólo sirve para mostrar que ese freno no satisface la condición del ensayo.

El apoyo se calcula junto con el movimiento

Una persona sobre una plataforma que acelera verticalmente recibe dos fuerzas en el modelo elemental: el peso y la normal del apoyo. El sistema elegido es la persona; el mecanismo que acelera la plataforma pertenece al entorno. Mientras mantiene contacto sin movimiento relativo vertical respecto de la plataforma, comparte su aceleración a_y y cumple

$$N - mg = ma_y, \qquad N = m(g + a_y).$$

Para una masa de cincuenta kilogramos y aceleración hacia arriba de $2\,\mathrm{m/s^2}$, la normal vale $600\,\mathrm{N}$, mientras que el peso sigue siendo $500\,\mathrm{N}$. Una báscula ideal bajo sus pies responde a esa fuerza de contacto. El resultado depende de la aceleración, no del sentido de la velocidad: la plataforma podría estar descendiendo y frenando.

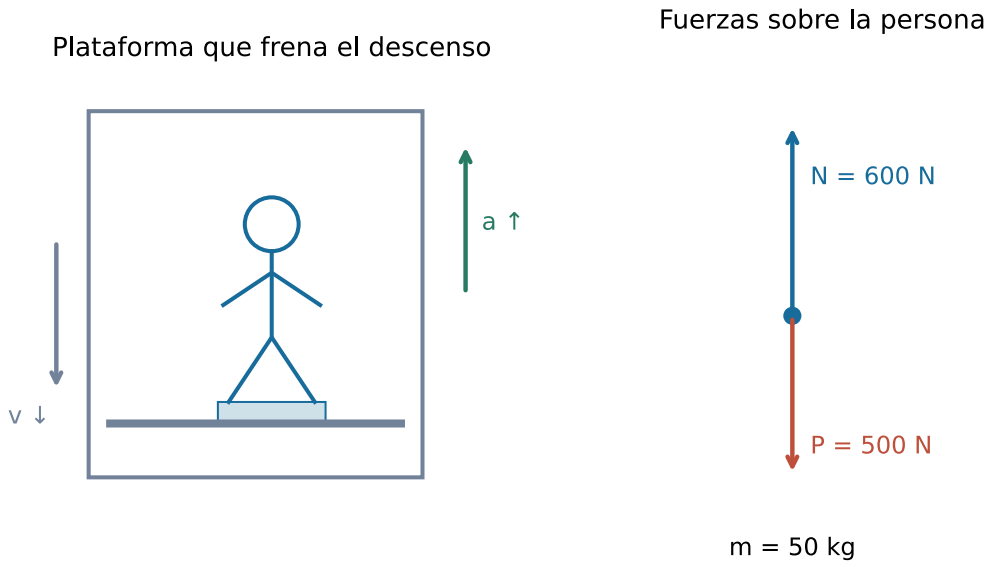


Figura 4.3. La báscula responde a la normal. La aceleración se indica fuera del diagrama de fuerzas y puede apuntar hacia arriba mientras la plataforma aún desciende.

Si un cálculo exigiera $N < 0$ para un suelo que sólo puede empujar desde abajo, la hipótesis de mantener contacto sería incompatible con ese resultado. Habría que cambiar de régimen. Esta comprobación enseña qué preguntar después de resolver: además de satisfacer las ecuaciones, la fuerza debe poder ser ejercida por el agente que le atribuimos.

Fuerzas iguales que actúan sobre cuerpos distintos

Tercera ley de Newton. En los modelos mecánicos newtonianos de interacción por pares que adoptaremos, las fuerzas mutuas satisfacen, en el mismo instante,

$$\mathbf{F}_{A\to B} = -\mathbf{F}_{B\to A}.$$

La igualdad de módulos y la oposición de direcciones relacionan fuerzas recibidas por cuerpos diferentes. No exige masas iguales ni aceleraciones iguales. Tampoco establece que una de esas fuerzas comience antes que la otra: los nombres acción y reacción no introducen un retraso temporal.

Un libro inmóvil sobre una mesa recibe su peso, ejercido por la Tierra, y la normal, ejercida por la mesa. Ambas pueden equilibrarse sobre el libro. La pareja del peso en la tercera ley es la fuerza gravitatoria que el libro ejerce sobre la Tierra. La pareja de la normal es la fuerza que el libro ejerce sobre la mesa. Compartir módulo y direcciones opuestas en una situación de equilibrio no basta para identificar una pareja de interacción: hay que intercambiar los mismos dos agentes y receptores.

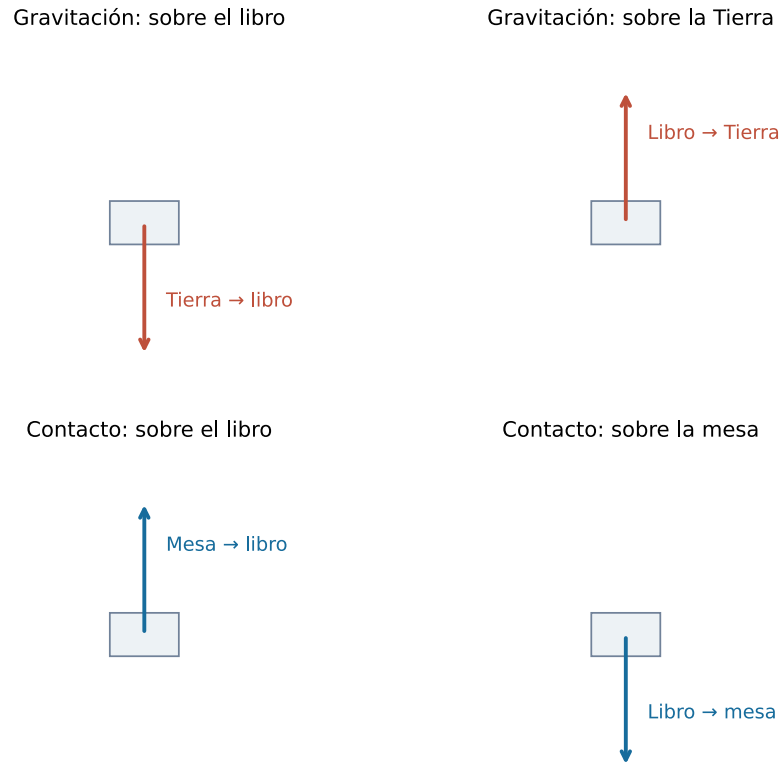


Figura 4.4. En cada fila se conserva una única interacción y se intercambian agente y receptor. El peso y la normal del libro pertenecen a filas diferentes.

Si dos patinadores se empujan, la fuerza de uno sobre el otro puede acelerar a ambos en sentidos opuestos. En la ecuación de cada patinador sólo aparece la fuerza que recibe. Cancelar las dos dentro de una ecuación de uno solo eliminaría una fuerza que actúa sobre el otro cuerpo y produciría una conclusión falsa.

Al ampliar el sistema para incluir a ambos, sí desaparecen de la suma las fuerzas internas. Esa operación admite una formulación precisa.

Proposición (suma de las ecuaciones de un sistema). Consideremos un conjunto fijo de n partículas con masas constantes $m_i > 0$, todas descritas desde un mismo marco inercial. Supongamos que las fuerzas internas por pares satisfacen la tercera ley y que cada partícula cumple la segunda. Entonces

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i^{\text{ext}}.$$

No se presupone que las aceleraciones $\mathbf{a}_i$ coincidan.

Demostración. La ecuación de la partícula i es

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{j \to i}.$$

Al sumar sobre i, cada interacción interna aparece exactamente dos veces, una por cada cuerpo que la recibe. Agrupar por pares no ordenados da

$$\sum_{i} \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{j \to i} = \sum_{i<j} (\mathbf{F}_{i \to j} + \mathbf{F}_{j \to i}) = \mathbf{0}.$$

Queda la identidad enunciada. □

La conclusión no afirma que las fuerzas internas sean nulas, ni que cada partícula tenga aceleración cero cuando la suma externa es cero. Relaciona una suma ponderada de aceleraciones. Su interpretación mediante el centro de masa se desarrollará al estudiar sistemas de partículas; aquí basta conservar exactamente lo que la suma ha demostrado.

Cambiar de sistema para encontrar una fuerza de contacto

Dos bloques se apoyan uno contra otro en una mesa horizontal sin rozamiento apreciable. A, de tres kilogramos, está a la izquierda de B, de un kilogramo. Una fuerza horizontal de doce newtons empuja A hacia B. Supondremos traslación horizontal y contacto mantenido, y verificaremos que la fuerza calculada sea compatible con esa suposición.

Si elegimos el sistema A y B, las fuerzas mutuas de contacto se cancelan al sumar. Las verticales están equilibradas y la única fuerza horizontal externa es la aplicada. El contacto mantenido exige que ambos tengan la misma aceleración horizontal a. La proposición da

$$(3\,\mathrm{kg} + 1\,\mathrm{kg})a = 12\,\mathrm{N}, \qquad a = 3\,\mathrm{m/s^2}.$$

Para encontrar la fuerza de contacto hay que volver a un sistema en el que sea externa. Elegimos B solo. La única fuerza horizontal sobre él es la que ejerce A, así que su módulo C cumple

$$C = (1\,\mathrm{kg})a = 3\,\mathrm{N}.$$

En A, el contacto actúa hacia la izquierda. Su ecuación es $12\,\mathrm{N} - C = (3\,\mathrm{kg})a$, que reproduce el mismo resultado. El valor $C > 0$ corresponde a un empuje: es admisible para el contacto entre los bloques. La ecuación del sistema conjunto permitió obtener el movimiento; las ecuaciones individuales permitieron resolver una interacción que la suma había eliminado.

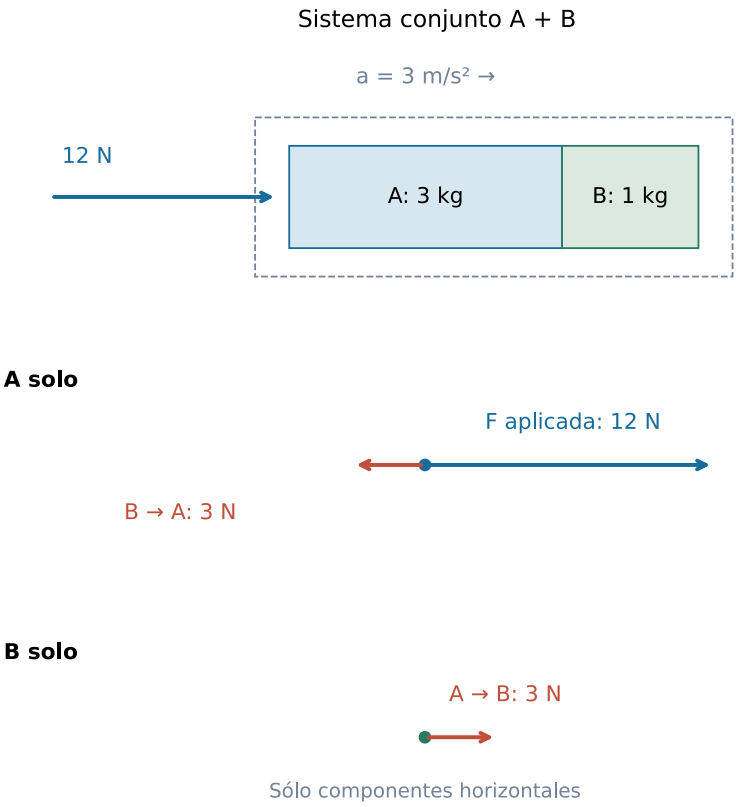


Figura 4.5. La misma fuerza de contacto es externa en cada diagrama individual e interna en el sistema conjunto. Se muestran sólo las componentes horizontales; las fuerzas verticales se equilibran. Las masas se suman multiplicando una aceleración común sólo después de justificar el contacto mantenido.

Una ley de fuerza completa la ecuación

Conocer $m\mathbf{a} = \sum \mathbf{F}$ todavía deja abierta la evolución si no sabemos cómo varían las fuerzas. Un freno puede proporcionar una fuerza aproximadamente constante durante un tramo o una fuerza que disminuye con la rapidez. Una interacción elástica puede cambiar cuando cambia la posición. Cada elección produce una ecuación de movimiento y debe sostenerse dentro de un régimen declarado.

Como ejemplo, un resorte horizontal unido a un soporte fijo puede ejercer sobre un carro una fuerza

$$F_x = -kx,$$

donde x es la elongación con signo respecto de su longitud sin deformación y $k > 0$ tiene unidades de fuerza por longitud. Supondremos un resorte unido al carro, capaz de trabajar en el intervalo de compresión y extensión considerado, con masa despreciable en este modelo. La relación lineal es una aproximación empírica de pequeñas deformaciones. Una calibración fuera del intervalo lineal podría exigir otra función.

Para $k = 40\,\mathrm{N/m}$, masa $m = 2\,\mathrm{kg}$ y elongación inicial $x_0 = 0,10\,\mathrm{m}$, la fuerza inicial es $-4\,\mathrm{N}$ y la aceleración inicial $-2\,\mathrm{m/s^2}$. La ecuación completa es

$$m\ddot{x} = -kx.$$

La posición $x = 0$ permite una solución en reposo si también se elige velocidad inicial cero. Si el carro pasa por ese punto con velocidad no nula, la fuerza y la aceleración se anulan

en ese instante y el carro continúa atravesándolo. Para determinar una historia hacen falta tanto las condiciones iniciales como la ley de interacción. El estudio de esta ecuación y de sus soluciones se retomará en el oscilador armónico; el ejercicio 17 permite ya comprobar una función propuesta mediante sustitución.

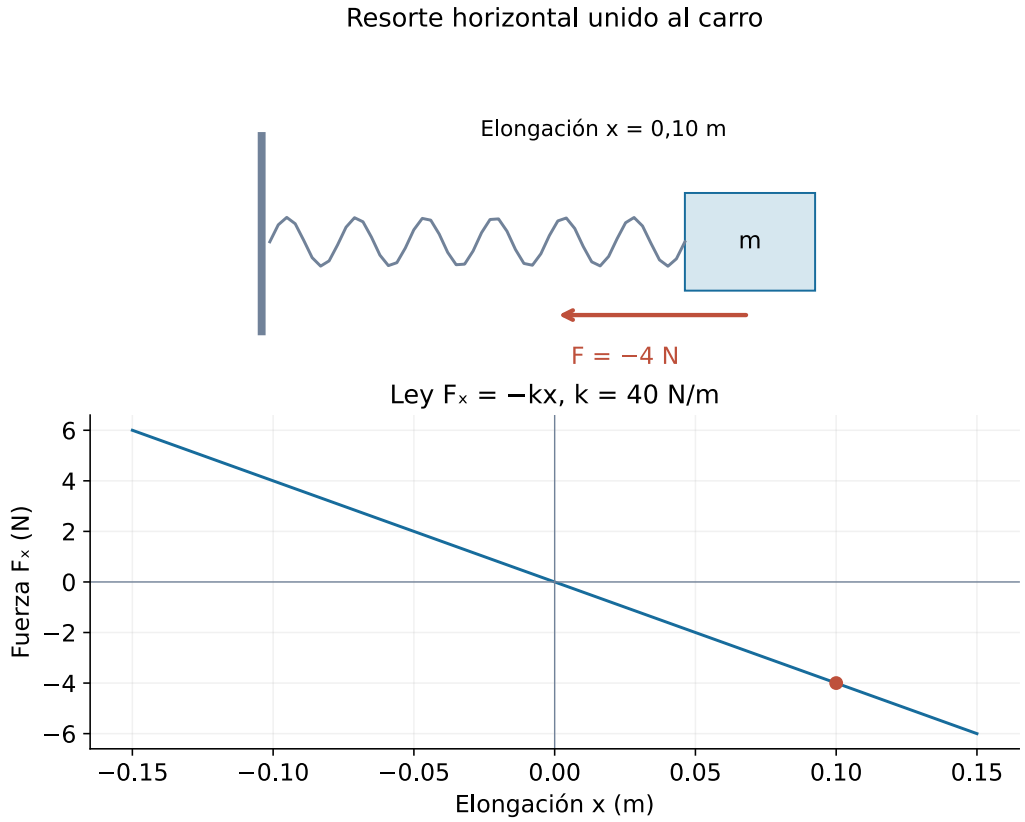


Figura 4.6. La recta representa una ley del modelo, no una consecuencia universal de la segunda ley. La deformación y la fuerza deben permanecer dentro del régimen de calibración del resorte.

De una fuerza conocida a toda la historia

Cuando la fuerza resultante se prescribe únicamente como función del tiempo, podemos integrar directamente. En este caso, el integrando queda determinado antes de conocer la posición. Una fuerza que dependa de esa posición desconocida planteará una ecuación diferente.

Proposición (fuerza prescrita en el tiempo). Sea $\mathbf{F}(t)$ continua en un intervalo que contiene t_0, y sea $m > 0$ constante. La única posición de clase C^2 que satisface $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(t)$, $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$ y $\dot{\mathbf{r}}(t_0) = \mathbf{v}_0$ es

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} (t - s)\mathbf{F}(s)\, ds.$$

Su velocidad es

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} \mathbf{F}(s)\, ds.$$

Demostración. Integramos la segunda ley desde t_0 hasta t. El teorema fundamental del cálculo da la fórmula de la velocidad. Para comprobar la expresión de la posición sin omitir el factor $t - s$, escribamos su término integral como

$$\mathbf{G}(t) = t\int_{t_0}^{t} \mathbf{F}(s)\,ds - \int_{t_0}^{t} s\mathbf{F}(s)\,ds.$$

Derivar por componentes y aplicar la regla del producto da $\dot{\mathbf{G}}(t) = \int_{t_0}^{t} \mathbf{F}(s)\,ds$: los dos términos $t\mathbf{F}(t)$ se cancelan. Otra derivada produce $\ddot{\mathbf{G}} = \mathbf{F}(t)$. Además, $\mathbf{G}(t_0) = \dot{\mathbf{G}}(t_0) = \mathbf{0}$, así que la posición propuesta satisface la ecuación y los datos iniciales. Si dos posiciones los satisfacen, su diferencia tiene segunda derivada cero y datos iniciales nulos; integrando dos veces, esa diferencia es cero. □

El factor $t-s$ concede más tiempo para modificar la posición a una fuerza que actuó antes. Sus unidades también comprueban el resultado: $(t-s)\mathbf{F}(s)\,ds/m$ tiene unidades de longitud. La continuidad de $\mathbf{F}$ justifica la regularidad afirmada; una fuerza con saltos requiere aplicar el argumento por tramos y conservar la velocidad y posición en las uniones si no hay un impulso instantáneo.

Supongamos, por ejemplo, que un actuador aplica una fuerza horizontal $\mathbf{F}(t) = 4\theta\mathbf{e}_x\,\mathrm{N}$ durante $0 \le t \le 2\,\mathrm{s}$, con $\theta = t/(1\,\mathrm{s})$. El carro tiene masa $2\,\mathrm{kg}$, parte de $x_0 = 0$ y lleva velocidad inicial $1\,\mathrm{m/s}$. Las fuerzas verticales se equilibran. La aceleración horizontal es $2\theta\,\mathrm{m/s^2}$ y las integraciones dan

$$v_x = (1 + \theta^2)\,\mathrm{m/s}, \qquad x = (\theta + \theta^3/3)\,\mathrm{m}.$$

En dos segundos, la velocidad es $5\,\mathrm{m/s}$ y el avance $14/3\,\mathrm{m}$. Derivar recupera la aceleración y la fuerza prescritas; evaluar en cero recupera las dos condiciones iniciales. La proposición no autoriza reemplazar $\mathbf{F}(t)$ por $-kx(t)$ y considerar que ya resolvimos el resorte: en ese caso la función que se integra depende de la posición que aún buscamos.

La aceleración radial necesita una interacción

En el capítulo 3, un movimiento circular de radio R y rapidez constante q exigía aceleración de módulo q^2/R hacia el centro. En un marco inercial, la segunda ley exige que la componente radial de la fuerza resultante sea

$$F_{\text{hacia el centro}} = m\frac{q^2}{R}.$$

Esta ecuación especifica una componente de la suma de fuerzas; falta identificar qué agente la proporciona. Para un pequeño cuerpo unido a una cuerda y deslizándose sobre una mesa horizontal ideal, la tensión puede ser la única fuerza horizontal. Si la cuerda mantiene un círculo de radio dos metros, la masa es un kilogramo y la rapidez cuatro metros por segundo, su tensión debe ser de ocho newtons. El peso y la normal se equilibran verticalmente.

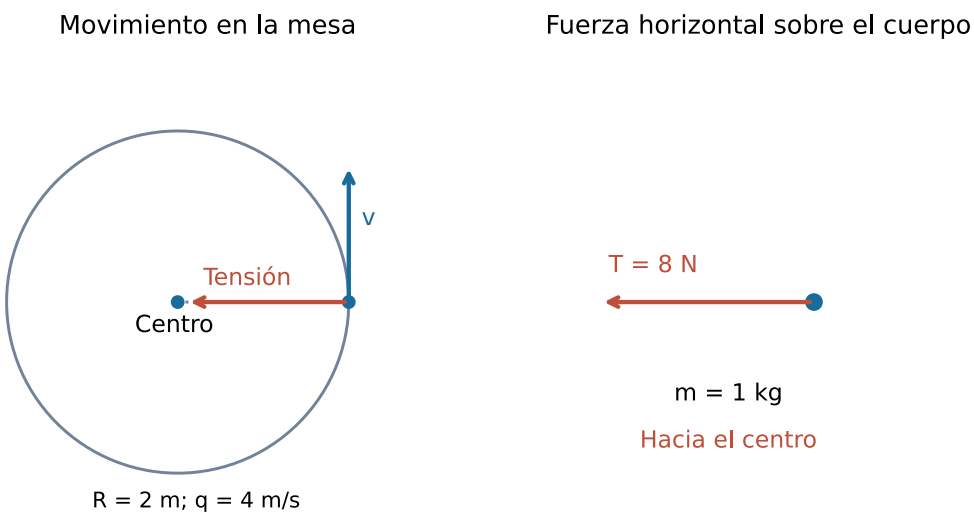


Figura 4.7. La expresión mq^2/R calcula el módulo radial requerido. En este modelo lo aporta la tensión; no se dibuja otra fuerza adicional llamada centrípeta. El diagrama se limita a la proyección horizontal y las fuerzas verticales se equilibran.

Si se rompe la cuerda, desaparece esa interacción. Mientras las otras fuerzas horizontales sigan siendo despreciables, la partícula conserva la velocidad que tenía al romperse: sigue la recta tangente correspondiente. La circunferencia anterior deja de ser una restricción mantenida. Conservar una fuerza radial después de quitar su agente describiría otro aparato.

Lo que permite inferir una aceleración

La ecuación de movimiento relaciona una fuerza resultante con una aceleración. Si varias interacciones pueden producir la misma suma, observar la trayectoria no identifica automáticamente cada una. Dos fuerzas horizontales de diez y seis newtons en sentidos opuestos producen la misma resultante que una sola de cuatro newtons. Para distinguir esas situaciones se necesita información adicional sobre sus agentes o una medición de alguna fuerza por separado.

También puede ocurrir que dos leyes de frenado predigan la misma aceleración inicial y movimientos posteriores diferentes. El ejercicio 20 compara una fuerza constante con una proporcional a la velocidad. Las dos coinciden al comenzar el ensayo, pero sólo una produce una detención en tiempo finito en la guía ideal considerada. Un registro inicial sirve para ajustar ese valor; los registros posteriores permiten contrastar las dos evoluciones.

El problema del carro queda así vinculado con una intervención realizable: fijar un sistema, medir su masa, caracterizar el freno y comprobar si el movimiento observado coincide con la historia prevista dentro del tramo disponible. Si no coincide, el inventario de fuerzas, la calibración y el régimen de la ley del freno ofrecen hipótesis concretas que revisar.

Ejercicios

Los ejercicios 1, 2, 3, 5, 6, 7 y 12 forman una primera práctica de inventarios, suma y relación entre fuerza y movimiento. El 9 introduce ejes ligados a una pendiente; 8, 10, 11, 13 y 14 permiten revisar contactos y sistemas. Los problemas 4 y 15–20 combinan las leyes con calibración, integración, movimiento circular o cambios de marco. Antes de consultar la solución del 13, dibuja por separado los dos cuerpos y decide qué fuerza desaparece al reunirlos; las ecuaciones deberían poder reconstruirse desde esos dibujos.

Usa $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ cuando sea necesario. Salvo indicación contraria, las masas son constantes, los datos numéricos son exactos dentro del modelo y el laboratorio se trata como inercial.

Los apoyos sólo empujan, y toda hipótesis de contacto debe comprobarse. En las fórmulas parametrizadas, $\theta = t/(1\,\mathrm{s})$. Las tuplas representan componentes cartesianas en ejes fijos.

1. La fuerza no indica el sentido de la velocidad

Un disco de masa dos kilogramos se mueve sobre una mesa horizontal lisa. Tres actuadores ejercen las fuerzas horizontales $\mathbf{F}_1 = (6, 0)\,\mathrm{N}$, $\mathbf{F}_2 = (-2, 3)\,\mathrm{N}$ y $\mathbf{F}_3 = (0, -3)\,\mathrm{N}$, expresadas en ejes del plano de la mesa. Éste es el inventario horizontal completo; las fuerzas verticales se equilibran. La velocidad inicial es $(-3, 0)\,\mathrm{m/s}$. Calcula la resultante, la aceleración y la velocidad al cabo de un segundo. Decide si al principio aumenta o disminuye la rapidez y cuándo cambia el sentido del movimiento.

2. Una interacción que falta en el inventario

En la proyección horizontal de una mesa lisa, una partícula de masa tres kilogramos tiene aceleración $(2, -1)\,\mathrm{m/s^2}$. Se conoce una fuerza horizontal $(4, 5)\,\mathrm{N}$ y se supone que sólo hay otra fuerza horizontal; las verticales se equilibran. Determina esa fuerza desconocida. Explica qué cambiaría si hubiera varias interacciones desconocidas y si el cálculo permite identificar por sí solo a sus agentes.

3. Comparar masas con el mismo actuador

Una fuerza neta constante produce aceleración de $3\,\mathrm{m/s^2}$ en un cuerpo de masa $2\,\mathrm{kg}$. La misma fuerza neta produce $0,75\,\mathrm{m/s^2}$ en otro cuerpo. Determina la masa del segundo. Si en un ensayo posterior de ese segundo cuerpo se mide aceleración de $1,5\,\mathrm{m/s^2}$, decide si puede seguir siendo la misma fuerza neta bajo las hipótesis anteriores.

4. Propagar una calibración hasta una aceleración

Un dinamómetro horizontal tiene relación de calibración $F = (0,5\,\mathrm{N})(n - 2)$, donde n es la indicación adimensional. Se lee $n \in [9,8; 10,2]$. La masa del carro pertenece a $[1,9; 2,1]\,\mathrm{kg}$. La fuerza medida es la resultante horizontal y todos los pares de indicación y masa en esos intervalos son admisibles. Obtén una cota ajustada para la aceleración y compara con el valor nominal calculado usando $n = 10$ y $m = 2\,\mathrm{kg}$.

5. Dimensionar el freno

Un carro de masa total seis kilogramos entra en un tramo horizontal de veinte metros con velocidad $8\,\mathrm{m/s}$. El freno fijo aplica una fuerza horizontal de módulo constante $B > 0$ opuesta al avance y se retira al detenerse; las demás fuerzas horizontales son despreciables. Calcula el valor mínimo de B para detenerse a más tardar en el extremo y la condición para hacerlo estrictamente antes. Evalúa los casos $B = 12\,\mathrm{N}$ y $B = 8\,\mathrm{N}$, distinguiendo la parada admisible de una prolongación hipotética fuera del riel.

6. Equilibrio de fuerzas mientras el cuerpo avanza

Un bloque de masa dos kilogramos se desliza horizontalmente a $3\,\mathrm{m/s}$. Recibe su peso, la normal de una mesa y las fuerzas de dos actuadores horizontales, de cinco newtons en sentidos opuestos. La mesa no aporta resistencia tangencial. Determina la aceleración y la normal. En $t = 0$ se retira la fuerza horizontal hacia la izquierda y el bloque está en $x = 0$. Halla su posición y su velocidad dos segundos después. Identifica qué fuerzas equilibradas antes de la retirada actuaban sobre el mismo cuerpo.

7. Descender con una lectura mayor

Una persona de masa sesenta kilogramos desciende en un ascensor con velocidad inicial $-3\,\mathrm{m/s}$, tomando positivo hacia arriba. Durante dos segundos el ascensor tiene aceleración constante $+2\,\mathrm{m/s^2}$ y la persona permanece apoyada en una báscula ideal. Calcula la normal y el peso, determina cuándo se detiene momentáneamente y describe después el sentido de su movimiento. ¿La lectura mayor que el peso requiere velocidad hacia arriba?

8. El límite de un suelo que sólo empuja

Una masa de $0,5\,\mathrm{kg}$ está sobre el piso horizontal de una cabina y sólo recibe peso y normal. Calcula la normal necesaria para acompañar una aceleración vertical de $-g$. Examina después la hipótesis de que siga apoyada cuando el piso tiene aceleración $-12\,\mathrm{m/s^2}$. Si no está sujeta al piso y la resistencia del aire es despreciable, determina la aceleración de la masa inmediatamente después de perder el contacto.

9. Elegir ejes sobre una pendiente

Un bloque de masa dos kilogramos parte del reposo sobre un plano recto de inclinación 30°, sin rozamiento. Se mantiene contacto y el plano es suficientemente largo. Elige un eje paralelo al plano hacia abajo y otro perpendicular hacia afuera. Calcula las componentes del peso, la normal, la aceleración y la distancia recorrida en dos segundos. Comprueba que la normal obtenida es admisible.

10. Tirar hacia arriba también cambia el apoyo

Sobre un bloque de masa dos kilogramos, apoyado en una mesa horizontal lisa, se aplica una fuerza con componentes $(6, 8)\,\mathrm{N}$, con y hacia arriba. Determina la normal y la aceleración mientras hay contacto. Repite el examen instantáneo si la fuerza aplicada pasa a ser $(6, 24)\,\mathrm{N}$ y no existe ninguna sujeción que tire hacia abajo. Decide el régimen compatible en este segundo caso.

11. La misma fuerza, dos aceleraciones

Dos patinadores de masas cuarenta y ochenta kilogramos están inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal sin resistencia tangencial apreciable. Durante medio segundo el primero ejerce sobre el segundo una fuerza horizontal constante de $120\,\mathrm{N}$ hacia la derecha. Determina la fuerza que recibe el primero, ambas aceleraciones, velocidades y desplazamientos al final del intervalo. No se exige igualdad de sus aceleraciones.

12. Dos parejas distintas

Un libro de masa tres kilogramos permanece en reposo sobre una mesa horizontal. Dibuja o describe las fuerzas que recibe y la pareja de tercera ley correspondiente a cada una, indicando agente, receptor y dirección. Decide si el peso y la normal sobre el libro forman una pareja de tercera ley y justifica su igualdad de módulos en esta situación concreta.

13. Empujar por extremos diferentes

Dos bloques de masas $m_A = 2\,\mathrm{kg}$ y $m_B = 3\,\mathrm{kg}$, con A a la izquierda de B, están en contacto sobre una mesa horizontal lisa. Primero se aplica a A una fuerza de diez newtons hacia la derecha. Calcula la aceleración y el contacto entre ambos. En un segundo ensayo, se aplica a B una fuerza de diez newtons hacia la izquierda. Repite el cálculo y explica por qué el módulo del contacto puede cambiar aunque no cambien la fuerza externa total en módulo ni las masas.

14. Lo que realmente cancela la suma

Dos partículas, de masas uno y tres kilogramos, interactúan entre sí. En un instante, la fuerza que la segunda ejerce sobre la primera es $+12\,\mathrm{N}$ según un eje fijo; no hay fuerzas externas sobre el sistema y las fuerzas internas satisfacen la tercera ley. Calcula ambas aceleraciones, su suma aritmética y su suma ponderada por las masas. Explica cuál de estas dos sumas está controlada por la proposición del sistema.

15. Integrar una fuerza que crece

La única fuerza horizontal sobre un carro de masa dos kilogramos es $F_x = 6\theta\,\mathrm{N}$ durante $0 \le t \le 2\,\mathrm{s}$. Se parte de $x_0 = 0$ y $v_0 = -1\,\mathrm{m/s}$. Determina posición y velocidad, el cambio de sentido y la distancia total recorrida durante esos dos segundos. Las fuerzas verticales se equilibran y no hay restricciones de longitud del riel en ese tramo.

16. Quitar el agente que mantenía el círculo

Una partícula de masa $0,5\,\mathrm{kg}$ se mueve sobre una mesa horizontal lisa, unida por una cuerda tensa al origen. El radio es dos metros y la rapidez cuatro metros por segundo. En un instante ocupa $(2,0)\,\mathrm{m}$ y su velocidad es $(0,4)\,\mathrm{m/s}$. Calcula la fuerza horizontal que recibe justo antes de romperse la cuerda. Tomando ese instante como nuevo origen temporal, determina la posición un segundo después de la rotura y su distancia al origen. Las demás fuerzas horizontales son despreciables.

17. Auditar una historia para el resorte

Un carro de masa dos kilogramos unido a un resorte horizontal cumple $m\ddot{x} = -kx$ con $k = 40\,\mathrm{N/m}$. El régimen lineal está calibrado para $|x| \le 0,15\,\mathrm{m}$. Se propone $x(t) = 0,10\cos(4\theta)\,\mathrm{m}$, donde x mide elongación con signo. Comprueba los datos iniciales y decide si satisface la ecuación. Busca un valor positivo de la frecuencia angular, reemplazando 4θ por ωt, que sí la satisfaga con la misma amplitud. Verifica que la historia corregida permanece en el régimen indicado.

18. Una aceleración que proviene de las coordenadas

Un carro de masa dos kilogramos tiene fuerza horizontal neta cero y se mueve en el laboratorio según $x = 3\theta\,\mathrm{m}$. El origen de otra referencia, con eje paralelo, sigue $X = (\theta+\theta^2)\,\mathrm{m}$. Ambos relojes coinciden. Calcula $x' = x - X$ y su aceleración. Examina si se puede escribir sin modificación $\sum F_x = m\ddot{x}'$ usando las mismas fuerzas físicas y explica qué hipótesis de la segunda ley falta.

19. Inferir una suma no identifica cada fuerza

Un carro de masa dos kilogramos tiene posición $x = (2\theta + \theta^2)\,\mathrm{m}$ para $0 \le t \le 3\,\mathrm{s}$. Sólo se consideran dos fuerzas horizontales: tracción hacia la derecha, de módulo $T \ge 0$, y resistencia hacia la izquierda, de módulo $R \ge 0$, ambas constantes durante el tramo. Obtén la información que proporciona la trayectoria sobre T y R. Da dos pares diferentes compatibles y explica qué medición adicional permitiría distinguirlos.

20. Dos frenos que coinciden al comenzar

Un carro de masa dos kilogramos parte con $v_0 = 6\,\mathrm{m/s}$ y $x_0 = 0$ en una guía horizontal ideal. El modelo A aplica $F_x = -6\,\mathrm{N}$ mientras $v > 0$ y retira la fuerza al detenerse. El modelo B aplica $F_x = -bv$ con $b = 1\,\mathrm{kg/s}$. Las demás fuerzas horizontales son despreciables. Considera primero una guía ilimitada: determina las dos historias y compara la aceleración inicial, la existencia de una parada en tiempo finito y las distancias límite. Después decide, con cada modelo, si el carro se detiene antes de un extremo situado en $x = 8\,\mathrm{m}$. Si lo alcanza,

calcula el instante y la velocidad de llegada, sin prolongar el movimiento más allá del extremo como si siguiera habiendo guía.

Soluciones

1. La fuerza no indica el sentido de la velocidad

Sumamos las componentes de las tres fuerzas sobre la misma partícula:

$$\mathbf{F}_{\text{neta}} = (4, 0)\,\text{N}, \qquad \mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}_{\text{neta}}}{m} = (2, 0)\,\text{m/s}^2.$$

La aceleración es constante. Con la velocidad inicial dada, $\mathbf{v}(t) = (-3 + 2\theta, 0)\,\text{m/s}$, así que en un segundo es $(-1, 0)\,\text{m/s}$. La partícula todavía se mueve hacia la izquierda, mientras la fuerza apunta hacia la derecha. Su rapidez disminuye hasta que $-3 + 2\theta = 0$, en $t = 1,5\,\text{s}$. Después, bajo las mismas fuerzas, avanza hacia la derecha y su rapidez aumenta. La dirección de la resultante determina la aceleración; el dato de velocidad inicial es necesario para interpretar qué ocurre con la rapidez.

2. Una interacción que falta en el inventario

La aceleración exige una fuerza neta $m\mathbf{a} = (6, -3)\,\text{N}$. Si hay exactamente otra fuerza además de la conocida, se obtiene restando:

$$\mathbf{F}_{\text{desconocida}} = (6, -3)\,\text{N} - (4, 5)\,\text{N} = (2, -8)\,\text{N}.$$

Al sumar este vector al conocido se recuperan ambas componentes de la fuerza requerida. Si hubiera varias fuerzas desconocidas, la resta sólo determinaría su resultante conjunta; muchos inventarios diferentes podrían tener esa misma suma. Incluso bajo la hipótesis de una sola fuerza, el vector calculado no identifica a su agente: para atribuirlo a una cuerda, un contacto o un campo hace falta información física adicional. La ecuación localiza una falta cuantitativa en el inventario y orienta qué debe investigarse.

3. Comparar masas con el mismo actuador

El primer ensayo fija el módulo de la fuerza neta: $F = (2\,\text{kg})(3\,\text{m/s}^2) = 6\,\text{N}$. En el segundo cuerpo,

$$m_2 = \frac{6\,\text{N}}{0,75\,\text{m/s}^2} = 8\,\text{kg}.$$

Si su masa permanece constante, una aceleración posterior de $1,5\,\text{m/s}^2$ exigiría fuerza neta de doce newtons. No es compatible con conservar los seis newtons de los ensayos anteriores. El resultado obliga a revisar alguna condición: quizá cambió la fuerza del actuador, apareció otra interacción o alguna medición no representa el valor supuesto. La segunda ley relaciona la aceleración con la suma de fuerzas, no con el nombre del dispositivo que estamos usando.

4. Propagar una calibración hasta una aceleración

La calibración es creciente en n, así que la indicación acotada produce $F \in [3,9; 4,1]\,\text{N}$. Como $a = F/m$ y tanto fuerza como masa son positivas, la aceleración crece con F y decrece con m. Los extremos del rectángulo admisible dan

$$a_{\text{mín}} = \frac{3,9\,\text{N}}{2,1\,\text{kg}} = \frac{13}{7}\,\text{m/s}^2, \qquad a_{\text{máx}} = \frac{4,1\,\text{N}}{1,9\,\text{kg}} = \frac{41}{19}\,\text{m/s}^2.$$

La continuidad y el conjunto completo de pares admisibles aseguran que ésta es la imagen exacta de los datos. El valor nominal es $a_0 = 4/2\,\text{m/s}^2 = 2\,\text{m/s}^2$, incluido en ese intervalo. Una presentación decimal con redondeo hacia afuera es $a \in [1,857; 2,158]\,\text{m/s}^2$. La cota

es determinista: no se ha supuesto que las indicaciones o las masas sigan una distribución estadística, ni que sus errores sean independientes.

5. Dimensionar el freno

Elegimos el carro como sistema y orientamos el eje horizontal en el sentido del avance. El freno proporciona la única fuerza horizontal, así que su componente es $-B$; las fuerzas verticales no intervienen en la detención horizontal. La masa convierte esa fuerza en aceleración mediante $a = -B/m$. A partir de aquí puede reutilizarse la reconstrucción cinemática, conservando el régimen que termina en la primera detención.

Mientras el carro avanza, $a = -B/m$ es constante. Integrar con $v_0 > 0$ da $v = v_0 - (B/m)t$ y $x = v_0 t - (B/2m)t^2$. La primera detención ocurre en $t_* = mv_0/B$, a la distancia

$$d_* = \frac{mv_0^2}{2B}.$$

Exigir $d_* \le L$ equivale a $B \ge mv_0^2/(2L) = 9,6\,\mathrm{N}$. Detenerse estrictamente antes requiere $B > 9,6\,\mathrm{N}$. Con doce newtons, la aceleración es $-2\,\mathrm{m/s^2}$, la parada ocurre en cuatro segundos y dieciséis metros, y quedan cuatro metros disponibles.

Con ocho newtons, la aceleración es $-4/3\,\mathrm{m/s^2}$. La prolongación sobre una guía ilimitada pararía en seis segundos y veinticuatro metros, por lo que no cabe en el riel. Para describir el evento real del extremo resolvemos $20 = 8\theta - (2/3)\theta^2$: el primer tiempo positivo es $t = (6-\sqrt{6})\,\mathrm{s}$, con velocidad $(4\sqrt{6}/3)\,\mathrm{m/s} > 0$. La otra raíz pertenece a la prolongación después de la inversión que produciría mantener esa fuerza; queda fuera del tramo de avance y tampoco describe una segunda visita admisible al extremo.

6. Equilibrio de fuerzas mientras el cuerpo avanza

Antes de retirar la fuerza, las componentes horizontales se cancelan. La normal y el peso también se equilibran, porque el bloque conserva su altura y no hay otras componentes verticales. Resultan $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ y $N = mg = 20\,\mathrm{N}$. El bloque puede seguir a tres metros por segundo; equilibrio de fuerzas no exige reposo.

Después de la retirada queda fuerza horizontal $+5\,\mathrm{N}$. Por tanto, $a_x = 2,5\,\mathrm{m/s^2}$ y

$$v_x = 3\,\mathrm{m/s} + (2,5\,\mathrm{m/s^2})t, \qquad x = (3\,\mathrm{m/s})t + (1,25\,\mathrm{m/s^2})t^2.$$

A los dos segundos son $v_x = 8\,\mathrm{m/s}$ y $x = 11\,\mathrm{m}$. La normal sigue siendo veinte newtons, pues no ha cambiado la ecuación vertical. Tanto las dos fuerzas horizontales originales como el peso y la normal actuaban sobre el bloque. Sus equilibrios no los convierte en parejas de tercera ley: las fuerzas de cada pareja deben tener receptores distintos.

7. Descender con una lectura mayor

El peso tiene módulo $P = mg = 600\,\mathrm{N}$ y dirección hacia abajo. La persona comparte la aceleración de la báscula mientras conserva el apoyo, así que

$$N - 600\,\mathrm{N} = (60\,\mathrm{kg})(2\,\mathrm{m/s^2}), \qquad N = 720\,\mathrm{N}.$$

El valor positivo es admisible. La velocidad evoluciona como $v_y = -3\,\mathrm{m/s} + (2\,\mathrm{m/s^2})t$. Se anula en $1,5\,\mathrm{s}$; durante el medio segundo restante pasa a ser positiva y el ascensor asciende. La lectura de setecientos veinte newtons se mantiene durante todo el intervalo de aceleración constante, incluido el descenso inicial. La aceleración hacia arriba frena primero el descenso y luego aumenta la velocidad de subida. El sentido de la velocidad no decide el signo de $N - mg$.

8. El límite de un suelo que sólo empuja

Si la masa acompañara una aceleración $a_y = -g$, la ecuación $N - mg = ma_y$ daría $N = 0$. El peso sigue siendo $5\,\mathrm{N}$; lo que se anula es la fuerza de apoyo. En el modelo ideal, masa y piso pueden mantener inicialmente la misma separación si comienzan con la misma velocidad y ambos caen con aceleración $-g$, pero no existe una presión positiva que asegure el contacto frente a una variación.

Para $a_y = -12\,\mathrm{m/s^2}$, la condición de acompañar al piso exigiría $N = (0{,}5\,\mathrm{kg})(10 - 12)\,\mathrm{m/s^2} = -1\,\mathrm{N}$. El piso tendría que tirar hacia abajo de la masa, algo excluido por el enunciado. Se pierde el contacto y la normal es cero. La masa queda con aceleración $-10\,\mathrm{m/s^2}$, mientras el piso acelera más hacia abajo y se separa de ella. La fuerza negativa calculada sirvió para rechazar la hipótesis de contacto, no como una normal que pudiera aplicarse físicamente.

9. Elegir ejes sobre una pendiente

El diagrama contiene dos fuerzas: el peso vertical y la normal perpendicular al plano. Las componentes del peso se calculan después de elegir ejes; no son otras dos interacciones. Si la pendiente sube hacia la derecha y forma un ángulo α con la horizontal, podemos tomar $\mathbf{e}_{\parallel} = (-\cos\alpha, -\sin\alpha)$ hacia abajo y $\mathbf{e}_{\perp} = (-\sin\alpha, \cos\alpha)$ hacia afuera. Proyectar $\mathbf{P} = (0, -mg)$ sobre estos vectores da $P_{\parallel} = mg\sin\alpha$ y $P_{\perp} = -mg\cos\alpha$. Así se decide dónde va el seno sin memorizar una figura girada.

Los ejes paralelo y perpendicular hacen que la restricción de contacto se escriba $a_{\perp} = 0$. El peso tiene componente $+mg\sin 30^\circ = 10\,\mathrm{N}$ hacia abajo del plano y componente $-mg\cos 30^\circ = -10\sqrt{3}\,\mathrm{N}$ hacia su interior. Las ecuaciones son

$$mg\sin 30^\circ = ma_{\parallel}, \qquad N - mg\cos 30^\circ = 0.$$

Se obtienen $a_{\parallel} = 5\,\mathrm{m/s^2}$ y $N = 10\sqrt{3}\,\mathrm{N}$. La normal es positiva y el contacto supuesto es admisible. El módulo del peso es veinte newtons; la normal equilibra su componente perpendicular, de módulo menor, mientras la paralela acelera el bloque. Desde el reposo, la distancia sobre el plano en dos segundos es $s = a_{\parallel}t^2/2 = 10\,\mathrm{m}$ y la rapidez final es $10\,\mathrm{m/s}$. La longitud suficiente del plano garantiza que ese tramo no termine antes por alcanzar un borde.

10. Tirar hacia arriba también cambia el apoyo

Con contacto mantenido, $a_y = 0$. En el primer caso, $N + 8\,\mathrm{N} - 20\,\mathrm{N} = 0$, de donde $N = 12\,\mathrm{N}$. La fuerza horizontal es seis newtons y $a_x = 3\,\mathrm{m/s^2}$. La fuerza aplicada hacia arriba reduce la normal necesaria, aunque el bloque siga a la misma altura.

En el segundo caso, mantener la restricción exigiría $N = 20\,\mathrm{N} - 24\,\mathrm{N} = -4\,\mathrm{N}$. La normal no puede tener ese signo en una mesa que sólo empuja desde abajo. Una vez separado el bloque, $N = 0$ y la fuerza neta tiene componentes $(6, 4)\,\mathrm{N}$, así que $\mathbf{a} = (3, 2)\,\mathrm{m/s^2}$ mientras la fuerza aplicada siga teniendo los valores indicados y no aparezcan otros contactos. Su aceleración vertical positiva es compatible con despegar de la mesa, partiendo del contacto con velocidad vertical nula.

11. La misma fuerza, dos aceleraciones

La fuerza sobre el segundo patinador es $+120\,\mathrm{N}$. Por la tercera ley, el primero recibe $-120\,\mathrm{N}$. Aplicamos la segunda ley a cada uno por separado:

$$a_1 = \frac{-120\,\mathrm{N}}{40\,\mathrm{kg}} = -3\,\mathrm{m/s^2}, \qquad a_2 = \frac{120\,\mathrm{N}}{80\,\mathrm{kg}} = 1{,}5\,\mathrm{m/s^2}.$$

Parten del reposo y las aceleraciones son constantes durante medio segundo. Sus velocidades finales son $v_1 = -1,5\,\mathrm{m/s}$ y $v_2 = 0,75\,\mathrm{m/s}$; los desplazamientos, obtenidos como $a_i t^2/2$, son $\Delta x_1 = -0,375\,\mathrm{m}$ y $\Delta x_2 = 0,1875\,\mathrm{m}$. Sus masas diferentes explican las distintas aceleraciones y recorridos. Como comprobación de la suma de ecuaciones, $m_1 a_1 + m_2 a_2 = -120\,\mathrm{N} + 120\,\mathrm{N} = 0$, aunque ninguno permanece inmóvil durante el empuje.

12. Dos parejas distintas

El libro recibe la fuerza gravitatoria $\mathbf{F}_{\text{Tierra}\to\text{libro}} = -30\mathbf{e}_y\,\mathrm{N}$ y la fuerza de contacto $\mathbf{F}_{\text{mesa}\to\text{libro}} = +30\mathbf{e}_y\,\mathrm{N}$. Sus parejas son, respectivamente,

$$\mathbf{F}_{\text{libro}\to\text{Tierra}} = +30\mathbf{e}_y\,\mathrm{N}, \qquad \mathbf{F}_{\text{libro}\to\text{mesa}} = -30\mathbf{e}_y\,\mathrm{N}.$$

La primera actúa sobre la Tierra y la segunda sobre la mesa; ninguna se incorpora como otra fuerza sobre el libro. El peso y la normal que recibe el libro no son pareja de tercera ley porque ambos tienen al libro como receptor y sus agentes son diferentes. Sus módulos coinciden aquí por la segunda ley, ya que el libro tiene aceleración vertical cero y éstas son sus únicas fuerzas verticales. Si la mesa acelerara verticalmente con el libro apoyado, sus módulos podrían ser distintos y las dos parejas mutuas seguirían satisfaciendo la tercera ley.

13. Empujar por extremos diferentes

La fuerza de contacto desaparece si elegimos ambos bloques como sistema, pero sigue actuando sobre cada bloque por separado. La suma de las ecuaciones sirve primero para hallar la aceleración común. Para recuperar el contacto elegimos después el bloque que no recibe directamente la fuerza aplicada: su única fuerza horizontal será precisamente la que buscamos. Es necesario repetir esa elección al cambiar el extremo de empuje.

En el primer ensayo, el sistema A y B tiene masa total cinco kilogramos y fuerza externa horizontal diez newtons hacia la derecha. Bajo contacto mantenido, la aceleración común es $a = 2\,\mathrm{m/s^2}$. En B la única fuerza horizontal es el contacto recibido de A, de módulo

$$C_1 = m_B a = (3\,\mathrm{kg})(2\,\mathrm{m/s^2}) = 6\,\mathrm{N}.$$

A recibe diez newtons hacia la derecha y seis hacia la izquierda, con resultante de cuatro newtons, coherente con su masa de dos kilogramos. El contacto positivo es un empuje y resulta admisible.

En el segundo ensayo, la aceleración común es $-2\,\mathrm{m/s^2}$. El bloque A sólo recibe horizontalmente el contacto ejercido por B, ahora hacia la izquierda. Su módulo es $C_2 = m_A|a| = 4\,\mathrm{N}$. Para B, la ecuación es $-10\,\mathrm{N} + 4\,\mathrm{N} = (3\,\mathrm{kg})(-2\,\mathrm{m/s^2})$. También es un empuje admisible. La fuerza de contacto debe acelerar al bloque que no recibe directamente la fuerza externa; cambiar ese bloque cambia la fuerza interna requerida.

14. Lo que realmente cancela la suma

La primera partícula recibe $+12\,\mathrm{N}$ y tiene masa un kilogramo, de modo que $a_1 = +12\,\mathrm{m/s^2}$. La tercera ley asigna a la segunda $-12\,\mathrm{N}$; con su masa de tres kilogramos, $a_2 = -4\,\mathrm{m/s^2}$. Sus aceleraciones suman $8\,\mathrm{m/s^2}$, que no es cero. En cambio,

$$m_1 a_1 + m_2 a_2 = 12\,\mathrm{N} - 12\,\mathrm{N} = 0.$$

La proposición controla esta segunda suma, cuya unidad es fuerza. Cancelar las fuerzas internas no autoriza cancelar aceleraciones sin conservar los factores de masa. Tampoco exige que los cuerpos tengan una aceleración común: aquí se aceleran en sentidos opuestos, por las fuerzas internas que desaparecen de la suma.

15. Integrar una fuerza que crece

La segunda ley da $a_x = 3\theta\,\mathrm{m/s^2}$. Integrar con los dos datos iniciales produce

$$v_x = (-1 + 3\theta^2/2)\,\mathrm{m/s}, \qquad x = (-\theta + \theta^3/2)\,\mathrm{m}.$$

Al derivarlas se recupera la fuerza $6\theta\,\mathrm{N}$. La velocidad se anula en $\theta_* = \sqrt{2/3}$ dentro del dominio. Antes es negativa y después positiva; la posición alcanza su mínimo en

$$t_* = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\mathrm{s}, \qquad x_* = -\frac{2\sqrt{6}}{9}\,\mathrm{m}.$$

A los dos segundos, $v_x = 5\,\mathrm{m/s}$ y $x = 2\,\mathrm{m}$. El desplazamiento total es dos metros, pero la distancia incluye la ida hacia la izquierda y el regreso desde x_*:

$$D = (0 - x_*) + (2\,\mathrm{m} - x_*) = \left(2 + \frac{4\sqrt{6}}{9}\right)\,\mathrm{m}.$$

No podemos obtener esta distancia integrando la velocidad con signo sin separar los intervalos. La fuerza positiva frena inicialmente el movimiento hacia la izquierda y después acelera el avance hacia la derecha.

16. Quitar el agente que mantenía el círculo

Justo antes de romperse la cuerda, la aceleración apunta hacia el origen. Su módulo es $q^2/R = 8\,\mathrm{m/s^2}$, así que la fuerza horizontal es

$$\mathbf{F}_{\text{horizontal}} = (-4, 0)\,\mathrm{N}.$$

La proporciona la tensión. Después de la rotura, la fuerza horizontal neta es cero y la partícula mantiene la velocidad tangencial que tenía. Con el nuevo reloj τ,

$$\mathbf{r}(\tau) = 2\mathbf{e}_x\,\mathrm{m} + (4\,\mathrm{m/s})\tau\mathbf{e}_y, \qquad \tau \geq 0.$$

En un segundo está en $(2, 4)\,\mathrm{m}$ y su distancia al origen es $\sqrt{2^2 + 4^2}\,\mathrm{m} = 2\sqrt{5}\,\mathrm{m}$. Ya no permanece a dos metros del centro porque se perdió la interacción que mantenía esa restricción. No se ha añadido una fuerza horizontal hacia afuera: la recta tangente basta para explicar el aumento de la distancia al origen.

17. Auditar una historia para el resorte

La función propuesta tiene $x(0) = 0,10\,\mathrm{m}$ y $\dot{x}(0) = 0$. Al derivarla dos veces,

$$\ddot{x} = -1,6\cos(4\theta)\,\mathrm{m/s^2}.$$

Por tanto, $m\ddot{x} = -3,2\cos(4\theta)\,\mathrm{N}$, mientras que $-kx = -4\cos(4\theta)\,\mathrm{N}$. No coinciden: ya en el instante inicial la aceleración propuesta difiere de $-kx_0/m = -2\,\mathrm{m/s^2}$.

Para una función $x = A\cos(\omega t)$, con ω de unidades $\mathrm{s^{-1}}$, la sustitución da $m\ddot{x} = -m\omega^2 A\cos(\omega t)$. La ecuación exige $m\omega^2 = k$, por lo que el valor positivo es

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{20}\,\mathrm{s^{-1}}.$$

La historia corregida es $x = 0,10\cos(\sqrt{20}\theta)\,\mathrm{m}$. Conserva los dos datos iniciales, satisface la ecuación por sustitución y permanece dentro del intervalo calibrado porque $|x| \leq 0,10\,\mathrm{m} < 0,15\,\mathrm{m}$. Hemos verificado una solución propuesta con esos datos, sin necesitar todavía un método general para resolver el oscilador.

18. Una aceleración que proviene de las coordenadas

Restar el desplazamiento del nuevo origen da $x' = (2\theta - \theta^2)\,\mathrm{m}$. Su velocidad es $(2-2\theta)\,\mathrm{m/s}$ y su aceleración $\ddot{x}' = -2\,\mathrm{m/s^2}$. Las fuerzas físicas horizontales sobre el carro siguen teniendo resultante cero, así que $\sum F_x = m\ddot{x}'$ daría una igualdad falsa: $0 = -4\,\mathrm{N}$.

La nueva referencia tiene aceleración $\ddot{X} = 2\,\mathrm{m/s^2}$ respecto del laboratorio; no es inercial. La transformación correcta de la ecuación se obtiene derivando $x' = x - X$:

$$m\ddot{x}' = m\ddot{x} - m\ddot{X} = \sum F_x - m\ddot{X}.$$

El término $-m\ddot{X}$ aparece por la aceleración de las coordenadas. No identifica un agente horizontal adicional que actúe sobre el carro. Elegir el marco del laboratorio permite mantener la forma original de la segunda ley con las interacciones físicas enumeradas. El análisis sistemático de marcos acelerados conservará esta distinción.

19. Inferir una suma no identifica cada fuerza

Derivar la posición da $v_x = (2 + 2\theta)\,\mathrm{m/s} > 0$ en todo el tramo y $a_x = 2\,\mathrm{m/s^2}$. La fuerza neta horizontal es cuatro newtons hacia la derecha. La información dinámica queda en

$$T - R = 4\,\mathrm{N}.$$

Entre los pares admisibles están $(T, R) = (4, 0)\,\mathrm{N}$ y $(10, 6)\,\mathrm{N}$. Más generalmente, cualquier $R \geq 0$ con $T = R + 4\,\mathrm{N}$ produce la misma resultante y la misma historia con los datos iniciales dados. El signo positivo de la velocidad confirma que una resistencia hacia la izquierda es compatible con oponerse al avance durante todo el dominio.

Medir la tracción mediante un dinamómetro calibrado distinguiría los pares: una vez conocido T, la ecuación fija $R = T - 4\,\mathrm{N}$. Añadir más posiciones de la misma historia puede mejorar el conocimiento de la aceleración, pero no separa dos fuerzas que sólo entran en esa ecuación por su diferencia. Una inferencia sobre cada agente requiere un dato que las distinga.

En el plano de pares (R, T), la ecuación obtenida describe una semirrecta de pendiente uno. Una medición de tracción fija una coordenada y selecciona un punto de ella. Se recupera así la pregunta de identificabilidad del capítulo 0: los parámetros que el movimiento determina son las combinaciones que aparecen en su ecuación. Aquí esa combinación es la resultante; la preparación de una medición adicional debe conservar información sobre un agente por separado.

20. Dos frenos que coinciden al comenzar

Para A, mientras el carro avanza, $a_A = -3\,\mathrm{m/s^2}$. Las condiciones iniciales fijan

$$v_A = (6 - 3\theta)\,\mathrm{m/s}, \qquad x_A = (6\theta - 3\theta^2/2)\,\mathrm{m}, \qquad 0 \leq \theta \leq 2.$$

La primera detención ocurre en dos segundos, en $x_A = 6\,\mathrm{m}$. A partir de allí se retira el freno y el carro permanece en esa posición. La distancia límite en la guía ilimitada es seis metros.

En B, la ecuación es $m\dot{v}_B = -bv_B$. La razón $b/m = 1/(2\,\mathrm{s})$ indica el factor con que decae la velocidad. Para obtenerla sin invocar una fórmula no justificada, multiplicamos la ecuación por $\exp(t/(2\,\mathrm{s}))$: la regla del producto da

$$\frac{d}{dt}\left[e^{t/(2\,\mathrm{s})} v_B(t)\right] = 0.$$

El producto es constante y su valor inicial es $6\,\mathrm{m/s}$. Por tanto, al integrar también la velocidad,

$$v_B = 6e^{-\theta/2}\,\mathrm{m/s}, \qquad x_B = 12(1 - e^{-\theta/2})\,\mathrm{m}.$$

La velocidad es positiva para todo tiempo finito, aunque tiende a cero; la posición tiende a doce metros. Su aceleración inicial es $-3\,\mathrm{m/s^2}$, igual que en A. Coincidir en la primera aceleración no obliga a coincidir en la ley posterior: B va reduciendo el módulo de la fuerza a medida que disminuye la velocidad.

En un riel que termina a ocho metros, A se detiene dos metros antes del extremo. B lo alcanza cuando $8 = 12(1 - e^{-\theta/2})$, es decir, en $t = 2\ln 3\,\mathrm{s}$, con velocidad $2\,\mathrm{m/s}$. Su límite de doce metros corresponde a la guía ilimitada del primer análisis; no describe una llegada admisible posterior al extremo del riel corto.

Lecturas de apoyo

La interpretación de posición, velocidad, aceleración y detención procede de los capítulos 1 y 2. Las sumas vectoriales, los cambios de referencia y la aceleración circular se construyeron en el capítulo 3. El ejercicio 4 utiliza cotas y calibraciones del capítulo 0. El capítulo requiere derivadas e integrales de una variable; la fórmula integral para una fuerza prescrita en el tiempo y su unicidad se demuestran localmente. Las leyes de Newton se enuncian como principios físicos y se distinguen de esas consecuencias matemáticas.

Se cotejaron pasajes de Young y Freedman, *Sears y Zemansky. Física universitaria*, vol. 1, 13.ª ed. (Pearson, 2013), §§4.1–4.3 y 4.5–4.6, sobre agentes de fuerzas, marcos, relación entre masa y aceleración, tercera ley y diagramas de cuerpo libre; y de Serway y Jewett, *Física para ciencias e ingeniería*, vol. 1, 10.ª ed. en español (Cengage, 2019), §§5.2, 5.4 y 5.6, sobre marcos inerciales, fuerza neta, fuerzas mutuas y lectura de una báscula. Se consultaron pasajes, sin atribuir una auditoría integral a esos libros. Los datos, enunciados, soluciones y figuras de este capítulo son construcciones propias dentro de estas familias de problemas.

Capítulo 5

Contactos, tensiones y rozamiento

Una caja de cuatro kilogramos descansa sobre una mesa horizontal. Tiramos de ella con una cuerda horizontal que ejerce dieciséis newtons, pero la caja no se mueve. Aumentamos la fuerza hasta veinticuatro newtons y comienza a deslizar. Queremos saber cuánto avanzará si mantenemos ese tirón durante dos segundos y después soltamos la cuerda. La ecuación de Newton sigue siendo la misma; lo que necesitamos determinar es cómo responde el contacto con la mesa en cada parte de la historia.

Representaremos la caja por una partícula y despreciaremos su posible vuelco. La mesa permanece fija respecto del laboratorio, que tratamos como inercial, y la cuerda tira sin levantar la caja. Usaremos $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$. Un ensayo previo del par de superficies proporciona, dentro del modelo que vamos a utilizar, un coeficiente de rozamiento estático $\mu_s = 0{,}50$ y uno cinético $\mu_k = 0{,}30$. Son parámetros didácticos que aquí tratamos como exactos, no constantes universales de una clase de material.

La fuerza que permite seguir en reposo

Elegimos la caja como sistema, x horizontal en el sentido del tirón e y hacia arriba. La mesa ejerce una fuerza de contacto con una componente normal N y otra tangencial f, a la que llamaremos rozamiento o fricción. Son componentes de una misma interacción entre caja y mesa; las dibujamos por separado porque las ecuaciones distinguen sus direcciones. Sobre la caja actúan además el peso y el tirón F de la cuerda.

Mientras la caja mantiene su altura, la ecuación vertical es $N - mg = 0$, de donde $N = 40\,\mathrm{N}$. En la dirección horizontal,

$$F + f = m\ddot{x}.$$

La observación de reposo exige $\ddot{x} = 0$, por lo que con el primer tirón se necesita $f = -16\,\mathrm{N}$. El signo expresa que la mesa ejerce esa componente hacia la izquierda. Para saber si puede hacerlo tenemos que añadir una ley del contacto: en el régimen sin deslizamiento, el modelo admite cualquier fuerza tangencial cuyo módulo no exceda $\mu_s N$. El límite es aquí veinte newtons, así que los dieciséis requeridos son admisibles.

La igualdad $|f| = \mu_s N$ daría veinte newtons de fricción y una fuerza neta de cuatro hacia la izquierda, pese a que la caja permanece en reposo. Ese resultado diagnostica la elección equivocada de la ley: hemos utilizado el máximo disponible como si fuera el valor que el contacto debe ejercer siempre. La ecuación del movimiento determina cuánto rozamiento se necesita; el límite decide si esa demanda puede satisfacerse.

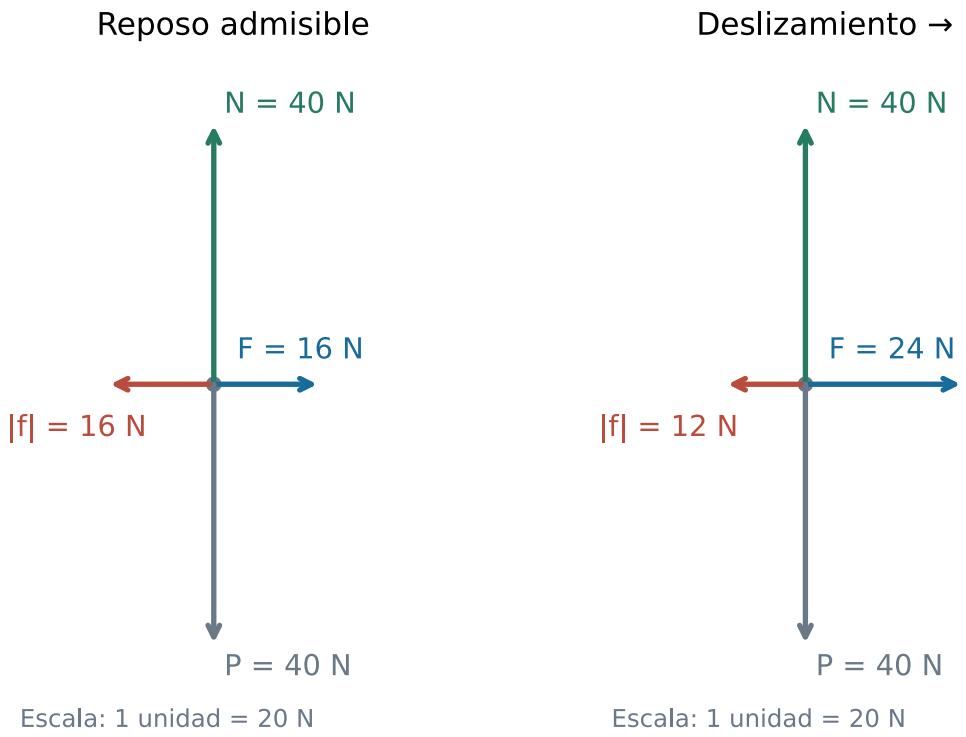


Figura 5.1. En reposo, el rozamiento requerido es de dieciséis newtons, inferior a su límite de veinte. Al deslizar hacia la derecha se utiliza otro parámetro y su módulo es de doce newtons. El peso y la normal se equilibran en ambos diagramas; las escalas de las flechas de cada panel son comunes.

Seguir la caja hasta que vuelva a detenerse

Con $F = 24\,\mathrm{N}$, mantener el reposo exigiría $f = -24\,\mathrm{N}$, fuera del intervalo admisible. La caja empieza a deslizar hacia la derecha. En ese régimen el modelo aproxima el módulo de la fricción por $\mu_k N = 12\,\mathrm{N}$, opuesta al deslizamiento respecto de la mesa. La aceleración pasa a ser

$$a_x = \frac{24\,\mathrm{N} - 12\,\mathrm{N}}{4\,\mathrm{kg}} = 3\,\mathrm{m/s^2}.$$

Fijemos $t = 0$ en el comienzo de este tirón, con $x(0) = 0$ y $v(0) = 0$. Durante los dos primeros segundos,

$$v(t) = (3\,\mathrm{m/s^2})t, \qquad x(t) = \frac{1}{2}(3\,\mathrm{m/s^2})t^2.$$

Al soltar la cuerda, la caja está en seis metros y lleva seis metros por segundo. La tensión desaparece, pero no desaparece el contacto con la mesa: mientras continúe deslizando a la derecha queda una fuerza horizontal de doce newtons hacia la izquierda. Para $\tau = t - 2\,\mathrm{s}$,

$$v = 6\,\mathrm{m/s} - (3\,\mathrm{m/s^2})\tau, \qquad x = 6\,\mathrm{m} + (6\,\mathrm{m/s})\tau - \frac{1}{2}(3\,\mathrm{m/s^2})\tau^2.$$

La primera velocidad nula de este segundo tramo ocurre en $\tau = 2\,\mathrm{s}$, a los cuatro segundos del reloj original, en $x = 12\,\mathrm{m}$. En ese instante hay que revisar el régimen. Ya no existe tirón ni otra fuerza tangencial: el reposo sólo requiere $f = 0$, que el modelo estático permite. La caja queda detenida.

Mantener después $f = -12\,\mathrm{N}$ produciría una velocidad negativa, pero esa prolongación asignaría a la fricción el mismo sentido que el nuevo deslizamiento. El signo de la ley cinética había sido elegido para velocidades positivas. El cero de la velocidad obliga a volver al problema físico; no autoriza a seguir usando la misma recta indefinidamente.

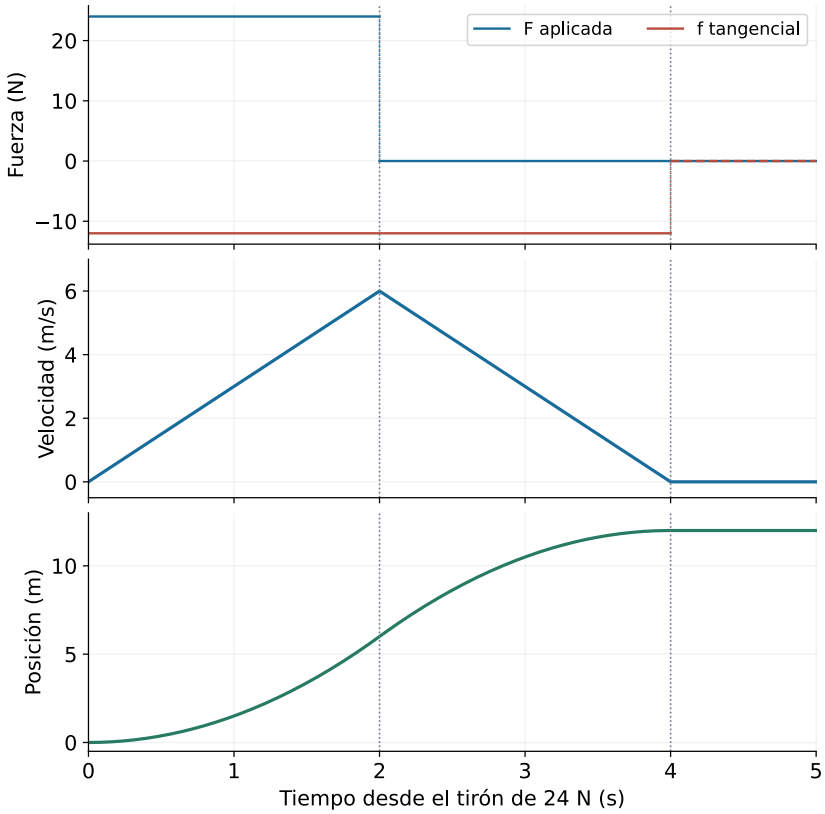


Figura 5.2. Los cambios de ley están alineados en el mismo reloj. La posición llega a doce metros y permanece allí. En los instantes de cambio representamos límites laterales; el modelo no describe la transición microscópica del contacto.

Qué contiene el modelo de rozamiento

La mesa y la caja pueden moverse ambas respecto del laboratorio. Para identificar el régimen importa su movimiento relativo en el contacto. En una dirección tangencial elegida, escribiremos $u = v_{\text{caja}} - v_{\text{superficie}}$. La velocidad de la superficie se evalúa en la región de contacto; no tiene que ser la de un origen distante de un cuerpo que gira.

Definición. Hay *adherencia* en el contacto cuando la velocidad tangencial relativa de las superficies es nula, $u = 0$. Hay *deslizamiento* cuando esa velocidad tiene módulo positivo, $|u| > 0$.

Ambos términos describen el movimiento tangencial relativo. La fuerza normal se determina mediante el modelo de compresión entre las superficies; la adherencia puede mantenerse mientras ese contacto transmite una fuerza tangencial dentro de su límite estático.

Para un contacto seco, sin adhesión normal, utilizaremos la siguiente ley idealizada de Coulomb, con coeficientes adimensionales $0 \le \mu_k \le \mu_s$:

$$\begin{cases} |f| \le \mu_s N, & u = 0, \\ f = -\mu_k N, & u > 0, \\ f = +\mu_k N, & u < 0. \end{cases}$$

En una superficie con dos direcciones tangenciales, la condición estática pasa a ser $\|\mathbf{f}\| \le \mu_s N$, y durante el deslizamiento $\mathbf{f}$ apunta en sentido opuesto a la velocidad relativa tangencial. Los coeficientes pertenecen al par de superficies y al régimen de calibración. Humedad, temperatura, desgaste o rapidez pueden hacer insuficiente la aproximación de coeficientes constantes.

La primera línea es una desigualdad que debe combinarse con las ecuaciones de movimiento. Por sí sola no selecciona una historia completa cuando $u = 0$. En los problemas de este capítulo supondremos que, si la adherencia es compatible con los datos y las ecuaciones, se mantiene sin una perturbación que inicie el deslizamiento; cuando deja de ser admisible, examinaremos el régimen deslizante. No deducimos de esta convención un teorema general de existencia o unicidad para todo sistema con fricción.

En el valor límite $|f| = \mu_s N$, la adherencia todavía es admisible. Alcanzarlo no demuestra que el cuerpo deba empezar a moverse exactamente entonces. Describe una frontera que una demanda mayor ya no puede satisfacer. Con $\mu_k < \mu_s$, un cuerpo que ya desliza puede tener un rozamiento menor que el requerido para sostener en reposo otra historia bajo la misma fuerza aplicada. El ejercicio 19 compara esas dos preparaciones.

Separar la normal de la condición de contacto

El capítulo anterior encontró normales negativas al imponer contactos que no podían mantenerse. Podemos expresar con más precisión la restricción que estaba detrás de ese diagnóstico.

Definición. En un contacto unilateral sin adhesión, llamaremos $d \ge 0$ a la separación normal entre las superficies y $N \ge 0$ al módulo de la fuerza normal de compresión. El modelo exige

$$d \ge 0, \qquad N \ge 0, \qquad N d = 0.$$

Una separación positiva implica fuerza normal nula. Cuando las superficies están juntas, puede haber compresión o una normal nula en el límite. Estas condiciones describen admisibilidad geométrica y de fuerza; para decidir si se separan también importan sus velocidades, aceleraciones y fuerzas restantes. No resuelven un choque ni una deformación del apoyo.

Si tiramos de la caja oblicuamente hacia arriba, una parte de la fuerza reduce la normal. Para una fuerza de módulo F que forma un ángulo α con la horizontal, mientras se conserve el contacto con una mesa fija,

$$N = mg - F\sin\alpha, \qquad F_x = F\cos\alpha.$$

Con $m = 4\,\mathrm{kg}$, $F = 20\,\mathrm{N}$, $\sin\alpha = 3/5$ y $\cos\alpha = 4/5$, obtenemos $N = 28\,\mathrm{N}$. Mantener el reposo exige dieciséis newtons tangenciales, mientras que $\mu_s N = 14\,\mathrm{N}$: no basta. Una vez que desliza hacia la derecha, la fricción es $8{,}4\,\mathrm{N}$ y la aceleración horizontal, $(16 - 8{,}4)/4 = 1{,}9\,\mathrm{m/s^2}$.

Usar $N = mg$ habría dado un límite estático de veinte newtons y una conclusión equivocada de reposo. La dirección del tirón modifica simultáneamente la demanda tangencial y la capacidad del contacto. Si una cuenta diera $N < 0$, antes de usarla en μN habría que abandonar la hipótesis de apoyo mantenido.

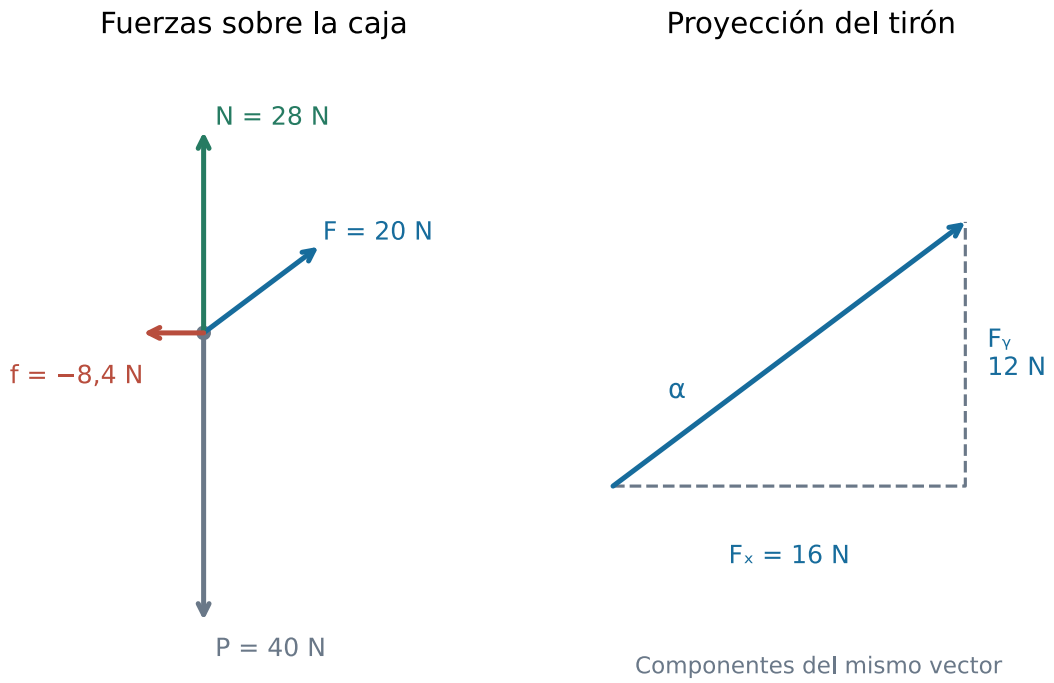


Figura 5.3. El diagrama contiene la fuerza oblicua completa. Sus proyecciones se muestran en otro panel para evitar contarlas como dos fuerzas adicionales. La normal se obtiene de la ecuación vertical.

La pendiente decide qué fricción se necesita

Coloquemos un bloque de tres kilogramos sobre un plano fijo con $\sin\alpha = 3/5$ y $\cos\alpha = 4/5$. Elegimos el eje tangencial hacia arriba y el normal hacia afuera. Mientras se mantenga el apoyo, $N = mg\cos\alpha = 24\,\mathrm{N}$. La componente del peso hacia abajo del plano es de dieciocho newtons. Para permanecer en reposo necesita una fuerza de fricción de dieciocho newtons hacia arriba.

Con $\mu_s = 0{,}80$, el límite estático es $19{,}2\,\mathrm{N}$ y esa situación es admisible. Si otro par de superficies tuviera $\mu_s = 0{,}50$ y $\mu_k = 0{,}40$, el límite sería doce newtons: el bloque comenzaría a bajar. Durante ese descenso, la fricción sería $9{,}6\,\mathrm{N}$ hacia arriba y la aceleración tendría módulo $(18 - 9{,}6)/3 = 2{,}8\,\mathrm{m/s^2}$ hacia abajo.

El signo de la fricción se decide comprobando la tendencia al deslizamiento o el deslizamiento que ya existe. Si el bloque llegara moviéndose hacia arriba, la fricción cinética apuntaría hacia abajo junto con la componente del peso. La condición de reposo debe revisarse después de la primera detención; no se puede tomar sin examen la solución de bajada para describir la subida.

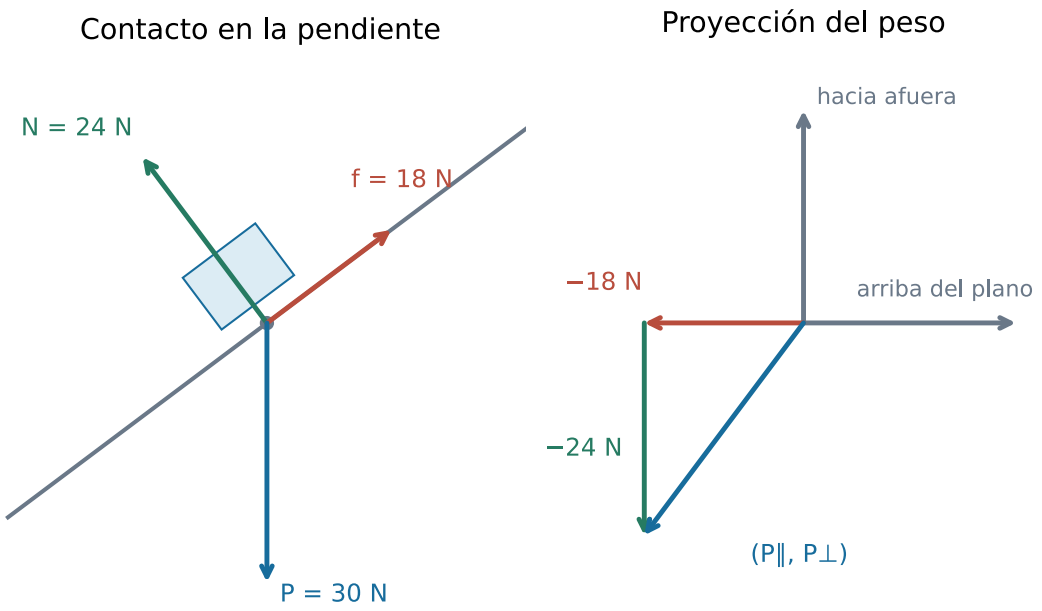


Figura 5.4. En este ejemplo la normal es de veinticuatro newtons y el peso, de treinta. La fricción requerida se compara con su límite; sus componentes no se añaden como otras fuerzas al diagrama.

Proposición. Sea un bloque de masa $m > 0$ sobre un plano fijo de inclinación $0 \le \alpha < \pi/2$. Supongamos un modelo de partícula, contacto mantenido, peso, una fuerza aplicada de componente F paralela al plano hacia arriba —sin componente normal— y rozamiento estático de coeficiente $\mu_s \ge 0$. El reposo es admisible exactamente cuando

$$mg(\sin\alpha - \mu_s \cos\alpha) \le F \le mg(\sin\alpha + \mu_s \cos\alpha).$$

Demostración. La ecuación normal fija $N = mg\cos\alpha > 0$. En la dirección tangencial, el reposo exige $F + f - mg\sin\alpha = 0$, por lo que sólo hay un valor posible de la fuerza estática: $f = mg\sin\alpha - F$. Ese valor pertenece al intervalo $[-\mu_s N, \mu_s N]$ exactamente cuando se cumplen las dos desigualdades enunciadas. Si se cumplen, las fuerzas así asignadas satisfacen ambas ecuaciones y el límite del contacto; si alguna falla, ninguna otra elección de f puede producir reposo. □

La fuerza F de este enunciado es una componente con signo, no un módulo que deba ser positivo. Si procede de una cuerda que sólo tira hacia arriba, hay que intersectar el intervalo obtenido con $F \ge 0$. Sin fuerza aplicada, el criterio se reduce a $\tan\alpha \le \mu_s$. Aumentar lentamente el ángulo hasta el umbral permite estimar μ_s, siempre que el ensayo corresponda al régimen del modelo. Una medición del ángulo crítico no justifica usar el mismo coeficiente en deslizamiento.

Lo que una cuerda puede transmitir

Una cuerda flexible tira de los cuerpos unidos a sus extremos a lo largo de su dirección local. Una cuerda floja no sostiene una fuerza de compresión que empuje sus extremos separándolos. Llamaremos $T \ge 0$ a su tensión; si la hipótesis de cuerda tensa exige $T < 0$, habrá que cambiar de régimen. Un tirante rígido capaz de empujar sería otro elemento mecánico.

Definición. En este capítulo, una *cuerda ideal* tiene masa despreciable, longitud constante cuando está tensa y resistencia nula a la flexión. Una *polea fija ideal* sólo redirige la cuerda: despreciamos su inercia y el rozamiento que pudiera exigir tensiones distintas a ambos lados. Estas hipótesis permiten utilizar un mismo módulo T en los tramos de una misma cuerda que pasa por esa polea.

La igualdad de tensiones y la relación entre movimientos proceden de hipótesis diferentes. La masa despreciable y la guía ideal permiten igualar los módulos transmitidos; la longitud constante relaciona desplazamientos. Una cuerda con masa puede necesitar tensiones diferentes para sostener y acelerar sus partes. Una guía rugosa puede ejercer fuerzas tangenciales sobre la cuerda. En cualquiera de esos casos no bastaría afirmar que se trata de «la misma cuerda» para igualar las tensiones.

La tensión tampoco se iguala automáticamente al peso de la masa que cuelga. Si esa masa acelera hacia abajo, su ecuación es $Mg - T = Ma_y$; con $a_y > 0$, la tensión es menor que Mg. El peso y la tensión recibidos por la masa no forman una pareja de tercera ley. La pareja de la tensión sobre la masa es la fuerza que esa masa ejerce sobre la cuerda.

Unir dos ecuaciones sin perder sus direcciones

Un bloque de masa $m = 3\,\mathrm{kg}$ descansa sobre una mesa y está unido, por una cuerda ideal sobre una polea fija ideal en su borde, a una masa colgante $M = 2\,\mathrm{kg}$. El tramo de cuerda sobre la mesa es horizontal. Para ese contacto tomamos $\mu_s = 0{,}40$ y $\mu_k = 0{,}20$. La guía es suficientemente larga y la masa colgante no toca el suelo durante el intervalo que analizamos.

Antes de suponer movimiento, probamos el reposo. La masa colgante necesitaría $T = Mg = 20\,\mathrm{N}$. El bloque sobre la mesa necesitaría una fricción opuesta de veinte newtons, pero su normal es treinta y el límite estático, doce. El reposo es imposible dentro de esas hipótesis. La masa colgante comenzará a bajar y el bloque se moverá hacia la polea.

Elegimos x positivo hacia la polea para el bloque e y positivo hacia abajo para la masa. Si el tramo horizontal tiene longitud $b - x$ y el vertical longitud y, la longitud total satisface

$$b - x + y + c = L,$$

donde b, c, L son constantes que incorporan la geometría fija. Por tanto, $\dot{y} = \dot{x}$ y $\ddot{y} = \ddot{x} = a$. Las componentes coinciden con estos ejes; los vectores de aceleración siguen apuntando en direcciones distintas.

El rozamiento cinético del bloque es de seis newtons. Escribimos una ecuación para cada receptor:

$$T - \mu_k m g = m a, \qquad M g - T = M a.$$

Al sumarlas se elimina la incógnita T. Estamos sumando ecuaciones escalares proyectadas sobre ejes diferentes; las fuerzas de tensión sobre esos dos cuerpos no son vectores opuestos en el laboratorio. La polea y su soporte cambian la dirección de la interacción transmitida. El cálculo da

$$a = \frac{Mg - \mu_k m g}{m + M} = \frac{14}{5}\,\mathrm{m/s^2}, \qquad T = ma + \mu_k m g = \frac{72}{5}\,\mathrm{N}.$$

La tensión es positiva y menor que los veinte newtons del peso colgante. La aceleración positiva confirma el sentido de deslizamiento supuesto. El sistema se puede seguir con esa ley hasta que cambie una condición: la masa llegue al suelo, el bloque alcance la polea, se retire un agente o aparezca holgura. La relación de longitud seguirá siendo necesaria en otras geometrías, pero ya no se puede anticipar que todas las aceleraciones tendrán el mismo módulo.

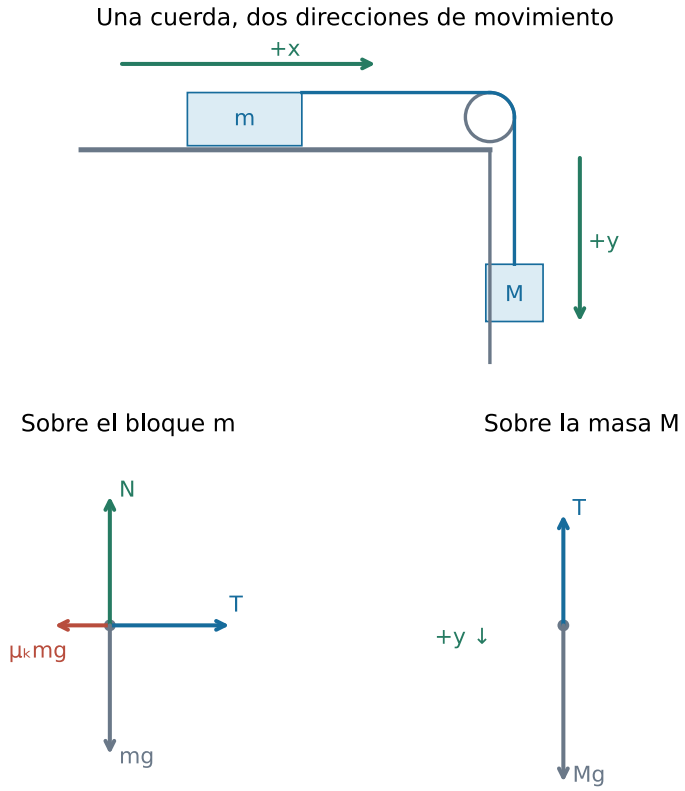


Figura 5.5. La cuerda tensa impone una relación entre sus tramos. Las ecuaciones usan el mismo valor de a después de derivar esa relación; no porque ambos cuerpos reciban las mismas fuerzas. Las longitudes de las flechas de fuerza son esquemáticas.

Fricción que acelera en el sentido de la marcha

Una caja se transporta sobre la plataforma horizontal de un vehículo que acelera hacia la derecha. Si la caja acompaña al vehículo sin deslizar, también debe acelerar hacia la derecha. Cuando la única fuerza horizontal sobre ella es el contacto con la plataforma, la segunda ley exige $f = ma$ hacia la derecha. La fricción estática puede apuntar en el mismo sentido que la velocidad de la caja respecto del suelo.

Con una plataforma que se traslada horizontalmente, sin otras fuerzas verticales sobre la caja, $N = mg$. La adherencia exige

$$|ma| \le \mu_s mg, \qquad |a| \le \mu_s g.$$

Proposición. Sea una caja de masa $m > 0$, inicialmente en reposo relativo sobre una plataforma horizontal que realiza una traslación horizontal de clase C^2 respecto de un marco inercial. Supongamos contacto mantenido, peso y contacto como únicas fuerzas sobre la caja, con coeficiente estático μ_s. La historia que conserva la posición de la caja respecto de la plataforma es admisible en un intervalo exactamente cuando $|a_{\text{plataforma}}(t)| \le \mu_s g$ para todos sus instantes.

Demostración. Conservar la posición relativa implica igualdad de velocidades y aceleraciones horizontales. La ecuación de la caja determina $f(t) = m a_{\text{plataforma}}(t)$ y la vertical fija $N = mg$. Aplicar el límite estático da la condición necesaria. Recíprocamente, si esa condición vale en todo el intervalo, asignar esa fuerza de contacto a la historia de traslación compartida satisface Newton y la ley estática, con las condiciones iniciales relativas dadas. Se

ha demostrado admisibilidad de esa historia, sin formular un resultado general de unicidad para otras leyes de contacto. □

Si se supera la cota, la caja puede deslizar hacia atrás respecto del vehículo mientras todavía avanza respecto del suelo. Una cinta transportadora ofrece otro ejemplo: una caja inicialmente quieta respecto del laboratorio es acelerada por la fricción de una cinta que pasa bajo ella. El sentido se decide comparando velocidades de las dos superficies, no mirando sólo la flecha de velocidad de la caja.

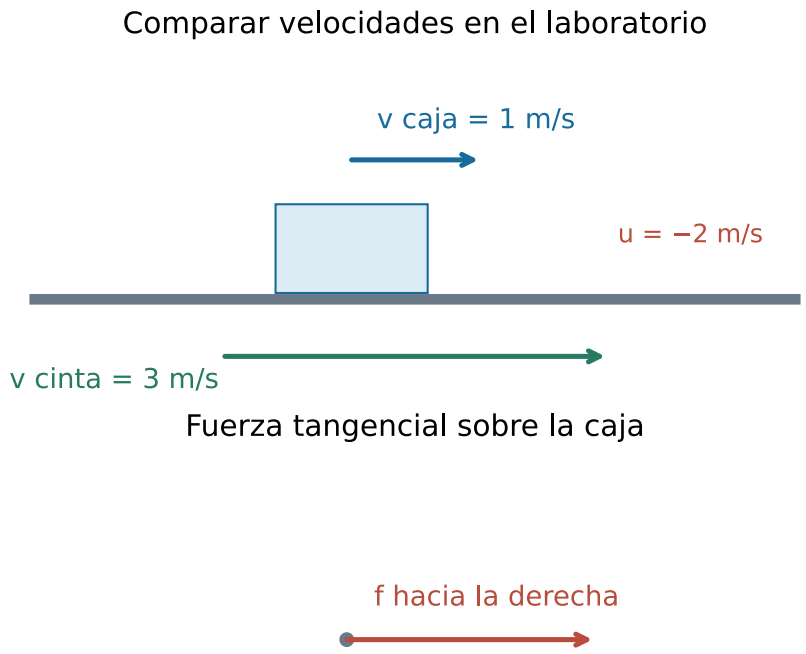


Figura 5.6. Las velocidades están expresadas respecto del laboratorio y utilizan su propia escala. La fuerza pertenece al diagrama de la caja. La comparación de velocidades determina el signo del deslizamiento relativo.

Una desigualdad también puede resolver un problema

En una cuenta de equilibrio, la fricción desconocida se obtiene de una igualdad y luego se comprueba mediante una desigualdad. Esa comprobación puede producir un intervalo completo de fuerzas aplicadas, en lugar de un único número. El criterio de reposo demostrado para el plano inclinado identifica precisamente ese intervalo. Sus extremos indican fricción estática límite en sentidos contrarios; en su interior puede cambiar incluso el signo de la fuerza requerida.

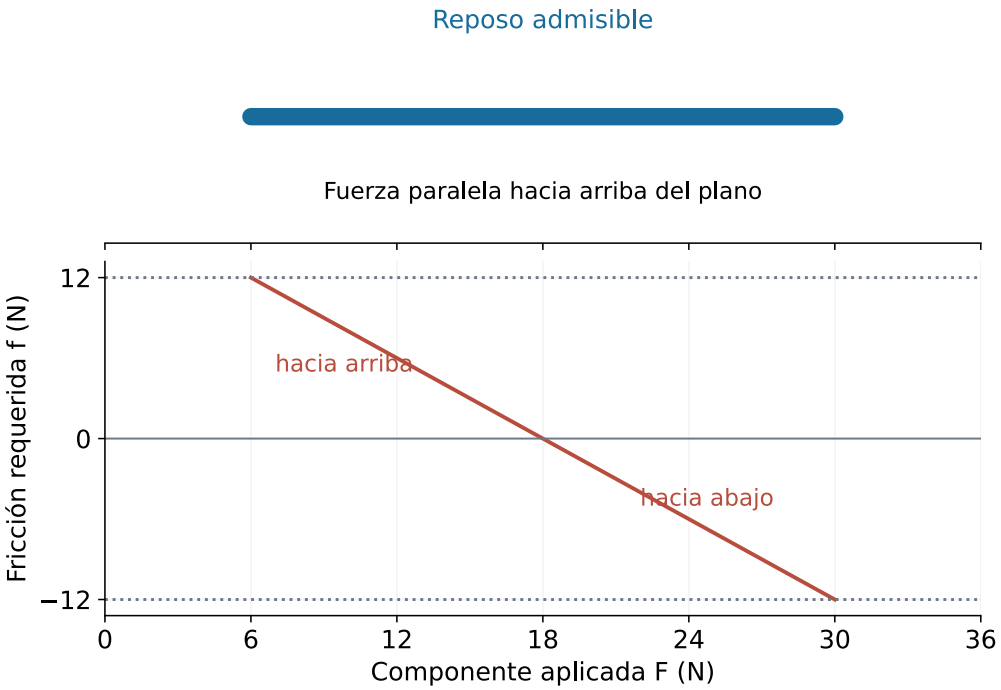


Figura 5.7. Para $m = 3\,\mathrm{kg}$, $\sin\alpha = 3/5$, $\cos\alpha = 4/5$ y $\mu_s = 0{,}50$, el reposo admite $6 \le F/(1\,\mathrm{N}) \le 30$. En $F = 18\,\mathrm{N}$ no se necesita fricción; en los extremos se requieren doce newtons en sentidos opuestos. Si el agente es una cuerda, también hay que respetar que sólo puede tirar.

Esta forma de resolver conserva la pregunta física: qué debe proporcionar un contacto y qué valores permite su modelo. La masa no necesita empezar a deslizar para que aprendamos algo sobre ella. Un reposo observado sólo impone una cota inferior a la fricción máxima disponible; una historia deslizante permite investigar otro parámetro. Para distinguirlos harán falta ensayos preparados en regímenes distintos y mediciones cuyas incertidumbres no se confundan con un cambio real de contacto.

Ejercicios

Utiliza $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ y el modelo de Coulomb del capítulo. Los coeficientes y demás datos son exactos dentro de cada problema, salvo indicación contraria. Los cuerpos se modelan como partículas o como bloques en traslación sin vuelco; se desprecian aire y deformaciones. Las cuerdas y poleas son ideales cuando se indica, y los apoyos no ejercen tracción normal. Los cambios instantáneos de fuerzas se interpretan mediante límites laterales. En las expresiones temporales, $\theta = t/(1\,\mathrm{s})$.

Los problemas 1–7 permiten consolidar el cambio entre reposo y deslizamiento con una sola masa. El 8 y el 9 introducen tensiones antes de combinarlas con rozamiento en el 10. Los restantes requieren elegir el movimiento relativo, comparar restricciones o utilizar datos acotados. Antes de mirar las soluciones de 3, 10 y 13, conviene dejar escrito qué régimen se está suponiendo y qué resultado obligaría a rechazarlo.

1. Una fricción que todavía no llegó al límite

Un bloque de tres kilogramos está inicialmente en reposo sobre una mesa horizontal. Se aplica una fuerza horizontal de ocho newtons hacia la derecha. Los coeficientes son $\mu_s = 0{,}40$ y $\mu_k = 0{,}25$. Determina la normal, la fricción y la aceleración. Un estudiante calcula primero $f = \mu_s mg$ y obtiene aceleración hacia la izquierda. Explica qué condición dejó de comprobar.

2. Retirar el tirón

Un bloque de dos kilogramos parte del reposo en $x = 0$ sobre una mesa horizontal, con $\mu_s = 0{,}40$ y $\mu_k = 0{,}30$. Desde $t = 0$ recibe una fuerza horizontal de diez newtons hacia la derecha durante un segundo; después se retira. Obtén velocidad y posición hasta la detención definitiva, su tiempo y la distancia total. Justifica el régimen posterior al primer cero de la velocidad.

3. Frenar mientras la fuerza apunta hacia la derecha

Un bloque de dos kilogramos desliza inicialmente hacia la izquierda a tres metros por segundo sobre una mesa fija. Actúa una fuerza horizontal constante de dos newtons hacia la derecha. Se conocen $\mu_s = 0{,}30$ y $\mu_k = 0{,}20$. Determina la fricción inicial, el instante y la posición de la primera detención, tomando $x(0) = 0$, y decide qué ocurre después. Explica por qué el rozamiento inicial no apunta hacia la izquierda.

4. Tirar y empujar en ángulo

Un bloque de cinco kilogramos está en reposo sobre una mesa, con $\mu_s = 0{,}50$ y $\mu_k = 0{,}40$. Se aplica una fuerza de veinticinco newtons con componente horizontal hacia la derecha y formando un ángulo cuyo seno es $3/5$ y coseno $4/5$. Estudia primero un tirón hacia arriba y después un empuje hacia abajo con el mismo módulo y ángulo. Calcula en cada ensayo la normal, el régimen inicial y la fricción; si empieza a deslizar, calcula la aceleración.

5. Reposo en una pendiente

Un bloque de dos kilogramos está inicialmente en reposo sobre un plano de 30°, con $\mu_s = 0{,}70$. No hay cuerda ni otra fuerza aplicada. Calcula la normal y la fricción necesaria, comprueba si se mantiene el reposo y decide si observarlo basta para identificar exactamente μ_s.

6. Subir, detenerse y decidir si vuelve

Un bloque se lanza hacia arriba de un plano largo con rapidez inicial de cinco metros por segundo. La inclinación tiene seno $3/5$ y coseno $4/5$; los coeficientes son $\mu_k = 0{,}25$ y $\mu_s = 0{,}80$. No actúa otra fuerza que peso y contacto. Determina la aceleración durante la subida, el tiempo y la distancia hasta detenerse. Decide si inicia un descenso después.

7. Sostener un bloque contra una pared

Una fuerza horizontal presiona un bloque de dos kilogramos contra una pared vertical fija. Los coeficientes son $\mu_s = 0{,}50$ y $\mu_k = 0{,}30$. Encuentra el módulo mínimo del empuje que permite sostenerlo en reposo. Si se mantiene un empuje de treinta newtons y el bloque se libera desde el reposo, determina el sentido de la fricción y la aceleración inicial de deslizamiento. No hay ningún apoyo por debajo.

8. Una tensión horizontal

Dos bloques A y B, de dos y tres kilogramos respectivamente, están unidos por una cuerda ideal horizontal y tensa sobre una mesa lisa. A está a la izquierda de B. Se aplica sobre B una fuerza de quince newtons hacia la derecha, partiendo ambos del reposo. Halla la aceleración común y la tensión. Identifica los dos receptores de las fuerzas que ejerce la cuerda y explica por qué su tensión no es el peso de ninguno de los bloques.

9. Dos masas a ambos lados de una polea

Dos masas de dos y tres kilogramos cuelgan de los extremos de una misma cuerda ideal sobre una polea fija ideal. Parten del reposo y no encuentran obstáculos durante el intervalo de estudio. Calcula sus aceleraciones y la tensión. Escribe claramente los sentidos positivos y comprueba que la tensión obtenida satisface las dos ecuaciones.

10. Probar el reposo antes de despejar una aceleración

Un bloque de cuatro kilogramos está sobre una mesa con $\mu_s = 0{,}40$ y $\mu_k = 0{,}25$. Una cuerda ideal horizontal pasa por una polea fija ideal y sostiene una masa colgante. Determina tensión y fricción si esa masa es de un kilogramo y todo parte del reposo. Repite el análisis si se sustituye por una masa de tres kilogramos: decide el régimen y calcula la aceleración y la tensión antes de que algún cuerpo alcance un obstáculo.

11. Una caja que acompaña a un vehículo

Una caja de cinco kilogramos está inicialmente en reposo relativo sobre una plataforma horizontal que se traslada hacia la derecha. El contacto tiene $\mu_s = 0{,}40$ y $\mu_k = 0{,}30$. Calcula la fricción cuando la plataforma acelera a $3\,\mathrm{m/s^2}$. Examina después un ensayo que comienza con la misma velocidad de caja y plataforma y aceleración de ésta de $5\,\mathrm{m/s^2}$. Si pierde adherencia, determina la aceleración de la caja respecto del laboratorio y la aceleración horizontal relativa respecto de la plataforma. La caja permanece sobre ella durante el tramo considerado.

12. Alcanzar la velocidad de una cinta

Una cinta horizontal muy larga se mueve uniformemente hacia la derecha a tres metros por segundo. En $t = 0$ una caja de dos kilogramos entra en contacto con ella, con velocidad horizontal nula respecto del laboratorio. El establecimiento del apoyo no aporta impulso horizontal. Los coeficientes son $\mu_k = 0{,}20$ y $\mu_s = 0{,}40$. Calcula cuándo deja de deslizar respecto de la cinta, la distancia que ha recorrido hasta entonces y su posición en $t = 3\,\mathrm{s}$, tomando $x(0) = 0$. Determina la fricción una vez que comparten velocidad.

13. Arrastrar dos bloques apilados

Un bloque superior de dos kilogramos descansa sobre otro inferior de tres, sobre una mesa horizontal lisa. Entre los dos bloques hay $\mu_s = 0{,}50$ y $\mu_k = 0{,}40$. Ambos parten del reposo. Se tira horizontalmente del bloque inferior hacia la derecha. Encuentra el mayor módulo de fuerza aplicada compatible con que se muevan juntos. Para una fuerza de treinta newtons, calcula las aceleraciones de ambos durante el deslizamiento relativo y comprueba su sentido. Supón que los bloques siguen solapándose y no vuelcan en el intervalo estudiado.

14. Una cuerda que tendría que empujar

Dos partículas A y B están sobre una guía horizontal lisa, con A a la izquierda de B y una cuerda ideal de un metro entre ellas, inicialmente recta y tensa. Sus masas son dos y un kilogramo. Parten del reposo; sólo se aplica a A una fuerza de seis newtons hacia la derecha. Prueba la hipótesis de cuerda tensa y examina el signo de la tensión. Determina las

aceleraciones inmediatamente después de comenzar la fuerza si la cuerda no puede empujar, y describe cómo cambia la separación antes de que se produzca cualquier otro contacto.

15. Cuándo no hay una sola tensión

Una cuerda vertical uniforme de masa un kilogramo y longitud dos metros sostiene en su extremo inferior una masa de tres kilogramos. Un agente tira del extremo superior y todo acelera hacia arriba a $2\,\mathrm{m/s^2}$, sin estiramiento apreciable. Calcula las tensiones en los extremos inferior y superior de la cuerda, y en una sección situada a una distancia $z \in [0, 2]\,\mathrm{m}$ por encima del extremo inferior. Explica qué idealización del capítulo ya no puede utilizarse.

16. Una decisión con datos acotados

Un bloque de cuatro kilogramos está inicialmente en reposo en una mesa horizontal. El coeficiente estático pertenece a $[0{,}35, 0{,}45]$ y el tirón horizontal aplicado a $[14, 18]\,\mathrm{N}$; todas las combinaciones son admisibles. Decide si se garantiza el reposo para toda la familia. Construye una elección compatible con reposo y otra incompatible. Explica qué se concluye en una combinación que satisface exactamente $F = \mu_s m g$ y si las cotas permiten asignar una probabilidad de deslizamiento.

17. Medir dos coeficientes mediante dos ensayos

En un ensayo cuasiestático, el ángulo crítico de inicio del deslizamiento de un bloque está acotado por $\alpha_c \in [20^\circ, 22^\circ]$. Adopta el criterio límite de Coulomb para inferir una banda de μ_s. En otro ensayo, el bloque ya desliza hacia abajo por un plano fijo de 30° y su aceleración hacia abajo pertenece a $[2{,}0, 2{,}2]\,\mathrm{m/s^2}$. El ángulo y g se tratan como exactos en este segundo ensayo. Obtén una banda para μ_k y explica por qué no basta el primer ensayo para medir ambos coeficientes.

18. Reposo relativo en una plataforma que gira

Una pieza de dos kilogramos descansa a dos metros del centro de una plataforma horizontal que gira con velocidad angular constante alrededor de un eje vertical. Inicialmente la pieza comparte su giro y no desliza. El coeficiente estático es $\mu_s = 0{,}45$; no hay cuerda ni tope lateral. Calcula la fricción requerida para $\omega = 1\,\mathrm{s^{-1}}$ y el mayor $|\omega|$ compatible con la trayectoria circular sin deslizamiento. Decide qué puede afirmarse para $\omega = 2\,\mathrm{s^{-1}}$ sin suponer que la pieza sigue obligatoriamente en el mismo círculo.

19. La misma fuerza y dos preparaciones

Sobre un bloque de dos kilogramos en una mesa fija actúa una fuerza horizontal constante de seis newtons hacia la derecha. Se conocen $\mu_s = 0{,}40$ y $\mu_k = 0{,}20$. Compara un ensayo en que comienza en reposo con otro en que comienza deslizando hacia la derecha a un metro por segundo. Determina la fricción y el movimiento en cada uno durante dos segundos. Aplica la convención de mantener la adherencia cuando sea admisible. Explica por qué la fuerza aplicada no determina por sí sola la respuesta.

20. Elegir el ángulo del tirón

Se quiere iniciar el deslizamiento hacia la derecha de un bloque de masa $m > 0$, inicialmente en reposo sobre una mesa, tirando mediante una cuerda que forma un ángulo $0 \le \alpha < \pi/2$ hacia arriba. El coeficiente estático es $\mu_s > 0$ y se exige conservar normal positiva. Obtén el módulo crítico $F_c(\alpha)$ en que la fricción requerida alcanza su máximo y encuentra el ángulo que minimiza ese módulo. Evalúa el resultado para $m = 4\,\mathrm{kg}$ y $\mu_s = 0{,}50$, comprueba la normal en ese umbral y distingue alcanzar el límite de sobrepasarlo.

Soluciones

1. Una fricción que todavía no llegó al límite

El reposo es la primera hipótesis que debemos comprobar porque el bloque parte sin deslizamiento. En vertical, la mesa impide el movimiento y no hay otra fuerza con componente vertical: $N = mg = 30\,\mathrm{N}$. En horizontal, el reposo exige $8\,\mathrm{N} + f = 0$, por lo que $f = -8\,\mathrm{N}$.

El máximo estático es $\mu_s N = 12\,\mathrm{N}$. El valor requerido tiene módulo menor, así que es admisible y la aceleración es cero. El coeficiente cinético no interviene en esta historia. Usar siempre doce newtons hacia la izquierda produciría $(8 - 12)/3 = -4/3\,\mathrm{m/s^2}$: esa cuenta cumple Newton para una fuerza mal asignada, pero no la condición de contacto estático ajustado a los datos. La caja no necesita que la mesa ejerza su fuerza tangencial máxima.

2. Retirar el tirón

La normal es veinte newtons y el máximo estático, ocho. Como la fuerza aplicada es diez, el reposo no puede mantenerse. Al deslizar a la derecha, la fricción es seis newtons hacia la izquierda y la aceleración, $(10 - 6)/2 = 2\,\mathrm{m/s^2}$. Durante el primer segundo,

$$v = 2\theta\,\mathrm{m/s}, \qquad x = \theta^2\,\mathrm{m}.$$

En el cambio de fuerza, $v = 2\,\mathrm{m/s}$ y $x = 1\,\mathrm{m}$. Después sólo queda fricción horizontal, de modo que $a = -3\,\mathrm{m/s^2}$. Con $\tau = t - 1\,\mathrm{s}$,

$$v = 2\,\mathrm{m/s} - (3\,\mathrm{m/s^2})\tau, \qquad x = 1\,\mathrm{m} + (2\,\mathrm{m/s})\tau - \frac{1}{2}(3\,\mathrm{m/s^2})\tau^2.$$

La velocidad se anula después de $2/3\,\mathrm{s}$. La caja avanza en este tramo $2/3\,\mathrm{m}$, por lo que queda en $x = 5/3\,\mathrm{m}$ a los $5/3\,\mathrm{s}$ del reloj original. No cambió de sentido antes de detenerse, así que esa posición también es la distancia total desde el origen.

Al llegar a velocidad cero, el tirón ya no actúa y la fricción necesaria para conservar reposo es cero, dentro de la banda estática. Para tiempos posteriores, $v = 0$ y $x = 5/3\,\mathrm{m}$. La prolongación del segundo polinomio predeciría regreso y utilizaría una ley de fricción cuyo signo ya no correspondería al movimiento.

3. Frenar mientras la fuerza apunta hacia la derecha

El bloque desliza hacia la izquierda respecto de una mesa fija: su velocidad relativa es negativa. La fricción cinética apunta a la derecha, con módulo $\mu_k mg = 4\,\mathrm{N}$. Junto con los dos newtons aplicados produce seis newtons hacia la derecha y $a = 3\,\mathrm{m/s^2}$.

Hasta la primera detención,

$$v = (-3 + 3\theta)\,\mathrm{m/s}, \qquad x = (-3\theta + \tfrac{3}{2}\theta^2)\,\mathrm{m}.$$

La raíz admisible es $t = 1\,\mathrm{s}$, en $x = -1{,}5\,\mathrm{m}$. La aceleración positiva redujo una rapidez asociada a una velocidad negativa. Para decidir el tramo siguiente escribimos otra vez la ecuación de reposo: ahora basta una fricción de dos newtons hacia la izquierda, menor que el máximo estático de seis. El bloque queda allí detenido bajo la convención de adherencia adoptada. La fricción cambia de sentido entre el deslizamiento y el reposo; el signo del tirón no bastaba para determinar su signo inicial.

4. Tirar y empujar en ángulo

En ambos ensayos la componente horizontal aplicada es veinte newtons y el módulo de la vertical, quince. Al tirar hacia arriba, $N = 50 - 15 = 35\,\mathrm{N}$. El reposo requeriría $f = -20\,\mathrm{N}$, pero el límite estático es $17{,}5\,\mathrm{N}$. Empieza a deslizar a la derecha, la fricción pasa a catorce newtons hacia la izquierda y

$$a = \frac{20 - 14}{5}\,\mathrm{m/s^2} = 1{,}2\,\mathrm{m/s^2}.$$

Al empujar hacia abajo, la normal aumenta a $N = 50 + 15 = 65\,\mathrm{N}$. Su límite estático es 32,5 N, suficiente para proporcionar los veinte requeridos. La fricción es veinte hacia la izquierda y la aceleración es cero. Ambas normales son positivas; no se pierde contacto. Comparar sólo la componente horizontal habría ocultado que el empuje cambia la capacidad de la mesa para mantener adherencia.

5. Reposo en una pendiente

Los ejes paralelo y normal al plano separan la tendencia a bajar de la compresión contra la superficie. La normal es $mg\cos 30^\circ = 10\sqrt{3}\,\mathrm{N}$. La componente del peso hacia abajo es $mg\sin 30^\circ = 10\,\mathrm{N}$, por lo que la fricción requerida apunta hacia arriba con ese mismo módulo.

El límite vale $\mu_s N = 7\sqrt{3}\,\mathrm{N} \approx 12{,}124\,\mathrm{N}$, superior a diez. El reposo es admisible. Ese resultado no significa que la fricción real sea $7\sqrt{3}$; sigue siendo diez. Observar el reposo bajo estas condiciones sólo permite inferir $\mu_s \geq \tan 30^\circ = 1/\sqrt{3}$. Todos los valores superiores satisfacen la misma observación; identificar exactamente el coeficiente requeriría información adicional de umbral.

6. Subir, detenerse y decidir si vuelve

Orientamos el eje hacia arriba del plano. Durante la subida, tanto la componente del peso como la fricción apuntan hacia abajo. La normal es $mg(4/5)$ y, al dividir la ecuación tangencial por la masa,

$$a = -g\left(\frac{3}{5} + \mu_k \frac{4}{5}\right) = -8\,\mathrm{m/s^2}.$$

La masa se cancela porque ambas contribuciones de fuerza son proporcionales a ella en este modelo. Integrar desde $v_0 = 5\,\mathrm{m/s}$ da el primer cero en $t_* = 5/8\,\mathrm{s}$ y una distancia de subida

$$s_* = \frac{v_0^2}{2(8\,\mathrm{m/s^2})} = \frac{25}{16}\,\mathrm{m}.$$

En la detención, permanecer allí requiere fricción hacia arriba de módulo $(3/5)mg$. El máximo estático es $\mu_s N = (16/25)mg$, y $3/5 = 15/25 < 16/25$. Por tanto, puede quedarse en reposo y así continúa según la convención del capítulo. La cuenta de bajada no debe iniciarse hasta haber comprobado esta condición. Una aceleración dirigida hacia abajo durante la subida no garantiza que exista después un descenso.

7. Sostener un bloque contra una pared

La normal es horizontal: la proporciona la pared y equilibra el empuje. Si su módulo es F, entonces $N = F$. En vertical el peso de veinte newtons debe ser equilibrado por fricción estática hacia arriba. Se exige $20\,\mathrm{N} \leq 0{,}50F$, es decir, $F \geq 40\,\mathrm{N}$. Cuarenta es el mínimo admisible; en ese umbral el reposo sigue siendo posible.

Con $F = 30\,\mathrm{N}$, el límite estático es quince, insuficiente para sostener el bloque. Empieza a bajar. La fricción cinética apunta hacia arriba y vale $0{,}30(30) = 9\,\mathrm{N}$. Quedan once newtons hacia abajo, de modo que la aceleración de deslizamiento es $11/2 = 5{,}5\,\mathrm{m/s^2}$ hacia abajo. No se utiliza $N = mg$: aquí normal y peso apuntan en direcciones perpendiculares.

8. Una tensión horizontal

El sistema A y B recibe quince newtons externos en horizontal; sobre la mesa lisa no hay rozamiento. La cuerda tensa y de longitud constante obliga a conservar la separación, así que ambos comparten aceleración. Al sumar sus ecuaciones,

$$(2+3)\,\mathrm{kg}\,a = 15\,\mathrm{N}, \qquad a = 3\,\mathrm{m/s^2}.$$

Para recuperar la tensión escogemos A solo: su única fuerza horizontal es la que la cuerda ejerce hacia la derecha. Por tanto, $T = (2\,\mathrm{kg})a = 6\,\mathrm{N}$. En B, la cuerda tira hacia la izquierda y la ecuación es $15 - 6 = 3(3)$ en newtons, que comprueba el resultado.

La cuerda ejerce seis newtons sobre cada bloque, con receptores y sentidos diferentes. La igualdad de módulos responde a su idealización. Ninguno de esos módulos se obtiene del equilibrio vertical: los pesos, veinte y treinta newtons, son equilibrados por las normales. Aquí la tensión es una fuerza horizontal necesaria para acelerar A.

9. Dos masas a ambos lados de una polea

La masa mayor bajará y la menor subirá si la tensión que resulte es admisible. Elegimos positivo hacia arriba para la masa de dos kilogramos y hacia abajo para la de tres. La cuerda tensa sobre una polea fija conserva la suma de las longitudes verticales: los desplazamientos tienen el mismo módulo en sentidos contrarios, y las componentes en estos dos ejes comparten un valor a.

Las ecuaciones son

$$T - 20\,\mathrm{N} = (2\,\mathrm{kg})a, \qquad 30\,\mathrm{N} - T = (3\,\mathrm{kg})a.$$

Sumarlas da $a = 2\,\mathrm{m/s^2}$. La primera proporciona $T = 24\,\mathrm{N}$; la segunda comprueba $30 - 24 = 3(2)$ en newtons. Es positiva, mayor que el peso de la masa que sube y menor que el de la que baja. Esas desigualdades permiten que ambas aceleren en los sentidos elegidos. Suponer $T = 30\,\mathrm{N}$ habría dejado a la masa mayor sin aceleración y habría resultado incompatible con la primera ecuación y la restricción de cuerda.

10. Probar el reposo antes de despejar una aceleración

Con la masa colgante de un kilogramo, el reposo de ésta requiere $T = 10\,\mathrm{N}$. El bloque horizontal necesita una fricción de diez newtons que se oponga al tirón. Su normal es cuarenta y su límite estático, dieciséis: esa fricción es admisible. Ambos permanecen en reposo, $f = -10\,\mathrm{N}$ tomando positivo hacia la polea. El coeficiente cinético no interviene.

Con la masa colgante de tres kilogramos, la prueba de reposo exigiría $T = 30\,\mathrm{N}$ y una fricción horizontal del mismo módulo, superior a dieciséis. En el nuevo régimen el bloque desliza hacia la polea y la fricción es diez newtons. Elegimos ese sentido positivo para él y hacia abajo para la masa. La longitud de la cuerda relaciona sus aceleraciones como en el texto. Resulta

$$T - 10\,\mathrm{N} = (4\,\mathrm{kg})a, \qquad 30\,\mathrm{N} - T = (3\,\mathrm{kg})a.$$

Por tanto, $a = 20/7\,\mathrm{m/s^2}$ y $T = 150/7\,\mathrm{N}$. La aceleración confirma el sentido supuesto y la tensión es positiva. Su sustitución produce veinte newtons de fuerza motriz conjunta sobre siete kilogramos en estas ecuaciones escalares. Aplicar fricción cinética desde el comienzo del primer ensayo habría predicho un movimiento que sus condiciones iniciales y su contacto no exigen.

11. Una caja que acompaña a un vehículo

Para acompañar la primera aceleración, la caja necesita $f = ma = 15\,\mathrm{N}$ hacia la derecha. La normal es cincuenta y el límite estático, veinte; no desliza. La fuerza no apunta contra la velocidad de la caja respecto del suelo: proporciona precisamente su aumento hacia la derecha.

En el segundo ensayo, la adherencia requeriría veinticinco newtons, más de los veinte permitidos. La plataforma comienza a adelantarse a la caja y el deslizamiento de ésta respecto de aquélla es hacia atrás. La fricción cinética sobre la caja apunta hacia la derecha y vale quince newtons. Su aceleración en el laboratorio es $15/5 = 3\,\mathrm{m/s^2}$, mientras que la aceleración relativa es

$$a_{\text{caja/plataforma}} = 3 - 5 = -2\,\mathrm{m/s^2}.$$

Parten con velocidad relativa cero y esa aceleración negativa genera la velocidad relativa hacia atrás que utilizamos para escoger el signo. El cálculo es consistente hasta que cambie la aceleración del vehículo o la caja deje de apoyarse en su plataforma. Todas las ecuaciones de fuerzas de esta solución se escribieron en el laboratorio inercial.

12. Alcanzar la velocidad de una cinta

Al comienzo, $u = 0 - 3 = -3\,\mathrm{m/s}$. La fricción cinética sobre la caja apunta hacia la derecha y tiene módulo $\mu_k mg = 4\,\mathrm{N}$, con aceleración $2\,\mathrm{m/s^2}$. Hasta compartir la velocidad de la cinta,

$$v = 2\theta\,\mathrm{m/s}, \qquad x = \theta^2\,\mathrm{m}.$$

La igualdad $v = 3\,\mathrm{m/s}$ ocurre en $t = 1{,}5\,\mathrm{s}$, con $x = 2{,}25\,\mathrm{m}$. En ese instante desaparece el deslizamiento relativo. Para conservar la velocidad común, constante, la fricción requerida es cero, admisible en el régimen estático. Después $v = 3\,\mathrm{m/s}$ y

$$x = 2{,}25\,\mathrm{m} + (3\,\mathrm{m/s})(t - 1{,}5\,\mathrm{s}).$$

En tres segundos la posición es $6{,}75\,\mathrm{m}$. La caja nunca estuvo en reposo respecto del laboratorio durante este segundo tramo; lo está respecto de la cinta. Continuar aplicando cuatro newtons la haría superar la velocidad de ésta y contradiría la ley elegida para el deslizamiento anterior.

13. Arrastrar dos bloques apilados

Si no deslizan entre sí, los dos bloques comparten $a = F/[(2 + 3)\,\mathrm{kg}]$. La única fuerza horizontal sobre el superior es la fricción que le transmite el inferior, por lo que requiere $f = 2\,\mathrm{kg}\,a = 2F/5$ hacia la derecha. La normal entre ambos es veinte newtons y el máximo estático, diez. Así, $2F/5 \le 10\,\mathrm{N}$ equivale a $F \le 25\,\mathrm{N}$. Para fuerzas hacia la derecha, el mayor módulo compatible es veinticinco newtons.

Con treinta, la aceleración común supuesta requeriría doce newtons sobre el superior, que el contacto no puede proporcionar estáticamente. El inferior comienza a adelantarse y la fricción cinética sobre el superior es ocho newtons hacia la derecha. Sobre el inferior actúa la fuerza opuesta de ocho hacia la izquierda. Las aceleraciones son

$$a_{\text{sup}} = \frac{8}{2}\,\mathrm{m/s^2} = 4\,\mathrm{m/s^2}, \qquad a_{\text{inf}} = \frac{30 - 8}{3}\,\mathrm{m/s^2} = \frac{22}{3}\,\mathrm{m/s^2}.$$

Su diferencia es $a_{\text{sup}} - a_{\text{inf}} = -10/3\,\mathrm{m/s^2}$, que produce desde el reposo relativo un deslizamiento del superior hacia atrás respecto del inferior. La dirección escogida queda comprobada. La normal de la mesa bajo el bloque inferior es cincuenta newtons, pero no se utiliza para la fricción entre bloques: esa interacción depende de su propia normal, de veinte.

14. Una cuerda que tendría que empujar

Tomemos positivo hacia la derecha para ambos. Una cuerda tensa tiraría de A hacia B, con fuerza $+T$, y de B hacia A, con $-T$. Si se mantuviera la separación, compartirían aceleración y deberían satisfacer

$$6\,\mathrm{N} + T = (2\,\mathrm{kg})a, \qquad -T = (1\,\mathrm{kg})a.$$

Sumar da $a = 2\,\mathrm{m/s^2}$ y la segunda ecuación, $T = -2\,\mathrm{N}$. Es una compresión, excluida para la cuerda flexible. El resultado rechaza la hipótesis de cuerda tensa.

Con holgura, $T = 0$. A tiene aceleración $3\,\mathrm{m/s^2}$ y B permanece con aceleración cero. Mientras no se produzca otro contacto, la separación inicial disminuye según $x_B - x_A = 1\,\mathrm{m} - (3/2\,\mathrm{m/s^2})t^2$. Es menor que la longitud disponible de cuerda para tiempos positivos pequeños, consistente con la holgura. Para fijar ese intervalo exigimos $x_B - x_A > 0$. Escribiendo $\theta = t/(1\,\mathrm{s})$, la condición es $1 - 3\theta^2/2 > 0$, por lo que el tramo de holgura con A a la izquierda de B corresponde a $0 < t < \sqrt{2/3}\,\mathrm{s}$. La separación tiende a cero en el extremo superior: las partículas llegan a una coincidencia espacial y la continuación exigiría precisar su interacción en ese encuentro. En todo el intervalo abierto la separación permanece entre cero y un metro, de modo que la tensión nula es consistente con una cuerda cuya longitud es un metro.

15. Cuándo no hay una sola tensión

Para la masa inferior, la ecuación hacia arriba es $T_0 - (3\,\mathrm{kg})g = (3\,\mathrm{kg})a$. Resulta $T_0 = (3\,\mathrm{kg})(g + a) = 36\,\mathrm{N}$. Para el sistema formado por masa y cuerda, la fuerza superior debe acelerar cuatro kilogramos y sostener su peso: $T_{\mathrm{sup}} = (4\,\mathrm{kg})(g + a) = 48\,\mathrm{N}$.

En una sección intermedia elegimos todo lo situado debajo. La densidad lineal de la cuerda es $\lambda = 1\,\mathrm{kg}/(2\,\mathrm{m}) = 0{,}5\,\mathrm{kg/m}$. La masa del sistema inferior es $3\,\mathrm{kg} + \lambda z$. Su ecuación da

$$T(z) = (3\,\mathrm{kg} + \lambda z)(g + a) = 36\,\mathrm{N} + (6\,\mathrm{N/m})z.$$

En $z = 0$ y $z = 2\,\mathrm{m}$ se recuperan los dos extremos. La diferencia de tensiones proporciona el peso y la aceleración de la parte de cuerda que queda entre las secciones. La aproximación de masa despreciable ya no es válida. Una cuerda puede ser prácticamente inextensible y, sin embargo, tener masa suficiente para que la tensión varíe a lo largo de ella.

16. Una decisión con datos acotados

La normal es cuarenta newtons y el máximo estático varía entre catorce y dieciocho. Para garantizar el reposo en todas las combinaciones, el mayor tirón tendría que ser a lo sumo el menor límite disponible: $18 \le 14$ en newtons. La condición no se cumple.

Hay reposo admisible, por ejemplo, con $F = 14\,\mathrm{N}$ y $\mu_s = 0{,}45$, pues se requieren catorce y se permiten dieciocho. Con $F = 18\,\mathrm{N}$ y $\mu_s = 0{,}35$, se requieren dieciocho y sólo se permiten catorce: no puede mantenerse adherencia. Las dos elecciones pertenecen al rectángulo declarado, por lo que tampoco puede afirmarse que toda la familia desliza.

Cuando $F = \mu_s mg$, el reposo pertenece al límite admisible; esa igualdad no obliga por sí sola a iniciar movimiento. No se pueden asignar probabilidades a las partes de este rectángulo sin un modelo probabilístico adicional. Las bandas sólo especifican restricciones deterministas.

Podemos reunir la decisión en el margen $S = \mu_s mg - F$. La adherencia requiere $S \ge 0$. Como el margen aumenta con μ_s y disminuye con F, sus extremos sobre el rectángulo son $S_{\mathrm{mín}} = -4\,\mathrm{N}$ y $S_{\mathrm{máx}} = 4\,\mathrm{N}$. Una familia con margen mínimo no negativo admitiría reposo en todas sus combinaciones; una con margen máximo negativo lo excluiría en todas. Los signos opuestos de este caso explican por qué hacen falta datos más precisos para decidir el régimen de un ensayo particular. La comparación utiliza la misma propagación de cotas del capítulo 0, aplicada ahora a una desigualdad física.

17. Medir dos coeficientes mediante dos ensayos

En el primer ensayo, el criterio de reposo sin fuerza aplicada es $\tan\alpha \le \mu_s$, con el límite en $\mu_s = \tan\alpha_c$. La tangente es creciente entre veinte y veintidós grados. Por tanto,

$$\mu_s \in [\tan 20^\circ, \tan 22^\circ] \subset [0{,}363, 0{,}405].$$

La última banda está redondeada hacia fuera. La inferencia utiliza el ensayo cuasiestático y el criterio límite adoptado; si la inclinación se cambiara deprisa o el inicio no se identificara adecuadamente, habría que revisar el procedimiento.

En el ensayo deslizante, elegimos positivo hacia abajo. La segunda ley da $a = g\sin 30^\circ - \mu_k g\cos 30^\circ$. Despejando,

$$\mu_k = \frac{5\,\mathrm{m/s^2} - a}{5\sqrt{3}\,\mathrm{m/s^2}} \in \left[\frac{2{,}8}{5\sqrt{3}}, \frac{3{,}0}{5\sqrt{3}}\right] \subset [0{,}323, 0{,}347].$$

Aumentar la aceleración observada reduce el coeficiente inferido, por lo que los extremos cambian de orden al despejar. Se conserva $\mu_k < \mu_s$ en toda esta pareja de bandas. El primer ensayo investiga el umbral estático; no contiene una medición de la fuerza mientras las superficies deslizan. Los dos parámetros requieren información de regímenes diferentes.

18. Reposo relativo en una plataforma que gira

La pieza está en reposo respecto de la plataforma, pero en el laboratorio describe un círculo. Su aceleración es radial hacia el centro, de módulo $\omega^2 R$. La normal es veinte newtons y el máximo estático, nueve. La única fuerza horizontal es la fricción, por lo que, con $\omega = 1\,\mathrm{s^{-1}}$,

$$\|\mathbf{f}\| = m\omega^2 R = 4\,\mathrm{N},$$

dirigida hacia el centro. Es menor que nueve y la trayectoria sin deslizamiento es admisible. En general se requiere $m\omega^2 R \le \mu_s m g$, de donde

$$|\omega| \le \sqrt{\frac{\mu_s g}{R}} = 1{,}5\,\mathrm{s^{-1}}.$$

Para $\omega = 2\,\mathrm{s^{-1}}$ se necesitarían dieciséis newtons, más de los nueve disponibles estáticamente. La historia circular compartida es inadmisible. No se ha dado el coeficiente cinético ni se ha resuelto el movimiento relativo posterior, así que no podemos deducir de esa prueba una trayectoria completa después de perder adherencia. Tampoco se añade otra fuerza llamada centrípeta: el módulo calculado era la demanda radial sobre el contacto.

19. La misma fuerza y dos preparaciones

La normal es veinte newtons, el máximo estático ocho y el módulo cinético cuatro. En la preparación en reposo se necesita $f = -6\,\mathrm{N}$, dentro de la banda estática. Bajo la convención de conservar adherencia, $v = 0$ y la posición no cambia durante los dos segundos.

En la preparación que ya desliza a la derecha, $f = -4\,\mathrm{N}$ y la fuerza neta es dos newtons hacia la derecha. La aceleración es $1\,\mathrm{m/s^2}$. Midiendo la posición desde el lugar inicial de ese ensayo,

$$v = (1+\theta)\,\mathrm{m/s}, \qquad x = (\theta + \theta^2/2)\,\mathrm{m}.$$

En dos segundos la velocidad es tres metros por segundo y el desplazamiento, cuatro metros. La velocidad se conserva positiva en todo el tramo y no hay cambio de régimen. La fuerza aplicada y las propiedades del contacto coinciden entre ensayos, pero el estado inicial selecciona situaciones diferentes. Una curva que pretendiera asignar una única fricción a cada fuerza aplicada, sin indicar la preparación y el movimiento relativo, perdería esa información.

20. Elegir el ángulo del tirón

Para conservar contacto sin aceleración vertical, $N = mg - F\sin\alpha$. El reposo horizontal exige una fricción opuesta de módulo $F\cos\alpha$. En el límite estático,

$$F\cos\alpha = \mu_s(mg - F\sin\alpha), \qquad F_c(\alpha) = \frac{\mu_s mg}{\cos\alpha + \mu_s\sin\alpha}.$$

El denominador es positivo en el dominio. Minimizar el cociente equivale a maximizar ese denominador, porque el numerador permanece fijo y positivo. El producto escalar de $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ con $(1, \mu_s)$ es a lo sumo $\sqrt{1+\mu_s^2}$, ya que el primer vector es unitario. La igualdad se alcanza cuando ambos tienen la misma dirección, es decir, cuando $\tan\alpha = \mu_s$. Ese ángulo pertenece al dominio, por lo que

$$\alpha_* = \arctan\mu_s, \qquad F_{c,\mín} = \frac{\mu_s mg}{\sqrt{1+\mu_s^2}}.$$

La desigualdad utilizada también se comprueba expandiendo $(\sin\alpha - \mu_s\cos\alpha)^2 \geq 0$, que da $(\cos\alpha + \mu_s\sin\alpha)^2 \leq 1 + \mu_s^2$. El argumento identifica el máximo global y su igualdad, no sólo un punto crítico local.

Con los datos numéricos, $\alpha_* \approx 26{,}565^\circ$ y $F_{c,\mín} = 8\sqrt{5}\,\mathrm{N} \approx 17{,}889\,\mathrm{N}$, frente a veinte newtons para un tirón horizontal. En el óptimo, $\sin\alpha_* = 1/\sqrt{5}$ y $\cos\alpha_* = 2/\sqrt{5}$. La componente vertical es ocho newtons, de modo que $N = 32\,\mathrm{N} > 0$; la horizontal vale dieciséis y coincide con $\mu_s N$.

En general, al sustituir $F_c(\alpha)$, la normal es $mg\cos\alpha/(\cos\alpha + \mu_s\sin\alpha) > 0$ en todo el dominio dado. El mínimo no se ha obtenido levantando el bloque. En la igualdad crítica aún existe un reposo admisible; para excluirlo con ese ángulo hay que superar el umbral, manteniendo la normal positiva. La cuenta determina la frontera de adherencia y la dirección que exige el menor tirón para llegar a ella.

Lecturas de apoyo

El inventario de fuerzas, los sistemas y las normales admisibles se construyen en el capítulo 4, «Fuerzas y leyes de Newton». Las historias por tramos y sus fronteras retoman los capítulos 1 y 2; las velocidades relativas y la aceleración circular, el capítulo 3. El capítulo 0 permite interpretar las cotas de los ejercicios 16 y 17. Se utilizan álgebra, proyecciones, derivadas e integrales elementales. Los dos criterios formales de admisibilidad se demuestran en el texto; la ley de Coulomb y la cuerda ideal son modelos físicos declarados.

Se consultaron pasajes de Young y Freedman, *Sears y Zemansky. Física universitaria*, vol. 1, 13.ª ed. (Pearson, 2013), §5.2 en el ejemplo del deslizador y la pesa, y §5.3 sobre contacto, fricción estática y cinética; y de Serway y Jewett, *Física para ciencias e ingeniería*, vol. 1, 10.ª ed. española (Cengage, 2019 según créditos), ejemplo 5.9, sobre dos masas unidas por una polea fija, y el apartado de fuerzas de fricción con ecuaciones 5.9–5.10 y ejemplo 5.11. Los enunciados, datos, soluciones y figuras de este capítulo se desarrollaron para esta obra; no son traducciones ni reproducciones de ejercicios específicos de esas fuentes.

El cotejo con Michael Spivak, *Physics for Mathematicians. Mechanics I* (Publish or Perish, 2010), se concentra en el capítulo 6, pp. 241–243, sobre restricciones de cuerda y el límite de masa despreciable, y el comienzo del capítulo 11, pp. 409–412, sobre el carácter empírico y simplificado de las leyes de fricción. Esos pasajes ayudan a precisar las hipótesis del elemento mecánico y el alcance del modelo; no se trasladan aquí sus desarrollos posteriores sobre cuerpos rígidos o paradojas de contacto.

Capítulo 6

Cuerpos conectados y restricciones

Una carga de seis kilogramos cuelga del eje de una polea móvil. Una cuerda tiene un extremo fijo al techo, baja alrededor de esa polea, vuelve a subir hasta una polea fija y termina en una pesa de dos kilogramos. Soltamos el conjunto desde el reposo. ¿Bajará la carga más pesada? ¿Cuánto avanzará la pesa mientras la carga desciende un metro?

La segunda pregunta puede resolverse antes de conocer las masas. Cuando la polea móvil baja, se alargan los dos ramales que la sostienen. Esa longitud tiene que salir del ramal de la pesa. Necesitamos contar cuánto cambia cada parte de la cuerda antes de relacionar las aceleraciones de sus extremos.

El laboratorio será nuestro marco inercial y tomaremos $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$. La cuerda es inextensible y de masa despreciable; las poleas tienen masa despreciable y funcionan sin pérdidas. Los tramos rectos permanecen verticales y los arcos de contacto conservan su longitud. La carga está unida al eje móvil por un enganche corto, rígido y de masa despreciable. Describiremos la traslación del conjunto móvil mediante la posición de la carga. Estas hipótesis excluyen el balanceo, la elasticidad y la inercia de rotación de las poleas.

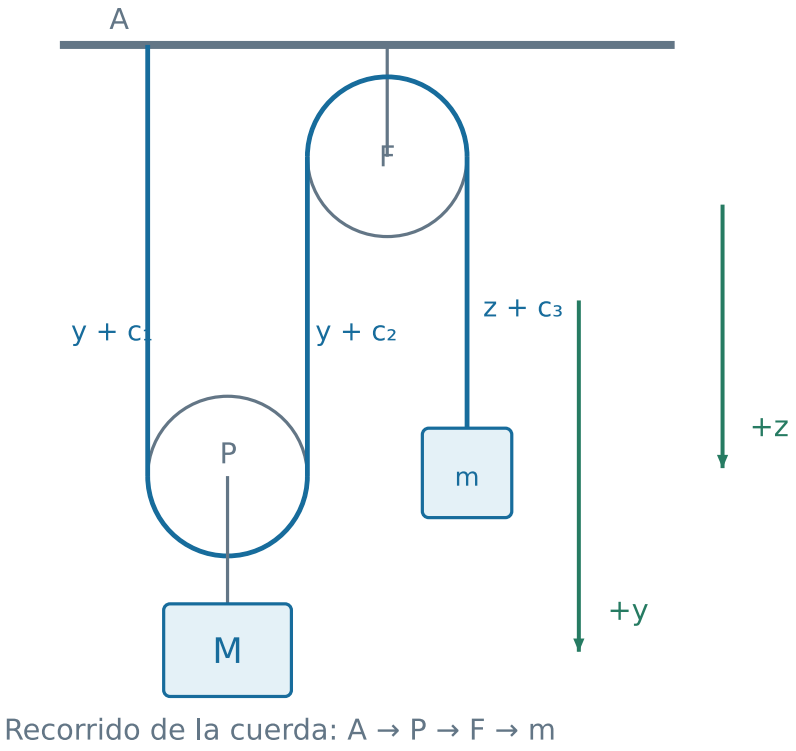


Figura 6.1. La carga M acompaña al eje móvil. Las dos distancias verticales asociadas a ese eje aumentan cuando desciende. Las coordenadas de los cuerpos se miden hacia abajo desde un nivel fijo; las diferencias entre ejes, tangencias y enganches quedan absorbidas en constantes. El esquema representa conexiones y sentidos, sin escala de fuerzas.

La longitud antes que las fuerzas

Escribamos y para la coordenada de la carga y z para la de la pesa, ambas positivas hacia abajo desde un nivel fijo. Cada uno de los ramales que llegan a la polea móvil aporta una longitud que crece en la misma cantidad que y. El ramal final crece como z. Las partes restantes suman una constante c. Si L es la longitud total de la cuerda,

$$2y + z + c = L.$$

No necesitamos conocer c para comparar dos configuraciones. Restar sus ecuaciones da $2\Delta y + \Delta z = 0$. Por tanto, un descenso de un metro de la carga exige un ascenso de dos metros de la pesa, siempre que haya espacio suficiente para ambos movimientos.

Como la igualdad se cumple durante todo un intervalo de movimiento suave, podemos derivarla:

$$2\dot{y} + \dot{z} = 0, \qquad 2\ddot{y} + \ddot{z} = 0.$$

Si llamamos $a = \ddot{y}$, la aceleración de la pesa es $\ddot{z} = -2a$. El factor dos cuenta ramales cuya longitud cambia; no procede de que una masa sea el doble de otra. Las velocidades y las aceleraciones son componentes respecto de los ejes declarados. El signo negativo significa que sus componentes tienen sentidos contrarios.

La relación $\ddot{z} = -a$, válida para dos masas colgadas de una polea fija sencilla con estos mismos sentidos de coordenadas, describiría aquí otra máquina. Conservar la fórmula de una geometría anterior cambiaría el problema antes de empezar a resolverlo.

Dos ramales sostienen la carga

En una misma cuerda ideal, guiada por poleas ideales, utilizamos una tensión de módulo T. Sobre la pesa actúan su peso mg hacia abajo y una fuerza T hacia arriba. Sobre el conjunto formado por la polea móvil, su enganche y la carga actúan Mg hacia abajo y dos fuerzas T hacia arriba. La masa del conjunto es M por la idealización de sus accesorios. Las ecuaciones son

$$Mg - 2T = Ma, \qquad mg - T = m(-2a).$$

De la segunda obtenemos $T = m(g + 2a)$. Sustituir en la primera permite reunir los términos que contienen a:

$$(M - 2m)g = (M + 4m)a.$$

Así,

$$a = \frac{M - 2m}{M + 4m}g, \qquad \ddot{z} = -2\frac{M - 2m}{M + 4m}g, \qquad T = \frac{3Mm}{M + 4m}g.$$

Con $M = 6\,\mathrm{kg}$ y $m = 2\,\mathrm{kg}$,

$$a = \frac{10}{7}\,\mathrm{m/s^2}, \qquad \ddot{z} = -\frac{20}{7}\,\mathrm{m/s^2}, \qquad T = \frac{180}{7}\,\mathrm{N}.$$

La carga desciende y la pesa sube con el doble de aceleración en módulo. La tensión es mayor que el peso de la pesa, 20 N, como requiere su aceleración hacia arriba. Las dos fuerzas que sostienen el conjunto móvil suman $360/7\,\mathrm{N}$, menos que sus sesenta newtons de peso. Ambas comprobaciones dan el mismo sentido de movimiento.

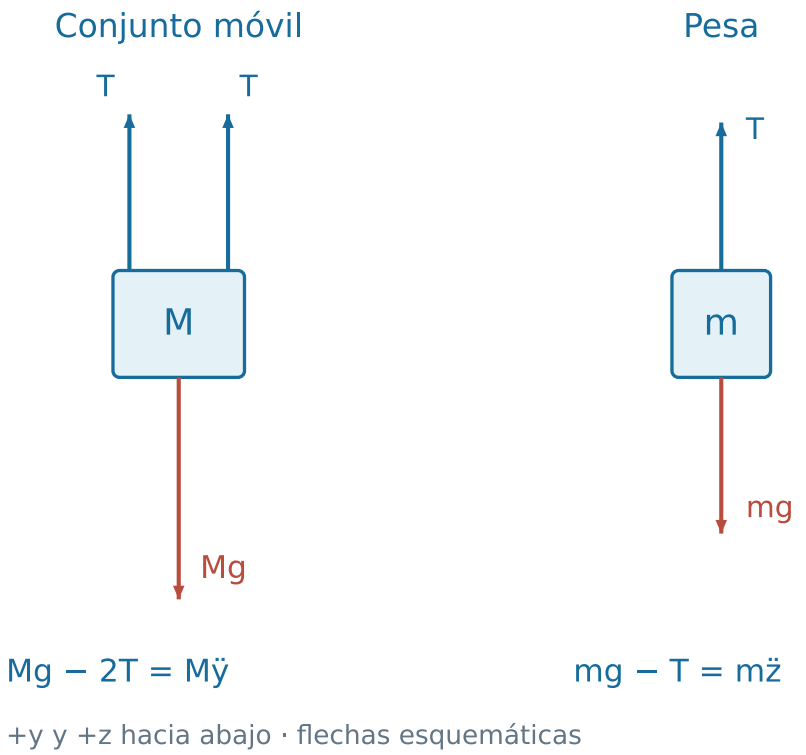


Figura 6.2. Cada panel contiene fuerzas recibidas por su sistema. Las flechas son esquemáticas: la igualdad de los dos módulos T corresponde a la cuerda ideal. La fuerza del enganche sobre la carga aislada sería $2T$; al incluir el enganche en el conjunto móvil, esa interacción es interna y no se agrega al diagrama.

Partiendo del reposo, los desplazamientos son

$$y(t) - y(0) = \frac{5}{7}\,\mathrm{m/s^2}\,t^2, \qquad z(t) - z(0) = -\frac{10}{7}\,\mathrm{m/s^2}\,t^2.$$

Cuando la carga ha bajado un metro han transcurrido $\sqrt{7/5}\,\mathrm{s}$ y la pesa ha subido dos metros. El cálculo presupone que no alcanza antes una polea, el suelo o un tope. Una solución de ecuaciones puede continuar más allá de un choque; la historia física descrita por esas ecuaciones termina en el primer encuentro no incluido en el modelo.

Posiciones que pueden coexistir

Dos coordenadas aparecen en el dibujo, pero sólo una puede elegirse libremente. Fijado y, la longitud determina $z = L - c - 2y$. Las dos ecuaciones de Newton aportan información sobre cuerpos distintos; la restricción impide asignarles movimientos independientes.

Definición. Una *restricción de posición* es una relación entre las coordenadas y, eventualmente, el tiempo que deben satisfacer las configuraciones admitidas por un modelo. Una configuración es *admisible* si satisface esas relaciones y las condiciones geométricas de su régimen, como las separaciones entre superficies mayores o iguales que cero y la existencia de los ramales representados.

La igualdad de longitud no impone por sí sola todas esas condiciones. También debemos conservar el orden de los puntos que permitió escribir cada longitud como una diferencia de coordenadas. Un ramal que desaparece al llegar la pesa a una polea señala el límite de esta descripción.

Definición. En una región de configuraciones, unas *coordenadas independientes* son variables cuya elección determina las restantes de forma única y permite recorrer las configuraciones de esa región. Su número se llama aquí *número de grados de libertad*. El tiempo impuesto desde fuera actúa como parámetro de la descripción.

Para $2y + z = C$, con $C = L - c$ fijo, podemos escoger y o z como única coordenada independiente. No escogemos ambos a voluntad. Para dos partículas que se desplazan por rectas separadas y no están conectadas, en cambio, se necesitan dos coordenadas.

Proposición. Sean y, z funciones dos veces continuamente derivables en un intervalo que contiene t_0. La igualdad $2y + z = C$ en todo el intervalo equivale a las tres condiciones

$$2\ddot{y} + \ddot{z} = 0, \qquad 2\dot{y}(t_0) + \dot{z}(t_0) = 0, \qquad 2y(t_0) + z(t_0) = C.$$

Demostración. La igualdad de posiciones produce las otras condiciones al derivar y evaluar en t_0. Para la dirección inversa, consideremos $h(t) = 2y(t) + z(t) - C$. Su segunda derivada es cero, de modo que h' es constante. La condición inicial de velocidades hace que esa constante sea cero. Entonces h también es constante, y la condición inicial de posiciones fija su valor en cero. Por tanto, la igualdad original se conserva en todo el intervalo.

Resolver sólo la ecuación de aceleraciones conserva cualquier error inicial de posición y permite que un error inicial de velocidad crezca linealmente. Esos movimientos adicionales satisfacen una consecuencia de la restricción, pero no la restricción que queríamos imponer.

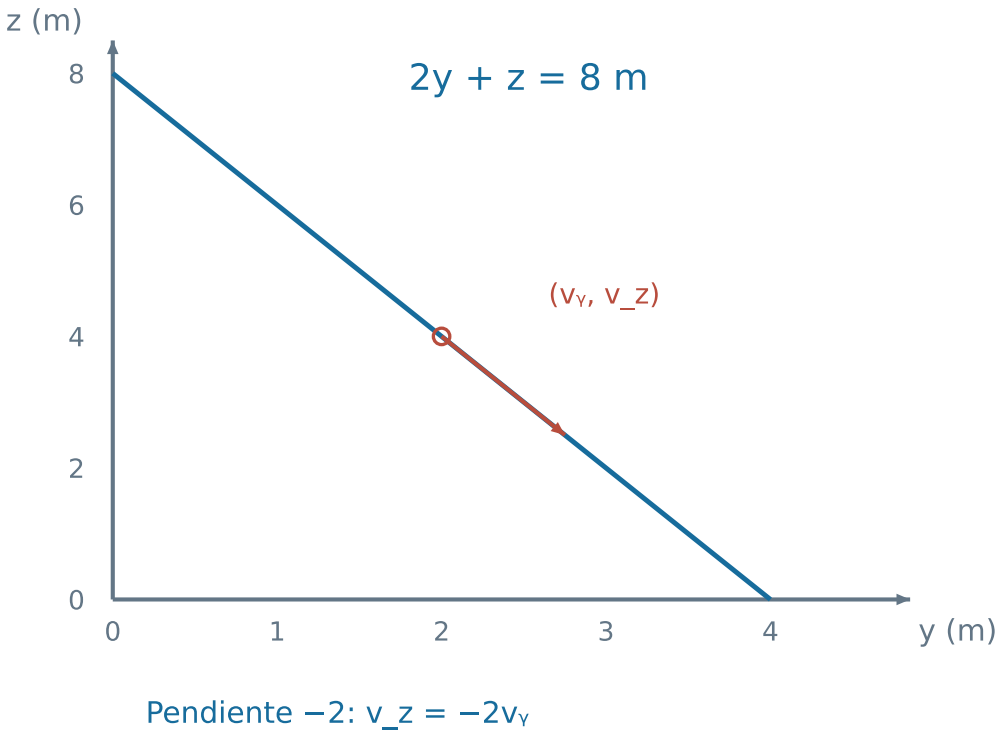


Figura 6.3. Para el ejemplo geométrico $2y + z = 8\,\mathrm{m}$, cada punto del segmento dibujado es una pareja admisible dentro del dominio $y, z \geq 0$. Las velocidades compatibles son tangentes a la recta. Los extremos pueden corresponder a límites físicos que requieren información adicional del aparato.

La misma idea sirve para una relación lineal $b_1 q_1 + \cdots + b_n q_n = C(t)$, con coeficientes constantes: se deriva una o dos veces y se conservan los datos iniciales correspondientes. Si la

geometría obliga a usar coeficientes variables, también hay que derivarlos. No toda restricción tiene la sencillez de una suma de longitudes verticales.

Qué significa que una cuerda siga tensa

Las relaciones anteriores suponen que los tramos de la cuerda ocupan el recorrido representado. Una cuerda flexible puede tirar, pero no mantener ese recorrido empujando a sus extremos para separarlos.

Definición. Para un recorrido de longitud geométrica $\ell(q,t)$ y una cuerda inextensible de longitud L, llamaremos *holgura* a $s = L - \ell$. En el modelo de cuerda flexible que transmite tracción se exige

$$s \geq 0, \qquad T \geq 0, \qquad sT = 0.$$

Aquí ℓ es la longitud que se necesitaría para unir los puntos siguiendo las guías indicadas, con los ramales rectos supuestos. Cuando hay holgura, la forma concreta de la cuerda queda fuera de esta descripción y $T = 0$. En la configuración tensa, $s = 0$, la fuerza puede ser positiva o alcanzar cero en un límite. Las igualdades de posición, velocidad y aceleración de la cuerda tensa sólo se utilizan mientras ese régimen sea compatible.

En el problema inicial, $M, m > 0$ producen $T > 0$. Los datos de reposo son compatibles y la evolución mantiene la longitud hasta un límite geométrico. Si un movimiento impuesto desde fuera exigiera $T < 0$, tendríamos que abandonar la hipótesis de cuerda tensa y estudiar la separación o la holgura.

Una velocidad inicial incompatible tampoco se corrige simplemente borrando su componente inconveniente. Una cuerda que se tensa bruscamente puede provocar un cambio de velocidad, pero calcularlo requiere un modelo de impulso, elasticidad o choque. Las ecuaciones suaves de este capítulo no describen ese proceso.

Una masa que se mueve y un extremo que alguien controla

Sustituyamos la pesa por una mano o un motor que impone la posición $z(t)$ del extremo libre. Sigue cumpliéndose $2y + z = C$, pero ya no existe una ecuación $mg - T = m\ddot{z}$ para una pesa. El movimiento impuesto suministra la información que antes aportaba esa ecuación de Newton.

Si el extremo tiene aceleración $\ddot{z} = -4\,\mathrm{m/s^2}$, la carga acelera hacia abajo a $2\,\mathrm{m/s^2}$. Para $M = 5\,\mathrm{kg}$,

$$Mg - 2T = M\ddot{y} \quad \Longrightarrow \quad T = \frac{M}{2}(g - \ddot{y}) = 20\,\mathrm{N}.$$

El agente debe ejercer sobre la cuerda una fuerza de veinte newtons dirigida hacia abajo. Si el extremo parte del reposo y mantiene esa aceleración, sube mientras esa fuerza apunta hacia abajo. La aceleración fijada determina cómo cambia la velocidad; su sentido en un instante también depende de la velocidad inicial. El resultado describe un movimiento suave que parte de velocidades compatibles.

Si el agente intentara imponer $\ddot{z} = -24\,\mathrm{m/s^2}$, la restricción pediría $\ddot{y} = 12\,\mathrm{m/s^2}$ y la ecuación de la carga daría $T = -5\,\mathrm{N}$. La cuerda no puede acelerar hacia abajo a la carga más que la gravedad cuando sólo puede tirar de ella hacia arriba. El movimiento impuesto dejaría holgura; no realizaría la historia tensa calculada.

También puede moverse el anclaje. Llamemos $u(t)$ a su coordenada hacia abajo y mantengamos fija la polea superior. Mientras el anclaje permanezca por encima de la polea móvil, uno de los ramales tiene longitud $y - u$ más una constante, el segundo crece como y y el último como z. Ahora

$$2y + z - u = C, \qquad 2\ddot{y} + \ddot{z} = \ddot{u}.$$

Mover un punto que antes era fijo cambia la ecuación geométrica. La figura siguiente permite identificar qué longitud cambia con u y comprobar su signo.

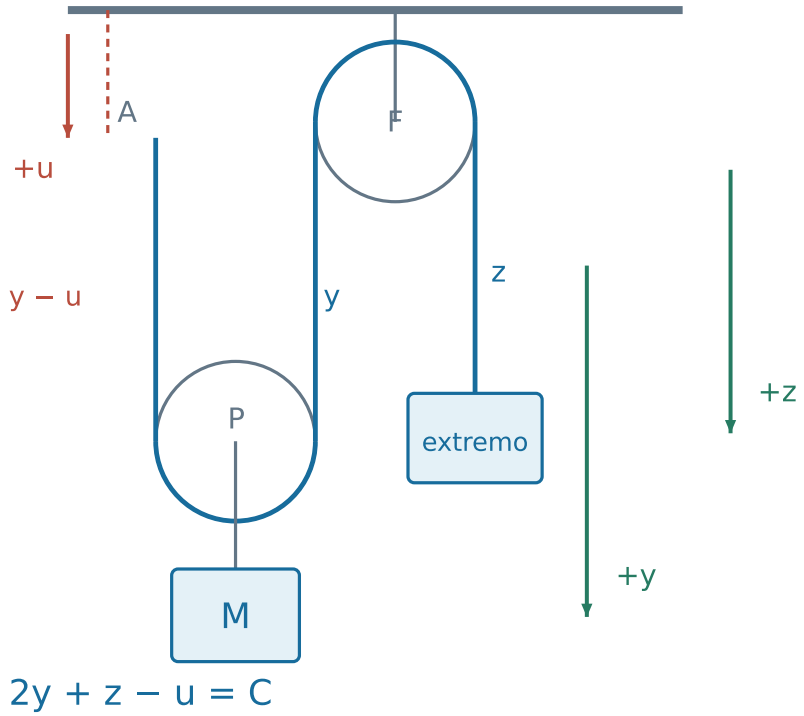


Figura 6.4. Con los tres ejes positivos hacia abajo, el ramal entre anclaje y polea móvil depende de $y - u$. El descenso del anclaje acorta ese tramo cuando la polea móvil permanece en su lugar. Los otros dos tramos no contienen u.

Varias cuerdas: reconocer relaciones diferentes

Tres carros sobre una mesa sin rozamiento están unidos en fila por dos cuerdas horizontales tensas. Una fuerza F tira del último carro. Si sus posiciones crecen hacia la derecha, las longitudes imponen $x_2 - x_1 = d_1$ y $x_3 - x_2 = d_2$. Al derivar, las tres aceleraciones coinciden. Eso no obliga a que las tensiones de las dos cuerdas sean iguales.

Para masas m_1, m_2, m_3 y tensiones T_1 entre los dos primeros carros y T_2 entre los dos últimos,

$$T_1 = m_1 a, \qquad T_2 - T_1 = m_2 a, \qquad F - T_2 = m_3 a.$$

La suma da $a = F/(m_1 + m_2 + m_3)$. Entonces $T_1 = m_1 a$ y $T_2 = (m_1 + m_2)a$. La segunda cuerda acelera a los dos primeros carros, mientras que la primera sólo acelera al primero. La igualdad de tensión se refiere a una cuerda ideal continua bajo las hipótesis adecuadas; no se extiende a cuerdas distintas por estar en un mismo aparato.

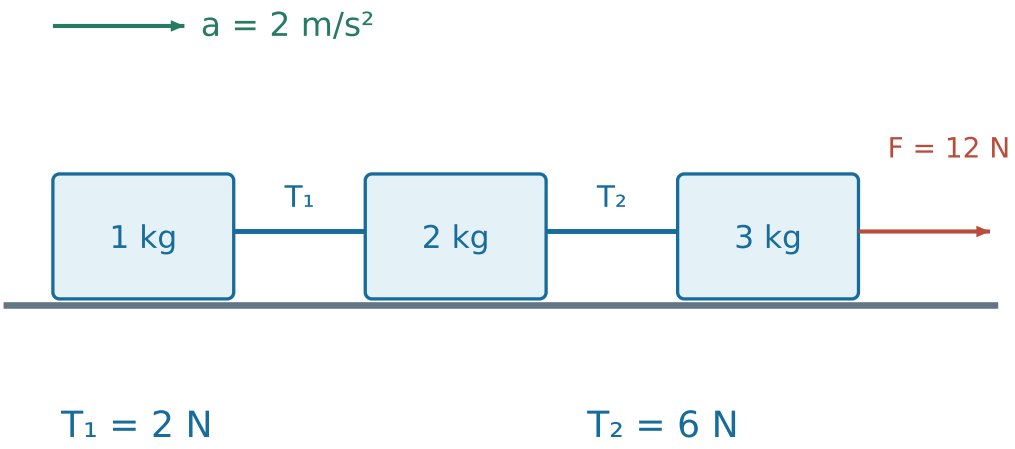


Figura 6.5. Para $m_1 = 1\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 2\,\mathrm{kg}$, $m_3 = 3\,\mathrm{kg}$ y $F = 12\,\mathrm{N}$, resulta $a = 2\,\mathrm{m/s^2}$, $T_1 = 2\,\mathrm{N}$ y $T_2 = 6\,\mathrm{N}$. Se muestran conexiones y fuerza aplicada; los diagramas de cada receptor se reconstruyen en las ecuaciones.

Contar restricciones requiere comprobar que aportan información distinta. Las ecuaciones $x + 2y = C_1$ y $2x + 4y = C_2$ describen una sola condición si $C_2 = 2C_1$. Si las constantes no guardan esa relación, no hay ninguna configuración que las cumpla a la vez. Dos ecuaciones escritas no garantizan dos reducciones independientes de las coordenadas.

Cuando la geometría es curva

Una barra de longitud ℓ mantiene un extremo sobre un piso horizontal y el otro sobre una pared vertical. Si las distancias al rincón son $x > 0$ e $y > 0$, la geometría impone

$$x^2 + y^2 = \ell^2.$$

Aquí sólo describimos el movimiento de los extremos; no estamos deduciendo con fuerzas la caída de una barra real. Para eso habrá que estudiar su rotación. Derivar esta igualdad ya permite descubrir qué información cinemática exige la rigidez.

Proposición. Si x, y son dos veces continuamente derivables y satisfacen $x^2 + y^2 = \ell^2$ con ℓ constante, entonces

$$x\dot{x} + y\dot{y} = 0, \qquad x\ddot{x} + y\ddot{y} + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 0.$$

Demostración. La derivada de x^2+y^2 es $2x\dot{x}+2y\dot{y}$, mientras que la de ℓ^2 es cero. Dividir por dos da la primera igualdad. Al derivarla, la regla del producto introduce $\dot{x}^2+x\ddot{x}$ y $\dot{y}^2+y\ddot{y}$, cuya suma debe ser cero. Esos términos cuadráticos son necesarios porque los coeficientes x e y también cambian durante el movimiento.

Cuando $y > 0$, la primera relación permite despejar $\dot{y} = -x\dot{x}/y$. La segunda da

$$\ddot{y} = -\frac{x\ddot{x} + \dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y}.$$

Para $\ell = 5\,\mathrm{m}$, $x = 3\,\mathrm{m}$, $y = 4\,\mathrm{m}$, $\dot{x} = 1\,\mathrm{m/s}$ y $\ddot{x} = 0$, resulta

$$\dot{y} = -\frac{3}{4}\,\mathrm{m/s}, \qquad \ddot{y} = -\frac{25}{64}\,\mathrm{m/s^2}.$$

El extremo horizontal conserva su rapidez, pero el vertical acelera. La geometría cambia la proporción entre sus desplazamientos. Igualar los módulos de sus aceleraciones contradiría la longitud de la barra.

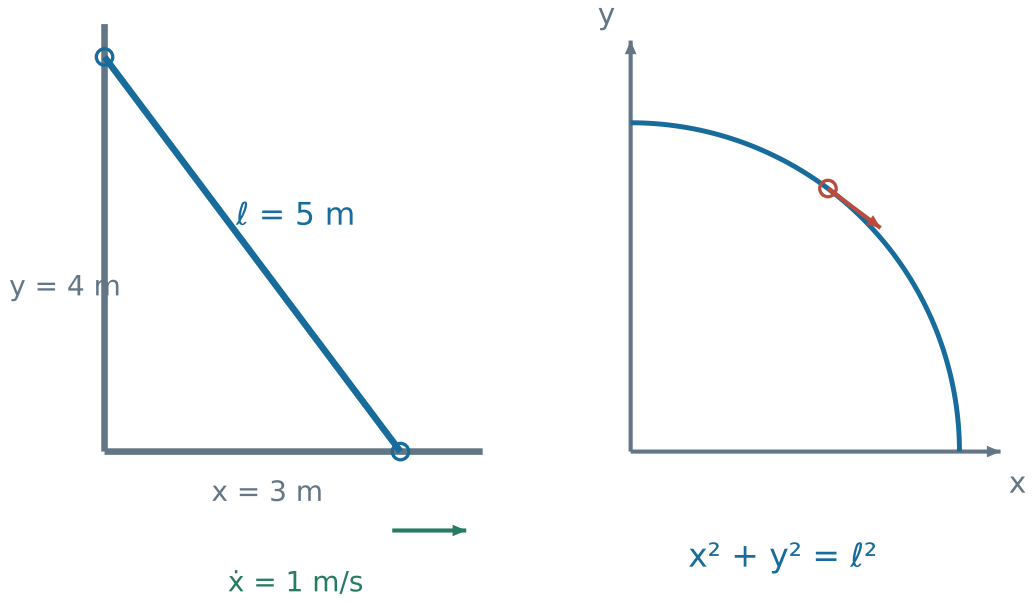


Figura 6.6. En este dibujo y crece hacia arriba y x hacia la derecha: son las distancias positivas al rincón. La curva $x^2 + y^2 = \ell^2$ permite leer cómo cambia la razón entre velocidades. Estas coordenadas no son las coordenadas hacia abajo de la polea inicial.

Para una partícula unida a un pivote fijo por una cuerda tensa de longitud ℓ, el vector posición relativo $\mathbf{r}$ satisface $\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = \ell^2$. Las mismas derivaciones dan $\mathbf{r}\cdot\mathbf{v} = 0$ y $\mathbf{r}\cdot\mathbf{a} = -\|\mathbf{v}\|^2$. La componente de aceleración dirigida hacia el pivote es, por tanto, v^2/ℓ. La aceleración puede tener además una componente tangencial. Esta conclusión combina la geometría del círculo del capítulo 3 con la necesidad de una fuerza radial del capítulo 4; no supone rapidez constante.

En el punto más bajo de un círculo vertical, el peso apunta alejándose del centro y la tensión hacia él. Así, $T - mg = mv^2/\ell$. En el punto más alto, ambos apuntan hacia el centro y $T + mg = mv^2/\ell$. Un valor negativo de esta última tensión rechaza el círculo tenso para esos datos. No calcula la trayectoria posterior de la cuerda floja.

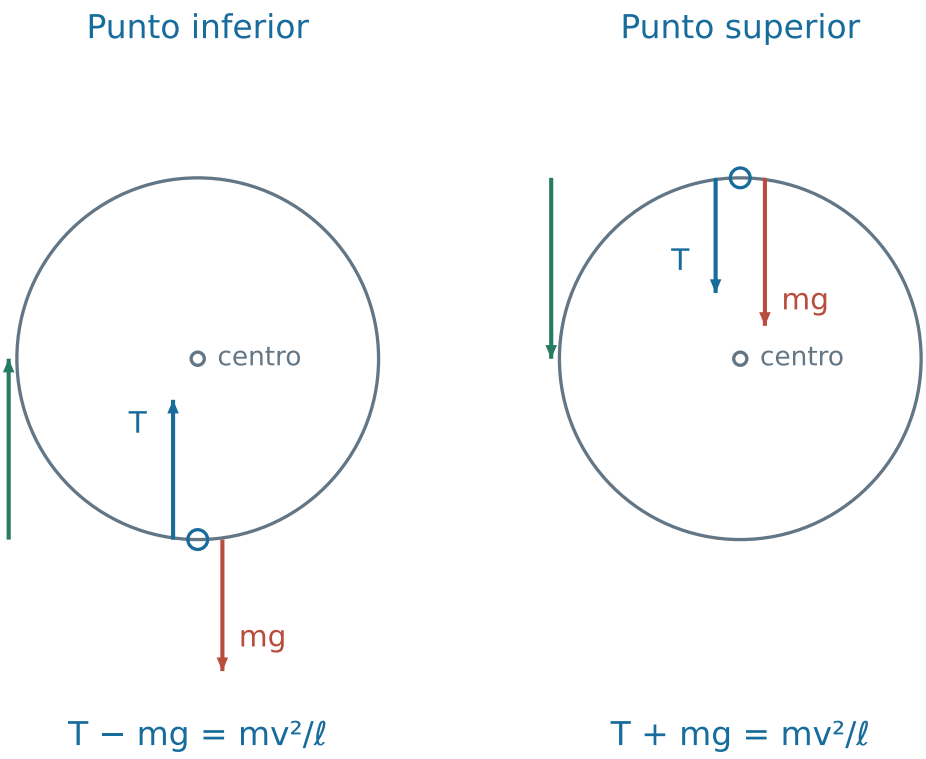


Figura 6.7. Las fuerzas se dibujan sobre la partícula, y las flechas radiales auxiliares indican hacia dónde queda el centro. El dato de rapidez se refiere al instante considerado; no se presupone que dos estados mostrados pertenezcan a la misma trayectoria.

Qué aprendemos del aparato

En la polea móvil, la geometría fijó la razón entre movimientos y las ecuaciones de Newton determinaron la aceleración y la tensión. Medir una razón de desplazamientos cercana a dos pone a prueba la descripción del recorrido; por sí sola no identifica las masas ni mide la tensión. Con masas diferentes, el mismo aparato ideal conserva esa razón y cambia su aceleración.

También hay una diferencia entre preparar el sistema en reposo y encontrar aceleración nula. La expresión obtenida da $a = 0$ cuando $M = 2m$. Si las velocidades iniciales compatibles no son cero, los cuerpos continúan moviéndose uniformemente mientras el recorrido lo permita. El equilibrio de fuerzas no borra el movimiento anterior.

Cuando tengamos varias conexiones, convendrá volver a las longitudes que realmente cambian, elegir coordenadas que podamos interpretar y distinguir las fuerzas que recibe cada cuerpo. La derivación de una restricción añade relaciones entre movimientos; no reemplaza las leyes de interacción ni garantiza por sí sola que el régimen pueda sostenerse. Los ejercicios siguientes alternan esas decisiones para que la misma fórmula no oculte preguntas físicas distintas.

Ejercicios

En todos los problemas se usa $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$. Las cuerdas y poleas son ideales, salvo indicación contraria, y los movimientos se estudian antes de cualquier choque o desaparición de un ramal. La «polea móvil inicial» designa exactamente el aparato de la figura 6.1; y, z

crecen hacia abajo. Las condiciones iniciales de posición se suponen compatibles cuando no se discuten expresamente.

1. Contar lo que cambia

En la polea móvil inicial, la carga desciende 0,30 m. Determine el desplazamiento de la pesa. Si en un instante $\dot{y} = 0{,}40\,\mathrm{m/s}$ y $\ddot{y} = -0{,}20\,\mathrm{m/s^2}$, encuentre $\dot{z}$ y $\ddot{z}$. ¿En qué sentido se mueve y se acelera cada cuerpo?

2. Cambiar las masas

Resuelva la polea móvil inicial con $M = 4\,\mathrm{kg}$ y $m = 1\,\mathrm{kg}$, soltada desde el reposo. Obtenga ambas aceleraciones, la tensión y la fuerza del enganche sobre la carga aislada. Compruebe el signo de cada fuerza neta.

3. Fuerzas equilibradas, cuerpos en marcha

La carga tiene $M = 8\,\mathrm{kg}$. Elija m para que las aceleraciones sean nulas. Calcule T. Si inicialmente $\dot{y} = 0{,}25\,\mathrm{m/s}$, determine $\dot{z}$ y los desplazamientos durante dos segundos. Explique qué cambiaría al preparar los cuerpos en reposo.

4. El primer límite del recorrido

En el aparato inicial con $M = 6\,\mathrm{kg}$ y $m = 2\,\mathrm{kg}$, se parte con $\dot{y}(0) = 1\,\mathrm{m/s}$ y velocidad compatible de la pesa. La pesa dispone de dos metros de ascenso antes de tocar la polea fija y la carga puede bajar al menos tres metros sin encontrar obstáculos. ¿Cuándo termina este tramo del modelo? Calcule las velocidades justo antes de ese instante.

5. Una respuesta que describe otra máquina

Para $M = 6\,\mathrm{kg}$ y $m = 2\,\mathrm{kg}$, una solución usa $Mg - 2T = Ma$ y $mg - T = -ma$. Obtiene $a = 2\,\mathrm{m/s^2}$ y $T = 24\,\mathrm{N}$. Compruebe ese álgebra y localice el error físico. ¿Qué velocidad de cambio de longitud produciría al cabo de un segundo desde el reposo?

6. Datos iniciales incompatibles

En una configuración tensa admisible se prescribe $\dot{y}(0) = 1\,\mathrm{m/s}$ y $\dot{z}(0) = -1\,\mathrm{m/s}$. Demuestre que no hay un movimiento suave de cuerda tensa con esos datos. Si después se utiliza $2\ddot{y} + \ddot{z} = 0$, ¿cómo evoluciona el error de longitud? ¿Puede corregirse el problema sin añadir información física?

7. Un motor en el extremo

Una carga de cinco kilogramos ocupa el lugar de M y el extremo libre se acciona con un motor. Compare los movimientos impuestos $\ddot{z} = -4\,\mathrm{m/s^2}$ y $\ddot{z} = -24\,\mathrm{m/s^2}$, iniciados con velocidades compatibles. Calcule la tensión que pediría cada régimen tenso. En el segundo caso, compruebe por aceleraciones si empieza a aparecer holgura desde el reposo.

8. El anclaje también se mueve

En la figura 6.4, el extremo z permanece fijo y el anclaje tiene aceleración $\ddot{u} = 3\,\mathrm{m/s^2}$ hacia abajo. Para $M = 4\,\mathrm{kg}$, determine la aceleración de la carga y la tensión. Las velocidades iniciales son cero. Compruebe qué pasa con las longitudes de los tres ramales durante un intervalo corto.

9. Antes de elegir rozamiento cinético

Un bloque de cuatro kilogramos sobre un plano con $\sin\theta = 3/5$ y $\cos\theta = 4/5$ está conectado por una cuerda sobre una polea fija a una masa colgante h. El ramal del bloque es paralelo al plano. Se suelta desde el reposo; $\mu_s = 0{,}20$ y $\mu_k = 0{,}10$. Determine si se mueve para $h = 3\,\mathrm{kg}$ y para $h = 4\,\mathrm{kg}$. Cuando se mueva, calcule aceleración y tensión. Deduzca la relación de movimiento desde las longitudes.

10. Dos cuerdas entre tres carros

Resuelva el sistema de la figura 6.5. Escriba primero las restricciones y después las ecuaciones de cada carro. Calcule las tensiones. Compruebe T_2 usando como sistema los dos primeros carros juntos.

11. Cambiar el lugar del tirón

Los mismos carros del ejercicio 10 se mantienen en el orden $1, 2, 3$, pero ahora una fuerza de doce newtons tira del carro 1 hacia la izquierda. Parten del reposo con cuerdas tensas. Determine aceleración y tensiones usando un eje positivo hacia la derecha. ¿Por qué los resultados de tensión no coinciden con los del tirón sobre el carro 3?

12. El soporte que sostiene todo el aparato

En el problema inicial, el mismo techo sostiene el anclaje y el eje de la polea fija. Desprecie las masas de ambas poleas y sus accesorios. Calcule la fuerza vertical total que la cuerda transmite al techo. Compruebe que el peso total de los dos cuerpos menos esa fuerza coincide con $M\ddot{y} + m\ddot{z}$. ¿Por qué no coincide con $(M + m)\ddot{y}$?

13. Dos ecuaciones que pueden ser una

Se proponen las restricciones $x + 2y = 6\,\mathrm{m}$ y $2x + 4y = 12\,\mathrm{m}$. Determine las coordenadas independientes y parametrice las configuraciones con $x, y > 0$. Repita si la segunda constante se cambia a trece metros. Explique por qué no basta contar ecuaciones.

14. Una barra con un extremo controlado

Una barra de diez metros mantiene sus extremos en pared y piso. En un instante $x = 6\,\mathrm{m}$, $y = 8\,\mathrm{m}$ y el extremo del piso se aleja del rincón con rapidez constante de dos metros por segundo. Calcule la velocidad y la aceleración del extremo de la pared. Delimite el intervalo futuro de esta descripción geométrica si se conserva esa rapidez. No se pide un análisis dinámico de la barra.

15. Olvidar un término de la derivada

En la barra de cinco metros del texto, alguien deriva $x\dot{x} + y\dot{y} = 0$ como $x\ddot{x} + y\ddot{y} = 0$ y concluye $\ddot{y} = 0$ cuando $\ddot{x} = 0$. Explique el error y calcule el valor de $x\ddot{x} + y\ddot{y}$ en el estado $x = 3\,\mathrm{m}$, $y = 4\,\mathrm{m}$, $\dot{x} = 1\,\mathrm{m/s}$. Incluya unidades.

16. La tensión en dos puntos del círculo

Una partícula de dos kilogramos está unida a un pivote fijo por una cuerda de dos metros. Estudie por separado un estado en el punto inferior y otro en el punto superior de un círculo vertical, ambos con rapidez de tres metros por segundo. Calcule la tensión requerida y decida la admisibilidad de cada estado tenso. Obtenga la rapidez mínima admisible en el punto superior y explique el alcance del caso de igualdad.

17. Una restricción que depende del reloj

Un mecanismo impone $x + 2y = \ell_0 + ct^2$, donde ℓ_0 es una longitud y $c = 1\,\mathrm{m/s^2}$. Además prescribe $x(t) = x_0 + (2\,\mathrm{m/s})t$. Determine $y(t)$, sus datos iniciales y su aceleración. Pruebe qué datos iniciales hacen que la ecuación $\ddot{x} + 2\ddot{y} = 2c$ conserve la restricción original.

18. Poner a prueba la razón de desplazamientos

En dos configuraciones del aparato inicial se mide un descenso de la carga $\Delta y \in [0{,}198; 0{,}202]\,\mathrm{m}$ y un ascenso de la pesa de módulo $h \in [0{,}397; 0{,}403]\,\mathrm{m}$. Trate los intervalos como cotas deterministas independientes. Acote el residuo $R = 2\Delta y - h$ y determine si los datos contradicen la relación de cuerda inextensible. ¿Demuestran que el modelo es exacto? ¿Identifican las masas?

19. Recuperar una masa a partir de la aceleración

Se conoce $m = 2\,\mathrm{kg}$ y se mide $\ddot{y} = 2\,\mathrm{m/s^2}$ en la polea móvil inicial. Suponiendo válidos los modelos ideales y el valor de g, determine M, la tensión y la aceleración de la pesa. Compruebe ambas ecuaciones de Newton. ¿Se podría obtener M midiendo sólo la razón $\Delta z/\Delta y$? Si la aceleración de la carga sólo está acotada por $a \in [1{,}9, 2{,}1]\,\mathrm{m/s^2}$, manteniendo exactos los demás datos dentro del problema, obtenga una envolvente para M.

20. Repartir el movimiento sin resolver fuerzas

Una cuerda pasa por una polea de centro P que se mueve verticalmente; sus dos extremos cuelgan hacia abajo y tienen coordenadas y_1, y_2. Los ramales permanecen verticales, los extremos están por debajo de P y todas las coordenadas crecen hacia abajo. La longitud de la cuerda impone $y_1 + y_2 - 2y_P = C$. Si $\ddot{y}_P = 1\,\mathrm{m/s^2}$, ¿quedan determinadas las aceleraciones de los extremos? Compare las parejas $(\ddot{y}_1, \ddot{y}_2) = (0, 2)$ y $(1, 1)$ en unidades SI. Suponga además que la polea tiene masa despreciable y una segunda cuerda tira de su eje hacia arriba con tensión S: deduzca su relación con la tensión T de la cuerda inferior. Explique qué información falta para resolver un aparato completo.

Soluciones

1. Contar lo que cambia

Al descender la carga treinta centímetros, cada ramal de apoyo gana esa longitud. El ramal final debe perder sesenta centímetros: $\Delta z = -0{,}60\,\mathrm{m}$. Derivando la misma igualdad obtenemos $\dot{z} = -0{,}80\,\mathrm{m/s}$ y $\ddot{z} = +0{,}40\,\mathrm{m/s^2}$. La carga baja, pero acelera hacia arriba; está reduciendo su rapidez en ese instante. La pesa sube y acelera hacia abajo, también reduciendo su rapidez. No hemos deducido masas ni tensiones de estos datos cinemáticos.

2. Cambiar las masas

La longitud conserva $\ddot{z} = -2a$. La pesa exige $T = (1\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2} + 2a)$ y el conjunto móvil satisface $40\,\mathrm{N} - 2T = (4\,\mathrm{kg})a$. Sustituir da $20\,\mathrm{N} = (8\,\mathrm{kg})a$, de donde $a = 2{,}5\,\mathrm{m/s^2}$, $\ddot{z} = -5\,\mathrm{m/s^2}$ y $T = 15\,\mathrm{N}$.

El enganche transmite treinta newtons hacia arriba a la carga aislada, porque sobre la polea móvil sin masa las dos tensiones deben equilibrar la fuerza hacia abajo del enganche. La carga recibe una fuerza neta de diez newtons hacia abajo; la pesa recibe cinco hacia arriba. Sus cocientes por cuatro y por un kilogramo reproducen las aceleraciones. Todas las tensiones son positivas.

3. Fuerzas equilibradas, cuerpos en marcha

Para que $a = 0$, el numerador $M - 2m$ debe anularse, así que $m = 4\,\mathrm{kg}$. La pesa requiere $T = mg = 40\,\mathrm{N}$ y la carga recibe $2T = 80\,\mathrm{N}$, igual a su peso.

La compatibilidad da $\dot{z} = -0{,}50\,\mathrm{m/s}$. Como las aceleraciones son nulas, los desplazamientos durante dos segundos son $\Delta y = 0{,}50\,\mathrm{m}$ y $\Delta z = -1\,\mathrm{m}$. Las fuerzas equilibradas conservan esas velocidades. Si se preparan ambos cuerpos en reposo, las mismas fuerzas conservan el reposo. Se necesita espacio para el primer experimento; los equilibrios de fuerza no eliminan los límites del recorrido.

4. El primer límite del recorrido

Las masas fijan $a = 10/7\,\mathrm{m/s^2}$ y la compatibilidad inicial impone $\dot{z}(0) = -2\,\mathrm{m/s}$. En cuanto la pesa suba dos metros, la carga habrá descendido uno, mucho antes de agotar sus tres metros disponibles. El tiempo satisface

$$(1\,\mathrm{m/s})t + \frac{5}{7}\,\mathrm{m/s^2}\,t^2 = 1\,\mathrm{m}.$$

Al escribir $\tau = t/(1\,\mathrm{s})$, la raíz positiva es $\tau = (-7 + \sqrt{189})/10 \approx 0{,}675$. Justo antes del encuentro, $\dot{y} = \sqrt{189}/7\,\mathrm{m/s} \approx 1{,}964\,\mathrm{m/s}$ y $\dot{z} = -2\sqrt{189}/7\,\mathrm{m/s} \approx -3{,}928\,\mathrm{m/s}$. La raíz negativa no pertenece a la evolución futura. No prolongamos estas expresiones a través del choque de la pesa con la polea.

5. Una respuesta que describe otra máquina

Las ecuaciones propuestas dan $T = 20\,\mathrm{N} + (2\,\mathrm{kg})a$ y luego $20\,\mathrm{N} = (10\,\mathrm{kg})a$. Los números $a = 2\,\mathrm{m/s^2}$ y $T = 24\,\mathrm{N}$ satisfacen ese sistema algebraico. El fallo consiste en asignar $\ddot{z} = -a$ a la pesa, aunque los dos ramales móviles exigen $\ddot{z} = -2a$.

Con las aceleraciones equivocadas y reposo inicial, al segundo las velocidades serían $\dot{y} = 2\,\mathrm{m/s}$ y $\dot{z} = -2\,\mathrm{m/s}$. La longitud modelada cambiaría a razón de $2\dot{y} + \dot{z} = 2\,\mathrm{m/s}$. Además habría aumentado un metro desde el inicio: $2\Delta y + \Delta z = 1\,\mathrm{m}$. Una cuerda inextensible no puede realizar esa evolución. Comprobar sólo las ecuaciones de fuerza no habría detectado el cambio de geometría.

6. Datos iniciales incompatibles

La derivada de la restricción exige $2\dot{y}(0) + \dot{z}(0) = 0$, pero los datos dan $1\,\mathrm{m/s}$. Por ello no existe la evolución suave tensa solicitada. Si se resuelve después la condición de aceleraciones, el residuo $h = 2y + z - C$ tiene $h'' = 0$, $h(0) = 0$ y $h'(0) = 1\,\mathrm{m/s}$. Resulta $h(t) = (1\,\mathrm{m/s})t$.

El signo positivo pide una longitud mayor que la disponible inmediatamente después del inicio; no describe una holgura que lo vuelva aceptable. Cambiar las velocidades iniciales, permitir extensión o estudiar un tirón impulsivo son problemas físicos diferentes. Sin especificar cuál ocurre, no hay una corrección determinada por los datos originales.

7. Un motor en el extremo

En el primer caso, $\ddot{y} = -\ddot{z}/2 = 2\,\mathrm{m/s^2}$ y $T = M(g - \ddot{y})/2 = 20\,\mathrm{N}$. La tensión positiva admite el régimen. En el segundo, la geometría tensa pediría $\ddot{y} = 12\,\mathrm{m/s^2}$ y $T = -5\,\mathrm{N}$, que la cuerda no puede ejercer.

Para comprobar el comienzo de la holgura, partamos de reposo en la configuración tensa. Al quedar sin tirón la carga cae con $\ddot{y} = g = 10\,\mathrm{m/s^2}$, mientras el motor impone $\ddot{z} = -24\,\mathrm{m/s^2}$. La longitud requerida tiene $\ddot{\ell} = 2\ddot{y} + \ddot{z} = -4\,\mathrm{m/s^2}$. Por tanto, la holgura cumple $\ddot{s} = +4\,\mathrm{m/s^2}$ y empieza como $s = (2\,\mathrm{m/s^2})t^2 > 0$. Esta comprobación es local: tras perder tensión no seguimos afirmando que la cuerda tenga la forma recta dibujada.

8. El anclaje también se mueve

El extremo fijo cumple $\ddot{z} = 0$, por lo que $2\ddot{y} = \ddot{u}$ y $\ddot{y} = 1{,}5\,\mathrm{m/s^2}$ hacia abajo. La ecuación $40\,\mathrm{N} - 2T = (4\,\mathrm{kg})(1{,}5\,\mathrm{m/s^2})$ da $T = 17\,\mathrm{N}$.

Desde el reposo, $\Delta u = (1{,}5\,\mathrm{m/s^2})t^2$ y $\Delta y = (0{,}75\,\mathrm{m/s^2})t^2$. El primer ramal cambia como $\Delta y - \Delta u = -(0{,}75\,\mathrm{m/s^2})t^2$; el segundo aumenta en la cantidad contraria y el tercero no cambia. La suma es cero. La respuesta requiere que el anclaje siga por encima de la polea móvil y que los dispositivos externos sostengan las fuerzas calculadas.

9. Antes de elegir rozamiento cinético

Tomemos x hacia arriba del plano e y hacia abajo para la masa colgante. El primer ramal pierde longitud cuando aumenta x y el segundo la gana cuando aumenta y; así, $-x + y = C$ y $\ddot{x} = \ddot{y} = a$. La normal del bloque es $N = (4\,\mathrm{kg})g\cos\theta = 32\,\mathrm{N}$. Su peso paralelo al plano vale $24\,\mathrm{N}$ hacia abajo y la fricción estática admite hasta $6{,}4\,\mathrm{N}$.

Para $h = 3\,\mathrm{kg}$, el reposo de la pesa pide $T = 30\,\mathrm{N}$. El bloque requiere fricción de seis newtons hacia abajo del plano, inferior al límite. La preparación de reposo se mantiene según la convención del capítulo 5: $a = 0$ y $T = 30\,\mathrm{N}$.

Para $h = 4\,\mathrm{kg}$, el reposo pediría dieciséis newtons de fricción, imposibles. La pesa empieza a bajar y el bloque a subir; la fricción cinética sobre el bloque es $3{,}2\,\mathrm{N}$ hacia abajo del plano. Las ecuaciones son $T - 24\,\mathrm{N} - 3{,}2\,\mathrm{N} = (4\,\mathrm{kg})a$ y $40\,\mathrm{N} - T = (4\,\mathrm{kg})a$. Sumarlas da $a = 1{,}6\,\mathrm{m/s^2}$ y sustituir en la pesa da $T = 33{,}6\,\mathrm{N}$. El signo confirma el deslizamiento supuesto. Usar desde el inicio $\mu_k N$ en el primer ensayo habría inventado movimiento.

10. Dos cuerdas entre tres carros

Las restricciones $x_2 - x_1 = d_1$ y $x_3 - x_2 = d_2$ conservan distancias, de modo que las tres aceleraciones son a. Las ecuaciones respectivas son $T_1 = (1\,\mathrm{kg})a$, $T_2 - T_1 = (2\,\mathrm{kg})a$ y $12\,\mathrm{N} - T_2 = (3\,\mathrm{kg})a$. Su suma produce $a = 2\,\mathrm{m/s^2}$. Entonces $T_1 = 2\,\mathrm{N}$ y $T_2 = 6\,\mathrm{N}$.

Al reunir los dos primeros carros, T_1 y su reacción son internas y se cancelan. La única fuerza horizontal externa sobre ese conjunto es T_2, que debe acelerar tres kilogramos a dos metros por segundo cuadrado: seis newtons. Las dos cuerdas siguen tensas. La tensión mayor corresponde a la cuerda que arrastra más masa en esta preparación.

11. Cambiar el lugar del tirón

Las distancias siguen constantes, por lo que la aceleración común tiene ahora valor $a = -2\,\mathrm{m/s^2}$. Con el eje positivo hacia la derecha, las ecuaciones de los carros son

$$-12\,\mathrm{N} + T_1 = (1\,\mathrm{kg})a, \qquad -T_1 + T_2 = (2\,\mathrm{kg})a, \qquad -T_2 = (3\,\mathrm{kg})a.$$

Se obtiene $T_2 = 6\,\mathrm{N}$ y $T_1 = 10\,\mathrm{N}$. La primera cuerda arrastra ahora los carros 2 y 3, de masa conjunta cinco kilogramos. La segunda arrastra sólo el carro 3. La masa total fija el mismo módulo de aceleración bajo el mismo módulo de fuerza, pero el reparto de fuerzas internas depende del lugar donde se tira. Ambas tensiones siguen siendo positivas; el signo negativo de a no convierte una tensión en compresión.

12. El soporte que sostiene todo el aparato

La cuerda tira del anclaje hacia abajo con módulo T. Sobre la polea fija actúan dos ramales verticales que tiran hacia abajo con módulo total $2T$. Al despreciar el peso de los accesorios, la carga vertical transmitida al techo es $3T = 540/7\,\mathrm{N}$.

Los cuerpos pesan ochenta newtons y la diferencia es $80 - 540/7 = 20/7\,\mathrm{N}$ hacia abajo. Por otra parte,

$$M\ddot{y} + m\ddot{z} = (6\,\mathrm{kg})\frac{10}{7}\,\mathrm{m/s^2} - (2\,\mathrm{kg})\frac{20}{7}\,\mathrm{m/s^2} = \frac{20}{7}\,\mathrm{N}.$$

Podemos sumar las componentes verticales porque comparten dirección y sentido de referencia. No podemos reemplazar esa suma por $(M + m)\ddot{y}$: las dos masas no tienen una aceleración común. La restricción produce una razón entre aceleraciones, no la traslación rígida de ambos cuerpos.

13. Dos ecuaciones que pueden ser una

La segunda igualdad inicial es el doble de la primera y no agrega información. Podemos elegir $y = q$ y escribir $x = 6\,\mathrm{m} - 2q$, con $0 < q < 3\,\mathrm{m}$. Hay una coordenada independiente. También podríamos escoger x, con el intervalo correspondiente.

Si la segunda constante fuera trece metros, duplicar la primera igualdad exigiría simultáneamente $2x + 4y = 12\,\mathrm{m}$ y $2x + 4y = 13\,\mathrm{m}$. No hay configuraciones admisibles. No es un mecanismo con menos grados de libertad: es una especificación incompatible. La eliminación de variables distingue una repetición de una condición nueva y de una contradicción.

14. Una barra con un extremo controlado

La condición de velocidades da $\dot{y} = -x\dot{x}/y = -1{,}5\,\mathrm{m/s}$. El extremo superior baja. Como $\ddot{x} = 0$, la segunda derivada de la longitud exige

$$\ddot{y} = -\frac{(2\,\mathrm{m/s})^2 + (-1{,}5\,\mathrm{m/s})^2}{8\,\mathrm{m}} = -\frac{25}{32}\,\mathrm{m/s^2}.$$

Si el instante dado se llama $t = 0$, entonces $x = 6\,\mathrm{m} + (2\,\mathrm{m/s})t$ y $y = \sqrt{(10\,\mathrm{m})^2 - x^2}$. El intervalo futuro regular es $0 \le t < 2\,\mathrm{s}$. Cuando t tiende a dos segundos, y tiende a cero y el módulo de $\dot{y}$ diverge. No puede prolongarse esta prescripción suave con rapidez horizontal constante a través de ese extremo. Tampoco hemos probado que un conjunto de fuerzas reales pueda sostenerla hasta allí: es un análisis de compatibilidad geométrica.

15. Olvidar un término de la derivada

La derivada de $x\dot{x}$ contiene $\dot{x}^2$ además de $x\ddot{x}$; análogamente ocurre con $y\dot{y}$. En el estado dado, $\dot{y} = -3/4\,\mathrm{m/s}$, así que

$$x\ddot{x} + y\ddot{y} = -(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = -\frac{25}{16}\,\mathrm{m^2/s^2}.$$

Como $\ddot{x} = 0$ e $y = 4\,\mathrm{m}$, resulta $\ddot{y} = -25/64\,\mathrm{m/s^2}$. El término no es una fuerza ni una aceleración por sí solo: sus unidades son longitud por aceleración, iguales a las de una rapidez al cuadrado. La regla del producto conserva esa correspondencia dimensional y la curvatura de la configuración.

16. La tensión en dos puntos del círculo

La aceleración hacia el centro tiene módulo $v^2/\ell = 4{,}5\,\mathrm{m/s^2}$. Abajo, $T - 20\,\mathrm{N} = (2\,\mathrm{kg})(4{,}5\,\mathrm{m/s^2})$, de donde $T = 29\,\mathrm{N}$, admisible. Arriba, $T + 20\,\mathrm{N} = 9\,\mathrm{N}$ exigiría $T = -11\,\mathrm{N}$. Ese estado no admite una cuerda tensa que mantenga el círculo.

La desigualdad $T = m(v^2/\ell - g) \ge 0$ pide $v \ge \sqrt{g\ell} = \sqrt{20}\,\mathrm{m/s}$. La igualdad produce $T = 0$ en ese instante. Es una condición límite instantánea; para decidir la continuación hay que examinar las ecuaciones y los datos alrededor del punto. Tampoco relacionamos las dos rapideces propuestas mediante una ley de conservación: los estados se plantearon como experimentos separados.

17. Una restricción que depende del reloj

Despejar la posición evita perder constantes:

$$y(t) = \frac{\ell_0 - x_0}{2} - (1\,\mathrm{m/s})t + \frac{c}{2}t^2.$$

Por tanto, $y(0) = (\ell_0 - x_0)/2$, $\dot{y}(0) = -1\,\mathrm{m/s}$ y $\ddot{y} = c = 1\,\mathrm{m/s^2}$. Al principio y disminuye y luego invierte ese movimiento si la geometría del mecanismo sigue permitiéndolo.

Para probar la conservación en general, definimos $h = x + 2y - \ell_0 - ct^2$. La ecuación de aceleraciones implica $h'' = 0$, de donde $h(t) = h(0) + h'(0)t$. Recuperamos la igualdad original exactamente cuando $x(0) + 2y(0) = \ell_0$ y $\dot{x}(0) + 2\dot{y}(0) = 0$. En otro instante inicial t_0 la segunda condición sería $\dot{x}(t_0) + 2\dot{y}(t_0) = 2ct_0$. El reloj del mecanismo forma parte de la restricción.

18. Poner a prueba la razón de desplazamientos

La cota inferior del residuo usa el menor descenso y el mayor ascenso; la superior usa los extremos contrarios:

$$R \in [2(0{,}198) - 0{,}403;\; 2(0{,}202) - 0{,}397]\,\mathrm{m} = [-0{,}007; 0{,}007]\,\mathrm{m}.$$

El intervalo contiene cero. Hay parejas de valores dentro de las cotas que satisfacen exactamente la relación ideal, de modo que las mediciones no la contradicen con esa resolución y esas hipótesis de error. No demuestran inextensibilidad exacta: también caben pequeñas desviaciones, errores de alineación u otros modelos compatibles. Una razón geométrica no identifica las masas. Harían falta observaciones dinámicas y un modelo de fuerzas para esa inferencia.

19. Recuperar una masa a partir de la aceleración

La ecuación de la pesa da inmediatamente $T = m(g + 2a) = (2\,\mathrm{kg})(14\,\mathrm{m/s^2}) = 28\,\mathrm{N}$. En la carga, $M(g - a) = 2T$, por lo que $M = 56\,\mathrm{N}/(8\,\mathrm{m/s^2}) = 7\,\mathrm{kg}$. La aceleración de la pesa es $-4\,\mathrm{m/s^2}$.

Las comprobaciones son $70\,\mathrm{N} - 56\,\mathrm{N} = 14\,\mathrm{N} = (7\,\mathrm{kg})(2\,\mathrm{m/s^2})$ y $20\,\mathrm{N} - 28\,\mathrm{N} = -8\,\mathrm{N} = (2\,\mathrm{kg})(-4\,\mathrm{m/s^2})$. La tensión es positiva. La razón $\Delta z/\Delta y = -2$, cuando el denominador no es cero, se conserva para cualquier par de masas positivas de esta máquina ideal; por ello no puede seleccionar los siete kilogramos. La inferencia depende además del valor supuesto de g y de la ausencia de efectos no modelados.

Para propagar una cota de aceleración conviene conservar la inferencia en forma simbólica. Sustituir $T = m(g + 2a)$ en la ecuación de la carga da

$$M(a) = \frac{2m(g + 2a)}{g - a}.$$

Las masas positivas de esta máquina permiten $-g/2 < a < g$. En efecto, esos signos hacen positivos tanto el numerador como el denominador; la fórmula directa de a del ejemplo inicial también sitúa su valor entre esos límites. En ese intervalo,

$$\frac{dM}{da} = \frac{6mg}{(g - a)^2} > 0.$$

Por tanto, la cota más ajustada que permiten los datos del problema se obtiene en los extremos:

$$M \in \left[\frac{184}{27}, \frac{568}{79}\right]\,\mathrm{kg} \subset [6{,}814; 7{,}190]\,\mathrm{kg}.$$

La envolvente decimal se redondeó hacia fuera. La derivada también explica una limitación del ensayo: al acercarse a a g, una pequeña variación de la aceleración puede producir una variación grande en la masa inferida. Elegir una observación que identifica un parámetro y elegir una observación que lo determina con una cota útil son decisiones relacionadas que conviene examinar juntas.

20. Repartir el movimiento sin resolver fuerzas

Las longitudes rectas son $y_1 - y_P$ y $y_2 - y_P$, más constantes de tangencia y un arco constante. Al derivar dos veces obtenemos $\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2 = 2\ddot{y}_P = 2\,\mathrm{m/s^2}$. La ecuación fija la suma, pero permite infinitos repartos. Las dos parejas propuestas satisfacen esa misma suma. Cada una puede generar, al menos localmente, posiciones compatibles si se eligen posiciones y velocidades iniciales que también cumplan la longitud y su primera derivada.

La cuerda inferior tira de la polea hacia abajo con dos fuerzas T. La segunda cuerda tira de su eje hacia arriba con S. La idealización de masa despreciable impone fuerza neta nula sobre la polea: $S = 2T$. No se sigue $S = T$, porque son cuerdas distintas y la primera actúa mediante dos ramales.

Para escoger un reparto dinámico hacen falta las masas y fuerzas de los cuerpos conectados a los extremos, las condiciones de la segunda cuerda y los datos iniciales compatibles. La aceleración prescrita del centro y el balance de una polea sin masa no suministran por sí solos toda esa información. Lo que sí hemos obtenido son condiciones que cualquier solución del aparato completo tendría que respetar.

Lecturas de apoyo

Sears y Zemansky, *Física universitaria*, volumen 1, Young y Freedman, 13.ª edición, §5.2, ejemplo 5.12, pp. 145–146, desarrolla el enlace entre longitud de cuerda y aceleraciones en el caso de una polea fija. Serway y Jewett, *Física para ciencias e ingeniería*, volumen 1, 10.ª edición española, ejemplos 5.9 y 5.10, pp. 112–114, permite cotejar la máquina de Atwood y los ejes de dos cuerpos conectados. La igualdad de módulos de esos casos se interpreta aquí a partir del recorrido concreto antes de pasar a una polea móvil.

Spivak, *Physics for Mathematicians. Mechanics I*, capítulo 6, pp. 241–246, analiza la máquina de Atwood, la idealización de una cuerda sin masa y el significado de la tensión; pp. 246–248 distingue el problema con una polea de inercia apreciable. Esa distinción delimita el modelo utilizado en este capítulo: no extendemos la igualdad de tensiones a una rueda masiva sin añadir su ecuación de rotación. Los desarrollos, datos y ejercicios de este capítulo son propios; el cotejo es selectivo y no constituye una revisión completa de esos libros.

Capítulo 7

Trabajo y energía cinética

Un carro de dos kilogramos cruza una marca del riel con rapidez de dos metros por segundo. Durante los cuatro metros siguientes recibe un tirón horizontal que se debilita al avanzar: comienza en doce newtons y disminuye dos newtons por cada metro recorrido. El contacto ofrece una resistencia de cuatro newtons, opuesta al deslizamiento. Queremos conocer la rapidez del carro al terminar ese tramo y la distancia adicional que recorrerá si allí se retira el tirón.

Podríamos intentar encontrar la posición en función del tiempo. La aceleración, sin embargo, cambia con la posición, de modo que las fórmulas de aceleración constante no describen el primer tramo. La pregunta que hicimos pide comparar dos lugares del recorrido. Conviene buscar una relación que use directamente la fuerza y el desplazamiento entre esos lugares.

Tomemos el laboratorio como marco inercial y el carro como una partícula de masa constante $m = 2\,\mathrm{kg}$. El eje x apunta en el sentido inicial de movimiento y su origen es la primera marca. El riel es horizontal y fijo. Usaremos $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$; el peso y la normal se equilibran verticalmente. La resistencia representa rozamiento cinético con $\mu_k = 0{,}20$, pues $\mu_k m g = 4\,\mathrm{N}$. El carro ya está deslizando al entrar en el tramo, así que no hay que decidir cómo arrancó desde el reposo. El modelo omite el aire, la rotación y cualquier deformación apreciable del carro.

Mientras $0 \le x \le 4\,\mathrm{m}$ y la velocidad sea positiva, el tirón y la fuerza neta tienen componentes

$$F(x) = 12\,\mathrm{N} - (2\,\mathrm{N/m})x, \qquad F_{\mathrm{net},x}(x) = 8\,\mathrm{N} - (2\,\mathrm{N/m})x.$$

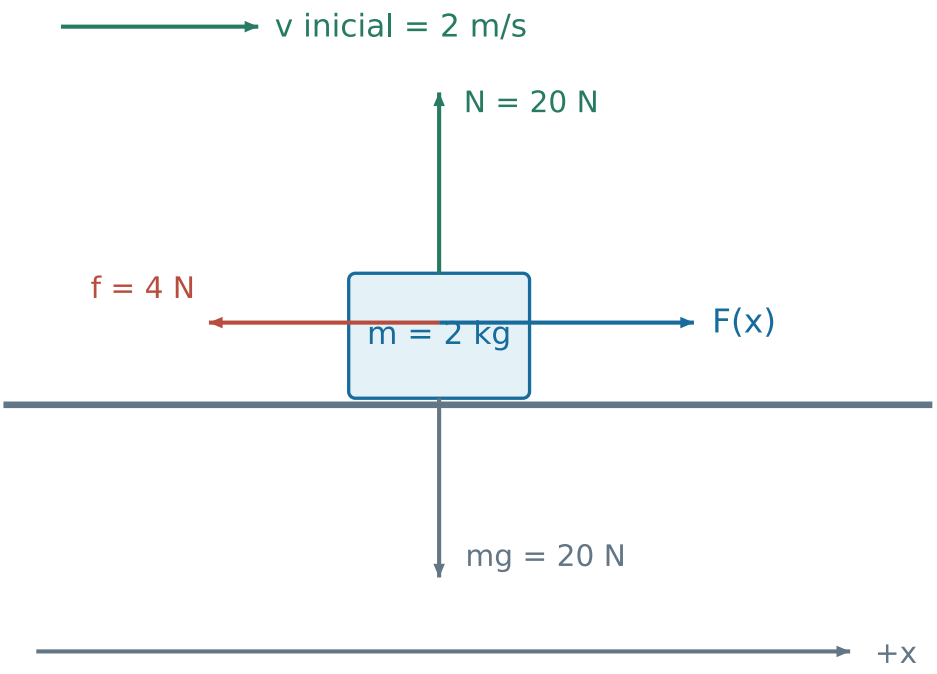


Figura 7.1. El diagrama identifica al receptor de las fuerzas. La normal y el peso no tienen componente horizontal. Las flechas del tirón y del rozamiento son esquemáticas; sus valores a lo largo del recorrido se comparan en la figura siguiente.

Acumular el efecto de la fuerza durante el recorrido

En un intervalo donde el carro sigue avanzando podemos considerar su velocidad como función de x. La regla de la cadena da $\dot v = (dv/dx)\dot x = v\,dv/dx$. La ecuación de Newton se convierte entonces en

$$mv\frac{dv}{dx} = F_{\text{net},x}(x).$$

El miembro izquierdo es la derivada respecto de x de $mv^2/2$. Integrar entre la primera marca y una posición posterior reúne el efecto de toda la fuerza encontrada durante el trayecto:

$$\frac{1}{2}mv(x)^2 - \frac{1}{2}mv(0)^2 = \int_0^x F_{\text{net},x}(\xi)\,d\xi.$$

La letra ξ sólo distingue la variable que recorre la integral de la posición final x. En nuestro caso, la cantidad acumulada hasta cuatro metros es

$$\int_0^{4\,\text{m}} \left[8\,\text{N} - (2\,\text{N/m})\xi\right] d\xi = 32\,\text{N m} - 16\,\text{N m} = 16\,\text{J}.$$

La unidad J, joule, equivale a $\text{N m} = \text{kg m}^2/\text{s}^2$. La cantidad inicial $mv(0)^2/2$ es cuatro joules; la final será veinte. Como $m = 2\,\text{kg}$, obtenemos

$$v(4\,\text{m}) = \sqrt{20}\,\text{m/s} = 2\sqrt{5}\,\text{m/s}.$$

Escogimos la raíz positiva porque seguimos el tramo de avance. Podemos comprobar esa elección sin circularidad: la fuerza neta es no negativa entre cero y cuatro metros, por lo que una velocidad inicialmente positiva no puede disminuir allí hasta cero. La hipótesis de deslizamiento hacia la derecha se mantiene en todo el intervalo.

El área bajo la recta de fuerza neta es un triángulo de base cuatro metros y altura ocho newtons. Su área da los mismos dieciséis joules. Si separamos agentes, el tirón aporta treinta y dos joules —el área de un trapecio— y el rozamiento aporta menos dieciséis. La normal y el peso aportan cero en este recorrido horizontal.

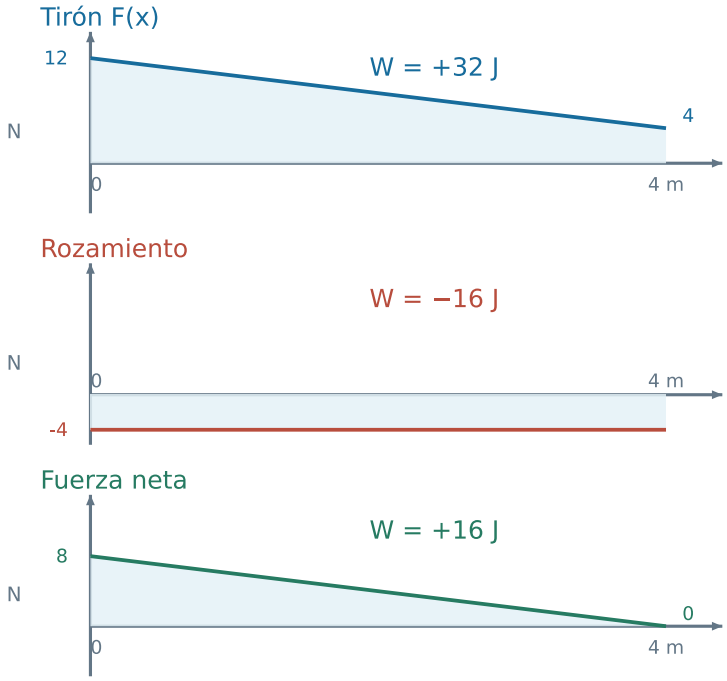


Figura 7.2. Las tres gráficas utilizan la misma escala de posición. La ordenada es una componente de fuerza, no una rapidez. Una región bajo el eje aporta trabajo negativo; el balance neto es $32\,\mathrm{J} - 16\,\mathrm{J} = 16\,\mathrm{J}$.

La detención después de retirar el tirón

Al llegar a cuatro metros retiramos la fuerza aplicada. El carro conserva su velocidad en ese instante; el modelo de retirada no incluye un impulso. Mientras continúa deslizándose, sólo el rozamiento realiza trabajo. Si recorre una distancia adicional $d > 0$ hacia la derecha, la misma identidad da

$$\frac{1}{2}mv^2 - 20\,\mathrm{J} = -(4\,\mathrm{N})d.$$

La primera rapidez nula ocurre cuando $d = 5\,\mathrm{m}$. El carro se detiene en $x = 9\,\mathrm{m}$. Con la fuerza aplicada ya retirada, mantener el reposo sólo requiere rozamiento tangencial nulo, que el régimen estático admite. Como en el capítulo 5, no prolongamos la fuerza cinética hacia un movimiento de regreso que ella misma inventaría.

El primer tramo tenía aceleración variable y el segundo aceleración constante. Un mismo balance permitió enlazarlos porque conservamos el estado al cambiar la fuerza. Todavía no

hemos calculado cuánto tarda el carro en llegar a cuatro metros. La rapidez final y la distancia de detención se obtuvieron sin necesitar ese tiempo.

Qué llamamos trabajo

La integral anterior sugiere un concepto que también sirve cuando las fuerzas cambian de dirección o el movimiento sigue una curva. Sea $\mathbf{r}(t)$ la posición de una partícula en un marco elegido y $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$ su velocidad. Consideremos una fuerza $\mathbf{F}(t)$ recibida por ella, evaluada a lo largo de su movimiento; puede depender de posición, velocidad y tiempo.

Definición. El *trabajo* realizado por esa fuerza sobre la partícula entre los instantes t_0 y t_1 es

$$W_{\mathbf{F}} = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{v}(t)\, dt.$$

Suponemos que el integrando es integrable; bastará en nuestros problemas que sea continuo a trozos en un intervalo finito. El producto escalar selecciona la componente de fuerza en la dirección del movimiento y conserva su signo.

También se escribe $W_{\mathbf{F}} = \int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde γ es el recorrido orientado de la partícula. Esta *integral de línea* se entiende aquí mediante la integral temporal que acabamos de definir. Para calcularla con otro parámetro u, en un recorrido suave que conserva la orientación, se usa

$$W_{\mathbf{F}} = \int_{u_0}^{u_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}(u), \ldots) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{du}\, du.$$

Si la fuerza depende de la velocidad o del tiempo, al cambiar de parámetro también debemos conservar la ley temporal necesaria para evaluarla. Un dibujo de la trayectoria no determina por sí solo una fuerza de ese tipo. Para una fuerza que depende únicamente de la posición, la curva orientada contiene la información geométrica suficiente para calcular su trabajo.

En una recta, para $F_x = F_x(x)$, la definición se reduce a $\int F_x(x)\, dx$ entre los extremos orientados de cada tramo. Una vuelta invierte los límites y puede cambiar también la propia ley de fuerza. El rozamiento cinético, por ejemplo, cambia de signo al invertirse el deslizamiento. No se describe la ida y la vuelta manteniendo sin examen la misma componente de rozamiento.

El trabajo es escalar y puede ser positivo, negativo o cero. Una fuerza perpendicular a la velocidad en todo instante hace trabajo nulo, aunque desvíe el movimiento. Una fuerza aplicada a un punto que permanece fijo tampoco hace trabajo sobre ese punto durante ese intervalo. Estas afirmaciones se refieren al trabajo mecánico definido, no al esfuerzo fisiológico de una persona que sostiene una carga.

Proposición. Para una fuerza vectorial constante $\mathbf{F}_0$, el trabajo sobre cualquier recorrido suave a trozos entre posiciones $\mathbf{r}_0$ y $\mathbf{r}_1$ es

$$W_{\mathbf{F}_0} = \mathbf{F}_0 \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0).$$

Demostración. Como las componentes de $\mathbf{F}_0$ no cambian, pueden salir de las integrales correspondientes. La integral de cada componente de $\dot{\mathbf{r}}$ es el cambio de esa coordenada. Reunir los resultados da $\int \mathbf{F}_0 \cdot \dot{\mathbf{r}}\, dt = \mathbf{F}_0 \cdot \int \dot{\mathbf{r}}\, dt = \mathbf{F}_0 \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)$.

Para un desplazamiento recto de longitud d que forma un ángulo α con la fuerza constante, obtenemos $W = Fd\cos\alpha$. Usar sólo Fd supone que fuerza y desplazamiento comparten sentido. Tampoco basta que el módulo de la fuerza sea constante para aplicar la proposición: su dirección debe permanecer constante. La tensión de un péndulo cambia de dirección durante la oscilación y es perpendicular a la velocidad; su trabajo se decide por esa perpendicularidad.

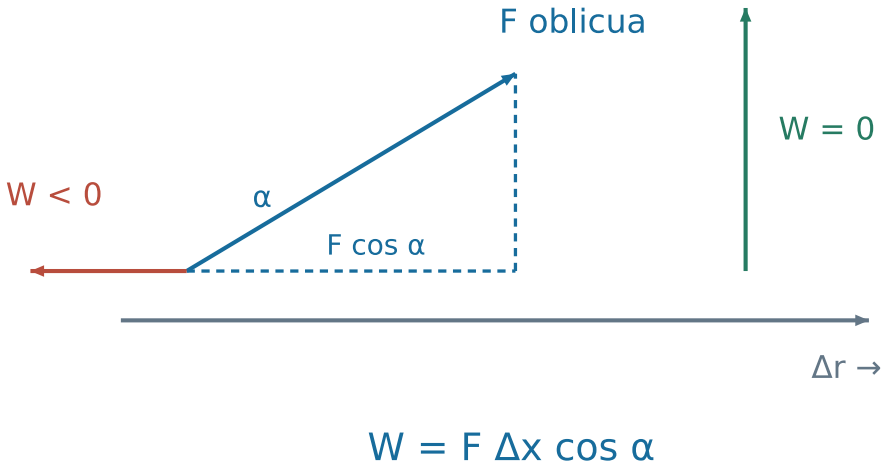


Figura 7.3. El signo corresponde a la proyección de cada fuerza sobre el desplazamiento. El trabajo positivo y el negativo pueden provenir de fuerzas simultáneas sobre la misma partícula. Las componentes auxiliares del tirón no se agregan como fuerzas nuevas.

La cantidad que cambia cuando hay trabajo neto

Definición. Para una partícula de masa constante $m > 0$, su *energía cinética* en el marco considerado es

$$K = \frac{1}{2} m \|\mathbf{v}\|^2.$$

Es no negativa y se anula exactamente cuando la partícula está en reposo en ese marco. Dos velocidades de igual módulo y direcciones distintas tienen la misma energía cinética. La fórmula pertenece a la mecánica newtoniana utilizada en el libro; no la extendemos a regímenes donde esa mecánica deja de ser adecuada.

Teorema del trabajo y la energía cinética. Sea una partícula de masa constante $m > 0$ cuyo movimiento satisface $m\dot{\mathbf{v}} = \sum_j \mathbf{F}_j$ en un marco inercial. Supongamos que posición y velocidad son continuas, que el movimiento es dos veces continuamente derivable en cada uno de un número finito de tramos y que las fuerzas son integrables en ellos. Entonces

$$K(t_1) - K(t_0) = \sum_j W_{\mathbf{F}_j} = W_{\text{neto}}.$$

Demostración. La derivada del cuadrado del módulo de la velocidad contiene precisamente el producto que aparece en el trabajo:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right) = m\dot{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v} = \left(\sum_j \mathbf{F}_j\right)\cdot\mathbf{v} = \sum_j \mathbf{F}_j\cdot\mathbf{v}.$$

Integrar en cada tramo convierte el miembro izquierdo en la diferencia de sus energías cinéticas extremas. Al sumar los tramos, los valores interiores se cancelan porque la velocidad es continua en los puntos de enlace. Las integrales del miembro derecho son los trabajos de las fuerzas sobre el intervalo completo. Así se obtiene la igualdad anunciada.

Esta demostración no divide por la velocidad y sigue siendo válida cuando la partícula se detiene o cambia de sentido suavemente. El cálculo inicial con $v\,dv/dx$ era cómodo en el tramo donde el carro avanzaba, pero no necesitamos adoptarlo como una operación válida en cualquier punto de retorno. Los choques con cambios instantáneos de velocidad requieren otro tratamiento y no están incluidos entre los enlaces suaves del teorema.

La igualdad se refiere al trabajo de **todas** las fuerzas sobre la partícula. Si un motor aporta treinta joules y el rozamiento realiza menos diez, la energía cinética aumenta veinte. Identificar el trabajo de un solo agente con ΔK omitiría parte de la ecuación de Newton.

El teorema es una consecuencia de esa ecuación y de la definición de trabajo. No afirma que K se conserve en cualquier movimiento. Cuando $W_{\text{neto}} = 0$, las energías cinéticas de los dos estados comparados coinciden; entre ellos la rapidez puede haber cambiado. Si la potencia neta es cero en todo el intervalo, entonces K permanece constante durante todo él.

Resolver una rapidez y reconocer el tramo que existe

Para un movimiento rectilíneo con fuerza neta dependiente sólo de x, el balance permite construir

$$K(x) = K(x_0) + \int_{x_0}^{x} F_{\text{net},x}(\xi)\,d\xi.$$

Una posición con $K(x) < 0$ es incompatible con el modelo y los datos iniciales. Antes de alcanzarla, la partícula habrá tenido que detenerse o cambiar de régimen. Una posición con $K(x) = 0$ exige volver a las fuerzas para decidir la continuación: un resorte comprimido puede impulsar un regreso, mientras una caja frenada por rozamiento sobre una mesa horizontal puede quedar en reposo.

En un tramo donde el movimiento avanza y $K(x) > 0$, podemos escribir $v(x) = +\sqrt{2K(x)/m}$. Para reconstruir el tiempo hay que efectuar una operación adicional:

$$t(x) - t(x_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{\sqrt{2K(\xi)/m}}.$$

La fórmula procede de $dt = dx/v$ y requiere esa elección de sentido. Si la rapidez llega a cero en un extremo, la integral puede converger o divergir; no declaramos alcanzado el extremo en tiempo finito sólo porque K se anule. El ejercicio 18 muestra, incluso con fuerzas constantes a trozos, que igual trabajo y rapidez final pueden corresponder a tiempos diferentes. El ejercicio 21 compara un cero simple de la energía con un cero cuadrático y calcula el tiempo de aproximación en cada caso.

Un trabajo nulo de una normal se justifica por el movimiento permitido. Una guía fija y lisa obliga a que su fuerza normal sea perpendicular a la velocidad de la partícula. Si la guía se mueve, esa perpendicularidad respecto de la velocidad del laboratorio ya no está garantizada. También la fricción puede realizar trabajo positivo sobre un cuerpo al acelerarlo una cinta transportadora. Para decidir el signo volvemos al producto fuerza por velocidad del receptor, evaluados en el mismo marco.

Un resorte como fuerza variable

Un resorte horizontal fijo a una pared ejerce sobre una partícula una fuerza $F_x = -kx$, donde x mide la extensión respecto de su longitud natural y $k > 0$ tiene unidades N/m. Usaremos esta ley lineal como un modelo constitutivo válido dentro de un intervalo de deformaciones especificado; no es una propiedad exacta de cualquier resorte bajo cualquier carga.

El trabajo del resorte desde x_i hasta x_f es

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)\,dx = \frac{k}{2}(x_i^2 - x_f^2).$$

Al alejar la partícula de la posición natural, el resorte hace trabajo negativo. Al acercarla, hace trabajo positivo. Es importante distinguir su fuerza de la del agente que estira el resorte: en un desplazamiento lento controlado, o en uno con velocidad constante y sin otras fuerzas horizontales, ese agente debe ejercer una fuerza aproximadamente opuesta o exactamente opuesta, respectivamente. Sus trabajos corresponden a receptores e interacciones identificables.

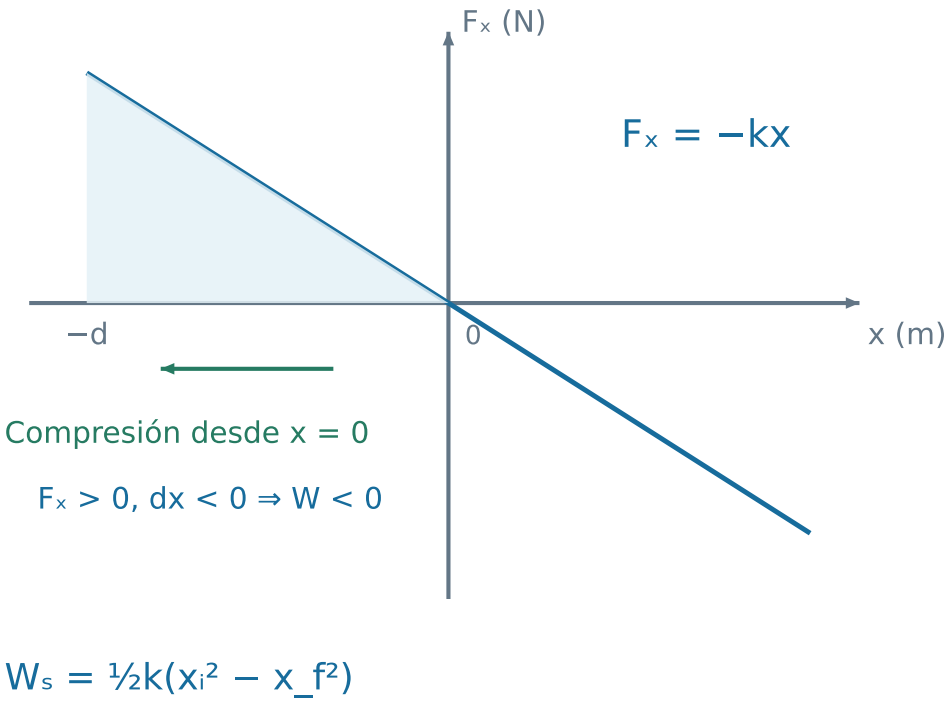


Figura 7.4. El módulo de la fuerza crece con la deformación. Al comprimir desde $x = 0$ hacia valores negativos, la fuerza es positiva pero $dx < 0$, de modo que el trabajo del resorte es negativo. La orientación de los límites importa tanto como el signo de la gráfica.

Sumar energías de cuerpos conectados

Para varias partículas, sumamos las identidades individuales y obtenemos el cambio de $K_{\text{total}} = \sum_i m_i \|\mathbf{v}_i\|^2/2$. Cada trabajo se evalúa usando el movimiento de la partícula que recibe la fuerza. Que dos fuerzas internas sean opuestas no basta para cancelar sus trabajos: actúan sobre receptores que pueden tener velocidades diferentes. Para un par con fuerzas $\mathbf{F}$ y $-\mathbf{F}$, la suma de potencias es $\mathbf{F}\cdot(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)$, que en general no es cero.

En las conexiones ideales del capítulo 6 podemos demostrar cancelaciones más precisas. Consideremos su polea móvil con carga M, pesa m, anclaje y polea superior fijos. Las coordenadas y, z apuntan hacia abajo y cumplen $2y + z = C$. La tensión tiene módulo común $T(t)$ y las fuerzas que transmite a los cuerpos son $-2T$ y $-T$ en esas coordenadas.

Proposición. Mientras esa máquina mantenga el recorrido tenso ideal, la suma de los trabajos de la tensión sobre la carga y la pesa es cero.

Demostración. La suma de las potencias recibidas es $-2T\dot{y} - T\dot{z} = -T(2\dot{y} + \dot{z})$. La derivada de la restricción anula el paréntesis en cada instante. Integrar da una suma de trabajos nula, incluso si T varía con el tiempo. Intervienen tanto la igualdad de los módulos de tensión como la relación geométrica; la tercera ley por sí sola no habría producido esta conclusión.

Si la carga desciende $h > 0$ desde el reposo, la pesa sube $2h$. Los trabajos gravitatorios suman $Mgh - 2mgh$. Como $\dot{z} = -2\dot{y}$, si $v = \dot{y} > 0$ al final,

$$\frac{1}{2}(M + 4m)v^2 = (M - 2m)gh.$$

Para $M = 6\,\text{kg}$, $m = 2\,\text{kg}$ y $h = 0{,}70\,\text{m}$, el miembro derecho vale catorce joules y resulta $v = \sqrt{2}\,\text{m/s}$. El coeficiente $M + 4m$ aparece porque la energía cinética usa el cuadrado de la rapidez y la pesa se mueve con rapidez $2v$. Coincide con el cálculo de Newton del capítulo anterior: $v^2 = 2(10/7\,\text{m/s}^2)(0{,}70\,\text{m}) = 2\,\text{m}^2/\text{s}^2$.

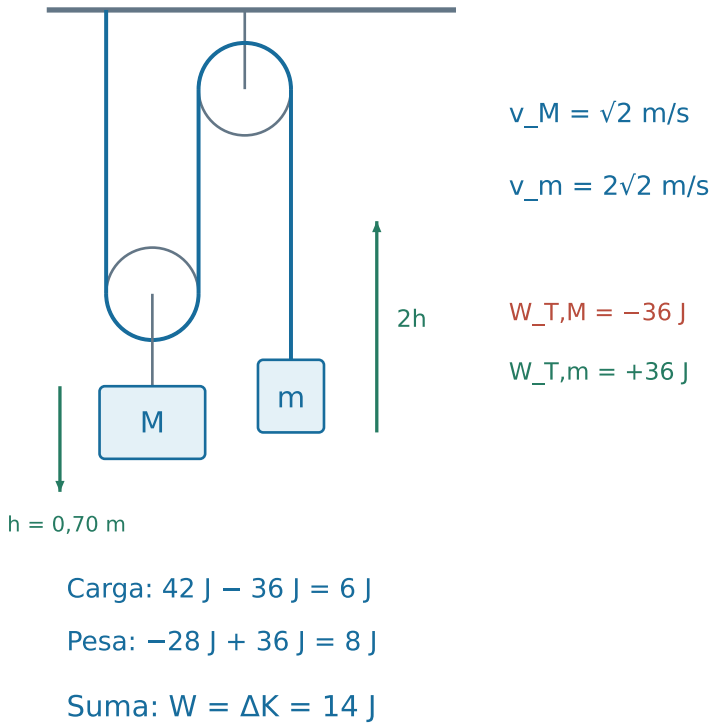


Figura 7.5. Para los valores del texto, la tensión realiza menos treinta y seis joules sobre la carga y más treinta y seis sobre la pesa. Los trabajos gravitatorios son cuarenta y dos y menos veintiocho joules. Las energías cinéticas finales suman seis y ocho joules. La figura usa el recorrido de la polea móvil, no el de una polea fija sencilla.

La fórmula de energía no proporciona por sí sola la tensión. Para recuperarla necesitamos una ecuación de Newton o información equivalente. También se debe verificar que la cuerda permanezca tensa y que no haya obstáculos antes del desplazamiento utilizado. El balance simplifica una pregunta concreta sin eliminar las demás condiciones del modelo.

La rapidez con que se realiza trabajo

Dos motores pueden elevar la misma carga hasta la misma altura y realizar el mismo trabajo en tiempos muy distintos. Para comparar esa diferencia necesitamos medir trabajo por unidad de tiempo.

Definición. La *potencia instantánea* de una fuerza sobre una partícula es

$$P_{\mathbf{F}}(t) = \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{v}(t).$$

La potencia media durante un intervalo de duración $\Delta t > 0$ es $\overline{P}_{\mathbf{F}} = W_{\mathbf{F}}/\Delta t$. La unidad SI es el watt, $1\,\mathrm{W} = 1\,\mathrm{J/s}$. La potencia puede ser negativa: entonces la fuerza realiza trabajo negativo sobre ese receptor en ese instante.

Al sumar agentes, el teorema demostrado da $\sum_j P_{\mathbf{F}_j} = dK/dt$. Un ascensor que ya sube a velocidad constante tiene potencia neta nula, aunque el motor aporte potencia positiva y la gravedad aporte la opuesta. No se deduce el consumo eléctrico del motor con sólo este balance mecánico: las pérdidas y la conversión entre formas de energía necesitarían otro modelo.

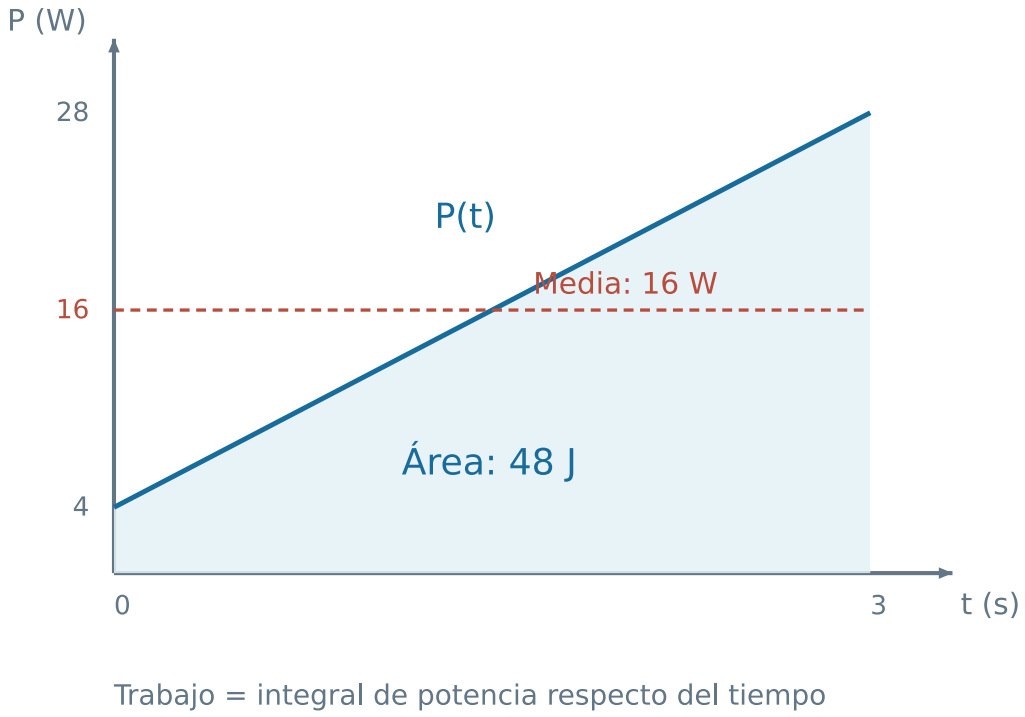


Figura 7.6. En el ejemplo del ejercicio 17, $P(t) = 4\,\mathrm{W} + (8\,\mathrm{W/s})t$. El trabajo de cero a tres segundos es cuarenta y ocho joules. La potencia final, veintiocho watts, no es la potencia media de dieciséis watts.

Lo que una medición de trabajo permite inferir

Podemos contrastar un modelo de frenado midiendo una rapidez inicial y una distancia de detención. Si la única fuerza tangencial es un rozamiento cinético constante sobre una mesa fija horizontal, el balance $-\mu_k m g d = -m v_0^2/2$ da $\mu_k = v_0^2/(2gd)$. La masa se cancela dentro de ese modelo. Un único ensayo identifica un valor efectivo compatible con las hipótesis; no distingue automáticamente rozamiento seco de otras resistencias que produzcan el mismo trabajo en ese recorrido.

Las mediciones repetidas a diferentes rapideces permiten examinar si el mismo coeficiente sigue describiendo los resultados. También hay que revisar inclinación, calibración de rapidez, resolución de la distancia y transición al reposo antes de adjudicar una discrepancia a una sola causa. El trabajo integra el efecto de las fuerzas a lo largo de un recorrido y por eso mismo puede ocultar diferencias entre sus perfiles locales.

Una fuerza constante como el peso uniforme ofrece un contraste interesante: su trabajo depende únicamente del cambio de altura, incluso si la trayectoria es curva. El resorte lineal produce otra expresión que sólo usa las posiciones extremas. Estudiar cuándo existe una función de posición capaz de recoger ese trabajo nos llevará a la energía potencial. Aquí hemos utilizado directamente las fuerzas y mantenido explícita su contribución al cambio de energía cinética.

Ejercicios

Se usa $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$. Los cuerpos se modelan como partículas de masa constante en el laboratorio inercial; las guías son fijas y lisas salvo indicación contraria. No hay choques dentro de los tramos estudiados. Cada uso de rozamiento se limita al régimen indicado.

1. El tirón oblicuo

Una partícula de dos kilogramos se desplaza cinco metros hacia la derecha sobre una mesa horizontal lisa. Recibe una fuerza constante de diez newtons que forma un ángulo hacia arriba con $\cos\alpha = 3/5$ y $\sin\alpha = 4/5$. Su rapidez inicial es un metro por segundo. Calcule los trabajos de las fuerzas, la normal y la rapidez final. Compruebe que el contacto se mantiene.

2. El trabajo de un agente y el trabajo neto

Una caja de dos kilogramos ya desliza hacia la derecha a un metro por segundo. Durante tres metros recibe un tirón horizontal de doce newtons y rozamiento cinético de cuatro newtons hacia la izquierda. Determine el trabajo de cada fuerza y la rapidez final. Diagnostique la respuesta que usa sólo los treinta y seis joules del tirón como incremento de energía cinética.

3. Elegir una fuerza representativa

En el carro del problema inicial, calcule los trabajos y la rapidez al llegar a $x = 3\,\mathrm{m}$. Compare el trabajo del tirón con el producto de su fuerza final por los tres metros. Encuentre la fuerza media respecto del desplazamiento que sí reproduce ese trabajo. ¿Es necesariamente una media temporal?

4. Un perfil con áreas positivas y negativas

Una partícula de un kilogramo parte de $x = 0$ hacia la derecha con rapidez de dos metros por segundo. La fuerza neta vale seis newtons entre cero y dos metros; disminuye linealmente de seis a menos dos newtons entre dos y cuatro metros; y vale menos dos newtons entre cuatro y cinco metros. Calcule el trabajo total, la rapidez final y compruebe que puede llegar al extremo sin detenerse antes.

5. Una energía final imposible

Una caja de dos kilogramos desliza a cuatro metros por segundo sobre una mesa horizontal y sólo recibe una fuerza de rozamiento cinético de ocho newtons en contra del movimiento. Se pide su rapidez después de avanzar tres metros. Determine qué impide responder con una raíz real y dónde termina el tramo deslizante. Decida la evolución posterior si no existe otra fuerza tangencial.

6. Dos métodos sobre el mismo recorrido

Una partícula de dos kilogramos se mueve hacia la derecha a un metro por segundo y recibe una fuerza neta constante de seis newtons en ese sentido durante cuatro metros. Calcule la rapidez final por trabajo y energía y por Newton con aceleración constante. Obtenga después el tiempo. Identifique qué información del segundo cálculo no necesitó el primero.

7. Una guía curva y el peso

Una cuenta de un kilogramo, ensartada en un alambre fijo liso, parte del reposo a tres metros por encima de un punto final. El alambre desciende suavemente sin remontadas hasta ese punto, su tangente inicial tiene una componente descendente no nula y mantiene la cuenta

guiada. Calcule el trabajo del peso, el de la guía y la rapidez final. Explique qué condición geométrica permite omitir el trabajo de la guía sin omitir su fuerza.

8. Los mismos extremos, otro recorrido

En un plano una fuerza depende de la posición como $\mathbf{F}(x,y) = ((2\,\mathrm{N/m})y, 0)$. Calcule su trabajo entre $(0,0)$ y $(2\,\mathrm{m}, 1\,\mathrm{m})$ por dos recorridos: primero horizontal y después vertical, o primero vertical y después horizontal. Los recorridos se prescriben mediante agentes no especificados. ¿Basta este cálculo para obtener el cambio de energía cinética de una partícula que los siga?

9. La primera compresión máxima

Una partícula de dos kilogramos está unida a un resorte horizontal sobre una mesa lisa. Cruza la posición natural hacia la compresión con rapidez de tres metros por segundo. La ley $F_x = -kx$, con $k = 100\,\mathrm{N/m}$ y x la extensión, vale para $|x| \le 0{,}50\,\mathrm{m}$. Calcule la primera compresión máxima y el trabajo del resorte hasta allí. ¿Queda en reposo al alcanzarla?

10. Mover un resorte sin cambiar la rapidez

Un actuador mantiene constante la rapidez de una partícula unida a un resorte horizontal de $k = 200\,\mathrm{N/m}$ sobre una mesa lisa. En el tramo considerado la extensión crece de 0,10 a 0,30 m, dentro del régimen lineal. Determine los trabajos del resorte y del actuador y el cambio de energía cinética. No se incluyen el arranque ni el frenado del dispositivo.

11. Subir por un plano con rozamiento

Un bloque de dos kilogramos sube por un plano fijo de longitud cinco metros con rapidez inicial de diez metros por segundo. Se tiene $\sin\theta = 3/5$, $\cos\theta = 4/5$ y $\mu_k = 0{,}25$. No recibe tirón. Determine los trabajos y la rapidez al completar los cinco metros. Compruebe que no se detiene antes. No prolongue el recorrido fuera del plano descrito.

12. Rozamiento que hace trabajo positivo

Una caja de dos kilogramos entra en una cinta que se mueve a rapidez constante de tres metros por segundo hacia la derecha. La caja lleva inicialmente un metro por segundo en ese mismo sentido; $\mu_k = 0{,}20$. Calcule el tiempo hasta igualar velocidades, el desplazamiento de la caja y el trabajo del rozamiento sobre ella. Obtenga además el trabajo de la fuerza opuesta recibida por la cinta durante el deslizamiento y compare ambos trabajos.

13. Trabajo de la fricción estática

Una plataforma horizontal traslada una caja de dos kilogramos sin deslizamiento. Ambas parten del reposo y aceleran hacia la derecha a un metro por segundo cuadrado durante dos segundos. La única fuerza horizontal sobre la caja es la fricción; $\mu_s = 0{,}20$. Compruebe la adherencia y calcule su trabajo sobre la caja en el laboratorio. ¿Permite afirmar que toda fricción estática hace trabajo nulo?

14. Del arco del péndulo a la tensión

Un péndulo ideal de un kilogramo y cuerda de dos metros se libera del reposo a sesenta grados de la vertical inferior. El pivote está fijo y no hay resistencia. Halle la rapidez y la tensión al pasar por el punto inferior. Compruebe también que la tensión no necesita ser negativa durante el descenso. Use trabajo del peso y la aceleración radial, sin aproximación de ángulo pequeño.

15. Los trabajos de la tensión se reparten

En la polea móvil del capítulo 6 se tiene $M = 6\,\mathrm{kg}$ y $m = 2\,\mathrm{kg}$. Desde el reposo, la carga desciende $0{,}70\,\mathrm{m}$ sin encontrar obstáculos. Calcule ambas rapideces sumando energías cinéticas. Con el valor de tensión obtenido por Newton, determine después el trabajo de cada fuerza sobre cada masa y compruebe los dos balances individuales.

16. Potencia de un ascenso uniforme

Una carga de cincuenta kilogramos sube seis metros en tres segundos a velocidad constante mediante un motor y un cable ideal. Calcule tensión, trabajo del motor, potencia mecánica entregada a la carga y trabajo del peso. Explique por qué la potencia neta es nula aunque el motor esté aportando potencia. Considere sólo ese tramo uniforme.

17. Potencia media e instantánea

Una partícula de dos kilogramos sigue en línea recta la ley $v(t) = 1\,\mathrm{m/s} + (2\,\mathrm{m/s^2})t$ durante tres segundos. Determine fuerza neta, potencia neta instantánea, trabajo total y potencia media. Compruebe el trabajo con el cambio de energía cinética y con fuerza por desplazamiento.

18. Igual trabajo, distinto tiempo

Una partícula de dos kilogramos entra en un recorrido horizontal de cuatro metros con rapidez de dos metros por segundo. Compare dos perfiles de fuerza neta hacia delante: A, dos newtons durante todo el recorrido; B, cuatro newtons durante los dos primeros metros y cero durante los dos restantes. Determine las rapideces finales y los tiempos de recorrido. ¿Qué información pierde la comparación que usa únicamente el trabajo total?

19. Inferir un coeficiente con cotas

En un ensayo de frenado horizontal se mide $v_0 \in [3{,}9; 4{,}1]\,\mathrm{m/s}$ y $d \in [1{,}9; 2{,}1]\,\mathrm{m}$. Dentro del modelo de rozamiento cinético constante como única fuerza tangencial, acote μ_k. Trate los intervalos como cotas deterministas independientes y redondee hacia fuera a cuatro decimales. ¿Qué permitiría contrastar mejor el modelo que un único ensayo?

20. Dos sentidos de trabajo nulo

Justifique que una fuerza neta perpendicular a la velocidad durante todo un intervalo conserva la rapidez de una partícula de masa constante. ¿Implica que la fuerza sea cero? Examine después esta afirmación distinta: «Si el trabajo neto entre dos posiciones es cero, la rapidez fue constante durante todo el recorrido». Construya un contraejemplo con una partícula de un kilogramo que entra a dos metros por segundo y fuerzas constantes a trozos en un recorrido recto de dos metros.

21. Una energía nula en un extremo inaccesible

Una partícula de masa $2\,\mathrm{kg}$ parte de $x = 0$ hacia la derecha con velocidad $2\,\mathrm{m/s}$. En el intervalo $0 \le x \le L$, con $L = 2\,\mathrm{m}$, recibe la fuerza neta

$$F_x(x) = -4\,\mathrm{N}\left(1 - \frac{x}{L}\right).$$

La ley se mantiene en ese intervalo y no hay choques ni cambios de régimen anteriores. Obtenga $K(x)$ y determine si la partícula alcanza $x = L$ en tiempo finito. Reconstruya $x(t)$ y compruebe Newton y los datos iniciales. Después conserve la fuerza y compare las preparaciones con velocidades iniciales de uno y tres metros por segundo: decida si llegan

a L y, cuando lleguen, calcule su rapidez allí. Relacione el primer caso con el frenado del ejercicio 14 del capítulo 1.

Soluciones

1. El tirón oblicuo

La componente horizontal del tirón es $10(3/5) = 6\,\mathrm{N}$ y su componente vertical es ocho newtons hacia arriba. Como la mesa mantiene la altura, $N + 8\,\mathrm{N} - 20\,\mathrm{N} = 0$, por lo que $N = 12\,\mathrm{N} > 0$. No se exige al apoyo que atraiga al cuerpo; el contacto es admisible.

El trabajo del tirón es $W_F = (6\,\mathrm{N})(5\,\mathrm{m}) = 30\,\mathrm{J}$. Peso y normal son perpendiculares al desplazamiento y hacen trabajo cero. La energía cinética inicial es un joule y la final treinta y uno. De $K_f = (2\,\mathrm{kg})v_f^2/2$ se obtiene $v_f = \sqrt{31}\,\mathrm{m/s}$. El tirón hacia arriba modifica la normal, aunque esa componente no contribuya al trabajo en este recorrido horizontal.

2. El trabajo de un agente y el trabajo neto

El tirón aporta $36\,\mathrm{J}$ y el rozamiento $-12\,\mathrm{J}$. Peso y normal aportan cero. El trabajo neto es veinticuatro joules y se suma al joule de energía cinética inicial: $K_f = 25\,\mathrm{J}$, de donde $v_f = 5\,\mathrm{m/s}$.

La respuesta que usa sólo el tirón obtendría $K_f = 37\,\mathrm{J}$ y $v_f = \sqrt{37}\,\mathrm{m/s}$. Ese valor corresponde a una caja sin el rozamiento declarado. Como la fuerza neta real es ocho newtons hacia la derecha y la caja ya avanza, no hay inversión de deslizamiento dentro del tramo.

3. Elegir una fuerza representativa

La integral del tirón hasta tres metros vale $12(3) - 3^2 = 27\,\mathrm{J}$, con las unidades SI de los coeficientes del enunciado. El rozamiento aporta $-4(3) = -12\,\mathrm{J}$ y el trabajo neto es quince joules. Sumando los cuatro joules iniciales, $K_f = 19\,\mathrm{J}$ y $v_f = \sqrt{19}\,\mathrm{m/s}$.

La fuerza final del tirón es seis newtons. Multiplicarla por tres metros daría dieciocho joules y subestimaría el trabajo, pues el tirón tuvo valores mayores durante todo el interior del recorrido. La fuerza media respecto de x es $\overline{F}_x = W_F/\Delta x = 9\,\mathrm{N}$, también la media aritmética de los valores extremos por ser una función lineal de x.

Una media temporal utiliza $\int F(t)\,dt/\Delta t$ y pondera los lugares según cuánto tiempo se permanece en ellos. Como el carro cambia su rapidez, esa ponderación no coincide en general con la media respecto del desplazamiento. Aquí nueve newtons es la altura de un rectángulo con el área correcta en la gráfica fuerza–posición.

4. Un perfil con áreas positivas y negativas

El primer trabajo es $6(2) = 12\,\mathrm{J}$. En el tramo lineal de dos metros, el área con signo del trapecio es $(6 - 2)(2)/2 = 4\,\mathrm{J}$. El último tramo aporta $-2(1) = -2\,\mathrm{J}$. En total, $W = 14\,\mathrm{J}$. La energía cinética inicial es dos joules, así que $K_f = 16\,\mathrm{J}$ y $v_f = \sqrt{32}\,\mathrm{m/s} = 4\sqrt{2}\,\mathrm{m/s}$.

Para comprobar el acceso no basta mirar el valor final. La energía sube de dos a catorce joules durante el primer tramo. En el segundo la fuerza se anula en $x = 3{,}5\,\mathrm{m}$; hasta allí K crece y después decrece hasta dieciocho joules en cuatro metros. En el último metro baja de dieciocho a dieciséis. Su mínimo en todo el recorrido es el valor inicial positivo, por lo que la velocidad de avance nunca se anula.

5. Una energía final imposible

La caja entra con $K_0 = (2\,\mathrm{kg})(4\,\mathrm{m/s})^2/2 = 16\,\mathrm{J}$. Mientras desliza hacia delante, $K(d) = 16\,\mathrm{J} - (8\,\mathrm{N})d$. En tres metros esa expresión daría menos ocho joules, incompatible con $mv^2/2 \geq 0$.

La primera anulación ocurre a los dos metros. Hasta allí $v(d) = \sqrt{16\,\mathrm{m^2/s^2} - (8\,\mathrm{m/s^2})d}$ en la rama de avance. Después no hay otra fuerza tangencial y el reposo requiere fricción nula, admisible estáticamente. La caja no llega a los tres metros bajo las condiciones dadas. El resultado negativo diagnostica el uso de una ley deslizante fuera de su tramo, no una energía cinética negativa realizable.

6. Dos métodos sobre el mismo recorrido

El trabajo neto es $W = (6\,\mathrm{N})(4\,\mathrm{m}) = 24\,\mathrm{J}$. Sumado al joule inicial produce $K_f = 25\,\mathrm{J}$, de modo que $v_f = 5\,\mathrm{m/s}$. Por Newton, $a = 6\,\mathrm{N}/(2\,\mathrm{kg}) = 3\,\mathrm{m/s^2}$ y la identidad de aceleración constante da $v_f^2 = v_0^2 + 2a\Delta x = 1 + 24 = 25$ en unidades de rapidez al cuadrado.

El tiempo se obtiene de $v_f = v_0 + at$: $\Delta t = (5-1)/3\,\mathrm{s} = 4/3\,\mathrm{s}$. Al sustituirlo en $\Delta x = v_0\Delta t + a\Delta t^2/2$ se recuperan cuatro metros. El balance energético comparó estados sin calcular a ni Δt; la reconstrucción temporal aporta el instante en que se alcanza el segundo estado.

7. Una guía curva y el peso

Sea y una coordenada vertical positiva hacia arriba. El peso uniforme es $\mathbf{P} = (0, -mg)$, por lo que $W_g = -mg(y_f - y_i) = 30\,\mathrm{J}$. La fuerza de la guía es normal a la tangente de la trayectoria y la velocidad es tangente: su producto escalar es cero en cada instante. Así, $W_N = 0$.

Desde el reposo, $mv_f^2/2 = 30\,\mathrm{J}$ y $v_f = \sqrt{60}\,\mathrm{m/s}$. El descenso sin remontadas permite adquirir energía cinética sin encontrar una barrera intermedia; se presupone que el alambre conserva la guía indicada. La normal puede cambiar la dirección de la velocidad y ser grande en regiones muy curvas. Su trabajo nulo no la elimina de una ecuación de fuerzas ni garantiza, para un apoyo unilateral diferente, que el contacto pudiera mantenerse.

8. Los mismos extremos, otro recorrido

En el primer recorrido, el segmento horizontal tiene $y = 0$, por lo que la fuerza es cero y no realiza trabajo. En el segmento vertical $dx = 0$ y la fuerza es horizontal, así que tampoco lo realiza. Resulta $W_A = 0$.

En el segundo recorrido, el segmento vertical vuelve a dar cero. El horizontal se encuentra en $y = 1\,\mathrm{m}$, donde $F_x = 2\,\mathrm{N}$; sus dos metros aportan $W_B = 4\,\mathrm{J}$. La fuerza tiene trabajos diferentes entre los mismos extremos porque cambia el recorrido.

Los agentes que prescriben esas trayectorias no se han especificado. Pueden hacer trabajo adicional. Por tanto, estos cálculos dan el trabajo de la fuerza indicada, pero no necesariamente ΔK. Para aplicar el teorema a una partícula concreta tendríamos que incluir las otras fuerzas o justificar por qué su trabajo es cero.

9. La primera compresión máxima

Tomemos x positivo hacia la extensión. El movimiento inicial entra en $x < 0$, pero la energía cinética depende de la rapidez y empieza en nueve joules. Si la compresión tiene módulo d, el resorte realiza $W_s = -kd^2/2$. El primer reposo exige $0 - 9\,\mathrm{J} = -(100\,\mathrm{N/m})d^2/2$, de donde

$$d = \sqrt{0{,}18}\,\mathrm{m} = \frac{3\sqrt{2}}{10}\,\mathrm{m} \approx 0{,}4243\,\mathrm{m}.$$

El valor queda dentro de los cincuenta centímetros del modelo lineal. El trabajo hasta allí es menos nueve joules. En $x = -d$ la fuerza del resorte es positiva y no nula: acelera la partícula hacia la posición natural. El reposo es instantáneo y el movimiento se invierte. Esto contrasta con la caja del ejercicio 5, cuya fuerza resistente desaparecía al mantenerse en reposo.

10. Mover un resorte sin cambiar la rapidez

La fuerza del resorte hace

$$W_s = \frac{200\,\mathrm{N/m}}{2}\left[(0{,}10\,\mathrm{m})^2 - (0{,}30\,\mathrm{m})^2\right] = -8\,\mathrm{J}.$$

La rapidez y la dirección se mantienen constantes en la recta, por lo que la aceleración es cero. El actuador ejerce $F_a = kx$ en ese tramo y su trabajo es $+8\,\mathrm{J}$. El trabajo neto y ΔK son cero. No hemos utilizado «lentitud» para igualar las fuerzas: aquí la velocidad constante justifica exactamente el balance dentro del modelo. El arranque y la detención requerirían sus propios intervalos y trabajos.

11. Subir por un plano con rozamiento

La normal vale $N = mg\cos\theta = 16\,\mathrm{N}$ y el rozamiento cinético cuatro newtons hacia abajo del plano. En cinco metros, el bloque sube tres metros de altura, de modo que $W_g = -60\,\mathrm{J}$, $W_f = -20\,\mathrm{J}$ y $W_N = 0$.

La energía cinética inicial es cien joules y la final veinte, de donde $v_f = \sqrt{20}\,\mathrm{m/s}$. La fuerza tangencial neta vale menos dieciséis newtons respecto del sentido de subida. Por tanto, a una distancia s sobre el plano se tiene $K(s) = 100\,\mathrm{J} - (16\,\mathrm{N})s$. Se anularía a los $6{,}25\,\mathrm{m}$ si el mismo plano continuara. Como el tramo descrito termina en cinco metros, no hay detención interior; no hemos calculado qué ocurre al abandonar su extremo.

12. Rozamiento que hace trabajo positivo

La caja desliza hacia atrás respecto de la cinta, por lo que la fricción sobre ella apunta hacia la derecha. Su módulo es $f = \mu_k mg = 4\,\mathrm{N}$ y su aceleración $2\,\mathrm{m/s^2}$. Iguala los tres metros por segundo de la cinta en $t = (3-1)/2\,\mathrm{s} = 1\,\mathrm{s}$. En ese tiempo avanza $\Delta x = (1\,\mathrm{m/s})(1\,\mathrm{s}) + (2\,\mathrm{m/s^2})(1\,\mathrm{s})^2/2 = 2\,\mathrm{m}$.

El trabajo de fricción sobre la caja es $+8\,\mathrm{J}$, igual a $K_f - K_i = 9\,\mathrm{J} - 1\,\mathrm{J}$. La fuerza opuesta sobre la cinta hace trabajo $-(4\,\mathrm{N})(3\,\mathrm{m}) = -12\,\mathrm{J}$, pues la superficie recorre tres metros en ese segundo. En el modelo de cinta ideal, la potencia de esa interacción se evalúa con la velocidad de la superficie que recibe la fuerza.

Los trabajos de la pareja suman menos cuatro joules. Podemos reconstruir ese valor siguiendo el deslizamiento: la cinta adelanta a la caja $3\,\mathrm{m} - 2\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{m}$, y el módulo de la fuerza de contacto es cuatro newtons. La suma es, por tanto, $-(4\,\mathrm{N})(1\,\mathrm{m}) = -4\,\mathrm{J}$. Las fuerzas opuestas actúan sobre receptores que recorren distancias diferentes. La pérdida de energía cinética mecánica asociada al deslizamiento requiere considerar la energía interna al ampliar el sistema; no representa una desaparición de energía. El motor que mantiene la cinta uniforme aporta además su propio trabajo. Cuando las velocidades se igualan, mantener el movimiento uniforme de la caja requiere fricción tangencial nula en esta situación.

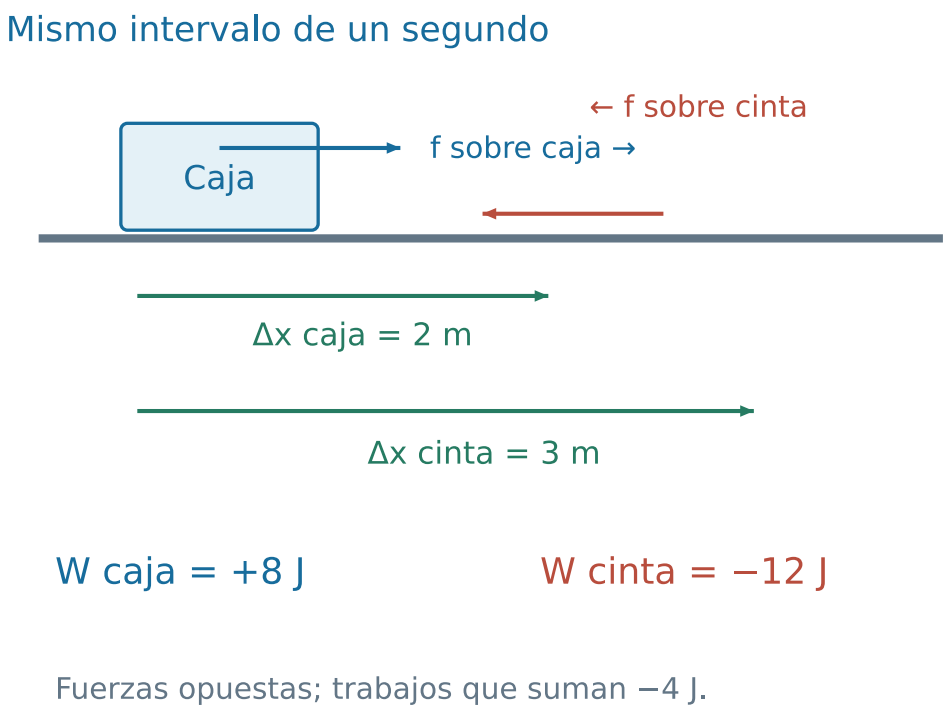


Figura 7.7. En un segundo, la caja avanza dos metros y la superficie tres. La fricción entrega ocho joules a la caja y realiza menos doce joules sobre la cinta. Las flechas de fuerza están separadas de los desplazamientos para no confundir sus módulos.

13. Trabajo de la fricción estática

La caja necesita $f = ma = 2\,\mathrm{N}$ hacia la derecha. La normal es veinte newtons y el máximo estático es $\mu_s N = 4\,\mathrm{N}$, así que la adherencia es admisible. Su desplazamiento en dos segundos es $\Delta x = at^2/2 = 2\,\mathrm{m}$ y su velocidad final dos metros por segundo.

La fricción realiza $W_f = (2\,\mathrm{N})(2\,\mathrm{m}) = 4\,\mathrm{J}$, igual al incremento desde cero de $mv^2/2$. La velocidad relativa tangencial es nula, pero la velocidad de la caja respecto del laboratorio no lo es durante el intervalo. La fuerza estática puede transferir energía cinética al receptor en este marco. La afirmación universal de trabajo estático nulo confundiría ausencia de deslizamiento con ausencia de desplazamiento del receptor.

14. Del arco del péndulo a la tensión

La caída vertical desde sesenta grados hasta el punto inferior es $h = \ell(1 - \cos 60^\circ) = 1\,\mathrm{m}$. La tensión es perpendicular a la velocidad porque el pivote está fijo y la cuerda conserva longitud; no hace trabajo. El peso aporta diez joules, por lo que $v_b^2 = 2gh = 20\,\mathrm{m^2/s^2}$ y $v_b = \sqrt{20}\,\mathrm{m/s}$.

Abajo, la ecuación radial es $T_b - mg = mv_b^2/\ell$, que da $T_b = 20\,\mathrm{N}$. Para comprobar el tramo completo, sea θ el ángulo instantáneo con la vertical inferior, entre cero y sesenta grados. El mismo trabajo da $v^2 = 2g\ell(\cos\theta - 1/2)$. Hacia el centro, $T - mg\cos\theta = mv^2/\ell$. Sustituyendo,

$$T = mg(3\cos\theta - 1).$$

Como $1/2 \le \cos\theta \le 1$, la tensión permanece entre cinco y veinte newtons. El régimen tenso es admisible durante el descenso. El cálculo no utilizó $\sin\theta \approx \theta$ ni necesitó resolver el ángulo en función del tiempo.

15. Los trabajos de la tensión se reparten

La longitud impone una rapidez de la pesa igual a $2v$, si v es la de la carga. Los trabajos del peso suman $(6-4)\,\mathrm{kg}\,(10\,\mathrm{m/s^2})(0{,}70\,\mathrm{m}) = 14\,\mathrm{J}$ y los de la tensión se cancelan en la suma. Desde el reposo,

$$\frac{1}{2}\big[6\,\mathrm{kg} + 4(2\,\mathrm{kg})\big]v^2 = 14\,\mathrm{J}.$$

Así, la carga baja a $\sqrt{2}\,\mathrm{m/s}$ y la pesa sube a $2\sqrt{2}\,\mathrm{m/s}$. El análisis de Newton da $T = 180/7\,\mathrm{N} > 0$. Sobre la carga, el peso realiza $42\,\mathrm{J}$ y la tensión efectiva $2T$ realiza $-2T(0{,}70\,\mathrm{m}) = -36\,\mathrm{J}$. El incremento de energía cinética es seis joules, igual a $(6\,\mathrm{kg})(\sqrt{2}\,\mathrm{m/s})^2/2$.

La pesa sube $1{,}40\,\mathrm{m}$: su peso hace $-28\,\mathrm{J}$ y la tensión hace $+36\,\mathrm{J}$. Su incremento es ocho joules, igual a $(2\,\mathrm{kg})(2\sqrt{2}\,\mathrm{m/s})^2/2$. Los dos balances recuperan los catorce joules totales y muestran qué términos desaparecieron al reunir el sistema.

16. Potencia de un ascenso uniforme

La rapidez es $v = 6\,\mathrm{m}/(3\,\mathrm{s}) = 2\,\mathrm{m/s}$ hacia arriba. Como la aceleración es cero, la tensión es $T = mg = 500\,\mathrm{N}$. El cable entrega $W_T = (500\,\mathrm{N})(6\,\mathrm{m}) = 3000\,\mathrm{J}$ y una potencia constante $P_T = Tv = 1000\,\mathrm{W}$.

El peso realiza $-3000\,\mathrm{J}$ y tiene potencia $-1000\,\mathrm{W}$. La suma es cero, de acuerdo con la energía cinética constante. Se está elevando la carga aunque su rapidez no cambie. El valor calculado es potencia mecánica entregada a ella; no hemos identificado la potencia eléctrica consumida ni supuesto un rendimiento del motor.

17. Potencia media e instantánea

La aceleración es constante e igual a $2\,\mathrm{m/s^2}$; por Newton, $F_{\mathrm{net}} = 4\,\mathrm{N}$. La potencia neta resulta

$$P(t) = (4\,\mathrm{N})\big[1\,\mathrm{m/s} + (2\,\mathrm{m/s^2})t\big] = 4\,\mathrm{W} + (8\,\mathrm{W/s})t.$$

Integrarla de cero a tres segundos da $W = 12\,\mathrm{J} + 36\,\mathrm{J} = 48\,\mathrm{J}$. La potencia media es dieciséis watts y la final veintiocho watts. La velocidad final vale siete metros por segundo, así que $\Delta K = (2\,\mathrm{kg})[(7\,\mathrm{m/s})^2 - (1\,\mathrm{m/s})^2]/2 = 48\,\mathrm{J}$.

Por la integral de la velocidad, el desplazamiento es doce metros, que multiplicados por los cuatro newtons dan otra vez cuarenta y ocho joules. Multiplicar la potencia final por tres segundos daría ochenta y cuatro joules: usaría un valor máximo como si hubiera actuado durante todo el intervalo.

18. Igual trabajo, distinto tiempo

En A, $W_A = (2\,\mathrm{N})(4\,\mathrm{m}) = 8\,\mathrm{J}$. En B, $W_B = (4\,\mathrm{N})(2\,\mathrm{m}) = 8\,\mathrm{J}$. Ambos suman ocho joules a los cuatro iniciales, de modo que $K_f = 12\,\mathrm{J}$ y $v_f = \sqrt{12}\,\mathrm{m/s}$.

El perfil A tiene $a_A = 1\,\mathrm{m/s^2}$ durante todo el tramo y tarda $t_A = (\sqrt{12} - 2)\,\mathrm{s} \approx 1{,}464\,\mathrm{s}$. En B, durante los dos primeros metros $a_B = 2\,\mathrm{m/s^2}$ y ya se alcanza la rapidez final. Ese tramo tarda $(\sqrt{12} - 2)/2\,\mathrm{s}$. Los dos metros restantes se recorren uniformemente en $2/\sqrt{12}\,\mathrm{s}$. Por tanto,

$$t_B = \left(\frac{\sqrt{12} - 2}{2} + \frac{2}{\sqrt{12}}\right)\mathrm{s} \approx 1{,}309\,\mathrm{s}.$$

La fuerza B entrega antes el mismo trabajo, así que el cuerpo conserva una rapidez mayor durante buena parte del recorrido. La comparación de trabajos totales pierde la distribución espacial de esa entrega. Los perfiles completos de $K(x)$ sí conservan información suficiente para calcular los tiempos mediante una integral en el tramo de avance.

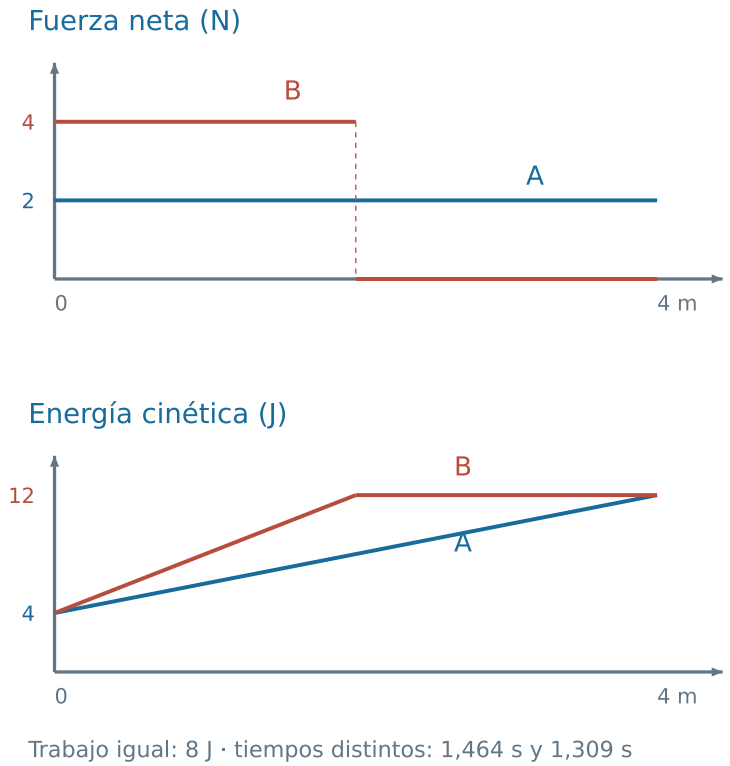


Figura 7.8. En el perfil B se adquieren los ocho joules durante la primera mitad del recorrido. Para cada posición interior posterior al origen, su energía cinética es mayor que la del perfil A, hasta coincidir al final. Por ello la integral de tiempo es menor para B.

19. Inferir un coeficiente con cotas

El balance de detención da $\mu_k = v_0^2/(2gd)$. Para valores positivos, la expresión crece con v_0 y disminuye con d. Por ello,

$$\mu_k \in \left[\frac{(3{,}9)^2}{20(2{,}1)}; \frac{(4{,}1)^2}{20(1{,}9)}\right] = \left[\frac{15{,}21}{42}; \frac{16{,}81}{38}\right] \subset [0{,}3621; 0{,}4424].$$

El coeficiente es adimensional. El redondeo inferior baja la cota y el superior la sube, de modo que no se excluyen valores permitidos por los intervalos originales. No son intervalos probabilísticos ni hemos asignado un nivel de confianza.

Repetir ensayos con varias rapideces iniciales pondría a prueba si un mismo coeficiente describe la relación $d = v_0^2/(2\mu_k g)$. Conviene controlar superficie, horizontalidad y calibración para que ese contraste tenga sentido. Ajustar un coeficiente con este ensayo y recuperar su misma distancia no constituiría una predicción independiente.

20. Dos sentidos de trabajo nulo

Si $\mathbf{F}_{\text{neta}} \cdot \mathbf{v} = 0$ durante todo el intervalo, la demostración del teorema da $dK/dt = 0$. Para masa constante positiva, K constante implica $\|\mathbf{v}\|$ constante. La fuerza puede ser no nula: en el movimiento circular uniforme actúa una fuerza radial perpendicular a la velocidad que cambia su dirección.

La afirmación sobre un trabajo total nulo sólo compara los estados extremos. Como contraejemplo, tomemos una fuerza neta de $+2\,\text{N}$ durante el primer metro y $-2\,\text{N}$ durante el segundo, con velocidad inicial $+2\,\text{m/s}$ y masa de un kilogramo. Los trabajos son $+2\,\text{J}$ y $-2\,\text{J}$; la energía cinética pasa de dos a cuatro joules y vuelve a dos. La rapidez pasa de dos a $2\sqrt{2}$

metros por segundo y regresa a dos. Permanece positiva, así que los dos tramos son accesibles y el cambio de signo de la fuerza no requiere un choque.

Una integral nula puede contener contribuciones locales que se compensan. La hipótesis de perpendicularidad instantánea anulaba cada contribución, una condición más fuerte que la igualdad final de energías cinéticas.

21. Una energía nula en un extremo inaccesible

El balance da primero una rapidez en función de la posición. Para simplificar la cuenta escribamos $q = x/L$, que es adimensional. El trabajo acumulado es $-8q\,\mathrm{J} + 4q^2\,\mathrm{J}$ y la energía inicial vale cuatro joules. Así,

$$K(x) = 4(1-q)^2\,\mathrm{J}.$$

En el tramo de avance con $0 \le q < 1$, la raíz compatible con la velocidad inicial es $v(x) = 2(1-q)\,\mathrm{m/s}$. La energía se anula en L, pero todavía falta averiguar cuánto tiempo exige acercarse a ese punto. Usando $dx = L\,dq$ en la integral temporal,

$$t(x) = \frac{L}{2\,\mathrm{m/s}} \int_0^{x/L} \frac{dq}{1-q} = -(1\,\mathrm{s}) \ln\left(1 - \frac{x}{L}\right).$$

La integral crece sin cota cuando x tiende a L desde la izquierda. Cada posición anterior se alcanza en tiempo finito, mientras que L es una posición límite. Invertir la relación produce

$$x(t) = L\left(1 - e^{-t/(1\,\mathrm{s})}\right), \qquad v(t) = (2\,\mathrm{m/s})e^{-t/(1\,\mathrm{s})}.$$

Otra derivada da $a(t) = -(2\,\mathrm{m/s^2})e^{-t/(1\,\mathrm{s})}$. Por tanto, $ma = -(4\,\mathrm{N})e^{-t/(1\,\mathrm{s})} = F_x(x(t))$; además, $x(0) = 0$ y $v(0) = 2\,\mathrm{m/s}$. Se han comprobado la dinámica y los datos iniciales durante toda la aproximación.

Con velocidad inicial de un metro por segundo, la energía sería $K = [1 - 8q + 4q^2]\,\mathrm{J}$. Su primer cero es $q = 1 - \sqrt{3}/2$, es decir, $x = (2-\sqrt{3})\,\mathrm{m} < L$. Allí la fuerza sigue apuntando hacia la izquierda con valor $-2\sqrt{3}\,\mathrm{N}$, de modo que la partícula invierte el movimiento. El cero de K es simple: su pendiente es la fuerza no nula. La integral de tiempo cerca de ese extremo se comporta como la integral de $1/\sqrt{x_* - x}$, que converge. Esa primera detención sí ocurre en tiempo finito.

Con velocidad inicial de tres metros por segundo, se obtiene $K = [9 - 8q + 4q^2]\,\mathrm{J} = [5 + 4(q-1)^2]\,\mathrm{J}$. En todo el tramo $K \ge 5\,\mathrm{J}$, y por ello $v \ge \sqrt{5}\,\mathrm{m/s}$. La partícula llega a L en un tiempo no mayor que $L/(\sqrt{5}\,\mathrm{m/s})$ y lo hace con rapidez $\sqrt{5}\,\mathrm{m/s}$. La ley declarada termina allí.

Las tres preparaciones distinguen un retorno, una aproximación asintótica y un paso por el extremo. La forma local de la energía, junto con la rama de movimiento y las fuerzas, permite decidir cuál ocurre. El caso intermedio recupera el mecanismo matemático del capítulo 1: velocidad exponencial positiva en cada tiempo finito y distancia total límite finita. Aquí esa evolución se obtuvo a partir de una fuerza dependiente de la posición.

Lecturas de apoyo

Sears y Zemansky, *Física universitaria*, volumen 1, Young y Freedman, 13.ª edición, capítulo 6, especialmente §6.3, pp. 187–192, permite cotejar el trabajo como área, las fuerzas variables y la extensión a trayectorias curvas. Serway y Jewett, *Física para ciencias e ingeniería*, volumen 1, 10.ª edición española, §§7.4–7.5, pp. 156–163, desarrolla las integrales de trabajo y el cambio de energía cinética. En este capítulo se distingue cuidadosamente el balance de una partícula de la suma para varios receptores, cuyos trabajos internos requieren examen propio.

Spivak, *Physics for Mathematicians. Mechanics I*, capítulo 3, pp. 87–89, construye una primera integral al multiplicar Newton por la velocidad. El argumento temporal de nuestro teorema recoge esa idea sin dividir por una velocidad que podría anularse. La energía potencial y las condiciones de conservación se desarrollarán en el capítulo siguiente. Los problemas y datos de este capítulo son de construcción propia; el cotejo indicado se limita a esos pasajes y no constituye una auditoría completa de las obras.

Capítulo 8

Potencial, equilibrio y estabilidad

Un carro de dos kilogramos está unido a un resorte horizontal sobre un riel liso. Al principio el resorte tiene su longitud natural y el carro está en reposo. Un mecanismo comienza a tirar de él hacia la derecha con una fuerza constante de ocho newtons. El resorte ejerce una fuerza contraria que crece ocho newtons por cada metro de extensión. ¿Dónde volverá a detenerse el carro? ¿Coincide ese lugar con la posición donde se equilibran las fuerzas?

Tomaremos el laboratorio como marco inercial y la extensión del resorte como coordenada x, positiva hacia la derecha. El carro se representa por una partícula de masa constante $m = 2\,\mathrm{kg}$; el peso y la normal se equilibran verticalmente. El resorte obedece $F_s = -kx$, con $k = 8\,\mathrm{N/m}$, en el intervalo $-1\,\mathrm{m} < x < 3\,\mathrm{m}$. Omitimos rozamiento, aire y rotación. El mecanismo sostiene $f_0 = 8\,\mathrm{N}$ durante todo el movimiento estudiado. Su fuerza neta horizontal es

$$F(x) = f_0 - kx.$$

En un metro de extensión ambas fuerzas se equilibran. Pero el carro ha sido acelerado antes de llegar allí: no hay motivo para que pierda de golpe la velocidad que adquirió.

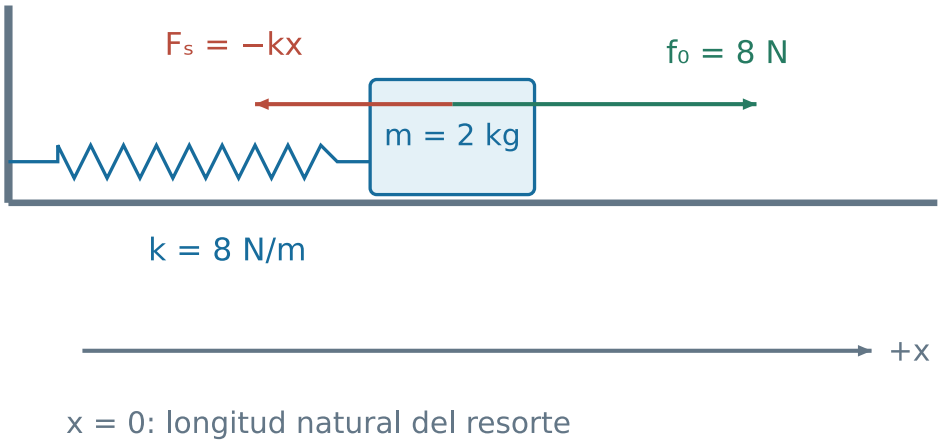


Figura 8.1. El eje mide extensión respecto de la longitud natural. La posición $x = 1\,\mathrm{m}$ equilibra el tirón y la fuerza elástica. La posición de reposo inicial es $x = 0$, donde la fuerza neta apunta a la derecha. El esquema no representa módulos mediante longitudes de flecha.

La misma integral, leída desde sus extremos

El trabajo acumulado desde el origen es

$$W(0 \to x) = \int_0^x (f_0 - k\xi)\, d\xi = f_0 x - \frac{1}{2} k x^2.$$

Como el carro parte del reposo, el teorema del capítulo anterior da $K(x) = f_0 x - k x^2/2$. Esta expresión se anula en $x = 0$ y en $x = 2f_0/k = 2\,\mathrm{m}$. Entre esos puntos es positiva. El segundo cero corresponde a la primera detención después de salir del origen. Allí la fuerza neta es ocho newtons hacia la izquierda, de modo que el carro inicia el regreso; no permanece en reposo.

Podemos recoger la integral en una función

$$U(x) = \frac{1}{2} k x^2 - f_0 x,$$

que satisface $F(x) = -U'(x)$. El trabajo entre dos posiciones cualesquiera del intervalo es entonces $W(x_i \to x_f) = U(x_i) - U(x_f)$. En vez de calcular una nueva integral para cada recorrido, evaluamos la misma función en sus extremos.

En el estado inicial, $K = 0$ y $U(0) = 0$. Por tanto, durante este movimiento

$$K(x) + U(x) = 0.$$

La gráfica de U es una parábola cuyo mínimo está en un metro y vale menos cuatro joules. La separación vertical entre la línea horizontal $E = 0$ y esa parábola es $K = E - U$. En el mínimo la energía cinética es máxima, cuatro joules, y la rapidez es dos metros por segundo. El carro cruza la posición de fuerzas equilibradas con su mayor rapidez.

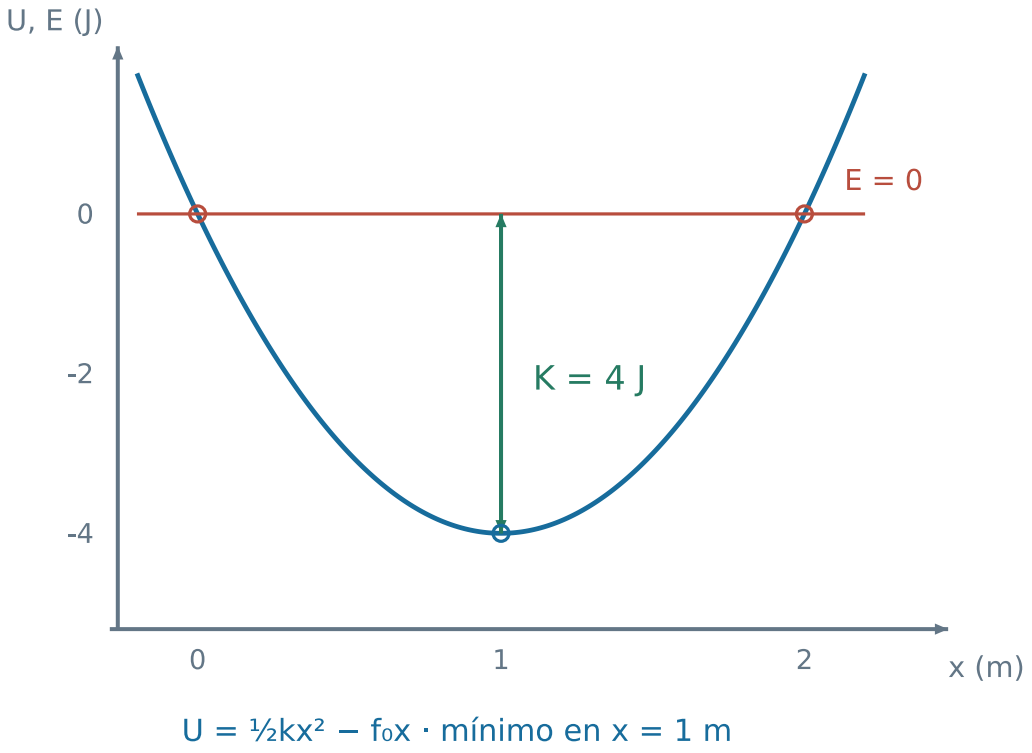


Figura 8.2. La ordenada es energía, no altura física del riel. Los extremos $x = 0$ y $x = 2\,\mathrm{m}$ tienen rapidez nula; en $x = 1\,\mathrm{m}$ la pendiente del potencial y la fuerza neta son cero, pero la rapidez no lo es. La diferencia $E - U$ se mide en joules.

La función U incorpora tanto el resorte como el tirón constante: $U = U_s + U_f$, con $U_s = kx^2/2$ y $U_f = -f_0 x$. Esta elección no borra el trabajo del mecanismo. Para el subsistema carro–resorte, $K + U_s$ aumenta en $f_0 x$ mientras el carro avanza. Al incluir también U_f obtenemos una constante matemática del modelo de fuerzas considerado. Debemos indicar qué interacciones están incluidas antes de interpretar una energía mecánica como la de un sistema físicamente aislado.

Construir un potencial y elegir su referencia

Definición. En un intervalo abierto I de posiciones, una función diferenciable $U : I \to \mathbb{R}$ es un *potencial* para la componente de fuerza $F(x)$ si

$$F(x) = -\frac{dU}{dx}(x).$$

Sus valores tienen unidades de energía. El potencial describe la interacción representada por esa fuerza en las condiciones fijadas del modelo. Para la gravedad terrestre uniforme puede utilizarse $U_g = mgy$, con y hacia arriba; para un resorte lineal, $U_s = kx^2/2$. En ambos casos se mantienen fijos los parámetros y apoyos supuestos. Cuando se usa un campo gravitatorio externo, esta descripción recoge la interacción con su fuente sin calcular el movimiento de esa fuente.

Si F es continua en I, el teorema fundamental del cálculo proporciona un potencial:

$$U(x) = U(x_*) - \int_{x_*}^{x} F(\xi)\, d\xi,$$

con $x_* \in I$ como referencia. Además,

$$\int_{x_i}^{x_f} F(x)\, dx = U(x_i) - U(x_f).$$

Proposición. Dos potenciales de una misma fuerza en un intervalo difieren en una constante. Recíprocamente, añadir una constante a un potencial conserva la fuerza y todos sus trabajos.

Demostración. Si $U_1' = -F = U_2'$, la diferencia $U_1 - U_2$ tiene derivada nula. Por el teorema del valor medio es constante en el intervalo. En sentido inverso, la derivada de $U + C$ es U', mientras que $(U(x_i) + C) - (U(x_f) + C) = U(x_i) - U(x_f)$. Ni la fuerza ni el trabajo cambian.

En el ejemplo inicial podemos sumar cuatro joules y escribir

$$\widetilde{U}(x) = \frac{1}{2}k(x - 1\,\mathrm{m})^2, \qquad \widetilde{E} = 4\,\mathrm{J}.$$

La nueva parábola tiene mínimo cero, pero conserva las pendientes y la diferencia $\widetilde{E} - \widetilde{U} = E - U$. Las detenciones, rapideces y fuerzas son las mismas. Un potencial negativo no significa fuerza hacia la izquierda ni energía cinética negativa: el sentido de la fuerza se obtiene de la pendiente con signo contrario.

Para un potencial con unidades de joules y una coordenada en metros, U' tiene unidades J/m = N y U'' unidades N/m. Una derivada numérica sin respetar las escalas de los ejes puede dar un módulo de fuerza equivocado aunque reconozca bien su signo.

Cuándo el trabajo depende sólo de los extremos

Definición. Una fuerza que depende únicamente de la posición es *conservativa* en un dominio si su trabajo es el mismo para todos los recorridos suaves a trozos de ese dominio que unen los mismos extremos. El dominio y los recorridos permitidos forman parte de la afirmación.

En un intervalo rectilíneo, una fuerza continua $F(x)$ tiene el potencial que acabamos de construir. Si la partícula va y vuelve por la misma recta, el trabajo de esa fuerza en el recorrido cerrado es cero: las integrales de ida y vuelta tienen límites opuestos. El rozamiento cinético no contradice esta conclusión. Su componente cambia con el sentido del deslizamiento; no es una única función $F(x)$ que conserve los mismos valores al invertir la marcha. Sobre una mesa fija, una ida y vuelta de distancia d en cada sentido disipa trabajo $-2\mu_k mgd$.

En un plano hay recorridos distintos que pueden dar trabajos diferentes. En el capítulo 7 encontramos ese comportamiento para $\mathbf{F} = (\kappa y, 0)$: cambiar el orden de un tramo horizontal y uno vertical cambió su trabajo. No existe un potencial de posición que reproduzca ambos resultados mediante una misma diferencia de extremos.

Para comprobar un potencial explícito $U(x, y)$ se derivan sus componentes manteniendo fija la otra coordenada:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}.$$

La notación $\partial U/\partial x$ designa la derivada de U respecto de x con y constante. Si estas relaciones se cumplen y U es continuamente diferenciable, la regla de la cadena a lo largo de un recorrido da $dU/dt = -\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$. Su integral produce otra vez $W = U_i - U_f$. Basta verificar

esas derivadas para el ejercicio 19; no necesitamos todavía un criterio general de cálculo vectorial para decidir la existencia de potenciales en dominios arbitrarios.

Energía mecánica y trabajo de las otras fuerzas

Definición. Para una partícula de masa constante $m > 0$, con un potencial de posición U elegido para ciertas fuerzas, llamaremos *energía mecánica* de esta descripción a

$$E = K + U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x).$$

Se declara qué fuerzas están representadas en U y cuál es su referencia. Varias fuerzas conservativas se incorporan sumando sus potenciales. Las fuerzas restantes se contabilizan por su trabajo.

Teorema. Supongamos que U no depende explícitamente del tiempo, que el movimiento satisface $m\ddot{x} = -U'(x) + F_o$ y que cumple las condiciones de regularidad del teorema del trabajo del capítulo 7. Entonces

$$E(t_1) - E(t_0) = W_o,$$

con $W_o = \int_{t_0}^{t_1} F_o\dot{x}\,dt$. En particular, si $W_o = 0$ en cada subintervalo del movimiento, E permanece constante.

Demostración. El teorema del trabajo da $K_f - K_i = W_U + W_o$. La fuerza representada por U realiza $W_U = U_i - U_f$. Sustituir y reunir los valores del mismo estado produce $(K_f + U_f) - (K_i + U_i) = W_o$. Aplicar esta identidad a cualquier subintervalo da la constancia cuando su segundo miembro es cero. De forma local, la misma igualdad se lee $dE/dt = F_o\dot{x}$.

La fricción viscosa $F_o = -b\dot{x}$, con $b > 0$, produce $dE/dt = -b\dot{x}^2 \leq 0$. La energía mecánica de esta descripción no aumenta, aunque el sistema ampliado requiera contabilizar la energía interna y sus intercambios. Decrecer tampoco significa que el movimiento deba terminar exactamente en el mínimo del potencial: esa conclusión necesita información adicional sobre las fuerzas y la evolución. Con rozamiento estático, por ejemplo, pueden existir estados de reposo alejados del mínimo.

Las guías fijas ideales y las tensiones que no hacen trabajo, bajo las condiciones ya justificadas, pueden quedar entre las otras fuerzas con trabajo nulo. Si cambian los apoyos, los parámetros o el régimen de contacto, se revisa el balance. La mera presencia de un resorte no autoriza a escribir conservación de energía mecánica ignorando un motor o una resistencia.

El cambio de un apoyo puede modificar el potencial incluso si la ley elástica conserva la misma constante. Para seguir esa modificación necesitamos mantener las dos dependencias de la función: la posición de la partícula y el tiempo del aparato que la rodea.

Proposición (potencial con dependencia temporal). Sea $U(x, t)$ una función con derivadas parciales primeras continuas, y supongamos que una partícula de masa constante satisface $m\ddot{x} = -\partial U/\partial x + F_o$ en un intervalo de movimiento suave. La función $E(t) = m\dot{x}^2/2 + U(x(t), t)$ cumple

$$\frac{dE}{dt} = F_o\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial t}(x(t), t).$$

Demostración. La regla de la cadena da $\dot{E} = m\dot{x}\ddot{x} + (\partial U/\partial x)\dot{x} + \partial U/\partial t$. Sustituir Newton cancela los términos que contienen la derivada espacial y deja la identidad. Integrarla proporciona el balance entre dos instantes.

La derivada parcial temporal mantiene fija la posición x mientras cambia el aparato. Si el extremo de un resorte está en una posición prescrita $X(t)$, con k constante, podemos elegir $U = k(x - X(t))^2/2$. Entonces $\partial U/\partial t = -k(x - X)\dot{X}$. Esa cantidad describe, con esta elección de energía elástica, la potencia que el movimiento del apoyo entrega al conjunto

formado por partícula y resorte ideal. El ejercicio 21 calcula un movimiento completo en el que esa entrega cambia de signo.

La referencia también debe quedar declarada. Reemplazar $U(x,t)$ por $U(x,t)+C(t)$ conserva la fuerza y suma $\dot{C}(t)$ a la derivada de la energía escrita. Una referencia temporal arbitraria cambia la contabilidad de esa función. Para interpretar la tasa como energía transferida por un agente utilizamos la reserva física especificada y una referencia fija, como la energía elástica nula en un resorte sin deformación. El ejercicio 20 estudia otra modificación física: una rigidez que cambia con el tiempo.

Leer una línea de energía sin confundirla con una trayectoria

Cuando E es constante,

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = E - U(x).$$

La desigualdad $U(x) \le E$ es necesaria para una posición visitada. En un punto donde $U(x) < E$, la rapidez es $\sqrt{2(E-U(x))/m}$. La ecuación admite ambos signos de velocidad: el sentido inicial y los cambios de tramo seleccionan cuál corresponde al movimiento. Una línea de energía no reemplaza el estado inicial completo.

Si un intervalo con $U > E$ separa dos regiones permitidas, la partícula clásica de este modelo no puede atravesarlo. La continuidad de la posición la obligaría a visitar puntos con energía cinética negativa. Aun cuando no haya un intervalo prohibido, puede existir un equilibrio que se alcanza sólo como límite para tiempo infinito.

Consideremos el potencial de dos pozos

$$U(x) = U_b\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1\right]^2, \qquad U_b = 4\,\mathrm{J}, \quad a = 1\,\mathrm{m},$$

para una partícula de dos kilogramos. Es una interacción idealizada definida por esta función; no suponemos que la curva sea la forma de una pista. Los mínimos están en $x = \pm a$, donde $U = 0$, y entre ellos aparece una barrera en $x = 0$, donde $U = U_b$.

Con $E = 1\,\mathrm{J}$, una partícula que comienza en el pozo derecho queda entre $a/\sqrt{2}$ y $a\sqrt{3/2}$. Hay otra región permitida a la izquierda, pero el intervalo alrededor del origen está prohibido y la separa de ella. Con $E = 5\,\mathrm{J}$, en cambio, la energía cinética en el origen vale un joule. Una partícula que se dirige hacia la barrera desde el pozo derecho puede cruzarla con rapidez de un metro por segundo.

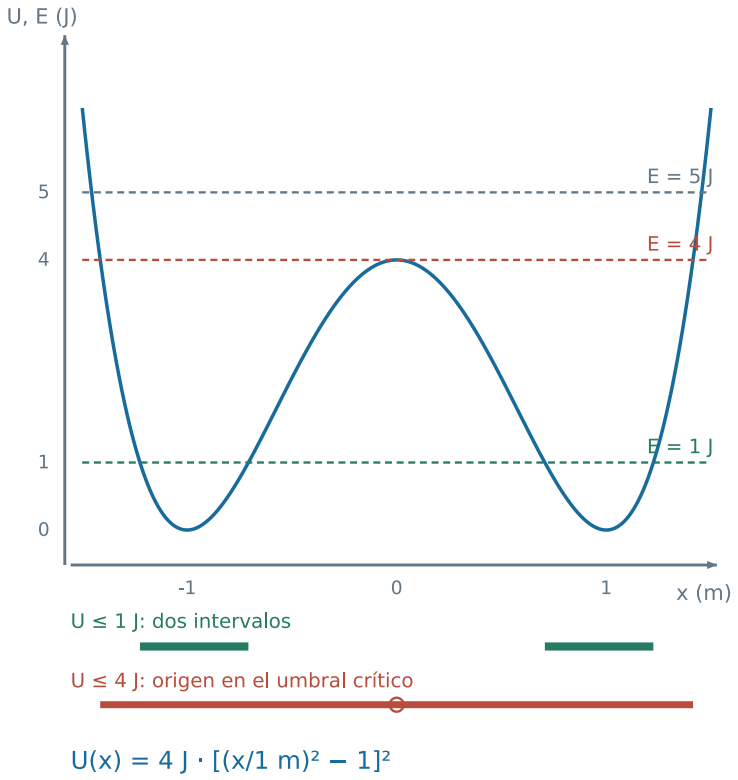


Figura 8.3. A energía de un joule hay dos intervalos permitidos separados. A cinco joules el origen se atraviesa con rapidez positiva. La línea de cuatro joules toca el máximo: requiere examinar el tiempo de aproximación antes de afirmar que hay cruce.

En el caso límite $E = U_b$, escribir $\xi = x/a$ da

$$E - U(x) = U_b\,\xi^2(2 - \xi^2).$$

Para aproximarse al origen desde la derecha, el tiempo contiene la integral

$$\sqrt{\frac{m}{2U_b}}\,a\int_{\xi}^{\xi_0}\frac{d\eta}{\eta\sqrt{2-\eta^2}}, \qquad 0 < \xi < \xi_0 < \sqrt{2}.$$

Cerca de cero, el factor $\sqrt{2-\eta^2}$ tiende a $\sqrt{2}$, por lo que el integrando crece como $1/(\sqrt{2}\eta)$. La integral diverge logarítmicamente cuando $\xi \to 0^+$. La partícula se acerca al equilibrio superior sin alcanzarlo en tiempo finito. El punto satisface $U = E$, pero no es una detención ordinaria seguida de un regreso o un cruce en un instante finito.

En una detención ordinaria con $U(x_t) = E$ y $U'(x_t) \neq 0$, la diferencia $E - U$ tiene un cero simple en el lado permitido. La rapidez se anula como la raíz cuadrada de la distancia al extremo y la integral de tiempo converge localmente. La fuerza no nula indica el sentido de la continuación. Esta es la situación de las detenciones del carro inicial, en contraste con la aproximación al máximo del doble pozo.

Qué se perturba cuando se habla de estabilidad

En un sistema sin otras fuerzas tangenciales, una posición de equilibrio satisface $U'(x_e) = 0$. El estado de equilibrio incluye además $\dot{x} = 0$. Pasar por x_e con velocidad distinta de cero no es permanecer en equilibrio, como mostró el carro en un metro de extensión.

Definición. El equilibrio $(x_e, 0)$ es *estable* si, para cualesquiera tolerancias positivas ε_x de posición y ε_v de velocidad, existen tolerancias iniciales positivas δ_x, δ_v tales que todos los movimientos con

$$|x(0) - x_e| < \delta_x, \qquad |\dot{x}(0)| < \delta_v$$

satisfacen $|x(t) - x_e| < \varepsilon_x$ y $|\dot{x}(t)| < \varepsilon_v$ para todo tiempo futuro, con soluciones definidas durante ese futuro. El equilibrio es *inestable* si existe una tolerancia fija de posición o de velocidad para la cual datos iniciales arbitrariamente próximos al equilibrio producen una trayectoria que alcanza o supera esa tolerancia en algún tiempo futuro.

Las tolerancias de posición y velocidad tienen unidades distintas; no las sumamos sin introducir una escala de comparación. La definición exige elegir los datos iniciales una vez para controlar todos los tiempos posteriores. No basta demostrar que la trayectoria permanece cerca durante un tiempo breve.

Para los criterios siguientes suponemos que U es dos veces continuamente diferenciable cerca del equilibrio, que no hay otras fuerzas tangenciales y que las soluciones de Newton existen, son únicas y pueden continuarse mientras posición y velocidad permanezcan en una región compacta del dominio regular. Esta propiedad usual para fuerzas continuamente diferenciables fija el marco de los argumentos; no desarrollaremos aquí una teoría general de existencia de ecuaciones diferenciales.

Teorema del mínimo estricto. Bajo esas hipótesis, si U tiene un mínimo local estricto en x_e, el equilibrio $(x_e, 0)$ es estable.

Demostración. Un mínimo estricto significa que $U(x) > U(x_e)$ para todo $x \neq x_e$ suficientemente próximo. Dadas las dos tolerancias de la definición, elegimos $r < \varepsilon_x$ tan pequeño que el intervalo cerrado $[x_e - r, x_e + r]$ quede dentro de esa región. La diferencia de potencial en cada uno de sus dos extremos es positiva. Llamemos B a la menor de esas diferencias.

Elegimos un incremento de energía $h > 0$ menor que B y que $m\varepsilon_v^2/2$. Para construir las tolerancias iniciales, repartimos ese margen entre las dos contribuciones a la energía. Por continuidad de U, existe $0 < \delta_x < r$ tal que $|x(0) - x_e| < \delta_x$ implica $0 \le U(x(0)) - U(x_e) < h/2$. Elegimos además $\delta_v = \sqrt{h/m}$: si $|\dot{x}(0)| < \delta_v$, entonces $m\dot{x}(0)^2/2 < h/2$. Al sumar, obtenemos $E(0) - U(x_e) < h$ para todos esos datos iniciales. La energía se conserva. Si la posición alcanzara uno de sus extremos, tendría que cumplir $E \ge U(x_e) + B$, contradiciendo la elección de h. Por continuidad del movimiento no puede salir sin alcanzar antes un extremo, de modo que $|x(t) - x_e| < r < \varepsilon_x$.

Dentro del intervalo, $U(x) \ge U(x_e)$; por tanto, $m\dot{x}^2/2 = E - U(x) \le E - U(x_e) < h < m\varepsilon_v^2/2$. También la velocidad permanece dentro de su tolerancia. Posición y velocidad quedan acotadas en una región compacta regular, lo que permite continuar la solución según la hipótesis declarada. Esas dos cotas prueban la estabilidad para todo tiempo futuro.

El argumento encierra la trayectoria mediante barreras de energía. No demuestra que termine en el equilibrio. Un resorte ideal, después de una pequeña perturbación, puede continuar oscilando indefinidamente sin alejarse mucho y sin asentarse. La aproximación al reposo requiere otra pregunta y otras hipótesis.

Podemos expresar las dos tolerancias en un estado con coordenadas adimensionales: elegimos una longitud de referencia $a > 0$ y una rapidez de referencia $b > 0$, y escribimos $z = ((x - x_e)/a, \dot{x}/b)$. Una cota de la norma de z controla posición y velocidad, y sendas cotas de ambas componentes controlan esa norma. Esta equivalencia permitirá conservar la misma definición cuando el capítulo 19 compare componentes de velocidad angular y el 26

estudie estados de varias variables. En cada caso habrá que indicar cuáles son las variables cuya proximidad se desea controlar.

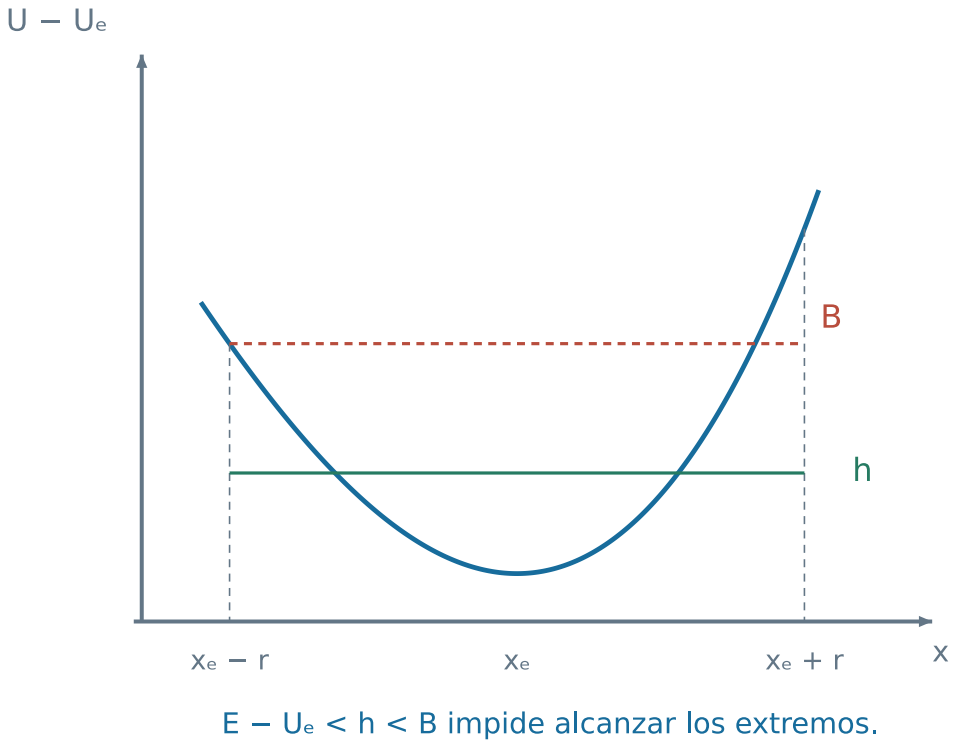


Figura 8.4. La prueba utiliza el menor de los incrementos de potencial en los dos extremos de un intervalo. La condición de energía también controla la velocidad. El dibujo ilustra la barrera del argumento, no supone que todo potencial sea parabólico.

La segunda derivada y los casos que deja abiertos

Proposición. Si $U'(x_e) = 0$ y U es dos veces continuamente diferenciable, entonces $U''(x_e) > 0$ implica estabilidad y $U''(x_e) < 0$ implica inestabilidad, bajo las hipótesis dinámicas anteriores. La igualdad $U''(x_e) = 0$ no decide por sí sola.

Demostración. Si $U''(x_e) > 0$, la continuidad conserva su signo positivo en un intervalo suficientemente pequeño. Por ello U' crece desde cero: es negativa a la izquierda de x_e y positiva a la derecha. Integrar esos signos muestra que U tiene un mínimo estricto en x_e. Se aplica el teorema anterior.

Si $U''(x_e) < 0$, podemos elegir una constante $k > 0$, con unidades de fuerza por longitud, y un intervalo $|q| \le r$, donde $q = x - x_e$, tales que $U''(x_e + q) \le -k$. Para $0 < q \le r$, integrar desde cero da $-U'(x_e + q) \ge kq$. Preparemos $q(0) = q_0 > 0$ arbitrariamente pequeño y velocidad inicial cero. Mientras permanezca en ese lado del intervalo, la aceleración es positiva, la posición crece y

$$\ddot{q} \ge \frac{k q_0}{m}, \qquad q(t) \ge q_0 + \frac{k q_0}{2m} t^2.$$

Esta cota obliga a llegar a r en un tiempo finito o a haber salido antes. Por pequeños que sean los datos iniciales, hay perturbaciones que abandonan una misma vecindad fijada del equilibrio. Esto niega la estabilidad. Finalmente, los potenciales $+\beta q^4$ y $-\beta q^4$, con $\beta > 0$,

tienen ambos segunda derivada nula en cero, pero el primero tiene mínimo estricto y el segundo empuja hacia fuera cualquier desplazamiento no nulo. Sus comportamientos distintos muestran que la igualdad no decide.

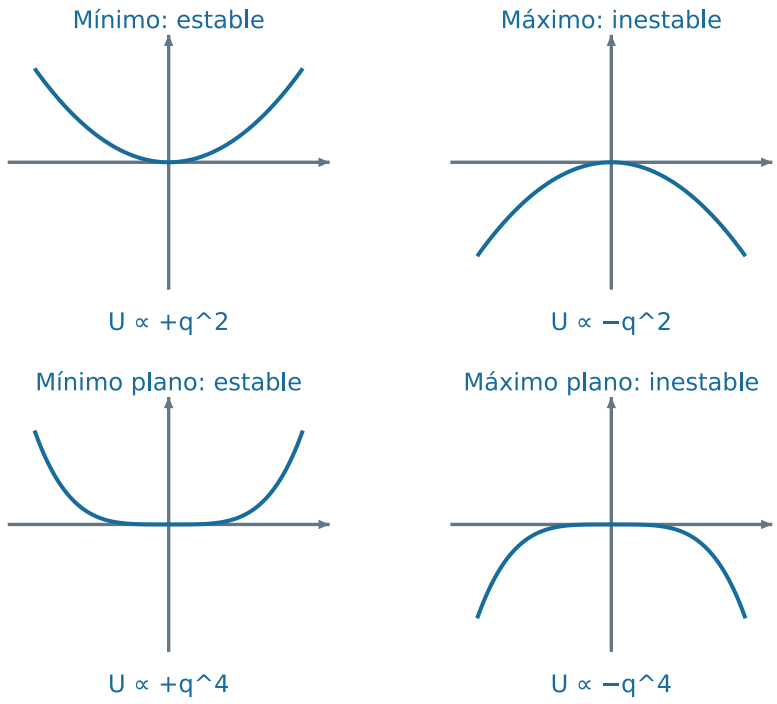


Figura 8.5. Las curvas representan energía frente a posición. El mínimo cuártico tiene equilibrio estable aunque su segunda derivada sea cero. Los ejemplos se comparan con escalas normalizadas y no representan la misma ley de fuerza.

En los textos elementales suele llamarse *equilibrio neutro* a una región de potencial constante: trasladar una partícula y volver a dejarla en reposo produce otro reposo. Conviene distinguir esa clasificación estática de la definición anterior. Con U constante, una velocidad inicial no nula, por pequeña que sea, produce $x(t) = x(0) + v_0 t$. En una recta libre acaba por salir de cualquier vecindad acotada de una posición individual. Por tanto, ese estado individual no es estable frente a todas las perturbaciones de posición y velocidad. Al hablar de estabilidad debemos mantener explícitas las perturbaciones que admitimos.

La energía también deja de ser un criterio completo si agregamos contactos o fricción. Un resorte que tira de un bloque puede quedar equilibrado por rozamiento estático en varias posiciones. Se resuelve entonces la admisibilidad de las fuerzas, no sólo $U' = 0$. Los potenciales organizan una parte de la dinámica; las restricciones y leyes del contacto siguen determinando qué estados pertenecen al modelo.

Ejercicios

Se usa $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$. Salvo indicación contraria, las partículas tienen masa constante, se mueven sobre una recta sin rozamiento y sólo reciben la fuerza $F = -U'$. Las funciones de potencial no dependen del tiempo. Un cambio de referencia se aplica a U y a E conjuntamente. Los ejemplos polinómicos se consideran modelos ideales dentro de las regiones utilizadas.

1. Cambiar el estado inicial del carro

En el carro inicial, prepare $x(0) = 1\,\mathrm{m}$ y $v(0) = +3\,\mathrm{m/s}$. Calcule la energía con la referencia $U(0) = 0$, los dos extremos de posición y la rapidez al cruzar el mínimo. Compruebe el intervalo de validez declarado para el resorte.

2. Una fuerza con potencial cuártico

Una partícula recibe $F(x) = -(4\,\mathrm{N/m^3})x^3$. Construya un potencial con $U(0) = 0$ y calcule el trabajo de la fuerza entre uno y dos metros. Si parte de un metro hacia la derecha con cinco joules de energía cinética, determine si puede llegar a dos metros y localice su primera detención futura.

3. Subir bajo gravedad uniforme

Una partícula de dos kilogramos se lanza verticalmente hacia arriba con rapidez de ocho metros por segundo desde $y = 2\,\mathrm{m}$. Sólo actúa el peso. Use $U = mgy$ para calcular su rapidez al pasar por $y = 5\,\mathrm{m}$ durante la subida y la altura máxima. Repita la interpretación usando como cero del potencial el punto de lanzamiento.

4. La mayor extensión no es el equilibrio

Una masa de dos kilogramos cuelga de un resorte vertical de $k = 100\,\mathrm{N/m}$ cuyo extremo superior está fijo. Se libera del reposo cuando el resorte no está deformado. Tome y hacia abajo desde esa posición y suponga válida la ley lineal hasta $y = 0{,}50\,\mathrm{m}$. Calcule el potencial total, la extensión de equilibrio, la primera extensión máxima y la rapidez en el equilibrio.

5. Dos intervalos permitidos

En el doble pozo del texto, una partícula de dos kilogramos está en $x = a$ con velocidad hacia la derecha de un metro por segundo. Calcule la energía, todos los intervalos con $U \le E$ y los extremos del movimiento que parte de ese estado. ¿Puede visitar un punto del intervalo permitido izquierdo?

6. Cruzar con energía superior a la barrera

En el mismo potencial, una partícula tiene $E = 5\,\mathrm{J}$ y cruza $x = a$ hacia la izquierda. Calcule su rapidez allí, su rapidez en el origen y los extremos exteriores permitidos. Explique por qué el origen se cruza en un tiempo finito.

7. Llegar al máximo con la energía justa

En el doble pozo, prepare $x = a$ y velocidad hacia la izquierda de dos metros por segundo. Determine E y pruebe que el tiempo para llegar al origen es infinito. ¿Hay contradicción entre esa conclusión y la desigualdad $U(0) \le E$?

8. Una detención en tiempo finito

Una partícula de dos kilogramos entra en $x = 0$ con velocidad de tres metros por segundo y potencial $U(x) = (3\,\mathrm{N})x$. Calcule la posición y el tiempo de la primera detención. Compruebe la convergencia de la integral temporal y determine hacia dónde continúa el movimiento.

9. Dos sentidos en la misma línea de energía

Para $U(x) = (4\,\mathrm{N/m})x^2$, una partícula de dos kilogramos tiene $E = 4\,\mathrm{J}$ y se encuentra en $x = 0{,}50\,\mathrm{m}$. Halle las dos velocidades posibles, el equilibrio y los extremos permitidos. Determine cuál extremo visita primero en cada caso. ¿Qué dato falta si sólo conocemos posición y energía?

10. Una cota concreta de estabilidad

Alrededor de un equilibrio escriba $q = x - x_e$ y $U - U(x_e) = kq^2/2$, con $m = 2\,\mathrm{kg}$ y $k = 8\,\mathrm{N/m}$. Se preparan $|q(0)| \le 0{,}05\,\mathrm{m}$ y $|v(0)| \le 0{,}10\,\mathrm{m/s}$. Obtenga cotas válidas para todo tiempo de $|q|$ y $|v|$. ¿Garantizan $|q| < 0{,}10\,\mathrm{m}$ y $|v| < 0{,}30\,\mathrm{m/s}$?

11. Salir de la vecindad de un máximo

Considere $U(q) = -(4\,\mathrm{N/m})q^2$ y $m = 2\,\mathrm{kg}$. Prepare $q(0) = q_0 > 0$ y $v(0) = 0$. Sin resolver la ecuación diferencial de forma explícita, pruebe que abandona $0 \le q < r$ para cualquier $r > q_0$. Para $q_0 = 0{,}001\,\mathrm{m}$ y $r = 0{,}10\,\mathrm{m}$, dé una cota superior del tiempo de llegada a r y explique la conclusión de inestabilidad.

12. Cuando la segunda derivada se anula

En una recta, clasifique el equilibrio en $q = 0$ para $U_1 = \beta q^4$, $U_2 = -\beta q^4$, $U_3 = \gamma q^3$ y $U_4 = 0$, con $\beta > 0$ en $\mathrm{J/m^4}$ y $\gamma > 0$ en $\mathrm{J/m^3}$. Distinga estabilidad frente a posición y velocidad de la denominación estática de equilibrio neutro. Justifique las inestabilidades mediante perturbaciones concretas.

13. Un potencial y una resistencia viscosa

Una partícula de dos kilogramos tiene $U(q) = kq^2/2$, con $k = 8\,\mathrm{N/m}$, y recibe además $F_o = -bv$, con $b = 1\,\mathrm{kg/s}$. En un instante $q = 0{,}50\,\mathrm{m}$ y $v = 2\,\mathrm{m/s}$. Calcule la energía mecánica, la aceleración y dE/dt. ¿Puede tratarse esa energía como una constante para calcular otro estado?

14. Preparar una partícula para cruzar la barrera

En el doble pozo, una preparación mediante un actuador comienza en reposo en $x = a$ y termina de nuevo allí con velocidad hacia la izquierda. El actuador realiza tres joules de trabajo en un caso y cinco en otro; no hay otras fuerzas adicionales. Después se desconecta. Determine si la partícula puede cruzar al pozo izquierdo y su rapidez en el origen cuando el cruce sea posible. Explique por qué se compara trabajo con una diferencia de potencial.

15. Una interacción atractiva que se debilita

Una partícula de un kilogramo se mueve sobre una semirrecta $r > 0$ con $U(r) = -A/r$, donde $A = 20\,\mathrm{J\,m}$. Parte de $r_0 = 2\,\mathrm{m}$ hacia fuera con rapidez de tres metros por segundo. Obtenga la fuerza, la energía y la distancia máxima. Halle el umbral de rapidez inicial para no tener un extremo exterior finito. No se incluye el movimiento angular ni un paso por $r = 0$.

16. Reposo fuera del mínimo por rozamiento

Un bloque de un kilogramo sobre una mesa horizontal está unido a un resorte de $k = 20\,\mathrm{N/m}$. La extensión es x, $\mu_s = 0{,}40$ y $\mu_k = 0{,}30$. Determine todas las extensiones que permiten reposo. Calcule la fricción requerida en $x = 0{,}10\,\mathrm{m}$. Si se libera en reposo desde $x = 0{,}30\,\mathrm{m}$, determine si puede quedarse allí y el sentido y aceleración inicial del deslizamiento que comienza.

17. Un umbral con incertidumbre

En una preparación del doble pozo, la energía es $E \in [3{,}90; 4{,}10]\,\mathrm{J}$ y la altura de la barrera respecto de la misma referencia es $U_b \in [3{,}95; 4{,}05]\,\mathrm{J}$. Trate las cotas como independientes. Acote $E - U_b$ y decida si se puede afirmar un cruce con rapidez positiva. ¿Qué desigualdad entre cotas permitiría garantizarlo para una partícula que se dirige hacia la barrera sin otros obstáculos?

18. Tres valores de potencial no fijan la fuerza

Se conoce $U(-a) = U(a) = 4\,\mathrm{J}$ y $U(0) = 0$, con $a = 1\,\mathrm{m}$. Compare las funciones

$$U_A(x) = 4\,\mathrm{J}\left(\frac{x}{a}\right)^2, \qquad U_B(x) = U_A(x) + (1\,\mathrm{J})\frac{x}{a}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1\right].$$

Compruebe los tres valores y calcule la fuerza de cada modelo en el origen. ¿Permiten esas tres mediciones demostrar que el origen es un equilibrio?

19. Reconocer un potencial en el plano

Sean $\mathbf{F}_A = (\kappa y, \kappa x)$ y $\mathbf{F}_B = (\kappa y, 0)$, con $\kappa = 2\,\mathrm{N/m}$. Compruebe que $U_A = -\kappa x y$ reproduce la primera fuerza. Calcule los trabajos de ambas fuerzas de $(0,0)$ a $(2\,\mathrm{m}, 1\,\mathrm{m})$ por los dos recorridos rectangulares del capítulo 7. Para la segunda, obtenga el trabajo sobre el rectángulo cerrado recorrido primero hacia la derecha, luego arriba, izquierda y abajo, y decida si puede tener un potencial de posición en todo ese dominio.

20. El parámetro del potencial cambia con el tiempo

Una partícula de masa constante satisface $m\ddot{x} = -k(t)x$. Se elige $U(x,t) = k(t)x^2/2$, con k diferenciable y positivo. Derive $d(K+U)/dt$. En un instante con $x = 1\,\mathrm{m}$, $v = 0$ y $\dot{k} = 2\,\mathrm{N/(m\,s)}$, calcule esa tasa de cambio. Explique por qué la conservación anterior no se aplica pese a que la fuerza es el negativo de una derivada espacial del potencial en cada instante.

21. Un apoyo que entrega y recupera energía

Un carro de masa $m = 1\,\mathrm{kg}$ se mueve sobre una guía horizontal lisa. Un resorte ideal de constante $k = 4\,\mathrm{N/m}$ conecta el carro con un apoyo cuyo movimiento se prescribe desde fuera. La coordenada $X(t)$ representa la posición que tendría el carro con el resorte sin deformar; así, la extensión con signo es $x - X$ y la fuerza sobre el carro es $-k(x - X)$. Desde $t = 0$ se impone $X(t) = ut$, con $u = 0{,}20\,\mathrm{m/s}$, y el carro parte de $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. La fuerza es finita al conectar el movimiento; la preparación no comunica un impulso al carro. Suponga válida la ley lineal para $|x - X| < 0{,}15\,\mathrm{m}$.

Obtenga la extensión y el movimiento del carro. Calcule la energía $E = K + k(x-X)^2/2$ y la potencia entregada por el apoyo. Compare los estados en $t = \pi/2\,\mathrm{s}$ y $t = \pi\,\mathrm{s}$, e identifique los intervalos de entrega y recuperación de energía durante ese primer ciclo. Compruebe el régimen del resorte y explique cómo puede ser nulo el trabajo neto del ciclo aunque haya transferencia intermedia.

Soluciones

1. Cambiar el estado inicial del carro

En el mínimo $U(1\,\mathrm{m}) = -4\,\mathrm{J}$. La energía cinética inicial es nueve joules, de modo que $E = 5\,\mathrm{J}$. Completar el cuadrado da

$$U(x) = (4\,\mathrm{N/m})(x - 1\,\mathrm{m})^2 - 4\,\mathrm{J}.$$

Las detenciones cumplen $(x - 1\,\mathrm{m})^2 = 9\,\mathrm{J}/(4\,\mathrm{N/m}) = (1{,}5\,\mathrm{m})^2$. Los extremos son $-0{,}50\,\mathrm{m}$ y $2{,}50\,\mathrm{m}$, ambos dentro del intervalo de validez del resorte. La velocidad inicial positiva lleva primero al extremo derecho. Al cruzar de nuevo el mínimo, la rapidez vuelve a ser tres metros por segundo, porque allí $K = E - U = 9\,\mathrm{J}$. Puede cruzarlo en ambos sentidos; su velocidad cambia de signo entre cruces.

2. Una fuerza con potencial cuártico

La integral con signo opuesto da $U(x) = (1\,\mathrm{J/m^4})x^4$ con la referencia pedida. Entre uno y dos metros, el trabajo es $U(1) - U(2) = 1\,\mathrm{J} - 16\,\mathrm{J} = -15\,\mathrm{J}$.

La preparación tiene $E = 5\,\mathrm{J} + 1\,\mathrm{J} = 6\,\mathrm{J}$. En dos metros necesitaría $K = 6 - 16 = -10\,\mathrm{J}$, imposible. En el sentido inicial, el primer cero de $E - U$ aparece en $x = 6^{1/4}\,\mathrm{m} \approx 1{,}565\,\mathrm{m}$. Allí la fuerza es negativa y no nula, por lo que se inicia un regreso. Este potencial tiene mínimo estricto en el origen pese a que su segunda derivada se anula allí.

3. Subir bajo gravedad uniforme

Al partir, $K_0 = 64\,\mathrm{J}$ y $U_0 = (2\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2})(2\,\mathrm{m}) = 40\,\mathrm{J}$. La energía es $E = 104\,\mathrm{J}$. En cinco metros, $U = 100\,\mathrm{J}$, por lo que $K = 4\,\mathrm{J}$ y la rapidez es dos metros por segundo. Durante el primer paso por esa altura la velocidad sigue apuntando hacia arriba.

El máximo satisface $mgy_{\mathrm{máx}} = 104\,\mathrm{J}$, de donde $y_{\mathrm{máx}} = 5{,}20\,\mathrm{m}$. Si se cambia a $\widetilde{U} = mg(y - 2\,\mathrm{m})$, se resta cuarenta joules tanto a U como a E. La nueva energía es sesenta y cuatro joules; la subida máxima respecto del lanzamiento es 3,20 m. Las alturas y rapideces físicas no cambian.

4. La mayor extensión no es el equilibrio

Como y crece hacia abajo, la gravedad tiene potencial $-mgy$. Con $U(0) = 0$,

$$U(y) = \frac{1}{2}ky^2 - mgy = (50\,\mathrm{N/m})y^2 - (20\,\mathrm{N})y.$$

La fuerza se anula en $y_e = mg/k = 0{,}20\,\mathrm{m}$. La liberación desde el reposo no da $E = U(y_e)$, sino $E = U(0) = 0$. El segundo cero de U está en $y_t = 2mg/k = 0{,}40\,\mathrm{m}$, la primera extensión máxima. Ambos puntos están dentro del régimen lineal declarado.

En el equilibrio, $U(y_e) = -2\,\mathrm{J}$, así que $K = 2\,\mathrm{J}$ y la rapidez es $\sqrt{2}\,\mathrm{m/s}$. Igualar $mg = ky$ identifica el equilibrio de fuerzas, no una detención de esta historia. En la extensión máxima, el resorte tira hacia arriba con cuarenta newtons mientras el peso tira hacia abajo con veinte; esa fuerza neta inicia el retorno.

5. Dos intervalos permitidos

En $x = a$, $U = 0$ y $K = (2\,\mathrm{kg})(1\,\mathrm{m/s})^2/2 = 1\,\mathrm{J}$. Por tanto, $E = 1\,\mathrm{J}$. La desigualdad $U \le E$ equivale a

$$\left| \left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1 \right| \le \frac{1}{2},$$

es decir, $a/\sqrt{2} \le |x| \le a\sqrt{3/2}$. Existen los dos intervalos cerrados

$$[-a\sqrt{3/2}, -a/\sqrt{2}] \;\cup\; [a/\sqrt{2}, a\sqrt{3/2}].$$

La preparación está en el derecho. Visita primero su extremo exterior por llevar velocidad positiva y permanece entre esos dos extremos. Sus ceros de energía cinética tienen fuerza no nula y son retornos ordinarios. No alcanza el intervalo izquierdo: tendría que atravesar el intervalo central prohibido. La palabra «permitido» por la desigualdad no significa accesible desde cualquier estado con esa energía.

6. Cruzar con energía superior a la barrera

En el mínimo derecho, $K = 5\,\mathrm{J}$, por lo que la rapidez es $\sqrt{5}\,\mathrm{m/s}$ y la velocidad apunta a la izquierda. En el origen, $K = 5 - 4 = 1\,\mathrm{J}$ y la rapidez es un metro por segundo, todavía hacia la izquierda en el primer cruce.

Los extremos cumplen $[(x/a)^2 - 1]^2 = 5/4$. La solución con $(x/a)^2 = 1 - \sqrt{5}/2$ es negativa y se descarta; los extremos reales son

$$x_\pm = \pm a\sqrt{1 + \frac{\sqrt{5}}{2}}.$$

No hay barrera intermedia con $U > E$. Además, la rapidez es continua y positiva alrededor del origen: no aparece una divergencia de $\int dx/|v|$ allí. Desde a hasta cero, la energía cinética es al menos un joule, de modo que la rapidez es al menos un metro por segundo y el tiempo de ese tramo es finito.

7. Llegar al máximo con la energía justa

La preparación da $E = (2\,\mathrm{kg})(2\,\mathrm{m/s})^2/2 = 4\,\mathrm{J} = U_b$. En el lado derecho, con $\xi = x/a$, la rapidez vale $\sqrt{2U_b/m}\,\xi\sqrt{2 - \xi^2}$. El sentido inicial selecciona velocidad negativa.

El tiempo hasta $\xi > 0$ desde $\xi_0 = 1$ es la integral del texto. Para $0 < \eta \le 1$ se tiene $\sqrt{2 - \eta^2} \le \sqrt{2}$, así que su integrando es al menos $1/(\sqrt{2}\eta)$. La integral de esta cota diverge al aproximarse a cero. Por tanto, ningún tiempo finito lleva al origen.

La desigualdad $U(0) \le E$ es necesaria, pero no afirma un tiempo de llegada. El estado $(0, 0)$ es por sí mismo otro movimiento posible: el equilibrio superior exacto. La historia preparada en $x = a$ se aproxima a ese estado sin coincidir con él en tiempo finito.

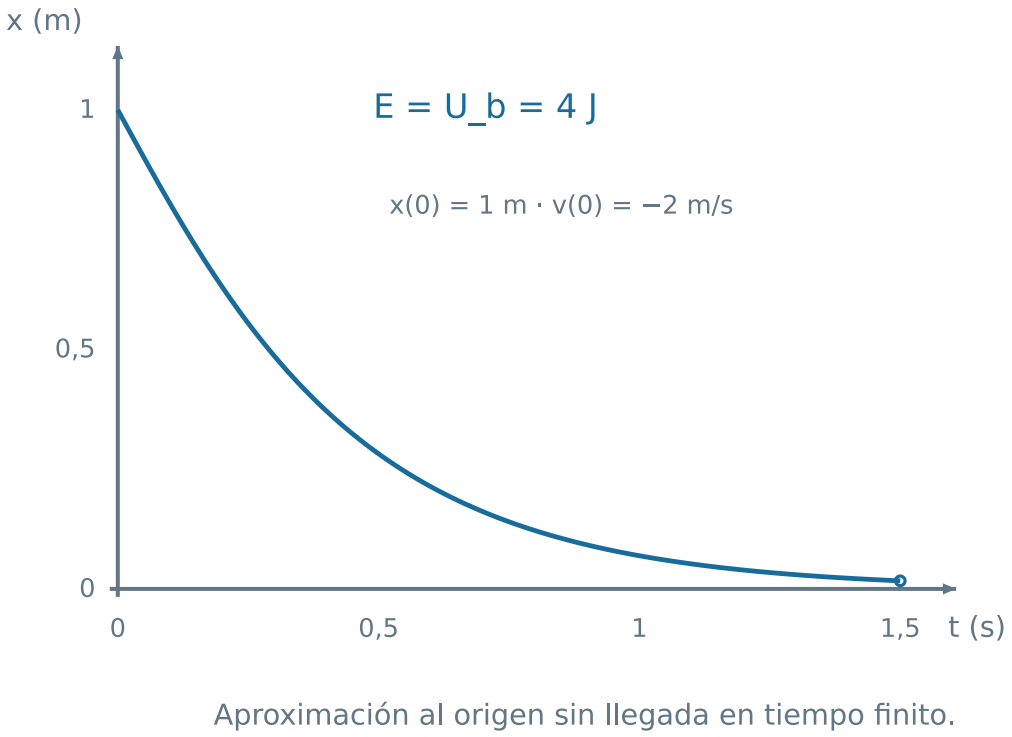


Figura 8.6. Aproximación crítica para la masa y el doble pozo del problema. El eje horizontal es tiempo, a diferencia de los diagramas de energía anteriores. El extremo dibujado de la curva todavía tiene posición positiva; el recorte de la gráfica no representa un instante de llegada al origen.

8. Una detención en tiempo finito

La energía inicial es nueve joules. Como $U = 3\,\mathrm{N}\,x$, el primer cero de $K = 9\,\mathrm{J} - (3\,\mathrm{N})x$ ocurre en $x_t = 3\,\mathrm{m}$. La fuerza constante es $-3\,\mathrm{N}$ y la aceleración $-1{,}5\,\mathrm{m/s^2}$. Por Newton, el reposo se alcanza en dos segundos.

La comprobación energética utiliza

$$\Delta t = \int_0^{3\,\mathrm{m}} \frac{dx}{\sqrt{9\,\mathrm{m^2/s^2} - (3\,\mathrm{m/s^2})x}} = 2\,\mathrm{s}.$$

El integrando tiene una singularidad de tipo $(x_t - x)^{-1/2}$, cuya integral converge. En el extremo la fuerza permanece hacia la izquierda, así que comienza el regreso. Una rapidez nula no implica fuerza nula; en este ejemplo tampoco significa un estado de equilibrio.

9. Dos sentidos en la misma línea de energía

En medio metro, $U = 1\,\mathrm{J}$ y $K = 3\,\mathrm{J}$. Las dos velocidades son $v = \pm\sqrt{3}\,\mathrm{m/s}$. El equilibrio es $x = 0$ y los extremos de energía son $x = \pm 1\,\mathrm{m}$.

Con velocidad positiva se visita primero el extremo derecho; con velocidad negativa, el izquierdo. No hay otros ceros interiores de K que puedan cambiar el sentido antes. La posición y la energía no distinguen las dos preparaciones: falta el signo de la velocidad. En el equilibrio podría además haber movimiento con rapidez máxima; «posición de equilibrio» identifica dónde puede existir reposo, no obliga a que todo paso por ella sea reposo.

10. Una cota concreta de estabilidad

El incremento de energía respecto del mínimo satisface

$$E - U(x_e) \le \frac{1}{2}(2\,\mathrm{kg})(0{,}10\,\mathrm{m/s})^2 + \frac{1}{2}(8\,\mathrm{N/m})(0{,}05\,\mathrm{m})^2 = 0{,}02\,\mathrm{J}.$$

Como cada término de $mv^2/2 + kq^2/2$ es no negativo, la conservación da $|q| \le \sqrt{2(0{,}02\,\mathrm{J})/k} = \sqrt{0{,}005}\,\mathrm{m} \approx 0{,}07071\,\mathrm{m}$ y $|v| \le \sqrt{2(0{,}02\,\mathrm{J})/m} = \sqrt{0{,}02}\,\mathrm{m/s} \approx 0{,}14142\,\mathrm{m/s}$ para todo tiempo. Son menores que las dos tolerancias pedidas.

Controlar sólo la posición inicial no habría bastado. Una velocidad inicial grande puede aportar una energía cinética grande incluso en $q = 0$ y producir una excursión muy extensa. La prueba del mínimo estricto necesita la cercanía del estado completo.

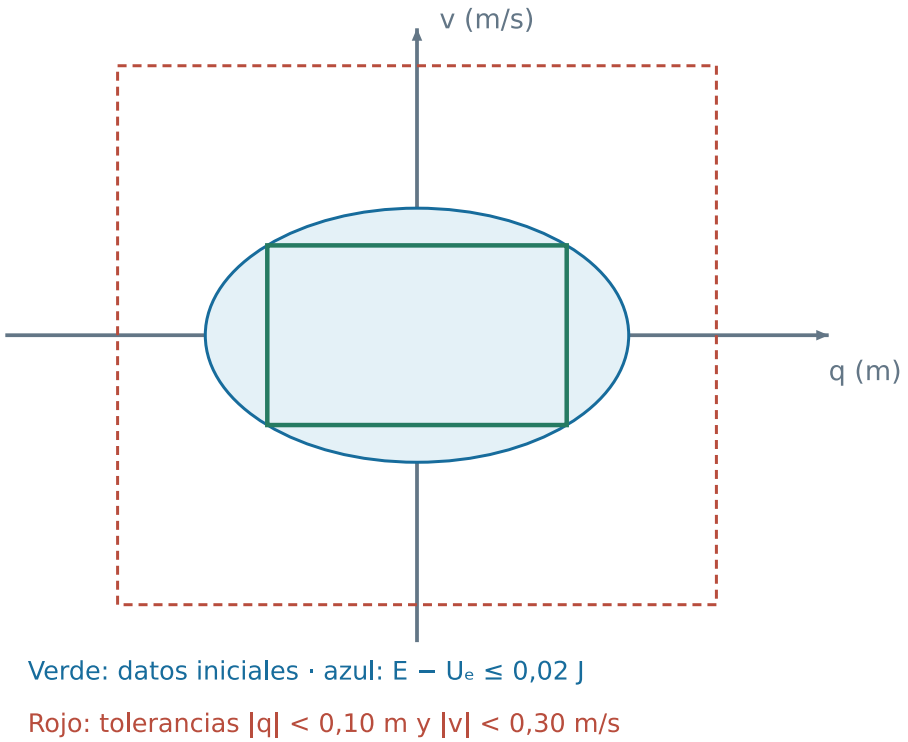


Figura 8.7. Cada punto del plano representa un estado (q, v). Las dos coordenadas tienen unidades y escalas distintas. La región de energía no mayor de 0,02 J encierra todas las preparaciones dadas y controla su evolución posterior; no se afirma que los movimientos recorran el borde de los rectángulos.

11. Salir de la vecindad de un máximo

La fuerza es $(8\,\mathrm{N/m})q$ y la ecuación da $\ddot{q} = (4\,\mathrm{s}^{-2})q$. Desde $q_0 > 0$ y reposo, la aceleración es positiva y q crece. Mientras permanezca antes de r,

$$q(t) \ge q_0 + (2\,\mathrm{s}^{-2})q_0 t^2.$$

Por tanto, el tiempo de llegada a r no puede superar

$$t_r \le \sqrt{\frac{r/q_0 - 1}{2\,\mathrm{s}^{-2}}}.$$

Para los datos, la cota es $\sqrt{49{,}5}\,\mathrm{s} \approx 7{,}036\,\mathrm{s}$. Es una cota, no el tiempo exacto. Al elegir q_0 cada vez menor la cota aumenta, pero para cada $q_0 > 0$ sigue siendo finita. Una misma vecindad se abandona mediante datos iniciales arbitrariamente próximos al equilibrio. La definición de estabilidad exige control para todo tiempo y por eso falla.

12. Cuando la segunda derivada se anula

En los cuatro modelos $U'(0) = 0$ y $U''(0) = 0$. Para U_1, el mínimo es estricto, por lo que el teorema garantiza estabilidad frente a posición y velocidad. La restauración es débil cerca del origen, pero la barrera energética basta para la conclusión.

Para U_2, prepare $q_0 > 0$ y reposo. La fuerza es $4\beta q^3 > 0$ y, mientras $q \geq q_0$, la aceleración es al menos $4\beta q_0^3/m$. La cota $q(t) \geq q_0 + (2\beta q_0^3/m)t^2$ obliga a salir de cualquier intervalo derecho fijo en tiempo finito. Como q_0 puede ser arbitrariamente pequeño, el equilibrio es inestable.

Para U_3, la fuerza $-3\gamma q^2$ apunta hacia la izquierda a ambos lados. Elija $q(0) = -q_0 < 0$ y reposo, con $q_0 > 0$. La partícula empieza a alejarse hacia la izquierda; mientras $q \leq -q_0$, su aceleración es como máximo $-3\gamma q_0^2/m$. De nuevo una cota cuadrática en el tiempo obliga a abandonar una vecindad izquierda fija. El equilibrio es inestable aunque no sea un máximo local.

Para U_4, una traslación con nueva velocidad inicial cero deja otro reposo: es el caso llamado neutro en la clasificación estática. Sin embargo, la preparación $q(0) = 0$, $v(0) = v_0 \neq 0$ produce $q = v_0 t$ y acaba por abandonar cualquier intervalo acotado, por pequeño que sea v_0. El estado individual es inestable con la definición dinámica del capítulo. El criterio de segunda derivada nula no identifica un comportamiento único.

13. Un potencial y una resistencia viscosa

La energía cinética vale cuatro joules y el potencial un joule: $E = 5\,\mathrm{J}$. La fuerza elástica es menos cuatro newtons y la resistencia menos dos, ambas hacia la izquierda. La aceleración es $(-6\,\mathrm{N})/(2\,\mathrm{kg}) = -3\,\mathrm{m/s^2}$.

El balance da $dE/dt = -bv^2 = -4\,\mathrm{W}$. Como comprobación, $dK/dt = mv\ddot{q} = -12\,\mathrm{W}$ y $dU/dt = kqv = +8\,\mathrm{W}$; su suma es menos cuatro watts. El potencial está creciendo en ese instante porque la partícula se aleja del mínimo, pero la energía mecánica total disminuye. No podemos conservar los cinco joules para otro estado sin contabilizar el trabajo posterior de la resistencia.

14. Preparar una partícula para cruzar la barrera

Al principio $K = 0$ y $U(a) = 0$, de modo que $E_i = 0$. El trabajo del actuador cambia la energía mecánica en tres o cinco joules. Al terminar otra vez en $x = a$, ese incremento está en la energía cinética, pues el potencial tiene el mismo valor inicial y final.

Con $E = 3\,\mathrm{J}$, la barrera de cuatro joules deja un intervalo central prohibido; no hay cruce. Con $E = 5\,\mathrm{J}$ y velocidad hacia la izquierda, el movimiento sí cruza el origen con $K = 1\,\mathrm{J}$ y rapidez de un metro por segundo. Se compara el trabajo con $U(0) - U(a)$, que no cambia si se añade una constante a todo el potencial. Compararlo con un valor absoluto de $U(0)$ sin declarar la referencia podría cambiar falsamente la conclusión.

15. Una interacción atractiva que se debilita

La derivada es $U' = A/r^2$, así que $F_r = -A/r^2$ apunta hacia la fuente. La energía inicial es $E = (1\,\mathrm{kg})(3\,\mathrm{m/s})^2/2 - 20\,\mathrm{J\,m}/(2\,\mathrm{m}) = -5{,}5\,\mathrm{J}$. Al salir, U aumenta y la rapidez disminuye. La detención cumple $-A/r_{\mathrm{máx}} = E$, de donde $r_{\mathrm{máx}} = 40/11\,\mathrm{m} \approx 3{,}636\,\mathrm{m}$.

Para no encontrar un extremo exterior finito se requiere $E \geq 0$, que en la preparación dada equivale a $v_0 \geq \sqrt{2A/(mr_0)} = \sqrt{20}\,\mathrm{m/s}$. En la igualdad la rapidez tiende a cero cuando r tiende a infinito, sin anularse a una distancia finita. Esto no afirma una llegada a infinito en

tiempo finito. Para $E > 0$, la rapidez tiene un límite positivo hacia fuera. Todo el argumento se limita al movimiento radial sobre $r > 0$.

16. Reposo fuera del mínimo por rozamiento

La normal es diez newtons y la fricción estática puede tener módulo hasta cuatro. Mantener reposo exige $f = kx$, de sentido contrario a la fuerza del resorte. Es admisible exactamente cuando $|kx| \le 4\,\mathrm{N}$, es decir, $|x| \le 0{,}20\,\mathrm{m}$.

En $x = 0{,}10\,\mathrm{m}$ se necesitan dos newtons hacia la derecha, admisibles. El bloque está en reposo aunque no esté en el mínimo del potencial elástico. En $x = 0{,}30\,\mathrm{m}$ harían falta seis newtons estáticos, imposibles. Empieza a deslizar hacia la izquierda; la fricción cinética pasa a tres newtons hacia la derecha. La fuerza neta inicial del régimen deslizante es $-6+3 = -3\,\mathrm{N}$ y su aceleración $-3\,\mathrm{m/s^2}$. La ecuación $U' = 0$ sola habría ignorado la interacción adicional que permite todo el intervalo de reposos.

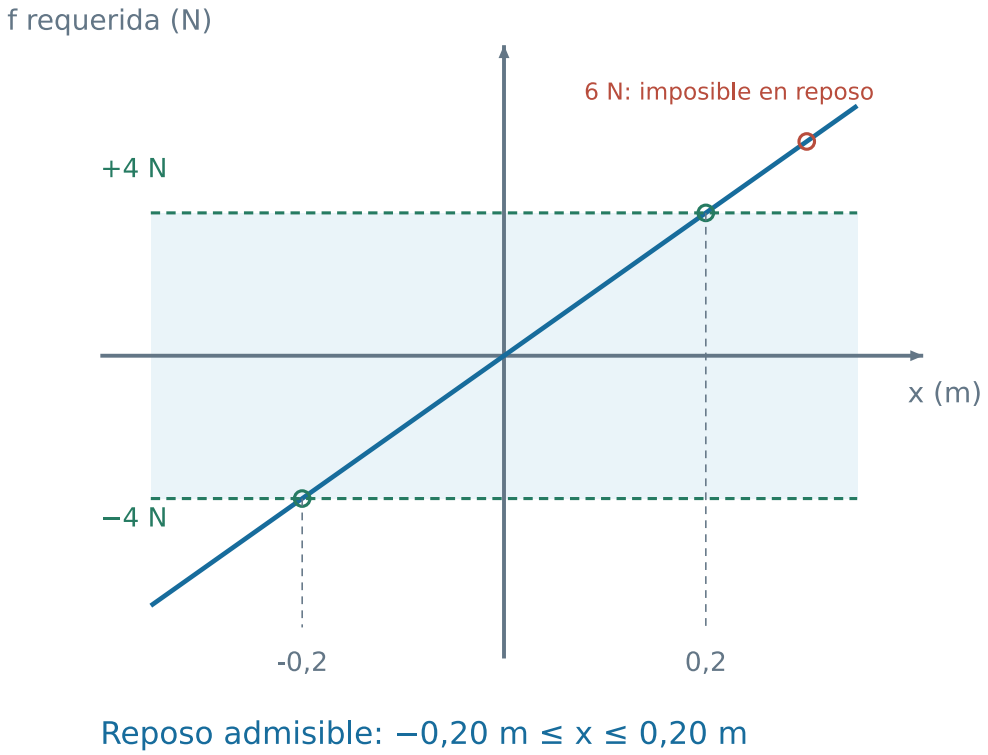


Figura 8.8. La banda horizontal corresponde a fuerzas entre menos y más cuatro newtons. Su intersección con $f_{\text{requerida}} = kx$ determina el intervalo de reposos. El modelo admite los extremos de la banda; superarlos obliga a revisar el régimen.

17. Un umbral con incertidumbre

Restar las cotas en los sentidos correspondientes da

$$E - U_b \in [3{,}90 - 4{,}05;\ 4{,}10 - 3{,}95]\,\mathrm{J} = [-0{,}15; 0{,}15]\,\mathrm{J}.$$

Los datos admiten energías por debajo, por encima y exactamente en el umbral. No permiten afirmar un cruce con rapidez positiva. Para garantizarlo con estas hipótesis se necesita $E_{\text{mín}} > U_{b,\text{máx}}$, además del sentido inicial hacia la barrera y de la ausencia de otros límites del recorrido. La igualdad entre las cotas no basta: la preparación crítica puede aproximarse al máximo sólo en tiempo infinito. Las cotas se refieren a una misma referencia de energía; un desplazamiento común de ese cero no cambia la comparación.

18. Tres valores de potencial no fijan la fuerza

El término añadido a U_A se anula en $x=-a,0,a$, de modo que ambos modelos reproducen los tres valores. Sus derivadas en cero son distintas. Para U_A, $U_A'(0)=0$ y $F_A(0)=0$. El término añadido tiene derivada $(1\,\mathrm{J})[3(x/a)^2-1]/a$, así que $U_B'(0)=-1\,\mathrm{J}/a$ y $F_B(0)=+1\,\mathrm{N}$.

Por tanto, las mediciones finitas indicadas no demuestran equilibrio en el origen. Permiten modelos que coinciden en esos puntos y tienen pendientes diferentes entre ellos. Para inferir la fuerza local harían falta más información sobre la función, un modelo de interpolación justificado o mediciones dinámicas. Elegir una parábola que ajuste los tres valores no la convierte en una predicción independiente de esos mismos datos.

19. Reconocer un potencial en el plano

Las derivadas de $U_A=-\kappa xy$ son $\partial_x U_A=-\kappa y$ y $\partial_y U_A=-\kappa x$, de modo que su negativo reproduce ambas componentes de $\mathbf{F}_A$. El trabajo de cero al punto final es $-\Delta U_A=\kappa(2\,\mathrm{m})(1\,\mathrm{m})=4\,\mathrm{J}$.

Por el recorrido horizontal y luego vertical, el primer tramo de $\mathbf{F}_A$ da cero porque $y=0$; el segundo tiene $F_y=\kappa(2\,\mathrm{m})=4\,\mathrm{N}$ y aporta cuatro joules. Por el orden contrario, el tramo vertical inicial da cero porque $x=0$ y el horizontal superior aporta también cuatro joules. La coincidencia aquí está justificada por el potencial explícito, no sólo por haber comprobado dos caminos.

Para $\mathbf{F}_B$, el recorrido horizontal inferior y luego vertical da cero; el vertical inicial y luego horizontal superior da cuatro joules. En el rectángulo cerrado indicado, sólo el tramo superior hacia la izquierda contribuye: $W=-4\,\mathrm{J}$. Si existiera un potencial en todo ese dominio, su diferencia entre el inicio y el final del recorrido cerrado sería cero, contradiciendo el trabajo calculado. Por tanto, no existe ese potencial global para la segunda fuerza.

20. El parámetro del potencial cambia con el tiempo

La regla del producto y la ecuación de Newton dan

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}k(t)x^2\right)=mv\dot v+k(t)xv+\frac{1}{2}\dot k(t)x^2=\frac{1}{2}\dot k(t)x^2.$$

Los dos primeros términos se cancelan, pero queda el cambio explícito del parámetro. Con los datos indicados la tasa es $1\,\mathrm{J/s}=1\,\mathrm{W}$. La potencia de la fuerza sobre la partícula es cero en ese instante porque $v=0$, mientras cambia el valor del potencial elegido.

El teorema de conservación suponía que U no dependía explícitamente del tiempo. Aquí un agente modifica el parámetro del modelo y esa hipótesis falla. La identidad obtenida corresponde a la función $U(x,t)$ especificada y obliga a contabilizar esa modificación al interpretar el sistema ampliado. Ser el negativo de una derivada espacial en cada instante no basta para conservar $K+U$ a lo largo de una evolución con parámetros variables.

21. Un apoyo que entrega y recupera energía

La fuerza depende de la separación respecto del apoyo, de modo que elegimos esa separación como incógnita: $q=x-X$. Como $\ddot X=0$ para $t>0$, Newton da $\ddot q+\omega^2 q=0$, con $\omega=\sqrt{k/m}=2\,\mathrm{s^{-1}}$. Sus datos son $q(0)=0$ y $\dot q(0)=-u$. La solución es

$$q(t)=-\frac{u}{\omega}\sin(\omega t),\qquad x(t)=ut-\frac{u}{\omega}\sin(\omega t),\qquad \dot x(t)=u[1-\cos(\omega t)].$$

Estas fórmulas se comprueban derivando: $m\ddot x=mu\omega\sin(\omega t)=-kq$, y en cero se recuperan posición y velocidad nulas. La extensión tiene módulo máximo $u/\omega=0{,}10\,\mathrm{m}$, dentro del intervalo lineal declarado. El movimiento ideal del apoyo está prescrito; la fuerza necesaria para producir su cambio inicial de velocidad pertenece a ese mecanismo externo.

Sustituir en las dos reservas de energía da

$$\begin{aligned}E(t)&=\frac{1}{2}mu^2[1-\cos(\omega t)]^2+\frac{1}{2}mu^2\sin^2(\omega t)\\&=mu^2[1-\cos(\omega t)].\end{aligned}$$

La potencia del apoyo se obtiene manteniendo fija x al derivar el potencial:

$$P_{\text{apoyo}} = -kq\dot{X} = mu^2\omega\sin(\omega t) = \frac{dE}{dt}.$$

En $t = \pi/2\,\text{s}$, la extensión vuelve a cero, el carro lleva velocidad $2u = 0{,}40\,\text{m/s}$ y $E = 2mu^2 = 0{,}08\,\text{J}$. Su posición es $x = \pi/10\,\text{m}$. En $t = \pi\,\text{s}$, la extensión y la velocidad del carro son cero y $E = 0$, aunque carro y apoyo han avanzado hasta $x = X = \pi/5\,\text{m}$.

Durante la primera mitad, $0 < t < \pi/2\,\text{s}$, la potencia es positiva; durante la segunda, $\pi/2\,\text{s} < t < \pi\,\text{s}$, es negativa. El agente entrega ocho centésimas de joule y después las recupera. La integral del ciclo vale cero porque las energías extremas coinciden. La identidad instantánea conserva la información sobre los intercambios interiores que esa comparación de extremos resume.

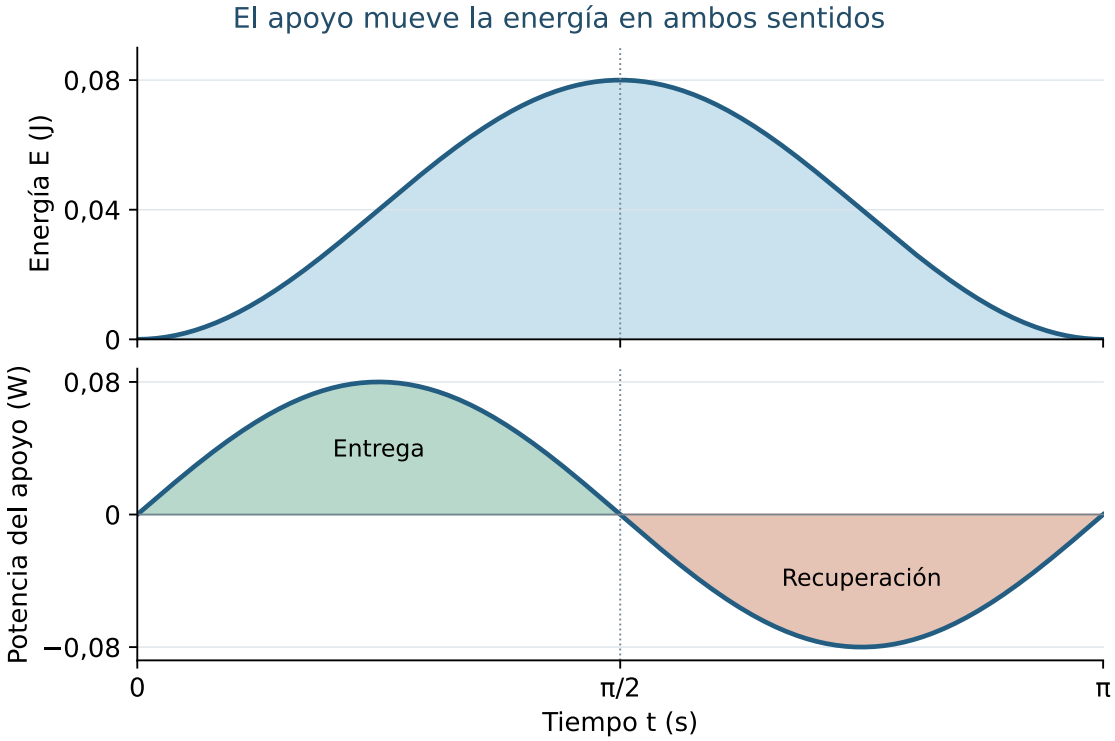


Figura 8.9. La energía corresponde al carro y al resorte ideal. La potencia positiva entrega energía a ese conjunto y la negativa la devuelve al mecanismo que mueve el apoyo. Las ordenadas tienen unidades distintas y comparten el mismo reloj. El área con signo de la potencia da el cambio de energía; las áreas de ambos medios ciclos se compensan.

Lecturas de apoyo

Sears y Zemansky, *Física universitaria*, volumen 1, Young y Freedman, 13.ª edición, §§7.4–7.5, pp. 225–229, permite cotejar la relación entre fuerza y pendiente del potencial y la lectura de diagramas de energía. Serway y Jewett, *Física para ciencias e ingeniería*, volumen 1, 10.ª edición española, §§7.8–7.9, pp. 171–174, desarrolla la relación fuerza–potencial y la clasificación elemental del equilibrio. La definición dinámica utilizada aquí precisa las perturbaciones admitidas y distingue el mínimo estricto de una región plana.

Spivak, *Physics for Mathematicians. Mechanics I*, capítulo 6, pp. 213–215, destaca el estado de reposo y las perturbaciones de posición y velocidad al discutir equilibrio y estabilidad. Nuestro tratamiento se limita a la recta y construye el argumento de barrera energética sin usar el formalismo general de restricciones ni criterios multidimensionales antes de introducirlos. Los desarrollos, datos y ejercicios son propios; el cotejo es selectivo y no una auditoría completa de las obras.

Capítulo 9

Impulso, colisiones y centro de masa

Un carro de dos kilogramos avanza a tres metros por segundo por un riel horizontal. Alcanza a otro carro de un kilogramo que está en reposo; sus enganches se traban y ambos continúan juntos. Conocer la fuerza que se ejercen durante el contacto exigiría describir la deformación de los enganches. Sin embargo, podemos averiguar su velocidad común sin reconstruir esa fuerza.

Tomaremos el laboratorio como marco inercial y el sentido inicial del primer carro como positivo. Representaremos cada carro por una partícula de masa constante. Los instantes de comparación estarán inmediatamente antes y después del choque; durante ese intervalo omitiremos el impulso horizontal del riel y del aire. El peso y la normal se compensan verticalmente. La hipótesis decisiva se refiere al sistema de los dos carros: las fuerzas de contacto son internas, y sus contribuciones a la variación del movimiento total se cancelan por la tercera ley de Newton.

Si llamamos $F(t)$ a la fuerza que el segundo carro ejerce sobre el primero, las ecuaciones horizontales son $m_1\dot{v}_1 = F$ y $m_2\dot{v}_2 = -F$. Sumarlas elimina precisamente la función desconocida:

$$\frac{d}{dt}(m_1 v_1 + m_2 v_2) = 0.$$

La combinación entre paréntesis conserva su valor. Antes del contacto vale $(2\,\mathrm{kg})(3\,\mathrm{m/s}) = 6\,\mathrm{kg\,m/s}$. Después, ambos carros tienen una misma velocidad V, y obtenemos

$$(2\,\mathrm{kg} + 1\,\mathrm{kg})V = 6\,\mathrm{kg\,m/s}, \qquad V = 2\,\mathrm{m/s}.$$

La energía cinética inicial era nueve joules; la final es seis. Los tres joules de diferencia pueden convertirse en deformación, vibración y energía interna. La hipótesis que permitió sumar las ecuaciones de Newton sigue siendo válida aunque la energía cinética cambie. El choque ha dado una ocasión concreta para separar dos balances que hasta aquí podían parecer inseparables.

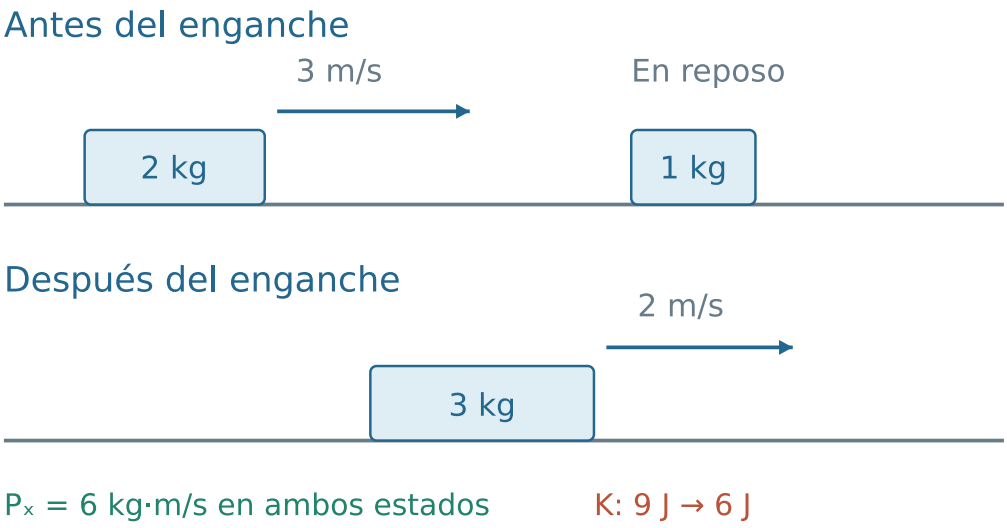


Figura 9.1. Los instantes dibujados delimitan el choque. El momento horizontal total vale seis kilogramos metro por segundo en ambos; la energía cinética disminuye tres joules. Las flechas indican sentidos, sin fijar una escala de fuerza.

Acumular una fuerza durante un intervalo

Para el primer carro, la interacción cambió la velocidad de tres a dos metros por segundo. Su masa permite expresar ese cambio como una variación de $-2\,\mathrm{kg\,m/s}$. El segundo adquirió $+2\,\mathrm{kg\,m/s}$. Esas cantidades se obtienen integrando las fuerzas respectivas durante el contacto, incluso si sus valores instantáneos son desconocidos.

Definición. El *momento lineal*, o cantidad de movimiento, de una partícula newtoniana de masa $m > 0$ y velocidad $\mathbf{v}$ es $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. El *impulso* de una fuerza $\mathbf{F}$ en el intervalo $[t_a, t_b]$, con $t_b > t_a$, es

$$\mathbf{J} = \int_{t_a}^{t_b} \mathbf{F}(t)\, dt,$$

si sus componentes son integrables. El momento tiene unidades de $\mathrm{kg\,m/s}$ y el impulso de $\mathrm{N\,s}$; ambas unidades son equivalentes. Los dos son vectores. Un valor negativo de una componente indica sentido respecto del eje elegido.

Proposición. Para una partícula de masa constante que satisface $m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{\text{neta}}$ en un marco inercial, con velocidad continua y fuerza neta continua por tramos en una partición finita del intervalo, satisfaciendo la ecuación en cada tramo,

$$\mathbf{p}(t_b) - \mathbf{p}(t_a) = \int_{t_a}^{t_b} \mathbf{F}_{\text{neta}}(t)\, dt.$$

Demostración. La masa constante permite escribir $\dot{\mathbf{p}} = m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{\text{neta}}$. Integramos cada componente en cada tramo de continuidad de la fuerza y aplicamos el teorema fundamental del cálculo. Al sumar los tramos, las velocidades en sus extremos comunes se cancelan porque la velocidad es continua. Queda la diferencia de momentos entre los extremos del intervalo completo. No se exige continuidad de la aceleración en las uniones.

La integral es un área con signo cuando la fuerza tiene una sola componente. Dos pulsos pueden tener la misma área y producir el mismo cambio de momento, aunque difieran mucho sus máximos. La fuerza media vectorial queda definida por $\overline{\mathbf{F}} = \mathbf{J}/(t_b - t_a)$. Por tanto, un impulso y una duración conocidos determinan la media, pero dejan indeterminado el máximo.

Si la fuerza cambia de dirección, las contribuciones pueden cancelarse y la media puede ser cero pese a una interacción intensa.

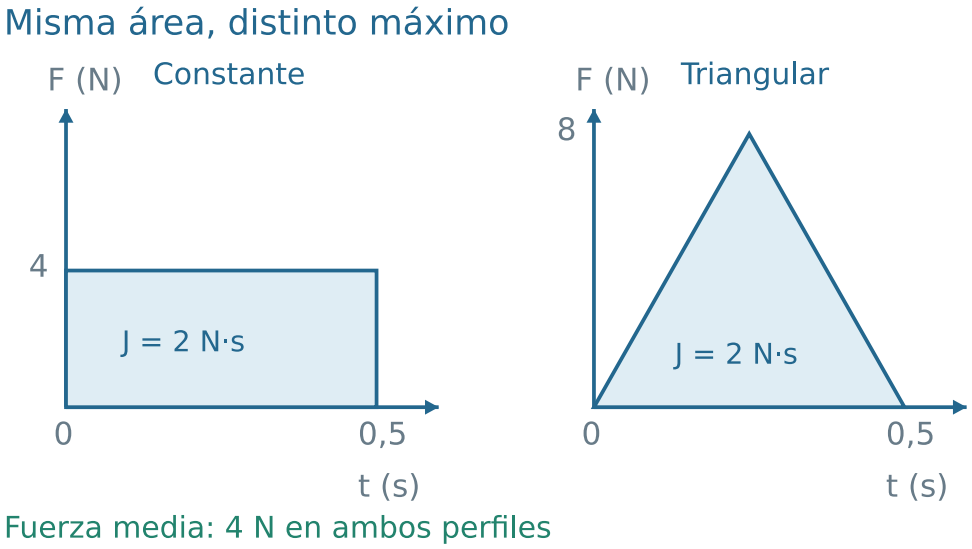


Figura 9.2. En el ejemplo de la figura, ambos pulsos positivos duran medio segundo y entregan dos newton segundo. Sus máximos son cuatro y ocho newtons. El área determina la variación de momento; el detalle temporal exige información adicional.

El modelo de choque instantáneo resume un intervalo corto mediante velocidades anteriores y posteriores. El salto ideal de velocidad representa un impulso finito: no se obtiene sustituyendo una fuerza ordinaria finita en un intervalo de duración cero. Para calcular una fuerza media o un máximo hay que recuperar información sobre la duración o el perfil del contacto.

La frontera del sistema decide qué se cancela

La fuerza que un carro ejerce sobre el otro es externa al carro que la recibe y resulta interna al conjunto de ambos. Por eso la elección del sistema debe preceder al uso de una conservación.

Definición. Para un sistema cerrado de N partículas con masas constantes $m_i > 0$, su momento lineal total es $\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i$. Diremos que el sistema es cerrado en este análisis si seguimos las mismas partículas durante todo el intervalo. Separaremos la fuerza sobre cada una en la fuerza externa $\mathbf{F}_i^{\text{ext}}$ y las fuerzas internas $\mathbf{F}_{ij}$ recibidas de las otras partículas.

Proposición. Si las partículas obedecen las leyes de Newton en el mismo marco inercial y las fuerzas internas satisfacen $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$, entonces

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}^{\text{ext}}, \qquad \mathbf{F}^{\text{ext}} = \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ext}}, \qquad \mathbf{P}_b - \mathbf{P}_a = \mathbf{J}^{\text{ext}}.$$

Aquí la última igualdad requiere integrar sobre el intervalo, con la regularidad del resultado anterior. Si $\mathbf{F}^{\text{ext}} = 0$ durante todo él, $\mathbf{P}$ es constante.

Demostración. Sumamos las ecuaciones de todas las partículas. En la doble suma interna, cada par aparece como $\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji} = 0$, de modo que

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{i<j} (\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji}) = \mathbf{F}^{\text{ext}}.$$

La integración proporciona el balance entre extremos. Cuando la resultante externa se anula, cada componente de $\mathbf{P}$ tiene derivada cero y permanece constante.

Para este resultado basta la igualdad vectorial entre fuerzas opuestas; no necesitamos suponer que sean centrales. El alcance declarado es el de un sistema newtoniano de partículas con masas constantes y acción y reacción de esa forma. Un sistema abierto que incorpora o expulsa materia necesita contabilizar también el momento que cruza su frontera; aplicar sin más esta suma a un cohete omitiría ese intercambio.

La conservación puede ser parcial. Si $F_x^{\text{ext}} = 0$, se conserva P_x, aunque otra componente cambie. Además, una integral externa nula sólo asegura igualdad entre los momentos de los dos extremos: puede haber variaciones intermedias que se compensen. El ejercicio 19 construye un caso así.

En un choque real, la aproximación relevante puede medirse. Para cualquier norma euclídea,

$$\|\mathbf{P}_b - \mathbf{P}_a\| \le \int_{t_a}^{t_b} \|\mathbf{F}^{\text{ext}}(t)\|\, dt.$$

Si la resultante externa tiene módulo a lo sumo B durante Δt, el error de tratar el momento total como constante no supera $B\Delta t$. Esta cota se compara con la tolerancia del problema. Dividir por el momento inicial puede ser una mala elección: ese momento podría ser cero por cancelación de dos movimientos grandes. Para una velocidad común de una masa total M, la cota de error correspondiente es $B\Delta t/M$.

Un punto que reúne el movimiento colectivo

El valor dos metros por segundo que hallamos para los carros ya estaba presente antes del enganche. Era la velocidad media ponderada por sus masas: el primer carro contribuía dos partes de tres y el segundo una parte de tres. Podemos hacer la misma construcción con sus posiciones.

Definición. Para las mismas N partículas y masa total $M = \sum_i m_i$, el *centro de masa* es el punto de posición

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{r}_i.$$

Se trata de una media de posiciones, con pesos positivos que suman uno. Para dos partículas está sobre el segmento que las une, más cerca de la de mayor masa. Puede no coincidir con ninguna partícula ni con un punto material del cuerpo: el centro de un aro uniforme está en su hueco.

Proposición. En un sistema cerrado de masas constantes se cumple $\mathbf{P} = M\dot{\mathbf{R}}$. Bajo las hipótesis del balance de momento, además,

$$M\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}^{\text{ext}}.$$

Demostración. Derivamos la suma finita que define $M\mathbf{R}$. Como sus masas son constantes, resulta $M\dot{\mathbf{R}} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = \mathbf{P}$. Una segunda derivación y el balance anterior dan la ecuación anunciada.

El resultado explica por qué el centro de masa sigue un movimiento sencillo cuando las partes se separan o se deforman. Si la única resultante externa es la gravedad uniforme, $\mathbf{F}^{\text{ext}} = M\mathbf{g}$ y $\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{g}$, aunque el cuerpo gire o estalle. Para fuerzas externas que dependan de cada posición, la suma puede requerir conocer la configuración; la ecuación del centro de masa no garantiza por sí sola un problema cerrado para $\mathbf{R}$.

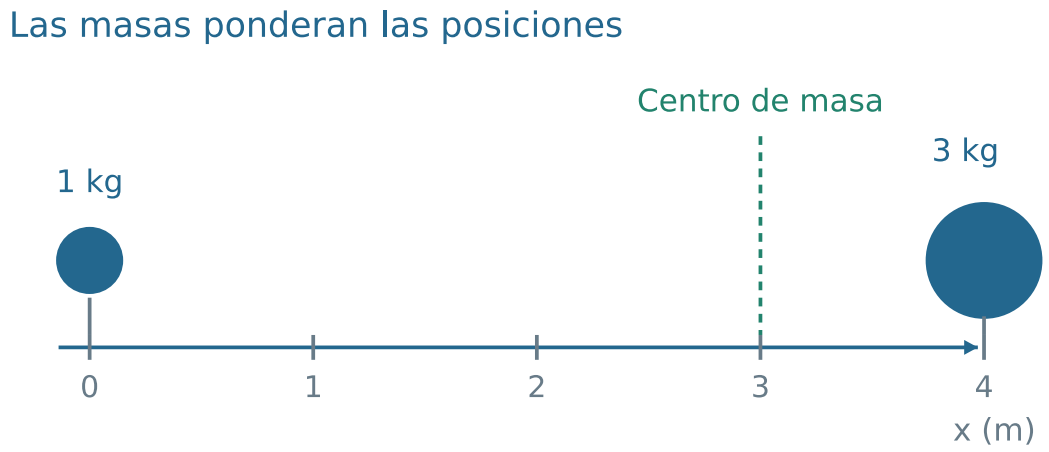


Figura 9.3. Para masas de uno y tres kilogramos situadas en cero y cuatro metros, el centro está en tres metros. Las separaciones ponderadas se compensan: $1(0-3)+3(4-3)=0$, en kilogramos metro.

Elegir un observador que se traslada con velocidad constante $\mathbf{U}$ reemplaza cada velocidad por $\mathbf{v}_i' = \mathbf{v}_i - \mathbf{U}$. Entonces $\mathbf{P}' = \mathbf{P} - M\mathbf{U}$. El valor de $\mathbf{P}$ depende del observador, pero su cambio entre dos instantes es el mismo porque M y $\mathbf{U}$ son constantes. En ausencia de impulso externo podemos tomar $\mathbf{U} = \dot{\mathbf{R}}$ y describir el choque en el marco del centro de masa, donde el momento total es cero.

La energía del movimiento relativo

Los tres joules que dejaron de ser energía cinética en el enganche inicial corresponden al movimiento que un carro tenía respecto del otro. Para precisar esa idea, separaremos de cada velocidad la velocidad del centro de masa.

Proposición. Sean $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}}$ y $\mathbf{w}_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{V}$. La energía cinética total satisface

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i \|\mathbf{v}_i\|^2 = \frac{1}{2} M \|\mathbf{V}\|^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \|\mathbf{w}_i\|^2 .$$

Para dos partículas, si $\mu = m_1 m_2/(m_1+m_2)$, la expresión se reduce a

$$K = \frac{1}{2} M \|\mathbf{V}\|^2 + \frac{1}{2} \mu \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|^2 .$$

Demostración. Al desarrollar $\|\mathbf{V}+\mathbf{w}_i\|^2$, los términos cruzados suman $\mathbf{V}\cdot\sum_i m_i \mathbf{w}_i$. Esta suma ponderada es $\mathbf{P} - M\mathbf{V} = 0$, de modo que sólo quedan los dos términos indicados. Para dos partículas, la propia definición de $\mathbf{V}$ da

$$\mathbf{w}_1 = \frac{m_2}{M}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2), \qquad \mathbf{w}_2 = -\frac{m_1}{M}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2).$$

Al sustituir las dos igualdades, el coeficiente de la energía relativa queda

$$[m_1 m_2^2 + m_2 m_1^2]/(2M^2) = \mu/2 .$$

Todos los sumandos del movimiento relativo son no negativos. Para un momento total fijado, $\mathbf{V} = \mathbf{P}/M$ también está fijada y el menor valor posible de K es $\|\mathbf{P}\|^2/(2M)$. Se alcanza

exactamente cuando todas las partículas tienen la misma velocidad. Es una afirmación sobre energía cinética de traslación del modelo de partículas: en cuerpos extensos deben incluirse los movimientos de sus partes para contabilizar rotación y vibración.

En nuestros carros, $\mu = 2/3\,\mathrm{kg}$ y la rapidez relativa inicial era tres metros por segundo. Su energía relativa era $\mu(3\,\mathrm{m/s})^2/2 = 3\,\mathrm{J}$. El enganche la elimina por completo, mientras la energía del centro de masa permanece en seis joules.

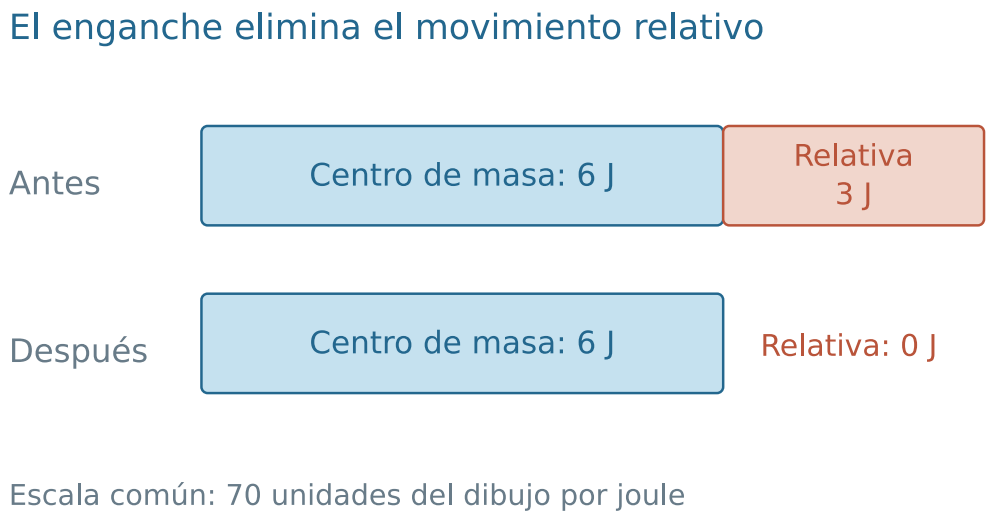


Figura 9.4. Las barras representan el ejemplo inicial. El enganche conserva la parte asociada al centro de masa y lleva a cero la energía cinética relativa. El balance de energía total debe incluir los otros modos que reciben los tres joules.

Si dos cuerpos se separan mediante un resorte que estaba comprimido, el proceso inverso puede aumentar su energía cinética a momento total constante. La energía procede del resorte. Por eso una ley de conservación del momento no decide, por sí sola, si la energía cinética aumenta, disminuye o permanece igual.

Qué condición falta para resolver un choque

En una recta, la conservación proporciona $m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2$, donde u_i y v_i son las velocidades anteriores y posteriores. Hay dos incógnitas y una sola ecuación. La condición de enganche añadió $v_1 = v_2$ y cerró el problema inicial. Otro tipo de contacto necesita otra información.

Definición. Llamaremos *elástico* a un choque si la energía cinética total del sistema considerado tiene el mismo valor antes y después. En el modelo de dos partículas, un choque *perfectamente inelástico* tiene una velocidad final común: la velocidad relativa final es nula. Las comparaciones se hacen entre estados en que ya terminó la interacción transitoria; el término elástico no obliga a que la energía cinética sea constante durante la compresión.

Para estudiar un contacto frontal unidimensional, situemos el cuerpo 1 a la izquierda del 2 antes del encuentro y supongamos $u_1 - u_2 > 0$, de modo que se acercan. Si después se separan o quedan unidos, $v_2 - v_1 \geq 0$. El cociente

$$e = \frac{v_2 - v_1}{u_1 - u_2}$$

es el *coeficiente de restitución* de ese encuentro. El valor debe medirse o deducirse de un modelo de contacto. No es una consecuencia de las leyes de conservación. En esta descripción,

$e = 0$ expresa velocidad final común; no afirma por sí solo que un adhesivo mantendrá unidos los cuerpos para siempre.

Proposición. Para dos partículas de masas positivas en un choque frontal, sin impulso externo, con acercamiento inicial $u_1 - u_2 > 0$ y restitución $e \geq 0$, sean

$$V = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{M}, \qquad M = m_1 + m_2.$$

Las velocidades finales y la disminución de energía cinética son

$$v_1 = V - \frac{m_2}{M} e(u_1 - u_2),$$
$$v_2 = V + \frac{m_1}{M} e(u_1 - u_2),$$
$$K_a - K_b = \frac{1}{2}\mu(1 - e^2)(u_1 - u_2)^2.$$

Demostración. La conservación fija la media ponderada final en V, y la restitución fija $v_2 - v_1 = e(u_1 - u_2)$. Sustituir $v_2 = v_1 + e(u_1 - u_2)$ en la media determina v_1; sumar la diferencia proporciona v_2. La descomposición de energía cancela la contribución del centro de masa entre ambos estados y deja la diferencia entre los cuadrados de las velocidades relativas, con coeficiente $\mu/2$.

Si el contacto es pasivo en el sentido de que no aumenta esa energía cinética, el resultado exige $0 \leq e \leq 1$. El caso $e = 1$ invierte la velocidad relativa sin cambiar su módulo y es elástico. Un valor mayor que uno indica liberación de energía de otros modos o fallo del modelo y los datos utilizados. La restitución puede depender de la rapidez de impacto y de los materiales; un único ensayo no establece una constante universal.

Con masas iguales y $e = 1$, las velocidades se intercambian. Con una masa receptora mucho mayor y en reposo, el cuerpo ligero casi invierte su velocidad mientras el pesado adquiere una velocidad muy pequeña. Esta pequeña velocidad no autoriza a omitir su cambio de momento: su masa es precisamente grande. Una pared anclada requiere incluir la Tierra o contabilizar el impulso de su apoyo.

Cambiar de balance cuando cambia la etapa

Un proyectil que se incrusta en un bloque suspendido ofrece dos intervalos con información diferente. Durante el impacto, si el bloque está en la posición más baja y el impulso horizontal del soporte es despreciable, el momento horizontal del proyectil y del bloque permite obtener la velocidad común inmediatamente posterior. Durante la elevación siguiente, la gravedad cambia ese momento, pero la tensión ideal no realiza trabajo y el balance de energía mecánica relaciona la rapidez inicial de la subida con su altura máxima. La solución 16 desarrolla ambos intervalos.

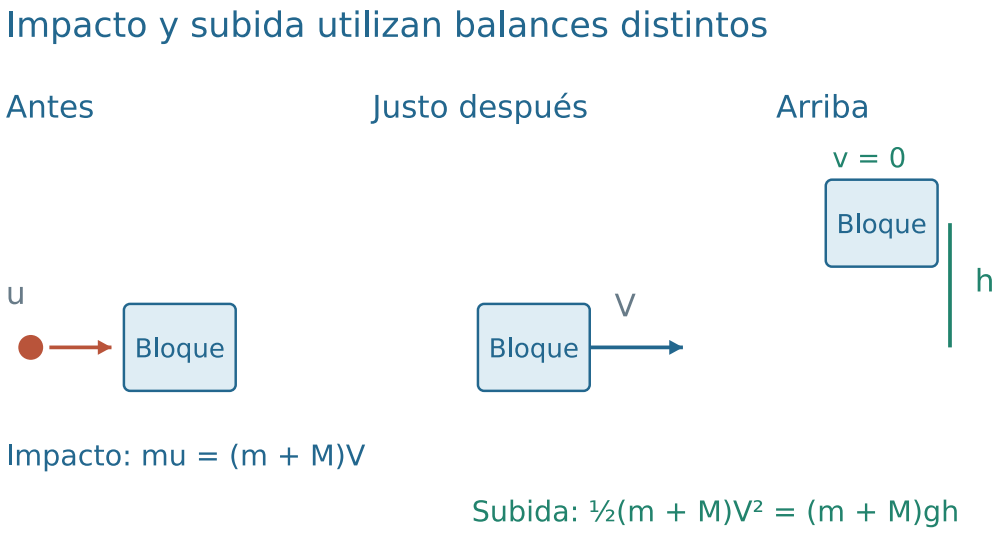


Figura 9.5. El estado inmediatamente posterior al choque conecta dos balances. La subida recupera la energía cinética que quedó después del impacto; no recupera la energía transformada durante la incrustación. Se supone traslación del bloque sin rotación apreciable.

En el plano, conservar el momento proporciona dos ecuaciones escalares. Si ambos cuerpos quedan juntos, esas ecuaciones determinan las dos componentes de la velocidad común. Si salen separados, hay cuatro componentes finales desconocidas; añadir conservación de energía deja todavía, en general, una libertad. Una dirección de salida medida o un modelo geométrico de contacto puede aportar la condición restante. El ejercicio 15 muestra un caso en que una dirección observada permite completar la predicción.

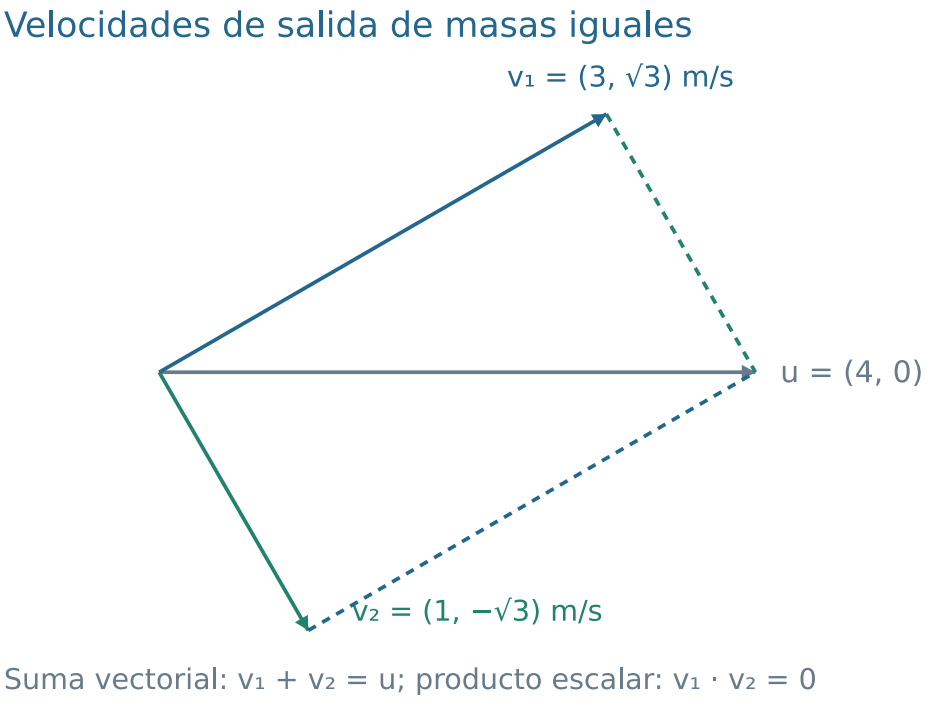


Figura 9.6. En el ejercicio 15, una partícula sale a treinta grados y la otra a menos sesenta grados respecto del eje inicial. La perpendicularidad se deduce de momento y energía para masas iguales, con una de ellas inicialmente en reposo y ambas velocidades finales no nulas.

Del balance a una medición

Para contrastar una conservación necesitamos masas y velocidades con signos, componentes y cotas. Sumar módulos de momentos destruiría las cancelaciones que el balance utiliza. Una comparación tampoco se vuelve concluyente por dar valores centrales cercanos: debe examinarse si los intervalos admiten al menos un balance compatible.

En el ejemplo de enganche, si las masas se tratan como exactas y se sabe que $u_1 \in [2{,}9, 3{,}1]\,\mathrm{m/s}$ y $u_2 \in [-0{,}1, 0{,}1]\,\mathrm{m/s}$, la velocidad común predicha sin impulso externo pertenece a $[1{,}9, 2{,}1]\,\mathrm{m/s}$. Una medición posterior entre $2{,}15$ y $2{,}19\,\mathrm{m/s}$ queda separada de esa banda. El ejercicio 18 cuantifica el menor impulso externo que permitiría cerrar esa discrepancia si las demás hipótesis se conservan.

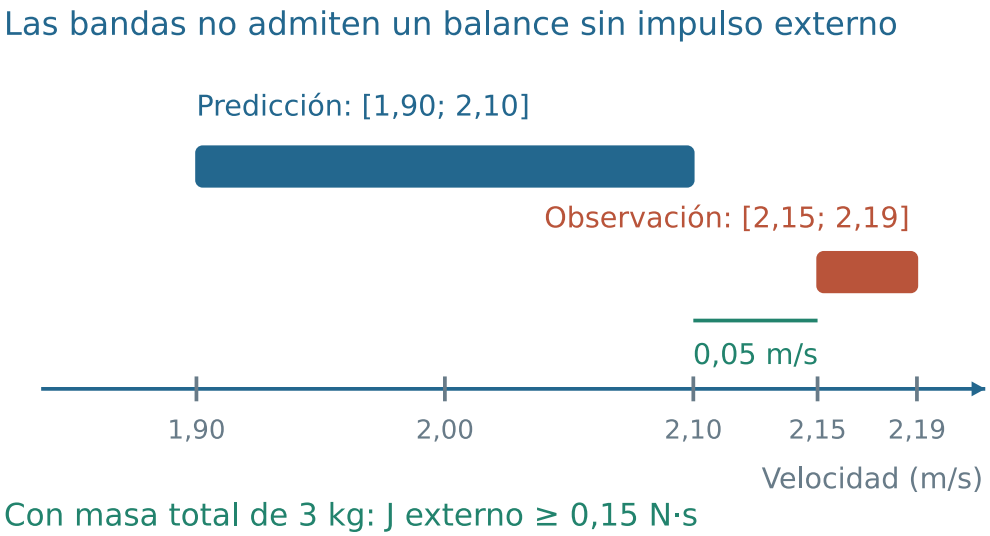


Figura 9.7. La separación mínima de las bandas es 0,05 m/s. Son cotas didácticas, sin interpretación probabilística. Una discrepancia obliga a revisar medición, sistema e intercambios; no identifica automáticamente cuál de ellos falló.

La reconstrucción puede detenerse antes de obtener una solución única. Conocer el momento final de dos cuerpos separados sólo fija una combinación de sus velocidades. La solución 20 conserva esa indeterminación hasta que se incorpora una condición física adicional. Reconocer ese punto forma parte de resolver el problema.

Ejercicios

Los primeros cuatro problemas trabajan impulso, signos y cotas del entorno. Del 5 al 10 se decide qué información cierra un choque o una separación. Los restantes desarrollan el centro de masa, los cambios de etapa y la lectura crítica de datos. En los datos numéricos de caída se adopta $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$; son valores didácticos, no registros experimentales. Se omiten aire y rotación salvo indicación contraria, y se trabaja en el marco inercial del laboratorio.

1. Un pulso que cambia de signo

Una partícula de 0,6 kg tiene velocidad inicial $-1\,\mathrm{m/s}$. La fuerza neta horizontal vale 12 N durante 0,2 s y luego $-6\,\mathrm{N}$ durante otros 0,2 s. Calcula el impulso total, la velocidad intermedia y la final. Compara las energías cinéticas inicial y final.

2. Un área, dos máximos

Dos aparatos aplican por separado a una partícula de 0,5 kg inicialmente en reposo pulsos horizontales positivos de medio segundo. Uno entrega fuerza constante de cuatro newtons y el otro un pulso triangular con máximo de ocho newtons. Compara impulso, velocidad final, fuerza media y fuerza máxima.

3. La fuerza del suelo durante un rebote

Una pelota de 0,2 kg llega verticalmente al suelo a 3 m/s hacia abajo y sale a 2 m/s hacia arriba. El contacto dura 0,05 s. Calcula el impulso neto y la fuerza media del suelo sobre ella, incluyendo el peso durante el contacto.

4. Cuánto error admite un choque breve

En un enganche de masa total 3 kg, el módulo de la resultante externa horizontal está acotado por 0,6 N y el choque dura a lo sumo 0,01 s. ¿Con qué error absoluto puede calcularse la velocidad común despreciando ese impulso? ¿Basta la cota para exigir error no mayor que 0,001 m/s?

5. Seguir por separado a los carros

Para el enganche inicial del capítulo, calcula el impulso que recibió cada carro y la disminución de energía cinética. Explica por qué el momento de cada carro cambia aunque el total se conserve.

6. Los mismos carros con otro contacto

Los carros de dos y un kilogramos llegan con velocidades 3 m/s y cero, respectivamente. El contacto es frontal y tiene $e = 1/2$. Sin impulso externo horizontal, calcula velocidades finales y disminución de energía cinética; comprueba que se separan.

7. Retroceder tras un choque elástico

Una partícula de un kilogramo alcanza a cuatro metros por segundo a otra de tres kilogramos en reposo. El choque es frontal y elástico, sin impulso externo. Obtén las velocidades finales y comprueba ambos balances.

8. Un encuentro de masas iguales

Dos carros de la misma masa llegan uno hacia el otro con velocidades 2 m/s y -1 m/s. Para un choque elástico frontal, encuentra las velocidades finales y describe el mismo encuentro desde el marco del centro de masa.

9. Una pared que puede moverse

Una partícula de masa m y velocidad $u > 0$ choca elásticamente en una recta con un cuerpo libre de masa M inicialmente en reposo. Obtén ambas velocidades finales y estudia el límite $M/m \to \infty$, manteniendo m y u fijos. Calcula el límite del momento adquirido por el cuerpo grande.

10. Separarse desde el reposo

Dos carros de masas dos y tres kilogramos están inicialmente en reposo. Un resorte interno los separa en un riel liso hasta que se alejan a una rapidez relativa de cinco metros por segundo, con el primero hacia la izquierda. Encuentra sus velocidades y el aumento total de energía cinética.

11. Un centro de masa en el plano

Tres partículas tienen masas 1, 2 y 3 kg y posiciones $(0,0)$, $(3,0)$ y $(0,2)$ m. En ese instante sus velocidades son $(2,0)$, $(0,3)$ y $(-1,0)$ m/s. Calcula posición y velocidad del centro de masa, y el momento total.

12. Caminar dentro de una barca

Una persona de 60 kg camina dos metros respecto de una barca de 180 kg que sólo puede trasladarse horizontalmente. Al principio todo está en reposo; la resultante externa horizontal sobre persona y barca se toma nula durante toda la marcha. ¿Cuánto se desplazan respecto de la orilla la barca y la persona? Modela el desplazamiento del centro de masa de la persona mediante el recorrido indicado.

13. Una explosión no cambia la parábola colectiva

Un cuerpo se divide en fragmentos de uno y dos kilogramos en $t = 0$, cuando su centro de masa está en el origen y lleva velocidad $(3, 4)\,\mathrm{m/s}$. Después sólo actúa gravedad uniforme, con eje vertical hacia arriba. A los $0{,}2\,\mathrm{s}$, el fragmento ligero está en $(1{,}4, 0{,}2)\,\mathrm{m}$. Determina dónde está el otro.

14. Engancharse desde direcciones distintas

En una mesa lisa, una partícula de dos kilogramos llega con velocidad $(3, 0)\,\mathrm{m/s}$ y otra de un kilogramo con $(0, 3)\,\mathrm{m/s}$. Se enganchan sin rotación en el modelo. Calcula la velocidad común, su módulo y la disminución de energía cinética.

15. Una dirección medida cierra el problema

Dos partículas de la misma masa tienen velocidades iniciales $(4, 0)\,\mathrm{m/s}$ y cero. El choque es elástico, sin impulso externo, y ambas salen con rapidez positiva. Se mide que la primera sale a 30° sobre el eje inicial. Determina ambas velocidades finales y demuestra que son perpendiculares.

16. Leer la altura de un péndulo balístico

Un proyectil de $0{,}02\,\mathrm{kg}$ se incrusta horizontalmente en un bloque de $0{,}98\,\mathrm{kg}$ suspendido mediante cuerdas paralelas, inicialmente en reposo en la posición más baja. El conjunto asciende $0{,}20\,\mathrm{m}$. Durante el choque las cuerdas se mantienen casi verticales y se desprecia su impulso horizontal; en la subida no hay pérdidas y el bloque conserva su orientación. Reconstruye la rapidez del proyectil y la energía cinética transformada en el impacto. En un segundo análisis, conserve exactas las masas y tome $h \in [0{,}19, 0{,}21]\,\mathrm{m}$ y un impulso externo horizontal durante el choque $J \in [-0{,}01, 0{,}01]\,\mathrm{N\,s}$, positivo hacia el disparo. Todas las combinaciones se admiten y la subida mantiene sus hipótesis ideales. Obtenga una envolvente de la rapidez inicial y cuantifique la contribución máxima de ese impulso a su error.

17. Lo que ocurre en la máxima compresión

Una partícula de un kilogramo, a $4\,\mathrm{m/s}$, comprime un resorte ideal sin masa unido a otra de tres kilogramos inicialmente en reposo. El riel es liso y $k = 300\,\mathrm{N/m}$. El resorte comienza sin comprimir y sólo transmite interacción durante el contacto. Calcula la compresión máxima y las velocidades cuando el resorte recupera su longitud natural y termina el contacto.

18. Una discrepancia entre bandas

Dos carros de masas exactas dos y un kilogramos se enganchan. Las velocidades iniciales están acotadas por $u_1 \in [2{,}9, 3{,}1]\,\mathrm{m/s}$ y $u_2 \in [-0{,}1, 0{,}1]\,\mathrm{m/s}$. La velocidad común medida pertenece a $[2{,}15, 2{,}19]\,\mathrm{m/s}$. Decide si existe compatibilidad sin impulso externo y encuentra una cota inferior para el impulso horizontal requerido si se conservan las demás hipótesis.

19. Los extremos ocultan un cambio intermedio

Una partícula de un kilogramo parte del reposo. La fuerza neta vale $2\,\mathrm{N}$ durante un segundo y $-2\,\mathrm{N}$ durante el segundo siguiente. Calcula el momento en $t = 0, 1, 2\,\mathrm{s}$, el desplazamiento total y el trabajo neto. ¿Permite la igualdad de momentos inicial y final afirmar que hubo conservación durante el intervalo?

20. Todas las salidas que admite el balance

Dos partículas de masas dos y un kilogramos se acercan en una recta con velocidades iniciales tres metros por segundo y cero. Sin impulso externo, se sabe que la energía cinética no aumenta y que al terminar el encuentro ya no se acercan. Describe todas las velocidades finales compatibles con esos datos. Identifica los extremos elástico y de velocidad común. ¿Es única la predicción?

Soluciones

1. Un pulso que cambia de signo

La integral debe conservar el signo de cada tramo. Los impulsos sucesivos son $J_1 = (12\,\mathrm{N})(0{,}2\,\mathrm{s}) = 2{,}4\,\mathrm{N\,s}$ y $J_2 = -1{,}2\,\mathrm{N\,s}$, de modo que $J = 1{,}2\,\mathrm{N\,s}$. El momento inicial vale $-0{,}6\,\mathrm{kg\,m/s}$. Tras el primer tramo es $1{,}8\,\mathrm{kg\,m/s}$, que corresponde a $v = 3\,\mathrm{m/s}$; tras el segundo es $0{,}6\,\mathrm{kg\,m/s}$ y $v_f = 1\,\mathrm{m/s}$.

Las energías inicial y final son ambas $0{,}3\,\mathrm{J}$, aunque el impulso neto no es cero. El cambio de sentido permite que dos velocidades distintas tengan el mismo cuadrado. La energía intermedia alcanza $2{,}7\,\mathrm{J}$: tampoco permaneció constante durante el proceso. Sumar módulos de los impulsos habría dado una velocidad final errónea.

2. Un área, dos máximos

El aparato constante proporciona $J = (4\,\mathrm{N})(0{,}5\,\mathrm{s}) = 2\,\mathrm{N\,s}$. El triángulo da la mitad de base por altura, $J = (0{,}5\,\mathrm{s})(8\,\mathrm{N})/2 = 2\,\mathrm{N\,s}$. Como la partícula parte del reposo, en ambos casos $v_f = J/m = 4\,\mathrm{m/s}$.

La fuerza media es cuatro newtons para ambos perfiles. El máximo coincide con esa media sólo en el pulso constante; en el triangular alcanza ocho. El balance entre extremos no reconstruye la historia temporal, aunque los datos basten para obtener la misma velocidad final y la misma energía de cuatro joules.

3. La fuerza del suelo durante un rebote

Elegimos hacia arriba como sentido positivo, de modo que $u = -3\,\mathrm{m/s}$ y $v = 2\,\mathrm{m/s}$. El impulso neto es

$$J_{\mathrm{neto}} = m(v - u) = (0{,}2\,\mathrm{kg})(5\,\mathrm{m/s}) = 1\,\mathrm{N\,s}.$$

En el contacto actúan el suelo y el peso. El impulso de la gravedad vale $-mg\Delta t = -0{,}1\,\mathrm{N\,s}$; por tanto, $J_{\mathrm{suelo}} = 1{,}1\,\mathrm{N\,s}$ y la fuerza media del suelo es $22\,\mathrm{N}$ hacia arriba. Dividir solamente el impulso neto por la duración daría veinte newtons, que es la fuerza neta media, no la fuerza de contacto solicitada. El dato no determina el máximo de la normal.

4. Cuánto error admite un choque breve

El impulso externo puede tener cualquier perfil compatible con la cota. La desigualdad integral asegura $|J^{\mathrm{ext}}| \le (0{,}6\,\mathrm{N})(0{,}01\,\mathrm{s}) = 0{,}006\,\mathrm{N\,s}$. La ecuación exacta para la velocidad común es $MV = P_a + J^{\mathrm{ext}}$; la aproximada usa $MV_0 = P_a$. Al restar y dividir por tres kilogramos obtenemos

$$|V - V_0| \le 0{,}002\,\mathrm{m/s}.$$

La cota no basta para garantizar la tolerancia pedida de una milésima de metro por segundo. Podría haber compensaciones y un error menor en un ensayo particular, pero los datos suministrados no las aseguran. Una cota $B\Delta t \le 0{,}003\,\mathrm{N\,s}$ sería suficiente para esa tolerancia.

5. Seguir por separado a los carros

La velocidad común es $V = 2\,\mathrm{m/s}$. El primero recibe $J_1 = m_1(V - u_1) = -2\,\mathrm{N\,s}$; el segundo recibe $J_2 = m_2(V - u_2) = 2\,\mathrm{N\,s}$. La suma es cero porque el contacto es interno al sistema conjunto, aunque cada carro recibe de su compañero un impulso externo a su propio subsistema.

La energía inicial es $K_a = \frac{1}{2}(2)(3)^2\,\mathrm{J} = 9\,\mathrm{J}$, y la final $K_b = \frac{1}{2}(3)(2)^2\,\mathrm{J} = 6\,\mathrm{J}$. Disminuye tres joules. La cancelación de impulsos no implica cancelación de trabajos: las fuerzas se aplican a cuerpos cuyos desplazamientos durante el contacto pueden diferir, y el modelo de enganche admite transformación en otros modos de energía.

6. Los mismos carros con otro contacto

La media ponderada sigue siendo $V = 2\,\mathrm{m/s}$ porque el momento inicial sigue siendo seis kilogramos metro por segundo. La restitución impone $v_2 - v_1 = (1/2)(3\,\mathrm{m/s}) = 1{,}5\,\mathrm{m/s}$. Por tanto,

$$v_1 = 2 - \frac{1}{3}\frac{1}{2}(3) = 1{,}5\,\mathrm{m/s}, \qquad v_2 = 2 + \frac{2}{3}\frac{1}{2}(3) = 3\,\mathrm{m/s}.$$

El carro delantero queda más rápido y los cuerpos se separan. La energía final es $\frac{1}{2}(2)(1{,}5)^2 + \frac{1}{2}(1)(3)^2 = 6{,}75\,\mathrm{J}$, por lo que se transforman $2{,}25\,\mathrm{J}$. También lo da $\mu(1-e^2)(u_1-u_2)^2/2 = (2/3)(3/4)(9)/2\,\mathrm{J}$. Cambiar el contacto modificó el reparto final, sin modificar el momento colectivo.

7. Retroceder tras un choque elástico

Las masas suman cuatro kilogramos y el momento inicial es $4\,\mathrm{kg\,m/s}$; por tanto $V = 1\,\mathrm{m/s}$. Con $e = 1$ las velocidades son $v_1 = 1 - (3/4)4 = -2\,\mathrm{m/s}$ y $v_2 = 1 + (1/4)4 = 2\,\mathrm{m/s}$. El signo del primer resultado expresa un retroceso físicamente permitido.

Comprobamos $m_1v_1 + m_2v_2 = -2 + 6 = 4\,\mathrm{kg\,m/s}$ y $K_b = \frac{1}{2}(1)(2)^2 + \frac{1}{2}(3)(2)^2 = 8\,\mathrm{J} = K_a$. Las velocidades relativas pasan de $u_1 - u_2 = 4\,\mathrm{m/s}$ a $v_1 - v_2 = -4\,\mathrm{m/s}$. Resolver sólo las dos ecuaciones de conservación también admite las velocidades iniciales como solución algebraica; la condición de salida, con los cuerpos separándose, selecciona la rama del choque realizado.

8. Un encuentro de masas iguales

La velocidad del centro de masa es $V = (2-1)/2 = 0{,}5\,\mathrm{m/s}$. Respecto de él, los carros llegan con velocidades $+1{,}5$ y $-1{,}5\,\mathrm{m/s}$. El choque elástico invierte esas velocidades y conserva el momento nulo. Al sumar nuevamente $0{,}5\,\mathrm{m/s}$ recuperamos $v_1 = -1\,\mathrm{m/s}$ y $v_2 = 2\,\mathrm{m/s}$.

Las velocidades del laboratorio se intercambiaron. La simetría aparece en el marco del centro de masa aunque en el laboratorio las rapideces iniciales fueran distintas. El momento total cambia de valor al cambiar de marco, pero su constancia se mantiene.

9. Una pared que puede moverse

El sistema debe incluir ambos cuerpos para eliminar la fuerza de contacto. Con $V = mu/(m+M)$ y $e = 1$, se obtiene

$$v_m = \frac{m - M}{m + M}u, \qquad v_M = \frac{2m}{m + M}u.$$

Cuando $M/m \to \infty$, $v_m \to -u$ y $v_M \to 0$. Sin embargo,

$$Mv_M = \frac{2mM}{m + M}u \longrightarrow 2mu.$$

El cuerpo pesado recibe un momento finito mientras su energía cinética $Mv_M^2/2 = 2m^2Mu^2/(m+M)^2$ tiende a cero. Por eso el límite reproduce un rebote que casi conserva la energía del cuerpo ligero, pero no su momento. Si se analiza sólo ese cuerpo, el impulso de la pared es externo y tiende a $-2mu$. El modelo de pared libre pesada no describe todos los detalles de una pared fijada a la Tierra; explica este límite mecánico concreto.

10. Separarse desde el reposo

El momento inicial es cero. Las velocidades finales deben satisfacer $2v_1 + 3v_2 = 0$ en unidades de kilogramos metro por segundo y $v_2 - v_1 = 5\,\mathrm{m/s}$. La segunda ecuación usa la rapidez relativa de separación, no la rapidez de uno de los carros. Al resolver, $v_1 = -3\,\mathrm{m/s}$ y $v_2 = 2\,\mathrm{m/s}$.

La energía cinética adquirida es $\frac{1}{2}(2)(3)^2 + \frac{1}{2}(3)(2)^2 = 15\,\mathrm{J}$. Como $V = 0$, toda ella es relativa; la misma cuenta resulta de $\mu(5\,\mathrm{m/s})^2/2$ con $\mu = 6/5\,\mathrm{kg}$. El resorte y sus posibles pérdidas deben suministrar al menos esos quince joules. El movimiento de separación no exige una fuerza externa que acelere el centro de masa.

11. Un centro de masa en el plano

La masa total es seis kilogramos. Ponderamos cada coordenada con la masa correspondiente:

$$\mathbf{R} = \frac{1(0,0) + 2(3,0) + 3(0,2)}{6}\,\mathrm{m} = (1,1)\,\mathrm{m}.$$

Para el momento sumamos las velocidades ponderadas, que son objetos diferentes de las posiciones:

$$\mathbf{P} = [1(2,0) + 2(0,3) + 3(-1,0)]\,\mathrm{kg\,m/s} = (-1,6)\,\mathrm{kg\,m/s}.$$

Por tanto, $\mathbf{V} = \mathbf{P}/M = (-1/6, 1)\,\mathrm{m/s}$. El centro de masa puede moverse hacia la izquierda aunque dos de las tres partículas no tengan componente izquierda: la tercera concentra la mayor masa.

12. Caminar dentro de una barca

Sea b el desplazamiento horizontal de la barca respecto de la orilla, positivo en el sentido de la marcha. El desplazamiento de la persona respecto de la orilla será $b + 2\,\mathrm{m}$. Como el sistema conjunto parte con momento horizontal cero y su resultante externa horizontal es nula durante toda la marcha, su momento permanece cero en cada instante. La velocidad del centro de masa es, por tanto, cero durante todo el recorrido y éste mantiene su posición. Así,

$$(60\,\mathrm{kg})(b + 2\,\mathrm{m}) + (180\,\mathrm{kg})b = 0,$$

de donde $b = -0{,}5\,\mathrm{m}$ y el desplazamiento de la persona es $1{,}5\,\mathrm{m}$. El resultado no requiere conocer el modo de caminar ni su velocidad en cada instante. Esos detalles sí importarían para estimar el impulso del agua; si resulta apreciable, la posición colectiva dejaría de ser constante y habría que corregir la ecuación.

13. Una explosión no cambia la parábola colectiva

La gravedad es externa y cambia el momento vertical; sería incorrecto conservar el vector momento entre la división y la observación posterior. En cambio, sabemos exactamente cómo acelera el centro de masa:

$$\mathbf{R}(t) = \big((3\,\mathrm{m/s})t, (4\,\mathrm{m/s})t - \tfrac{1}{2}gt^2\big).$$

A los 0,2 s resulta $\mathbf{R} = (0{,}6, 0{,}6)\,\mathrm{m}$. La definición de centro de masa sigue siendo válida después de la explosión, y exige $3\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 + 2\mathbf{r}_2$ al insertar las masas en kilogramos. Por tanto,

$$\mathbf{r}_2 = \frac{3(0{,}6, 0{,}6) - (1{,}4, 0{,}2)}{2}\,\mathrm{m} = (0{,}2, 0{,}8)\,\mathrm{m}.$$

No hemos supuesto que los fragmentos tengan energías cinéticas constantes, ni que cada uno siga la trayectoria que habría seguido el cuerpo sin dividirse.

14. Engancharse desde direcciones distintas

El momento inicial es $\mathbf{P} = (6, 3)\,\mathrm{kg\,m/s}$. La velocidad común final se obtiene componente a componente dividiendo por la masa total: $\mathbf{V} = (2, 1)\,\mathrm{m/s}$, cuyo módulo es $\sqrt{5}\,\mathrm{m/s}$. Se orienta a un ángulo $\arctan(1/2)$ sobre el eje horizontal.

La energía inicial es $K_a = \tfrac{1}{2}(2)(3)^2 + \tfrac{1}{2}(1)(3)^2 = 13{,}5\,\mathrm{J}$, y la final $K_b = \tfrac{1}{2}(3)(2^2+1^2) = 7{,}5\,\mathrm{J}$. La disminución es seis joules. La rapidez relativa inicial es $\sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18}\,\mathrm{m/s}$, por lo que la fórmula con $\mu = 2/3\,\mathrm{kg}$ proporciona la misma disminución. Sumar las rapideces iniciales en lugar de los vectores habría perdido la dirección final.

15. Una dirección medida cierra el problema

Al dividir el balance de momento por la masa común obtenemos $\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, con $\mathbf{u} = (4, 0)\,\mathrm{m/s}$. La conservación de energía da $\|\mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{v}_1\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2$. Pero el cuadrado de la primera igualdad tiene además el término $2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$. Compararlas obliga a que el producto escalar sea cero. Como ambas velocidades son no nulas, forman un ángulo recto.

Escribimos $\mathbf{v}_1 = a(\cos 30^\circ, \sin 30^\circ)$ con $a > 0$. La condición $\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_1) = 0$ da $4a\cos 30^\circ - a^2 = 0$ en unidades coherentes; su raíz positiva es $a = 2\sqrt{3}\,\mathrm{m/s}$. Luego

$$\mathbf{v}_1 = (3, \sqrt{3})\,\mathrm{m/s}, \qquad \mathbf{v}_2 = (1, -\sqrt{3})\,\mathrm{m/s}.$$

La segunda rapidez vale $2\,\mathrm{m/s}$ y su dirección es -60°. Sus cuadrados suman $12 + 4 = 16\,\mathrm{m^2/s^2}$ y los vectores suman $(4, 0)\,\mathrm{m/s}$. Sin la dirección medida habría una familia de salidas; la perpendicularidad por sí sola no escogería la orientación del par.

16. Leer la altura de un péndulo balístico

La altura informa sobre el estado inmediatamente posterior al impacto. En la subida, incluimos la interacción gravitatoria y elegimos potencial cero abajo. La tensión ideal es perpendicular al movimiento y no realiza trabajo, por lo que

$$\frac{1}{2}(m + M)V^2 = (m + M)gh, \qquad V = \sqrt{2gh} = 2\,\mathrm{m/s}.$$

Retrocedemos al impacto, intervalo durante el cual la hipótesis de cuerdas casi verticales permite omitir su impulso horizontal. Para proyectil y bloque, $mu = (m + M)V$, de donde $u = (1/0{,}02)(2)\,\mathrm{m/s} = 100\,\mathrm{m/s}$. El bloque no estaba moviéndose antes del choque.

La energía cinética anterior era $\tfrac{1}{2}(0{,}02)(100)^2 = 100\,\mathrm{J}$; la inmediatamente posterior, $\tfrac{1}{2}(1)(2)^2 = 2\,\mathrm{J}$. Se transformaron noventa y ocho joules en el impacto. Los dos joules restantes se convierten en energía potencial durante la subida. Igualar directamente los cien joules iniciales con la energía potencial final borraría la transformación principal y daría una rapidez incorrecta.

Con las cotas del segundo análisis conservamos el mismo orden de inferencia. La subida determina $V = \sqrt{2gh}$ y el impacto satisface $mu + J = (m + M)V$. Por tanto,

$$u(h, J) = \frac{(m + M)\sqrt{2gh} - J}{m}.$$

Esta expresión crece con $h > 0$ y disminuye con J. Las masas suman un kilogramo y el intervalo exacto que resulta es

$$u_- = \frac{(1\,\mathrm{kg})\sqrt{3{,}8}\,\mathrm{m/s} - 0{,}01\,\mathrm{N\,s}}{0{,}02\,\mathrm{kg}},$$
$$u_+ = \frac{(1\,\mathrm{kg})\sqrt{4{,}2}\,\mathrm{m/s} + 0{,}01\,\mathrm{N\,s}}{0{,}02\,\mathrm{kg}}.$$

Por tanto, $u \in [u_-, u_+] \subset [96{,}96; 102{,}97]\,\mathrm{m/s}$. La envolvente se redondeó hacia fuera. Para una misma altura, omitir el impulso cambia la rapidez inferida en J/m, cuyo módulo está acotado por $0{,}50\,\mathrm{m/s}$. La pequeña masa del proyectil amplifica ese efecto: la misma cota de impulso produciría sólo $0{,}01\,\mathrm{m/s}$ de error al predecir la velocidad común del conjunto. La tolerancia debe compararse con la magnitud que queremos reconstruir. Las cotas de altura e impulso contienen aquí toda la información declarada; asignarles probabilidades exigiría otro modelo.

17. Lo que ocurre en la máxima compresión

Durante el contacto conservamos el momento del conjunto y la suma de energía cinética y energía del resorte. La velocidad del centro de masa es $V = (1 \cdot 4 + 3 \cdot 0)/4 = 1\,\mathrm{m/s}$. En la máxima compresión la derivada de la separación es cero y ambas partículas tienen esa misma velocidad. Su energía cinética conjunta es entonces $K_{\mathrm{cm}} = \frac{1}{2}(4)(1)^2 = 2\,\mathrm{J}$.

La energía cinética inicial era ocho joules. Por tanto, el resorte almacena seis joules y

$$\frac{1}{2}k\delta_{\mathrm{máx}}^2 = 6\,\mathrm{J}, \qquad \delta_{\mathrm{máx}} = \sqrt{\frac{12\,\mathrm{J}}{300\,\mathrm{N/m}}} = 0{,}20\,\mathrm{m}.$$

Cuando recupera su longitud natural, devuelve esa energía y la interacción termina; el encuentro es elástico entre sus estados inicial y final. Las velocidades finales son -2 y $2\,\mathrm{m/s}$, como en el ejercicio 7. Detener la cuenta en la máxima compresión habría confundido un estado intermedio con el final. El valor de k fija la compresión, pero no las velocidades de salida del modelo ideal.

18. Una discrepancia entre bandas

La velocidad predicha es la combinación creciente $V_0 = (2u_1 + u_2)/3$. Sus extremos se obtienen usando a la vez los extremos inferiores o superiores de ambas cotas:

$$V_0 \in \left[\frac{2(2{,}9) - 0{,}1}{3}, \frac{2(3{,}1) + 0{,}1}{3}\right]\,\mathrm{m/s} = [1{,}9, 2{,}1]\,\mathrm{m/s}.$$

No hay intersección con la banda observada. La menor discrepancia es $2{,}15 - 2{,}1 = 0{,}05\,\mathrm{m/s}$; multiplicarla por la masa total da $J^{\mathrm{ext}} \geq 0{,}15\,\mathrm{N\,s}$ hacia el sentido positivo. De hecho, al combinar las bandas se obtiene $J^{\mathrm{ext}} \in [0{,}15, 0{,}87]\,\mathrm{N\,s}$ si todos sus extremos son admisibles independientemente.

La cota inferior es condicional: supone correctas las masas, las bandas y el enganche. La separación entre bandas detecta incompatibilidad con el paquete completo de hipótesis de impulso externo nulo; no demuestra por sí sola que el riel haya ejercido ese impulso.

19. Los extremos ocultan un cambio intermedio

Los impulsos de los dos tramos son $+2$ y $-2\,\mathrm{N\,s}$. Los momentos en los tres instantes son, respectivamente, cero, $2\,\mathrm{kg\,m/s}$ y cero. Durante el primer segundo la velocidad aumenta linealmente de cero a $2\,\mathrm{m/s}$, y durante el segundo disminuye hasta cero. Las áreas de los dos triángulos bajo la velocidad valen un metro cada una; el desplazamiento total es dos metros.

El trabajo neto es cero porque las energías cinéticas de los extremos coinciden. En el primer tramo se entregan dos joules y en el segundo se retiran dos. El momento tampoco fue constante, aunque sus extremos coincidan: tuvo una variación intermedia medible. El impulso nulo sobre todo el intervalo expresa un balance entre extremos; la conservación durante un intervalo exige constancia en todos sus instantes.

20. Todas las salidas que admite el balance

Escribamos $v_1 = a\,\mathrm{m/s}$, con a adimensional. La conservación fija $v_2 = (6 - 2a)\,\mathrm{m/s}$. La energía cinética final es

$$K_b = \left[a^2 + \tfrac{1}{2}(6-2a)^2\right]\mathrm{J} = (3a^2 - 12a + 18)\,\mathrm{J}.$$

Exigir $K_b \le 9\,\mathrm{J}$ equivale a $(a-1)(a-3) \le 0$, por lo que $1 \le a \le 3$. Falta aplicar la condición de salida: el cuerpo 1 estaba detrás y los cuerpos ya no se acercan, así que $v_2 - v_1 \ge 0$. Esto requiere $6 - 3a \ge 0$ y restringe la familia a

$$1 \le a \le 2, \qquad (v_1, v_2) = (a, 6-2a)\,\mathrm{m/s}.$$

En $a = 1$ salen a uno y cuatro metros por segundo y el choque es elástico. En $a = 2$ comparten dos metros por segundo y la energía final es mínima. Los valores intermedios corresponden a restitución $e = (6-3a)/3 = 2 - a$, entre cero y uno. El valor $a = 3$, que conservaba energía en la cuenta algebraica, describe todavía acercamiento y no satisface la condición final del problema. Los datos permiten toda una familia física de salidas; medir la restitución o una velocidad final proporcionaría la información que falta.

Lecturas de apoyo

La distinción entre datos, cotas y modelos se desarrolla desde el capítulo 0, «El problema de medir». Las sumas de fuerzas y la identificación de sus agentes provienen de «Fuerzas y leyes de Newton»; los balances que permiten enlazar impacto, compresión y subida requieren «Trabajo y energía cinética» y «Potencial, equilibrio y estabilidad». Se utilizan integrales por tramos, sumas vectoriales y productos escalares; la descomposición del movimiento relativo queda demostrada en el propio capítulo.

Como contraste de teoría y método se consultan Young y Freedman, *Sears y Zemansky. Física universitaria*, volumen 1, 13.ª edición (Pearson, 2013), capítulo 8, en particular §§8.1–8.5; Serway y Jewett, *Física para ciencias e ingeniería*, volumen 1, 10.ª edición española (Cengage, 2019), capítulo 9, particularmente §§9.3–9.6; y Spivak, *Physics for Mathematicians. Mechanics I* (2010), capítulo 3, discusión inicial de momento y centro de masa, pp. 80–81. El cotejo es selectivo y no reemplaza la lectura de esas obras. Los enunciados, datos, soluciones y figuras de este capítulo son desarrollos propios a partir de familias habituales de problemas.

Capítulo 10

El oscilador armónico

Un carro de dos kilogramos está unido a un resorte horizontal de constante $8\,\mathrm{N/m}$. Lo preparamos doce centímetros a la derecha de la posición donde el resorte tiene su longitud natural y le damos una velocidad de treinta y dos centímetros por segundo hacia la derecha. En ese instante el resorte ya tira hacia la izquierda, pero el carro todavía avanza. Queremos reconstruir el movimiento: cuánto más se alejará, cuándo comenzará a regresar y cuánto tardará en repetir su estado.

Seguiremos al carro como una partícula de masa constante en el marco inercial del laboratorio. El eje x apunta hacia la derecha y su origen coincide con la longitud natural del resorte. El riel es horizontal; peso y normal se compensan. Omitimos rozamiento, resistencia del aire, masa del resorte y rotación del carro. Suponemos que la fuerza del resorte es $F = -kx$ en el intervalo $|x| < 0{,}30\,\mathrm{m}$. Será necesario comprobar que el movimiento calculado permanece allí.

Tomamos $t = 0$ cuando termina la preparación. Los datos y la segunda ley de Newton dan

$$m\ddot{x} = -kx, \qquad x(0) = 0{,}12\,\mathrm{m}, \qquad \dot{x}(0) = 0{,}32\,\mathrm{m/s}.$$

La aceleración inicial es $-0{,}48\,\mathrm{m/s^2}$. Ese signo no contradice el sentido de la velocidad: significa que, mientras el carro avanza hacia la derecha, pierde rapidez. Las fórmulas de aceleración constante no describen el movimiento completo, porque la fuerza cambia con la posición. Los capítulos anteriores permitían calcular una rapidez mediante energía o un cambio de velocidad mediante impulso; conocer el instante de cada evento exige resolver ahora la ecuación de movimiento.

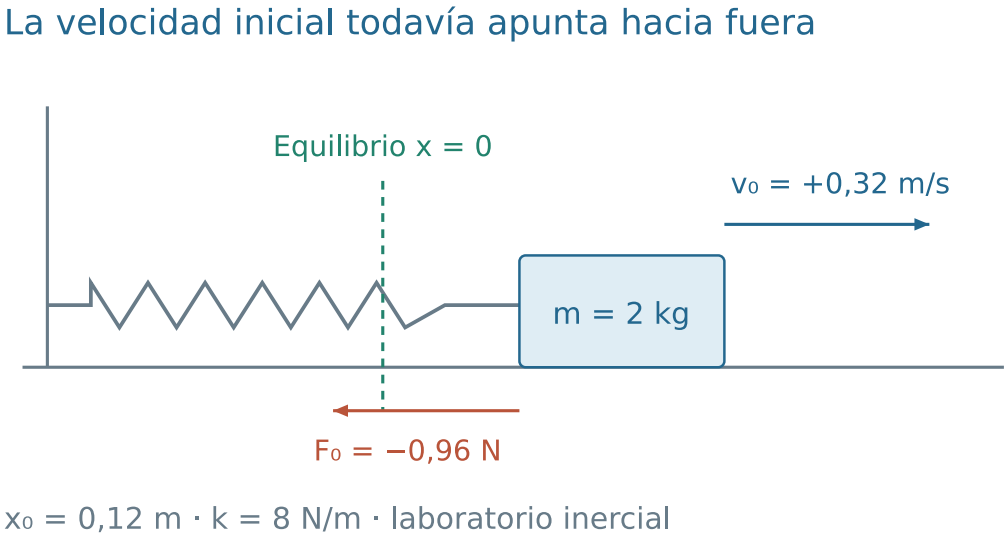


Figura 10.1. Velocidad y fuerza pueden tener sentidos opuestos. Se dibujan con flechas de distinto color y rótulos explícitos; sus longitudes no comparan magnitudes de unidades diferentes. El origen se refiere al equilibrio del modelo horizontal.

Una función que conserva su forma al derivar dos veces

Al dividir por la masa aparece la razón k/m, cuyas unidades son s^{-2}. Su raíz positiva, que denotaremos por ω, tiene unidades de inverso de tiempo. Para el carro, $\omega = \sqrt{k/m} = 2\,\mathrm{s}^{-1}$ y buscamos una función que satisfaga $\ddot{x} = -\omega^2 x$. Seno y coseno ofrecen precisamente ese comportamiento: derivarlos dos veces devuelve su negativo, acompañado por el cuadrado de la frecuencia de su argumento.

Definición. Un movimiento unidimensional es *armónico simple* respecto de un equilibrio fijo x_e si su desplazamiento $q(t) = x(t) - x_e$ es dos veces continuamente derivable y satisface

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0$$

para una constante $\omega > 0$, llamada *frecuencia angular*. En un resorte ideal horizontal con masa $m > 0$ y constante $k > 0$, $x_e = 0$ y $\omega = \sqrt{k/m}$.

La definición incluye la solución de reposo $q = 0$. La palabra oscilación suele reservarse para las soluciones no constantes. El signo positivo de ω^2 en la ecuación es sustantivo: representa una aceleración que apunta hacia el equilibrio. Cambiarlo produciría otra dinámica.

Podemos ensayar una combinación $q(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$. En $t = 0$, el coseno vale uno y el seno cero, de modo que a debe ser la posición inicial. Al derivar, $\dot{q}(0) = \omega b$, lo que fija el segundo coeficiente. Esta construcción encuentra una solución, pero todavía debemos justificar que no deja fuera otros movimientos con los mismos datos.

Proposición. Dados $\omega > 0$, $q_0 \in \mathbb{R}$ y $v_0 \in \mathbb{R}$, la única solución real de clase C^2 en $\mathbb{R}$ de $\ddot{q} + \omega^2 q = 0$, $q(0) = q_0$, $\dot{q}(0) = v_0$, es

$$q(t) = q_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t).$$

Demostración. Derivar dos veces verifica la ecuación y evaluar en cero verifica ambos datos; la fórmula está definida para todo tiempo real. Para demostrar unicidad, supongamos que q_1 y q_2 son dos soluciones con esos mismos datos y consideremos su diferencia $d = q_1 - q_2$. La linealidad de la ecuación da $\ddot{d} + \omega^2 d = 0$, con $d(0) = \dot{d}(0) = 0$. Necesitamos convertir

esos datos nulos en una afirmación válida en todo el intervalo, y una suma de cuadrados nos permite aprovechar a la vez la ecuación y el signo de ω^2:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{d}^{\,2}+\frac{1}{2}\omega^2 d^2\right)=\dot{d}(\ddot{d}+\omega^2 d)=0.$$

La expresión es constante y vale cero al principio. Como sus sumandos son no negativos y $\omega>0$, necesariamente $d=0$ y $\dot{d}=0$ en todos los instantes. Por tanto, las dos soluciones coinciden.

La prueba evita exigir un teorema general de ecuaciones diferenciales como prerrequisito. También muestra por qué fijar sólo la posición inicial sería insuficiente: quedaría libre el coeficiente del seno. Elegir la velocidad inicial determina qué movimiento pasa por esa posición.

Para el carro obtenemos

$$x(t)=(0{,}12\,\mathrm{m})\cos(2t/\mathrm{s})+(0{,}16\,\mathrm{m})\sin(2t/\mathrm{s}).$$

Escribir el argumento como $2t/\mathrm{s}$ hace explícito que es adimensional. Cuando se utiliza ωt, el factor ω lleva las unidades necesarias. La derivación da la velocidad y la aceleración sin nuevas hipótesis:

$$\dot{q}(t)=-\omega q_0\sin(\omega t)+v_0\cos(\omega t),$$
$$\ddot{q}(t)=-\omega^2 q(t).$$

Amplitud, fase y reloj

La combinación anterior es correcta, aunque todavía no muestra de inmediato la mayor separación respecto del equilibrio. La identidad del coseno de una suma permite recogerla en una sola función. Si $A>0$ y φ satisfacen

$$A=\sqrt{q_0^2+(v_0/\omega)^2},\qquad \cos\varphi=\frac{q_0}{A},\qquad \sin\varphi=-\frac{v_0}{\omega A},$$

entonces $q(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$. Los dos últimos cocientes son adimensionales y sus cuadrados suman uno, por lo que determinan un ángulo módulo 2π. Utilizar únicamente una tangente perdería la información del cuadrante y fallaría cuando el denominador fuera cero.

Definición. Para un movimiento periódico de posición variable, un *período* es un número $T>0$ tal que $q(t+T)=q(t)$ para todo t. Si existe el menor de esos números, se llama *período fundamental*. Su inverso $f=1/T$ es la *frecuencia*, medida en ciclos por segundo o hertz. La *amplitud* de un movimiento armónico es el máximo de $|q(t)|$.

Definición. En la representación $q(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$, con $A>0$, llamamos *fase* al argumento $\omega t+\varphi$, considerado módulo 2π, y *fase inicial* al valor φ que corresponde al origen temporal elegido.

Proposición. Para toda solución armónica no constante, con A definido arriba,

$$T=\frac{2\pi}{\omega},\qquad f=\frac{\omega}{2\pi},\qquad |q|_{\max}=A,\qquad |\dot{q}|_{\max}=\omega A,\qquad |\ddot{q}|_{\max}=\omega^2 A.$$

Demostración. La representación por un coseno alcanza los valores $\pm A$, y sus dos derivadas tienen factores ωA y $\omega^2 A$ y factores trigonométricos de módulo máximo uno. Aumentar el tiempo en $2\pi/\omega$ repite la fase y la posición. Para verificar que ése es el menor período, tomemos un instante $t_\ast$ en que $q(t_\ast)=A$. Si $\tau>0$ es cualquier período, $q(t_\ast+\tau)=A$ obliga a que $\cos(\omega\tau)=1$. Por tanto, $\omega\tau$ es un múltiplo entero positivo de 2π; el menor corresponde a uno. La fórmula de f resulta de invertir ese período.

El reposo $q = 0$ requiere un tratamiento aparte. Cualquier tiempo positivo repite ese estado y no hay un menor período positivo; su fase tampoco queda definida por los cocientes anteriores. Estas excepciones evitan asignar información ficticia al estado que no oscila.

En el carro inicial, $A = 0{,}20\,\mathrm{m}$, porque $0{,}12^2 + 0{,}16^2 = 0{,}20^2$. Podemos tomar $\varphi = -\delta$, con $\delta = \arctan(4/3)$ entre cero y $\pi/2$. Su fase inicial es negativa: primero avanza hasta que la fase alcanza cero. La primera detención ocurre en $t = \delta/\omega \approx 0{,}464\,\mathrm{s}$, en $x = A$. El primer paso posterior por el equilibrio ocurre cuando la fase alcanza $\pi/2$, en

$$t = \frac{\delta + \pi/2}{\omega} \approx 1{,}249\,\mathrm{s}.$$

Allí la velocidad es $-0{,}40\,\mathrm{m/s}$. El estado completo vuelve a repetirse cada $T = \pi\,\mathrm{s}$. La amplitud calculada es menor que los treinta centímetros declarados como límite del resorte lineal, de modo que la trayectoria permanece en su dominio supuesto.

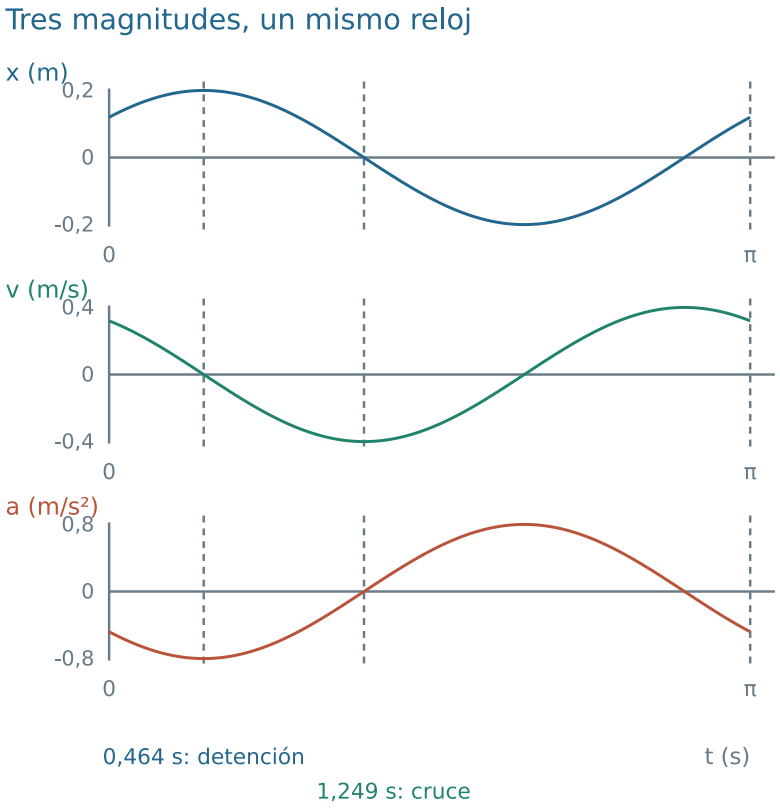


Figura 10.2. Las tres gráficas representan el mismo movimiento y tienen ejes verticales con unidades distintas. La primera detención, el primer cruce del equilibrio y el período completo se identifican con líneas verticales. Aceleración nula no implica reposo.

La frecuencia angular cuenta radianes de fase por unidad de tiempo; la frecuencia cuenta ciclos. Para este carro, $\omega = 2\,\mathrm{rad/s}$ y $f = 1/\pi\,\mathrm{Hz}$. El factor 2π permite convertir una en otra. Cambiar la amplitud conserva ese período dentro del modelo lineal ideal, pero cambia las velocidades, las aceleraciones y la energía.

La energía dibuja los estados posibles

La misma suma de cuadrados que permitió demostrar unicidad tiene una interpretación física para el resorte. Su potencial, con referencia cero en el equilibrio, es $U = kq^2/2$; la energía cinética es $K = m\dot{q}^2/2$.

Proposición. Para el oscilador ideal con $m, k > 0$ y $\omega^2 = k/m$, la energía

$$E = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2$$

es constante y vale $kA^2/2$. Si $A > 0$, sus estados satisfacen

$$\frac{q^2}{A^2} + \frac{\dot{q}^2}{\omega^2 A^2} = 1.$$

Demostración. Derivar la energía da $\dot{E} = \dot{q}(m\ddot{q} + kq) = 0$. Al evaluar en el dato inicial obtenemos $2E/k = q_0^2 + (m/k)v_0^2 = q_0^2 + (v_0/\omega)^2 = A^2$. Dividir el balance por $kA^2/2$ proporciona la ecuación indicada.

El plano de estados utiliza posición en un eje y velocidad en el otro. La curva de energía es una elipse en esas coordenadas; si representamos $\dot{q}/\omega$ frente a q, ambos ejes tienen unidades de longitud y aparece una circunferencia. La posición por sí sola no fija el estado: en cada punto interior al recorrido puede haber movimiento hacia la derecha o hacia la izquierda. El signo de la velocidad distingue esas dos posibilidades.

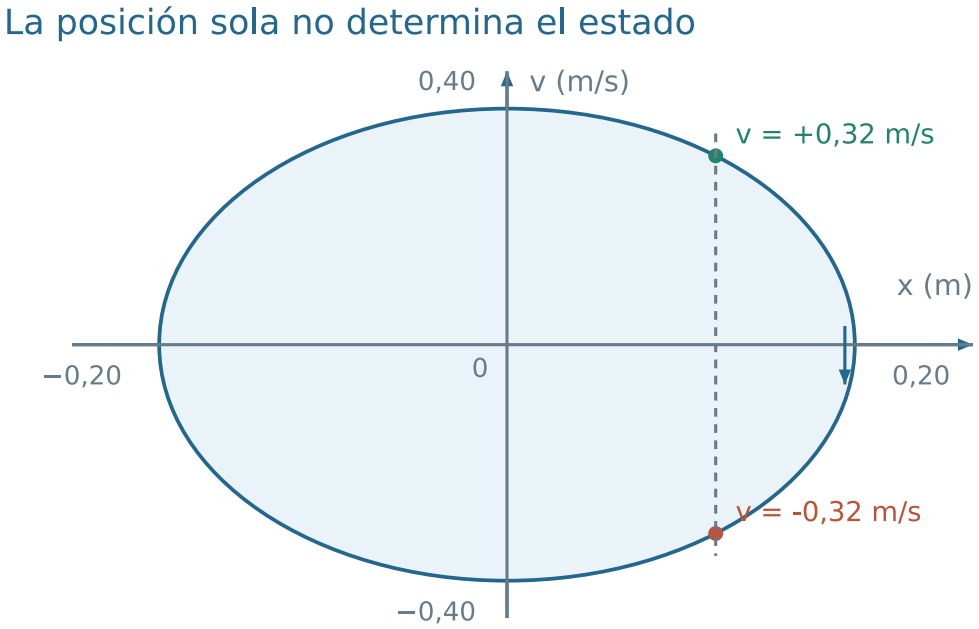


Figura 10.3. El movimiento del ejemplo pasa inicialmente por $(0{,}12\,\mathrm{m}, 0{,}32\,\mathrm{m/s})$. La misma posición con velocidad negativa pertenece a otro instante. Las flechas de la elipse representan evolución temporal, no fuerzas en el espacio físico.

En los extremos $q = \pm A$, la energía es enteramente potencial y el carro se detiene sólo un instante, porque allí la fuerza no es nula. Al cruzar el equilibrio, toda la energía de este modelo es cinética y la rapidez alcanza su máximo. Para el ejemplo, $E = (8\,\mathrm{N/m})(0{,}20\,\mathrm{m})^2/2 = 0{,}16\,\mathrm{J}$.

La conservación permite hallar $|\dot{q}| = \omega\sqrt{A^2 - q^2}$, pero deja pendiente el signo. La solución temporal resuelve qué rama sigue el movimiento y cuándo cambia de rama en un extremo.

Ambas descripciones se complementan: la energía controla posiciones y rapideces posibles, mientras que la fase sitúa al sistema sobre esa curva en cada instante.

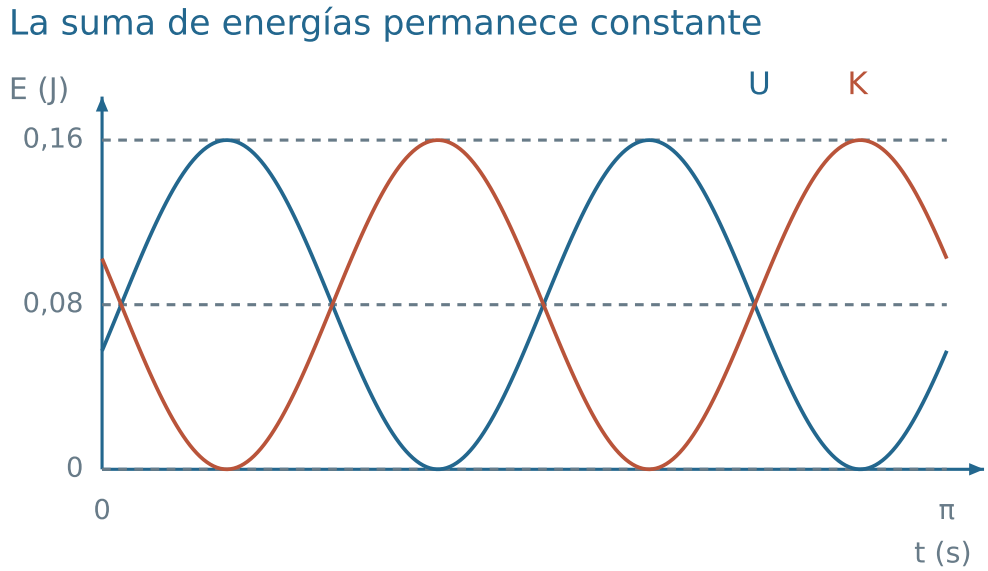


Figura 10.4. Las energías suman 0,16 J. Cada una repite sus valores en medio período del movimiento, porque depende del cuadrado de un seno o un coseno. Esa repetición no significa que posición y velocidad hayan vuelto a su estado inicial.

Medir desde un equilibrio desplazado

Una fuerza constante puede cambiar el origen adecuado sin cambiar la frecuencia. Para un carro sometido además a un tirón constante f_0, la ecuación es $m\ddot{x} = f_0 - kx$. Su equilibrio es $x_e = f_0/k$. La variable $q = x - x_e$ tiene las mismas derivadas temporales que x, y lleva la ecuación a $m\ddot{q} = -kq$.

Proposición. Sean $m, k > 0$ y f_0 constante. Toda solución de $m\ddot{x} = f_0 - kx$ se obtiene trasladando una solución armónica mediante $x = x_e + q$, con $x_e = f_0/k$. Para datos $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$,

$$x(t) = x_e + (x_0 - x_e)\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t), \qquad \omega = \sqrt{k/m}.$$

Demostración. Como x_e es constante, $\ddot{q} = \ddot{x}$. Sustituir $x = x_e + q$ cancela $f_0 - kx_e$ y deja la ecuación armónica. Los datos de q son $q(0) = x_0 - x_e$ y $\dot{q}(0) = v_0$; el resultado de existencia y unicidad ya probado determina su solución.

En un resorte vertical, tomando y hacia abajo desde la longitud natural, $m\ddot{y} = mg - ky$. El equilibrio está en $y_e = mg/k$. La gravedad uniforme desplaza la posición de equilibrio y no modifica ω en este modelo. Soltar el cuerpo desde la longitud natural equivale a comenzar con $q_0 = -y_e$, no con amplitud cero.

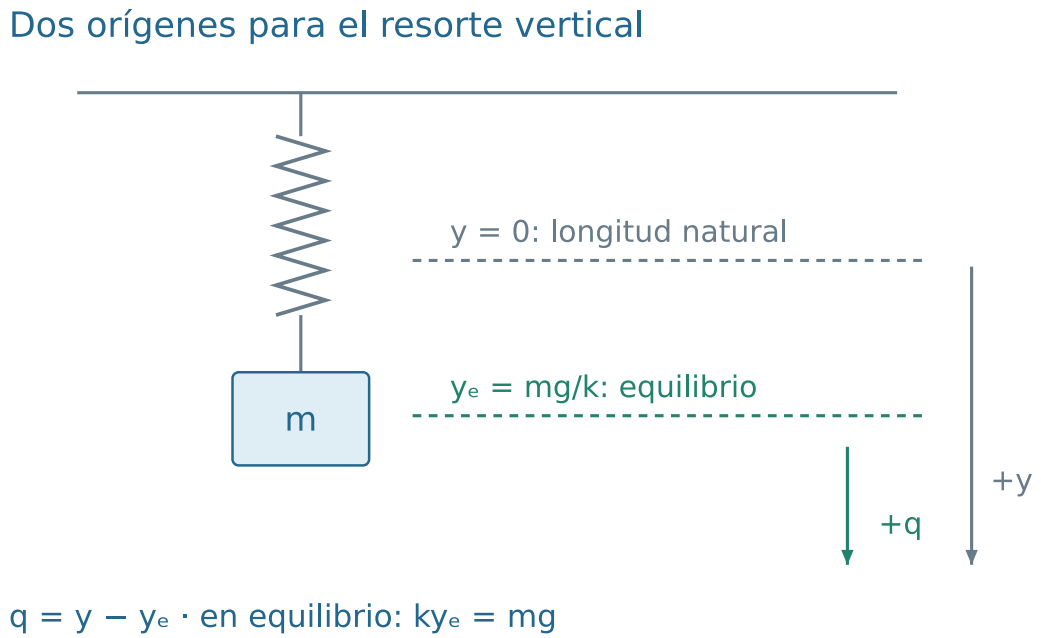


Figura 10.5. Las coordenadas y y $q = y - y_e$ tienen orígenes diferentes. En $y = y_e$ se equilibran peso y fuerza del resorte. El esquema utiliza gravedad uniforme, resorte ideal y soporte fijo; no identifica la longitud natural con el equilibrio cargado.

Si los apoyos cambian con el tiempo o la fuerza deja de ser constante, esta traslación por un número fijo ya no resuelve el problema. También puede cambiar la inercia relevante: dos masas libres unidas por un resorte no equivalen a una masa con el otro extremo inmóvil. El ejercicio 13 deduce su ecuación relativa utilizando el centro de masa del capítulo anterior.

Hasta dónde vale una aproximación armónica

Una fuerza restauradora real puede parecer lineal cerca de un equilibrio sin serlo en todo el recorrido. Sea $F(x_e) = 0$ y supongamos que, para desplazamientos pequeños,

$$F(x_e + q) = -k_{\mathrm{ef}} q + R(q), \qquad k_{\mathrm{ef}} > 0.$$

El término $R(q)$ recoge la parte que estamos omitiendo. Cuando F es derivable, la elección natural es $k_{\mathrm{ef}} = -F'(x_e)$, siempre que esa cantidad sea positiva. La definición de derivada asegura $R(q)/q \to 0$ al acercarse al equilibrio. Si F' es cero, este argumento no produce una frecuencia armónica positiva; los mínimos planos del capítulo 8 necesitan otro análisis.

La ecuación lineal aproximada tiene $\omega = \sqrt{k_{\mathrm{ef}}/m}$. Decir que R es pequeño controla de inmediato la diferencia de aceleraciones evaluadas en una misma posición, pero la posición de cada trayectoria cambia con el tiempo. Para comparar movimientos necesitamos estimar el error acumulado.

Proposición. Sea $\omega > 0$. En un intervalo $[0, \tau]$, supongamos que q y q_h son funciones de clase C^2 con los mismos datos iniciales, que q_h satisface la ecuación armónica y que

$$\ddot{q} + \omega^2 q = r(t)$$

con r continua. Entonces

$$q(t) - q_h(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t \sin\big(\omega(t-s)\big) r(s)\, ds.$$

En particular, si $|r(s)| \le r_*$ en todo el intervalo, se cumple $|q(t) - q_h(t)| \le r_* t/\omega$ para $0 \le t \le \tau$.

Demostración. Denotemos por $z(t)$ la integral del enunciado. En cero, $z = 0$. Al derivar, el término del extremo superior contiene $\sin 0 = 0$, y queda $\dot z(t) = \int_0^t \cos(\omega(t-s))r(s)\,ds$, de modo que también $\dot z(0) = 0$. Una segunda derivación introduce el término $r(t)$ y da $\ddot z = r(t) - \omega^2 z$. Por otra parte, $d = q - q_h$ satisface esa misma ecuación y tiene datos iniciales nulos. La diferencia $d - z$ satisface la ecuación armónica homogénea con datos nulos y por la unicidad ya probada es cero. Finalmente, usar $|\sin| \le 1$ dentro de la integral da la cota $r_* t/\omega$.

Para la fuerza anterior, $r(t) = R(q(t))/m$. Una cota local sobre R sólo puede usarse mientras la trayectoria real permanezca en el intervalo donde esa cota vale. A veces el balance de energía permite garantizar ese confinamiento; el ejercicio 16 lo hace para una fuerza con un término cúbico. La estimación puede ser conservadora, pero declara qué se controla y durante cuánto tiempo.

Un ejemplo físico familiar es el péndulo simple. Una masa puntual al final de una cuerda ideal de longitud ℓ tiene aceleración tangencial $\ell\ddot\theta$. La componente tangencial del peso es $-mg\sin\theta$ y la tensión no tiene componente tangencial. Por tanto,

$$\ddot\theta + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0.$$

Para ángulos pequeños en radianes, sustituir $\sin\theta$ por θ produce la ecuación armónica de frecuencia $\sqrt{g/\ell}$. El ejercicio 15 estima la discrepancia de los términos restauradores; esa comparación no es, por sí sola, una cota del error del período. La independencia exacta entre período y amplitud corresponde al oscilador lineal, no al péndulo de amplitud arbitraria.

Lo que permiten reconstruir unas observaciones

Un registro de posición con suficiente resolución puede dar amplitud, período y fase del modelo. Medir sólo posiciones en instantes muy separados puede dejar ambigua incluso la frecuencia: movimientos que completan ciclos adicionales entre las muestras pueden coincidir en todos los puntos registrados. El ejercicio 18 construye dos ejemplos exactos.

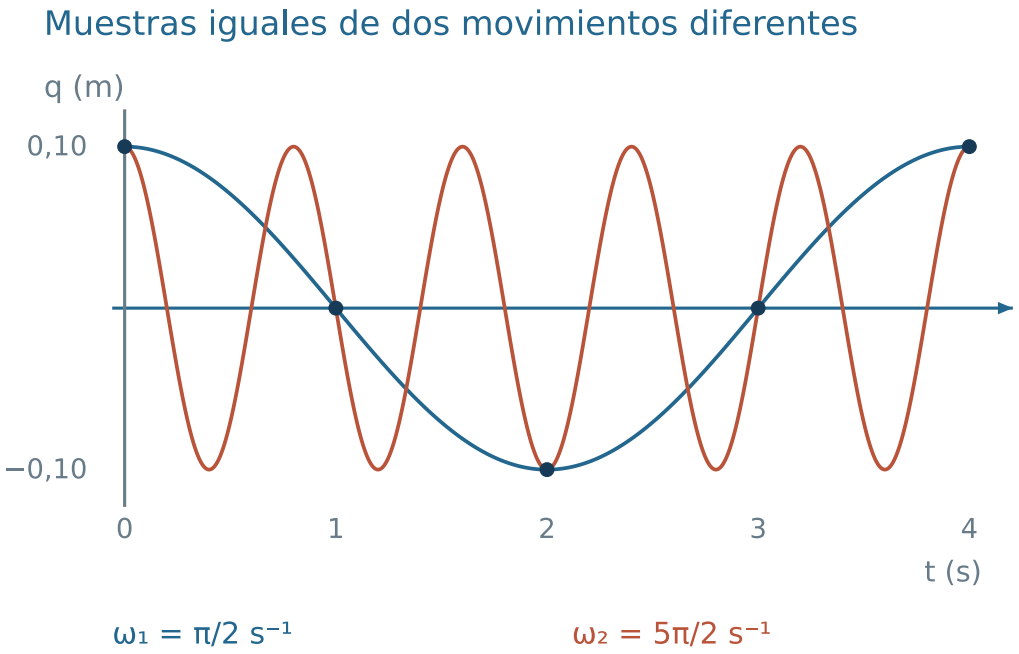


Figura 10.6. Los puntos muestran el mismo registro en tiempos enteros para dos movimientos distintos. Una observación intermedia permite separarlos. Las curvas son modelos matemáticos; los puntos no se presentan como mediciones reales.

El período se estima mejor contando varias oscilaciones equivalentes que cronometrando una sola. Sin embargo, la reducción de una cota temporal por ciclo no elimina otras incertidumbres, como una masa mal conocida o el cambio de amplitud por pérdidas. Del período ideal $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ se obtiene $k = 4\pi^2 m/T^2$: una inferencia de rigidez exige conservar las cotas de ambas magnitudes.

La propia prueba de unicidad permite interpretar qué sucede con pequeñas diferencias de preparación. Para dos soluciones del mismo oscilador, su diferencia vuelve a ser armónica y permanece acotada por una amplitud fijada por las diferencias iniciales. En cambio, un pequeño error de frecuencia puede producir un desfase creciente al comparar durante muchos ciclos. Los dos últimos problemas distinguen estas situaciones; la estabilidad frente a los datos iniciales no convierte un modelo aproximado en exacto para todo tiempo.

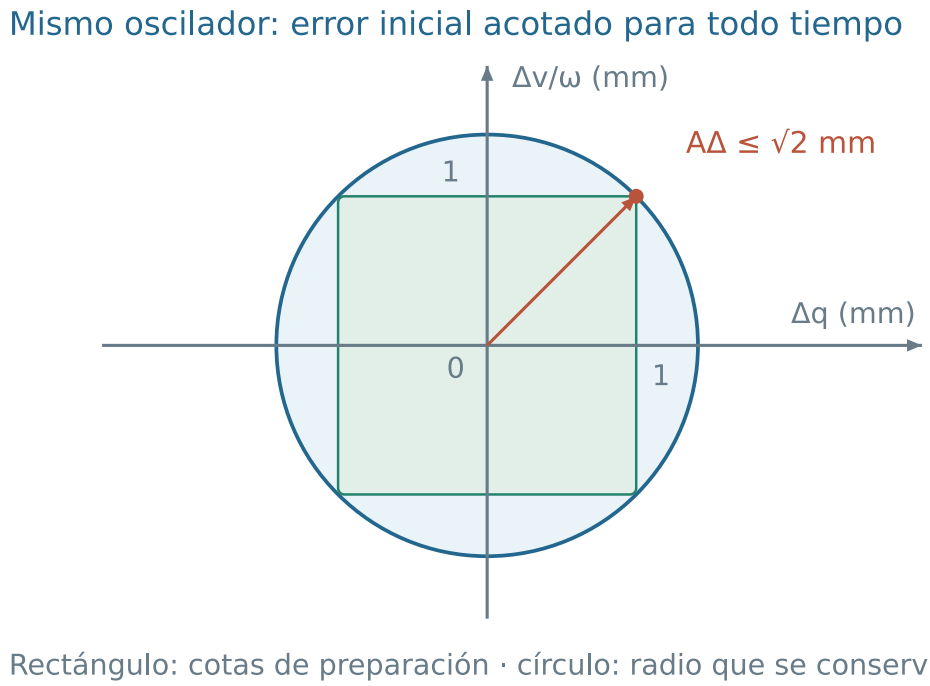


Figura 10.7. Ambos ejes tienen unidades de longitud al representar $\Delta v/\omega$ frente a Δq. Para el mismo valor de ω, el radio de error se conserva. Comparar dos frecuencias distintas es otro problema, que puede acumular fase.

Ejercicios

Los primeros cinco problemas fijan la traducción entre preparación, solución y reloj. Del 6 al 10 se combinan datos incompletos, energía y elección del equilibrio. Los restantes introducen impulsos, contactos, dos masas libres, aproximaciones y mediciones. Todos los datos son didácticos. Los resortes se consideran ideales y sin masa, y los soportes fijos, salvo donde el enunciado indique lo contrario. Se omiten pérdidas; para gravedad se usa $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.

1. Soltar desde el reposo

Una masa de 0,5 kg está unida a un resorte horizontal de constante 18 N/m. Se suelta en reposo a 0,10 m del equilibrio. Obtén posición, período, rapidez máxima y energía.

2. Comenzar cruzando el equilibrio

Una masa de un kilogramo, unida a un resorte de 9 N/m, pasa por el equilibrio con velocidad $-0{,}60\,\mathrm{m/s}$ en $t = 0$. Encuentra su solución, amplitud y una fase inicial para la convención del coseno. Calcula cuándo llega por primera vez al extremo negativo y cuándo vuelve a cruzar el equilibrio.

3. Resolver el reloj del ejemplo inicial

Para el carro de dos kilogramos y resorte de 8 N/m, con $x_0 = 0{,}12\,\mathrm{m}$ y $v_0 = 0{,}32\,\mathrm{m/s}$, reconstruye amplitud, primera detención y primer cruce posterior del equilibrio. Indica el sentido de movimiento en ese cruce.

4. Distinguir hertz de radianes por segundo

Un oscilador de masa 0,20 kg tiene amplitud de tres centímetros y frecuencia de dos hertz. Calcula frecuencia angular, constante del resorte, rapidez máxima y energía, conservando el factor 2π.

5. Recorrer la mitad de la amplitud

Un oscilador parte del extremo positivo en reposo. ¿Cuánto tarda en alcanzar por primera vez $q = A/2$? Expresa el tiempo como fracción de su período y encuentra la velocidad en ese instante.

6. Una rapidez deja dos estados posibles

En un oscilador con $m = 2\,\mathrm{kg}$ y $k = 8\,\mathrm{N/m}$ se mide $q = 0{,}06\,\mathrm{m}$ y rapidez $0{,}16\,\mathrm{m/s}$. Tomando ese instante como origen temporal, determina la amplitud y las dos soluciones compatibles. ¿Fija la energía cuál de ellas ocurre?

7. Una proporción entre energías

Un oscilador se suelta desde $q = A > 0$. Determina el primer instante en que su energía potencial es tres veces su energía cinética. Expresa tiempo, posición y velocidad mediante T, A y ω.

8. Cambiar masa y rigidez

Se comparan dos osciladores con la misma amplitud. El segundo tiene cuatro veces la masa y nueve veces la constante elástica del primero. Compara sus períodos, frecuencias angulares, rapideces máximas y energías. Explica por qué fijar la amplitud no equivale a fijar la energía.

9. La longitud natural no es el equilibrio cargado

Una masa de 0,5 kg cuelga de un resorte vertical de 50 N/m. Se suelta desde la longitud natural y en reposo. Con y hacia abajo desde esa longitud, calcula equilibrio, solución, mayor extensión y período.

10. Encender una fuerza constante

Un carro de dos kilogramos está inicialmente en reposo en la longitud natural de un resorte horizontal de 8 N/m. Desde $t = 0$ se aplica y mantiene un tirón de 0,8 N hacia la derecha. Encuentra el movimiento, la primera detención posterior y la rapidez máxima.

11. Preparar y detener con impulsos

Un oscilador de 0,5 kg y $k = 8\,\mathrm{N/m}$ parte en reposo en el equilibrio. Recibe un impulso positivo de 0,20 N s de duración idealmente despreciable. Obtén el movimiento posterior. ¿Qué impulso lo detendría definitivamente al regresar por primera vez al equilibrio y cuándo habría que aplicarlo?

12. Un impacto que prepara la oscilación

Un proyectil de 0,20 kg llega horizontalmente a 3 m/s y queda incrustado en un bloque de 0,80 kg unido a un resorte horizontal de 25 N/m. Antes del impacto, el bloque está en reposo en el equilibrio. El choque es tan breve que el desplazamiento durante él y el impulso del resorte pueden despreciarse. Calcula la amplitud posterior y la energía cinética transformada durante el choque. Después suponga que, durante un impacto de duración a lo sumo 0,002 s, se garantiza $|x| \le 0{,}001\,\mathrm{m}$ para el bloque. Acote el efecto del impulso elástico omitido y obtenga una envolvente de la amplitud posterior, conservando los restantes datos.

13. Ambos extremos pueden moverse

Dos masas libres de uno y tres kilogramos están unidas por un resorte de constante $12\,\mathrm{N/m}$ y longitud natural $L > 0{,}20\,\mathrm{m}$. En $t = 0$, sus posiciones son $r_1 = 0$, $r_2 = L + 0{,}20\,\mathrm{m}$, y ambas están en reposo. El riel es liso. Deduce la ecuación de la extensión $q = r_2 - r_1 - L$ y encuentra frecuencia, amplitudes de cada masa respecto de sus posiciones de equilibrio y energía.

14. Dos resortes restauran el mismo desplazamiento

Un carro de un kilogramo está entre dos resortes horizontales unidos a paredes fijas, de constantes 6 y $10\,\mathrm{N/m}$. En el equilibrio sus fuerzas se compensan; al moverlo una distancia q a la derecha, la fuerza de cada resorte cambia en sentido restaurador y ambos siguen conectados. Se suelta desde $q = 0{,}05\,\mathrm{m}$. Calcula frecuencia angular, período y energía respecto del equilibrio.

15. Un péndulo y el error de la fuerza aproximada

Un péndulo simple de un metro se suelta desde un ángulo de 0,10 radianes. Obtén la solución armónica aproximada y su período. Demuestra $|\theta - \sin\theta| \le |\theta|^3/6$ y usa esa desigualdad para acotar la discrepancia del término restaurador respecto de su versión lineal en $|\theta| \le 0{,}10$. ¿Es esa cota automáticamente una cota del error del período?

16. Un resorte que no es exactamente lineal

Una masa de un kilogramo recibe la fuerza $F(q) = -kq - \beta q^3$, con $k = 9\,\mathrm{N/m}$ y $\beta = 9\,\mathrm{N/m^3}$. Parte de $q_0 = 0{,}10\,\mathrm{m}$ en reposo; se considera una solución de clase C^2 definida al menos hasta dos segundos. Construye el potencial y usa la energía para demostrar $|q(t)| \le 0{,}10\,\mathrm{m}$ mientras exista la solución. Compara con $q_h(t) = 0{,}10\cos(3t/\mathrm{s})\,\mathrm{m}$ y da una cota del error de posición hasta dos segundos.

17. Inferir una rigidez con cotas

Se cronometran veinte ciclos completos equivalentes. El intervalo total está entre 39,8 y 40,2 s, y la masa entre 0,99 y 1,01 kg. Bajo el modelo ideal, calcula una banda para el período y una banda para la constante elástica. Trata las bandas como cotas, sin añadir un modelo probabilístico.

18. Dos frecuencias, el mismo registro

Se toman posiciones cada segundo de un movimiento que parte del extremo positivo con amplitud $0{,}10\,\mathrm{m}$. Demuestra que $\omega_1 = \pi/2\,\mathrm{s^{-1}}$ y $\omega_2 = 5\pi/2\,\mathrm{s^{-1}}$ producen exactamente los mismos valores en esos instantes. Encuentra una observación entre cero y un segundo que los distinga. Si la masa es un kilogramo, ¿qué rigidez correspondería a cada modelo?

19. Un control uniforme de la preparación

Dos soluciones del mismo oscilador tienen diferencias iniciales Δq_0 y Δv_0. Demuestra que, para todo tiempo,

$$|\Delta q(t)| \le \sqrt{(\Delta q_0)^2 + (\Delta v_0/\omega)^2}, \qquad |\Delta v(t)| \le \omega\sqrt{(\Delta q_0)^2 + (\Delta v_0/\omega)^2}.$$

Evalúa estas cotas para $\omega = 2\,\mathrm{s^{-1}}$, $|\Delta q_0| \le 0{,}001\,\mathrm{m}$ y $|\Delta v_0| \le 0{,}002\,\mathrm{m/s}$.

20. Un pequeño error de frecuencia se acumula

Compara $q_1 = A\cos(\omega t)$ y $q_2 = A\cos((\omega + \delta\omega)t)$, con $A > 0$, $\omega > 0$ y $\omega + \delta\omega > 0$. Deduce una cota para $|q_2 - q_1|$ que muestre su dependencia temporal. Con $\omega = 2\,\mathrm{s}^{-1}$ y $\delta\omega = 0{,}002\,\mathrm{s}^{-1}$, encuentra un intervalo en que garantice error no mayor que $0{,}01A$. Examina además $t = \pi/(0{,}002\,\mathrm{s}^{-1})$.

Soluciones

1. Soltar desde el reposo

La frecuencia angular es $\omega = \sqrt{18/0{,}5}\,\mathrm{s}^{-1} = 6\,\mathrm{s}^{-1}$. Como la velocidad inicial es cero, el coeficiente del seno se anula y $q(t) = (0{,}10\,\mathrm{m})\cos(6t/\mathrm{s})$. El dato de reposo inicial simplificó la fase; no corresponde imponerlo en todos los problemas de resorte.

El período es $T = 2\pi/6\,\mathrm{s} = \pi/3\,\mathrm{s}$. La rapidez máxima vale $\omega A = 0{,}60\,\mathrm{m/s}$ y se alcanza al cruzar el equilibrio. La energía es $kA^2/2 = (18)(0{,}10)^2/2\,\mathrm{J} = 0{,}09\,\mathrm{J}$. La aceleración inicial es negativa y el primer movimiento sale hacia el equilibrio, como exige la fuerza del resorte.

2. Comenzar cruzando el equilibrio

La posición inicial nula elimina el coseno. Con $\omega = 3\,\mathrm{s}^{-1}$, queda $q(t) = (-0{,}20\,\mathrm{m})\sin(3t/\mathrm{s})$ y la amplitud es $0{,}20\,\mathrm{m}$. En la convención del coseno podemos escribir $q = A\cos(\omega t + \pi/2)$: esa fase da posición cero y velocidad inicial negativa.

El primer extremo negativo ocurre cuando $\sin(3t/\mathrm{s}) = 1$, en $t = \pi/6\,\mathrm{s}$. El siguiente cruce del equilibrio ocurre en $t = \pi/3\,\mathrm{s}$, con velocidad positiva de $0{,}60\,\mathrm{m/s}$. Es medio período después del estado inicial: la posición se repite, pero la velocidad tiene el signo contrario. Un registro de posición sin dirección no distinguiría esos dos cruces.

3. Resolver el reloj del ejemplo inicial

La solución tiene coeficientes de longitud $0{,}12$ y $0{,}16\,\mathrm{m}$, de modo que

$$A = \sqrt{0{,}12^2 + 0{,}16^2}\,\mathrm{m} = 0{,}20\,\mathrm{m}.$$

Para escribirla como $A\cos(\omega t - \delta)$ necesitamos $\cos\delta = 3/5$ y $\sin\delta = 4/5$; ambas son positivas y determinan $\delta = \arctan(4/3) \approx 0{,}92730$.

La fase inicial es $-\delta$. Al avanzar hasta cero, el carro llega al extremo positivo y se detiene por primera vez. Por tanto, $t_1 = \delta/\omega \approx 0{,}46365\,\mathrm{s}$. Después la fase llega a $\pi/2$ y la posición se anula: $t_2 = (\delta + \pi/2)/\omega \approx 1{,}24905\,\mathrm{s}$. Allí $\dot{x} = -\omega A = -0{,}40\,\mathrm{m/s}$, hacia la izquierda. Tomar un cuarto de período desde la preparación habría ignorado que no partimos desde un extremo ni desde el equilibrio.

4. Distinguir hertz de radianes por segundo

Dos ciclos por segundo corresponden a $\omega = 2\pi f = 4\pi\,\mathrm{s}^{-1}$, no a dos radianes por segundo. La constante del resorte resulta

$$k = m\omega^2 = (0{,}20\,\mathrm{kg})(16\pi^2\,\mathrm{s}^{-2}) = 3{,}2\pi^2\,\mathrm{N/m}.$$

La amplitud se convierte a metros: $A = 0{,}03\,\mathrm{m}$. Así, $v_{\max} = 0{,}12\pi\,\mathrm{m/s} \approx 0{,}377\,\mathrm{m/s}$ y $E = kA^2/2 = 0{,}00144\pi^2\,\mathrm{J} \approx 0{,}0142\,\mathrm{J}$. Omitir el factor 2π alteraría la rigidez por un factor $4\pi^2$, incluso si todas las unidades parecieran consistentes.

5. Recorrer la mitad de la amplitud

El dato inicial da $q = A\cos(\omega t)$. Durante la primera bajada desde A hasta cero, la fase crece de cero a $\pi/2$. La ecuación $\cos(\omega t) = 1/2$ tiene en ese tramo la única solución $\omega t = \pi/3$. Por tanto, $t = \pi/(3\omega) = T/6$.

La velocidad es $\dot{q} = -\omega A\sin(\pi/3) = -\sqrt{3}\,\omega A/2$. Su signo identifica el regreso hacia el equilibrio. El intervalo no es la mitad de un cuarto de período: la rapidez varía, y el movimiento dedica más tiempo a regiones cercanas al extremo, donde comienza con rapidez cero.

6. Una rapidez deja dos estados posibles

La frecuencia angular es $2\,\mathrm{s}^{-1}$. La amplitud depende del cuadrado de la velocidad y vale $A = \sqrt{0{,}06^2 + (0{,}16/2)^2}\,\mathrm{m} = 0{,}10\,\mathrm{m}$. Si la velocidad medida fuese positiva, la solución sería

$$q_+(t) = (0{,}06\,\mathrm{m})\cos(2t/\mathrm{s}) + (0{,}08\,\mathrm{m})\sin(2t/\mathrm{s}).$$

Con velocidad negativa, el último término cambia de signo y obtenemos $q_-(t)$. Ambas tienen energía $E = kA^2/2 = 0{,}04\,\mathrm{J}$ y pasan por la posición observada en $t = 0$. Para decidir cuál describe el ensayo hace falta el sentido de movimiento. La conservación de energía deja precisamente esa información fuera de su ecuación.

7. Una proporción entre energías

Desde el extremo positivo, $U = E\cos^2(\omega t)$ y $K = E\sin^2(\omega t)$. La condición $U = 3K$ implica $\tan^2(\omega t) = 1/3$. En el primer cuarto de período la fase está entre cero y $\pi/2$, y su primer valor admisible es $\pi/6$.

Resulta $t = T/12$, $q = \sqrt{3}A/2$ y $\dot{q} = -\omega A/2$. Comprobamos $U = 3E/4$ y $K = E/4$. La elección del primer instante impide usar otra raíz trigonométrica que satisfaga la proporción en un tramo posterior.

8. Cambiar masa y rigidez

La frecuencia angular cambia según $\omega_2/\omega_1 = \sqrt{9/4} = 3/2$, y el período según $T_2/T_1 = 2/3$. Con la misma amplitud, la rapidez máxima también se multiplica por $3/2$. La energía depende de $kA^2/2$ y se multiplica por nueve.

La mayor masa por sí sola tendería a alargar el período, pero la rigidez creció más que la masa en la razón relevante k/m. La amplitud mide un recorrido geométrico; preparar ese mismo recorrido con un resorte nueve veces más rígido requiere nueve veces la energía, aunque el período se determine mediante otra combinación de parámetros.

9. La longitud natural no es el equilibrio cargado

El equilibrio es $y_e = mg/k = (0{,}5)(10)/50\,\mathrm{m} = 0{,}10\,\mathrm{m}$. Medir desde él da $q_0 = -0{,}10\,\mathrm{m}$ y $v_0 = 0$. Con $\omega = \sqrt{50/0{,}5} = 10\,\mathrm{s}^{-1}$,

$$y(t) = (0{,}10\,\mathrm{m})\big[1 - \cos(10t/\mathrm{s})\big].$$

La mayor extensión es $0{,}20\,\mathrm{m}$, alcanzada por primera vez en $\pi/10\,\mathrm{s}$. El período completo es $T = \pi/5\,\mathrm{s}$. Al soltar, el resorte no ejerce fuerza, pero el peso sí; comenzar en la longitud natural no significa comenzar en un equilibrio de fuerzas. El recorrido calculado mantiene $y \geq 0$, sin requerir que un resorte colgante tire en sentido contrario por compresión.

10. Encender una fuerza constante

El tirón desplaza el equilibrio a $x_e = f_0/k = 0{,}10\,\mathrm{m}$. Respecto de ese punto el carro parte en $q_0 = -0{,}10\,\mathrm{m}$ y en reposo. Su movimiento es

$$x(t) = (0{,}10\,\mathrm{m})\big[1 - \cos(2t/\mathrm{s})\big].$$

La primera detención después de salir ocurre con fase π, en $t = \pi/2\,\mathrm{s}$, a $x = 0{,}20\,\mathrm{m}$. La rapidez máxima es $\omega A = 0{,}20\,\mathrm{m/s}$ y se alcanza al cruzar x_e. El punto de equilibrio está a mitad del recorrido y no coincide con esa primera detención. La energía cinética más la del resorte aumenta por el trabajo del tirón; la energía armónica constante corresponde al potencial efectivo referido al equilibrio desplazado.

11. Preparar y detener con impulsos

Durante el impulso ideal la posición no cambia y la velocidad salta en $J/m = 0{,}40\,\mathrm{m/s}$. La evolución posterior tiene $\omega = \sqrt{8/0{,}5} = 4\,\mathrm{s}^{-1}$ y es $q(t) = (0{,}10\,\mathrm{m})\sin(4t/\mathrm{s})$. El impulso preparó una energía $J^2/(2m) = 0{,}04\,\mathrm{J}$.

El primer regreso al equilibrio ocurre en $t = \pi/4\,\mathrm{s}$, con velocidad $-0{,}40\,\mathrm{m/s}$. Para llevarla a cero se necesita otro impulso positivo de $0{,}20\,\mathrm{N\,s}$. Tras él, posición y velocidad son cero, y la unicidad de la solución implica reposo permanente mientras el modelo no cambie. Aplicar ese impulso en un extremo produciría otra preparación: allí el carro ya está momentáneamente detenido, pero el resorte todavía tiene fuerza y energía.

12. Un impacto que prepara la oscilación

La fase inicial es un choque y su balance se hace sobre proyectil y bloque. El impulso del resorte se omite sólo durante ese intervalo breve. La conservación aproximada del momento horizontal da la velocidad común $V = (0{,}20)(3)/(1{,}00)\,\mathrm{m/s} = 0{,}60\,\mathrm{m/s}$. La posición sigue prácticamente en el equilibrio.

Después del impacto, la masa que oscila es un kilogramo, no la masa original del bloque. Su frecuencia angular es $\omega = \sqrt{25/1} = 5\,\mathrm{s}^{-1}$, por lo que $A = V/\omega = 0{,}12\,\mathrm{m}$ y $q(t) = (0{,}12\,\mathrm{m})\sin(5t/\mathrm{s})$ si reiniciamos el reloj al terminar el contacto.

La energía cinética anterior era $0{,}90\,\mathrm{J}$ y la inmediatamente posterior $0{,}18\,\mathrm{J}$. Se transformaron $0{,}72\,\mathrm{J}$ en el choque; los $0{,}18\,\mathrm{J}$ restantes son la energía del oscilador ideal posterior. Durante la oscilación ya no se conserva el momento del conjunto proyectil–bloque, porque el resorte ejerce una fuerza externa sobre ese subsistema.

La información adicional permite poner una cota a esa aproximación. Durante el impacto, $|F_s| \le k|x| \le 0{,}025\,\mathrm{N}$, y por integración $|J_s| \le 0{,}00005\,\mathrm{N\,s}$. La masa final es un kilogramo, de modo que la velocidad común posterior pertenece a

$$V \in [0{,}59995;\, 0{,}60005]\,\mathrm{m/s}.$$

También debemos conservar la posible posición de salida: $|q_0| \le 0{,}001\,\mathrm{m}$. La amplitud utiliza ambos datos, $A = \sqrt{q_0^2 + (V/\omega)^2}$. Como V es positivo en toda su banda,

$$0{,}11999\,\mathrm{m} \le A \le \sqrt{(0{,}001\,\mathrm{m})^2 + (0{,}12001\,\mathrm{m})^2} < 0{,}120015\,\mathrm{m}.$$

La banda es una envolvente segura: combina todas las cotas disponibles y puede incluir pares de posición y velocidad que un contacto concreto no produzca. El valor inicial $0{,}12\,\mathrm{m}$ queda así acompañado por una estimación de lo que se omitió. Una duración breve adquiere utilidad física al combinarse con una cota de fuerza y con la tolerancia de la amplitud que queremos predecir.

13. Ambos extremos pueden moverse

La extensión positiva ejerce fuerza hacia la derecha sobre la primera masa y hacia la izquierda sobre la segunda. Sus ecuaciones son $m_1\ddot{r}_1 = kq$ y $m_2\ddot{r}_2 = -kq$. Al restarlas en el orden que define q obtenemos

$$\ddot{q} = \ddot{r}_2 - \ddot{r}_1 = -k\left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1}\right) q.$$

La masa reducida es $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2) = 3/4\,\mathrm{kg}$ y la frecuencia relativa $\omega = \sqrt{k/\mu} = 4\,\mathrm{s}^{-1}$. Los datos dan $q(t) = (0{,}20\,\mathrm{m})\cos(4t/\mathrm{s})$.

El centro de masa permanece fijo porque no hay fuerza externa horizontal y parte del reposo. Su posición es $R = 3(L + 0{,}20\,\mathrm{m})/4$. Resolver conjuntamente $r_2 - r_1 = L + q$ y $m_1 r_1 + m_2 r_2 = (m_1 + m_2)R$ da

$$r_1 = R - \frac{3}{4}(L + q), \qquad r_2 = R + \frac{1}{4}(L + q).$$

La separación es $L + q(t) \geq L - 0{,}20\,\mathrm{m} > 0$: la hipótesis sobre L conserva el orden de las masas durante todo el movimiento. Las amplitudes respecto de las posiciones de equilibrio son 0,15 y 0,05 m. Las masas se mueven en sentidos opuestos, y las amplitudes ponderadas satisfacen $1(0{,}15) = 3(0{,}05)$, en kilogramos metro. La energía es $k(0{,}20\,\mathrm{m})^2/2 = 0{,}24\,\mathrm{J}$. Usar $\sqrt{k/m_1}$ habría supuesto inmóvil el otro extremo y habría descrito otro sistema.

14. Dos resortes restauran el mismo desplazamiento

Una vez restadas las fuerzas que se compensan en el equilibrio, cada resorte aporta una variación $-k_i q$. Por tanto, la fuerza neta es $-(k_1 + k_2)q$ y la rigidez efectiva es $16\,\mathrm{N/m}$. Esto utiliza la geometría especificada de apoyos fijos: no es una regla para sumar cualquier par de resortes en cualquier conexión.

Con masa de un kilogramo, $\omega = 4\,\mathrm{s}^{-1}$ y $T = \pi/2\,\mathrm{s}$. La solución es $q(t) = (0{,}05\,\mathrm{m})\cos(4t/\mathrm{s})$ y la energía sobre su valor en el equilibrio es $E = 16(0{,}05)^2/2\,\mathrm{J} = 0{,}02\,\mathrm{J}$. Las posibles deformaciones previas cambian la energía de referencia, pero no esta variación cuadrática si ambos resortes mantienen su comportamiento lineal.

15. Un péndulo y el error de la fuerza aproximada

La ecuación aproximada tiene $\omega = \sqrt{10}\,\mathrm{s}^{-1}$. Los datos proporcionan

$$\theta_h(t) = 0{,}10\cos(\sqrt{10}\,t/\mathrm{s}),$$

con período $T_h = 2\pi/\sqrt{10}\,\mathrm{s} \approx 1{,}987\,\mathrm{s}$.

Para $\theta \geq 0$, la identidad $\theta - \sin\theta = \int_0^\theta (1 - \cos u)\,du$ permite acotar la diferencia. Como $1 - \cos u = 2\sin^2(u/2) \leq u^2/2$, integrar da $0 \leq \theta - \sin\theta \leq \theta^3/6$. La simetría impar extiende el resultado a valores negativos con valores absolutos.

Para $0 < |\theta| \leq 0{,}10$, dividir por $|\theta|$ da una discrepancia relativa respecto del término lineal no mayor que $\theta^2/6 \leq 1/600 \approx 0{,}00167$; en cero ambas fuerzas restauradoras se anulan y la comparación se interpreta por continuidad. Es una cota de los términos de la ecuación en una misma posición angular. Para convertirla en una cota de trayectoria o período hace falta analizar la evolución, de modo que no podemos atribuir al período ese porcentaje sin otro argumento.

16. Un resorte que no es exactamente lineal

Un potencial con referencia cero en el origen es $U(q) = kq^2/2 + \beta q^4/4$, porque $-U'(q) = -kq - \beta q^3$. La energía inicial es

$$E = \frac{1}{2}(9\,\mathrm{N/m})(0{,}10\,\mathrm{m})^2 + \frac{1}{4}(9\,\mathrm{N/m^3})(0{,}10\,\mathrm{m})^4 = 0{,}045225\,\mathrm{J}.$$

El potencial es par y estrictamente creciente con $|q|$ para $|q| > 0$. Como la energía cinética es no negativa y $E = U(0{,}10\,\mathrm{m})$, la trayectoria no puede alcanzar $|q| > 0{,}10\,\mathrm{m}$. La energía también acota la velocidad. El enunciado supone que la solución está definida hasta dos segundos; el confinamiento permite usar en todo ese intervalo una única cota del término que se omitió.

La ecuación puede escribirse $\ddot{q} + (3\,\mathrm{s^{-1}})^2 q = r(t)$, con $r = -\beta q^3/m$. El confinamiento recién probado da $|r| \le 0{,}009\,\mathrm{m/s^2}$. El oscilador lineal tiene los mismos datos iniciales; por la estimación del capítulo,

$$|q(t) - q_h(t)| \le \frac{0{,}009\,\mathrm{m/s^2}}{3\,\mathrm{s^{-1}}}\, t.$$

Hasta dos segundos la diferencia queda acotada por $0{,}006\,\mathrm{m}$. El término cúbico representa a lo sumo el uno por ciento del término lineal en $0 < |q| \le 0{,}10\,\mathrm{m}$, pero esta cota conservadora de posición llega al seis por ciento de la amplitud en ese tiempo. Son magnitudes distintas; la cota no afirma que el error alcance efectivamente ese máximo.

17. Inferir una rigidez con cotas

Dividir el tiempo total por veinte da $T \in [1{,}99, 2{,}01]\,\mathrm{s}$. En $k = 4\pi^2 m/T^2$, aumentar la masa aumenta k y aumentar el período lo disminuye. Si no se conoce otra dependencia entre las bandas, una cota válida es

$$k \in \left[\frac{4\pi^2(0{,}99\,\mathrm{kg})}{(2{,}01\,\mathrm{s})^2},\, \frac{4\pi^2(1{,}01\,\mathrm{kg})}{(1{,}99\,\mathrm{s})^2}\right].$$

Los extremos valen aproximadamente $9{,}674$ y $10{,}069\,\mathrm{N/m}$. Conservar la banda evita presentar la rigidez inferida como un valor exacto de $\pi^2\,\mathrm{N/m}$. Contar más ciclos puede reducir el efecto de una cota fija del cronómetro por ciclo, pero no reduce por ese mecanismo la incertidumbre de la masa ni verifica la idealización lineal.

18. Dos frecuencias, el mismo registro

Las soluciones son $q_1(t) = (0{,}10\,\mathrm{m})\cos(\pi t/(2\,\mathrm{s}))$ y $q_2(t) = (0{,}10\,\mathrm{m})\cos(5\pi t/(2\,\mathrm{s}))$. Para cada entero $n \ge 0$, la diferencia de fase en $t = n\,\mathrm{s}$ es $2\pi n$, y por periodicidad los cosenos coinciden. Ambas soluciones tienen además velocidad inicial cero.

En medio segundo, sus fases son $\pi/4$ y $5\pi/4$. Sus posiciones son respectivamente $+\sqrt{2}/20\,\mathrm{m}$ y $-\sqrt{2}/20\,\mathrm{m}$, por lo que esa observación las distingue. Para una masa de un kilogramo, las rigideces serían $k_1 = \pi^2/4\,\mathrm{N/m}$ y $k_2 = 25\pi^2/4\,\mathrm{N/m}$. La coincidencia en la malla temporal no identifica una única fuerza restauradora; el segundo movimiento completa un ciclo adicional entre muestras consecutivas.

19. Un control uniforme de la preparación

La diferencia de dos soluciones de la misma ecuación satisface de nuevo la ecuación armónica. Sus coeficientes iniciales son Δq_0 y $\Delta v_0/\omega$, por lo que su amplitud es $A_\Delta = \sqrt{(\Delta q_0)^2 + (\Delta v_0/\omega)^2}$. Aplicar los máximos ya demostrados da $|\Delta q| \le A_\Delta$ y $|\Delta v| \le \omega A_\Delta$ para todo tiempo.

Con las cotas indicadas, ambos coeficientes de longitud tienen módulo no mayor que $0{,}001\,\mathrm{m}$. Así, $|\Delta q(t)| \le \sqrt{2}\,0{,}001\,\mathrm{m} \approx 0{,}001414\,\mathrm{m}$ y $|\Delta v(t)| \le \sqrt{2}\,0{,}002\,\mathrm{m/s} \approx 0{,}002828\,\mathrm{m/s}$. La comparación utiliza el mismo equilibrio y los mismos parámetros del oscilador. El resultado no cubre una frecuencia ligeramente distinta, que cambiaría la ecuación que satisface la diferencia.

20. Un pequeño error de frecuencia se acumula

La identidad de diferencia de cosenos da

$$q_2 - q_1 = -2A \sin\big((\omega + \delta\omega/2)t\big)\sin(\delta\omega\, t/2).$$

Usando $|\sin u| \le \min(1, |u|)$ resulta $|q_2 - q_1| \le \min(2A, A|\delta\omega| t)$ para $t \ge 0$. Para garantizar una discrepancia no mayor que $0{,}01A$ basta $|\delta\omega| t \le 0{,}01$. Con el valor dado obtenemos $0 \le t \le 5\,\mathrm{s}$. Es una garantía suficiente, no una afirmación de que el error aumente monótonamente o exceda la tolerancia inmediatamente después de cinco segundos.

En $t = \pi/(0{,}002\,\mathrm{s}^{-1}) = 500\pi\,\mathrm{s}$, la fase del primer movimiento es 1000π y la del segundo 1001π. Sus posiciones son $+A$ y $-A$; la diferencia alcanza $2A$. Una variación relativa de frecuencia de sólo una milésima permite esta oposición tras muchos ciclos. La cota uniforme del problema anterior y este desfase no se contradicen: el primero compara datos iniciales dentro de una misma dinámica; el segundo compara dos dinámicas distintas.

Lecturas de apoyo

La interpretación de fuerza restauradora procede de «Fuerzas y leyes de Newton»; el control mediante energía se apoya en «Trabajo y energía cinética» y «Potencial, equilibrio y estabilidad». El impulso que prepara una oscilación y la reducción de dos masas utilizan «Impulso, colisiones y centro de masa». Las cotas y la identificación de un modelo por observaciones retoman «El problema de medir». La solución, su unicidad y la estimación del residuo se justifican localmente, sin presuponer un curso general de ecuaciones diferenciales.

El contraste selectivo con los clásicos comprende Young y Freedman, *Sears y Zemansky. Física universitaria*, volumen 1, 13.ª edición (Pearson, 2013), §14.2, pp. 439–442; Serway y Jewett, *Física para ciencias e ingeniería*, volumen 1, 10.ª edición española (Cengage, 2019), §15.2, pp. 388–389; y Spivak, *Physics for Mathematicians. Mechanics I* (2010), comienzo del capítulo 8, p. 287. Los problemas, las pruebas y los diagramas de este capítulo son desarrollos propios. La elección de seno o coseno como convención de fase puede variar entre libros; las condiciones iniciales permiten traducir entre ellas.

Capítulo 11

Disipación y respuesta forzada

Un carro unido a un resorte vuelve cada vez menos lejos después de que lo soltamos. La primera excursión hacia la derecha llega a diez centímetros del equilibrio; la siguiente, al mismo lado, apenas supera cuatro milímetros. El resorte sigue tirando hacia el equilibrio y la masa sigue siendo la misma. ¿Qué cambió respecto del oscilador del capítulo anterior? ¿Podemos reconstruir el movimiento y averiguar qué fuerza haría falta para sostenerlo?

Consideremos un carro de masa $m = 1\,\mathrm{kg}$, un resorte horizontal de constante $k = 5\,\mathrm{N/m}$ y un amortiguador sujeto al laboratorio. El eje x apunta hacia la derecha y su cero coincide con el equilibrio del resorte. Peso y normal se compensan. Modelaremos la fuerza del amortiguador como $-b\dot{x}$, con $b = 2\,\mathrm{kg/s}$. Suponemos válidas ambas leyes de fuerza mientras $|x| < 0{,}15\,\mathrm{m}$ y $|\dot{x}| < 0{,}50\,\mathrm{m/s}$. Despreciamos masa del resorte, rotación del carro y otras resistencias. Soltamos el carro desde $x(0) = 0{,}10\,\mathrm{m}$, con velocidad inicial nula.

La segunda ley da

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0.$$

El término nuevo depende de la velocidad. Su signo cambia cuando el carro cambia de sentido: siempre se opone al movimiento relativo al laboratorio. En cambio, la fuerza del resorte cambia de signo al atravesar el equilibrio. Confundir estas dos dependencias impediría incluso dibujar correctamente las fuerzas durante un ciclo.

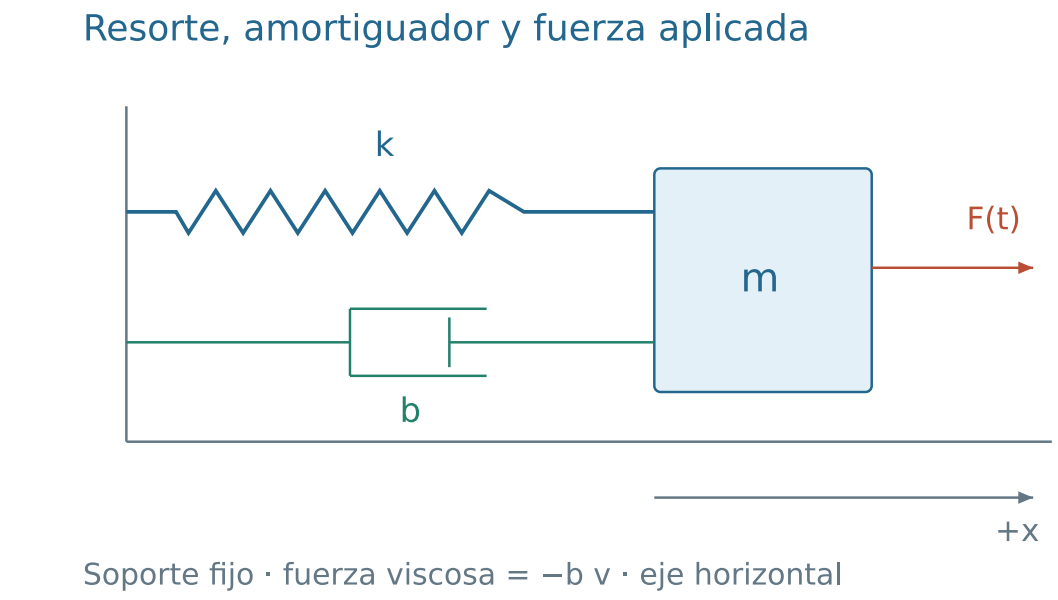


Figura 11.1. El amortiguador se refiere a un soporte fijo. La fuerza aplicada se incorpora después. Las flechas indican el eje y una fuerza aplicada positiva; la fuerza viscosa debe determinarse a partir del signo de la velocidad.

Lo que dice la energía antes de resolver la trayectoria

La energía mecánica que seguiremos es la suma de energía cinética del carro y energía potencial elástica:

$$E(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 + \frac{1}{2}kx(t)^2.$$

El amortiguador queda fuera de esta reserva de energía mecánica. La energía que recibe puede convertirse en energía interna del fluido y de sus paredes; describir ese calentamiento exigiría ampliar el sistema. Por eso una disminución de E es compatible con la conservación de energía de un sistema más amplio.

Si un actuador agrega una fuerza continua $F(t)$, la ecuación y el balance son

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t), \qquad \frac{dE}{dt} = F(t)\dot{x} - b\dot{x}^2.$$

Proposición. Sean $m, k > 0$, $b \geq 0$ y x una solución de clase C^2 de la ecuación anterior para $t \geq 0$. Para cualesquiera $t_2 \geq t_1 \geq 0$,

$$E(t_2) - E(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} F(t)\dot{x}(t)\,dt - \int_{t_1}^{t_2} b\dot{x}(t)^2\,dt.$$

En particular, si $F = 0$, E es no creciente. Dos soluciones con la misma fuerza y los mismos datos iniciales coinciden para todo $t \geq 0$ donde estén definidas.

Demostración. La regla de la cadena permite reunir la derivada de ambas energías como $\dot{E} = \dot{x}(m\ddot{x} + kx)$. La ecuación de movimiento sustituye el paréntesis por $F - b\dot{x}$; integrar esa identidad produce el balance. Si $F = 0$, el integrando disipativo es no negativo y la energía no puede aumentar. Para la unicidad, la diferencia d de dos soluciones satisface la ecuación sin fuerza, con $d(0) = \dot{d}(0) = 0$. Su energía E_d parte de cero y no crece. Puesto que $E_d \geq 0$, debe seguir siendo cero, lo que obliga a $d = 0$ porque $k > 0$.

La prueba de unicidad justifica una estrategia útil: encontrar una fórmula que satisfaga la ecuación y los dos datos basta para identificar el movimiento. La disminución de energía, por sí sola, todavía no demuestra que la posición tienda a cero; esa conclusión se verá en las soluciones explícitas.

Para el carro inicial, $E(0) = 0{,}025\,\mathrm{J}$. Como $E(t) \leq E(0)$, tenemos $|x(t)| \leq 0{,}10\,\mathrm{m}$ y $|\dot{x}(t)| \leq \sqrt{0{,}05}\,\mathrm{m/s} < 0{,}224\,\mathrm{m/s}$. Ambas cotas quedan dentro del régimen declarado. Hemos comprobado la coherencia del modelo sin conocer todavía cuándo ocurren los extremos.

Separar la caída de la oscilación

Dividir la ecuación libre por m sugiere introducir

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}, \qquad \gamma = \frac{b}{2m}.$$

Ambas constantes tienen unidades s^{-1}; ω_0 es la frecuencia angular que tendría el mismo conjunto masa–resorte sin amortiguador. El coeficiente b tiene unidades de masa dividida por tiempo, no de fuerza ni de frecuencia. El factor dos en la definición de γ simplifica la siguiente sustitución.

Busquemos $x(t) = e^{-\gamma t}y(t)$. Las dos derivadas son

$$\dot{x} = e^{-\gamma t}(\dot{y} - \gamma y), \qquad \ddot{x} = e^{-\gamma t}(\ddot{y} - 2\gamma\dot{y} + \gamma^2 y).$$

Al sustituir, los términos con $\dot{y}$ se cancelan y queda

$$\ddot{y} + (\omega_0^2 - \gamma^2)y = 0.$$

La transformación es reversible, pues la exponencial nunca se anula. Si $\gamma < \omega_0$, hemos recuperado la ecuación del capítulo anterior, con una frecuencia menor. Los datos de y son $y(0) = x_0$ y $\dot{y}(0) = v_0 + \gamma x_0$: el segundo dato cambia porque hemos extraído una exponencial que también contribuye a la velocidad.

Definición. Para $m, k > 0$ y $b > 0$, el oscilador lineal libre es *subamortiguado* si $\gamma < \omega_0$, *críticamente amortiguado* si $\gamma = \omega_0$ y *sobreamortiguado* si $\gamma > \omega_0$. En el primer caso denotaremos por $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ su frecuencia angular amortiguada.

Proposición. En el caso subamortiguado, la solución con posición x_0 y velocidad v_0 en $t = 0$ es

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left[x_0 \cos(\omega_d t) + \frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega_d}\sin(\omega_d t)\right].$$

Demostración. La expresión entre corchetes resuelve la ecuación de y y toma los datos que acabamos de calcular. La sustitución reversible produce una solución de la ecuación original con los datos pedidos. La unicidad ya demostrada descarta otras soluciones con esos datos.

Para nuestro carro, $\omega_0 = \sqrt{5}\,\mathrm{s}^{-1}$, $\gamma = 1\,\mathrm{s}^{-1}$ y $\omega_d = 2\,\mathrm{s}^{-1}$. Si escribimos $u = t/(1\,\mathrm{s})$, una variable adimensional, obtenemos

$$x(t) = (0{,}10\,\mathrm{m})e^{-u}\left(\cos 2u + \frac{1}{2}\sin 2u\right), \qquad \dot{x}(t) = -(0{,}25\,\mathrm{m/s})e^{-u}\sin 2u.$$

La velocidad se anula cuando $u = n\pi/2$. El primer extremo negativo ocurre en $t = \pi\,\mathrm{s}/2$ y vale $-(0{,}10\,\mathrm{m})e^{-\pi/2}$. El siguiente extremo positivo llega en $t = \pi\,\mathrm{s}$ y vale $(0{,}10\,\mathrm{m})e^{-\pi} \approx 0{,}00432\,\mathrm{m}$. Ya podemos explicar los cuatro milímetros del comienzo.

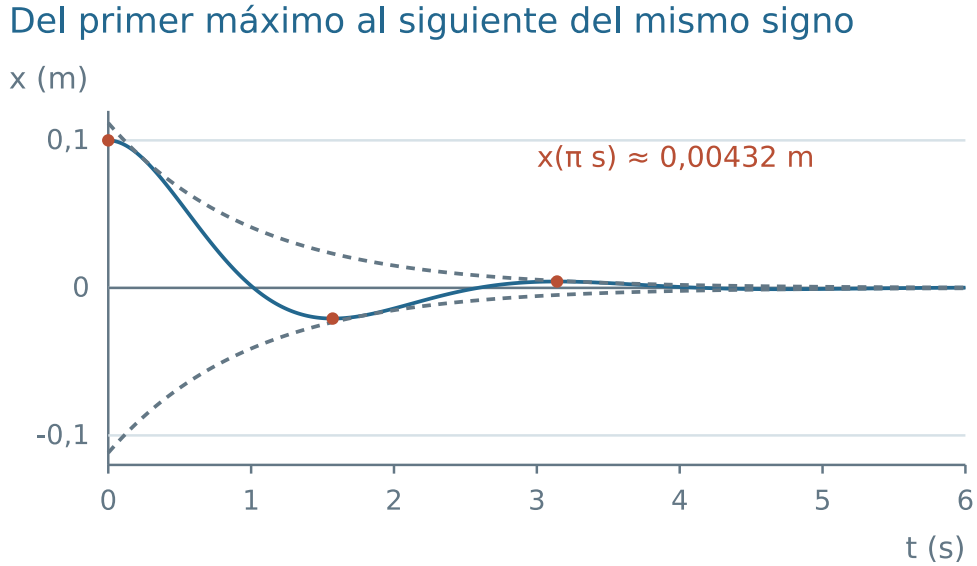


Figura 11.2. Se representa la solución con los datos del problema de apertura. Las curvas discontinuas son cotas de la posición, no trayectorias adicionales. Se señalan extremos reales del movimiento.

La misma solución puede escribirse $x = Re^{-\gamma t}\cos(\omega_d t - \alpha)$, con $R \geq 0$ constante. La cantidad $Re^{-\gamma t}$ es una envolvente: acota $|x|$. Sin embargo, cuando el coseno vale uno su derivada total es $-\gamma R e^{-\gamma t}$, que no es cero si $\gamma R > 0$. Por ello los máximos de posición no

se obtienen simplemente haciendo uno al coseno. La pendiente de la envolvente desplaza los extremos.

Una solución libre subamortiguada satisface $x(t+T_d) = e^{-\gamma T_d}x(t)$, donde $T_d = 2\pi/\omega_d$. También lo satisface su velocidad. Los estados se repiten a escala, pero no se repiten idénticos: el movimiento amortiguado no es periódico salvo en la solución de reposo. Llamar período amortiguado a T_d significa aquí el intervalo entre máximos sucesivos del mismo signo.

Regresar sin una sucesión de oscilaciones

Si $\gamma = \omega_0$, la ecuación transformada es $\ddot{y} = 0$. Integrarla dos veces da $y = C + Dt$, y los datos fijan

$$x(t) = e^{-\omega_0 t}\left[x_0 + (v_0 + \omega_0 x_0)t\right].$$

El factor t no puede eliminarse: sin él sólo quedaría un parámetro para imponer dos datos iniciales. Esta solución no contiene seno ni coseno. Para $x_0 > 0$ y $v_0 = 0$, su derivada es $-\omega_0^2 x_0 t e^{-\omega_0 t}$, negativa para $t > 0$; la posición se acerca a cero desde el mismo lado.

En el caso sobreamortiguado, pongamos $\lambda = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$. La ecuación transformada se resuelve con exponenciales y resulta

$$x(t) = Ce^{r_+ t} + De^{r_- t}, \qquad r_\pm = -\gamma \pm \lambda.$$

Ambas raíces son negativas porque $0 < \lambda < \gamma$. Los coeficientes se encuentran resolviendo $C + D = x_0$ y $r_+ C + r_- D = v_0$; el determinante es distinto de cero. La sustitución verifica estas soluciones y la unicidad vuelve a garantizar que no faltan otras. En los tres regímenes, cuando $b > 0$, posición y velocidad tienden a cero.

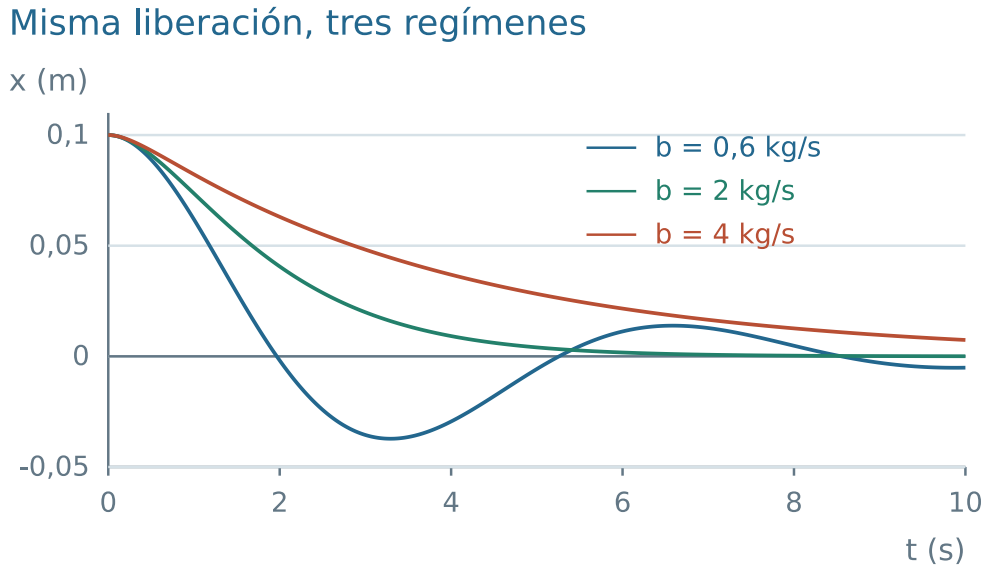


Figura 11.3. Se mantienen $m = k = 1$ en unidades SI, $x_0 = 0{,}10\,\mathrm{m}$ y $v_0 = 0$. Se comparan $b = 0{,}6$, $b = 2$ y $b = 4\,\mathrm{kg/s}$. La afirmación de regreso sin cruce se refiere a estos datos de liberación desde el reposo.

La clasificación de la ecuación no determina todos los detalles de una trayectoria. Un sistema crítico puede atravesar el equilibrio si se lanza hacia él con suficiente rapidez; lo que

no presenta es una sucesión sostenida de cruces oscilatorios. También es incorrecto concluir que aumentar b siempre acelera el retorno. En el régimen muy sobreamortiguado,

$$r_+ = -\frac{\omega_0^2}{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} \approx -\frac{k}{b}.$$

La igualdad proviene de racionalizar la raíz. La aproximación requiere $\gamma \gg \omega_0$ y revela un modo lento cuya escala temporal crece como b/k. La fuerte resistencia puede retardar el regreso. Tampoco se alcanza exactamente el reposo en un tiempo finito en estas soluciones no triviales: cualquier tiempo de asentamiento debe especificar una tolerancia.

Medir el amortiguamiento

Dos máximos positivos consecutivos de una oscilación subamortiguada, medidos respecto del equilibrio, permiten calcular

$$\Lambda = \log \frac{x_n}{x_{n+1}} = \gamma T_d.$$

Se llama *decremento logarítmico* a Λ. El cociente exige extremos del mismo signo separados por un ciclo completo; con valores absolutos de extremos consecutivos, separados por medio ciclo, aparece la mitad de ese decremento. La relación es exacta para el modelo lineal, incluso si el amortiguamiento no es pequeño dentro del régimen subamortiguado.

Con T_d y Λ podemos reconstruir $\gamma = \Lambda/T_d$, $\omega_d = 2\pi/T_d$ y $\omega_0 = \sqrt{\omega_d^2 + \gamma^2}$. Si además conocemos m, obtenemos $b = 2m\gamma$ y $k = m\omega_0^2$. Sin una masa conocida, esos datos sólo identifican las razones b/m y k/m.

El ajuste no constituye una comprobación independiente de las leyes de fuerza. Después de usar dos picos para determinar parámetros, debemos predecir otros picos o cambiar la preparación. Un descenso aproximadamente constante de los picos, en lugar de un cociente constante, sugeriría revisar el modelo viscoso. El rozamiento seco del capítulo 5 y una resistencia proporcional al cuadrado de la rapidez producen otras leyes de pérdida.

También debe distinguirse la envolvente de la energía instantánea. Sustituir $x = Re^{-\gamma t}\cos\theta$, $\theta = \omega_d t - \alpha$, da exactamente

$$E(t) = \frac{mR^2}{2} e^{-2\gamma t}\left[(\gamma\cos\theta + \omega_d \sin\theta)^2 + \omega_0^2 \cos^2\theta\right].$$

El corchete varía con el tiempo. Aunque E no aumenta, no es en general igual a $E(0)e^{-2\gamma t}$. En dos instantes separados por T_d, sí se cumple la relación exacta $E(t + T_d) = e^{-2\gamma T_d} E(t)$. Si $\gamma/\omega_0 \ll 1$, reemplazar el corchete por ω_0^2 introduce correcciones relativas del orden de γ/ω_0 y permite la descripción aproximada por una exponencial de energía. No usaremos esa aproximación para localizar un extremo ni para verificar un balance instantáneo.

Sostener el movimiento con una fuerza periódica

Agreguemos un actuador que ejerce $F(t) = F_0\cos(\Omega t)$, con $F_0 > 0$ y $\Omega > 0$. Suponemos que su amplitud se mantiene fija al variar la frecuencia. Esta precisión será necesaria al comparar resonancias. El movimiento completo satisface

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0\cos(\Omega t).$$

La fuerza contiene una frecuencia, pero los datos iniciales todavía pueden agregar otras componentes al movimiento. Para encontrar una respuesta que siga al actuador ensayemos $x_s = a\cos(\Omega t) + c\sin(\Omega t)$. La sustitución y la igualdad de los coeficientes del seno y del coseno dan

$$(k - m\Omega^2)a + b\Omega c = F_0, \qquad (k - m\Omega^2)c - b\Omega a = 0.$$

Es un sistema de dos ecuaciones lineales. Su determinante $D = (k - m\Omega^2)^2 + (b\Omega)^2$ es positivo si $b > 0$. Así,

$$a = \frac{F_0(k - m\Omega^2)}{D}, \qquad c = \frac{F_0 b\Omega}{D}.$$

Podemos reunir ambos coeficientes en $x_s = A\cos(\Omega t - \delta)$, donde

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (b\Omega)^2}}, \qquad \cos\delta = \frac{k - m\Omega^2}{\sqrt{D}}, \quad \sin\delta = \frac{b\Omega}{\sqrt{D}}.$$

Elegimos $0 < \delta < \pi$. La fase δ representa un retraso del desplazamiento respecto de la fuerza. Los dos cocientes fijan su cuadrante, incluso cuando $k - m\Omega^2$ cambia de signo; utilizar sólo una tangente podría convertir un retraso mayor que un cuarto de ciclo en un adelanto aparente.

Definición. Para una fuerza $F_0\cos(\Omega t)$ con $\Omega > 0$ y $b > 0$, llamaremos *respuesta estacionaria* a la solución periódica x_s de período $2\pi/\Omega$. Llamaremos *transitorio* a la diferencia $h = x - x_s$ entre un movimiento completo y esa respuesta.

Proposición. Para $m, k, b, F_0, \Omega > 0$, la respuesta estacionaria es única y tiene la amplitud y la fase anteriores. Toda solución con datos iniciales finitos se escribe $x = x_s + h$, donde h resuelve la ecuación libre y $h, \dot{h}$ tienden a cero cuando $t \to \infty$.

Demostración. El sistema lineal construye una solución periódica. Al restar su ecuación de la ecuación de x, queda $m\ddot{h} + b\dot{h} + kh = 0$; las fórmulas de los tres regímenes prueban el decaimiento de h y de su derivada. Si existieran dos soluciones periódicas con el período de la fuerza, su diferencia sería también periódica y tendería a cero. Evaluarla en $t + n(2\pi/\Omega)$ y hacer $n \to \infty$ muestra que vale cero en cada t, por lo que ambas soluciones coinciden.

La palabra estacionaria describe una forma de respuesta sostenida, no una posición inmóvil. El tiempo que debemos esperar para observarla depende del modo libre más lento y de la tolerancia del experimento. En un sistema sobreamortiguado no basta estimarlo con $1/\gamma$.



Figura 11.4. Para $m = 1\,\text{kg}$, $k = 5\,\text{N/m}$, $b = 2\,\text{kg/s}$ y $F(t) = (0{,}5\,\text{N})\cos(2t/\text{s})$, se conecta la fuerza con el carro inicialmente en reposo en el equilibrio. La respuesta estacionaria no satisface por sí sola esos datos iniciales.

En ese ejemplo, $D = 17\,(\text{N/m})^2$, $a = (1/34)\,\text{m}$ y $c = (2/17)\,\text{m}$. La amplitud es $A = (0{,}5/\sqrt{17})\,\text{m} \approx 0{,}121\,\text{m}$ y el retraso satisface $\tan\delta = 4$, en el primer cuadrante. Pero $x_s(0) = a$ y $\dot{x}_s(0) = 2c/\text{s}$ no son nulos. El transitorio debe empezar en $h(0) = -a$ y $\dot{h}(0) = -2c/\text{s}$ para corregir ambos datos. Aplicar mecánicamente la fórmula de amplitud al instante de conexión omitiría esa preparación.

Qué magnitud alcanza su máximo

Definición. Al variar $\Omega \geq 0$ manteniendo fijos m, k, b, F_0, llamaremos *resonancia de desplazamiento* a un máximo de $A(\Omega)$ situado en una frecuencia positiva. La resonancia de velocidad y la de potencia se referirán, respectivamente, a máximos de la amplitud de velocidad ΩA y de la potencia media absorbida. En $\Omega = 0$ interpretamos $A(0) = F_0/k$ como respuesta estática.

Para maximizar A podemos minimizar su denominador al cuadrado. Con $z = \Omega^2 \geq 0$,

$$D(z) = (k - mz)^2 + b^2 z = m^2 z^2 + (b^2 - 2mk)z + k^2.$$

Proposición. Con $m, k, b, F_0 > 0$, existe una resonancia de desplazamiento si y sólo si $\gamma < \omega_0/\sqrt{2}$. En ese caso su frecuencia es

$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}.$$

Si $\gamma \geq \omega_0/\sqrt{2}$, $A(\Omega)$ disminuye para $\Omega > 0$ y su máximo en $[0, \infty)$ está en cero.

Demostración. La derivada del polinomio D respecto de z se anula únicamente en $z_* = k/m - b^2/(2m^2) = \omega_0^2 - 2\gamma^2$. Como su coeficiente cuadrático es positivo, ese punto es el mínimo cuando pertenece al interior $z > 0$. Si $z_* \leq 0$, D es estrictamente creciente para $z > 0$, incluso cuando su derivada en cero es nula. Esto prueba ambos casos.

La condición de subamortiguamiento es más amplia. Un sistema puede oscilar al soltarlo y no presentar un pico de desplazamiento al barrer frecuencias. Cuando el pico existe y $b > 0$, tenemos $\Omega_r < \omega_d < \omega_0$. Para amortiguamiento muy pequeño las diferencias pueden

quedar por debajo de la resolución experimental; eso explica la utilidad de una frecuencia de resonancia aproximada, pero no convierte las tres expresiones en una identidad.

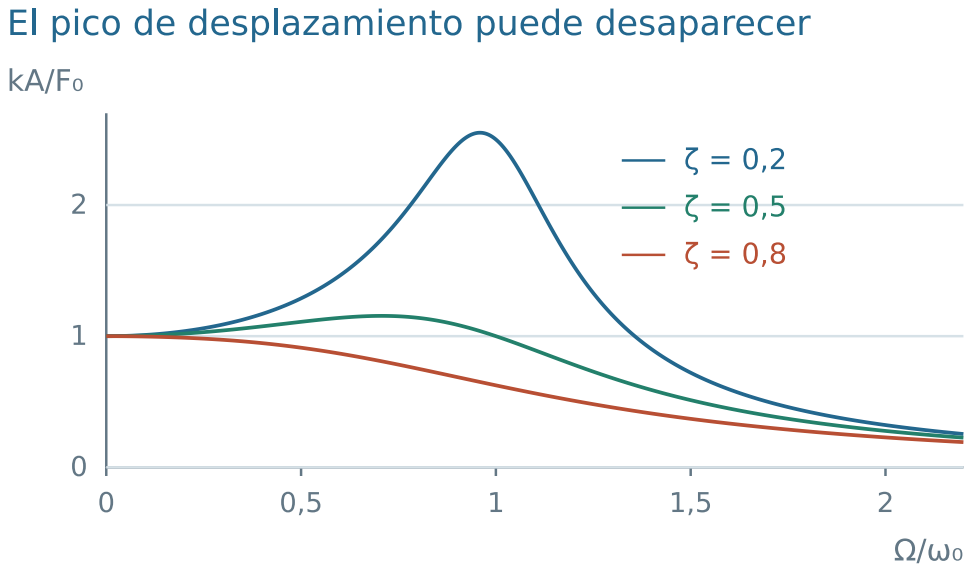


Figura 11.5. Se dibuja kA/F_0 en función de Ω/ω_0 para valores indicados de $\zeta = \gamma/\omega_0$. Con $\zeta = 0{,}8$ la respuesta libre todavía es oscilatoria, aunque ya no existe un pico de desplazamiento a frecuencia positiva.

En el límite de baja frecuencia, $A \to F_0/k$ y $\delta \to 0$: el carro sigue casi el equilibrio instantáneo. Para frecuencias muy altas, $A \sim F_0/(m\Omega^2)$ y $\delta \to \pi$: la inercia domina y la posición queda casi opuesta a la fuerza. En $\Omega = \omega_0$, $\delta = \pi/2$ y $A = F_0/(b\omega_0)$. Este último punto será especial para la transferencia de energía, aunque no maximice el desplazamiento.

Potencia, fase y ancho de la respuesta

Para una función periódica g de período $T = 2\pi/\Omega$, escribiremos $\langle g \rangle = T^{-1}\int_{t_0}^{t_0+T} g(t)\,dt$. El resultado no depende de t_0. En la respuesta estacionaria, la energía mecánica vuelve al mismo valor después de un ciclo; promediar el balance elimina $\langle \dot{E} \rangle$.

Proposición. En la respuesta estacionaria con $m, k, b, F_0, \Omega > 0$,

$$\langle P \rangle = \langle F \dot{x}_s \rangle = \frac{1}{2} F_0 \Omega A \sin\delta = \frac{1}{2} b \Omega^2 A^2.$$

La amplitud de velocidad y la potencia media tienen su único máximo para $\Omega > 0$ en $\Omega = \omega_0$. Allí $\langle P \rangle_{\max} = F_0^2/(2b)$.

Demostración. Derivar x_s y expandir el seno de una diferencia da

$$\dot{x}_s = -\Omega A \sin(\Omega t)\cos\delta + \Omega A \cos(\Omega t)\sin\delta.$$

El producto con $F_0\cos(\Omega t)$ tiene promedio $F_0 \Omega A \sin\delta/2$, porque el producto seno–coseno promedia cero y el cuadrado del coseno promedia $1/2$. La expresión de $\sin\delta$ da el balance con la disipación. Para localizar el máximo, dividimos numerador y denominador de $\Omega^2 A^2$ por Ω^2:

$$\Omega^2 A^2 = \frac{F_0^2}{(k/\Omega - m\Omega)^2 + b^2}.$$

El denominador alcanza su mínimo b^2 únicamente cuando $k/\Omega = m\Omega$, es decir, en $\Omega = \omega_0$. La potencia es un múltiplo positivo de la misma cantidad; sustituir esa frecuencia produce el valor anunciado.

En esa frecuencia, la velocidad está en fase con la fuerza y $F\dot{x}_s = (F_0^2/b)\cos^2(\omega_0 t) \geq 0$. Fuera de ella, el actuador puede recibir energía durante parte del ciclo, aunque la transferencia media siga siendo positiva. Tampoco una amplitud constante de posición implica energía mecánica instantánea constante: la fuerza aplicada y la disipación no tienen por qué compensarse en cada instante.

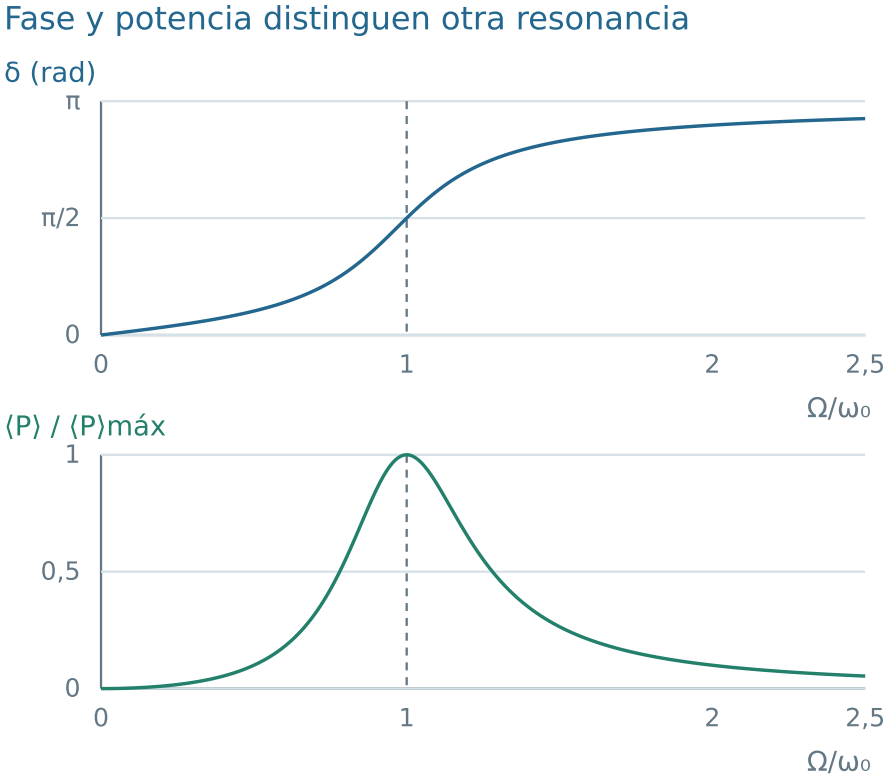


Figura 11.6. Para $\zeta = 0{,}25$, el retraso cruza $\pi/2$ en $\Omega/\omega_0 = 1$, donde la potencia media es máxima. Las dos gráficas comparten el eje de frecuencia y tienen escalas verticales diferentes.

Se define el factor de calidad por $Q = m\omega_0/b = \omega_0/(2\gamma)$. Es adimensional. Para expresar su relación con un ancho de respuesta, usemos los dos puntos donde la potencia media es la mitad de su máximo. La fórmula anterior exige $(k/\Omega - m\Omega)^2 = b^2$ y da

$$\Omega_- = \frac{\sqrt{b^2 + 4mk} - b}{2m}, \qquad \Omega_+ = \frac{\sqrt{b^2 + 4mk} + b}{2m}.$$

Por tanto $\Omega_+ - \Omega_- = b/m$ y $Q = \omega_0/(\Omega_+ - \Omega_-)$. Es una identidad exacta para la potencia media de este modelo con amplitud de fuerza fija. No hemos demostrado una identidad semejante para el ancho a media altura de la curva de desplazamiento. Para Q grande, los dos puntos de media potencia están cerca de ω_0 y el pico es estrecho en relación con esa frecuencia.

Qué cambia cuando se elimina la disipación

Si $b = 0$, una respuesta particular para $\Omega \neq \omega_0$ es

$$x_p(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)} \cos(\Omega t).$$

Pero la parte libre ya no decae. Con datos iniciales nulos, el movimiento completo es

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)} \left[\cos(\Omega t) - \cos(\omega_0 t)\right].$$

Tiene dos frecuencias que persisten. En consecuencia, no podemos hablar de una respuesta atractora independiente de la preparación. Si Ω está cerca de ω_0, la identidad de diferencia de cosenos muestra batimientos: una oscilación rápida modulada por una escala lenta relacionada con $|\Omega - \omega_0|$.

Cuando $\Omega = \omega_0$, el ensayo de un coseno falla porque coincide con una solución libre. Un ensayo con un factor temporal permite satisfacer la ecuación y los datos nulos:

$$x(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin(\omega_0 t).$$

Derivar dos veces deja $\ddot{x} + \omega_0^2 x = (F_0/m)\cos(\omega_0 t)$ y en cero se anulan posición y velocidad. La envolvente crece linealmente. No hay una amplitud infinita en un instante finito: hay crecimiento sin cota cuando el tiempo crece dentro de un modelo ideal. En un aparato real, antes pueden fallar la linealidad del resorte, el control del actuador o la omisión de disipación.

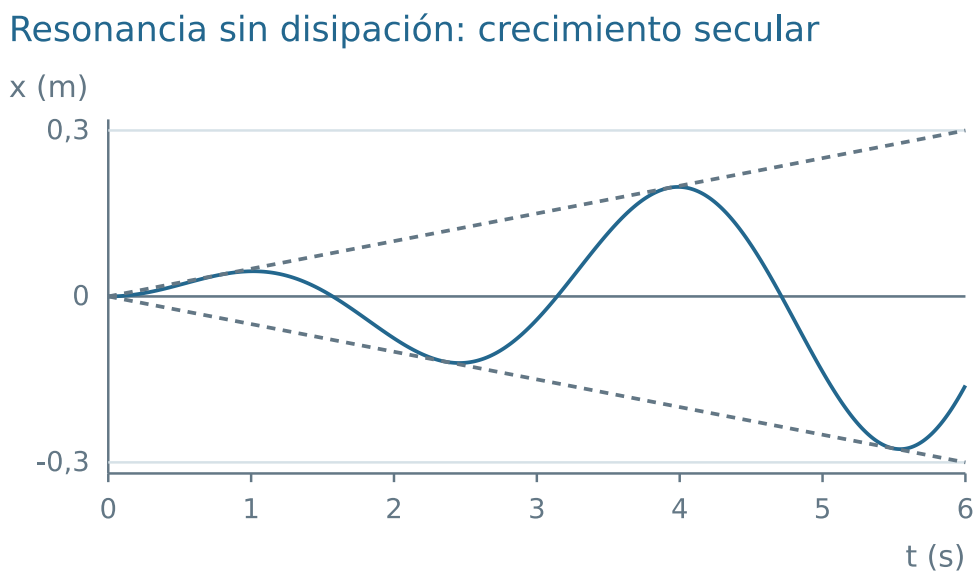


Figura 11.7. Ejemplo con $m = 1\,\mathrm{kg}$, $\omega_0 = 2\,\mathrm{s}^{-1}$ y $F_0 = 0{,}2\,\mathrm{N}$. Las líneas discontinuas son las envolventes $\pm(0{,}05\,\mathrm{m/s})t$. El crecimiento debe contrastarse con el intervalo de validez de las leyes de fuerza.

Para $b > 0$, incluso muy pequeño, la respuesta estacionaria en ω_0 es finita, pero el tiempo necesario para aproximarse a ella aumenta al reducir b en el régimen subamortiguado. Tomar primero un tiempo muy largo y después hacer pequeño el amortiguamiento describe una pregunta diferente de conectar una fuerza a un oscilador sin disipación y observarlo durante un tiempo fijo. La distinción entre preparación, transitorio y respuesta sostenida evita atribuir al experimento un límite que todavía no ha alcanzado.

Ejercicios

Los datos numéricos se refieren a modelos lineales en el marco del laboratorio. Cuando se indica una respuesta estacionaria, se supone que el transitorio ha decaído por debajo de la tolerancia relevante. Las unidades SI acompañan a los parámetros aunque una ecuación auxiliar use la variable adimensional $u = t/(1\,\mathrm{s})$.

1. Dos fuerzas que cambian de signo por razones distintas

Un carro tiene $m = 2\,\mathrm{kg}$, $k = 18\,\mathrm{N/m}$ y $b = 4\,\mathrm{kg/s}$. En un instante está en $x = 0{,}050\,\mathrm{m}$ con $\dot{x} = -0{,}20\,\mathrm{m/s}$, sin fuerza aplicada. Determine ambas fuerzas, la aceleración y la potencia disipada. Decida si el carro está aumentando su rapidez.

2. Clasificar antes de calcular

Para $m = 1\,\mathrm{kg}$ y $k = 9\,\mathrm{N/m}$ se dispone de amortiguadores con $b = 2$, 6 y $10\,\mathrm{kg/s}$. Clasifique los tres casos y determine las frecuencias o tasas exponenciales pertinentes. Explique qué ocurre si se introduce una frecuencia imaginaria en una fórmula trigonométrica sin reinterpretarla.

3. Lanzamiento de un oscilador subamortiguado

Con $m = 1\,\mathrm{kg}$, $k = 5\,\mathrm{N/m}$ y $b = 2\,\mathrm{kg/s}$, prepare $x_0 = 0$ y $v_0 = 0{,}20\,\mathrm{m/s}$. Encuentre $x(t)$, el primer extremo positivo y el primer retorno al equilibrio.

4. Un tiempo de asentamiento garantizado

Para el carro del problema de apertura, encuentre un tiempo a partir del cual $|x(t)| < 1\,\mathrm{mm}$ quede garantizado por la envolvente. Distinga esa garantía del primer instante en que el carro entra en la franja.

5. Reconstruir parámetros desde picos

Un carro de masa $0{,}50\,\mathrm{kg}$ presenta dos máximos positivos consecutivos de $40\,\mathrm{mm}$ y $20\,\mathrm{mm}$, separados por $2{,}0\,\mathrm{s}$. Bajo el modelo viscoso, calcule γ, ω_d, b y k. Prediga el tercer máximo positivo y declare qué parte del procedimiento constituye una prueba nueva del ajuste.

6. La energía no sigue exactamente la envolvente

Alguien propone $E(t) = E(0)e^{-2\gamma t}$ como identidad exacta para cualquier oscilación libre subamortiguada. Refútela usando una liberación desde el reposo fuera del equilibrio. Encuentre una relación exponencial de energía que sí sea exacta.

7. Liberación crítica

Un sistema tiene $m = 1\,\mathrm{kg}$, $k = 4\,\mathrm{N/m}$ y $b = 4\,\mathrm{kg/s}$. Se libera desde $x_0 = 0{,}10\,\mathrm{m}$ y $v_0 = 0$. Encuentre la trayectoria, demuestre que no cruza el equilibrio y estime cuándo queda por debajo de $1\,\mathrm{mm}$.

8. Un cruce en el régimen crítico

En el mismo sistema crítico, cambie la velocidad inicial a $v_0 = -0{,}50\,\mathrm{m/s}$. Determine cuándo cruza el equilibrio y explique por qué ese cruce no contradice la clasificación del régimen.

9. La resistencia que retrasa el regreso

Para $m = 1\,\mathrm{kg}$, $k = 3\,\mathrm{N/m}$ y $b = 4\,\mathrm{kg/s}$, libere el carro desde $x_0 = 0{,}10\,\mathrm{m}$ con velocidad nula. Calcule las dos componentes exponenciales y la tasa que gobierna el final del retorno. Compare la expresión exacta de la raíz lenta con $-k/b$ y evalúe si la aproximación es buena.

10. Una cota sin resolver la ecuación

Un oscilador libre con $m = 2\,\mathrm{kg}$, $k = 8\,\mathrm{N/m}$ y $b > 0$ parte de $x_0 = 0{,}10\,\mathrm{m}$ y $v_0 = 0{,}30\,\mathrm{m/s}$. Su modelo exige $|x| < 0{,}20\,\mathrm{m}$ y $|\dot{x}| < 0{,}50\,\mathrm{m/s}$. Compruebe su coherencia para todo $t \geq 0$ sin calcular la trayectoria.

11. Resolver también el cuadrante

Para $m = 1\,\mathrm{kg}$, $k = 4\,\mathrm{N/m}$, $b = 2\,\mathrm{kg/s}$ y $F(t) = (1\,\mathrm{N})\cos(3t/\mathrm{s})$, calcule la respuesta estacionaria mediante coeficientes reales. Determine su amplitud y el cuadrante del retraso.

12. Conectar desde el reposo

Obtenga la solución completa del ejemplo de la figura 11.4, con $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. Verifique los dos datos y señale una cota explícita para el error que se cometería al utilizar sólo la respuesta estacionaria.

13. Tres frecuencias de un mismo aparato

Un aparato tiene $m = 1\,\mathrm{kg}$, $k = 10\,\mathrm{N/m}$ y $b = 2\,\mathrm{kg/s}$. Calcule ω_0, ω_d y Ω_r. Determine en cuál de ellas se maximiza la potencia media cuando F_0 se mantiene fijo.

14. Oscilar sin pico de desplazamiento

Construya un ejemplo con $m = k = 1$ en unidades SI que sea subamortiguado y, sin embargo, carezca de resonancia de desplazamiento a frecuencia positiva. Demuestre las dos afirmaciones y decida si conserva una resonancia de potencia.

15. Dimensionar un actuador

Se desea sostener una amplitud de $0{,}020\,\mathrm{m}$ en un sistema con $m = 2\,\mathrm{kg}$, $k = 18\,\mathrm{N/m}$ y $b = 3\,\mathrm{kg/s}$, excitado a $\Omega = 3\,\mathrm{s}^{-1}$. Determine la amplitud de fuerza, su fase respecto de la velocidad y la potencia media que debe suministrar.

16. Una fuerza que recibe energía durante parte del ciclo

Para una respuesta con $\delta = \pi/4$, determine el signo de la potencia aplicada en los instantes de fase $\theta = \Omega t = 0$ y $\theta = 3\pi/8$. Compare ese signo con el de la potencia media. No confunda potencia aplicada con potencia disipada.

17. Ancho de media potencia y calidad

Un sistema tiene $m = 1\,\mathrm{kg}$, $k = 16\,\mathrm{N/m}$ y $b = 2\,\mathrm{kg/s}$. Calcule Q, los dos puntos de media potencia y su separación. ¿Están situados exactamente a igual distancia de ω_0?

18. Reconstruir el amortiguamiento mediante una fase

Se conocen $m = 1\,\mathrm{kg}$ y $k = 9\,\mathrm{N/m}$. A $\Omega = 2\,\mathrm{s}^{-1}$ se mide un retraso estacionario $\delta = \pi/4$. Deduzca b. Explique por qué medir sólo $\delta = \pi/2$ a $\Omega = \omega_0$ no permitiría identificarlo.

19. Resonancia ideal durante un tiempo finito

Un carro ideal sin disipación tiene $m = 1\,\mathrm{kg}$, $k = 4\,\mathrm{N/m}$ y datos iniciales nulos. Se conecta $F(t) = (0{,}20\,\mathrm{N})\cos(2t/\mathrm{s})$. Calcule $x(t)$ y $E(t)$ en $t = \pi\,\mathrm{s}$. Si la ley del resorte exige $|x| < 0{,}20\,\mathrm{m}$, dé un intervalo temporal que garantice esa condición y explique qué no puede inferirse fuera de él.

20. Un dato que no confirma su propio ajuste

En un primer ensayo libre, tres máximos positivos consecutivos separados por iguales intervalos valen 50, 40 y 30 mm. En un segundo ensayo del mismo aparato valen 30, 20 y 10 mm. Cada pico queda acotado por un intervalo determinista de semiancho 0,2 mm alrededor del valor indicado. Suponga parámetros físicos constantes. Examine el modelo viscoso ajustándolo con los dos primeros picos del primer ensayo; compare con las otras observaciones y proponga un modelo rival que merezca investigarse.

Soluciones

1. Dos fuerzas que cambian de signo por razones distintas

El resorte ejerce $-kx = -0{,}90\,\mathrm{N}$, hacia la izquierda. El amortiguador ejerce $-b\dot{x} = +0{,}80\,\mathrm{N}$, hacia la derecha, porque el carro se mueve hacia la izquierda. La fuerza neta es $-0{,}10\,\mathrm{N}$ y la aceleración es $-0{,}050\,\mathrm{m/s^2}$. Velocidad y aceleración tienen el mismo signo; por tanto la rapidez está aumentando en ese instante.

La potencia que recibe el amortiguador es $b\dot{x}^2 = 0{,}16\,\mathrm{W}$, positiva. La potencia de su fuerza sobre el carro es su negativo. No hay contradicción con el aumento de rapidez: la energía potencial elástica disminuye y puede alimentar simultáneamente energía cinética y disipación. El signo de la aceleración se obtiene sumando fuerzas, mientras que el signo de la pérdida mecánica depende del producto fuerza–velocidad.

2. Clasificar antes de calcular

La frecuencia natural es $\omega_0 = 3\,\mathrm{s^{-1}}$ y el umbral crítico es $b_c = 2\sqrt{mk} = 6\,\mathrm{kg/s}$. Con $b = 2$, $\gamma = 1\,\mathrm{s^{-1}} < \omega_0$ y $\omega_d = \sqrt{8}\,\mathrm{s^{-1}}$. Con $b = 6$, la raíz es doble y las soluciones son $e^{-3u}(C + Du)$, con $u = t/(1\,\mathrm{s})$ y ambos coeficientes expresados en longitud.

Con $b = 10$, $\gamma = 5\,\mathrm{s^{-1}}$ y $\lambda = 4\,\mathrm{s^{-1}}$, de modo que $r_+ = -1\,\mathrm{s^{-1}}$ y $r_- = -9\,\mathrm{s^{-1}}$. La solución es una combinación de e^{-u} y e^{-9u}. La raíz de $\omega_0^2 - \gamma^2$ ya no define una frecuencia angular real; reemplazarla formalmente por una raíz imaginaria exige transformar senos y cosenos en funciones hiperbólicas o exponenciales. No describe una oscilación de frecuencia imaginaria observable. La ecuación transformada permite cambiar de régimen sin esa ambigüedad.

3. Lanzamiento de un oscilador subamortiguado

Aquí $\gamma = 1\,\mathrm{s^{-1}}$ y $\omega_d = 2\,\mathrm{s^{-1}}$. Como $x_0 = 0$, la solución se reduce a

$$x(t) = (0{,}10\,\mathrm{m})e^{-u}\sin 2u, \qquad \dot{x}(t) = (0{,}10\,\mathrm{m/s})e^{-u}(2\cos 2u - \sin 2u).$$

El primer extremo positivo satisface $\tan 2u = 2$ en el primer cuadrante: $u_* = \tfrac{1}{2}\arctan 2 \approx 0{,}5536$. Su posición es $(0{,}10\,\mathrm{m})e^{-u_*}(2/\sqrt{5}) \approx 0{,}0514\,\mathrm{m}$. En ese extremo la aceleración es $-kx/m < 0$, lo que confirma que es un máximo. El primer retorno a cero sucede cuando $2u = \pi$, es decir, $t = \pi\,\mathrm{s}/2$. El máximo llega antes que la cuarta parte de T_d: derivar la exponencial altera el instante que se obtendría mirando sólo el seno.

4. Un tiempo de asentamiento garantizado

La combinación $\cos 2u + \frac{1}{2}\sin 2u$ tiene amplitud $\sqrt{5}/2$. Por tanto

$$|x(t)| \le (0{,}05\sqrt{5}\,\mathrm{m})e^{-u}.$$

Para que la cota sea menor que 0,001 m basta exigir $u > \log(50\sqrt{5}) \approx 4{,}717$. Así, cualquier tiempo posterior a 4,72 s queda garantizado por esta estimación. La cota disminuye monótonamente, lo que permite afirmar que el carro permanecerá en la franja.

El primer ingreso puede suceder mucho antes, cerca del primer cruce por cero, y ser seguido por una salida. No es el tiempo solicitado. La estimación por envolvente es suficiente y puede ser conservadora; hallar el último cruce exacto de la frontera de la franja exigiría resolver una ecuación trascendente y comprobar las excursiones posteriores.

5. Reconstruir parámetros desde picos

Los picos son del mismo signo, por lo que $T_d = 2{,}0\,\mathrm{s}$ y $\Lambda = \log 2$. Resultan

$$\gamma = \frac{\log 2}{2}\,\mathrm{s}^{-1} \approx 0{,}3466\,\mathrm{s}^{-1}, \qquad \omega_d = \pi\,\mathrm{s}^{-1}.$$

Con la masa conocida, $b = 2m\gamma \approx 0{,}3466\,\mathrm{kg/s}$ y

$$k = m(\omega_d^2 + \gamma^2) \approx 4{,}995\,\mathrm{N/m}.$$

La frecuencia natural es aproximadamente $3{,}161\,\mathrm{s}^{-1}$. El tercer máximo positivo se predice en 10 mm, otros dos segundos después del segundo. Los primeros dos picos se utilizaron para ajustar; reproducirlos no prueba el modelo. Medir el tercer pico, comparar su tiempo y repetir con otra amplitud sí aporta observaciones no utilizadas en ese ajuste. Las cifras calculadas no representan por sí solas una incertidumbre experimental: haría falta conocer la resolución y los errores de posición, tiempo y masa.

6. La energía no sigue exactamente la envolvente

Al soltar desde el reposo con $x_0 \neq 0$ y $b > 0$, el balance exacto da $\dot{E}(0) = -bv_0^2 = 0$. La fórmula propuesta daría $\dot{E}(0) = -2\gamma E(0) < 0$. Las derivadas iniciales son incompatibles y bastan para refutar la identidad.

En el caso subamortiguado, tanto x como $\dot{x}$ se multiplican por $e^{-\gamma T_d}$ al desplazar el tiempo en un ciclo T_d. Como cada término de E es cuadrático, sí se cumple

$$E(t + T_d) = e^{-2\gamma T_d} E(t).$$

Para n ciclos, el factor es $e^{-2n\gamma T_d}$. Esta afirmación compara estados con la misma fase; no reemplaza la evolución continua entre ellos por una exponencial exacta. En particular, la derivada de energía se anula en cada punto de retorno, aunque la pérdida total entre dos retornos sea positiva.

7. Liberación crítica

Tenemos $\gamma = \omega_0 = 2\,\mathrm{s}^{-1}$. Los datos producen

$$x(t) = (0{,}10\,\mathrm{m})(1 + 2u)e^{-2u}, \qquad \dot{x}(t) = -(0{,}40\,\mathrm{m/s})ue^{-2u}.$$

Para $u \ge 0$, la posición es positiva y su derivada es negativa salvo en el instante inicial. Se aproxima al equilibrio desde la derecha y nunca lo cruza. Para localizar la tolerancia resolvemos $(1 + 2u)e^{-2u} = 0{,}01$. La función del lado izquierdo es estrictamente decreciente para $u > 0$; no hay raíces posteriores que puedan devolver el movimiento fuera de la franja.

En $u = 3{,}3$ el producto vale aproximadamente 0,01034 y en $u = 3{,}4$ vale 0,00869. Una interpolación o bisección afina el cruce a $u \approx 3{,}319$. Por tanto, después de unos 3,32 s queda por debajo del milímetro. El equilibrio exacto sólo se alcanza en el límite temporal.

8. Un cruce en el régimen crítico

El coeficiente lineal es $v_0 + \omega_0 x_0 = -0{,}30\,\mathrm{m/s}$. Por eso

$$x(t) = (0{,}10\,\mathrm{m} - 0{,}30\,\mathrm{m/s}\,t)e^{-2t/\mathrm{s}}.$$

La exponencial es positiva y el cambio de signo ocurre cuando el paréntesis se anula: $t = (1/3)\,\mathrm{s}$. La velocidad allí es $-(0{,}30\,\mathrm{m/s})e^{-2/3} \neq 0$, de modo que existe un cruce real. Después la posición permanece negativa y tiende a cero.

El amortiguamiento crítico caracteriza las raíces de la ecuación y la ausencia de una secuencia oscilatoria, no prohíbe cualquier cruce para cualquier preparación. La afirmación de retorno sin sobrepasar el equilibrio que usamos en la liberación crítica exigía $v_0 = 0$ y $x_0 > 0$. El nuevo dato inicial queda fuera de esa afirmación y proporciona un contraejemplo a su generalización indiscriminada.

9. La resistencia que retrasa el regreso

Ahora $\gamma = 2\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_0 = \sqrt{3}\,\mathrm{s}^{-1}$ y $\lambda = 1\,\mathrm{s}^{-1}$. Las raíces son -1 y $-3\,\mathrm{s}^{-1}$. Resolver $C + D = 0{,}10\,\mathrm{m}$ y $-C - 3D = 0$ da $C = 0{,}15\,\mathrm{m}$, $D = -0{,}05\,\mathrm{m}$. Así,

$$x(t) = (0{,}15\,\mathrm{m})e^{-u} - (0{,}05\,\mathrm{m})e^{-3u}.$$

El segundo término desaparece más deprisa y el final del retorno está gobernado por e^{-u}, cuya escala temporal es un segundo. La aproximación $-k/b$ predice $-0{,}75\,\mathrm{s}^{-1}$, frente al valor exacto $-1\,\mathrm{s}^{-1}$: un error relativo del 25% respecto de la tasa exacta. Aquí $\omega_0/\gamma \approx 0{,}866$ no es pequeño; la condición de sobreamortiguamiento se cumple, pero la condición mucho más exigente de fuerte sobreamortiguamiento no. Una clasificación cualitativa no autoriza automáticamente una aproximación asintótica.

10. Una cota sin resolver la ecuación

La energía inicial es

$$E(0) = \tfrac{1}{2}(2)(0{,}30)^2 + \tfrac{1}{2}(8)(0{,}10)^2 = 0{,}13\,\mathrm{J}.$$

Al no existir fuerza aplicada, el balance impone $E(t) \le 0{,}13\,\mathrm{J}$. Cada término positivo de la energía es menor o igual que esa cantidad. Se sigue que

$$|x(t)| \le \sqrt{\frac{2(0{,}13\,\mathrm{J})}{8\,\mathrm{N/m}}} \approx 0{,}1803\,\mathrm{m}, \quad |\dot{x}(t)| \le \sqrt{\frac{2(0{,}13\,\mathrm{J})}{2\,\mathrm{kg}}} \approx 0{,}3606\,\mathrm{m/s}.$$

Ambas cotas son estrictamente menores que los límites declarados. No necesitamos conocer b para esta conclusión, sólo su signo no negativo. Las dos cotas no afirman que posición y rapidez alcancen simultáneamente esos valores: provienen de asignar por separado toda la energía disponible a cada término. Una cota suficiente puede ser útil aun cuando no sea alcanzable.

11. Resolver también el cuadrante

Tenemos $k - m\Omega^2 = -5\,\mathrm{N/m}$, $b\Omega = 6\,\mathrm{N/m}$ y $D = 61\,(\mathrm{N/m})^2$. Por tanto

$$x_s(t) = -(5/61\,\mathrm{m})\cos(3u) + (6/61\,\mathrm{m})\sin(3u).$$

Su amplitud es $A = (1/\sqrt{61})\,\mathrm{m} \approx 0{,}1280\,\mathrm{m}$. La fase cumple $\cos\delta = -5/\sqrt{61}$ y $\sin\delta = 6/\sqrt{61}$; está en el segundo cuadrante y vale $\pi - \arctan(6/5) \approx 2{,}266\,\mathrm{rad}$. La respuesta se retrasa más de un cuarto de ciclo respecto de la fuerza. Tomar el valor principal de $\arctan(-6/5)$ daría un ángulo negativo y no reproduciría los signos de ambos coeficientes con amplitud positiva. La comprobación por seno y coseno evita ese error.

12. Conectar desde el reposo

Escribamos $u = t/(1\,\mathrm{s})$. La respuesta estacionaria es $x_s = [\cos 2u + 4\sin 2u](1/34\,\mathrm{m})$. Para anular sus datos iniciales, el transitorio subamortiguado debe tener $h(0) = -1/34\,\mathrm{m}$ y $\dot h(0) = -4/17\,\mathrm{m/s}$. Su coeficiente del seno resulta $-9/68\,\mathrm{m}$. La solución completa es

$$\begin{aligned} x(t) = {} & (1/34\,\mathrm{m})\cos 2u + (2/17\,\mathrm{m})\sin 2u \\ & - e^{-u}\left[(1/34\,\mathrm{m})\cos 2u + (9/68\,\mathrm{m})\sin 2u\right]. \end{aligned}$$

En cero, las posiciones se cancelan. Derivar el transitorio da $\dot h(0) = -(4/17)\,\mathrm{m/s}$, que cancela la velocidad estacionaria. Ambas partes satisfacen sus ecuaciones, por lo que la suma es la solución pedida.

El error de posición por omitir h está acotado por $(\sqrt{85}/68\,\mathrm{m})e^{-u} \approx (0{,}1356\,\mathrm{m})e^{-u}$. Después de 4,91 s queda por debajo de un milímetro. Para comprobar el régimen durante la conexión, acotaremos también la suma completa.

Pongamos $r = e^{-u}$, con $0 < r \le 1$. Reunir los coeficientes de seno y coseno antes de tomar módulos conserva la compensación entre la respuesta estacionaria y el transitorio:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\mathrm{m}}{68}\big[2(1-r)\cos 2u + (8-9r)\sin 2u\big], \\ \dot x(t) &= \frac{\mathrm{m/s}}{68}\big[16(1-r)\cos 2u + (13r-4)\sin 2u\big]. \end{aligned}$$

Para cualesquiera coeficientes a, c, la desigualdad de Cauchy–Schwarz da $|a\cos 2u + c\sin 2u| \le \sqrt{a^2+c^2}$. Los cuadrados de las cotas que aparecen aquí son polinomios convexos de r. En $0 \le r \le 1$, cada valor de un polinomio convexo queda por debajo o al nivel del mayor de sus valores extremos. En este caso basta comprobarlo para un polinomio cuadrático $p(r) = ar^2 + cr + d$, con $a > 0$: la diferencia entre $(1-r)p(0) + rp(1)$ y $p(r)$ es $ar(1-r) \ge 0$. Para la posición, esos valores son 68 y 1; para la velocidad, 272 y 81. En consecuencia,

$$|x(t)| \le \frac{1}{\sqrt{68}}\,\mathrm{m} < 0{,}122\,\mathrm{m}, \qquad |\dot x(t)| \le \frac{1}{\sqrt{17}}\,\mathrm{m/s} < 0{,}243\,\mathrm{m/s}.$$

Las cotas mantienen la posición por debajo de 0,15 m y la rapidez por debajo de 0,50 m/s durante toda la conexión y la evolución posterior. Por tanto, el movimiento completo permanece dentro del régimen declarado para el resorte y el amortiguador. Acotar por separado ambas partes habría perdido una cancelación útil; reunir primero sus coeficientes permitió cerrar la comprobación.

13. Tres frecuencias de un mismo aparato

Se obtiene $\gamma = 1\,\mathrm{s^{-1}}$, $\omega_0 = \sqrt{10}\,\mathrm{s^{-1}} \approx 3{,}162\,\mathrm{s^{-1}}$ y $\omega_d = 3\,\mathrm{s^{-1}}$. La condición para un pico de desplazamiento es $\omega_0^2 > 2\gamma^2$ y aquí se cumple. Su frecuencia es $\Omega_r = \sqrt{8}\,\mathrm{s^{-1}} \approx 2{,}828\,\mathrm{s^{-1}}$.

Al variar la frecuencia de una fuerza de amplitud fija, el desplazamiento es máximo en Ω_r. La potencia media y la amplitud de velocidad lo son en ω_0. La frecuencia ω_d se mide en el movimiento libre, por ejemplo mediante el intervalo entre dos máximos positivos después de apagar el actuador. Son tres experimentos o criterios diferentes sobre el mismo aparato. La diferencia entre ω_d y Ω_r no es una corrección de unidades: ambas son frecuencias angulares reales y corresponden a preguntas físicas distintas.

14. Oscilar sin pico de desplazamiento

Elijamos $b = 1{,}6\,\mathrm{kg/s}$. Entonces $\omega_0 = 1\,\mathrm{s}^{-1}$ y $\gamma = 0{,}8\,\mathrm{s}^{-1}$. Como $\gamma < \omega_0$, la respuesta libre no trivial es subamortiguada, con $\omega_d = 0{,}6\,\mathrm{s}^{-1}$. Sin embargo, $\omega_0^2 - 2\gamma^2 = -0{,}28\,\mathrm{s}^{-2} < 0$.

La amplitud estacionaria disminuye para toda frecuencia positiva y alcanza su máximo estático en cero. No existe Ω_r real y positivo. La potencia media sí tiene su máximo en $\Omega = 1\,\mathrm{s}^{-1}$, porque el denominador de $\Omega^2 A^2$ se minimiza allí para cualquier $b > 0$. En cero la potencia media tiende a cero: una deformación estática no exige movimiento viscoso sostenido. El ejemplo separa la existencia de oscilaciones libres, de un pico de desplazamiento y de un pico de potencia.

15. Dimensionar un actuador

La frecuencia aplicada coincide con $\omega_0 = \sqrt{k/m} = 3\,\mathrm{s}^{-1}$. Por eso $k - m\Omega^2 = 0$ y $A = F_0/(b\Omega)$. Para la amplitud pedida necesitamos $F_0 = b\Omega A = 0{,}18\,\mathrm{N}$.

El retraso del desplazamiento es $\delta = \pi/2$, de modo que $x_s = A\sin(\Omega t)$ y $\dot{x}_s = \Omega A\cos(\Omega t)$. La velocidad está en fase con la fuerza y tiene amplitud $0{,}060\,\mathrm{m/s}$. La potencia media es

$$\langle P\rangle = \tfrac{1}{2} b(\Omega A)^2 = 0{,}0054\,\mathrm{W}.$$

La potencia máxima instantánea es el doble de ese promedio. Estos valores sostienen el régimen estacionario; no especifican la fuerza o energía adicional que podría requerir otra preparación del movimiento, ni las pérdidas internas del propio actuador. La comprobación dimensional $b\Omega A \sim (\mathrm{kg/s})(\mathrm{s}^{-1})\mathrm{m} = \mathrm{N}$ confirma que la amplitud de fuerza se calculó con unidades coherentes.

16. Una fuerza que recibe energía durante parte del ciclo

La potencia aplicada es $P = F_0\cos\theta[-\Omega A\sin(\theta - \delta)]$. Con $\delta = \pi/4$ y $\theta = 0$, ambos factores son positivos y $P = F_0\Omega A/\sqrt{2} > 0$. En $\theta = 3\pi/8$, la fuerza sigue siendo positiva, pero $\theta - \delta = \pi/8$ y la velocidad es negativa. Por tanto $P < 0$: el carro entrega energía al actuador en ese instante.

El promedio sigue siendo $F_0\Omega A/(2\sqrt{2}) > 0$. La potencia disipada, $b\dot{x}_s^2$, es no negativa en todo momento y no cambia de signo cuando lo hace P. El balance instantáneo es $\dot{E} = P - b\dot{x}_s^2$; el promedio estacionario exige igualdad de las transferencias acumuladas en un ciclo. El signo medio no permite reemplazar ese balance por una igualdad instantánea entre fuerza aplicada y fuerza viscosa.

17. Ancho de media potencia y calidad

La frecuencia natural es $4\,\mathrm{s}^{-1}$ y $Q = m\omega_0/b = 2$. La fórmula exacta proporciona

$$\Omega_- = (\sqrt{17} - 1)\,\mathrm{s}^{-1} \approx 3{,}123\,\mathrm{s}^{-1}, \qquad \Omega_+ = (\sqrt{17} + 1)\,\mathrm{s}^{-1} \approx 5{,}123\,\mathrm{s}^{-1}.$$

La separación es $2\,\mathrm{s}^{-1} = b/m$. El cociente de ω_0 por esa separación da $Q = 2$. No son simétricos respecto de $4\,\mathrm{s}^{-1}$: su media aritmética es $\sqrt{17}\,\mathrm{s}^{-1}$, mayor que la frecuencia natural. En cambio, el producto es $\Omega_-\Omega_+ = \omega_0^2$, así que su media geométrica coincide con ω_0. Aproximarlos por $\omega_0 \pm b/(2m)$ requiere un pico estrecho, es decir, $b/(m\omega_0) \ll 1$. Aquí esa razón es $1/2$, y la asimetría exacta no debe ocultarse tras la aproximación.

18. Reconstruir el amortiguamiento mediante una fase

En la frecuencia medida, $k - m\Omega^2 = 5\,\mathrm{N/m} > 0$. La fase del primer cuadrante satisface $\tan\delta = b\Omega/(k - m\Omega^2) = 1$, por lo que

$$b = \frac{k - m\Omega^2}{\Omega} = 2{,}5\,\mathrm{kg/s}.$$

El signo es positivo y coherente con disipación. Este cálculo usa una fase estacionaria; una fase medida durante el transitorio no puede sustituirse sin más en la misma relación. También sería necesario conocer la precisión temporal con que se compara fuerza y desplazamiento para asignar incertidumbre al resultado.

En $\Omega = \omega_0$, el coseno de la fase vale cero y el seno es positivo para cualquier $b > 0$: siempre obtenemos $\delta = \pi/2$. Esa observación localiza la frecuencia natural bajo el modelo, pero no distingue valores de b. Para identificarlo allí se podría medir además la amplitud con F_0 conocido y utilizar $b = F_0/(\omega_0 A)$.

19. Resonancia ideal durante un tiempo finito

Tenemos $\omega_0 = 2\,\mathrm{s}^{-1}$. La solución resonante con datos nulos es $x(t) = (0{,}05\,\mathrm{m/s})t\sin(2t/\mathrm{s})$. En $t = \pi\,\mathrm{s}$, la posición es cero y la velocidad vale $0{,}10\pi\,\mathrm{m/s}$. Toda la energía mecánica en ese instante es cinética:

$$E(\pi\,\mathrm{s}) = 0{,}005\pi^2\,\mathrm{J} \approx 0{,}04935\,\mathrm{J}.$$

La envolvente impone $|x(t)| \le (0{,}05\,\mathrm{m/s})t$. Por tanto, $0 \le t < 4\,\mathrm{s}$ garantiza $|x| < 0{,}20\,\mathrm{m}$. Es un intervalo suficiente. Fuera de él, la cota deja de garantizar la condición; eso no significa que la trayectoria viole el límite en todos esos instantes. Para extender la descripción hay que comprobar el desplazamiento real y las demás hipótesis. El crecimiento secular tampoco prueba que un resorte real pueda acumular energía ilimitada manteniendo su ley lineal.

20. Un dato que no confirma su propio ajuste

Los dos primeros picos del primer ensayo fijan un factor viscoso de $40/50 = 0{,}8$ por ciclo. El modelo predice entonces un tercer pico de 32 mm, frente a los 30 mm observados. Las cotas declaradas permiten propagar los dos picos usados en el ajuste. Como p_2^2/p_1 crece con $p_2 > 0$ y decrece con $p_1 > 0$, la predicción pertenece a

$$\left[\frac{(39{,}8)^2}{50{,}2}; \frac{(40{,}2)^2}{49{,}8}\right]\,\mathrm{mm} \subset [31{,}55; 32{,}46]\,\mathrm{mm}.$$

La envolvente decimal se redondeó hacia fuera y queda separada del intervalo observado $[29{,}8; 30{,}2]\,\mathrm{mm}$. La incompatibilidad se sostiene con todas las combinaciones permitidas por esas cotas. La resolución instrumental, por sí sola, requeriría un análisis adicional para convertirse en una cota del error total de cada lectura.

Con parámetros constantes e iguales intervalos entre picos, el segundo ensayo tendría que conservar el mismo cociente. Partiendo de 30 mm, predeciría 24 y 19,2 mm, tampoco compatibles con 20 y 10 mm. Las observaciones muestran, en cambio, una disminución de 10 mm por ciclo. El rozamiento seco aproximadamente constante merece investigarse.

Para precisar esa alternativa, supongamos una fuerza de rozamiento de magnitud constante f durante un recorrido desde un extremo $+A$ hasta el siguiente extremo $-B$, con $A, B > 0$. Si el carro desliza todo ese tramo, el balance de energía da $k(A^2 - B^2)/2 = f(A+B)$. Dividir por $A+B > 0$ deja $A-B = 2f/k$; otro medio ciclo reduce la excursión en la misma cantidad. La disminución de 10 mm por ciclo correspondería a $f/k = 2{,}5\,\mathrm{mm}$ mientras se conserve el deslizamiento. Cuando la fuerza restauradora ya no venza la adherencia, esta continuación por medios ciclos deja de ser válida. El modelo rival no queda probado sólo con estos picos. Habría que observar los últimos retornos, medir la dependencia de la fuerza con la velocidad y revisar cero instrumental, tiempos y estabilidad del aparato antes de escoger la explicación.

Lecturas y conexiones

Las secciones 14.7–14.8 de Sears y Zemansky, *Física universitaria*, volumen 1, presentan el amortiguamiento, el balance energético y la respuesta forzada. Las secciones 15.6–15.7 de Serway y Jewett, *Física para ciencias e ingeniería*, volumen 1, ofrecen otro recorrido desde la pérdida de energía hasta una oscilación sostenida. Al cotejar sus descripciones de resonancia, debe precisarse qué magnitud se maximiza y cuándo se está utilizando la aproximación de amortiguamiento pequeño.

El capítulo 8 de Spivak, *Physics for Mathematicians. Mechanics I*, permite comparar los regímenes libre y forzado, el papel de las soluciones homogéneas y el uso de exponenciales complejas. Aquí los coeficientes reales permiten obtener amplitud y fase sin exigir esa herramienta como prerrequisito. Las condiciones y las frecuencias de los máximos se han deducido directamente de las fórmulas del modelo.

El balance de energía retoma los capítulos 7–8; los datos de picos vuelven al problema de medir del capítulo 0, donde una regularidad ajustada no equivale a una predicción independiente.

Capítulo 12

Momento angular y torque

Una cuenta de medio kilogramo puede deslizar sin rozamiento por una guía circular horizontal de cuarenta centímetros de radio. Un actuador la empuja con una fuerza de 1,2 N que se mantiene tangente a la guía durante medio segundo. La cuenta parte del reposo. Queremos saber cuánto movimiento adquiere y cuánto trabajo recibe. También queremos entender por qué una fuerza de igual magnitud dirigida hacia el centro produciría un resultado distinto.

El laboratorio será nuestro marco inercial. El centro fijo de la guía es O y el plano de movimiento es xy, visto desde arriba. Elegimos positivo el sentido antihorario. La cuenta se modela como una partícula de masa constante; la guía es ideal y su reacción horizontal es radial. Peso y apoyo vertical se compensan. El actuador cambia la dirección de su fuerza mientras la cuenta avanza para mantenerla tangente; no es una fuerza vectorial constante. Omitimos rozamiento y deformación de la guía.

En el capítulo 9 aprendimos a acumular una fuerza para encontrar el cambio de momento lineal. Aquí la dirección de la fuerza cambia y la guía también ejerce una reacción. Sumarlas como si fueran dos números constantes perdería la geometría. Sin embargo, la fuerza radial y la tangencial se distinguen por una cantidad sencilla: la distancia perpendicular de sus líneas de acción al centro. Para la primera vale cero; para la segunda, el radio de la guía.

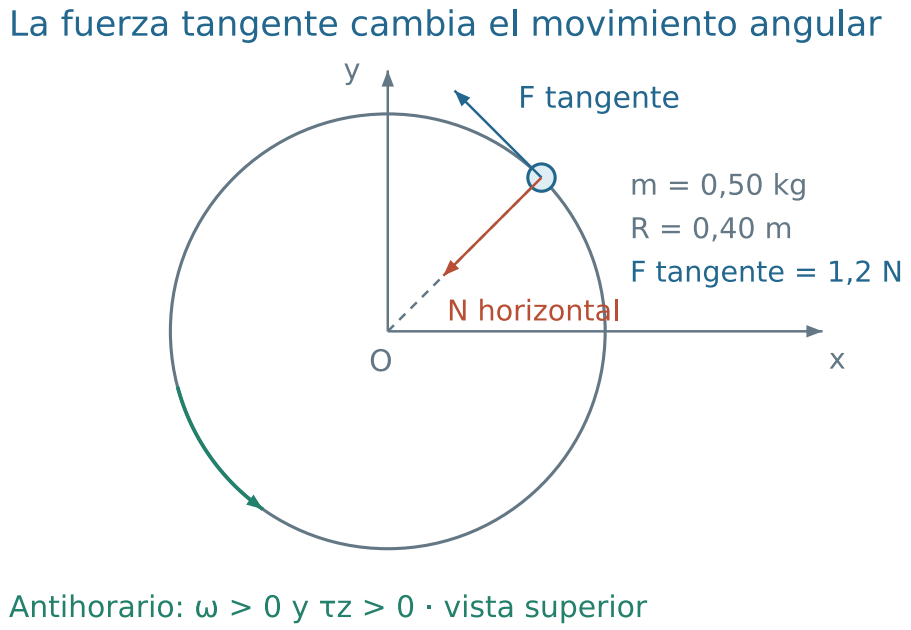


Figura 12.1. Vista superior. Las fuerzas horizontales tienen direcciones distintas. Se dibujan en una posición genérica de la cuenta; el peso y el apoyo vertical, que se compensan, no se representan. La flecha curva fija el sentido angular positivo.

Medir el efecto de una fuerza respecto de un punto

Comencemos en el plano. Si una fuerza $\mathbf{F} = (F_x, F_y, 0)$ actúa en una posición $\mathbf{r} = (x, y, 0)$ respecto de O, la combinación

$$\tau_{O,z} = xF_y - yF_x$$

registra tanto la separación como la orientación. Una fuerza vertical positiva aplicada a la derecha de O da un valor positivo. La misma fuerza aplicada a la izquierda da uno negativo. Una fuerza paralela a $\mathbf{r}$ da cero. En particular, $\tau_{O,z}$ no se obtiene multiplicando siempre la distancia al punto por la magnitud de la fuerza: hay que conservar la componente perpendicular.

Para expresar esta geometría en tres dimensiones necesitaremos una operación nueva. Trabajaremos en una base cartesiana ortonormal orientada positivamente, con $\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z$ según la regla de la mano derecha.

Definición. El *producto vectorial* de $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ y $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ es el vector

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y,\ a_z b_x - a_x b_z,\ a_x b_y - a_y b_x).$$

La expresión es lineal en cada factor y cambia de signo al intercambiarlos. Al desarrollar sus componentes se comprueba que es perpendicular a ambos y que

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2.$$

Si ambos vectores son no nulos y forman un ángulo $\varphi \in [0, \pi]$, la identidad da $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \sin \varphi$. La magnitud es el área del paralelogramo construido con ellos. Cuando son paralelos o alguno es cero, el producto es cero. El orden de los factores determina la orientación de la normal.

Definición. El *torque*, o momento de una fuerza $\mathbf{F}$ aplicada en una partícula de posición $\mathbf{r}$ respecto de un punto O, es $\boldsymbol{\tau}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. El *momento angular* de esa partícula respecto del mismo punto es $\mathbf{L}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, donde $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ y la velocidad se mide en el marco inercial elegido. Para varias partículas se suman sus momentos angulares y los torques de las fuerzas correspondientes.

En un movimiento contenido en el plano xy con O en ese plano, el momento angular tiene sólo componente z. El torque de una fuerza contenida en ese mismo plano también tiene sólo componente z; para fuerzas individuales fuera del plano conservamos el producto vectorial completo. Usaremos $L_{O,z} = m(x\dot{y} - y\dot{x})$ y $\tau_{O,z} = xF_y - yF_x$, con signos. El torque tiene unidades $\mathrm{N\,m}$ y el momento angular $\mathrm{kg\,m^2/s}$. Que el torque tenga las mismas dimensiones que una energía no hace intercambiables esas magnitudes: una energía es escalar y un torque tiene dirección y depende del punto de referencia.

Para una fuerza no nula, sea d la distancia perpendicular de O a su línea de acción. Entonces $\|\boldsymbol{\tau}_O\| = d\|\mathbf{F}\|$. A d se lo llama brazo de palanca. Trasladar el punto de aplicación a lo largo de esa misma línea conserva el torque respecto de O, pues $(\mathbf{r} + \lambda\mathbf{F}) \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Esta equivalencia de torques no afirma que la deformación local o el movimiento de cualquier sistema deformable sean idénticos.

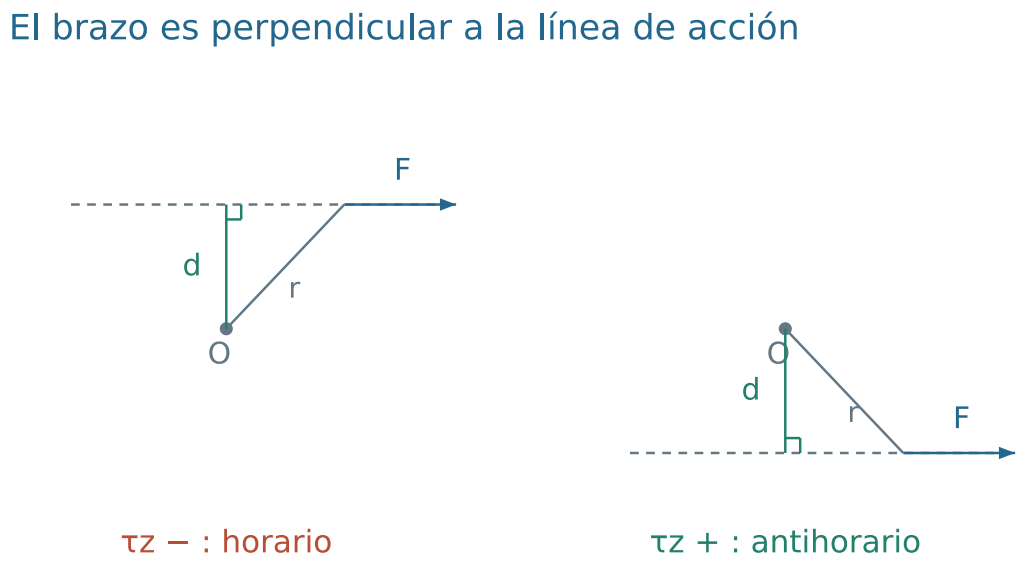


Figura 12.2. Dos fuerzas horizontales iguales, aplicadas por encima o por debajo de O, producen componentes de torque de signos opuestos. El brazo es la distancia vertical a la línea de acción; no es la longitud oblicua del vector posición.

El balance que relaciona torque y momento angular

El significado dinámico de la definición aparece al derivarla. El punto de referencia debe especificarse antes de derivar: por el momento mantendremos O fijo en el laboratorio.

Proposición. Para una partícula newtoniana de masa constante $m > 0$, respecto de un punto O fijo en un marco inercial,

$$\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \boldsymbol{\tau}_{O,\text{neta}}.$$

Si la posición es de clase C^1, la fuerza es continua por tramos en una partición finita y la ecuación de Newton se satisface en cada tramo, el balance integrado es

$$\mathbf{L}_O(t_b) - \mathbf{L}_O(t_a) = \int_{t_a}^{t_b} \boldsymbol{\tau}_{O,\text{neta}}(t)\, dt.$$

Demostración. La fórmula por componentes del producto vectorial permite aplicar la regla del producto a cada término. Como O está fijo, $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$, y obtenemos

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_{\text{neta}}.$$

El primer producto se anula porque sus factores son paralelos. Integrar en cada tramo y sumar produce el balance finito; los valores de $\mathbf{L}_O$ en las uniones se cancelan por su continuidad.

El balance integra torque, no fuerza sola. La integral tiene unidades de momento angular y recibe el nombre de impulso angular. Si el torque neto respecto de ese punto es cero durante todo un intervalo, $\mathbf{L}_O$ se conserva. La fuerza neta puede ser distinta de cero: una fuerza radial puede cambiar continuamente el momento lineal sin cambiar el momento angular respecto del centro.

También puede ocurrir que una partícula tenga momento angular sin recorrer una circunferencia. Una masa m que avanza por la recta $y = h$ con velocidad $v\mathbf{e}_x$ tiene $L_{O,z} = -mhv$. La distancia al origen y el ángulo de su vector posición cambian, pero el producto que interviene en el momento angular permanece constante. Si elegimos un punto de esa recta como referencia, el momento angular de la misma partícula es cero.

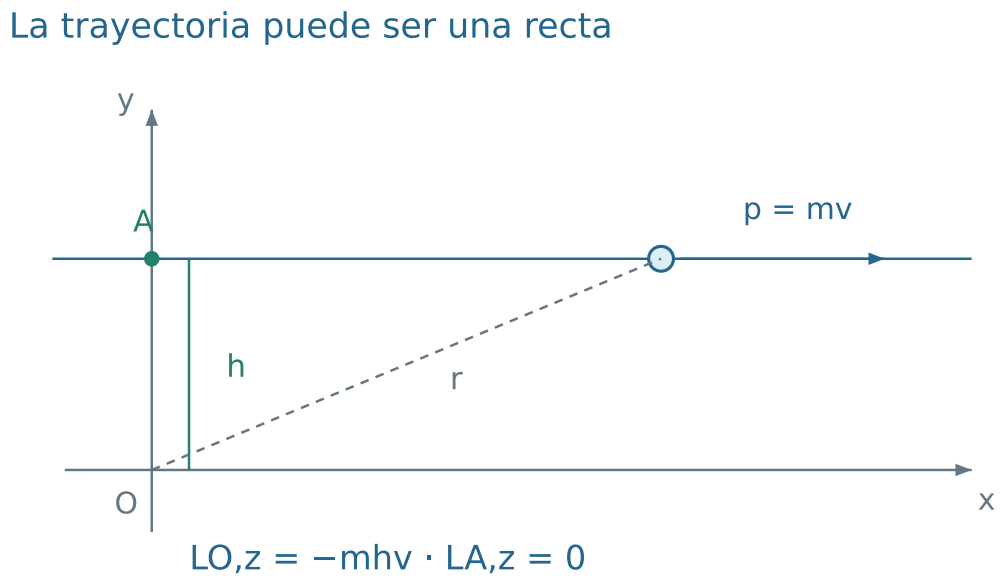


Figura 12.3. Un movimiento rectilíneo uniforme puede tener momento angular no nulo respecto de un punto exterior a la trayectoria. La referencia A sobre la recta da un resultado distinto. No se está atribuyendo a la partícula un giro interno.

Resolver el movimiento de la cuenta

Escribamos la posición sobre la guía como $\mathbf{r} = R(\cos\theta, \sin\theta, 0)$, con $R > 0$ constante. Medimos θ en radianes y elegimos una función angular continua durante el movimiento. Denotemos por $\mathbf{e}_r = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$ la dirección radial y por $\mathbf{e}_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$ la tangente positiva. Derivar seno y coseno da

$$\mathbf{v} = R\dot\theta\,\mathbf{e}_\theta, \qquad \mathbf{a} = -R\dot\theta^2\mathbf{e}_r + R\ddot\theta\,\mathbf{e}_\theta.$$

Definimos la velocidad angular escalar de este movimiento plano por $\omega = \dot\theta$; su signo indica el sentido. El producto $\mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ tiene componente $L_{O,z} = mR^2\omega$. La fuerza tangente $F_t\mathbf{e}_\theta$ produce $\tau_{O,z} = RF_t$ y la reacción radial no contribuye. El balance angular queda

$$mR^2\dot\omega = RF_t.$$

Para la cuenta del comienzo, $mR^2 = 0{,}080\,\mathrm{kg\,m^2}$ y $\tau_{O,z} = 0{,}48\,\mathrm{N\,m}$. Por tanto $\dot\omega = 6\,\mathrm{s^{-2}}$. Desde el reposo, después de $0{,}50\,\mathrm{s}$ tenemos $\omega = 3\,\mathrm{s^{-1}}$, rapidez $R\omega = 1{,}2\,\mathrm{m/s}$ y $L_{O,z} = 0{,}24\,\mathrm{kg\,m^2/s}$. La reacción necesaria al final tiene magnitud $mR\omega^2 = 1{,}8\,\mathrm{N}$, dirigida al centro.

El desplazamiento angular es $\Delta\theta = \tfrac{1}{2}\dot\omega t^2 = 0{,}75\,\mathrm{rad}$. La guía ideal no realiza trabajo, porque su fuerza es perpendicular a la velocidad. El actuador entrega $W = F_tR\Delta\theta = 0{,}36\,\mathrm{J}$, igual a $m(R\omega)^2/2$. Si el actuador ejerciera una fuerza puramente radial y la cuenta partiera del reposo, su torque sería cero y la guía impediría el movimiento radial: la cuenta seguiría quieta. La comparación utiliza la restricción circular y los datos iniciales declarados.

La cantidad mR^2 apareció al calcular $L_{O,z}$. Para varias partículas que giran juntas alrededor de un eje fijo, la suma $\sum_i m_i R_i^2$ desempeñará ese papel y se llamará momento de inercia respecto del eje. Reservaremos su cálculo para cuerpos extensos y la rodadura al capítulo siguiente. Aquí necesitamos distinguir primero qué momento angular se está calculando.

Cambiar el punto del balance

Sean O y A dos puntos fijos, y sea $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$. La posición respecto de A es $\mathbf{r}_i - \mathbf{a}$, mientras que los momentos lineales siguen medidos en el mismo laboratorio. Escribir esta diferencia antes de hacer los productos evita muchos errores de signo.

Proposición. Para un sistema de partículas con momento lineal total $\mathbf{P}$, y para una colección de fuerzas cuya resultante es $\mathbf{F}$, los cambios de referencia satisfacen

$$\mathbf{L}_A = \mathbf{L}_O - \mathbf{a} \times \mathbf{P}, \qquad \boldsymbol{\tau}_A = \boldsymbol{\tau}_O - \mathbf{a} \times \mathbf{F}.$$

Demostración. La linealidad del producto vectorial permite sumar $(\mathbf{r}_i - \mathbf{a}) \times \mathbf{p}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i - \mathbf{a} \times \mathbf{p}_i$. La suma de los momentos lineales es $\mathbf{P}$, lo que prueba la primera identidad. Repetir la misma expansión para cada fuerza y su punto de aplicación prueba la segunda.

Si $\mathbf{P} = 0$, el momento angular total es independiente del punto de referencia en ese instante. Si la resultante de las fuerzas consideradas es cero, su torque total es independiente del punto. Son dos condiciones distintas. Para conservar $\mathbf{L}_O$ durante un intervalo debemos controlar el torque neto respecto de O a lo largo de ese intervalo, no sólo en una fotografía.

Dos fuerzas opuestas pueden tener resultante nula y torque total no nulo. Si $+\mathbf{F}$ actúa en $\mathbf{r}_1$ y $-\mathbf{F}$ en $\mathbf{r}_2$, su torque suma $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}$. Se llama par de fuerzas a esa disposición cuando las líneas de acción son paralelas y distintas. Su torque es independiente del origen y puede cambiar el momento angular mientras el momento lineal permanece constante.

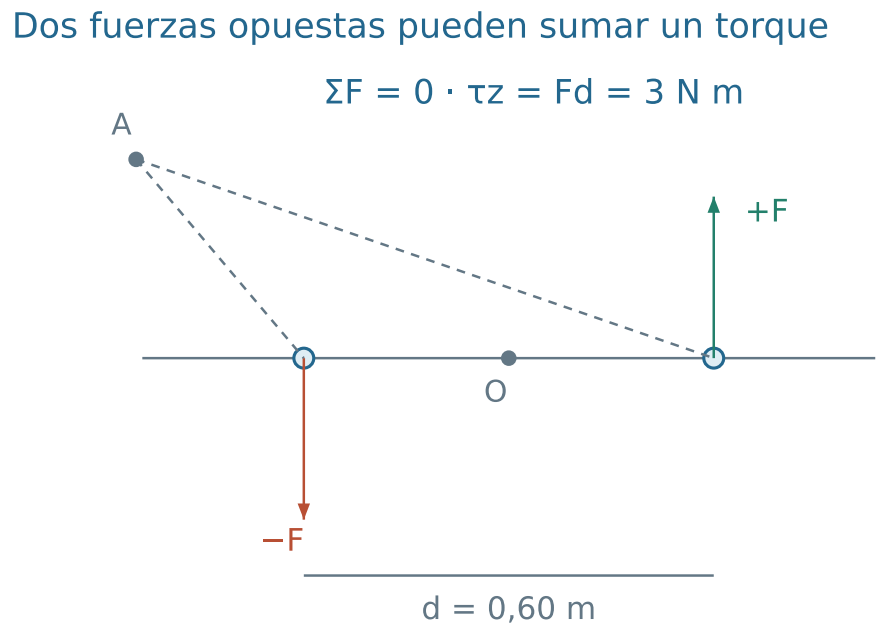


Figura 12.4. Fuerzas de 5 N separadas por 0,60 m producen un torque de 3 N m hacia $+z$. Trasladar el origen cambia los torques individuales, pero conserva su suma.

Qué deben cumplir las fuerzas internas

Para aplicar el balance a un sistema completo sumamos las ecuaciones de cada partícula. Las fuerzas internas aparecían en pares opuestos al estudiar el momento lineal. En el balance angular sus puntos de aplicación son diferentes y hay que examinar también la separación entre ellos.

Proposición. Consideremos un número finito de partículas newtonianas de masas constantes. Supongamos que cada fuerza interna $\mathbf{F}_{ij}$, ejercida por j sobre i, tiene una pareja $\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$ y es paralela a $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$. Respecto de cualquier punto fijo O del marco inercial,

$$\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \boldsymbol{\tau}_{O,\mathrm{ext}}.$$

Demostración. Al sumar los balances de las partículas aparecen el torque externo y los torques internos. Reunir las dos contribuciones de un par da

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij} = 0.$$

La última igualdad utiliza que la fuerza es paralela a la separación. Agrupar todos los pares elimina la suma interna y deja sólo el torque externo.

La hipótesis de fuerzas centrales entre pares es suficiente para esa cancelación. La sola igualdad de magnitudes con direcciones opuestas no bastaría. Esta diferencia respecto del capítulo 9 es física y matemática: al sumar fuerzas no intervienen posiciones, pero al sumar torques sí. Para cuerpos o interacciones con estructura interna más rica puede ser necesario ampliar los grados de libertad o incluir el momento angular de otros componentes del sistema. No extrapolaremos el teorema de partículas más allá de sus hipótesis.

La conservación también puede limitarse a una componente. Si $\tau_{O,z} = 0$, entonces $L_{O,z}$ es constante, aunque las otras componentes cambien. Una reacción que pasa por un pivote tiene torque cero respecto de ese pivote; respecto de otro punto puede contribuir. Elegir un punto que elimine una fuerza desconocida es una decisión útil, siempre que ese punto permita aplicar el balance correcto.

Separar traslación del centro de masa y movimiento interno

En el capítulo 9 definimos $M = \sum_i m_i$, el centro de masa $\mathbf{R} = M^{-1}\sum_i m_i \mathbf{r}_i$ y su velocidad $\mathbf{V} = \mathbf{P}/M$. Pongamos $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{R}$ y $\mathbf{w}_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{V}$. Se cumplen $\sum_i m_i \boldsymbol{\rho}_i = 0$ y $\sum_i m_i \mathbf{w}_i = 0$. Esta vez expandiremos productos vectoriales en lugar de cuadrados de velocidades.

Proposición. El momento angular respecto de un origen fijo O se descompone como

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{R} \times \mathbf{P} + \mathbf{L}_C, \qquad \mathbf{L}_C = \sum_i \boldsymbol{\rho}_i \times m_i \mathbf{w}_i = \sum_i \boldsymbol{\rho}_i \times m_i \mathbf{v}_i.$$

Si $A(t)$ es un punto de posición $\mathbf{a}(t)$ de clase C^1 y se define $\mathbf{L}_A$ con los momentos lineales del laboratorio, bajo las hipótesis de cancelación interna anteriores se tiene

$$\frac{d\mathbf{L}_A}{dt} = \boldsymbol{\tau}_{A,\mathrm{ext}} - \dot{\mathbf{a}} \times \mathbf{P}.$$

En particular, respecto del centro de masa, $\dot{\mathbf{L}}_C = \boldsymbol{\tau}_{C,\mathrm{ext}}$, aunque el centro de masa acelere.

Demostración. Sustituir $\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}_i$ y $\mathbf{v}_i = \mathbf{V} + \mathbf{w}_i$ produce cuatro sumas. La suma con $\mathbf{R}$ y $\mathbf{V}$ es $\mathbf{R} \times M\mathbf{V}$; las dos sumas cruzadas se anulan por las identidades ponderadas anteriores. Queda la suma interna anunciada, que tampoco cambia si se reemplaza $\mathbf{w}_i$ por $\mathbf{v}_i$, pues la diferencia es $(\sum_i m_i \boldsymbol{\rho}_i) \times \mathbf{V} = 0$. Para el punto móvil derivamos $\mathbf{L}_A = \mathbf{L}_O - \mathbf{a} \times \mathbf{P}$. Usando $\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}_{\mathrm{ext}}$ y el cambio de referencia del torque resulta la segunda fórmula. En $A = C$, el término adicional es $-\mathbf{V} \times M\mathbf{V} = 0$.

La parte $\mathbf{R}\times\mathbf{P}$ describe el momento angular que tendría toda la masa concentrada en su centro de masa. La parte $\mathbf{L}_C$ conserva la contribución del movimiento relativo. Una de ellas puede ser cero sin que lo sea la otra; también pueden tener signos opuestos.

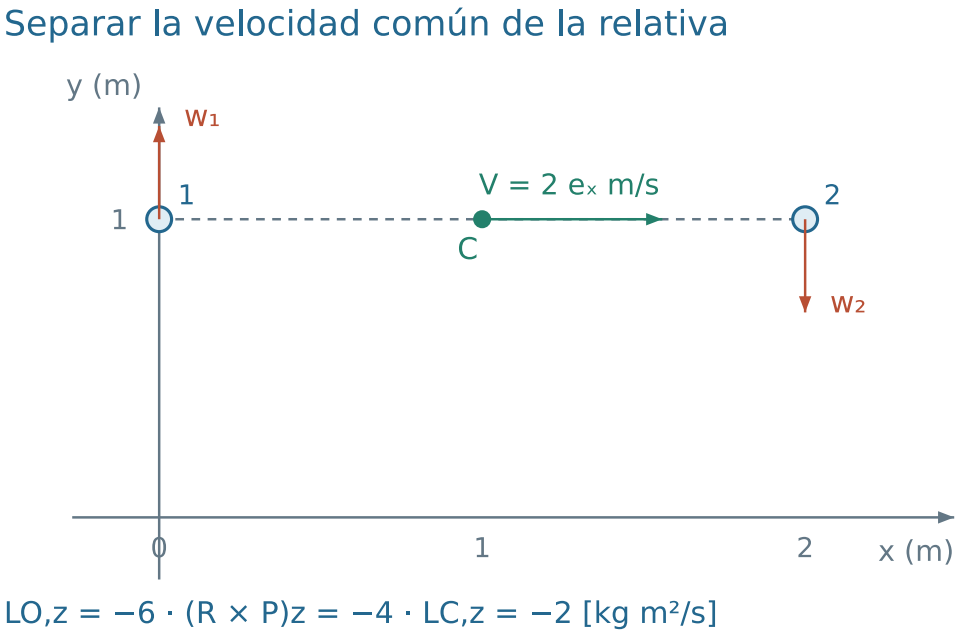


Figura 12.5. Para masas iguales, $\mathbf{R}=(1,1)\,\mathrm{m}$, $\mathbf{P}=(4,0)\,\mathrm{kg\,m/s}$ y $L_{C,z}=-2\,\mathrm{kg\,m^2/s}$. La contribución del centro de masa respecto de O es $-4\,\mathrm{kg\,m^2/s}$; el total vale $-6\,\mathrm{kg\,m^2/s}$. Las flechas de velocidad relativa se distinguen de la velocidad común.

La fórmula del punto móvil declara una convención: usamos momentos lineales medidos en el laboratorio. Si reemplazáramos todas las velocidades por velocidades relativas al punto móvil, estaríamos definiendo otra cantidad. En el centro de masa ambas sumas coinciden por la identidad ponderada; en un punto móvil arbitrario no tenemos ese permiso. El ejercicio 11 muestra el término que se perdería al confundir las convenciones.

Cuando el origen móvil acelera, las dos elecciones de velocidad pueden compararse mediante una identidad. Conservaremos ejes cartesianos paralelos a los del laboratorio; así, derivar las componentes relativas sólo exige tener en cuenta la traslación del origen.

Definición (momento angular con velocidades relativas). Para un sistema cerrado de partículas de masas constantes y un punto $A(t)$ de posición $\mathbf{a}(t)$, definimos

$$\mathbf{H}_A=\sum_i(\mathbf{r}_i-\mathbf{a})\times m_i(\mathbf{v}_i-\dot{\mathbf{a}}).$$

La posición y la velocidad de cada partícula se toman respecto de ese mismo origen. La cantidad $\mathbf{L}_A$ introducida antes conserva, en cambio, los momentos lineales del laboratorio. Escribir ambas sumas permite reconocer qué balance corresponde a cada elección.

Proposición (balance con velocidades relativas). Sea $\mathbf{a}$ de clase C^2 y supongamos las hipótesis de cancelación de torques internos del sistema de partículas. Con masa total M y centro de masa $\mathbf{R}$,

$$\mathbf{H}_A=\mathbf{L}_A-M(\mathbf{R}-\mathbf{a})\times\dot{\mathbf{a}},$$
$$\frac{d\mathbf{H}_A}{dt}=\boldsymbol{\tau}_{A,\mathrm{ext}}-M(\mathbf{R}-\mathbf{a})\times\ddot{\mathbf{a}}.$$

Demostración. Expandir la velocidad relativa en la definición de $\mathbf{H}_A$ deja $\mathbf{L}_A$ menos $(\sum_i m_i(\mathbf{r}_i - \mathbf{a})) \times \dot{\mathbf{a}}$. La suma es $M(\mathbf{R} - \mathbf{a})$ y produce la primera identidad. Para la segunda derivamos directamente la definición. El producto de cada velocidad relativa consigo misma se anula; los términos restantes son

$$\sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{a}) \times m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \left(\sum_i m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{a}) \right) \times \ddot{\mathbf{a}}.$$

Newton y la cancelación interna convierten la primera suma en el torque externo. La segunda da el término de aceleración del origen que figura en el enunciado.

Con un origen en traslación uniforme, $\ddot{\mathbf{a}} = 0$, el balance de $\mathbf{H}_A$ toma la forma torque igual a derivada del momento angular relativo. En el centro de masa, $\mathbf{R} - \mathbf{a} = 0$, las dos cantidades coinciden y ambos términos de transporte se anulan incluso si ese centro acelera. Para una referencia arbitraria importa qué velocidad se ha usado y cómo se mueve el origen. El ejercicio 21 permite comprobar las dos identidades con una sola partícula libre.

Fuerzas centrales y áreas barridas

Supongamos que una partícula recibe una fuerza neta paralela al vector que la une a un punto fijo O. Mientras $\mathbf{r} \neq 0$, podemos escribirla $\mathbf{F} = f \mathbf{e}_r$, con signo libre para f. La fuerza puede ser atractiva o repulsiva y su intensidad puede variar. Su torque respecto de O es cero.

Proposición. En un intervalo donde la fuerza neta es central respecto de un punto fijo y la trayectoria no pasa por él, $\mathbf{L}_O$ es constante. Si $\mathbf{L}_O \neq 0$, el movimiento queda en el plano fijo que pasa por O y es perpendicular a ese vector. En coordenadas polares orientadas de ese plano,

$$L_{O,z} = m r^2 \dot{\theta}, \qquad \dot{\mathcal{A}} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{L_{O,z}}{2m},$$

donde $\mathcal{A}$ es el área barrida con signo por el radio vector. En consecuencia, intervalos temporales iguales barren áreas orientadas iguales.

Demostración. La centralidad anula $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ y el balance conserva $\mathbf{L}_O$. Todo vector $\mathbf{r}(t)$ es perpendicular a $\mathbf{r}(t) \times m\mathbf{v}(t) = \mathbf{L}_O$; si ese vector constante es no nulo, esta condición fija un plano. En él escribimos $x = r\cos\theta$ y $y = r\sin\theta$. Derivar y restar muestra que $x\dot{y} - y\dot{x} = r^2\dot{\theta}$. El área orientada acumulada se define por $\mathcal{A}(t) - \mathcal{A}(t_0) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} (x\dot{y} - y\dot{x})\, ds$; la fórmula del área de un triángulo explica el factor $1/2$ y su interpretación geométrica. Sustituir $L_{O,z} = m(x\dot{y} - y\dot{x})$ prueba que la tasa es constante.

La ley de áreas no identifica por sí sola una ley de gravitación ni una forma orbital. Por ejemplo, $\mathbf{r}(t) = (a\cos(\omega t), b\sin(\omega t), 0)$, con $a, b, \omega > 0$, satisface $\ddot{\mathbf{r}} = -\omega^2 \mathbf{r}$ y barre áreas a tasa $ab\omega/2$ respecto del centro de esa elipse. Es un modelo de fuerza central distinto del que estudiaremos en la gravitación.

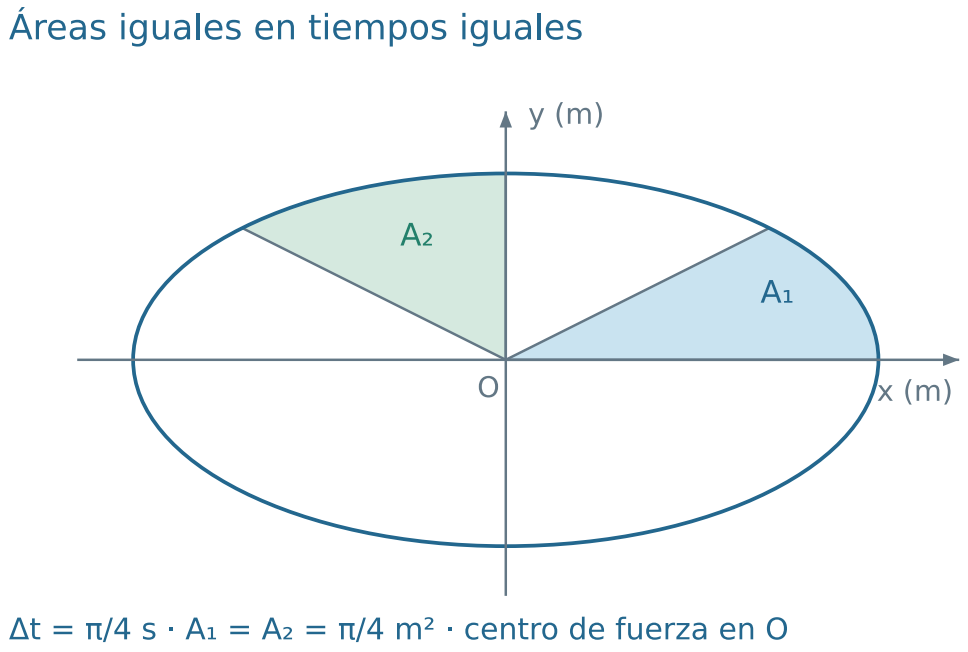


Figura 12.6. Se usa el ejemplo $x = (2\,\mathrm{m})\cos u$, $y = (1\,\mathrm{m})\sin u$, con $u = t/(1\,\mathrm{s})$. Los sectores corresponden a incrementos iguales $\Delta u = \pi/4$ y cada uno tiene área $\pi/4\,\mathrm{m}^2$. Sus longitudes de arco no tienen por qué coincidir.

Si $\mathbf{L}_O = 0$ y $r > 0$, la velocidad es radial: $\mathbf{r} \times \mathbf{v} = 0$ obliga a que ambos vectores sean paralelos. El ángulo permanece fijo en cada tramo que evita el centro, aunque la rapidez radial pueda cambiar. La trayectoria radial queda contenida en una recta por O, compatible con todos los planos que contienen esa recta. El vector momento angular nulo deja indeterminado cuál de esos planos elegir. Si la fuerza es singular en el centro, la conservación por sí sola deja pendiente la continuación a través de él.

En el caso no nulo, la velocidad tiene componentes $\mathbf{v} = \dot r\,\mathbf{e}_r + r\dot\theta\,\mathbf{e}_\theta$. La conservación fija $v_\theta = L_{O,z}/(mr)$, pero no fija $\dot r$. La energía cinética es

$$K = \frac{1}{2}m\dot r^2 + \frac{L_{O,z}^2}{2mr^2}.$$

Para hallar la historia radial hace falta otra ecuación, por ejemplo la componente radial de Newton o un balance de energía con las hipótesis correspondientes. Un único valor de momento angular no determina toda una trayectoria.

Torque, trabajo y potencia

Una fuerza radial puede realizar trabajo si el radio cambia, aunque su torque sea cero. Una fuerza tangente puede tener potencia cero en un instante de reposo aunque su torque sea distinto de cero. La distinción se comprueba con las definiciones: $P = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$ y $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r}\times\mathbf{F}$ usan operaciones y datos diferentes.

Para un movimiento de radio fijo respecto de un eje fijo z, $\mathbf{v} = R\omega\mathbf{e}_\theta$. Si F_θ es la componente tangencial de una fuerza, entonces

$$P = F_\theta R\omega = \tau_{O,z}\omega, \qquad W = \int_{t_a}^{t_b} \tau_{O,z}(t)\omega(t)\,dt.$$

Si el torque es constante, $W = \tau_{O,z}\Delta\theta$. Para un cuerpo rígido que gira alrededor de ese eje, cada punto conserva su distancia al eje y comparte ω; sumar las potencias de las fuerzas da la misma identidad con el torque total sobre el eje. No se sustituye la componente por la magnitud del vector: el signo determina si la fuerza entrega o extrae energía. Cuando el centro de masa se traslada o el sistema se deforma, este argumento de eje fijo no incluye por sí solo toda la potencia.

Un hilo que pasa por un orificio de una mesa sin rozamiento permite contrastar ambos balances. Si tiramos de la cuenta unida al hilo, la tensión horizontal apunta hacia el orificio y su torque respecto de él es cero. Aun así, realiza trabajo durante la contracción. En dos instantes con velocidad radial nula, reducir el radio a la mitad duplica la rapidez tangencial y cuadruplica la energía cinética. El momento angular permanece constante; la mano que recoge el hilo suministra la energía adicional.

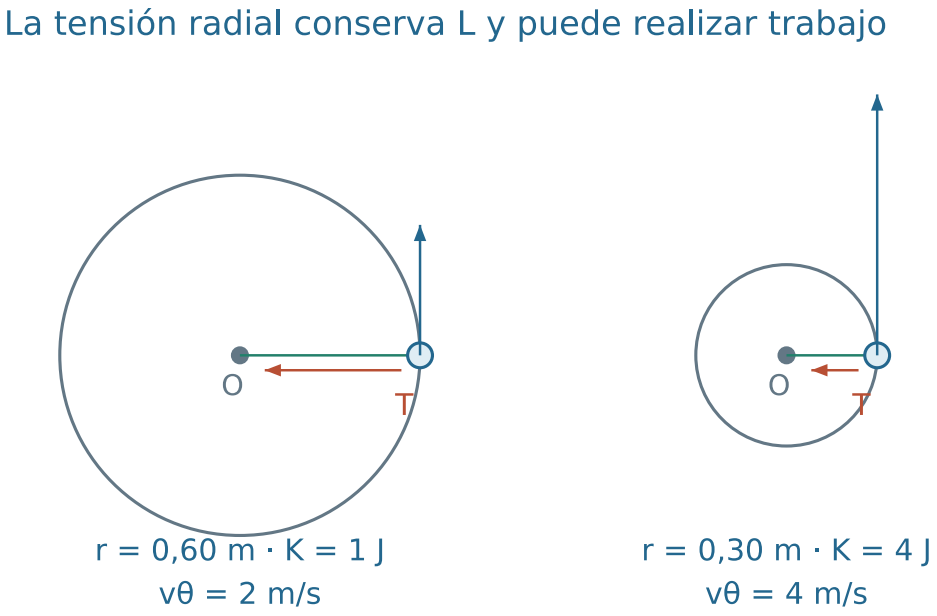


Figura 12.7. Se comparan dos estados con velocidad radial nula. Para una masa de 0,50 kg, radios de 0,60 y 0,30 m y rapidez tangencial inicial de 2 m/s, el momento angular vale 0,60 kg m^2/s en ambos. La energía cinética pasa de uno a cuatro joules.

Ejercicios

Se utilizarán bases cartesianas ortonormales con orientación derecha. Salvo indicación contraria, los puntos de referencia están fijos en un mismo laboratorio inercial, las masas son constantes y los momentos lineales se calculan con las velocidades de ese laboratorio. En el plano xy, el sentido positivo del eje z sale de la página.

1. El brazo que debe usarse

Una fuerza $\mathbf{F} = (6, 0, 0)\,\mathrm{N}$ actúa en $\mathbf{r} = (0{,}30, 0{,}40, 0)\,\mathrm{m}$. Calcule el torque respecto de O y su brazo de palanca. Explique por qué multiplicar $\|\mathbf{r}\|$ por $\|\mathbf{F}\|$ daría una respuesta incorrecta.

2. Deslizar una fuerza sobre su línea

La fuerza $\mathbf{F} = (3, 4, 0)\,\mathrm{N}$ se aplica primero en $(0{,}10, 0{,}20, 0)\,\mathrm{m}$ y después en $(0{,}40, 0{,}60, 0)\,\mathrm{m}$. Compare sus torques respecto de O. Determine qué cambia si se aplica en $(0{,}10, 0, 0)\,\mathrm{m}$ y delimite la equivalencia que ha comprobado.

3. Un cálculo en tres dimensiones

Una partícula de $2\,\mathrm{kg}$ está en $\mathbf{r} = (1, -2, 0)\,\mathrm{m}$, tiene velocidad $\mathbf{v} = (3, 0, -1)\,\mathrm{m/s}$ y recibe una fuerza neta $\mathbf{F} = (0, 3, 4)\,\mathrm{N}$. Calcule $\mathbf{L}_O$ y $\boldsymbol{\tau}_O$. Compruebe las perpendicularidades pertinentes.

4. Momento angular sin movimiento circular

Una partícula de $0{,}20\,\mathrm{kg}$ sigue $\mathbf{r}(t) = (3u, 0{,}50, 0)\,\mathrm{m}$, con $u = t/(1\,\mathrm{s})$. Determine su momento angular respecto de O y respecto del punto fijo $A = (0, 0{,}50, 0)\,\mathrm{m}$. ¿Cambia su energía cinética al cambiar la referencia del momento angular?

5. Completar el problema de la guía

Para la cuenta del comienzo, calcule el impulso angular, la velocidad angular, el desplazamiento angular y el trabajo durante el empuje. Determine la reacción horizontal al final y qué movimiento sigue después de apagar el actuador, manteniendo la guía ideal.

6. Un torque que primero frena y luego acelera

Una partícula se mueve en una circunferencia fija con $mR^2 = 0{,}20\,\mathrm{kg\,m^2}$. Al principio $L_{O,z} = -0{,}20\,\mathrm{kg\,m^2/s}$. Para $0 \le t \le 2\,\mathrm{s}$ recibe el torque neto $\tau_{O,z} = (0{,}40\,\mathrm{N\,m})u$. Halle $L_{O,z}(t)$, el instante en que cambia el sentido de movimiento y el desplazamiento angular firmado durante esos dos segundos.

7. Cambiar el origen con signos

En un instante, un sistema tiene $\mathbf{P} = (2, 3, 0)\,\mathrm{kg\,m/s}$, $L_{O,z} = 4\,\mathrm{kg\,m^2/s}$, $\mathbf{F}_{\mathrm{ext}} = (0, 5, 0)\,\mathrm{N}$ y $\tau_{O,z} = 6\,\mathrm{N\,m}$. El punto fijo A satisface $\overrightarrow{OA} = (1, -2, 0)\,\mathrm{m}$. Calcule $L_{A,z}$ y $\tau_{A,z}$.

8. Resultante nula y torque no nulo

Dos fuerzas $(0, 5, 0)\,\mathrm{N}$ y $(0, -5, 0)\,\mathrm{N}$ actúan, respectivamente, en $(0{,}30, 0, 0)\,\mathrm{m}$ y $(-0{,}30, 0, 0)\,\mathrm{m}$. Determine su resultante y su torque respecto de O y de $A = (1, 1, 0)\,\mathrm{m}$. Explique qué balance puede cambiar aunque el otro no cambie.

9. Qué falta en la cancelación interna

En un modelo de dos partículas, $\mathbf{r}_1 = (0{,}50, 0, 0)\,\mathrm{m}$ y $\mathbf{r}_2 = (-0{,}50, 0, 0)\,\mathrm{m}$. Sus únicas fuerzas son $\mathbf{F}_{12} = (0, 2, 0)\,\mathrm{N}$ y $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$. Calcule la fuerza interna total y el torque interno total. Identifique la hipótesis del teorema del sistema que no se cumple.

10. Separar las dos contribuciones

Dos partículas de $1\,\mathrm{kg}$ tienen $\mathbf{r}_1 = (0, 1, 0)\,\mathrm{m}$, $\mathbf{r}_2 = (2, 1, 0)\,\mathrm{m}$, $\mathbf{v}_1 = (2, 1, 0)\,\mathrm{m/s}$ y $\mathbf{v}_2 = (2, -1, 0)\,\mathrm{m/s}$. Calcule $\mathbf{R}$, $\mathbf{P}$, el momento angular interno y el total respecto de O. Compruebe el resultado sumando directamente las dos contribuciones individuales.

11. Una referencia móvil

Una partícula libre de $1\,\mathrm{kg}$ sigue $\mathbf{r}(t) = (u, 1, 0)\,\mathrm{m}$. El punto de referencia tiene posición $\mathbf{a}(t) = (0, u, 0)\,\mathrm{m}$. Calcule $\mathbf{L}_A$ usando el momento lineal del laboratorio. Explique por qué puede cambiar aunque el torque respecto de A sea cero. Compare con el producto que se obtendría usando la velocidad relativa a A.

12. El centro de masa que cae

Dos partículas de $1\,\mathrm{kg}$ interactúan mediante fuerzas centrales opuestas y reciben cada una una fuerza gravitatoria $m_i\mathbf{g}$, con $\mathbf{g} = (0, -10, 0)\,\mathrm{m/s^2}$. En cierto instante $\mathbf{R} = (1, 1, 0)\,\mathrm{m}$. Determine los torques externos respecto del centro de masa y de O, y sus consecuencias para ambos momentos angulares. ¿Hace falta que el centro de masa esté en reposo?

13. Qué velocidad fija una conservación

Una partícula de $0{,}50\,\mathrm{kg}$ se mueve bajo una fuerza central. En un instante $r = 2\,\mathrm{m}$ y $v_\theta = 3\,\mathrm{m/s}$. Cuando llega a $r = 1\,\mathrm{m}$, ¿cuánto vale v_θ? ¿Puede determinarse la energía cinética total en el segundo instante sin otro dato?

14. Área y reloj

Una partícula de $0{,}30\,\mathrm{kg}$ tiene $L_{O,z} = 0{,}12\,\mathrm{kg\,m^2/s}$ constante en un movimiento central plano. Calcule su tasa de área orientada, el área barrida en $0{,}75\,\mathrm{s}$ y su velocidad tangencial cuando $r = 0{,}40\,\mathrm{m}$. Distinga área igual de longitud de arco igual.

15. Momento angular cero

Una partícula parte de $\mathbf{r}_0 = (2, 0, 0)\,\mathrm{m}$ con $\mathbf{v}_0 = (-3, 0, 0)\,\mathrm{m/s}$ bajo una fuerza central respecto de O. Determine su momento angular y qué puede concluirse sobre la trayectoria antes de alcanzar el centro. Examine la afirmación «momento angular cero implica reposo».

16. Un impulso aplicado cerca de un punto

Una partícula de $0{,}10\,\mathrm{kg}$ inicialmente en reposo recibe un impulso neto $\mathbf{J} = (0{,}50, 1, 0)\,\mathrm{N\,s}$ durante un contacto breve. Su posición al comienzo es $\mathbf{r}_* = (0{,}20, 0{,}10, 0)\,\mathrm{m}$. Estime $\Delta L_{O,z}$ usando esa posición fija y calcule la velocidad final. Si durante el contacto $\|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_*\| \le 0{,}002\,\mathrm{m}$ y $\int \|\mathbf{F}_{\mathrm{neta}}\|\,dt \le 1{,}2\,\mathrm{N\,s}$, acote el error de la estimación angular.

17. El signo de la potencia

Un cuerpo rígido gira alrededor de un eje fijo z con $\omega = -2\,\mathrm{s^{-1}}$ en un instante en que el torque neto sobre el eje es $+3\,\mathrm{N\,m}$. Calcule la potencia neta y explique si el torque está aumentando o disminuyendo la rapidez de giro en ese instante. No suponga que la potencia es el producto de dos magnitudes positivas.

18. Trabajo con torque cero

Una partícula está en $\mathbf{r} = (0{,}30, 0{,}40, 0)\,\mathrm{m}$, lleva $\mathbf{v} = (-0{,}60, -0{,}80, 0)\,\mathrm{m/s}$ y recibe como fuerza neta $\mathbf{F} = -\kappa\mathbf{r}$, con $\kappa = 10\,\mathrm{N/m}$. Calcule el torque y la potencia. ¿Qué cambia de sus momentos lineal y angular, y de su energía cinética?

19. Recoger el hilo

En una mesa horizontal ideal, una cuenta de $0{,}50\,\mathrm{kg}$ está unida a un hilo que pasa por un orificio fijo. La tensión es radial. Se comparan dos estados con velocidad radial nula: primero $r_1 = 0{,}60\,\mathrm{m}$ y $v_{\theta,1} = 2\,\mathrm{m/s}$; después $r_2 = 0{,}30\,\mathrm{m}$. Determine la rapidez tangencial final y el trabajo neto sobre la cuenta entre ambos estados. Explique de dónde puede proceder la energía.

20. Un balance compatible con las medidas

En el experimento de la guía se obtienen las cotas $R = (0{,}400 \pm 0{,}002)\,\mathrm{m}$, $F = (1{,}20 \pm 0{,}02)\,\mathrm{N}$, $\Delta t = (0{,}50 \pm 0{,}01)\,\mathrm{s}$ y un ángulo entre radio y fuerza de $90^\circ \pm 2^\circ$. Suponga esos límites válidos durante todo el empuje y orientación de torque positiva. El cambio de momento angular medido queda en $(0{,}240 \pm 0{,}003)\,\mathrm{kg\,m^2/s}$. Construya una cota del impulso angular aplicado y examine la compatibilidad. Distinga este control de una confirmación exacta del modelo.

21. Una partícula libre vista desde un origen acelerado

Una partícula de masa $m = 1\,\mathrm{kg}$ permanece en el origen de un laboratorio inercial, con fuerza neta nula. Un punto de referencia A recorre la parábola

$$\mathbf{a}(t) = \ell(\theta, \theta^2, 0), \qquad \theta = t/\tau, \qquad \ell = 1\,\mathrm{m}, \quad \tau = 1\,\mathrm{s}.$$

Los ejes relativos a A permanecen paralelos a los del laboratorio. Calcule el momento angular $\mathbf{L}_A$ formado con el momento lineal del laboratorio y el momento angular $\mathbf{H}_A$ formado con velocidades relativas a A. Obtenga sus derivadas y compruebe ambos balances de transporte. Evalúe las cantidades en $t = \tau$ y explique cómo se relacionan con la fuerza neta nula sobre la partícula.

Soluciones

1. El brazo que debe usarse

La componente es $\tau_{O,z} = (0{,}30)(0) - (0{,}40)(6) = -2{,}4\,\mathrm{N\,m}$. El vector torque apunta hacia $-z$, correspondiente al sentido horario. La línea de acción es horizontal a altura $0{,}40\,\mathrm{m}$, por lo que su distancia perpendicular a O es $d = 0{,}40\,\mathrm{m}$. La magnitud $Fd = 2{,}4\,\mathrm{N\,m}$ coincide con el cálculo firmado.

La distancia al punto de aplicación es $\|\mathbf{r}\| = 0{,}50\,\mathrm{m}$. Multiplicarla por seis daría $3\,\mathrm{N\,m}$, pero eso equivaldría a suponer fuerza perpendicular a $\mathbf{r}$. Aquí $\sin\varphi = 0{,}40/0{,}50 = 0{,}8$; el factor geométrico devuelve el brazo correcto. La distancia al punto y la distancia a la línea de acción responden a preguntas diferentes.

2. Deslizar una fuerza sobre su línea

En el primer punto, $\tau_{O,z} = 0{,}10(4) - 0{,}20(3) = -0{,}20\,\mathrm{N\,m}$. En el segundo, $\tau_{O,z} = 0{,}40(4) - 0{,}60(3) = -0{,}20\,\mathrm{N\,m}$. La separación entre ambos puntos es $(0{,}30, 0{,}40, 0)\,\mathrm{m}$, paralela a la fuerza, así que el producto adicional se anula.

El tercer punto da $\tau_{O,z} = 0{,}10(4) = +0{,}40\,\mathrm{N\,m}$. Ya no está en la misma línea de acción y hasta cambia el signo del torque. Los dos primeros casos tienen la misma resultante y el mismo torque respecto de O; esa igualdad no demuestra que aplicar la fuerza en distintos lugares produzca idénticas deformaciones de un cuerpo real. El resultado algebraico conserva el efecto en este balance y debe emplearse dentro del modelo mecánico pertinente.

3. Un cálculo en tres dimensiones

Primero convertimos velocidad en momento lineal: $\mathbf{p} = (6, 0, -2)\,\mathrm{kg\,m/s}$. Para conservar el orden de los factores, calculamos primero la componente x de cada producto: $L_{O,x} = ((-2)(-2) - 0(0))\,\mathrm{kg\,m^2/s} = 4\,\mathrm{kg\,m^2/s}$ y $\tau_{O,x} = ((-2)(4) - 0(3))\,\mathrm{N\,m} = -8\,\mathrm{N\,m}$. La misma regla, aplicada a las componentes y y z, da

$$\mathbf{L}_O = (4, 2, 12)\,\mathrm{kg\,m^2/s}, \qquad \boldsymbol{\tau}_O = (-8, -4, 3)\,\mathrm{N\,m}.$$

Los controles son $\mathbf{r}\cdot\mathbf{L}_O = 4 - 4 = 0$ y $\mathbf{p}\cdot\mathbf{L}_O = 24 - 24 = 0$. Para el torque, $\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\tau}_O = -8 + 8 = 0$ y $\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\tau}_O = -12 + 12 = 0$. En cada caso se controla perpendicularidad con los factores que

realmente forman el producto. No se exige que $\boldsymbol{\tau}_O$ sea paralelo a $\mathbf{L}_O$: un torque puede cambiar la dirección del momento angular además de su magnitud. Todas las componentes calculadas son instantáneas; reconstruir el movimiento requeriría conocer la fuerza posteriormente.

4. Momento angular sin movimiento circular

La velocidad es $(3, 0, 0)\,\mathrm{m/s}$ y el momento lineal $(0{,}60, 0, 0)\,\mathrm{kg\,m/s}$. Respecto de O,

$$L_{O,z} = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = -(0{,}20)(0{,}50)(3) = -0{,}30\,\mathrm{kg\,m^2/s}.$$

El término que contiene $x = 3u\,\mathrm{m}$ se multiplica por $\dot{y} = 0$, de modo que el resultado es constante. Respecto de A, la posición relativa es $(3u, 0, 0)\,\mathrm{m}$, paralela a $\mathbf{p}$; su momento angular es cero.

La energía cinética sigue siendo $K = mv^2/2 = 0{,}90\,\mathrm{J}$ en ambos cálculos. Hemos cambiado el punto de referencia del momento angular, manteniendo el mismo laboratorio y la misma velocidad. El cambio no afecta la energía cinética. Cambiar también de marco de velocidades sería otra operación y exigiría un cálculo distinto.

5. Completar el problema de la guía

La fuerza tangencial produce $\tau_{O,z} = RF_t = 0{,}48\,\mathrm{N\,m}$ constante. Su impulso angular durante medio segundo es $0{,}24\,\mathrm{kg\,m^2/s}$. Como la cuenta parte del reposo y $mR^2 = 0{,}080\,\mathrm{kg\,m^2}$, resulta $\omega = 3\,\mathrm{s^{-1}}$ al terminar.

La aceleración angular es $6\,\mathrm{s^{-2}}$, de donde $\Delta\theta = 0{,}75\,\mathrm{rad}$. El trabajo $\tau_{O,z}\Delta\theta = 0{,}36\,\mathrm{J}$ coincide con $mR^2\omega^2/2$. La reacción horizontal final tiene magnitud $mR\omega^2 = 1{,}8\,\mathrm{N}$ y apunta al centro. No aporta torque ni trabajo, pero es indispensable para la trayectoria circular.

Al apagar el actuador, permanece esa fuerza radial y el torque neto es cero. Se conserva $L_{O,z}$ y, como m y R no cambian, también $\omega = 3\,\mathrm{s^{-1}}$. La cuenta sigue en movimiento circular uniforme. Su momento lineal cambia de dirección; conservar momento angular no autoriza a concluir que la fuerza neta desaparece.

6. Un torque que primero frena y luego acelera

Al integrar debemos incluir $dt = (1\,\mathrm{s})du$. Así,

$$L_{O,z}(t) = (-0{,}20 + 0{,}20u^2)\,\mathrm{kg\,m^2/s}, \qquad \omega(t) = (-1 + u^2)\,\mathrm{s^{-1}}.$$

La velocidad angular se anula en $u = 1$, dentro del intervalo. Antes es negativa y el torque positivo reduce la rapidez; después ambas cantidades son positivas y la rapidez aumenta. El desplazamiento firmado es

$$\Delta\theta = \int_0^2 (-1 + u^2)\,du = -2 + \frac{8}{3} = \frac{2}{3}\,\mathrm{rad}.$$

Hasta la detención recorrió un ángulo $-2/3\,\mathrm{rad}$; desde ella hasta el final avanzó $4/3\,\mathrm{rad}$. El desplazamiento total de $2/3\,\mathrm{rad}$ no es la distancia angular recorrida, que vale $2\,\mathrm{rad}$. Al final, $L_{O,z} = 0{,}60\,\mathrm{kg\,m^2/s}$ y $\omega = 3\,\mathrm{s^{-1}}$, en concordancia con el impulso angular total de $0{,}80\,\mathrm{kg\,m^2/s}$.

7. Cambiar el origen con signos

La separación que debemos usar es de O hacia A, no su negativo. Su producto con el momento total tiene componente $a_xP_y - a_yP_x = 1(3) - (-2)(2) = 7\,\mathrm{kg\,m^2/s}$. Por tanto $L_{A,z} = 4 - 7 = -3\,\mathrm{kg\,m^2/s}$.

Para las fuerzas externas, $(\mathbf{a}\times\mathbf{F}_{\text{ext}})_z = 1(5)-(-2)(0) = 5\,\text{N m}$. Se obtiene $\tau_{A,z} = 6-5 = 1\,\text{N m}$. El signo de L puede cambiar al mover el punto de referencia sin que cambien las velocidades físicas de las partículas.

Si estos datos corresponden a un sistema con cancelación de torques internos, la derivada de $L_{A,z}$ en ese instante es $1\,\text{N m}$. No se puede inferir que el torque tenga ese mismo valor posteriormente, porque el enunciado sólo proporciona un estado instantáneo.

8. Resultante nula y torque no nulo

La suma de fuerzas es cero. Respecto de O, cada fuerza contribuye $+1{,}5\,\text{N m}$ a la componente z, de modo que el torque total vale $+3\,\text{N m}$.

Desde A, los vectores de posición son $(-0{,}70,-1,0)\,\text{m}$ y $(-1{,}30,-1,0)\,\text{m}$. Sus torques tienen componentes $-3{,}5$ y $+6{,}5\,\text{N m}$; la suma vuelve a ser tres. También se obtiene con la fórmula de traslación, porque $\mathbf{a}\times\mathbf{F}_{\text{total}} = 0$.

Si constituyen todas las fuerzas externas de un sistema con cancelación interna, el momento lineal no cambia en ese instante y el momento angular sí cambia. El par no desplaza el centro de masa mediante una fuerza resultante, pero puede modificar el movimiento interno. No hay incompatibilidad: los dos balances suman cantidades distintas y las fuerzas se aplican en lugares separados.

9. Qué falta en la cancelación interna

Las fuerzas se cancelan al sumarlas: $\mathbf{F}_{12}+\mathbf{F}_{21}=0$. Sin embargo, el torque del par es

$$(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\times\mathbf{F}_{12} = (1,0,0)\,\text{m}\times(0,2,0)\,\text{N} = (0,0,2)\,\text{N m}.$$

La fuerza es perpendicular a la separación y no central. Por eso no puede usarse el teorema que elimina los torques internos. Las ecuaciones de este modelo puntual conservarían el momento lineal total, pero darían una derivada no nula del momento angular orbital total.

El ejemplo identifica una insuficiencia de hipótesis; no demuestra que un sistema físico completo y aislado pueda violar una conservación universal. Si esas fuerzas representan un mecanismo con partes o grados de libertad omitidos, habría que incluir sus contribuciones al momento angular y revisar si el sistema realmente está cerrado. La pareja de fuerzas opuestas por sí sola no efectúa ese trabajo de modelación.

10. Separar las dos contribuciones

Con masas iguales, $\mathbf{R} = (1,1,0)\,\text{m}$ y $\mathbf{V} = (2,0,0)\,\text{m/s}$. El momento total es $\mathbf{P} = (4,0,0)\,\text{kg m/s}$ y la contribución del centro de masa respecto de O es $(\mathbf{R}\times\mathbf{P})_z = -4\,\text{kg m}^2/\text{s}$.

Las posiciones relativas son $\boldsymbol{\rho}_1 = (-1,0,0)\,\text{m}$, $\boldsymbol{\rho}_2 = (1,0,0)\,\text{m}$; las velocidades relativas son $\mathbf{w}_1 = (0,1,0)\,\text{m/s}$ y $\mathbf{w}_2 = (0,-1,0)\,\text{m/s}$. Cada producto relativo aporta $-1\,\text{kg m}^2/\text{s}$, de modo que $L_{C,z} = -2\,\text{kg m}^2/\text{s}$ y el total es $-6\,\text{kg m}^2/\text{s}$.

Por suma directa, la primera partícula aporta $0(1)-1(2) = -2$ y la segunda $2(-1)-1(2) = -4$, con las mismas unidades. Su suma confirma el resultado. Separar el movimiento común permitió identificar una contribución interna que no desaparece por el mero hecho de que el centro de masa se traslade uniformemente.

11. Una referencia móvil

La posición relativa es $\mathbf{r}-\mathbf{a} = (u,1-u,0)\,\text{m}$, pero el momento lineal del laboratorio es constante e igual a $(1,0,0)\,\text{kg m/s}$. Así,

$$L_{A,z} = (u-1)\,\text{kg m}^2/\text{s}, \qquad \dot{L}_{A,z} = 1\,\text{N m}.$$

La partícula es libre y el torque es cero. La velocidad del punto es $\dot{\mathbf{a}} = (0, 1, 0)\,\mathrm{m/s}$; el término $-\dot{\mathbf{a}} \times \mathbf{P}$ tiene componente $+1\,\mathrm{N\,m}$ y explica toda la variación.

Si usamos la velocidad relativa $(1, -1, 0)\,\mathrm{m/s}$, el producto da $u(-1) - (1-u)(1) = -1\,\mathrm{kg\,m^2/s}$, constante. Ésta es la componente $H_{A,z}$. La identidad de cambio de convención permite comprobarla: el término $m((\mathbf{r} - \mathbf{a}) \times \dot{\mathbf{a}})_z$ vale $u\,\mathrm{kg\,m^2/s}$, por lo que $H_{A,z} = L_{A,z} - u\,\mathrm{kg\,m^2/s} = -1\,\mathrm{kg\,m^2/s}$. En este caso A se mueve uniformemente y puede ser origen de otro marco inercial con ejes paralelos. Ese cálculo pertenece a dicho marco; no puede mezclarse con el momento lineal del laboratorio sin introducir el cambio correspondiente. La convención de velocidad es parte de la definición que se está utilizando.

12. El centro de masa que cae

El torque gravitatorio respecto del centro de masa es $\sum_i \boldsymbol{\rho}_i \times m_i \mathbf{g} = (\sum_i m_i \boldsymbol{\rho}_i) \times \mathbf{g} = 0$. Por la hipótesis de fuerzas internas centrales, también se anula su suma de torques. Por tanto $\mathbf{L}_C$ se conserva durante la caída mientras se mantenga la uniformidad del campo y no aparezcan otras fuerzas externas relevantes.

Respecto de O, la fuerza gravitatoria total es $M\mathbf{g} = (0, -20, 0)\,\mathrm{N}$. El torque externo en el instante dado es $\mathbf{R} \times M\mathbf{g} = (0, 0, -20)\,\mathrm{N\,m}$. El momento angular respecto de O tiene esa derivada y no se conserva en general.

No hace falta que el centro de masa esté en reposo ni que se mueva uniformemente. Su aceleración es $\mathbf{g}$, pero el término de transporte especial se anula porque $\mathbf{V} \times \mathbf{P} = \mathbf{V} \times M\mathbf{V} = 0$. El punto del balance permite conservar una contribución que el balance respecto de O no conserva.

13. Qué velocidad fija una conservación

La fuerza central conserva $L_{O,z} = mrv_\theta = (0{,}50)(2)(3) = 3\,\mathrm{kg\,m^2/s}$. A un metro del centro, la componente tangencial debe ser $v_\theta = L_{O,z}/(mr) = 6\,\mathrm{m/s}$. Su signo permanece positivo según la orientación inicial.

La energía cinética tangencial en ese segundo instante es $mv_\theta^2/2 = 9\,\mathrm{J}$. La energía cinética total es $K = 9\,\mathrm{J} + m\dot{r}^2/2$, y falta conocer la velocidad radial. Por tanto sabemos $K \geq 9\,\mathrm{J}$, pero no un valor único. Incluso la llegada a ese radio requiere una dinámica compatible; el enunciado la da como condición del segundo estado, no la deduce de la conservación. La fuerza radial y los datos iniciales completos decidirían qué radios son accesibles y con qué rapidez se atraviesan.

14. Área y reloj

La tasa de área orientada es $\dot{\mathcal{A}} = L_{O,z}/(2m) = 0{,}20\,\mathrm{m^2/s}$. En $0{,}75\,\mathrm{s}$ barre $0{,}15\,\mathrm{m^2}$ con signo positivo. A $r = 0{,}40\,\mathrm{m}$, $v_\theta = L_{O,z}/(mr) = 1\,\mathrm{m/s}$ y $\dot{\theta} = v_\theta/r = 2{,}5\,\mathrm{s^{-1}}$.

La ley de áreas compensa radios pequeños con velocidades angulares mayores. No fija una rapidez total constante ni longitudes de arco iguales en intervalos iguales. La longitud recorrida depende de $\sqrt{\dot{r}^2 + v_\theta^2}$, mientras que el área depende de $rv_\theta/2$. Confundirlas eliminaría precisamente la información radial que no contiene el balance angular. En el ejemplo el signo positivo de $L_{O,z}$ también fija la orientación de las áreas; el área geométrica sin signo se obtiene tomando el valor absoluto en este tramo.

15. Momento angular cero

Los vectores iniciales son paralelos y opuestos, de modo que $\mathbf{L}_O(0) = 0$. La fuerza central mantiene ese valor. Mientras $r > 0$, $r^2\dot{\theta} = L_{O,z}/m = 0$ y la dirección radial permanece fija: la partícula avanza por la línea que une su posición inicial con O. Su rapidez puede aumentar, disminuir o llegar a anularse según la ley radial.

La velocidad inicial ya refuta la afirmación de reposo, pues vale $-3\,\mathrm{m/s}$ en la dirección x. Momento angular cero sólo elimina la componente transversal respecto del punto elegido. Tampoco determina si llegará al centro: una fuerza repulsiva podría detener la aproximación antes. Si el centro se alcanza y la fuerza es singular allí, las fórmulas válidas para $r > 0$ no deciden la continuación. Si la ley fuera regular y permitiera atravesarlo, se estudiaría esa ecuación completa en vez de extender automáticamente las coordenadas polares.

16. Un impulso aplicado cerca de un punto

Con posición aproximadamente fija durante el contacto,

$$\Delta L_{O,z} \approx (\mathbf{r}_* \times \mathbf{J})_z = 0{,}20(1) - 0{,}10(0{,}50) = 0{,}15\,\mathrm{kg\,m^2/s}.$$

El balance lineal no necesita congelar la posición: $\mathbf{p}_f = \mathbf{J}$ exactamente bajo los datos del enunciado, por lo que $\mathbf{v}_f = (5, 10, 0)\,\mathrm{m/s}$. Para controlar la aproximación angular, restamos su expresión del balance exacto:

$$\|\Delta \mathbf{L}_O - \mathbf{r}_* \times \mathbf{J}\| \le \int \|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_*\|\,\|\mathbf{F}_{\mathrm{neta}}(t)\|\,dt \le 0{,}0024\,\mathrm{kg\,m^2/s}.$$

La misma cota vale para el error de la componente z, aproximadamente un 1,6% del valor estimado. Un contacto breve por sí solo no daba ese porcentaje: lo hicieron las cotas de desplazamiento y de impulso acumulado en magnitud. Integrar el torque usando la trayectoria real evitaría la aproximación.

17. El signo de la potencia

La identidad para eje fijo da $P = \tau_{O,z}\omega = (3)(-2) = -6\,\mathrm{W}$. El torque extrae energía mecánica de la rotación en ese instante. Para un cuerpo rígido con momento de inercia positivo y constante respecto del eje, $\dot{\omega} = \tau_{O,z}/I > 0$. Como $\omega < 0$, ese aumento algebraico de ω reduce su valor absoluto: el cuerpo está frenando.

El signo de la aceleración angular y el cambio de rapidez no se identifican sin mirar el signo de la velocidad angular, igual que ocurría con velocidad y aceleración lineales. Si la fuerza aplicada siguiera actuando y el cuerpo se detuviera, en ese instante la potencia sería cero; tras invertir el sentido podría volverse positiva. El dato instantáneo de este ejercicio no asegura que el torque se mantenga durante todo ese proceso.

18. Trabajo con torque cero

La fuerza es $\mathbf{F} = (-3, -4, 0)\,\mathrm{N}$, paralela y opuesta a $\mathbf{r}$. El torque se anula: $\tau_{O,z} = 0{,}30(-4) - 0{,}40(-3) = 0$. En cambio,

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = (-3)(-0{,}60) + (-4)(-0{,}80) = 5\,\mathrm{W}.$$

La fuerza y la velocidad apuntan ambas hacia el centro y la energía cinética está aumentando a razón de cinco joules por segundo. El momento lineal cambia porque su derivada es $\mathbf{F} \neq 0$. El momento angular respecto de O no cambia; aquí además vale cero, porque posición y velocidad son paralelas.

Podríamos introducir la energía potencial $U = \kappa r^2/2$ para esta fuerza: su derivada en el estado dado es $-5\,\mathrm{W}$, coherente con el aumento de K. El ejemplo separa la conservación de $K + U$ de la constancia de K, y ambas del balance angular.

19. Recoger el hilo

La tensión no produce torque respecto del orificio. Peso y normal se compensan, de modo que $L_{O,z} = mr_1 v_{\theta,1} = 0{,}60\,\mathrm{kg\,m^2/s}$ se mantiene. En el estado final, $v_{\theta,2} = L_{O,z}/(mr_2) = 4\,\mathrm{m/s}$.

Como la velocidad radial es nula en los dos extremos de la comparación, $K_1 = (0{,}50)(2^2)/2 = 1\,\mathrm{J}$ y $K_2 = (0{,}50)(4^2)/2 = 4\,\mathrm{J}$. El trabajo neto sobre la cuenta es $\Delta K = 3\,\mathrm{J}$. Durante la contracción la tensión apunta en el sentido del desplazamiento radial hacia dentro y puede entregar ese trabajo.

La mano que recoge el hilo forma parte del entorno energético de la cuenta. Si se amplía el sistema para incluir a quien tira, deberá contabilizarse su reserva de energía. La conservación angular respecto del orificio sigue siendo compatible con esa transferencia: la tensión realiza trabajo sin ejercer torque respecto de ese punto. No hemos supuesto que la velocidad radial sea cero durante toda la maniobra.

20. Un balance compatible con las medidas

Con orientación positiva, el seno del ángulo está entre $\cos 2^\circ$ y uno. Las cotas uniformes permiten integrar una cota inferior y otra superior del torque, sin conocer su historia detallada:

$$J_{L,\mathrm{mín}} = 0{,}398(1{,}18)(0{,}49)\cos 2^\circ \approx 0{,}2300\,\mathrm{kg\,m^2/s},$$

$$J_{L,\mathrm{máx}} = 0{,}402(1{,}22)(0{,}51) \approx 0{,}2501\,\mathrm{kg\,m^2/s}.$$

El intervalo medido $[0{,}237, 0{,}243]\,\mathrm{kg\,m^2/s}$ queda dentro del intervalo permitido para el impulso aplicado. Los datos son compatibles con el balance angular del modelo que omite otros torques. No prueban que un torque de rozamiento sea exactamente cero: algunas contribuciones pequeñas seguirían siendo compatibles con las cotas.

Estos intervalos se han tratado como límites garantizados, no como desviaciones estándar ni intervalos de confianza. Si el cambio de momento angular se obtiene usando el mismo radio medido, pueden existir dependencias entre los datos; las cotas separadas siguen siendo conservadoras, pero no justifican cálculos probabilísticos de independencia. Una prueba más discriminante podría alargar el seguimiento después de apagar el actuador y medir una posible pérdida de momento angular con la guía aún presente.

21. Una partícula libre vista desde un origen acelerado

La partícula tiene $\mathbf{r} = \mathbf{v} = \mathbf{0}$ en el laboratorio. Por tanto, el momento lineal que entra en $\mathbf{L}_A$ es cero y $\mathbf{L}_A = \mathbf{0}$, cualquiera que sea la posición de A. La velocidad del origen es

$$\dot{\mathbf{a}} = \frac{\ell}{\tau}(1, 2\theta, 0), \qquad \ddot{\mathbf{a}} = \frac{\ell}{\tau^2}(0, 2, 0).$$

Para $\mathbf{H}_A$ empleamos posición $-\mathbf{a}$ y velocidad $-\dot{\mathbf{a}}$. El orden de los productos queda así fijado por la definición:

$$\mathbf{H}_A = (-\mathbf{a}) \times m(-\dot{\mathbf{a}}) = m\mathbf{a} \times \dot{\mathbf{a}} = \frac{m\ell^2}{\tau}\theta^2 \mathbf{e}_z.$$

Su derivada es $\dot{\mathbf{H}}_A = (2m\ell^2/\tau^2)\theta \mathbf{e}_z$. La fuerza neta y su torque respecto de A son cero. En el balance de $\mathbf{L}_A$, también es cero el término $-\dot{\mathbf{a}} \times \mathbf{P}$ porque $\mathbf{P} = \mathbf{0}$. Se obtiene $\dot{\mathbf{L}}_A = \mathbf{0}$, de acuerdo con la suma calculada.

En el balance relativo, el centro de masa es la propia partícula y está en $\mathbf{R} = \mathbf{0}$. Por ello,

$$-m(\mathbf{R}-\mathbf{a})\times\ddot{\mathbf{a}} = m\mathbf{a}\times\ddot{\mathbf{a}} = \frac{2m\ell^2}{\tau^2}\theta\mathbf{e}_z = \dot{\mathbf{H}}_A.$$

En $t=\tau$, tenemos $L_{A,z}=0$, $H_{A,z}=1\,\mathrm{kg\,m^2/s}$ y $\dot{H}_{A,z}=2\,\mathrm{N\,m}$. La partícula sigue en reposo en el laboratorio; el cambio de la cantidad relativa procede de la aceleración del origen elegido. Cada balance conserva la información sobre la referencia y la velocidad que intervienen en su definición.

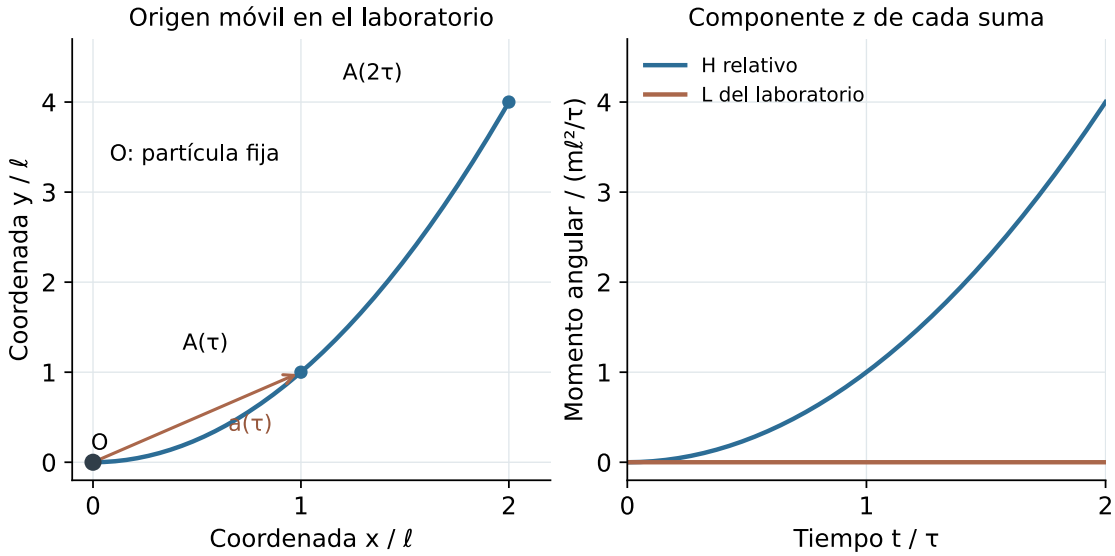


Figura 12.8. La curva izquierda representa la posición del origen móvil en el laboratorio, con ambas coordenadas normalizadas por la longitud de referencia. La flecha une el origen del laboratorio con A en el instante τ. Las curvas de la derecha corresponden a las dos convenciones de velocidad del ejercicio 21. Su diferencia procede de la elección de referencia; la partícula permanece fija y libre.

Lecturas y conexiones

Las secciones 10.5–10.6 de Sears y Zemansky, *Física universitaria*, volumen 1, permiten cotejar la definición del momento angular, su dependencia del origen y su conservación. La sección 11.2 de Serway y Jewett, *Física para ciencias e ingeniería*, volumen 1, hace explícita la hipótesis de fuerzas internas alineadas con la separación al cancelar torques. Conviene conservar esa condición cuando se use el balance de un sistema de partículas.

El capítulo 3 de Spivak, *Physics for Mathematicians. Mechanics I*, desarrolla el producto vectorial, la descomposición respecto del centro de masa y el papel de la forma fuerte de la tercera ley de Newton. Aquí se construye además el término correspondiente a una referencia móvil para precisar las convenciones de posición y velocidad. El capítulo siguiente utilizará estos balances para estudiar cuerpos que giran y ruedan; antes habrá que calcular cómo su distribución de masa determina el momento de inercia.

Capítulo 13

Rotación plana y rodadura

Un disco homogéneo y un aro, de la misma masa y del mismo radio, se sueltan juntos en una rampa. Ambos parten del reposo y disponen de la misma caída vertical. Si llegan abajo con energías mecánicas iguales, ¿por qué no tienen que llegar con la misma rapidez? La respuesta exige averiguar cómo se reparte el movimiento entre el avance del centro de masa y el giro.

Estudiaremos primero un disco de masa $M = 2\,\mathrm{kg}$ y radio $R = 0{,}10\,\mathrm{m}$ que desciende por un plano fijo inclinado 30°. Tomaremos $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ y una caída vertical de $0{,}75\,\mathrm{m}$. El laboratorio es inercial. El eje x apunta cuesta abajo, el eje y sale perpendicularmente del plano y z completa una base de orientación derecha. El sentido angular positivo es el antihorario en el dibujo: un disco que baja hacia $+x$ gira con velocidad angular negativa.

Modelaremos el disco como un cuerpo rígido y axisimétrico, sin deformación apreciable ni resistencia del aire o a la rodadura. El contacto se describe con una normal y rozamiento de Coulomb; la superficie y el disco no intercambian materia. Intentaremos una solución sin deslizamiento, pero después tendremos que comprobar que la fricción estática disponible puede sostenerla. No basta con escribir esa condición como si cualquier superficie pudiera imponerla.

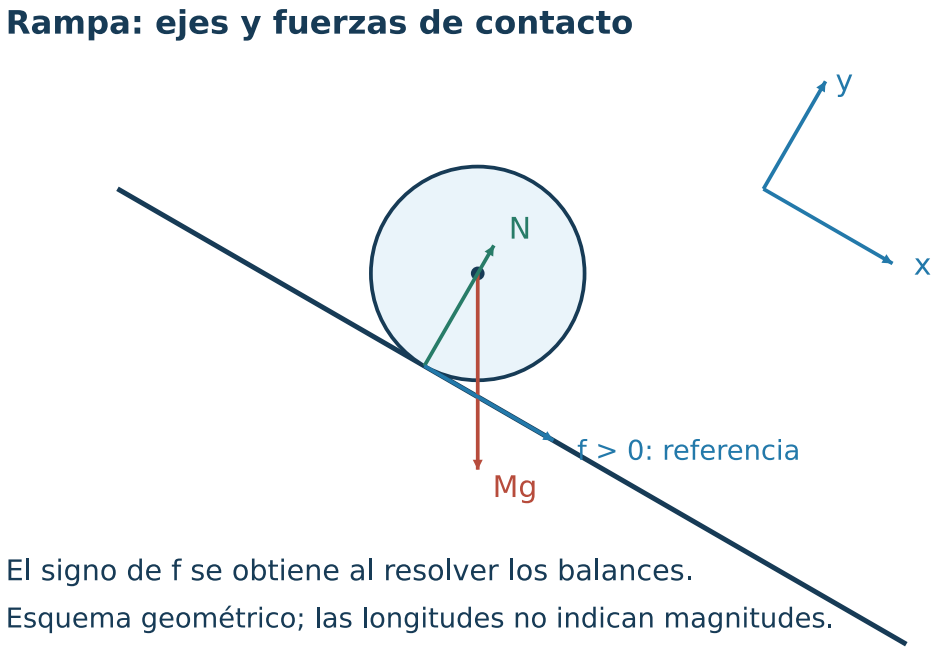


Figura 13.1. El eje tangencial apunta cuesta abajo. La fuerza de rozamiento se tratará como una componente firmada; su sentido saldrá de las ecuaciones. El peso actúa en el centro de masa y la normal en el contacto ideal.

La posición de cada punto de un cuerpo que gira

En el capítulo 12 calculamos el momento angular de varias partículas y lo separamos en una contribución del centro de masa y otra interna. Para un cuerpo que conserva su forma, las velocidades internas están relacionadas. Esa relación permite reunir una suma de muchos términos en una sola constante geométrica.

Definición. Un movimiento plano rígido puede representarse como $\mathbf{r}_i(t) = \mathbf{R}(t) + Q(\theta(t))\boldsymbol{\rho}_i^0$, donde $\mathbf{R}$ es el centro de masa, las posiciones $\boldsymbol{\rho}_i^0$ son constantes en el cuerpo y $Q(\theta)$ es la rotación del plano por el ángulo θ. La velocidad angular es $\omega = \dot\theta$ y la aceleración angular es $\alpha = \dot\omega$, con signo respecto del eje z.

Para un cuerpo con espesor, la rotación deja fija la coordenada paralela al eje y actúa sobre las dos coordenadas perpendiculares. La matriz de rotación de ese plano tiene filas $(\cos\theta, -\sin\theta)$ y $(\sin\theta, \cos\theta)$. Conserva productos escalares y distancias; por eso esta representación mantiene la forma. Si $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{R}$, derivarla da

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{V} + \omega\,\mathbf{e}_z \times \boldsymbol{\rho}_i, \qquad \mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}}.$$

No todos los puntos tienen la misma velocidad. Comparten ω, pero la contribución del giro depende de su distancia al eje. En un cilindro, los puntos situados a lo largo de una misma generatriz tienen la misma distancia al eje y la misma velocidad de giro; para un cuerpo de espesor finito usaremos la distancia perpendicular al eje, no la distancia espacial completa al centro de masa.

Definición. El momento de inercia de una distribución de masa respecto de un eje es $I = \sum_i m_i s_i^2$ para partículas, o $I = \int s^2\,dm$ en un modelo continuo, donde s es la distancia perpendicular al eje. Supondremos masa total finita y segundo momento finito. Se escribe I_C cuando el eje pasa por el centro de masa y es perpendicular al plano de movimiento.

El momento de inercia tiene unidades $\mathrm{kg\,m^2}$. No depende de la velocidad angular; expresa cómo se distribuye la masa respecto de un eje especificado. Un mismo cuerpo tiene distintos momentos de inercia respecto de distintos ejes. Para masas situadas exactamente sobre el eje, la contribución es cero.

Proposición. En un movimiento plano rígido con masa total M, centro de masa de velocidad $\mathbf{V}$ y momento de inercia I_C constante,

$$K = \frac{1}{2} M \|\mathbf{V}\|^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2, \qquad L_{C,z} = I_C \omega.$$

Demostración. Al sustituir $\mathbf{v}_i = \mathbf{V} + \omega \mathbf{e}_z \times \boldsymbol{\rho}_i$ en $\sum_i m_i \|\mathbf{v}_i\|^2/2$, el término cruzado contiene $\sum_i m_i \boldsymbol{\rho}_i = 0$ y desaparece. La suma de los cuadrados de las velocidades de giro es $\omega^2 \sum_i m_i s_i^2$. Para el momento angular interno, la componente z de $\boldsymbol{\rho}_i \times m_i(\omega \mathbf{e}_z \times \boldsymbol{\rho}_i)$ vale $m_i s_i^2 \omega$; sumarla produce la segunda identidad. Las mismas expansiones se integran en el modelo continuo cuando sus integrales son finitas.

La energía depende de ω^2, mientras que el momento angular sobre el eje conserva el signo de ω. Estas fórmulas se refieren al movimiento plano y a la componente sobre z; no establecen que el momento angular vectorial de un cuerpo tridimensional cualquiera sea siempre paralelo a su velocidad angular.

Calcular el momento de inercia desde la distribución

En un aro delgado de radio R, toda la masa se encuentra a distancia R del eje central. Por tanto $I_C = MR^2$. Para un disco homogéneo, una parte de la masa está más cerca del eje y debemos integrar.

Si la densidad superficial es $\sigma = M/(\pi R^2)$, una corona de radio r y espesor dr tiene masa $dm = 2\pi\sigma r\,dr$. Su contribución al momento es $r^2 dm$, de modo que

$$I_C = 2\pi\sigma \int_0^R r^3\, dr = \frac{\pi\sigma R^4}{2} = \frac{1}{2} M R^2.$$

El mismo resultado vale para un cilindro macizo homogéneo respecto de su eje longitudinal: integrar además en la dirección axial suma discos con el mismo radio. Que el cuerpo tenga el mismo contorno exterior que un aro no determina su momento de inercia. La masa distribuida cerca del eje requiere menos energía para alcanzar una misma velocidad angular.

Para una varilla delgada homogénea de longitud ℓ, respecto de un eje perpendicular a ella que pasa por su centro,

$$I_C = \frac{M}{\ell} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} x^2\, dx = \frac{1}{12} M \ell^2.$$

En estas integrales el elemento de masa proviene de la geometría y de la hipótesis de homogeneidad. Sustituir dm por $M\, dr$ sin normalizar la densidad introduciría unidades incorrectas y una masa total que no sería la del cuerpo.

Proposición. Sean dos ejes paralelos, uno por el centro de masa y otro a distancia perpendicular d. Entonces

$$I_A = I_C + M d^2.$$

Demostración. Proyectemos cada posición sobre el plano perpendicular a los ejes. Si $\boldsymbol{s}_i$ se mide desde el eje central y $\mathbf{d}$ une ese eje al otro, la distancia al cuadrado desde el segundo eje es $\|\boldsymbol{s}_i - \mathbf{d}\|^2$. Al expandir y sumar con pesos m_i, el término cruzado se anula porque la proyección de $\sum_i m_i \boldsymbol{\rho}_i$ es cero. Restan $\sum_i m_i \|\boldsymbol{s}_i\|^2$ y $M\|\mathbf{d}\|^2$. El argumento con integrales es idéntico.

El teorema exige que uno de los ejes sea central. No permite sumar Md^2 entre dos ejes arbitrarios usando solamente la distancia entre ellos. Para la varilla, el eje por un extremo está a $\ell/2$ del central y da $I_{\text{extremo}} = M\ell^2/3$. El aumento es consistente con haber alejado del eje una parte importante de la masa.

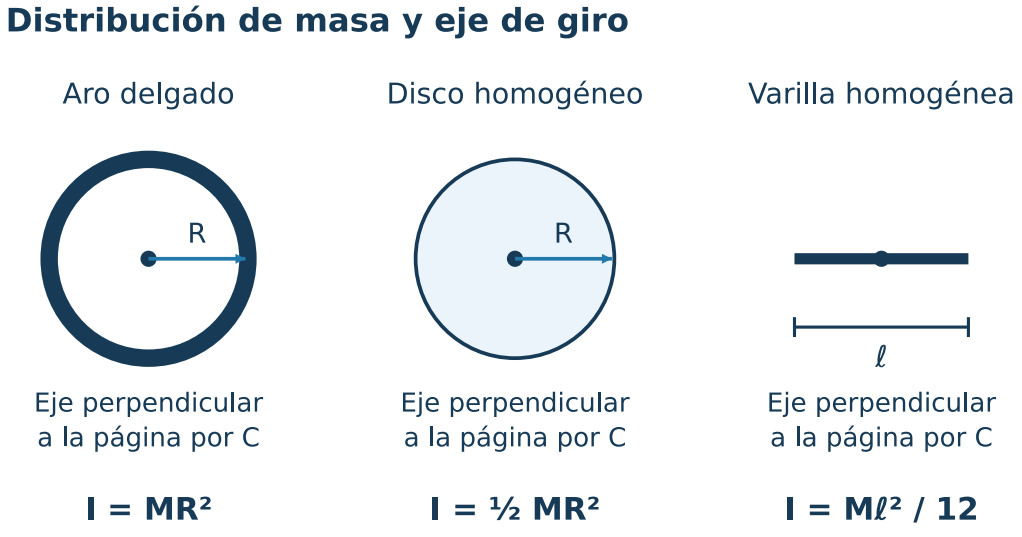


Figura 13.2. Las fórmulas corresponden a distribuciones homogéneas ideales y a los ejes señalados. La distancia usada en el teorema de ejes paralelos es perpendicular a los ejes.

Las dos ecuaciones de movimiento

El balance lineal determina cómo acelera el centro de masa. El balance angular respecto de él determina cómo cambia el giro. Para los modelos newtonianos de partículas con cancelación de torques internos del capítulo anterior,

$$M\mathbf{a}_C = \sum \mathbf{F}_{\text{ext}}, \qquad I_C\alpha = \tau^{\text{ext}}_{C,z}.$$

La segunda ecuación se obtiene derivando $L_{C,z} = I_C\omega$ y usando que I_C es constante. Sigue siendo válida aunque el centro de masa acelere, porque ya demostramos el balance especial respecto de él. Para una rotación alrededor de un eje fijo en el laboratorio puede utilizarse, en cambio, el momento de inercia respecto de ese eje fijo y su torque correspondiente.

Hay que evitar una combinación incompleta: usar I_C y calcular el torque respecto de otro punto. Tampoco un eje instantáneo de velocidad nula es automáticamente un pivote fijo para todo el movimiento. Las relaciones cinemáticas instantáneas no eliminan los términos de transporte que aparecieron en el capítulo 12.

Una polea de masa apreciable ofrece un ejemplo sin rodadura sobre un suelo. Si una cuerda ideal no desliza sobre su borde, su aceleración tangencial es $R\alpha$. Para producir una aceleración angular se requiere un torque neto. Por ello las tensiones de los dos ramales pueden ser diferentes aunque la cuerda sea ligera; la igualdad de tensiones que se usaba con poleas sin inercia era parte de aquella idealización.

Qué significa rodar sin deslizar

En los cuerpos circulares que consideraremos, el centro de masa coincide con el centro geométrico; esta hipótesis excluye ruedas excéntricas. En una rueda que avanza sobre un suelo horizontal fijo, el centro de masa tiene velocidad $V\mathbf{e}_x$. La posición del punto material que toca el suelo en ese instante, respecto del centro, es $-R\mathbf{e}_y$. Su velocidad tangencial respecto del laboratorio es

$$v_{P,x} = V + R\omega.$$

Una rueda que avanza hacia la derecha gira en sentido horario, de modo que $\omega < 0$. La suma anterior puede anularse sin que sus dos términos sean nulos.

Definición. Hay rodadura sin deslizamiento sobre una superficie fija cuando la velocidad relativa tangencial del punto material en contacto es cero. Para una rueda circular de radio constante que avanza por una recta, esta condición es $V + R\omega = 0$. Si se mantiene en un intervalo diferenciable, entonces $a_C + R\alpha = 0$.

Proposición. Para esa rueda, si el centro permanece a distancia R del plano, la rodadura sin deslizamiento implica que la velocidad del punto superior es $2V\mathbf{e}_x$ y la del punto de contacto es cero. Sin embargo, la aceleración del punto material que ocupa el contacto es $R\omega^2\mathbf{e}_y$ en ese instante.

Demostración. La fórmula de velocidades aplicada a $\boldsymbol{\rho} = \pm R\mathbf{e}_y$ da $V\mathbf{e}_x \mp R\omega\mathbf{e}_x$. Sustituir $R\omega = -V$ proporciona ambos valores. Para la aceleración de un punto material del cuerpo derivamos su velocidad siguiendo ese mismo punto:

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_C + \alpha\mathbf{e}_z \times \boldsymbol{\rho}_i + \omega^2\mathbf{e}_z \times (\mathbf{e}_z \times \boldsymbol{\rho}_i).$$

En el contacto instantáneo, los dos primeros términos tangenciales suman $(a_C + R\alpha)\mathbf{e}_x = 0$, mientras que el último vale $R\omega^2\mathbf{e}_y$.

El punto material que toca el suelo cambia a medida que la rueda avanza. No podemos derivar «la velocidad del contacto es cero» como si se tratara siempre de la misma partícula. La aceleración no nula explica cómo el punto que estaba abajo comienza a separarse de la superficie.



Figura 13.3. Con $V > 0$ y $\omega = -V/R$, la velocidad del punto inferior se anula y la del superior se duplica. Las flechas de las contribuciones se suman vectorialmente.

Sobre una cinta que se mueve con velocidad $U\mathbf{e}_x$, la condición es $V + R\omega = U$. La velocidad del punto de contacto en el laboratorio ya no es cero. Esa diferencia afectará también al trabajo de la fricción: estática se refiere a ausencia de deslizamiento relativo, no necesariamente a potencia nula en cualquier marco.

Descender por una rampa sin deslizar

Volvamos al disco y tomemos f como la componente firmada de la fricción según $+x$, cuesta abajo. La normal no tiene componente tangencial y el peso actúa en el centro. Los balances son

$$Ma_C = Mg\sin\varphi + f, \qquad I_C\alpha = Rf, \qquad a_C + R\alpha = 0.$$

El signo del torque Rf se obtiene de $(-R\mathbf{e}_y)\times(f\mathbf{e}_x) = Rf\mathbf{e}_z$. La condición de rodadura hará que la aceleración angular sea negativa cuando $a_C > 0$.

Introduzcamos $\beta = I_C/(MR^2) > 0$, una razón adimensional que caracteriza la distribución de masa respecto del eje central y del radio de contacto.

Proposición. Para un cuerpo circular rígido cuyo centro de masa coincide con el centro geométrico, de masa $M > 0$, radio de contacto $R > 0$ y $I_C = \beta MR^2$ constante, que desciende bajo gravedad por una rampa recta fija de ángulo $0 < \varphi < \pi/2$, la solución de rodadura sin deslizamiento exige

$$a_C = \frac{g\sin\varphi}{1+\beta}, \qquad f = -\frac{\beta}{1+\beta}Mg\sin\varphi, \qquad N = Mg\cos\varphi.$$

Bajo el modelo de fricción estática de Coulomb, esta solución es admisible si

$$\mu_s \geq \frac{\beta}{1+\beta}\tan\varphi.$$

Demostración. De la ecuación angular y de $\alpha = -a_C/R$ resulta $f = -I_C a_C/R^2 = -\beta M a_C$. Sustituir en el balance lineal da $M(1+\beta)a_C = Mg\sin\varphi$ y las expresiones indicadas. El centro no acelera perpendicularmente al plano, por lo que $N = Mg\cos\varphi$. La fricción estática puede tomar el valor requerido sólo si $|f| \le \mu_s N$; dividir por $Mg\cos\varphi > 0$ produce la condición.

La fricción apunta cuesta arriba. No se ha decidido oponiéndola al movimiento del centro: se ha obtenido como la fuerza que permite que el giro y la traslación satisfagan simultáneamente la restricción. Sin rozamiento, el peso aceleraría el centro sin producir torque respecto de él. Una rueda inicialmente sin giro comenzaría a deslizar, no a rodar.

Para el disco, $\beta = 1/2$. Entonces $a_C = 10/3\,\mathrm{m/s^2}$, $f = -10/3\,\mathrm{N}$ y $N = 10\sqrt{3}\,\mathrm{N}$. Se requiere $\mu_s \ge 1/(3\sqrt{3}) \approx 0{,}1925$. Si la superficie no alcanza ese umbral, no pueden conservarse a la vez estas aceleraciones y la condición de rodadura.

La caída de $0{,}75\,\mathrm{m}$ corresponde a $1{,}50\,\mathrm{m}$ de recorrido por la rampa. Desde el reposo, el tiempo es $\sqrt{0{,}90}\,\mathrm{s} \approx 0{,}949\,\mathrm{s}$ y la rapidez final es $\sqrt{10}\,\mathrm{m/s} \approx 3{,}162\,\mathrm{m/s}$. La velocidad angular final es $\omega = -V/R \approx -31{,}62\,\mathrm{s^{-1}}$.

Cómo actúa la fricción sin quitar energía mecánica

En el contacto ideal con un plano fijo, la fricción estática actúa sobre un punto de velocidad instantánea nula. Su potencia total sobre el cuerpo es cero. Aun así, aparece en cada uno de los dos balances de energía cinética:

$$\frac{dK_{\mathrm{tras}}}{dt} = (Mg\sin\varphi + f)V, \qquad \frac{dK_{\mathrm{rot}}}{dt} = (Rf)\omega = -fV.$$

Las dos contribuciones de fricción se cancelan al sumar. Durante el descenso, $fV < 0$ y $-fV > 0$: la fricción reduce la transferencia a traslación y permite aumentar la energía de giro. No extrae energía mecánica del conjunto ideal.

La energía potencial gravitatoria perdida se convierte en

$$Mgh = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_C\frac{V^2}{R^2} = \frac{1}{2}M(1+\beta)V^2.$$

Para una liberación desde el reposo, $V = \sqrt{2gh/(1+\beta)}$. Esta segunda vía confirma la rapidez sin reconstruir el tiempo. No sustituye la comprobación de fricción: una fórmula energética obtenida imponiendo rodadura sólo describe un movimiento físicamente admisible cuando la restricción puede sostenerse.

En el disco inicial se pierden $15\,\mathrm{J}$ de energía potencial. Diez joules quedan en traslación y cinco en giro. Un aro tiene $\beta = 1$ y destina la mitad a cada contribución; con la misma caída llega con rapidez $\sqrt{7{,}5}\,\mathrm{m/s}$, menor que la del disco. Esta comparación supone que ambas superficies pueden suministrar las fricciones necesarias.

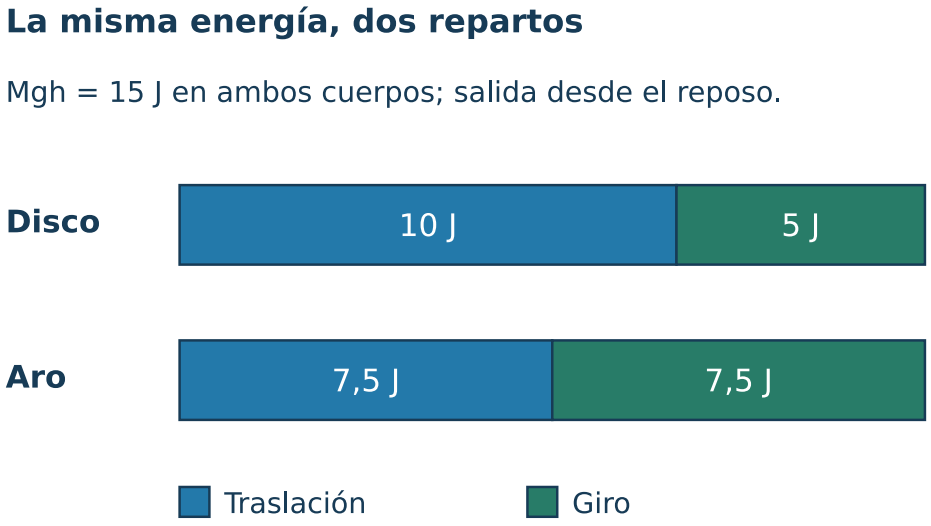


Figura 13.4. Para un disco homogéneo, las fracciones son 2/3 y 1/3; para un aro delgado, 1/2 y 1/2. La masa y la caída son iguales, pero la rapidez final depende de la distribución de masa.

La frase «la fricción estática no realiza trabajo» necesita sus condiciones. Sobre una cinta móvil, el punto de contacto puede tener velocidad no nula en el laboratorio y la potencia puede ser fU. Si hay deformaciones, pérdidas internas o resistencia a la rodadura, el modelo de un único contacto puntual rígido deja de describir toda la transferencia.

Determinar el sentido de la fricción en otro experimento

Una fuerza horizontal $F > 0$ aplicada al centro de un disco sobre un suelo fijo no produce torque respecto de su centro. Si el disco rueda sin deslizar, el torque que inicia el giro tiene que proceder de la fricción. Las ecuaciones son

$$Ma_C = F + f, \qquad I_C\alpha = Rf, \qquad \alpha = -a_C/R.$$

De nuevo $a_C = F/[M(1+\beta)]$ y $f = -\beta F/(1+\beta)$. La fricción apunta hacia la izquierda. En cambio, si un motor aplica un torque horario de magnitud $T > 0$, sin fuerza horizontal aplicada en el centro,

$$Ma_C = f, \qquad I_C\alpha = -T + Rf, \qquad \alpha = -a_C/R,$$

lo que da $a_C = T/[MR(1+\beta)]$ y $f = Ma_C > 0$. La fricción apunta hacia la derecha y acelera el centro. No hay una regla correcta que la obligue siempre a oponerse a la velocidad del centro de masa.

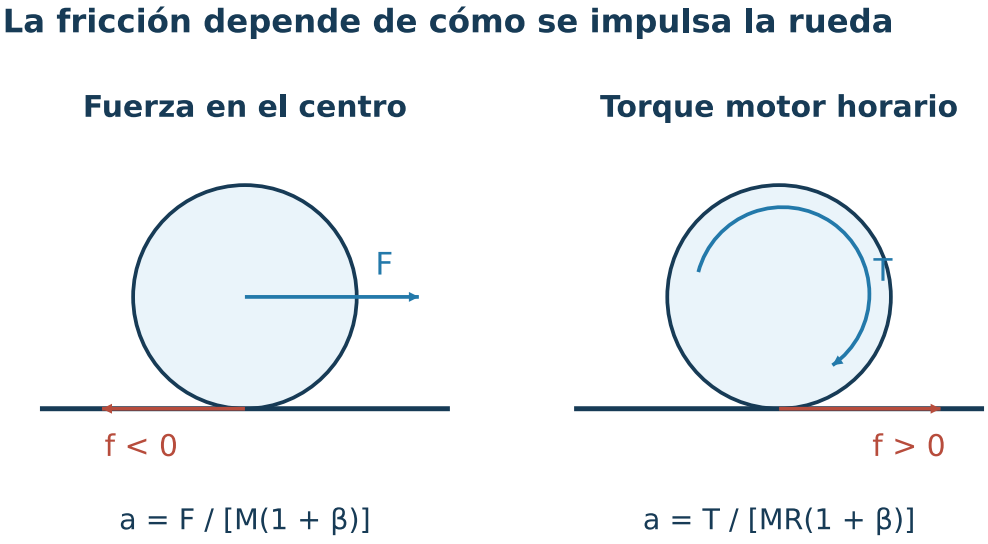


Figura 13.5. Las ecuaciones se refieren a rodadura sin deslizamiento sobre un suelo fijo. La fuerza de contacto se obtiene al resolver los balances y después se compara con el límite de fricción estática.

Cuando la rueda comienza deslizando

Consideremos un disco que llega a una superficie horizontal con $V_0 > 0$ y $\omega_0 = 0$. Inicialmente la velocidad relativa tangencial del contacto es $u = V + R\omega > 0$. El rozamiento cinético actúa hacia la izquierda, de modo que $f = -\mu_k M g$, mientras se mantenga ese signo.

Los balances producen $\dot V = -\mu_k g$ y $\dot\omega = -\mu_k g/(\beta R)$. La rapidez de deslizamiento disminuye según

$$\dot u = -\mu_k g(1 + 1/\beta).$$

En este tramo el trabajo total de fricción es negativo. Su potencia no es sólo fV, porque también cambia el giro: al sumar ambas contribuciones resulta $P_f = f(V + R\omega) = fu = -\mu_k M g|u|$.

Proposición. En un plano horizontal fijo, un cuerpo circular de parámetro $\beta > 0$ con datos $V_0 > 0$, $\omega_0 = 0$ y fricción cinética constante $\mu_k > 0$ alcanza por primera vez la condición de rodadura en

$$t_* = \frac{\beta V_0}{\mu_k g(1 + \beta)}.$$

En ese instante,

$$V_* = \frac{V_0}{1 + \beta}, \qquad \omega_* = -\frac{V_0}{R(1 + \beta)}, \qquad K_0 - K_* = \frac{1}{2} M V_0^2 \frac{\beta}{1 + \beta}.$$

Demostración. Integrar las aceleraciones constantes da $u(t) = V_0 - \mu_k g(1 + 1/\beta)t$. Su primera raíz positiva es t_* y, antes de ella, $u > 0$, por lo que el sentido supuesto del rozamiento es coherente. Sustituir t_* en $V(t) = V_0 - \mu_k g t$ y en $\omega(t) = -\mu_k g t/(\beta R)$ produce las velocidades. La energía final es $M V_*^2 (1 + \beta)/2$; restarla de $K_0 = M V_0^2/2$ da la pérdida indicada.

Después de t_* no se prolonga automáticamente la fuerza cinética con el mismo signo. Sin otras fuerzas horizontales ni torques aplicados, una rodadura uniforme requiere $f = 0$, valor admisible dentro de cualquier cono estático con $\mu_s \geq 0$. El cuerpo puede continuar rodando uniformemente en el modelo ideal. No queda detenido porque una parte del movimiento inicial se haya disipado.

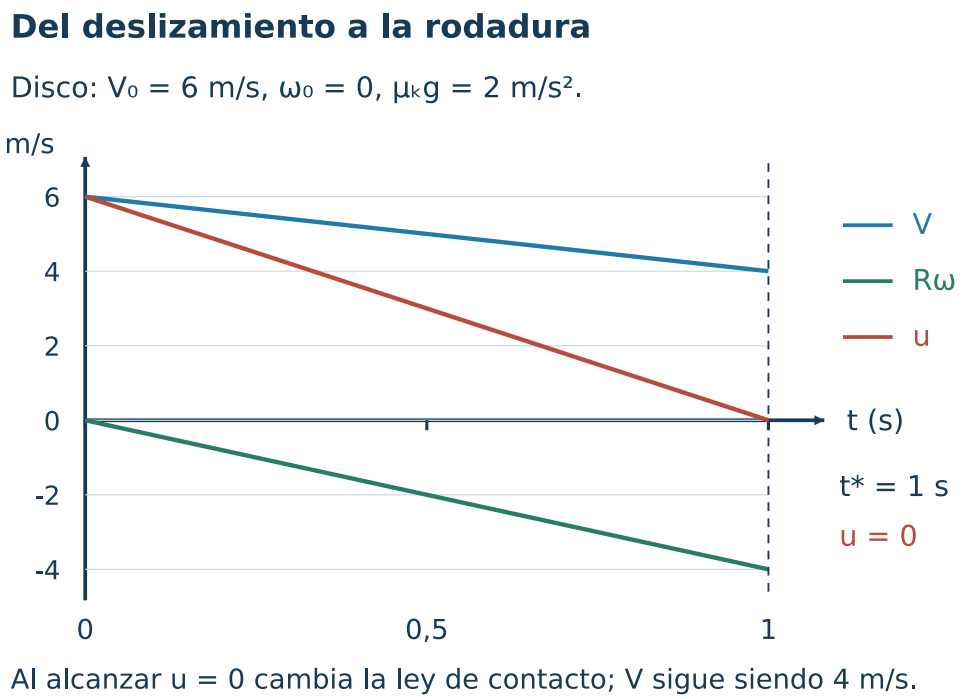


Figura 13.6. La transición se localiza mediante $u = V + R\omega = 0$, no mediante $V = 0$. El cambio de ley de contacto impide extender el tramo de fricción cinética más allá de su dominio.

Una polea con inercia

Dos masas colgantes m_1 y $m_2 > m_1$ comparten una cuerda inextensible que no desliza sobre una polea de radio R, momento de inercia I y eje fijo sin rozamiento. El eje sostiene la polea y no realiza trabajo. Tomamos positiva la aceleración a de m_2 hacia abajo y de m_1 hacia arriba. Las ecuaciones de las masas y la magnitud del balance angular son

$$m_2 g - T_2 = m_2 a, \qquad T_1 - m_1 g = m_1 a, \qquad (T_2 - T_1)R = I\frac{a}{R}.$$

Sumarlas después de eliminar las tensiones da

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + I/R^2}.$$

La razón I/R^2 tiene unidades de masa y aumenta la inercia efectiva del movimiento. No representa materia adicional en la cuerda: proviene de la energía y del torque necesarios para acelerar la polea. Si $I \to 0$, recuperamos el resultado de la polea ideal sin inercia, y $T_1 = T_2$. Para $I > 0$ y $a > 0$, $T_2 - T_1 = Ia/R^2 > 0$.

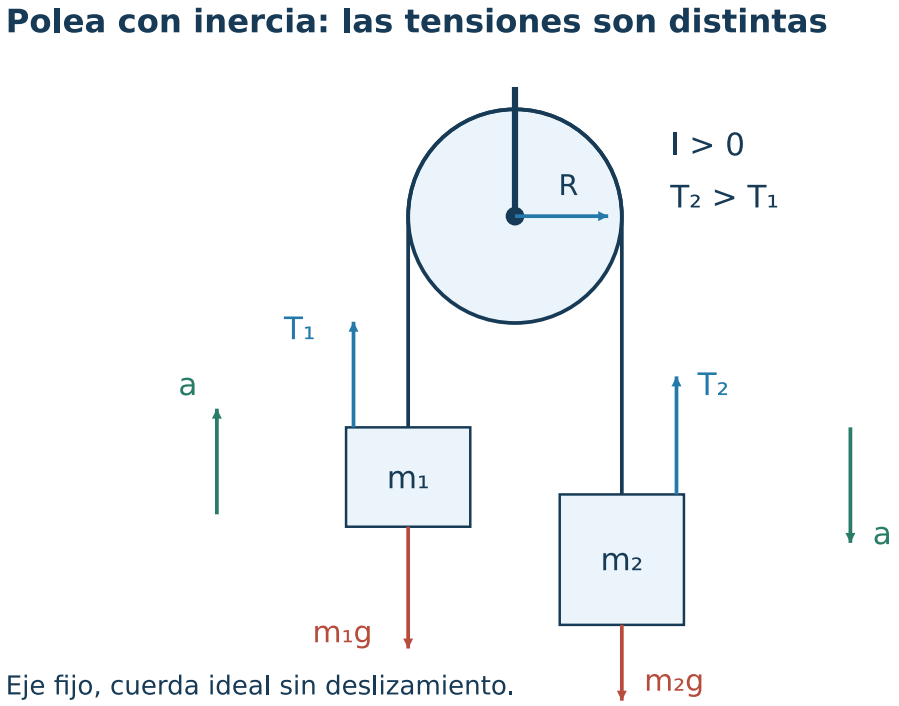


Figura 13.7. Las aceleraciones de las masas tienen igual magnitud por inextensibilidad, y $|\alpha| = a/R$ por ausencia de deslizamiento entre cuerda y polea. La cuerda ligera puede transmitir tensiones distintas a través del contacto distribuido con la polea.

La reconstrucción de cada movimiento ha combinado una ley dinámica, una representación del cuerpo y una ley de contacto. Si una predicción falla, debemos revisar ese conjunto de hipótesis: rigidez, distribución de masa, fuerza disponible y ausencia de deslizamiento tienen funciones distintas y pueden contrastarse con observaciones diferentes.

Ejercicios

Se usará $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ en todos los cálculos numéricos. Los ejes de giro son perpendiculares al plano de movimiento. En un avance hacia $+x$ sobre un plano fijo, la rodadura tiene $\omega = -V/R$. Antes de usar esa restricción se indicará o se comprobará que no hay deslizamiento.

1. Cuatro masas y un eje

Cuatro partículas de 0,50 kg están fijadas a distancias 0,20 m de un eje mediante soportes de masa despreciable. Calcule el momento de inercia, la energía de giro y el momento angular sobre el eje para $\omega = 5\,\mathrm{s^{-1}}$. Compare el momento de inercia con el que tendrían si todas las distancias fueran la mitad.

2. Mismo contorno, distinta distribución

Un disco homogéneo y un aro delgado tienen masa 3 kg y radio 0,20 m. Calcule sus momentos de inercia centrales y sus energías para una velocidad angular de magnitud $10\,\mathrm{s^{-1}}$. Explique qué supuesto incorrecto haría iguales ambos resultados.

3. Un eje que pasa por el extremo

Una varilla homogénea tiene masa 2 kg y longitud 1,20 m. Determine los momentos de inercia respecto de ejes perpendiculares a ella que pasan por su centro, por un extremo y por un punto a 0,30 m del centro. Examine si la diferencia entre los dos últimos puede obtenerse como M por el cuadrado de la distancia entre ellos.

4. Una esfera a partir de discos

Una esfera maciza homogénea de radio R tiene densidad volumétrica constante ρ. Una sección perpendicular a z a altura z es un disco de radio $\sqrt{R^2 - z^2}$. Deduzca el momento de inercia respecto de un diámetro usando secciones delgadas. Compare su parámetro β con los del disco y del aro.

5. Tres puntos de una rueda

Una rueda de radio 0,20 m rueda sin deslizar hacia la derecha con $V = 0{,}60\,\mathrm{m/s}$. Determine la velocidad angular y las velocidades de sus puntos superior, inferior y derecho en el instante considerado. Compare sus rapideces.

6. La energía de un disco que avanza

Un disco homogéneo de 2 kg y radio 0,10 m rueda sin deslizar con $V = 3\,\mathrm{m/s}$. Calcule por separado sus energías de traslación y de giro y su momento angular respecto del centro. ¿Qué error se cometería al tratarlo como una partícula de igual masa y velocidad?

7. Comprobar la rampa inicial

Resuelva el descenso del disco del comienzo y determine si la solución sin deslizamiento es admisible para $\mu_s = 0{,}20$ y para $\mu_s = 0{,}19$. Calcule la rapidez al final de la caída de 0,75 m y el tiempo para alcanzarla en el caso admisible.

8. Velocidad nula no significa aceleración nula

Una rueda de radio 0,25 m rueda sin deslizar por un suelo horizontal. En cierto instante $V = 2\,\mathrm{m/s}$ y $a_C = 1{,}5\,\mathrm{m/s^2}$. Calcule la aceleración del punto material que ocupa el contacto y explique por qué no puede deducirse su aceleración derivando simplemente la frase «el contacto tiene velocidad cero».

9. Empujar desde el centro

Un disco homogéneo de 2 kg recibe una fuerza horizontal de 6 N aplicada en su centro. El suelo fijo tiene $\mu_s = 0{,}15$. Calcule la aceleración y la fricción requeridas para rodar sin deslizar y compruebe su admisibilidad.

10. Accionar un motor

Un disco de 2 kg, radio 0,10 m y $\beta = 1/2$ recibe un torque motor horario de magnitud 0,60 N m. No recibe otra fuerza horizontal externa aparte de la fricción. Calcule la aceleración y la fricción si rueda sin deslizar sobre un suelo fijo. ¿Basta $\mu_s = 0{,}20$? Determine la potencia del motor cuando $V = 0{,}50\,\mathrm{m/s}$.

11. Una superficie que no sostiene la rodadura

El disco del problema inicial se libera sobre la rampa de 30° con $\mu_s = 0{,}10$ y $\mu_k = 0{,}08$. Muestre que la solución de rodadura es imposible y construya el tramo inicial con deslizamiento: aceleración del centro, aceleración angular y signo de la velocidad relativa que comienza a desarrollarse.

12. Entrar deslizando sin giro

Un disco de 1 kg y radio 0,20 m entra en un suelo horizontal con $V_0 = 6\,\mathrm{m/s}$ y $\omega_0 = 0$. Tome $\mu_k = 0{,}20$. Encuentre el tiempo hasta rodar sin deslizar, las velocidades en ese instante, el recorrido del centro y la energía disipada.

13. Entrar girando sin traslación

En el mismo suelo se coloca el mismo disco, ahora con $V_0 = 0$ y $\omega_0 = -30\,\mathrm{s}^{-1}$. Determine el sentido inicial de la fricción, el tiempo hasta la rodadura y los valores finales de V, ω y energía cinética.

14. Contacto estático con una cinta móvil

Una cinta horizontal se mueve a $U = 1\,\mathrm{m/s}$. Un dispositivo externo mantiene el centro de una rueda de radio 0,20 m a velocidad $V = 0{,}40\,\mathrm{m/s}$ y regula su giro para que no deslice respecto de la cinta. En el estado considerado, la fricción sobre la rueda es $f = +2\,\mathrm{N}$. Calcule ω y la potencia de esa fricción, separando traslación y giro. El dispositivo puede ejercer las fuerzas y los torques adicionales necesarios.

15. Una máquina con polea pesada

Dos masas $m_1 = 1\,\mathrm{kg}$ y $m_2 = 3\,\mathrm{kg}$ están unidas por una cuerda ideal que no desliza sobre una polea de radio 0,20 m y momento de inercia $0{,}040\,\mathrm{kg\,m^2}$. Calcule la aceleración, ambas tensiones y la rapidez tras un descenso de 0,50 m de la masa mayor, desde el reposo. Compruebe el balance energético.

16. Medir la inercia de la polea

En el aparato anterior se conocen exactamente masas, radio y g, pero se desconoce I. Se mide $a = (4{,}0 \pm 0{,}1)\,\mathrm{m/s^2}$. Deduzca una estimación y un intervalo de I usando esas cotas. Examine qué significaría medir $a = 6\,\mathrm{m/s^2}$ con los restantes supuestos intactos.

17. El trabajo de la fricción en dos balances

Para el disco del problema inicial, calcule la contribución de fricción al cambio de energía cinética de traslación y al de giro durante los 1,50 m de descenso. Compare su suma con la potencia de la fuerza de contacto aplicada al punto material que toca la rampa.

18. Usar el contacto sin convertirlo en pivote fijo

En una rodadura rectilínea ideal sobre la rampa, sea $A(t)$ el punto geométrico del plano situado bajo el centro, de modo que $\overrightarrow{AC} = R\mathbf{e}_y$. Justifique el balance angular respecto de $A(t)$ usando el término de transporte del capítulo 12 y momentos lineales del laboratorio. Recupere la aceleración de descenso. Distinga este punto geométrico móvil de un pivote fijo y del punto material de la rueda que toca la superficie.

19. Inferir la distribución desde una rapidez

Un cuerpo circular se libera del reposo y desciende una altura de 0,60 m rodando sin deslizar, sin otras pérdidas. Abajo se mide $V^2 = 8\,\mathrm{m^2/s^2}$. Determine β. ¿Sería compatible medir $V = 4\,\mathrm{m/s}$ bajo los mismos supuestos? Si el ángulo de la rampa es 20°, calcule el coeficiente estático mínimo para la primera medida.

20. Un cuerpo compuesto y una condición marginal

Un disco homogéneo de 1 kg y un aro delgado de 1 kg, ambos de radio 0,20 m, se fijan coaxialmente y giran como un solo cuerpo rígido. Descienden una rampa de 30° desde el reposo. Calcule β, la aceleración de rodadura y la fricción necesaria. Para una caída de 0,70 m, halle rapidez y reparto de energía. Examine si las cotas garantizadas $0{,}23 \le \mu_s \le 0{,}27$, resumidas como $\mu_s = 0{,}25 \pm 0{,}02$, garantizan el régimen supuesto. Obtenga también el mayor ángulo de una rampa recta para el que ese intervalo garantiza la rodadura desde el reposo, conservando las demás hipótesis.

Soluciones

1. Cuatro masas y un eje

Cada partícula aporta $mR^2 = (0{,}50)(0{,}20)^2 = 0{,}020\,\mathrm{kg\,m^2}$. La suma es $I = 0{,}080\,\mathrm{kg\,m^2}$. Para la velocidad angular dada, $K_{\mathrm{rot}} = I\omega^2/2 = 1\,\mathrm{J}$ y $L_z = I\omega = 0{,}40\,\mathrm{kg\,m^2/s}$.

Al reducir todas las distancias a la mitad, cada cuadrado se reduce a la cuarta parte y el nuevo momento es $0{,}020\,\mathrm{kg\,m^2}$. No se ha reducido la masa total, que sigue siendo dos kilogramos. La modificación cambia la distribución respecto del eje. Si se quisiera comparar velocidades antes y después de una contracción real, habría que indicar qué torque externo y qué trabajo intervienen; la comparación geométrica de momentos de inercia no proporciona por sí sola una ley de evolución.

2. Mismo contorno, distinta distribución

El disco tiene $I_C = MR^2/2 = 0{,}060\,\mathrm{kg\,m^2}$ y el aro $I_C = MR^2 = 0{,}120\,\mathrm{kg\,m^2}$. Para la misma magnitud de velocidad angular, sus energías son tres y seis joules, respectivamente.

Asignar a toda la masa del disco la distancia exterior R lo convertiría, a efectos del cálculo, en un aro. Las coronas interiores del disco se mueven con menores velocidades lineales de giro y contribuyen menos a la suma de energías. La igualdad de masa, radio exterior y velocidad angular no basta para igualar la energía de rotación. Si se compararan cuerpos con el mismo momento angular en lugar de la misma velocidad angular, se usaría $K_{\mathrm{rot}} = L_z^2/(2I_C)$ y la comparación tendría otro resultado.

3. Un eje que pasa por el extremo

El eje central da $I_C = M\ell^2/12 = 0{,}240\,\mathrm{kg\,m^2}$. Para el extremo, $d = 0{,}60\,\mathrm{m}$, así que $I_{\mathrm{extremo}} = 0{,}240 + 2(0{,}60)^2 = 0{,}960\,\mathrm{kg\,m^2}$. Para el punto a 0,30 m del centro, el resultado es $0{,}240 + 2(0{,}30)^2 = 0{,}420\,\mathrm{kg\,m^2}$.

Si ambos puntos están en la misma mitad de la varilla, la distancia entre sus ejes es 0,30 m. Multiplicar su cuadrado por M daría $0{,}180\,\mathrm{kg\,m^2}$, mientras que la diferencia real es $0{,}540\,\mathrm{kg\,m^2}$. Si están en mitades distintas, tampoco se cumple esa regla. El teorema se aplica desde el eje central a cada uno, no mediante una suma arbitraria entre dos ejes no centrales.

4. Una esfera a partir de discos

La sección a altura z tiene masa $dm = \rho\pi(R^2 - z^2)\,dz$. Como es un disco homogéneo delgado, su contribución al momento sobre z es la mitad de su masa por el cuadrado de su radio. Por tanto,

$$I_C = \frac{\rho\pi}{2}\int_{-R}^{R}(R^2 - z^2)^2\,dz = \frac{\rho\pi}{2}\,\frac{16R^5}{15} = \frac{8\pi\rho R^5}{15}.$$

La masa total es $M = 4\pi\rho R^3/3$, y al sustituir resulta $I_C = 2MR^2/5$. Así, $\beta_{\mathrm{esfera}} = 2/5 < \beta_{\mathrm{disco}} = 1/2 < \beta_{\mathrm{aro}} = 1$. En una misma rampa, si los tres pueden rodar sin deslizar y se

omiten pérdidas, la esfera tiene mayor aceleración y el aro menor. La conclusión utiliza las distribuciones homogéneas y los radios de contacto correspondientes.

5. Tres puntos de una rueda

La restricción da $\omega = -V/R = -3\,\mathrm{s}^{-1}$. El punto superior tiene velocidad $(1{,}20, 0)\,\mathrm{m/s}$ y el inferior velocidad cero. Para el punto derecho, $\boldsymbol{\rho} = R\mathbf{e}_x$ y la velocidad de giro es $\omega R\mathbf{e}_y = -0{,}60\mathbf{e}_y\,\mathrm{m/s}$. Su velocidad total es $(0{,}60, -0{,}60)\,\mathrm{m/s}$ y su rapidez es $0{,}60\sqrt{2}\,\mathrm{m/s}$.

Las rapideces no se suman como números en el punto derecho, porque las dos contribuciones son perpendiculares. En el punto superior sí coinciden sus direcciones y en el inferior se oponen. El ejemplo muestra por qué asignar la rapidez del centro a todos los puntos del cuerpo perdería tanto el contacto instantáneamente inmóvil como la rapidez duplicada en la parte superior.

6. La energía de un disco que avanza

El momento de inercia central es $I_C = 0{,}010\,\mathrm{kg\,m}^2$ y la velocidad angular es $-30\,\mathrm{s}^{-1}$. La energía de traslación es $MV^2/2 = 9\,\mathrm{J}$; la de giro es $I_C\omega^2/2 = 4{,}5\,\mathrm{J}$. En total, $K = 13{,}5\,\mathrm{J}$, y el momento angular central es $L_{C,z} = -0{,}30\,\mathrm{kg\,m}^2/\mathrm{s}$.

Tratarlo como partícula conservaría los nueve joules asociados al movimiento del centro, pero omitiría cuatro joules y medio de movimiento interno. La energía de giro es positiva aunque ω sea negativa. El signo reaparece en el momento angular y permite distinguir los dos sentidos de rotación sin introducir energías cinéticas negativas.

7. Comprobar la rampa inicial

Con $\beta = 1/2$ y $\sin 30^\circ = 1/2$, la aceleración es $a_C = 10/3\,\mathrm{m/s}^2$. El rozamiento requerido vale $-10/3\,\mathrm{N}$ y la normal $10\sqrt{3}\,\mathrm{N}$. Su razón es $1/(3\sqrt{3}) \approx 0{,}19245$.

Para $\mu_s = 0{,}20$ el valor requerido está dentro del intervalo estático; para 0,19 lo supera. La segunda superficie no permite mantener la solución supuesta. En la primera, el balance de energía da $V^2 = 2gh/(1+\beta) = 10\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$. El recorrido por la rampa es $h/\sin 30^\circ = 1{,}50\,\mathrm{m}$ y, desde el reposo, $t = \sqrt{2s/a_C} = \sqrt{0{,}90}\,\mathrm{s}$.

La comprobación de contacto debe preceder a la interpretación física de esos números: las fórmulas energéticas que imponen rodadura no reparan una fricción insuficiente.

8. Velocidad nula no significa aceleración nula

La velocidad angular es $\omega = -8\,\mathrm{s}^{-1}$ y la aceleración angular $\alpha = -a_C/R = -6\,\mathrm{s}^{-2}$. Para el punto que está abajo, la componente tangencial de aceleración es $a_C + R\alpha = 1{,}5 - 1{,}5 = 0$. La componente normal es $R\omega^2 = 16\,\mathrm{m/s}^2$ y apunta hacia arriba.

En el instante considerado el punto tiene velocidad cero, pero empieza a despegarse del suelo con aceleración normal no nula. Una fracción de segundo después otro punto material ocupará el contacto. La frase «el contacto tiene velocidad cero» compara distintos puntos materiales en distintos instantes; derivarla como si describiera la trayectoria de una sola partícula confundiría esa selección geométrica con una historia material.

9. Empujar desde el centro

Para un disco, $a_C = F/[M(1+\beta)] = 6/[2(1{,}5)] = 2\,\mathrm{m/s}^2$. La fricción vale $f = -\beta M a_C = -2\,\mathrm{N}$. La fuerza aplicada en el centro no proporciona torque central; el contacto hacia la izquierda produce el torque horario necesario.

La normal es $Mg = 20\,\mathrm{N}$ y el límite estático disponible $0{,}15(20) = 3\,\mathrm{N}$. Como dos es menor que tres, el contacto puede sostener la rodadura. Usar de entrada $|f| = \mu_s N$ daría tres newtons y unas aceleraciones incompatibles con la restricción. La igualdad sólo corresponde al umbral de deslizamiento inminente, no a cualquier contacto estático.

10. Accionar un motor

La aceleración es $a_C = T/[MR(1+\beta)] = 0{,}60/[2(0{,}10)(1{,}5)] = 2\,\mathrm{m/s^2}$. La fricción es $f = Ma_C = +4\,\mathrm{N}$ y la aceleración angular $-20\,\mathrm{s^{-2}}$. El contacto empuja al centro hacia la derecha, aunque el motor aporta un torque horario.

El límite $\mu_s Mg = 0{,}20(20) = 4\,\mathrm{N}$ coincide con lo requerido: la solución está en el umbral ideal. Cuando $V = 0{,}50\,\mathrm{m/s}$, $\omega = -5\,\mathrm{s^{-1}}$ y la potencia del motor es $(-T)\omega = 3\,\mathrm{W}$. La contribución a traslación es $fV = 2\,\mathrm{W}$. El torque central neto es $-0{,}60+0{,}10(4) = -0{,}20\,\mathrm{N\,m}$ y su potencia es un watt. La suma confirma los tres watts del motor; la potencia total de la fricción es cero.

11. Una superficie que no sostiene la rodadura

El umbral estático requerido es aproximadamente 0,19245, mayor que 0,10. Si la superficie no puede suministrarlo, el cálculo de rodadura deja de ser admisible. Para el disco de masa dos kilogramos y radio 0,10 m, $N = 10\sqrt{3}\,\mathrm{N}$ y el rozamiento cinético cuesta arriba es $f = -0{,}08N \approx -1{,}386\,\mathrm{N}$.

El balance lineal da $a_C = g(\sin 30^\circ - \mu_k \cos 30^\circ) \approx 4{,}307\,\mathrm{m/s^2}$. El angular da $\alpha = Rf/I_C \approx -13{,}856\,\mathrm{s^{-2}}$. Por tanto,

$$\dot{u} = a_C + R\alpha = g(\sin 30^\circ - 3\mu_k \cos 30^\circ) \approx 2{,}922\,\mathrm{m/s^2} > 0.$$

La velocidad relativa comienza a crecer cuesta abajo, de modo que la fricción cuesta arriba supuesta es coherente para el tramo que sigue a la liberación. No se ha utilizado $\alpha = -a_C/R$, porque precisamente ha fallado la restricción que la justificaba.

12. Entrar deslizando sin giro

Para el disco $\beta = 1/2$ y $\mu_k g = 2\,\mathrm{m/s^2}$. La rapidez de deslizamiento cae como $u = 6 - 6t/\mathrm{s}$ en metros por segundo. Se anula por primera vez en $t_* = 1\,\mathrm{s}$.

La velocidad del centro queda en $V_* = 6 - 2 = 4\,\mathrm{m/s}$ y $\omega_* = -20\,\mathrm{s^{-1}}$. El centro recorrió $V_0 t_* - \mu_k g t_*^2/2 = 5\,\mathrm{m}$. La energía inicial era 18 J; la final es $M(1+\beta)V_*^2/2 = 12\,\mathrm{J}$, por lo que se disiparon seis.

La distancia de deslizamiento relativo es el área bajo la recta $u(t)$: tres metros. Multiplicarla por $\mu_k Mg = 2\,\mathrm{N}$ reproduce los seis joules disipados. Multiplicar esa fuerza sólo por los cinco metros del centro daría diez joules y omitiría que, al mismo tiempo, el rozamiento aumentó la energía de giro.

13. Entrar girando sin traslación

Inicialmente $u_0 = R\omega_0 = -6\,\mathrm{m/s}$. El punto inferior desliza hacia la izquierda, de modo que la fricción apunta hacia la derecha: $f = +2\,\mathrm{N}$. Así, $\dot{V} = +2\,\mathrm{m/s^2}$ y $\dot{\omega} = Rf/I_C = +20\,\mathrm{s^{-2}}$, porque $I_C = 0{,}020\,\mathrm{kg\,m^2}$.

La velocidad relativa es $u = -6 + 6t/\mathrm{s}$ en metros por segundo y vuelve a anularse en un segundo. Entonces $V_* = 2\,\mathrm{m/s}$ y $\omega_* = -10\,\mathrm{s^{-1}}$. La fricción ha frenado el giro y acelerado el centro. Podemos comprobar el resultado eliminando la fuerza de contacto entre los dos balances: $M\dot{V} = f$ e $I_C\dot{\omega} = Rf$ dan $\dot{V} - \beta R\dot{\omega} = 0$. Se conserva, por tanto, $V - \beta R\omega$, cuyo valor inicial es 3 m/s. Al comenzar la rodadura, $\omega_* = -V_*/R$ convierte esa igualdad en $(1+\beta)V_* = 3\,\mathrm{m/s}$ y recupera $V_* = 2\,\mathrm{m/s}$. Este control usa el impulso de contacto y permite verificar la transición por una vía distinta de la integración temporal.

La energía inicial es $I_C\omega_0^2/2 = 9\,\mathrm{J}$; la final es $M(1+\beta)V_*^2/2 = 3\,\mathrm{J}$. Se han disipado seis joules. La transferencia de parte del giro a traslación no impide una pérdida total: la potencia de contacto es negativa mientras existe deslizamiento relativo.

14. Contacto estático con una cinta móvil

La ausencia de deslizamiento exige $V + R\omega = U$, de donde $\omega = (1 - 0{,}40)/0{,}20 = +3\,\mathrm{s^{-1}}$. El giro es antihorario, aun cuando el centro avanza a la derecha; la cinta corre más deprisa que él.

La potencia de fricción asociada a traslación es $fV = 0{,}80\,\mathrm{W}$. Su torque central es $Rf = 0{,}40\,\mathrm{N\,m}$ y su potencia de giro es $Rf\omega = 1{,}20\,\mathrm{W}$. En total entrega $2\,\mathrm{W}$, igual a fU.

No hay deslizamiento relativo ni disipación cinética en el contacto ideal, pero sí transferencia de energía entre la cinta y la rueda en el laboratorio. El dispositivo que mantiene constantes las velocidades debe compensar esa potencia. Sin sus fuerzas y torques, estos datos de velocidad y fricción no describirían por sí solos una rodadura estacionaria.

15. Una máquina con polea pesada

La masa efectiva adicional es $I/R^2 = 0{,}040/(0{,}20)^2 = 1\,\mathrm{kg}$. Por tanto $a = (3-1)10/(1+3+1) = 4\,\mathrm{m/s^2}$. Las tensiones son $T_1 = m_1(g+a) = 14\,\mathrm{N}$ y $T_2 = m_2(g-a) = 18\,\mathrm{N}$.

La diferencia produce el torque $(T_2 - T_1)R = 0{,}80\,\mathrm{N\,m}$, coherente con $I\alpha$ para $\alpha = a/R = 20\,\mathrm{s^{-2}}$. Tras medio metro de descenso desde el reposo, $v = \sqrt{2a(0{,}50\,\mathrm{m})} = 2\,\mathrm{m/s}$ y la polea tiene velocidad angular de magnitud diez por segundo.

Las masas suman ocho joules de energía cinética y la polea dos. La pérdida potencial neta es $(m_2 - m_1)gh = 10\,\mathrm{J}$, igual a esos diez joules. Omitir la energía de la polea daría una rapidez excesiva.

16. Medir la inercia de la polea

Despejar la fórmula dinámica da

$$I = R^2\left[\frac{(m_2 - m_1)g}{a} - (m_1 + m_2)\right].$$

Con el valor central resulta $I = 0{,}040\,\mathrm{kg\,m^2}$. La función disminuye al aumentar $a > 0$; por eso la cota inferior se obtiene con $a = 4{,}1$ y la superior con $a = 3{,}9\,\mathrm{m/s^2}$. Al sustituir los extremos, las cotas exactas son $[36/1025, 44/975]\,\mathrm{kg\,m^2}$. Redondeando hacia fuera a cinco decimales obtenemos la envolvente $[0{,}03512, 0{,}04513]\,\mathrm{kg\,m^2}$.

Si se midiera $a = 6\,\mathrm{m/s^2}$, el cálculo daría un momento de inercia negativo. El modelo con $I \geq 0$ tiene como aceleración máxima la de la polea sin inercia, $(m_2 - m_1)g/(m_1 + m_2) = 5\,\mathrm{m/s^2}$. La medida sería incompatible con el conjunto de supuestos. Habría que revisar datos, fuerzas adicionales y restricciones; no interpretar una inercia negativa como propiedad del aparato.

17. El trabajo de la fricción en dos balances

La contribución de fricción a la ecuación de energía de traslación se integra como $\int f\,dx_C = f\,s = (-10/3)(1{,}50) = -5\,\mathrm{J}$. En la ecuación de giro, $\int Rf\omega\,dt = -\int fV\,dt = +5\,\mathrm{J}$.

La suma es cero, de acuerdo con la velocidad nula del contacto sobre la rampa fija. Los quince joules gravitatorios quedan repartidos en diez de traslación y cinco de giro. El término $f\,s$ no es por sí solo el trabajo total de la fuerza de contacto sobre el cuerpo rígido: aparece en el balance del movimiento del centro. Completarlo con la contribución angular impide atribuir al rozamiento estático una disipación que este modelo no contiene.

18. Usar el contacto sin convertirlo en pivote fijo

El punto geométrico $A(t)$ se desplaza por la rampa con velocidad $V\mathbf{e}_x$. El momento lineal total es $MV\mathbf{e}_x$, paralelo a esa velocidad. El término de transporte del capítulo 12 se anula: $-\dot{\mathbf{a}} \times \mathbf{P} = 0$. Por tanto, para este movimiento particular, $\dot{L}_{A,z} = \tau_{A,z}$ aunque A no esté fijo.

La descomposición respecto del centro da $L_{A,z} = I_C\omega - RMV$. Usando $V = -R\omega$ resulta $L_{A,z} = (I_C + MR^2)\omega$. El contacto tiene torque cero respecto de A y el peso produce $-RMg\sin\varphi$. Así,

$$(I_C + MR^2)\alpha = -RMg\sin\varphi, \qquad a_C = \frac{g\sin\varphi}{1+\beta}.$$

El método funciona porque se ha justificado el término de transporte y la geometría rectilínea. No hemos convertido el contacto en un pivote material fijo. El punto de la rueda

que lo ocupa cambia, y el punto geométrico del suelo elegido como referencia también cambia con el avance del centro.

19. Inferir la distribución desde una rapidez

El balance energético despejado da $\beta = 2gh/V^2 - 1 = 12/8 - 1 = 1/2$. Esa medida es compatible con el valor de un disco homogéneo, pero no identifica de manera única toda la distribución de masa: distintas distribuciones pueden compartir un mismo segundo momento.

Si se midiera $V = 4\,\mathrm{m/s}$, resultaría $\beta = 12/16 - 1 = -1/4$, imposible para una masa positiva y un momento de inercia no negativo. Bajo los supuestos declarados se requiere $V^2 \le 2gh$. Una discrepancia obligaría a revisar energía inicial, aporte de un actuador, geometría o medidas, además del régimen de contacto.

Para el primer resultado y una rampa de 20°, el umbral es $\mu_{s,\mín} = \beta \tan 20^\circ/(1+\beta) = \tan 20^\circ/3 \approx 0{,}1213$. La inferencia energética debe acompañarse de esta comprobación de contacto.

20. Un cuerpo compuesto y una condición marginal

Los momentos de inercia se suman porque las dos partes comparten el eje y la velocidad angular. El disco aporta $0{,}020\,\mathrm{kg\,m^2}$ y el aro $0{,}040\,\mathrm{kg\,m^2}$. Con $M = 2\,\mathrm{kg}$ y $MR^2 = 0{,}080\,\mathrm{kg\,m^2}$, resulta $\beta = 3/4$.

La aceleración de rodadura es $a_C = 5/(7/4) = 20/7\,\mathrm{m/s^2}$ y la fricción requerida $f = -\beta M a_C = -30/7\,\mathrm{N}$. El umbral estático es $3/(7\sqrt{3}) \approx 0{,}2474$.

Para la caída dada, $V^2 = 2gh/(1+\beta) = 8\,\mathrm{m^2/s^2}$. Los catorce joules potenciales se reparten en ocho de traslación y seis de giro. Estos números son predicciones condicionadas a la ausencia de deslizamiento.

La medida de fricción permite valores entre 0,23 y 0,27. Algunos superan el umbral y otros no. El valor central 0,25 sería suficiente en el modelo ideal, pero el intervalo completo no garantiza la rodadura. Una predicción robusta exigiría mejorar la medida o reducir el ángulo hasta que el peor valor admisible de fricción bastara.

Para diseñar una rampa que funcione con toda la banda de fricción usamos su menor valor, $\mu_s = 0{,}23$. Con $\beta = 3/4$, la condición es

$$\frac{3}{7}\tan\varphi \le 0{,}23, \qquad 0 < \varphi \le \arctan\left(\frac{161}{300}\right).$$

El extremo angular es aproximadamente $28{,}22^\circ$. La expresión exacta determina la frontera; si se necesita un ajuste decimal que conserve la garantía, un ángulo de $28{,}2^\circ$ queda por debajo de ella. En la frontera, el menor coeficiente admitido trabaja justo en el límite estático, que el modelo permite. La decisión usa una desigualdad para toda una familia de superficies, además del cálculo energético de una historia particular.

Lecturas y conexiones

En Sears y Zemansky, *Física universitaria*, volumen 1, capítulos 9 y 10, se desarrollan el momento de inercia, los ejes paralelos y la combinación de traslación y rotación. La sección 10.9 de Serway y Jewett, *Física para ciencias e ingeniería*, volumen 1, permite comparar la construcción cinemática de la rodadura y la energía de una rueda. En ambos casos debe conservarse la condición de ausencia de deslizamiento al usar la relación entre rapidez y velocidad angular.

Spivak, *Physics for Mathematicians. Mechanics I*, capítulos 5 y 6, ofrece otra formulación de los ejes paralelos, la rotación y las restricciones de rodadura. Aquí las convenciones de signo y las fuerzas de contacto se reconstruyen desde el modelo de cada aparato. La relación entre una medición, el parámetro inferido y una predicción independiente vuelve al capítulo 0.

El capítulo siguiente estudiará la gravitación y el campo: una fuerza resultante podrá provenir de una distribución extensa de masa, y habrá que decidir cuándo es adecuado reemplazarla por una fuente puntual.

Capítulo 14

Gravitación y campo

En la superficie de un planeta se mide una aceleración de caída de $10{,}00\,\mathrm{m/s^2}$. Una segunda sonda, situada seiscientos kilómetros más arriba, registra $(8{,}27 \pm 0{,}03)\,\mathrm{m/s^2}$. La diferencia supera ampliamente la incertidumbre indicada. Para interpretar las medidas necesitamos decidir qué significa «más arriba», desde dónde se mide la distancia y qué parte del planeta interviene en la atracción. La aproximación de gravedad constante que sirvió para una caída de pocos metros ya no describe ambos experimentos.

Trabajaremos con un planeta ideal esféricamente simétrico, de radio $R = 6{,}00 \times 10^6\,\mathrm{m}$, sin atmósfera ni rotación. Su centro se considerará fijo en un marco inercial durante el experimento; las sondas tienen masas despreciables frente a la del planeta. Los números describen un aparato matemático de referencia, no una determinación de las propiedades de un planeta real. Tomaremos el primer valor como dato nominal $g_0 = 10{,}00\,\mathrm{m/s^2}$ y examinaremos después qué cambia si también tiene incertidumbre.

En cada medida se libera brevemente una sonda y se reconstruye su aceleración inicial respecto de ese marco. Una sonda sostenida a altura fija tendría aceleración cero: su soporte compensaría la gravedad. La lectura de un acelerómetro transportado en caída libre tampoco se identifica sin más con la aceleración de su posición respecto del planeta. El procedimiento de observación forma parte del problema.

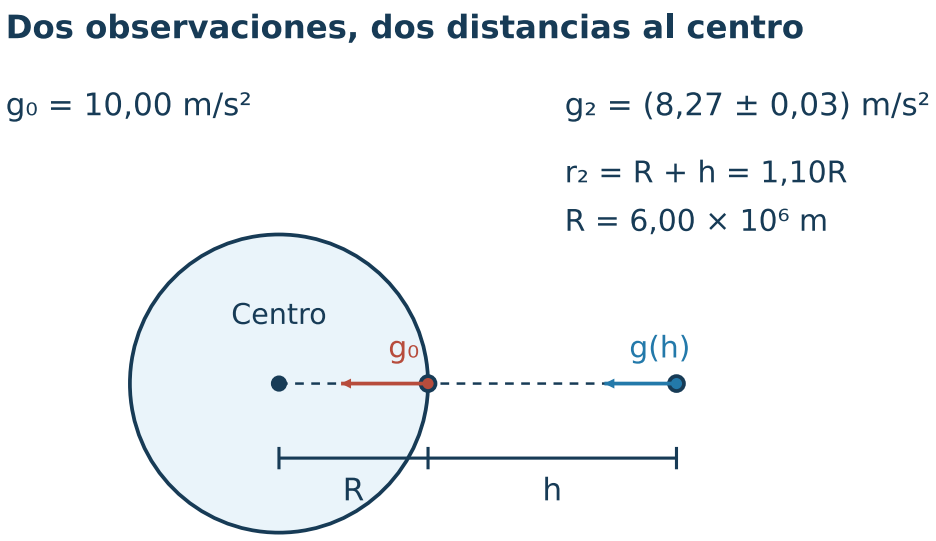


Figura 14.1. Los dos radios de observación son R y $R+h$. La altura de la segunda sonda es $h = 0{,}10R$. Las flechas indican el sentido del campo; la figura no representa distancias planetarias a escala.

De una interacción entre masas a un campo

La ley newtoniana de gravitación proporciona una interacción que antes no habíamos especificado. Para dos partículas de masas positivas M y m, en posiciones $\mathbf{a}$ y $\mathbf{x}$, la fuerza sobre la segunda es

$$\mathbf{F}_{M\to m} = -GMm\frac{\mathbf{x}-\mathbf{a}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|^3}, \qquad \mathbf{x}\neq\mathbf{a}.$$

El vector $\mathbf{x}-\mathbf{a}$ apunta desde la fuente hacia la partícula; el signo menos hace atractiva la fuerza. Su magnitud es GMm/r^2, con $r=\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|$. La fuerza sobre la fuente tiene igual magnitud y sentido contrario. Esta ley es una hipótesis física contrastable del modelo newtoniano, no una consecuencia de la definición de fuerza o de la geometría del espacio.

La constante G tiene unidades $\mathrm{m}^3/(\mathrm{kg\,s}^2)$. Cuando un ejercicio requiera su valor numérico utilizaremos $G = 6{,}67\times10^{-11}\,\mathrm{m}^3/(\mathrm{kg\,s}^2)$ como dato redondeado de cálculo. La letra G no designa una aceleración. En cambio, la aceleración gravitatoria que una fuente produce depende de la posición y tiene unidades $\mathrm{m/s}^2$.

Definición. El campo gravitatorio externo $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ es la fuerza gravitatoria que una distribución de fuentes dada ejerce por unidad de masa de una partícula de prueba situada en $\mathbf{x}$: $\mathbf{F}_g = m\mathbf{g}(\mathbf{x})$. La partícula de prueba se toma suficientemente pequeña para que su presencia no modifique apreciablemente el estado de las fuentes durante la observación. El dominio del campo de fuentes puntuales comprende las posiciones a distancia positiva de cada fuente.

Que el mismo m aparezca en $\mathbf{F}_g = m\mathbf{g}$ y en la ley inercial $m\mathbf{a}=\mathbf{F}$ incorpora la proporcionalidad empírica entre masa gravitatoria e inercial, con la elección usual de unidades. Esta identificación permite obtener $\mathbf{a}=\mathbf{g}$ cuando la gravedad es la única fuerza. Si hay un soporte, un motor o un contacto, la aceleración se calcula con la fuerza neta y ya no coincide necesariamente con el campo.

Para varias fuentes puntuales fijas se adopta superposición: se suman sus fuerzas vectoriales. Por tanto,

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = -G\sum_{j} M_j\frac{\mathbf{x}-\mathbf{a}_j}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}_j\|^3}.$$

Una fuente distante y otra cercana pueden tirar en direcciones distintas. Sumar solamente sus magnitudes perdería la posibilidad de cancelación. Dos masas iguales mantenidas en $x=-a$ y $x=a$ producen campo cero en el origen, aunque cada una atraiga una partícula situada allí. Ese cero depende de la posición; no elimina la interacción en los puntos vecinos.

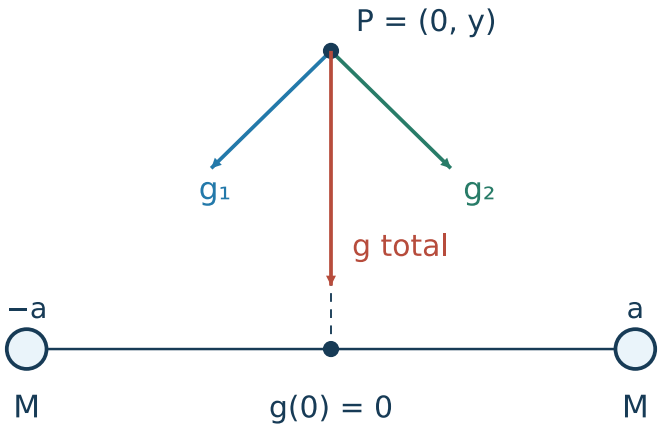


Figura 14.2. Las fuentes están sostenidas en posiciones fijas. En el punto superior, las componentes verticales se suman hacia abajo y las horizontales se cancelan. En el punto medio de las fuentes se anula el campo total.

Considerar fija una fuente de masa grande es una aproximación dinámica adicional. En la interacción de dos partículas, las aceleraciones tienen razón m/M, porque las fuerzas tienen igual magnitud. Esa razón pequeña justifica despreciar el retroceso para muchas preguntas, pero la precisión buscada y la duración del experimento deben permitirlo. Si ambas masas se mueven de forma apreciable, habrá que resolver sus dos trayectorias. El campo no convierte a la fuente en un cuerpo exento de la tercera ley.

Un potencial que conserva la información sobre el trabajo

Sumar campos exige conservar direcciones. Para calcular trabajo puede resultar más sencillo sumar funciones escalares. Recuperemos el potencial del capítulo 8, separando la masa de la partícula que explora el campo.

Definición. Un potencial gravitatorio Φ en una región es una función escalar diferenciable que satisface $\mathbf{g} = -\nabla\Phi$. La energía potencial de una partícula de prueba de masa constante m es $U = m\Phi$, hasta una constante aditiva. El gradiente es el vector de derivadas parciales $(\partial_x\Phi, \partial_y\Phi, \partial_z\Phi)$; su producto escalar con una velocidad da la derivada de Φ a lo largo del movimiento cuando el potencial no depende explícitamente del tiempo.

El potencial tiene unidades $\mathrm{J/kg} = \mathrm{m^2/s^2}$ y no es una fuerza. En una trayectoria diferenciable $\mathbf{x}(t)$ que evita las singularidades, la regla de la cadena da $d\Phi(\mathbf{x}(t))/dt = \nabla\Phi \cdot \dot{\mathbf{x}}$. Esa identidad relaciona el cálculo escalar con el trabajo de $m\mathbf{g}$ y explica por qué aparece el signo menos.

Proposición. Para una masa puntual fija M en $\mathbf{a}$, el potencial que tiende a cero al alejarse indefinidamente es $\Phi(\mathbf{x}) = -GM/\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$. En una distribución finita de fuentes puntuales fijas, se suman estos potenciales. Una partícula de prueba sometida solamente a ese campo conserva la energía mecánica específica $e = \|\mathbf{v}\|^2/2 + \Phi$ mientras su trayectoria evite las fuentes.

Demostración. Escribamos $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| > 0$. Derivar $r^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})$ respecto de cada coordenada da $\nabla r = (\mathbf{x} - \mathbf{a})/r$. Por ello $\nabla(-GM/r) = GM(\mathbf{x} - \mathbf{a})/r^3$, cuyo negativo es el campo de la fuente. La derivación es lineal, así que la suma de potenciales produce la suma de campos. Para la conservación, derivamos a lo largo de una solución de $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{g}$:

$$\frac{de}{dt} = \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} + \nabla\Phi \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{g} + \nabla\Phi) = 0.$$

La elección del cero fija una referencia útil para fuentes localizadas, pero las diferencias de potencial y el campo no cambian al sumar una constante. En el punto medio de las dos fuentes iguales anteriores, $\mathbf{g} = 0$ y $\Phi = -2GM/a$. Un gradiente nulo en un punto no obliga a que el valor de la función sea cero allí. Tampoco obliga a que ese punto sea estable.

Si las fuentes cambian de posición, el campo puede depender del tiempo. Aun cuando se escriba $\mathbf{g} = -\nabla\Phi(\mathbf{x}, t)$ en el modelo newtoniano, la derivada anterior pasa a ser $de/dt = \partial\Phi/\partial t$. La energía de la partícula de prueba por sí sola no tiene entonces por qué conservarse. En este capítulo mantendremos estacionarias las fuentes salvo cuando examinemos explícitamente el alcance de esa aproximación.

Cuánto cuesta aproximar la gravedad por una constante

Por el momento representemos el planeta mediante una masa puntual central y escribamos $\mu = GM$, de unidades $\mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2$. Más adelante justificaremos exactamente este reemplazo para la región exterior de una distribución esférica. Sobre una misma dirección radial, con altura $h \geq 0$ medida desde una superficie de radio R,

$$g(h) = \frac{\mu}{(R + h)^2}, \qquad g_0 = \frac{\mu}{R^2}.$$

Aquí $g(h)$ es la magnitud positiva del campo; su componente radial es $-g(h)$. La altura h y la distancia central $r = R + h$ cumplen funciones distintas. Sustituir h por r colocaría una singularidad artificial en la superficie del planeta.

Proposición. En el modelo central, sean $R > 0$, $h > 0$ y $\eta = h/R$. El incremento de potencial desde la superficie es

$$\Delta\Phi = \mu\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R + h}\right) = \frac{g_0 h}{1 + \eta}.$$

Si se usa g_0 en lugar de $g(h)$, el error relativo respecto del valor exacto del campo es $2\eta + \eta^2$. Si se usa $g_0 h$ en lugar de $\Delta\Phi$, el error relativo respecto del incremento exacto es η.

Demostración. Restar $-\mu/R$ a $-\mu/(R+h)$ y usar $\mu = g_0 R^2$ produce la primera igualdad. Como $g(h) = g_0/(1 + \eta)^2$,

$$\frac{g_0 - g(h)}{g(h)} = (1 + \eta)^2 - 1 = 2\eta + \eta^2.$$

De la expresión exacta del incremento se obtiene asimismo $(g_0 h - \Delta\Phi)/\Delta\Phi = \eta$. Ambos numeradores son positivos para $h > 0$, por lo que no hace falta introducir valores absolutos adicionales.

La tolerancia depende de qué queremos predecir. Para aproximar el campo con un error relativo no mayor que $\delta > 0$ se necesita $h/R \leq \sqrt{1 + \delta} - 1$. Para aproximar el incremento de potencial con la misma tolerancia basta $h/R \leq \delta$. La aproximación energética puede cumplir una exigencia que la aceleración local ya incumple; ambas decisiones deben referirse a la magnitud observada.

En el experimento inicial, $\eta = 0{,}10$ y $\mu = g_0 R^2 = 3{,}60 \times 10^{14}\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2$. La predicción de magnitud del campo es $g(h) = 1000/121\,\mathrm{m/s}^2 \approx 8{,}2645\,\mathrm{m/s}^2$, dentro del intervalo medido $[8{,}24, 8{,}30]\,\mathrm{m/s}^2$. Usar diez a esa altura sobreestimaría la aceleración exacta un 21%. El dato

superficial ajustó μ; la segunda medida es el contraste independiente de la variación radial, condicionado a las hipótesis de radio, simetría y observación.

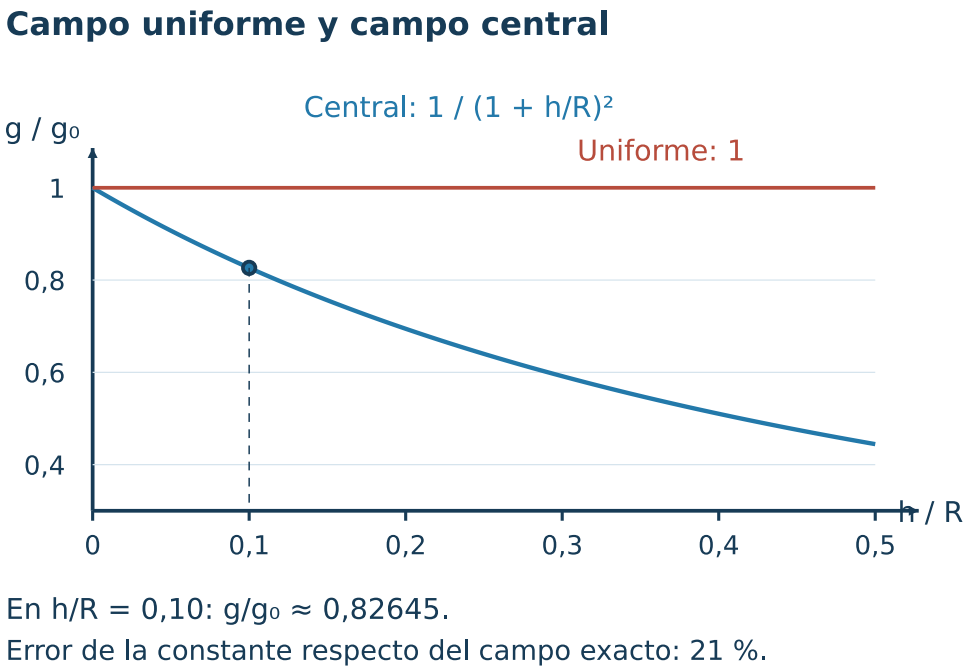


Figura 14.3. Se representa $g(h)/g_0$ frente a h/R. La curva es $1/(1+h/R)^2$. La discrepancia se mide aquí respecto del campo exacto; usar otra referencia en el denominador daría otro porcentaje.

El modelo uniforme sobre una región tridimensional requiere además que la dirección cambie poco. Dos puntos separados lateralmente una longitud pequeña ℓ sobre una esfera tienen direcciones radiales que difieren un ángulo del orden de ℓ/R. Controlar únicamente la altura no vuelve paralelas todas las verticales de un planeta. En el laboratorio pequeño las dos comparaciones, h/R y ℓ/R, pueden ser diminutas; a escala planetaria hay que conservar la geometría.

Construir una fuente extensa sin concentrarla de antemano

La masa del planeta ocupa una región del espacio. Para averiguar cuándo podemos reemplazarla por un punto, debemos sumar las contribuciones de sus partes. La expresión «distancia al centro de masa» no basta, por sí sola, para justificar el reemplazo.

Definición. Una densidad volumétrica $\rho(\mathbf{y}) \geq 0$ asigna masa al elemento de volumen mediante $dm = \rho(\mathbf{y})\, d^3y$. La masa total es $M = \int \rho(\mathbf{y})\, d^3y$. Usaremos densidades acotadas, integrables y de soporte compacto. Para láminas o cascarones ideales se usa en cambio una densidad superficial y el elemento de área; no se mezcla ese elemento con uno de volumen.

Por superposición, en un punto exterior al soporte,

$$\Phi(\mathbf{x}) = -G \int \frac{dm(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}, \qquad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = -G \int \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^3}\, dm(\mathbf{y}).$$

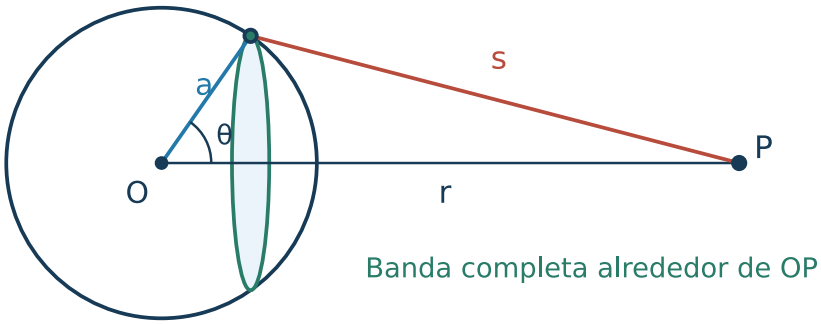
El punto de observación $\mathbf{x}$ se mantiene fijo durante la suma; $\mathbf{y}$ recorre las fuentes. Una separación positiva del soporte permite derivar el núcleo bajo la integral: el núcleo y sus derivadas están uniformemente acotados en un entorno pequeño de $\mathbf{x}$, y la masa total es finita. Así se conserva $\mathbf{g} = -\nabla\Phi$. Para puntos interiores habrá que examinar la integral; la simetría esférica permitirá hacerlo sin introducir aquí teoría general de integrales singulares.

Dos fuentes con el mismo centro de masa pueden producir campos distintos cerca de ellas. La simetría relevante debe imponerse sobre toda la distribución, no únicamente sobre su centro. Una barra, un aro y una esfera tienen geometrías diferentes aun cuando coincidan sus masas totales y sus centros.

Por qué funciona una fuente puntual fuera de una esfera

Comencemos por un cascarón esférico delgado y homogéneo de radio $a > 0$ y masa M. Elegimos el eje polar desde su centro hacia el punto de observación, situado a distancia r. Todos los elementos de una banda de ángulo polar θ están a la misma distancia s del observador. Esa elección convierte una suma sobre la superficie en una integral de una variable.

Cascarón: elegir bandas de distancia común



$s^2 = r^2 + a^2 - 2ra\cos\theta$

$dm = (M/2)\sin\theta\, d\theta;\ 0 \le \theta \le \pi$

Sección meridiana de una superficie tridimensional.

Figura 14.4. La sección meridiana muestra $s^2 = r^2 + a^2 - 2ra\cos\theta$. La banda completa gira alrededor del eje que une el centro y el observador; no es sólo el pequeño arco visible en la sección.

Proposición. El potencial de un cascarón esférico homogéneo, con cero en el infinito, es

$$\Phi(r) = \begin{cases} -GM/a, & 0 \le r < a, \\ -GM/r, & r > a. \end{cases}$$

El potencial se prolonga continuamente a $r = a$. El campo es cero en el interior y coincide con el de una masa puntual central en el exterior. En la superficie ideal no asignaremos un valor de campo mediante estas dos fórmulas, pues sus límites laterales son distintos.

Demostración. La banda tiene área $2\pi a^2 \sin\theta\, d\theta$ y, por homogeneidad, masa $dm = (M/2)\sin\theta\, d\theta$. Para $r > 0$ y $r \neq a$, integrar sus contribuciones al potencial da

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra\cos\theta}}.$$

El cambio $s^2 = r^2 + a^2 - 2ra\cos\theta$ satisface $s\, ds = ra\sin\theta\, d\theta$. Los extremos se transforman en $|r - a|$ y $r + a$, de modo que

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{2ra}\int_{|r-a|}^{r+a} ds = -\frac{GM}{2ra}(r + a - |r - a|).$$

Si $r > a$, el paréntesis vale $2a$; si $0 < r < a$, vale $2r$. Resultan las expresiones anunciadas. En el centro todos los elementos están a distancia a, lo que da directamente $-GM/a$. La simetría hace radial el campo, y su componente es $-d\Phi/dr$ fuera de la superficie: cero dentro y $-GM/r^2$ fuera. Los dos potenciales tienen el mismo límite en a, mientras sus derivadas no coinciden.

El cero interior del campo resulta de la suma sobre toda la superficie. Una porción cercana tira más intensamente por unidad de masa, pero su contribución no se compara con una porción lejana de igual área elegida arbitrariamente. El cálculo de las bandas resuelve simultáneamente la distancia, la masa y la dirección. Además, un campo interior nulo permite un potencial interior constante distinto de cero, como ya anticipaba el ejemplo de dos fuentes.

Una esfera con densidad dependiente sólo de la distancia al centro puede descomponerse en cascarones concéntricos. Una capa situada por fuera del observador produce campo cero allí; una capa interior actúa como si estuviera concentrada en el centro. Esta separación permite obtener el campo interior, donde la masa total del cuerpo ya no puede usarse indiscriminadamente.

Proposición. Sea una distribución esférica de radio exterior R, con densidad radial acotada $\rho(s) \geq 0$. Escribamos

$$M(r) = 4\pi\int_0^r \rho(s)s^2\,ds \quad (0 \leq r \leq R), \qquad M = M(R).$$

Para $0 < r < R$ su campo y su potencial son

$$\mathbf{g}(r) = -\frac{GM(r)}{r^2}\mathbf{e}_r, \qquad \Phi(r) = -G\left[\frac{M(r)}{r} + 4\pi\int_r^R \rho(s)s\,ds\right].$$

Para $r \geq R$, con prolongación continua desde el interior, valen $\mathbf{g} = -GM\mathbf{e}_r/r^2$ y $\Phi = -GM/r$. En el centro el campo es cero y el potencial es el límite finito de la expresión interior.

Demostración. Cada cascarón de radio $s < r$ aporta $-G\,dM/r$ al potencial y $-G\,dM/r^2$ al campo radial. Los de radio $s > r$ aportan $-G\,dM/s$ al potencial y campo cero. Sumar ambos grupos, usando $dM = 4\pi\rho(s)s^2ds$, da las fórmulas. Para un observador exterior todos los cascarones pertenecen al primer grupo y sus masas suman M. Al acercarnos al centro, la acotación de ρ implica $M(r) = O(r^3)$, por lo que $GM(r)/r^2 = O(r)$ tiende a cero y $M(r)/r$ también. La integral restante tiene límite finito porque $\rho(s)s$ es integrable en $[0, R]$.

La simetría esférica no exige densidad constante. Planetas con distintas estratificaciones radiales y la misma masa producen el mismo campo exterior en este modelo. Por tanto, una medición exterior del campo no reconstruye por sí sola toda la densidad interna. El resultado exterior es exacto bajo simetría; para una fuente no esférica, concentrarla en su centro de masa requiere una aproximación adicional de observación lejana.

Si la esfera es homogénea, $M(r) = M(r/R)^3$. Sustituir y efectuar la integral interior proporciona

$$\mathbf{g}(r) = -\frac{GM}{R^3}\mathbf{x}, \qquad \Phi(r) = -\frac{GM}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right), \qquad 0 \leq r \leq R.$$

Dentro de esa esfera la magnitud del campo crece linealmente desde cero; fuera decrece como r^{-2}. La gráfica tiene su máximo superficial, mientras que el potencial es más negativo en el centro. Estas formas permiten comprobar signos y continuidad sin memorizar dos fórmulas desconectadas.

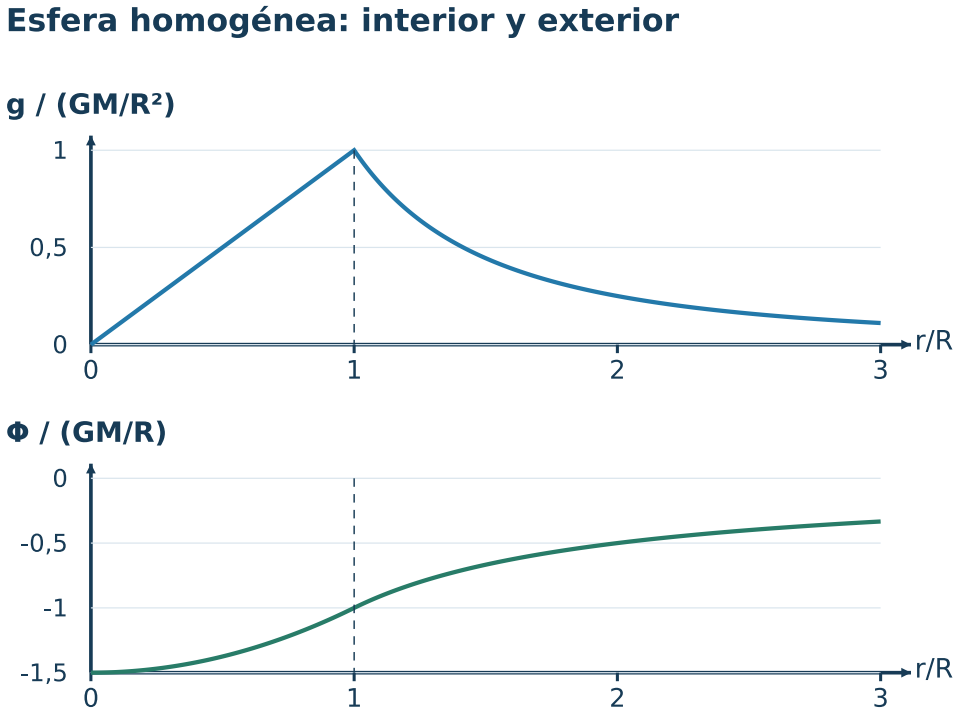


Figura 14.5. Se representan la magnitud $g/(GM/R^2)$ y el potencial $\Phi/(GM/R)$ frente a r/R. El campo es continuo en la superficie de esta esfera de densidad finita; el salto del cascarón infinitamente delgado pertenece a un modelo distinto.

Usar energía para una caída extensa o un escape

El campo exterior ya está justificado sin exigir que el planeta sea una partícula. Para un movimiento exterior bajo su gravedad, la energía específica es $e = v^2/2 - \mu/r$. Una caída desde el reposo a distancia $r_0 > R$ alcanza la superficie con

$$v^2 = 2\mu\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_0}\right).$$

Esta expresión evita suponer una aceleración constante durante toda la caída. Si $r_0 = R+h$, se obtiene $v^2 = 2g_0h/(1 + h/R)$, menor que $2g_0h$. La comparación no calcula el tiempo de caída; para eso habría que integrar la relación entre velocidad y posición.

Proposición. Una partícula de prueba lanzada radialmente hacia afuera desde $r_0 \geq R$, con rapidez $v_0 > 0$, bajo el campo exterior de una fuente esférica fija, alcanza distancias arbitrariamente grandes si y sólo si $v_0 \geq \sqrt{2\mu/r_0}$. Si la rapidez es menor, su radio máximo es

$$r_{\text{máx}} = \left(\frac{1}{r_0} - \frac{v_0^2}{2\mu}\right)^{-1}.$$

En el umbral, la rapidez tiende a cero al alejarse indefinidamente; el infinito no se alcanza en tiempo finito.

Demostración. El torque central es cero, así que el lanzamiento radial conserva momento angular nulo y sigue siendo radial. La energía da

$$\dot r^2 = v_0^2 + 2\mu\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) = 2e + \frac{2\mu}{r}.$$

Si $e < 0$, el miembro derecho se anula en el radio positivo indicado; es positivo hasta allí y negativo después. La raíz es simple y la integral temporal cerca de ella tiene la forma integrable de una constante por $dr/\sqrt{r_{\text{máx}} - r}$; la rama saliente llega al retorno en tiempo finito y no puede cruzar a la región prohibida. Si $e \geq 0$, el miembro derecho es positivo para todo radio finito $r \geq r_0$; la rama saliente puede prolongarse hasta cualquier radio prefijado. Para $e = 0$, $dt = \sqrt{r/(2\mu)}\,dr$ y su integral diverge al enviar el extremo a infinito. La condición $e \geq 0$ equivale a la desigualdad anunciada.

La rapidez de escape depende del lugar de lanzamiento y de la elección de energía inicial. No es una rapidez que un motor deba mantener durante todo el viaje. Un lanzamiento impulsivo, seguido de movimiento libre, y un ascenso sostenido por un propulsor son problemas distintos. Para el planeta de referencia, el umbral superficial es $\sqrt{2g_0R} = \sqrt{1{,}20 \times 10^8}\,\text{m/s} \approx 10{,}95\,\text{km/s}$, sin atmósfera ni rotación.

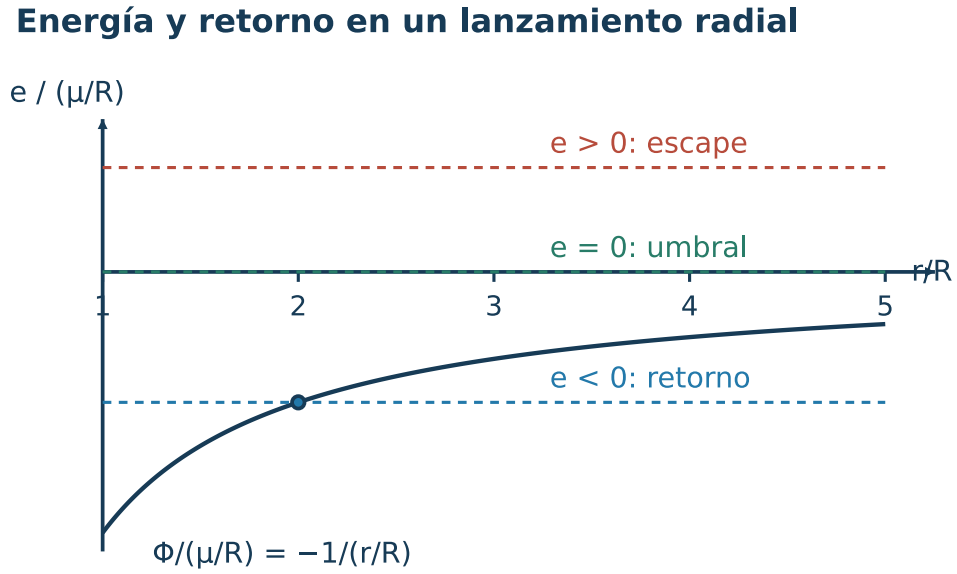


Figura 14.6. El potencial exterior es $-\mu/r$. Las rectas de energía negativa, nula y positiva distinguen retorno, escape marginal y escape con rapidez asintótica no nula. El análisis se refiere a la rama radial saliente.

Qué puede inferirse de una medición del campo

El experimento inicial determina μ a partir de un radio y una aceleración, porque $\mu = gr^2$. Obtener después $M = \mu/G$ requiere además un valor de G. La masa inferida hereda la incertidumbre de los datos y de esa constante; no aumenta su precisión porque la expresión algebraica sea exacta.

Una segunda medida a otro radio contrasta la dependencia inversa cuadrática sin necesitar separar G y M. Si ambos radios y campos se conocen, la predicción es $g_2/g_1 = (r_1/r_2)^2$. Una discrepancia podría señalar un radio mal identificado, una aceleración de soporte confundida con gravedad, una distribución no esférica, otras fuentes o una precisión insuficiente. Revisar esos supuestos exige observaciones diferentes: cambiar el material de la sonda no prueba lo mismo que cambiar su posición.

Una medida de g tampoco determina por sí sola el radio y la masa de un cuerpo. Dos esferas de radios distintos pueden compartir el mismo campo superficial y tener distintas rapideces de escape, porque $v_{\mathrm{esc}}^2 = 2g_0R$. La interpretación física depende de qué parámetros se conocen de manera independiente.

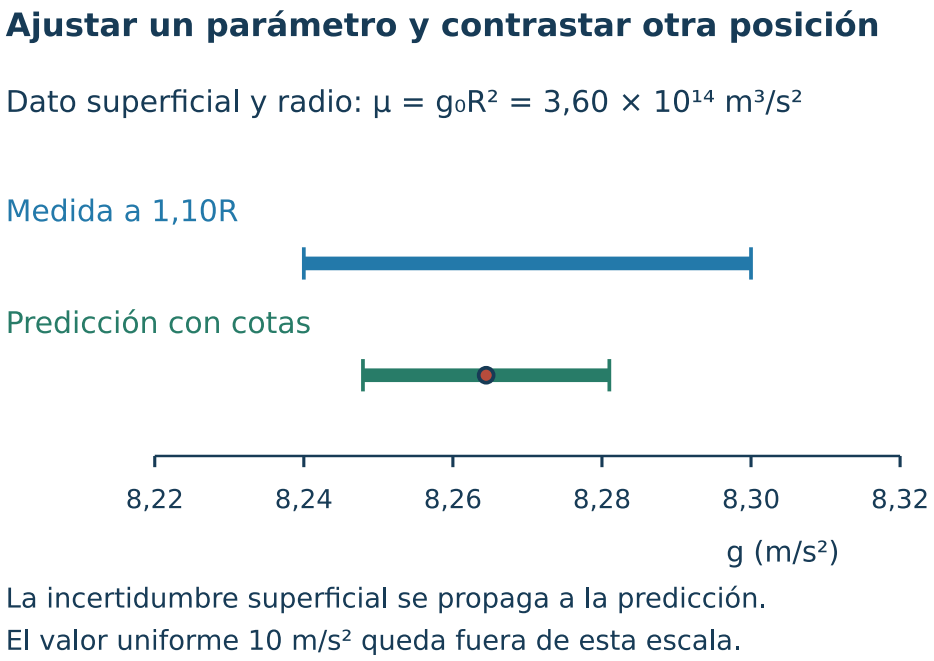


Figura 14.7. Para el planeta de referencia, g_0 y R fijan μ. El intervalo de la segunda medición contiene la predicción central y excluye el campo uniforme. La banda de predicción incorpora las cotas superficiales del ejercicio 18. La compatibilidad no elimina la necesidad de examinar las hipótesis del aparato.

Ejercicios

Se usarán el planeta ideal de referencia $R = 6{,}00 \times 10^6\,\mathrm{m}$, $\mu = 3{,}60 \times 10^{14}\,\mathrm{m^3/s^2}$ y $g_0 = 10{,}00\,\mathrm{m/s^2}$ cuando se lo mencione. Los valores se tratan como exactos en el modelo de cada ejercicio, salvo indicación expresa de intervalos. Se omiten atmósfera, rotación y retroceso de la fuente, a menos que el problema examine precisamente esa idealización.

1. Una ley con dirección y unidades

Una masa puntual $M = 3{,}0\,\mathrm{kg}$ está en el origen y otra $m = 2{,}0\,\mathrm{kg}$ en $x = 0{,}20\,\mathrm{m}$. Calcule las fuerzas mutuas y sus aceleraciones iniciales si no actúan otras fuerzas. Compruebe las unidades de G y explique por qué fuerzas iguales no implican aceleraciones iguales.

2. Cancelar campos de masas distintas

Dos fuentes puntuales mantenidas fijas están en $x = 0$ y $x = d$, con masas M y $4M$. Encuentre el único punto del segmento abierto donde el campo se anula. Determine el potencial allí con cero en el infinito y explique por qué no puede existir otro cero sobre los tramos exteriores del eje.

3. Sobre la mediatriz

Dos masas iguales M permanecen fijas en $(a,0,0)$ y $(-a,0,0)$. Obtenga el campo y el potencial en $(0,y,0)$, con $a>0$. Para $y=a$, exprese el resultado usando las escalas GM/a^2 y GM/a. Compare el campo en el origen con el potencial en ese punto.

4. Sonda sostenida y sonda libre

Una sonda de 2,0 kg se mantiene fija a altura $h=0{,}10R$ sobre el planeta de referencia mediante un soporte radial. Calcule su peso gravitatorio y la fuerza de soporte. Determine su aceleración inmediatamente después de retirar el soporte, antes de que cambie apreciablemente su posición.

5. Cuándo basta una gravedad constante

Determine la altura máxima sobre el planeta de referencia para que sustituir $g(h)$ por g_0 tenga error relativo no mayor que 1%, tomando el campo exacto como denominador. Compare con la altura permitida para aproximar el incremento de potencial por $g_0 h$ con la misma tolerancia.

6. Subir una masa sin acelerar sus extremos

Un dispositivo eleva lentamente una masa de 2,0 kg desde la superficie hasta $h=0{,}10R$, dejándola en reposo. Calcule el trabajo del dispositivo en el límite cuasiestático y el trabajo de la gravedad. Compare con mg_0h y precise el sistema y los intercambios del balance.

7. Caer desde una altura planetaria

Una partícula se suelta del reposo a radio $2R$ y cae radialmente hasta la superficie del planeta de referencia. Halle su rapidez de llegada. Compare con el resultado de suponer aceleración g_0 durante todo el recorrido y calcule el error relativo en la rapidez.

8. Lanzar sin alcanzar el escape

Una partícula parte radialmente hacia afuera desde la superficie con rapidez $v_0=\sqrt{\mu/R}$. Determine su energía específica, su radio máximo y la altura máxima. Halle su rapidez cuando pasa hacia afuera por $r=3R/2$.

9. La energía en el umbral

Calcule la rapidez de escape superficial del planeta de referencia. Una sonda de 5 kg se lanza radialmente justo a esa rapidez. Halle la energía cinética inicial, la rapidez a radio $4R$ y el trabajo de la gravedad entre R y $4R$. Explique qué significa llegar al infinito con rapidez nula.

10. Escapar con rapidez residual

Se desea que una partícula lanzada radialmente desde la superficie del planeta de referencia tenga rapidez asintótica $v_\infty = 4{,}00$ km/s. Halle la rapidez inicial necesaria y la energía adicional por unidad de masa respecto del escape marginal. Determine su rapidez a radio $2R$.

11. Mismo campo superficial, distinto escape

Dos planetas esféricos tienen el mismo campo superficial g_0. El segundo tiene el doble de radio del primero. Compare sus masas y sus rapideces de escape. Decida si una medida de g_0 sin una medida de radio puede distinguirlos.

12. Dentro de un cascarón

Un cascarón esférico homogéneo de masa M y radio a permanece fijo. Halle campo y potencial a radio $a/2$ y a radio $2a$. Calcule el trabajo gravitatorio por unidad de masa al llevar una partícula de prueba desde el centro hasta $2a$. Examine el error de asignar potencial cero a todo punto interior sólo porque allí el campo es nulo.

13. Atravesar una esfera homogénea

Un planeta homogéneo tiene radio R y campo superficial g_0. En una idealización, se abre un túnel recto diametral de sección despreciable y se suelta una partícula desde un extremo, sin rozamiento ni contacto lateral. Desprecie la masa retirada y determine la ecuación de movimiento, el período, el tiempo hasta el centro y la rapidez máxima. Evalúe estos resultados para el planeta de referencia.

14. Una densidad que disminuye hacia afuera

Una esfera de radio R tiene densidad $\rho(r) = \rho_c(1 - r/R)$ para $0 \le r \le R$, con $\rho_c > 0$. Calcule su masa total, su campo interior y el radio donde la magnitud del campo es máxima. Exprese el máximo como múltiplo del campo superficial. Compruebe el comportamiento central y la continuidad en R.

15. Un aro no es una esfera

Un aro delgado homogéneo, de masa M y radio a, está fijo en el plano xy. Obtenga potencial y campo sobre el eje z. Para $z > 0$, compare la magnitud exacta con GM/z^2 y encuentre la distancia mínima para que la aproximación puntual tenga error relativo no mayor que 5% respecto del campo exacto. Examine la predicción de ambos modelos cerca de $z = 0$.

16. Una rapidez que exige una órbita circular

Un satélite de masa despreciable describe una órbita circular a radio $r = 3R/2$ alrededor del planeta de referencia. Deduzca su rapidez y período a partir del balance radial. Halle su energía específica y la rapidez de escape desde ese mismo radio. Explique por qué no basta elegir cualquier rapidez tangencial para conservar el radio. Desde ese mismo radio, considere otros dos lanzamientos tangenciales con rapidez $0{,}90v_c$ y $1{,}10v_c$, donde v_c es la rapidez circular calculada. Halle la segunda derivada inicial de la distancia al centro y decida hacia dónde comienza a cambiar esa distancia, sin clasificar todavía las órbitas completas.

17. Un cero de campo que no es estable

Para las dos fuentes iguales del ejercicio 3, examine un pequeño desplazamiento desde el origen a lo largo del eje x y otro a lo largo de y. Calcule las derivadas de las componentes correspondientes del campo en cero y determine si cada desplazamiento produce una fuerza restauradora o una fuerza que aleja del origen. ¿Hay estabilidad espacial del equilibrio?

18. Medir una masa con intervalos

En la superficie del planeta de referencia se obtiene $g_0 \in [9{,}98, 10{,}02]\,\mathrm{m/s^2}$; el radio se considera exacto. Tome también $G \in [6{,}66, 6{,}68] \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3/(kg\,s^2)}$. Halle intervalos garantizados para μ y M. Prediga el intervalo de campo a $r = 1{,}10R$ y compárelo con la medida inicial $[8{,}24, 8{,}30]\,\mathrm{m/s^2}$.

19. Comprobar una fuente fija

Dos partículas de masas M y $m = M/10$, inicialmente separadas por r, interactúan sólo por gravitación. Compare las aceleraciones iniciales de ambas y la aceleración de su separación con la calculada al inmovilizar la fuente M. Exprese el error relativo de esta última usando la aceleración relativa exacta como referencia. Explique qué conservación se perdería si se inmovilizara físicamente la fuente mediante un soporte externo y se siguiera llamando aislado al par.

20. Una inferencia que no reconstruye el interior

Un observador conoce el radio exterior R de una fuente esférica y mide a $r = 2R$ un campo de magnitud g_2. Obtenga μ y prediga el campo a $3R$. Compare dos modelos de igual masa total y radio exterior: una esfera homogénea y un cascarón delgado. Halle sus campos y potenciales a $r = R/2$, con cero en el infinito. Decida qué observación distinguiría los dos modelos y qué permite inferir realmente el dato exterior.

Soluciones

1. Una ley con dirección y unidades

La distancia es 0,20 m, no una altura respecto de una superficie. La magnitud de la fuerza es $GMm/r^2 = (6{,}67 \times 10^{-11})(3)(2)/(0{,}20)^2 = 1{,}0005 \times 10^{-8}\,\mathrm{N}$. Sobre m apunta hacia $-x$ y sobre M hacia $+x$. Las dos fuerzas actúan sobre cuerpos diferentes y no se cancelan en la ecuación de uno solo.

Las aceleraciones iniciales son $a_m = -5{,}0025 \times 10^{-9}\,\mathrm{m/s^2}$ y $a_M = +3{,}3350 \times 10^{-9}\,\mathrm{m/s^2}$. Al sumar los momentos lineales ponderados se comprueba $ma_m + Ma_M = 0$. Las fuerzas iguales producen aceleraciones distintas porque la resistencia inercial de los cuerpos es distinta.

En unidades, $[G] = [F][r]^2/[M]^2 = \mathrm{N\,m^2/kg^2} = \mathrm{m^3/(kg\,s^2)}$. El pequeño valor de la fuerza corresponde a masas de laboratorio; no autoriza a sustituir la gravitación por una fuerza de contacto ni a olvidar su dirección.

2. Cancelar campos de masas distintas

Dentro del segmento, la fuente izquierda tira hacia $-x$ y la derecha hacia $+x$. La cancelación exige $GM/x^2 = 4GM/(d-x)^2$. Como $0 < x < d$, podemos tomar raíces positivas y escribir $d - x = 2x$, de donde $x = d/3$. El cero queda más cerca de la fuente de menor masa, que necesita menor distancia para igualar la atracción de la mayor.

El potencial se suma sin signos direccionales de fuerza:

$$\Phi(d/3) = -\frac{GM}{d/3} - \frac{4GM}{2d/3} = -\frac{9GM}{d}.$$

En cada tramo exterior ambas fuerzas apuntan hacia el segmento, en el mismo sentido, y no pueden cancelarse. El campo cero y el potencial negativo son compatibles: el primero describe una derivada y el segundo un valor relativo al infinito.

3. Sobre la mediatriz

Las dos distancias al observador son $s = \sqrt{a^2 + y^2}$. Los vectores desde las fuentes son $(-a, y, 0)$ y $(a, y, 0)$; sumarlos elimina sus componentes horizontales. Resulta

$$\mathbf{g}(0,y,0) = -\frac{2GMy}{(a^2+y^2)^{3/2}}\mathbf{e}_y, \qquad \Phi(0,y,0) = -\frac{2GM}{\sqrt{a^2+y^2}}.$$

Para $y = a$, el campo es $-[GM/(\sqrt{2}a^2)]\mathbf{e}_y$ y el potencial $-\sqrt{2}GM/a$. En el origen el campo es cero, mientras que $\Phi = -2GM/a$. Las fórmulas también describen $y < 0$: entonces

el campo apunta hacia arriba, hacia la línea que contiene las fuentes. Esa comprobación de signo evita interpretar la magnitud positiva como una componente válida en ambos semiejes.

4. Sonda sostenida y sonda libre

El radio central es $1{,}10R$, de modo que $g = 10/(1{,}10)^2 = 1000/121\,\mathrm{m/s^2}$. Su peso gravitatorio tiene magnitud $2000/121\,\mathrm{N} \approx 16{,}529\,\mathrm{N}$ y apunta al centro. El soporte debe ejercer esa misma magnitud hacia afuera para mantener aceleración cero.

Al retirar el soporte, la posición y la velocidad no saltan, pero cambia la fuerza neta. La aceleración inicial es $\mathbf{a} = -(1000/121)\mathbf{e}_r\,\mathrm{m/s^2}$. En el instante de liberación la rapidez puede ser cero y la aceleración no. La distinción entre peso, reacción y aceleración es la misma que ya encontramos al analizar contactos; el campo variable sólo cambia el valor del peso.

5. Cuándo basta una gravedad constante

La comparación solicitada usa $(g_0 - g)/g$, así que debemos resolver $2\eta + \eta^2 \le 0{,}01$. Como $\eta \ge 0$, la cota es $\eta \le \sqrt{1{,}01} - 1 \approx 0{,}00498756$. La altura máxima vale aproximadamente $2{,}9925 \times 10^4\,\mathrm{m}$, unos $29{,}93\,\mathrm{km}$.

Para el incremento de potencial, el error relativo es exactamente η cuando $h > 0$. La misma tolerancia permite $h \le 0{,}01R = 6{,}00 \times 10^4\,\mathrm{m}$, sesenta kilómetros. Los dos resultados no discrepan: evalúan magnitudes diferentes. Si se dividiera el error del campo por g_0 en lugar de $g(h)$, cambiaría la desigualdad y la altura límite; indicar la referencia forma parte de presentar un porcentaje.

6. Subir una masa sin acelerar sus extremos

La energía cinética no cambia entre extremos. Para la partícula sola, el balance es $W_{\mathrm{disp}} + W_g = 0$. El trabajo gravitatorio vale $-m\Delta\Phi$, y el dispositivo suministra $m\Delta\Phi$. Con $h/R = 0{,}10$,

$$W_{\mathrm{disp}} = \frac{(2)(10)(6{,}00 \times 10^5)}{1{,}10}\,\mathrm{J} \approx 1{,}09091 \times 10^7\,\mathrm{J}, \qquad W_g = -W_{\mathrm{disp}}.$$

La estimación uniforme da $1{,}20 \times 10^7\,\mathrm{J}$, un 10% por encima del incremento exacto. Si incluimos la interacción planeta–partícula en el sistema energético, el mismo trabajo del dispositivo aumenta la energía potencial del par. El planeta se aproxima como inmóvil y no absorbe energía cinética apreciable. «Lentamente» permite aproximar la fuerza del dispositivo por la que equilibra el peso en cada radio; no convierte en constante ese peso.

7. Caer desde una altura planetaria

La partícula empieza en $r_0 = 2R$ y termina en R, sin abandonar el campo exterior. La energía específica inicial es $-\mu/(2R)$. Al llegar,

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{R} = -\frac{\mu}{2R}, \qquad v = \sqrt{\frac{\mu}{R}} = \sqrt{6{,}00 \times 10^7}\,\mathrm{m/s} \approx 7{,}746\,\mathrm{km/s}.$$

Una caída de distancia R con aceleración constante g_0 daría $v_{\mathrm{unif}} = \sqrt{2g_0R} = \sqrt{2}\,v \approx 10{,}954\,\mathrm{km/s}$. El error relativo en rapidez es $\sqrt{2} - 1 \approx 41{,}42\%$. La aceleración real aumenta desde $g_0/4$ hasta g_0; asignarle desde el comienzo su valor final sobreestima todo el trabajo acumulado.

8. Lanzar sin alcanzar el escape

La energía específica inicial es $e = \mu/(2R) - \mu/R = -\mu/(2R) = -3{,}00 \times 10^7\,\mathrm{J/kg}$. Es negativa con la referencia en el infinito y el lanzamiento es radial saliente. Al imponer rapidez cero resulta $-\mu/r_{\max} = e$, de donde $r_{\max} = 2R$ y $h_{\max} = R$.

En $r = 3R/2$, la conservación da $v^2 = 2[e + \mu/(3R/2)] = \mu/(3R) = 2{,}00 \times 10^7\,\mathrm{m^2/s^2}$. La rapidez es aproximadamente $4{,}472\,\mathrm{km/s}$. Hay un paso saliente y otro entrante por ese radio con la misma rapidez y velocidades radiales opuestas. El signo de la energía determina el radio de retorno, pero por sí solo no identifica en cuál de esos pasos está la partícula.

9. La energía en el umbral

El umbral es $v_{\mathrm{esc}} = \sqrt{2\mu/R} \approx 10{,}954\,\mathrm{km/s}$. Para cinco kilogramos, la energía cinética inicial es $m v_{\mathrm{esc}}^2/2 = m\mu/R = 3{,}00 \times 10^8\,\mathrm{J}$. Esa energía compensa exactamente el valor negativo de la energía potencial inicial, por lo que $e = 0$.

A radio $4R$, $v^2 = 2\mu/(4R) = 3{,}00 \times 10^7\,\mathrm{m^2/s^2}$ y $v \approx 5{,}477\,\mathrm{km/s}$, la mitad del valor inicial. El trabajo gravitatorio es

$$W_g = m\mu\left(\frac{1}{4R} - \frac{1}{R}\right) = -\frac{3m\mu}{4R} = -2{,}25 \times 10^8\,\mathrm{J}.$$

La energía cinética final es $7{,}50 \times 10^7\,\mathrm{J}$, en acuerdo con ese trabajo. En el escape marginal la rapidez disminuye sin llegar a cero a un radio finito; la expresión «en el infinito» designa un límite de radios y tiempos crecientes, no un punto final alcanzado al cabo de cierto número de segundos.

10. Escapar con rapidez residual

En el límite lejano el potencial tiende a cero y $e = v_\infty^2/2 = 8{,}00 \times 10^6\,\mathrm{J/kg}$. Igualar esa energía a la inicial da $v_0^2 = 2\mu/R + v_\infty^2 = 1{,}36 \times 10^8\,\mathrm{m^2/s^2}$, de donde $v_0 \approx 11{,}662\,\mathrm{km/s}$.

La energía adicional específica respecto del umbral es precisamente $8{,}00 \times 10^6\,\mathrm{J/kg}$; no se obtiene sumando las rapideces v_{esc} y v_∞. En $2R$, $v^2 = v_\infty^2 + 2\mu/(2R) = 7{,}60 \times 10^7\,\mathrm{m^2/s^2}$ y $v \approx 8{,}718\,\mathrm{km/s}$. Queda todavía energía potencial negativa por recuperar al seguir alejándose, así que la rapidez allí supera la residual.

11. Mismo campo superficial, distinto escape

Como $g_0 = GM/R^2$ y G es el mismo, duplicar el radio manteniendo g_0 exige cuadruplicar la masa: $M_2/M_1 = 4$. Para el escape, $v_{\mathrm{esc}}^2 = 2g_0R$, por lo que $v_{\mathrm{esc},2}/v_{\mathrm{esc},1} = \sqrt{2}$.

Una medida local de aceleración superficial no distingue estos dos pares de parámetros. Hace falta otra observación, como el radio o la variación del campo con una altura conocida. El ejemplo muestra por qué «gravedad superficial igual» no equivale a «pozo de potencial igual»: la extensión espacial del campo interviene en el trabajo hasta radios lejanos.

12. Dentro de un cascarón

En $a/2$ se tiene $\mathbf{g} = 0$ y $\Phi = -GM/a$. En $2a$ el campo es radial entrante, $\mathbf{g} = -[GM/(4a^2)]\mathbf{e}_r$, y el potencial es $-GM/(2a)$. La diferencia de potencial entre centro y destino es $GM/(2a)$; por tanto el trabajo gravitatorio específico es $-GM/(2a)$.

El recorrido interior no requiere trabajo contra la gravedad ideal del cascarón. Todo el incremento de potencial ocurre después de cruzar su superficie. Elegir potencial interior cero sería posible sólo sumando GM/a a la función completa, incluida la exterior y su límite lejano; no puede cambiarse la constante en una región y conservar simultáneamente el cero exterior original. El salto del campo en la superficie ideal no produce un salto de potencial ni un trabajo finito en un desplazamiento de longitud nula.

13. Atravesar una esfera homogénea

Usamos una coordenada firmada x sobre el diámetro, con el centro en cero. El resultado interior da $\ddot{x} = -(g_0/R)x$, de modo que $\omega = \sqrt{g_0/R}$ y, con $x(0) = R$, $\dot{x}(0) = 0$, la solución es $x(t) = R\cos(\omega t)$. Recuperamos el oscilador armónico del capítulo 10 a partir de una interacción que no es un resorte.

El período es $T = 2\pi\sqrt{R/g_0} \approx 4866{,}9\,\mathrm{s}$, unos 81,12 minutos. El centro se alcanza por primera vez en $T/4 \approx 1216{,}7\,\mathrm{s}$, unos 20,28 minutos. La rapidez máxima es $\omega R = \sqrt{g_0 R} \approx 7{,}746\,\mathrm{km/s}$ y ocurre al pasar por el centro.

La diferencia entre potencial central y superficial es $-g_0 R/2$; la ganancia cinética específica $g_0 R/2$ comprueba esa rapidez. Este resultado depende de homogeneidad, ausencia de rotación, vacío y eliminación despreciable de masa. No describe un túnel real con la densidad interna de la Tierra ni justifica atravesar materia sin fuerzas de contacto.

14. Una densidad que disminuye hacia afuera

La masa encerrada se obtiene con el volumen de cada capa, no integrando directamente la densidad en una longitud:

$$M(r) = 4\pi\rho_c\left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4R}\right), \qquad M = \frac{\pi\rho_c R^3}{3}.$$

La magnitud interior es $g(r) = 4\pi G\rho_c(r/3 - r^2/(4R))$. Su derivada se anula en $r = 2R/3$, pues $g'(r) = 4\pi G\rho_c(1/3 - r/(2R))$. La segunda derivada es negativa, así que ese radio proporciona el máximo interior. Su valor es $4\pi G\rho_c R/9$.

El campo superficial tiene magnitud $g(R) = \pi G\rho_c R/3 = GM/R^2$; por tanto $g_{\max}/g(R) = 4/3$. Cerca del centro el campo crece linealmente y tiende a cero, mientras que en R coincide con la rama exterior. El máximo ya no está en la superficie: esa propiedad de la esfera homogénea no se conserva para cualquier densidad radial. Como el campo exterior decrece desde R, el máximo interior encontrado es también el máximo global.

15. Un aro no es una esfera

Todos los elementos del aro están a distancia $s = \sqrt{a^2 + z^2}$ del punto axial. La integral del potencial se reduce a sumar sus masas, y la simetría cancela las componentes transversales del campo:

$$\Phi(z) = -\frac{GM}{\sqrt{a^2 + z^2}}, \qquad \mathbf{g}(z) = -\frac{GMz}{(a^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{e}_z.$$

Para $z > 0$, la aproximación puntual sobreestima la magnitud exacta. La razón entre aproximación y valor exacto es $(1 + a^2/z^2)^{3/2}$. Exigir un error no mayor que 0,05 lleva a

$$\frac{z}{a} \geq \left(1{,}05^{2/3} - 1\right)^{-1/2} \approx 5{,}50.$$

En el centro del aro, el campo axial exacto vale cero y el potencial $-GM/a$ es finito; la fuente puntual predeciría una singularidad. Compartir masa y centro no hizo exacto el reemplazo. La comparación cuantitativa muestra cuándo la distancia es suficientemente grande para la tolerancia y la magnitud elegidas.

16. Una rapidez que exige una órbita circular

El movimiento circular exige aceleración radial v^2/r. La única fuerza es gravitatoria, así que $v^2/r = \mu/r^2$ y $v = \sqrt{\mu/r}$. Para $r = 3R/2 = 9{,}00 \times 10^6\,\mathrm{m}$, resulta $v = \sqrt{4{,}00 \times 10^7}\,\mathrm{m/s} \approx 6{,}325\,\mathrm{km/s}$.

El período es $T = 2\pi r/v = 2\pi\sqrt{r^3/\mu} \approx 8941{,}1\,\mathrm{s}$, unos 149,02 minutos. La energía específica vale $e = \mu/(2r) - \mu/r = -\mu/(2r) = -2{,}00 \times 10^7\,\mathrm{J/kg}$. La rapidez de escape desde ese radio es $\sqrt{2}\,v \approx 8{,}944\,\mathrm{km/s}$.

Una rapidez tangencial diferente no proporciona la aceleración geométrica necesaria para mantener ese mismo radio. La trayectoria posterior se decidirá con las ecuaciones y conservaciones de una fuerza central; no se puede declarar circular por haber dibujado inicialmente un vector tangente. Este cálculo prepara ese estudio sin clasificar todavía todas las órbitas.

Para seguir el radio de los otros lanzamientos, lo tratamos como una función: $r(t) = \|\mathbf{x}(t)\|$. Su segunda derivada expresa cómo cambia la distancia al centro. Podemos obtenerla sin introducir una fórmula nueva de coordenadas polares. Derivar $r^2 = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x}$ una vez y luego otra da

$$r\dot r = \mathbf{x}\cdot\mathbf{v}, \qquad \dot r^2 + r\ddot r = \|\mathbf{v}\|^2 + \mathbf{x}\cdot\ddot{\mathbf{x}}.$$

En el lanzamiento tangencial, $\dot r(0) = 0$. La gravedad satisface $\ddot{\mathbf{x}} = -\mu\mathbf{x}/r^3$, por lo que, si $r_0 = 3R/2$ y $v(0) = (1+\varepsilon)v_c$,

$$\ddot r(0) = \frac{v(0)^2}{r_0} - \frac{\mu}{r_0^2} = (2\varepsilon + \varepsilon^2)\frac{\mu}{r_0^2}.$$

El campo en ese radio tiene magnitud $\mu/r_0^2 = 40/9\,\mathrm{m/s^2}$. Para $\varepsilon = -0{,}10$, resulta $\ddot r(0) = -38/45\,\mathrm{m/s^2}$: el radio comienza a disminuir. Para $\varepsilon = +0{,}10$, resulta $\ddot r(0) = 14/15\,\mathrm{m/s^2}$: comienza a aumentar. En efecto, $r(t) = r_0 + \ddot r(0)t^2/2 + o(t^2)$ cerca del lanzamiento, y el término cuadrático decide el primer cambio porque la derivada inicial es cero.

La aceleración vectorial gravitatoria apunta hacia el centro en ambos casos. La segunda derivada de la distancia incorpora también el movimiento tangencial mediante $v(0)^2/r_0$. El caso circular hace que ambos términos se compensen exactamente. Estos datos determinan la salida inicial del radio; la clasificación y el recorrido posterior requieren continuar la dinámica central.

17. Un cero de campo que no es estable

Para $|x| < a$, sobre el eje de las fuentes,

$$g_x(x) = GM\left[\frac{1}{(a-x)^2} - \frac{1}{(a+x)^2}\right], \qquad g_x'(0) = \frac{4GM}{a^3} > 0.$$

Un desplazamiento pequeño positivo produce campo positivo y aleja aún más del origen; uno negativo se amplifica hacia la otra fuente. En cambio, del ejercicio 3 se obtiene $g_y'(0) = -2GM/a^3 < 0$. Un desplazamiento transversal pequeño produce una fuerza restauradora. La dirección z tiene el mismo comportamiento que y por simetría.

El origen es un equilibrio exacto, pero no estable en el espacio: una perturbación a lo largo de x crece bajo la dinámica linealizada $\ddot x = (4GM/a^3)x$. La forma exponencial de sus soluciones describe esa separación inicial. La fórmula exacta de g_x conserva el signo de x en $(-a, a)$: una partícula soltada ligeramente a la derecha sigue acelerando hacia la fuente derecha, en lugar de regresar al origen. El campo cero no basta para concluir estabilidad; hay que estudiar cómo cambia alrededor del punto.

18. Medir una masa con intervalos

La función $\mu = g_0 R^2$ es creciente en $g_0 > 0$, por lo que

$$\mu \in [3{,}5928,\, 3{,}6072] \times 10^{14}\,\mathrm{m^3/s^2}.$$

Para $M = \mu/G$, la cota inferior combina el menor numerador con el mayor denominador y la superior hace lo contrario. Resulta

$$M \in \left[\frac{3{,}5928\times 10^{14}}{6{,}68\times 10^{-11}}, \frac{3{,}6072\times 10^{14}}{6{,}66\times 10^{-11}}\right]\mathrm{kg} \subset [5{,}3784, 5{,}4163]\times 10^{24}\,\mathrm{kg}.$$

El último intervalo se redondea hacia afuera para conservar la garantía. No hemos supuesto distribuciones gaussianas ni independencia estadística: se propagan cotas positivas y monotonía.

A $1{,}10R$, la predicción queda en el intervalo

$$g \in [9{,}98/1{,}21, 10{,}02/1{,}21]\,\mathrm{m/s^2}.$$

Al redondear sus extremos hacia afuera se obtiene $[8{,}2479, 8{,}2810]\,\mathrm{m/s^2}$. Ese intervalo queda dentro de $[8{,}24, 8{,}30]$, así que los datos son compatibles. La incertidumbre de G afecta la masa inferida, pero se cancela de esta predicción cuando se usa el mismo parámetro μ ajustado superficialmente.

19. Comprobar una fuente fija

Tomemos x desde la masa mayor hacia la menor. Inicialmente $a_m = -GM/r^2$ y $a_M = +Gm/r^2 = +0{,}10GM/r^2$. La separación $r = x_m - x_M$ tiene entonces aceleración $\ddot{r} = a_m - a_M = -G(M+m)/r^2 = -1{,}10GM/r^2$.

La fuente inmóvil daría magnitud GM/r^2. Respecto de la magnitud relativa exacta, el error es $0{,}10/1{,}10 = 1/11 \approx 9{,}09\%$. El porcentaje $m/M = 10\%$ compara las aceleraciones de los cuerpos y también el término omitido con el retenido; no es el mismo denominador que el solicitado para el error.

Si un soporte externo inmoviliza físicamente M, ejerce sobre ella una fuerza que compensa su atracción hacia m. El par de masas deja de estar aislado y su momento lineal puede cambiar por esa fuerza externa. Suponer una fuente casi fija como aproximación de un sistema aislado y sujetarla mediante un aparato son idealizaciones distintas que requieren balances diferentes.

20. Una inferencia que no reconstruye el interior

El dato exterior da $\mu = g_2(2R)^2 = 4g_2R^2$. A $3R$, la predicción es $g_3 = \mu/(9R^2) = 4g_2/9$. Ambos modelos esféricos comparten esa predicción y todo el campo exterior, pues tienen la misma masa total.

En la esfera homogénea, a $r = R/2$ la magnitud interior vale $GM/(2R^2)$ y el campo apunta hacia el centro. Su potencial es $-11GM/(8R)$. En el cascarón, el campo allí es cero y el potencial $-GM/R$. Son resultados distintos aun cuando el observador exterior no pueda diferenciarlos.

Una medición de aceleración inicial en un punto interior, en una idealización que permita acceder sin modificar apreciablemente las fuentes, distinguiría esos modelos. También lo haría una medida de diferencia de potencial entre dos radios interiores. El dato exterior identifica μ, y una medida independiente de G permite inferir M; no identifica la densidad interna. La respuesta inversa debe conservar esa falta de unicidad en lugar de presentar una distribución supuesta como si hubiera sido medida.

Lecturas y conexiones

Sears y Zemansky, *Física universitaria*, volumen 1, capítulo 13, permite contrastar la ley de gravitación, el potencial y la demostración para distribuciones esféricas. Serway y Jewett, *Física para ciencias e ingeniería*, volumen 1, §§13.1–13.3 y 13.5–13.6, organiza la entrada al concepto de campo y su uso energético. Las integrales y los problemas de este capítulo se han construido con convenciones de signo y procedimientos de medición explícitos.

En Spivak, *Physics for Mathematicians. Mechanics I*, el addendum 1B distingue peso y masa y examina la proporcionalidad que permite identificar aceleración gravitatoria con fuerza por unidad de masa; el capítulo 3 relaciona fuerzas centrales, trabajo y conservación de energía. La reducción completa de dos cuerpos se desarrollará en el capítulo siguiente. Allí la fuente dejará de fijarse por aproximación y habrá que reconstruir el movimiento de ambos cuerpos a partir de la interacción.

Capítulo 15

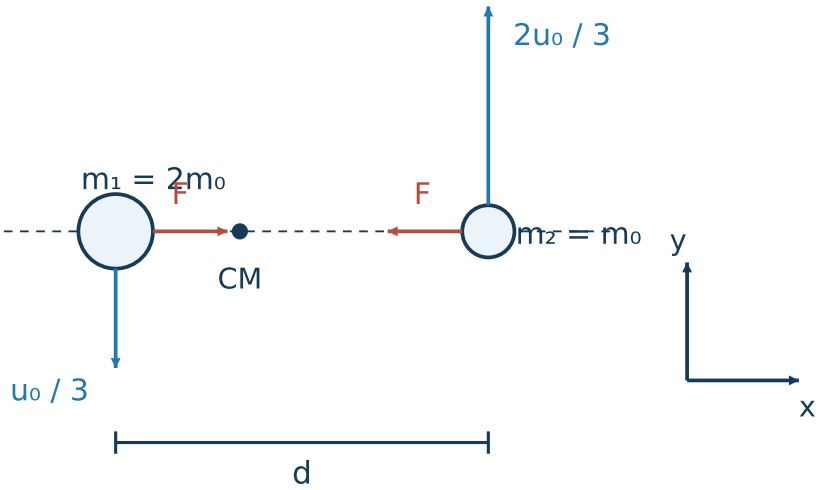
Dos cuerpos y fuerzas centrales

Dos cuerpos de masas $m_1 = 2m_0$ y $m_2 = m_0$ se encuentran separados por una distancia d. Ambos pueden moverse y se atraen gravitatoriamente. En cierto instante están en $\mathbf{x}_1 = -(d/3)\mathbf{e}_x$ y $\mathbf{x}_2 = (2d/3)\mathbf{e}_x$, con velocidades $\mathbf{v}_1 = -(u_0/3)\mathbf{e}_y$ y $\mathbf{v}_2 = (2u_0/3)\mathbf{e}_y$, donde $u_0 = \sqrt{3Gm_0/d}$. Queremos averiguar si conservarán su separación y qué trayectoria describirá cada uno. La posibilidad de que el cuerpo mayor se mueva interviene en la respuesta desde el comienzo.

El sistema consta de los dos cuerpos. Usamos un marco inercial y despreciamos fuerzas externas. Los modelamos como partículas de masas constantes y positivas, separadas mientras el modelo sea aplicable. Para cuerpos esféricos de radios finitos, la interacción gravitatoria puntual reproduce la fuerza mutua mientras permanezcan separados y con distribuciones esféricas preservadas; una aproximación que ignore deformaciones y mareas exige además comprobar su relevancia. En el problema inicial trabajaremos directamente con las partículas ideales.

Las fuerzas mutuas tienen igual magnitud, pero producen aceleraciones distintas. La masa mayor acelera hacia la menor y la menor hacia la mayor. Podemos aprovechar esa relación para describir por separado el traslado del sistema entero y el cambio de su configuración. El centro de masa, construido en el capítulo 9, proporciona la primera variable; el vector que une los cuerpos proporciona la segunda.

Dos cuerpos que comparten el movimiento



Velocidades azules; fuerzas rojas. Las fuerzas tienen igual magnitud.

Figura 15.1. Estado inicial en el plano xy. El centro de masa está en reposo en el origen. Las flechas de velocidad tienen longitudes en razón dos; las fuerzas gravitatorias tienen igual magnitud y sentidos opuestos sobre la línea que une los cuerpos.

Elegir variables que permitan recuperar los dos movimientos

Para masas generales $m_1, m_2 > 0$, escribamos $M = m_1 + m_2$ y definamos

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{x}_1 + m_2\mathbf{x}_2}{M}, \qquad \mathbf{r} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, \qquad r = \|\mathbf{r}\|.$$

La orientación elegida para $\mathbf{r}$ fija todos los signos posteriores: apunta del cuerpo 1 al cuerpo 2. Resolver estas dos ecuaciones lineales permite reconstruir las posiciones:

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{R} - \frac{m_2}{M}\mathbf{r}, \qquad \mathbf{x}_2 = \mathbf{R} + \frac{m_1}{M}\mathbf{r}.$$

Las velocidades se recuperan derivando, con $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}}$ y $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{r}}$. Conocer sólo $\mathbf{r}(t)$ deja pendiente el movimiento del centro de masa; para obtener las trayectorias en el laboratorio necesitaremos también $\mathbf{R}(0)$ y $\mathbf{V}(0)$.

Definición. La masa reducida del par es $m_{\mathrm{r}} = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$. Satisface $1/m_{\mathrm{r}} = 1/m_1 + 1/m_2$ y es positiva. Es el coeficiente inercial que acompañará la aceleración del vector relativo y la energía cinética de ese movimiento.

La unidad de m_{r} es el kilogramo. Para masas iguales m, vale $m/2$; cuando m_2 es muy pequeña frente a m_1, se aproxima a m_2. La masa reducida se obtiene al cambiar de variables en las ecuaciones del par. La masa total sigue siendo M, y el momento lineal total sigue siendo $M\mathbf{V}$.

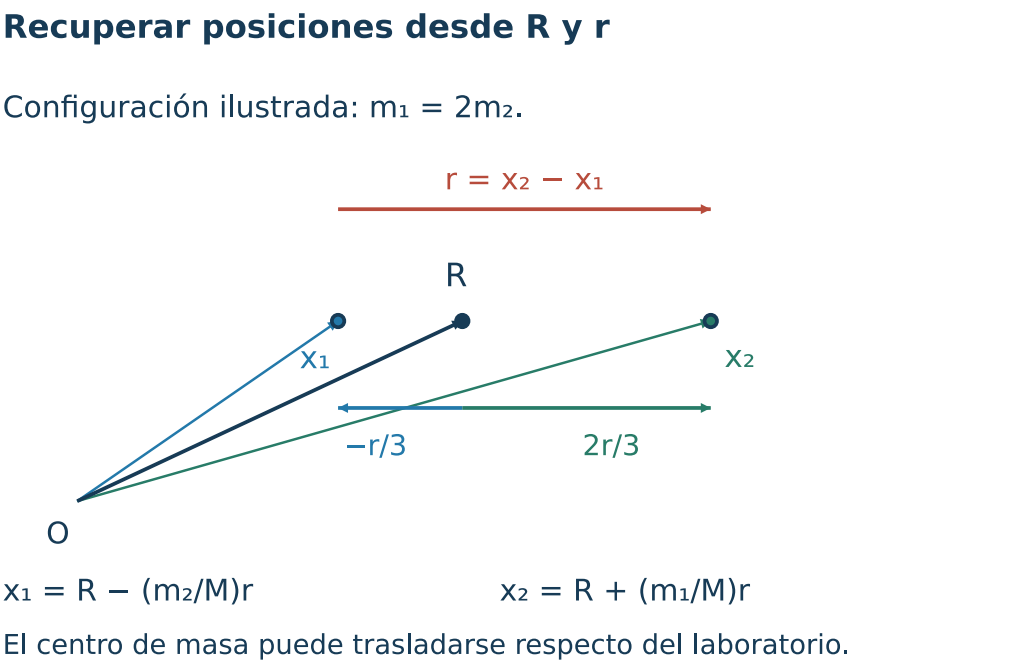


Figura 15.2. El dibujo muestra una configuración instantánea para $m_1 = 2m_2$. La razón entre las distancias al centro de masa es inversa a la razón de masas. El origen del laboratorio puede elegirse fuera del centro de masa.

Reducir las ecuaciones sin inmovilizar una masa

Para una interacción que sólo dependa de la configuración relativa, sea $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ la fuerza del cuerpo 1 sobre el 2. La tercera ley da la fuerza opuesta sobre el cuerpo 1. Las ecuaciones son

$$m_1\ddot{\mathbf{x}}_1 = -\mathbf{F}(\mathbf{r}), \qquad m_2\ddot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{F}(\mathbf{r}).$$

Sumarlas describe el centro de masa. Restar las aceleraciones describe la separación. Esta elección utiliza a la vez la igualdad de fuerzas y la diferencia entre sus efectos inerciales.

Proposición. Para dos partículas aisladas con fuerzas mutuas opuestas $\pm\mathbf{F}(\mathbf{r})$, las ecuaciones equivalen a

$$\ddot{\mathbf{R}} = 0, \qquad m_{\mathrm{r}}\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}).$$

La energía cinética se descompone como

$$K = \frac{1}{2}M\|\mathbf{V}\|^2 + \frac{1}{2}m_{\mathrm{r}}\|\mathbf{u}\|^2.$$

Demostración. La suma de los dos balances de fuerza da $M\ddot{\mathbf{R}} = 0$. La resta de aceleraciones da $\ddot{\mathbf{r}} = (1/m_2 + 1/m_1)\mathbf{F} = \mathbf{F}/m_{\mathrm{r}}$. En sentido inverso, derivar dos veces las fórmulas de reconstrucción y sustituir las ecuaciones reducidas recupera los dos balances originales, pues $m_1 m_2/M = m_{\mathrm{r}}$. Para la energía, sustituimos $\mathbf{v}_1 = \mathbf{V} - (m_2/M)\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}_2 = \mathbf{V} + (m_1/M)\mathbf{u}$ en la suma de energías cinéticas. Los términos cruzados tienen coeficientes opuestos y se cancelan; el coeficiente de $\|\mathbf{u}\|^2/2$ queda $m_1 m_2^2/M^2 + m_2 m_1^2/M^2 = m_{\mathrm{r}}$.

La reducción es exacta dentro de las hipótesis del modelo. El centro de masa sigue $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}(0) + t\mathbf{V}(0)$ y el problema restante tiene la forma de una partícula efectiva de masa m_{r} situada en $\mathbf{r}$. Su posición representa una separación entre cuerpos; sus distancias al origen se traducen después a las distancias físicas mediante los factores de masa.

Para gravitación, $\mathbf{F} = -Gm_1 m_2\mathbf{r}/r^3$. Conviene distinguir dos constantes:

$$k = Gm_1 m_2, \qquad \kappa = G(m_1 + m_2) = \frac{k}{m_{\mathrm{r}}}.$$

La primera interviene en la energía de interacción $U = -k/r$ y tiene unidades J m. Esta energía corresponde al par y se cuenta una sola vez; sumar $m_1\Phi_2$ y $m_2\Phi_1$ contabilizaría dos veces la misma interacción. La segunda interviene en la aceleración relativa $\ddot{\mathbf{r}} = -\kappa\mathbf{r}/r^3$ y tiene unidades $\mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2$. Esta notación mantiene separadas la masa reducida y el parámetro gravitatorio usado en el capítulo anterior.

Cuando $m_2/m_1 = q \ll 1$, sustituir $G(m_1 + m_2)$ por Gm_1 omite una fracción $q/(1+q)$ de la aceleración relativa exacta a la misma separación. La tolerancia requerida permite decidir si esa simplificación sirve. El movimiento reducido ofrece también una solución para masas comparables, donde el retroceso de la fuente forma parte visible del fenómeno.

Las conservaciones que hacen plano el movimiento relativo

La dirección de una fuerza y su dependencia de la posición desempeñan funciones distintas. Para conservar momento angular basta que la fuerza tenga dirección radial; para construir el potencial que usaremos a continuación necesitamos además una dependencia radial estacionaria.

Definición. En este capítulo, una interacción central conservativa se especifica mediante una energía potencial radial estacionaria $U(r)$, función de la distancia $r > 0$. La fuerza sobre el cuerpo 2 es $\mathbf{F} = -U'(r)\mathbf{e}_r$, con $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$. Supondremos U de clase C^2 en el intervalo de radios estudiado.

La hipótesis permite tanto atracción como repulsión: el signo de U' determina el sentido de la fuerza. En gravitación $U = -k/r$ da $U' = k/r^2 > 0$ y fuerza entrante. Un potencial creciente cuadráticamente, como $U = cr^2/2$ con $c > 0$, también produce atracción hacia la separación cero, aunque con otra dependencia de la distancia.

Proposición. Bajo una interacción central conservativa se conservan el momento angular relativo $\mathbf{L} = m_{\mathrm{r}}\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ y la energía relativa $E = m_{\mathrm{r}}\|\dot{\mathbf{r}}\|^2/2 + U(r)$. Si $\mathbf{L} \neq 0$, el movimiento relativo está contenido en el plano fijo perpendicular a $\mathbf{L}$ que pasa por el origen relativo.

Demostración. Al derivar $\mathbf{L}$, el producto de $\dot{\mathbf{r}}$ consigo misma es cero y queda $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Como la fuerza es paralela a $\mathbf{r}$, ese torque se anula. Para la energía, $\dot{r} = \mathbf{e}_r \cdot \dot{\mathbf{r}}$, de modo que

$$\frac{dE}{dt} = m_{\mathrm{r}}\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} + U'(r)\dot{r} = \dot{\mathbf{r}} \cdot [-U'(r)\mathbf{e}_r] + U'(r)\dot{r} = 0.$$

Por la definición del producto vectorial, $\mathbf{r} \cdot \mathbf{L} = 0$ en todo instante. Al ser $\mathbf{L}$ un vector constante no nulo, esta igualdad identifica un único plano fijo. Las velocidades relativas también pertenecen a ese plano, porque se obtiene la misma ortogonalidad al derivar la igualdad.

En el marco del centro de masa las dos posiciones son múltiplos opuestos de $\mathbf{r}$, así que ambas trayectorias están en ese mismo plano. En un laboratorio donde $\mathbf{V} \neq 0$ hay que añadir la traslación uniforme del centro; una componente de $\mathbf{V}$ perpendicular al plano modifica la geometría espacial de las trayectorias del laboratorio. La reconstrucción permite reconocer qué plano y qué marco se están describiendo.

La energía total del sistema es $E_{\mathrm{tot}} = M\|\mathbf{V}\|^2/2 + E$. El momento angular respecto de un origen fijo se separa como $\mathbf{L}_O = \mathbf{R} \times M\mathbf{V} + \mathbf{L}$, en acuerdo con el capítulo 12. Las cantidades relativas se conservan al cambiar de marco mediante una traslación galileana uniforme: las dos velocidades adquieren el mismo incremento y su diferencia queda igual.

Para $\mathbf{L} = 0$, los vectores de posición y velocidad relativa son paralelos mientras $r > 0$. La solución permanece en la recta inicial por la forma radial de la ecuación. Su evolución puede alcanzar una colisión; el modelo puntual singular necesita un tratamiento distinto a partir de ese extremo.

Separar el cambio de distancia y el barrido angular

Elijamos una orientación en el plano del movimiento y escribamos $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$, con $\mathbf{e}_r = (\cos\theta, \sin\theta)$ y $\mathbf{e}_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta)$. Derivar esas componentes da $\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$ y $\dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta}\mathbf{e}_r$. Por ello,

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta, \qquad \ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta.$$

La aceleración radial física es la componente $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$. La derivada segunda de la distancia es $\ddot{r}$. El término de curvatura relaciona ambas y será decisivo al estudiar un radio constante.

Sea L la componente firmada de $\mathbf{L}$ sobre la normal elegida. Se tiene $L = m_{\mathrm{r}} r^2 \dot{\theta}$. Para $L \neq 0$, el ángulo avanza siempre en el mismo sentido mientras la solución tenga radio positivo. Un elemento de área orientada barrida por el vector relativo es $dA = r^2 d\theta/2$, así que $\dot{A} = L/(2m_{\mathrm{r}})$. El área se barre uniformemente aunque cambien la distancia y la velocidad angular.

Un plano para el movimiento relativo

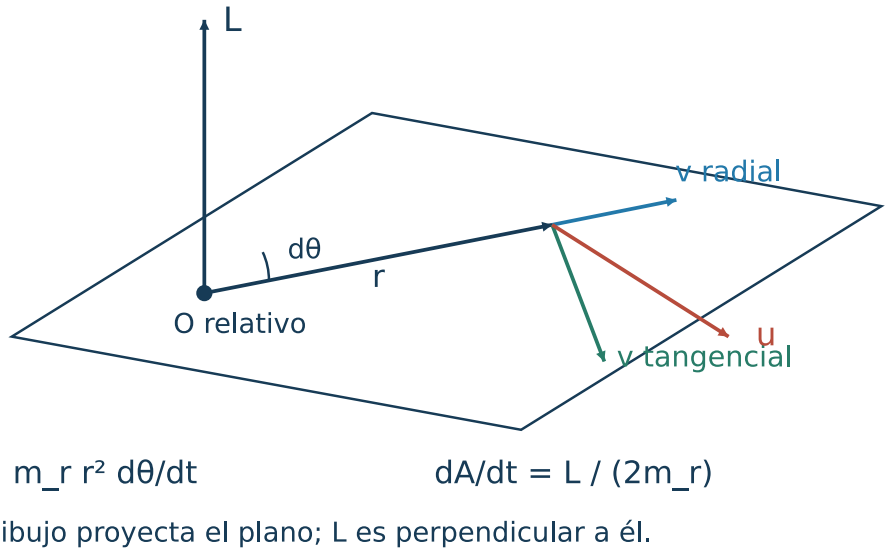


Figura 15.3. El momento angular es perpendicular al plano. La velocidad tangencial es $r\dot\theta$ y la rapidez radial es $|\dot r|$. La ley de áreas se refiere al vector relativo; las áreas de las trayectorias baricéntricas incluyen además los cuadrados de sus factores de escala.

La energía relativa puede escribirse como

$$E = \frac{1}{2} m_{\mathrm{r}} \dot r^2 + \frac{L^2}{2 m_{\mathrm{r}} r^2} + U(r).$$

El segundo término procede de la energía cinética tangencial. Al fijar el valor conservado de L, se vuelve una función del radio que podemos reunir con U. Esta reorganización permite estudiar radios accesibles y retornos con las herramientas de potencial del capítulo 8.

Definición. Para un momento angular fijo L, el potencial efectivo radial es $W_L(r) = U(r) + L^2/(2m_{\mathrm{r}} r^2)$, definido para $r > 0$ en el dominio de U. El término positivo añadido conserva la contribución cinética tangencial al reducir la descripción a la distancia.

Proposición. El movimiento radial satisface

$$m_{\mathrm{r}} \ddot r = -W_L'(r), \qquad \frac{1}{2} m_{\mathrm{r}} \dot r^2 + W_L(r) = E.$$

En particular, todo radio visitado cumple $W_L(r) \le E$. Cuando $E > W_L(r)$, la magnitud de la velocidad radial es $\sqrt{2(E - W_L(r))/m_{\mathrm{r}}}$.

Demostración. La componente radial de la ecuación vectorial es $m_{\mathrm{r}}(\ddot r - r\dot\theta^2) = -U'(r)$. Sustituir $\dot\theta = L/(m_{\mathrm{r}} r^2)$ proporciona $m_{\mathrm{r}} \ddot r = -U'(r) + L^2/(m_{\mathrm{r}} r^3) = -W_L'(r)$. La identidad energética se obtiene de la separación de velocidades, cuyas componentes son ortogonales. La energía cinética radial es no negativa, lo que da la desigualdad; despejar su cuadrado da la magnitud indicada.

La ecuación radial conserva validez también cuando $\dot r = 0$, porque se obtuvo directamente del balance vectorial. Derivar la energía y dividir por $\dot r$ sólo justificaría el resultado en los tramos donde esa velocidad es distinta de cero. Esta precaución permite incluir tanto retornos como órbitas circulares.

En un tramo de radio monótono podemos reconstruir el tiempo mediante

$$dt = \frac{dr}{\sigma\sqrt{2(E - W_L(r))/m_{\mathrm{r}}}}, \qquad \sigma = \operatorname{sgn}(\dot r).$$

El ángulo se obtiene integrando $\dot\theta = L/(m_{\mathrm{r}} r^2)$ sobre ese mismo movimiento. También se puede combinar esta igualdad con la anterior para integrar $d\theta/dr$. El signo σ cambia al pasar un retorno simple. La ecuación de energía proporciona rapidez y región accesible; el estado inicial completa el sentido de marcha y el origen del tiempo.

Construir el potencial efectivo gravitatorio

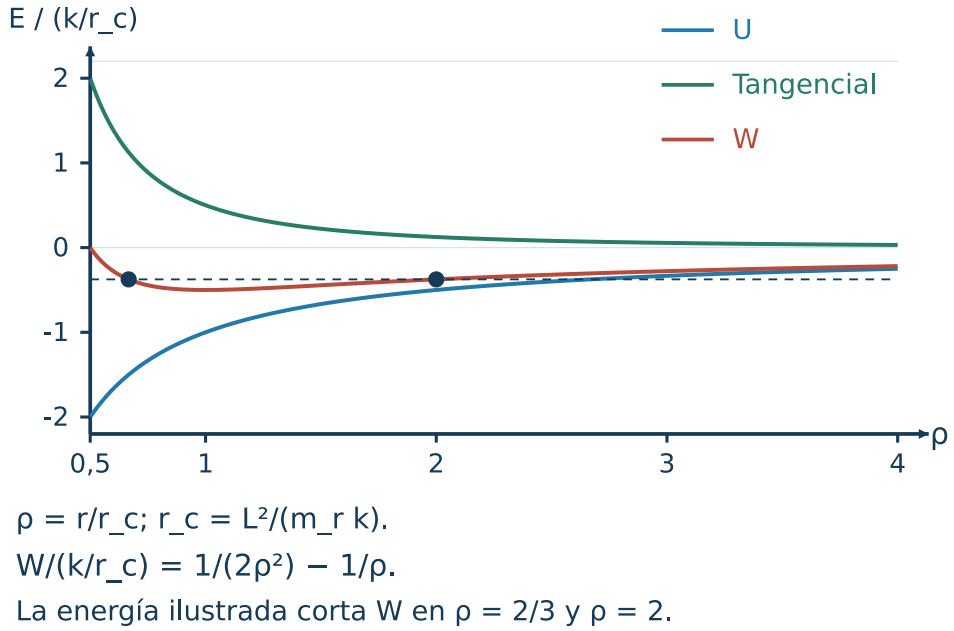


Figura 15.4. Con $r_c = L^2/(m_{\mathrm{r}}k)$ y $\rho = r/r_c$, se usa la escala de energía k/r_c. La suma es $W_L/(k/r_c) = 1/(2\rho^2) - 1/\rho$. La recta negativa ilustrada corta la curva en dos radios de retorno.

Resolver un estado gravitatorio antes de clasificar toda la órbita

Consideremos un ejemplo reducido con $m_{\mathrm{r}} = 1\,\mathrm{kg}$, $k = 4\,\mathrm{J\,m}$ y $L = 2\,\mathrm{kg\,m^2/s}$. Son parámetros de una interacción ideal $U = -k/r$; para interpretarlos gravitatoriamente las masas originales deben satisfacer $k = Gm_1m_2$. La escala de radios $r_c = L^2/(m_{\mathrm{r}}k)$ vale un metro y la de energía k/r_c vale cuatro joules.

Si $E = -1{,}5\,\mathrm{J}$, los radios donde se anula $\dot r$ satisfacen $Er^2 + kr - L^2/(2m_{\mathrm{r}}) = 0$. Escribiendo $q = r/(1\,\mathrm{m})$, la ecuación es $1{,}5q^2 - 4q + 2 = 0$ y sus raíces son $q = 2/3$ y $q = 2$. El movimiento queda entre $2/3$ y dos metros. Para saber si en un instante se está acercando o alejando hace falta el signo inicial de $\dot r$.

En el radio interior la velocidad relativa todavía tiene componente tangencial de tres metros por segundo. En el exterior esa componente vale un metro por segundo. El retorno cambia el sentido de evolución de la distancia, mientras el vector relativo sigue girando. La condición $\dot r = 0$ equivale a distancia instantáneamente estacionaria y deja libre la componente tangencial.

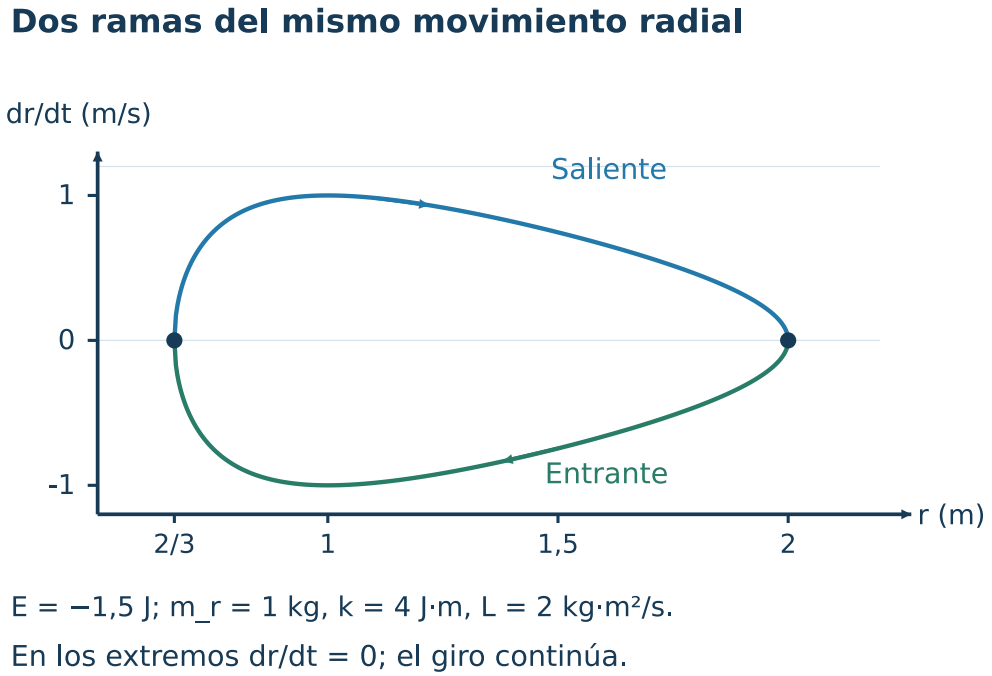


Figura 15.5. Curva de energía para el ejemplo $E = -1{,}5\,\mathrm{J}$. Los extremos tienen velocidad radial cero y velocidad tangencial no nula. Este retrato usa las coordenadas $(r, \dot r)$; la forma de la trayectoria espacial requiere recuperar también $\theta(t)$.

Proposición. Para $U(r) = -k/r$, con $k > 0$ y $L \neq 0$, el potencial efectivo tiene un único mínimo en

$$r_c = \frac{L^2}{m_{\mathrm{r}} k}, \qquad E_{\mín} = -\frac{m_{\mathrm{r}} k^2}{2L^2}.$$

Si $E_{\mín} < E < 0$, el radio queda entre dos raíces positivas $r_- < r_+$. Si $E = E_{\mín}$, el movimiento tiene radio constante r_c. Si $E \geq 0$, existe un radio mínimo positivo y la rama saliente alcanza radios arbitrariamente grandes. Los valores $E < E_{\mín}$ son incompatibles con ese momento angular.

Demostración. La derivada es $W_L' = k/r^2 - L^2/(m_{\mathrm{r}} r^3) = (kr - L^2/m_{\mathrm{r}})/r^3$. Es negativa antes de r_c y positiva después, lo que da el único mínimo y su valor. El potencial tiende a $+\infty$ cuando $r \to 0$ y a cero por valores negativos cuando $r \to \infty$. Para energías comprendidas estrictamente entre el mínimo y cero, la recta de energía corta una vez cada rama y la desigualdad $W_L \leq E$ selecciona el intervalo entre los cortes. En el mínimo sólo queda el radio r_c, que satisface además la ecuación radial con $\dot r = 0$. Para $E \geq 0$ hay un solo corte en la rama decreciente y el conjunto permitido se extiende desde él hasta radios arbitrariamente grandes. Más allá del corte, la velocidad radial de la rama saliente es positiva y su integral temporal permite alcanzar cualquier radio finito. Por debajo del mínimo no existe radio que cumpla la desigualdad energética.

Cuando $E < 0$, las raíces del caso no circular pueden escribirse

$$r_\pm = \frac{k \pm \sqrt{k^2 + 2EL^2/m_{\mathrm{r}}}}{-2E}.$$

El discriminante positivo y menor que k^2 garantiza dos numeradores positivos. En un retorno simple la integral de tiempo tiene una singularidad proporcional a $1/\sqrt{|r - r_\pm|}$, que es integrable. La distancia alcanza el extremo en tiempo finito y la ecuación radial determina su cambio de sentido. La clasificación en radios todavía deja pendiente demostrar

la forma geométrica completa de las órbitas y su parametrización temporal, tarea del capítulo siguiente.

La barrera que impide alcanzar $r = 0$ se ha demostrado para el potencial gravitatorio con $L \neq 0$. En un potencial más singular, la contribución de U puede dominar el término tangencial y modificar ese límite. Esa comparación de órdenes será parte de la prueba de alcance de los ejercicios.

Mantener un radio y examinar sus perturbaciones

Una órbita circular necesita que la distancia y su velocidad radial inicial permitan mantener $r = r_c$. La componente radial física de la aceleración sigue siendo entrante, $-r_c\dot{\theta}^2$, aunque $\ddot{r} = 0$. La ecuación del potencial efectivo impone $W_L'(r_c) = 0$, equivalente a $U'(r_c) = L^2/(m_{\mathrm{r}} r_c^3)$.

Proposición. Supongamos $L \neq 0$ y $W_L'(r_c) = 0$ en un radio interior de su dominio. El estado $r = r_c$, $\dot{r} = 0$ produce una órbita circular, con velocidad angular $\Omega = L/(m_{\mathrm{r}} r_c^2)$. Si $W_L''(r_c) > 0$, el movimiento radial es estable frente a pequeñas perturbaciones de $(r, \dot{r})$ a momento angular fijo y su linealización tiene frecuencia $\omega_r = \sqrt{W_L''(r_c)/m_{\mathrm{r}}}$. Si $W_L''(r_c) < 0$, el equilibrio radial es inestable. El caso $W_L''(r_c) = 0$ requiere examinar términos adicionales o la ecuación exacta.

Demostración. La ecuación radial admite la solución constante r_c y la relación angular da $\theta(t) = \theta(0) + \Omega t$. Para una perturbación $\xi = r - r_c$, la diferenciabilidad de W_L' da $m_{\mathrm{r}}\ddot{\xi} = -W_L''(r_c)\xi + o(\xi)$; conservar la parte lineal produce el oscilador de frecuencia indicada cuando la segunda derivada es positiva. Esa condición hace de r_c un mínimo estricto local. Para cualquier vecindad radial pequeña se pueden elegir dos bordes con potencial mayor que $W_L(r_c)$; estados iniciales suficientemente próximos tienen energía menor que ambos valores, quedan entre esos bordes y mantienen pequeña la energía cinética radial. Así se obtiene la estabilidad radial exacta. Si la segunda derivada es negativa, el potencial tiene un máximo estricto y la fuerza efectiva apunta alejándose de r_c a ambos lados cercanos. Una perturbación de posición liberada del reposo se aparta; la ecuación lineal muestra el crecimiento exponencial inicial. Una segunda derivada nula no fija ninguna de estas formas locales.

En gravitación, sustituir el radio circular en la segunda derivada da $W_L''(r_c) = k/r_c^3$. Por tanto $\omega_r = \sqrt{k/(m_{\mathrm{r}} r_c^3)}$ y $|\Omega|$ tiene ese mismo valor. La coincidencia es una propiedad de esta interacción. Otras leyes centrales producen otra relación entre la frecuencia radial pequeña y el giro.

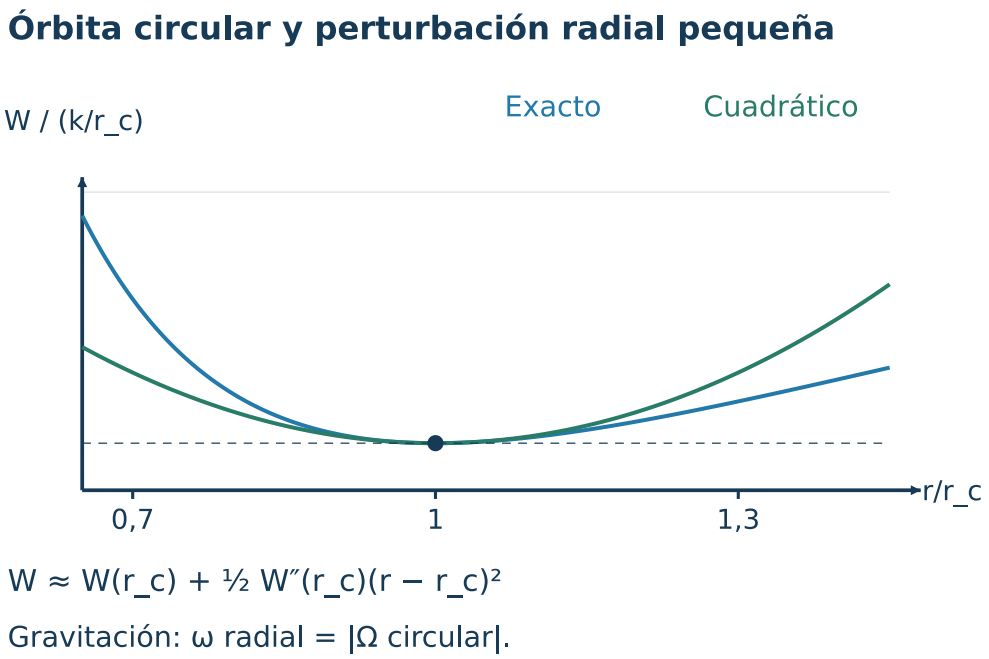


Figura 15.6. La aproximación cuadrática describe perturbaciones radiales pequeñas alrededor de r_c. La estabilidad considerada fija L y controla la distancia y su velocidad radial; una diferencia de fase angular puede acumularse al comparar dos movimientos.

Para las masas iniciales, $M = 3m_0$ y $m_{\mathrm{r}} = 2m_0/3$. La separación inicial es $r = d$, con velocidad radial cero y rapidez relativa $u_0 = \sqrt{3Gm_0/d}$. La aceleración relativa requerida por un círculo es $u_0^2/d = 3Gm_0/d^2$, exactamente la que proporciona la gravitación del par. Así,

$$\Omega^2 = \frac{3Gm_0}{d^3}, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{d^3}{3Gm_0}}.$$

Ambos cuerpos giran alrededor de su centro de masa, con radios $d/3$ y $2d/3$ y el mismo período. Sus velocidades tienen razón dos, en acuerdo con los datos. La energía relativa es $E = -k/(2d) = -Gm_0^2/d$. Esta reconstrucción responde al problema inicial y muestra qué información concreta conserva el movimiento efectivo.

Comprobar qué hipótesis sostiene cada conservación

En una interacción central que dependa del tiempo, el torque relativo sigue siendo cero, mientras la energía puede cambiar por la dependencia temporal del potencial. Una fuerza tangencial adicional cambia también L. En ese caso el término $L^2/(2m_{\mathrm{r}}r^2)$ deja de tener un parámetro constante durante la evolución; la reducción a un potencial radial estacionario debe sustituirse por los balances con torque y potencia.

La estabilidad tampoco se decide únicamente por la atracción. Para $U = -a/r^s$, con $a > 0$ y $s > 0$, la condición circular es $L^2 = m_{\mathrm{r}} a s\, r_c^{2-s}$. Al evaluar la curvatura se obtiene $W_L''(r_c) = as(2-s)/r_c^{s+2}$. La frontera $s = 2$ separa mínimos y máximos y exige un examen propio. Los ejercicios permitirán reconstruir este cálculo y explorar su caso degenerado.

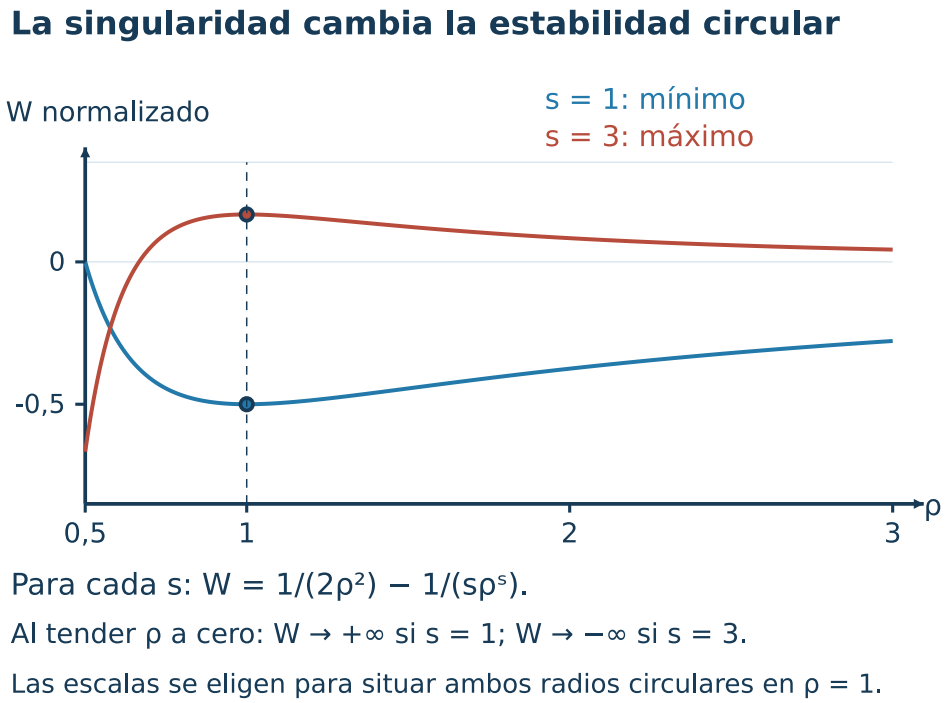


Figura 15.7. Para cada exponente se eligen escalas que sitúan el radio circular en $\rho = 1$, y se representa $1/(2\rho^2) - 1/(s\rho^s)$. El caso $s = 1$ tiene un mínimo; $s = 3$ tiene un máximo. La atracción central por sí sola deja abierta la pregunta por la estabilidad.

Ejercicios

Los datos numéricos de los problemas reducidos son parámetros ideales de su ley de fuerza. Se usará $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3/(kg\,s^2)}$ cuando se pidan masas gravitatorias. En los ejercicios 8–13, 16 y 18 se emplearán $m_\mathrm{r} = 1\,\mathrm{kg}$, $k = 4\,\mathrm{J\,m}$ y, salvo indicación contraria, $L = 2\,\mathrm{kg\,m^2/s}$, con $U = -k/r$. Las coordenadas y velocidades se miden en un marco inercial.

1. Reconocer el estado relativo

Dos partículas de masas $2\,\mathrm{kg}$ y $3\,\mathrm{kg}$ tienen posiciones $(-3, 0)\,\mathrm{m}$ y $(2, 0)\,\mathrm{m}$, y velocidades $(0, -3)\,\mathrm{m/s}$ y $(0, 2)\,\mathrm{m/s}$, respectivamente. Halle centro de masa, velocidad del centro, masa reducida, posición y velocidad relativas. Compruebe la energía cinética y el momento angular interno.

2. Volver al laboratorio

Para $m_1 = 2\,\mathrm{kg}$ y $m_2 = 1\,\mathrm{kg}$ se conocen $\mathbf{R} = (1, -2)\,\mathrm{m}$, $\mathbf{r} = (3, 0)\,\mathrm{m}$, $\mathbf{V} = (0{,}5, 1)\,\mathrm{m/s}$ y $\mathbf{u} = (0, 3)\,\mathrm{m/s}$. Reconstruya las posiciones y velocidades individuales. Calcule momento lineal, energía cinética y momento angular respecto del origen y compruebe sus descomposiciones.

3. La fuerza mutua y la aceleración de separación

Dos masas $m_1 = 2\,\mathrm{kg}$ y $m_2 = 6\,\mathrm{kg}$, situadas sobre el eje x con el cuerpo 2 a la derecha, se atraen con una fuerza de magnitud $12\,\mathrm{N}$ en el instante considerado. Halle ambas aceleraciones y la aceleración relativa. Compruebe el coeficiente inercial que multiplica esta última.

4. Una tolerancia para la fuente fija

Para dos masas gravitatorias con razón $q = m_2/m_1$, deduzca el error relativo de sustituir $G(m_1 + m_2)$ por Gm_1, usando la aceleración relativa exacta como referencia. Encuentre la condición sobre q para que el error no supere 1%. Evalúe el error si $q = 0{,}20$.

5. Resolver el par inicial

Justifique directamente, mediante las aceleraciones de ambos cuerpos, la solución circular del problema de apertura. Calcule los radios baricéntricos, las rapideces, el período y las energías cinéticas individuales. Verifique la energía de interacción y la energía relativa total.

6. Cambiar de marco sin cambiar el problema relativo

Al estado del ejercicio 1 se añade la misma velocidad $(4, 0)\,\mathrm{m/s}$ a ambos cuerpos, manteniendo sus posiciones instantáneas. Calcule el nuevo momento lineal y la nueva energía cinética total. Examine qué ocurre con $\mathbf{r}$, $\mathbf{u}$, el momento angular interno y la energía relativa para un potencial que dependa sólo de r.

7. Velocidad angular y área barrida

Un movimiento central tiene $L/m_{\mathrm{r}} = 6\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$. Halle la velocidad angular y la rapidez tangencial cuando $r = 2\,\mathrm{m}$ y cuando $r = 4\,\mathrm{m}$. Calcule la velocidad de barrido de área. Explique qué datos siguen faltando para conocer la velocidad radial en cada posición.

8. Radios permitidos por una energía

Para los parámetros reducidos de referencia y $E = -1{,}5\,\mathrm{J}$, halle el radio circular asociado a L, la energía mínima y los radios de retorno. Encuentre la magnitud de la velocidad radial a $r = 1\,\mathrm{m}$ y las dos ramas de movimiento posibles allí.

9. Qué cambia al llegar a un retorno

En el movimiento del ejercicio 8, calcule la rapidez tangencial y la aceleración de la distancia $\ddot{r}$ en ambos radios de retorno. Compare esta aceleración con la componente radial física de $\ddot{\mathbf{r}}$. Indique cuál extremo es un mínimo de distancia y cuál un máximo.

10. Una aceleración radial de distancia momentáneamente nula

Una partícula efectiva de referencia pasa por $r = 1\,\mathrm{m}$ con $\dot{r} = 1\,\mathrm{m/s}$ y rapidez tangencial $2\,\mathrm{m/s}$. Halle L, E, $\ddot{r}$ y la componente radial física de aceleración. Decida si describe una órbita circular. Compare con el estado de igual posición y velocidad tangencial pero $\dot{r} = 0$.

11. Energías de escape con momento angular

Para los parámetros de referencia, halle el radio mínimo permitido cuando $E = 0$ y cuando $E = 2\,\mathrm{J}$. Determine la rapidez relativa asintótica en cada caso. Examine si una rama saliente puede alcanzar el infinito en tiempo finito.

12. Llegar al centro con momento angular nulo

Tome ahora $L = 0$, conservando $m_{\mathrm{r}} = 1\,\mathrm{kg}$ y $k = 4\,\mathrm{J\,m}$. Se libera la partícula efectiva del reposo a $r_0 = 2\,\mathrm{m}$. Halle la rapidez en función del radio y el tiempo hasta la colisión puntual. Puede usar $r = r_0 \cos^2 \eta$. Identifique el extremo donde deja de ser regular la ecuación del modelo.

13. Una pequeña perturbación circular

Para la órbita circular de referencia, calcule la frecuencia angular y la frecuencia radial linealizada. Con $r(0) = r_c + 0{,}01\,\mathrm{m}$ y $\dot{r}(0) = 0$, manteniendo L fijo, escriba la aproximación de primer orden para $r(t)$ y $\dot{\theta}(t)$. Declare el parámetro pequeño y el alcance temporal de la aproximación.

14. Variar la singularidad de la atracción

Sea $U(r) = -a/r^s$, con $a > 0$ y $s > 0$. Deduzca la condición de radio circular y evalúe W_L'' allí. Clasifique los casos $0 < s < 2$ y $s > 2$ y compare el comportamiento de W_L al acercarse a cero. Indique por qué $s = 2$ exige un estudio separado.

15. Una interacción armónica central

Una partícula efectiva tiene $m_\mathrm{r} = 2\,\mathrm{kg}$, potencial $U(r) = cr^2/2$ con $c = 8\,\mathrm{N/m}$ y momento angular $L = 8\,\mathrm{kg\,m^2/s}$. Halle radio circular, energía mínima, velocidad angular y frecuencia radial pequeña. Compare ambas frecuencias con las del caso gravitatorio.

16. Detectar un estado incompatible

Para los parámetros gravitatorios de referencia, examine dos propuestas: a) energía $E = -3\,\mathrm{J}$; b) energía $E = -1{,}5\,\mathrm{J}$ a radio $r = 3\,\mathrm{m}$. Determine si existe velocidad radial real que las complete. Explique qué control debe realizarse antes de integrar una trayectoria.

17. Medir dos masas en un sistema circular

Se observan dos cuerpos en órbitas circulares baricéntricas de radios $a_1 = 2{,}00 \times 10^8\,\mathrm{m}$ y $a_2 = 6{,}00 \times 10^8\,\mathrm{m}$, con período común $T = 4{,}00 \times 10^5\,\mathrm{s}$. Las distancias son radios físicos reconstruidos, no separaciones angulares proyectadas. Suponiendo interacción gravitatoria aislada, infiera masa total, razón de masas y masas individuales. En un segundo análisis, suponga que ambos radios comparten un factor de escala $s \in [0{,}99, 1{,}01]$: los radios físicos son $a_1 = s(2{,}00 \times 10^8\,\mathrm{m})$ y $a_2 = s(6{,}00 \times 10^8\,\mathrm{m})$. Se conoce además $T \in [3{,}98, 4{,}02] \times 10^5\,\mathrm{s}$. Admita todas las combinaciones de s, T y conserve exacto el valor de cálculo de G. Obtenga envolventes para las masas e identifique qué relación queda determinada exactamente dentro de este modelo.

18. Un intervalo que cambia el tipo de retorno

Una partícula efectiva con $m_\mathrm{r} = 1\,\mathrm{kg}$ y $k = 4\,\mathrm{J\,m}$ parte de $r_0 = 1\,\mathrm{m}$ con $\dot{r}_0 = 0$. Su rapidez tangencial está acotada por $v_t \in [1{,}90, 2{,}10]\,\mathrm{m/s}$. Halle los intervalos de L positivo y de E. Decida si esos datos garantizan un movimiento ligado y si garantizan que el radio inicial sea el retorno interior. Obtenga el otro radio de retorno para los dos extremos de rapidez.

19. Añadir un torque controlado

Dos actuadores externos ejercen fuerzas opuestas sobre los dos cuerpos, de modo que su contribución a la ecuación relativa es $+\gamma \mathbf{e}_\theta$, con $\gamma = 3\,\mathrm{N}$, y la fuerza externa total sobre el centro de masa es cero. Además actúa la interacción central conservativa. En cierto instante $r = 2\,\mathrm{m}$, $m_\mathrm{r} = 1\,\mathrm{kg}$ y $\dot{\theta} = 0{,}5\,\mathrm{s^{-1}}$. Halle L, $\dot{L}$ y la potencia externa que cambia E. Explique qué debe revisarse al usar un potencial efectivo con L fijo.

20. Examinar el caso degenerado

Considere $U = -a/r^2$ con $a = 2\,\mathrm{J\,m^2}$, $m_\mathrm{r} = 1\,\mathrm{kg}$ y $L = 2\,\mathrm{kg\,m^2/s}$. Calcule W_L y sus derivadas. Desde $r_0 = 1\,\mathrm{m}$ y $\dot{r}_0 = 0$, determine el movimiento. Después introduzca una velocidad radial inicial pequeña $\dot{r}_0 = \delta$ manteniendo L. Estudie si el radio permanece próximo al inicial para todo tiempo y qué enseña este caso sobre el criterio de segunda derivada.

Soluciones

1. Reconocer el estado relativo

Los momentos de posición se cancelan: $2(-3)+3(2)=0$. También se cancelan los momentos lineales verticales: $2(-3)+3(2)=0$. Así, $\mathbf{R}=0$, $\mathbf{V}=0$, $M=5\,\mathrm{kg}$ y $m_\mathrm{r}=6/5\,\mathrm{kg}$. La orientación relativa da $\mathbf{r}=(5,0)\,\mathrm{m}$ y $\mathbf{u}=(0,5)\,\mathrm{m/s}$.

Las energías cinéticas individuales son nueve y seis joules, cuya suma es 15 J. La fórmula relativa da el mismo valor: $m_\mathrm{r}\|\mathbf{u}\|^2/2=(6/5)(25)/2=15\,\mathrm{J}$. El momento angular interno es $L_z=m_\mathrm{r}(r_xu_y-r_yu_x)=30\,\mathrm{kg\,m^2/s}$, positivo. En este instante coincide con el momento angular respecto del origen porque el centro de masa está allí y en reposo. Las cuentas fijan un estado; para determinar su evolución hace falta especificar la interacción.

2. Volver al laboratorio

Los factores de reconstrucción son $m_2/M=1/3$ y $m_1/M=2/3$. Se obtiene $\mathbf{x}_1=(0,-2)\,\mathrm{m}$, $\mathbf{x}_2=(3,-2)\,\mathrm{m}$, $\mathbf{v}_1=(0{,}5,0)\,\mathrm{m/s}$ y $\mathbf{v}_2=(0{,}5,3)\,\mathrm{m/s}$. Su promedio ponderado recupera exactamente los datos del centro.

El momento lineal es $\mathbf{P}=M\mathbf{V}=(1{,}5,3)\,\mathrm{kg\,m/s}$. Como $m_\mathrm{r}=2/3\,\mathrm{kg}$, la energía del centro es $3(0{,}5^2+1^2)/2=1{,}875\,\mathrm{J}$ y la relativa 3 J, de modo que $K=4{,}875\,\mathrm{J}$. Directamente, las energías individuales son 0,25 y 4,625 J.

El momento angular interno es $(2/3)(3)(3)=6\,\mathrm{kg\,m^2/s}$. El término del centro es $R_xP_y-R_yP_x=1(3)-(-2)(1{,}5)=6$ en las mismas unidades. Por tanto $L_{O,z}=12\,\mathrm{kg\,m^2/s}$. Calcularlo directamente para las partículas da dos y diez, respectivamente. La comparación muestra el papel del origen al interpretar un momento angular total.

3. La fuerza mutua y la aceleración de separación

El cuerpo 1 acelera hacia $+x$ con $6\,\mathrm{m/s^2}$ y el cuerpo 2 hacia $-x$ con $2\,\mathrm{m/s^2}$. La aceleración relativa es $a_2-a_1=-8\,\mathrm{m/s^2}$. La separación disminuye inicialmente con una aceleración cuya magnitud suma los dos aportes.

La masa reducida es $m_\mathrm{r}=12/8=1{,}5\,\mathrm{kg}$ y satisface $m_\mathrm{r}\ddot{r}=(1{,}5)(-8)=-12\,\mathrm{N}$, la fuerza sobre el cuerpo 2. La comprobación del centro da $2(6)+6(-2)=0$. Dividir la fuerza únicamente por m_2 calcularía la aceleración del cuerpo 2 en el laboratorio; la aceleración de separación requiere incluir también el movimiento del cuerpo 1.

4. Una tolerancia para la fuente fija

La aceleración relativa exacta tiene magnitud $Gm_1(1+q)/r^2$ y la aproximada Gm_1/r^2. Su diferencia dividida por el valor exacto es $q/(1+q)$. Para una tolerancia de 0,01, resolver $q/(1+q)\le 0{,}01$ da $q\le 1/99\approx 0{,}010101$.

Si $q=0{,}20$, el error es $0{,}20/1{,}20=1/6\approx 16{,}67\%$. Esta comparación se refiere a la aceleración relativa a una separación dada. Para controlar una trayectoria a lo largo de un tiempo extenso habría que examinar además el error acumulado en fase y posición. Una pequeña discrepancia instantánea puede acumularse en una comparación temporal exigente.

5. Resolver el par inicial

Las distancias al centro son $d/3$ y $2d/3$, con rapideces $u_0/3$ y $2u_0/3$. Sus aceleraciones centrípetas requeridas son $u_0^2/(3d)=Gm_0/d^2$ y $2u_0^2/(3d)=2Gm_0/d^2$. La fuerza gravitatoria mutua tiene magnitud $2Gm_0^2/d^2$; al dividir por $2m_0$ y por m_0 se recuperan exactamente esas aceleraciones.

La velocidad angular común es $\Omega=u_0/d=\sqrt{3Gm_0/d^3}$ y el período $T=2\pi\sqrt{d^3/(3Gm_0)}$. Las energías cinéticas son $K_1=Gm_0^2/(3d)$ y $K_2=2Gm_0^2/(3d)$, que suman Gm_0^2/d. La interacción tiene energía $U=-2Gm_0^2/d$ y la energía relativa total es $-Gm_0^2/d$.

La solución conserva la separación y el centro en reposo. Si se inmovilizara físicamente el cuerpo mayor, la gravedad sobre el menor seguiría teniendo magnitud $2Gm_0^2/d^2$, pero la geometría circular de radio d exigiría otra rapidez. La reducción conserva precisamente el movimiento compartido que permite satisfacer ambos balances a la vez.

6. Cambiar de marco sin cambiar el problema relativo

Las nuevas velocidades son $(4,-3)$ y $(4,2)\,\mathrm{m/s}$. El centro adquiere $\mathbf{V}=(4,0)\,\mathrm{m/s}$ y el momento lineal total es $(20,0)\,\mathrm{kg\,m/s}$. La nueva energía cinética es $M\|\mathbf{V}\|^2/2+15=40+15=55\,\mathrm{J}$.

El incremento común se cancela al restar velocidades. Por ello $\mathbf{r}$, $\mathbf{u}$, la energía cinética relativa y $\mathbf{L}$ conservan sus valores del ejercicio 1. También $U(r)$ conserva su valor, de modo que la energía relativa completa permanece igual. Las energías individuales y la del centro dependen del marco; separar ambas contribuciones permite comparar el mismo proceso interno desde observadores distintos.

7. Velocidad angular y área barrida

La relación $\dot\theta=(L/m_\mathrm{r})/r^2$ da $1{,}5\,\mathrm{s^{-1}}$ a dos metros y $0{,}375\,\mathrm{s^{-1}}$ a cuatro. Las rapideces tangenciales son $r\dot\theta=3$ y $1{,}5\,\mathrm{m/s}$, respectivamente. La velocidad de barrido de área es $\dot A=L/(2m_\mathrm{r})=3\,\mathrm{m^2/s}$ en ambos casos.

El momento angular determina la componente tangencial a cada radio. La componente radial exige además energía y potencial, o un dato equivalente de estado. Incluso con esos datos, en un radio interior al intervalo permitido puede haber una rama entrante y otra saliente. Esta diferencia de información explica por qué la ley de áreas por sí sola deja pendiente la reconstrucción temporal.

8. Radios permitidos por una energía

El radio circular es $r_c=L^2/(m_\mathrm{r}k)=1\,\mathrm{m}$ y la energía mínima $E_\mathrm{mín}=-2\,\mathrm{J}$. La energía propuesta supera el mínimo y sigue siendo negativa, por lo que hay dos retornos. En unidades de un metro, la ecuación $1{,}5q^2-4q+2=0$ da $r_-=2/3\,\mathrm{m}$ y $r_+=2\,\mathrm{m}$.

A un metro, $W_L=-2\,\mathrm{J}$. La energía cinética radial es medio joule, así que $\dot r^2=1\,\mathrm{m^2/s^2}$ y $\dot r=\pm1\,\mathrm{m/s}$. Ambos signos corresponden a estados admisibles; el positivo se aleja hacia el retorno exterior y el negativo se acerca hacia el interior. La posición y la energía fijan la magnitud de esta componente, mientras el dato de rama completa su signo.

9. Qué cambia al llegar a un retorno

La velocidad tangencial tiene magnitud $L/(m_\mathrm{r}r)$. Vale $3\,\mathrm{m/s}$ en r_- y $1\,\mathrm{m/s}$ en r_+. En ambos extremos $\dot r=0$, con movimiento angular todavía presente.

La aceleración de la distancia es $\ddot r=-k/(m_\mathrm{r}r^2)+L^2/(m_\mathrm{r}^2r^3)$. En el radio interior vale $-9+13{,}5=+4{,}5\,\mathrm{m/s^2}$ y en el exterior $-1+0{,}5=-0{,}5\,\mathrm{m/s^2}$. El primero es un mínimo de distancia y el segundo un máximo.

La componente radial física de aceleración es siempre $-k/(m_\mathrm{r}r^2)$: vale -9 y $-1\,\mathrm{m/s^2}$. Se recupera al restar $r\dot\theta^2$ a $\ddot r$. Por tanto, una distancia que comienza a aumentar después del retorno interior es compatible con una fuerza física que apunta hacia el centro relativo.

10. Una aceleración radial de distancia momentáneamente nula

Los datos dan $L=m_\mathrm{r}rv_t=2\,\mathrm{kg\,m^2/s}$ y $E=m_\mathrm{r}(\dot r^2+v_t^2)/2-k/r=2{,}5-4=-1{,}5\,\mathrm{J}$. A un metro se cumple $W_L'=0$ y por ello $\ddot r=0$ en ese instante.

La componente radial física es $\ddot r-r\dot\theta^2=0-4=-4\,\mathrm{m/s^2}$. El estado tiene velocidad radial positiva, así que la distancia está cambiando y la órbita es no circular. El movimiento recorre el intervalo de radios del ejercicio 8.

Al cambiar únicamente $\dot r$ a cero, la energía baja a $-2\,\mathrm{J}$, el mínimo para ese L. Ese segundo estado sí permanece en el radio circular. La condición dinámica $W_L' = 0$ debe acompañarse del dato cinemático adecuado para mantener una distancia constante.

11. Energías de escape con momento angular

Para $E = 0$, la ecuación de retorno es $kr - L^2/(2m_{\mathrm{r}}) = 0$, de donde $r_{\mathrm{mín}} = 0{,}50\,\mathrm{m}$. Para $E = 2\,\mathrm{J}$, escribiendo otra vez el radio en metros, resulta $2q^2 + 4q - 2 = 0$. La única raíz positiva es $q = \sqrt{2} - 1$, así que $r_{\mathrm{mín}} \approx 0{,}4142\,\mathrm{m}$.

Al alejarse, U y la energía tangencial tienden a cero. La rapidez relativa asintótica vale $\sqrt{2E/m_{\mathrm{r}}}$: cero para $E = 0$ y $2\,\mathrm{m/s}$ para $E = 2\,\mathrm{J}$. En el caso marginal, la velocidad radial decrece como $\sqrt{2k/(m_{\mathrm{r}} r)}$, por lo que el tiempo hasta infinito diverge. Para energía positiva la rapidez tiende a una constante finita y también requiere tiempo infinito recorrer una distancia ilimitada. La fuerza y la barrera angular permiten acceso a todos los radios suficientemente grandes sin introducir un instante final de llegada al infinito.

12. Llegar al centro con momento angular nulo

La energía inicial es $E = -k/r_0 = -2\,\mathrm{J}$. Durante la caída,

$$\dot r = -\sqrt{\frac{2k}{m_{\mathrm{r}}}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}.$$

El signo negativo selecciona la rama entrante. Con $r = r_0 \cos^2\eta$, el parámetro crece de cero a $\pi/2$. Sustituir $dr = -2r_0 \sin\eta\cos\eta\, d\eta$ en la integral temporal produce

$$t_{\mathrm{col}} = \sqrt{\frac{2m_{\mathrm{r}} r_0^3}{k}} \int_0^{\pi/2} \cos^2\eta\, d\eta = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m_{\mathrm{r}} r_0^3}{2k}} = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{s}.$$

La rapidez diverge al acercarse a cero, aunque el tiempo acumulado sea finito. El campo puntual es singular en la colisión y las ecuaciones empleadas dejan de definir allí una continuación regular. Para cuerpos con extensión, el contacto o las deformaciones intervienen antes de ese radio cero; el intervalo de aplicación física termina cuando esas dimensiones se vuelven relevantes.

13. Una pequeña perturbación circular

El radio circular es un metro y $W_L''(r_c) = k/r_c^3 = 4\,\mathrm{kg/s^2}$. Por tanto $\omega_r = 2\,\mathrm{s^{-1}}$ y $\Omega = L/(m_{\mathrm{r}} r_c^2) = 2\,\mathrm{s^{-1}}$. A primer orden en $\varepsilon = 0{,}01\,\mathrm{m}/r_c = 0{,}01$,

$$r(t) \approx r_c + (0{,}01\,\mathrm{m})\cos(\omega_r t), \qquad \dot\theta(t) \approx \Omega\big[1 - 2\varepsilon\cos(\omega_r t)\big].$$

La segunda expresión se obtiene expandiendo $r^{-2} = r_c^{-2}(1+\xi/r_c)^{-2}$ alrededor de cero. Las correcciones omitidas empiezan en orden ε^2 para la expansión local. La solución linealizada aproxima el movimiento en intervalos de tiempo finitos fijados al reducir ε; una estimación uniforme de fase para tiempos arbitrariamente largos requiere controlar la frecuencia y los términos no lineales. La estabilidad radial exacta garantiza confinamiento cercano para datos suficientemente próximos, mientras la fórmula trigonométrica es una aproximación de su evolución.

14. Variar la singularidad de la atracción

La derivada del potencial es $U' = as/r^{s+1}$. Igualar el requerimiento circular da $L^2 = m_{\mathrm{r}} a s\, r_c^{2-s}$. Derivar de nuevo el potencial efectivo y sustituir esta condición elimina L:

$$W_L''(r_c) = -\frac{as(s+1)}{r_c^{s+2}} + \frac{3L^2}{m_{\mathrm{r}} r_c^4} = \frac{as(2-s)}{r_c^{s+2}}.$$

Para $0 < s < 2$ es positiva y la órbita circular tiene estabilidad radial local. Al acercarse a cero domina $L^2/(2m_{\mathrm{r}}r^2)$, por lo que $W_L \to +\infty$. Para $s > 2$ la curvatura es negativa y el círculo es inestable; domina $-a/r^s$ y $W_L \to -\infty$. Según la energía y la componente conexa permitida, puede existir una caída hacia el centro incluso con momento angular no nulo.

En $s = 2$ los dos términos tienen el mismo orden y la condición circular se reduce a $L^2 = 2m_{\mathrm{r}}a$, independiente del radio. La segunda derivada se anula bajo esa igualdad. El ejercicio 20 examina la dinámica exacta que ese criterio deja abierta.

15. Una interacción armónica central

La condición circular es $cr_c = L^2/(m_{\mathrm{r}}r_c^3)$, así que $r_c = (L^2/(m_{\mathrm{r}}c))^{1/4} = \sqrt{2}\,\mathrm{m}$. La velocidad angular es $\Omega = L/(m_{\mathrm{r}}r_c^2) = 2\,\mathrm{s}^{-1}$. Los dos términos del potencial efectivo valen ocho joules allí, por lo que $E_{\mathrm{mín}} = 16\,\mathrm{J}$.

La curvatura es $W_L'' = c + 3L^2/(m_{\mathrm{r}}r^4)$. En el círculo vale $4c = 32\,\mathrm{kg/s}^2$ y $\omega_r = \sqrt{4c/m_{\mathrm{r}}} = 4\,\mathrm{s}^{-1} = 2\Omega$. En este potencial la perturbación radial pequeña oscila al doble de la frecuencia de giro. La igualdad de ambas frecuencias hallada en gravitación depende de la ley de interacción, y la comparación permite reconocer esa dependencia en un cálculo sencillo.

16. Detectar un estado incompatible

Para ese momento angular, el mínimo de W_L es $-2\,\mathrm{J}$. La primera propuesta, $E = -3\,\mathrm{J}$, queda por debajo de toda la curva y carece de estados radiales admisibles.

Para la segunda, a tres metros se tiene $W_L = 2/9 - 4/3 = -10/9\,\mathrm{J}$, mayor que $-1{,}5\,\mathrm{J}$. La energía cinética radial que se obtendría al restar es $E - W_L = -7/18\,\mathrm{J} < 0$. Por ello tampoco hay velocidad radial real en ese radio con los valores propuestos.

La desigualdad $E \geq W_L(r)$ debe comprobarse antes de elegir una raíz para $\dot r$ o integrar el tiempo. Si los datos proceden de una medición, su incompatibilidad obliga a revisar magnitudes, unidades, cotas o modelo. La raíz imaginaria es una señal del problema en los supuestos y datos del estado.

17. Medir dos masas en un sistema circular

La separación física es $d = a_1 + a_2 = 8{,}00 \times 10^8\,\mathrm{m}$. Los momentos respecto del centro dan $m_1a_1 = m_2a_2$, por lo que $m_1/m_2 = a_2/a_1 = 3$. La dinámica relativa circular da

$$M = m_1 + m_2 = \frac{4\pi^2 d^3}{GT^2} \approx 1{,}894 \times 10^{27}\,\mathrm{kg}.$$

Así, $m_1 = 3M/4 \approx 1{,}421 \times 10^{27}\,\mathrm{kg}$ y $m_2 = M/4 \approx 4{,}735 \times 10^{26}\,\mathrm{kg}$. La componente que recorre el círculo menor tiene la masa mayor. El período y la separación determinan la suma de masas; la razón de radios permite repartirla.

El cálculo supone radios y período de un sistema circular ya reconstruido. Para observaciones proyectadas en el cielo harían falta distancia al sistema y geometría de la órbita antes de usar esas longitudes como datos físicos. La inferencia conserva el alcance de la observación que realmente se ha especificado.

La escala común conserva el cociente de radios: $a_2/a_1 = 3$ para todo s admisible. Por tanto, también se conserva $m_1/m_2 = 3$. La separación, en cambio, vale $d = s(8{,}00 \times 10^8\,\mathrm{m})$ y cambia la masa total inferida. Si M_0 designa el resultado nominal anterior calculado sin redondeos intermedios,

$$M(s,T) = M_0 s^3 \left(\frac{4{,}00 \times 10^5\,\mathrm{s}}{T} \right)^2 .$$

La expresión crece con $s > 0$ y disminuye con $T > 0$. Sus extremos se obtienen de las dos combinaciones desfavorables:

$$M_- = M_0 \frac{0{,}99^3}{1{,}005^2}, \qquad M_+ = M_0 \frac{1{,}01^3}{0{,}995^2}.$$

Con el valor de cálculo de G, unas envolventes decimales redondeadas hacia fuera son

$$M \in [1{,}8195; 1{,}9711] \times 10^{27}\,\mathrm{kg},$$
$$m_1 \in [1{,}3646; 1{,}4784] \times 10^{27}\,\mathrm{kg},$$
$$m_2 \in [4{,}5488; 4{,}9277] \times 10^{26}\,\mathrm{kg}.$$

Las masas individuales satisfacen $m_1 = 3M/4$ y $m_2 = M/4$ en toda la familia. La calibración afecta el tamaño de ambas en la misma proporción y conserva su razón. Al publicar bandas separadas conviene mantener también esa relación: una elección del extremo inferior de una masa y del superior de la otra puede corresponder a escalas o períodos diferentes. Es la misma dependencia común del capítulo 0, ahora aplicada a una inferencia dinámica cuya escala de longitud aparece elevada al cubo.

18. Un intervalo que cambia el tipo de retorno

Con radio inicial un metro y masa reducida un kilogramo, $L = m_{\mathrm{r}} r_0 v_t$ queda en $[1{,}90, 2{,}10]\,\mathrm{kg\,m^2/s}$. La energía $E = m_{\mathrm{r}} v_t^2/2 - k/r_0$ es creciente con la rapidez positiva, así que $E \in [-2{,}195, -1{,}795]\,\mathrm{J}$. Cada valor del intervalo corresponde a su propio L y su propia energía, relacionados por el estado inicial; las cotas se interpretan con esa dependencia.

Todas esas energías son negativas y todos los momentos angulares son no nulos, por lo que los movimientos permanecen ligados en el modelo gravitatorio. En cambio, el signo de $\ddot r_0 = v_t^2/r_0 - k/(m_{\mathrm{r}} r_0^2)$ cambia dentro de las cotas: con $1{,}90\,\mathrm{m/s}$ es negativo y el radio inicial es el extremo exterior; con $2{,}10\,\mathrm{m/s}$ es positivo y es el extremo interior. A $2\,\mathrm{m/s}$ el movimiento es circular.

Para calcular el otro retorno, el radio inicial es ya una raíz de la ecuación cuadrática. Definiendo $b = m_{\mathrm{r}} r_0 v_t^2/k$, la otra raíz es $r_{\mathrm{otro}} = r_0 b/(2-b)$. En las unidades del ejercicio esto da $3{,}61/4{,}39\,\mathrm{m} \approx 0{,}8223\,\mathrm{m}$ para el extremo inferior de rapidez y $4{,}41/3{,}59\,\mathrm{m} \approx 1{,}2284\,\mathrm{m}$ para el superior. El intervalo garantiza ligadura energética y deja indeterminado el tipo de retorno inicial.

19. Añadir un torque controlado

El momento angular instantáneo es $L = m_{\mathrm{r}} r^2 \dot\theta = (1)(4)(0{,}5) = 2\,\mathrm{kg\,m^2/s}$. La fuerza tangencial adicional produce $\dot L = \gamma r = 6\,\mathrm{N\,m}$, con signo positivo en la orientación elegida. La potencia suministrada al movimiento relativo es $\gamma \mathbf{e}_\theta \cdot \dot{\mathbf{r}} = \gamma r \dot\theta = 3\,\mathrm{W}$.

Las fuerzas externas opuestas mantienen la fuerza total nula, de modo que el centro sigue en movimiento uniforme, pero aportan torque y energía interna al par. El balance correcto es $\dot E = 3\,\mathrm{W}$ en el instante dado. La contribución $L^2/(2m_{\mathrm{r}} r^2)$ puede seguir representándose instantáneamente, pero ahora $L(t)$ debe obtenerse de su balance y el conjunto ya no corresponde a un potencial radial estacionario con energía constante. El aislamiento traslacional por sí solo deja abierta la entrada de torque y potencia.

20. Examinar el caso degenerado

El potencial efectivo es $W_L = (L^2/(2m_\mathrm{r}) - a)/r^2 = 0$ para todo radio positivo. Sus dos primeras derivadas son cero y la ecuación radial exacta es $\ddot{r} = 0$. Con velocidad radial inicial cero se conserva $r = r_0$ y el ángulo avanza con velocidad constante $L/(m_\mathrm{r} r_0^2) = 2\,\mathrm{s}^{-1}$: hay una órbita circular.

Al introducir $\dot{r}_0 = \delta$, la solución radial pasa a ser $r(t) = r_0 + \delta t$ mientras el radio siga positivo. Para $\delta > 0$ se aleja sin límite; para $\delta < 0$ alcanza cero en tiempo $r_0/|\delta|$. Por pequeña que sea una perturbación de velocidad, su efecto sobre el radio termina saliendo de una vecindad prefijada. Los círculos forman una familia continua de radios, pero ese hecho no garantiza estabilidad frente a perturbaciones de velocidad radial.

La segunda derivada nula exige este examen adicional. El criterio positivo del mínimo estricto tenía una hipótesis sustantiva; en la frontera presente la dinámica es un desplazamiento radial uniforme superpuesto al giro y permite demostrar directamente la falta de confinamiento para datos cercanos.

Lecturas y conexiones

Spivak, *Physics for Mathematicians. Mechanics I*, capítulo 4 y addendum 4B, ofrece un desarrollo de los problemas de uno y dos cuerpos y de la reducción a un potencial efectivo. Aquí se conservan las unidades de la masa reducida, se reconstruyen ambas trayectorias y se obtiene la ecuación radial directamente para incluir retornos y círculos sin dividir por una velocidad nula.

Sears y Zemansky, *Física universitaria*, volumen 1, §13.5, relaciona el movimiento gravitatorio con el centro de masa común. Serway y Jewett, *Física para ciencias e ingeniería*, volumen 1, capítulo 13, incluye el problema circular de dos cuerpos como ampliación de la dinámica de satélites. El capítulo 16 desarrollará las órbitas de Kepler desde el estado relativo y recuperará su forma y su evolución temporal, usando las conservaciones ya construidas.

Capítulo 16

Órbitas de Kepler

En el problema gravitatorio del capítulo anterior apareció un estado relativo con $m_r = 1\,\mathrm{kg}$, $k = 4\,\mathrm{J\,m}$, distancia $r = 1\,\mathrm{m}$, velocidad radial $\dot r = 1\,\mathrm{m/s}$ y rapidez tangencial $2\,\mathrm{m/s}$. Su energía era negativa y la distancia quedaba comprendida entre $2/3$ y 2 metros. Podemos completar la descripción eligiendo ejes de modo que, en el instante observado,

$$\mathbf{r}_0 = (1,0)\,\mathrm{m}, \qquad \mathbf{u}_0 = (1,2)\,\mathrm{m/s}.$$

La separación está aumentando. Queremos construir la curva completa, situar sobre ella este punto y calcular cuánto falta para el próximo paso por la distancia mínima. El intervalo de radios obtenido mediante energía resuelve una parte del problema; para terminarlo necesitamos relacionar la distancia con la dirección y después recuperar el tiempo.

Conservamos el sistema de dos partículas aisladas, de masas constantes $m_1, m_2 > 0$, con interacción gravitatoria newtoniana y separación positiva. Trabajamos primero con el vector relativo $\mathbf{r} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$, cuya ecuación exacta en este modelo es

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\kappa}{r^3}\mathbf{r}, \qquad \kappa = G(m_1 + m_2) > 0.$$

Las trayectorias de los cuerpos se recuperan al final mediante el centro de masa. La extensión de los cuerpos, las perturbaciones de terceros y las correcciones relativistas quedan fuera de esta ecuación. Si durante la trayectoria las distancias se aproximan a los tamaños físicos, el modelo puntual necesita una revisión aun cuando la solución matemática siga siendo regular para $r > 0$.

Convertir el estado en constantes que se puedan interpretar

Dividir la energía relativa por m_r elimina de las ecuaciones una masa que ya fue absorbida en la reducción. Recordemos que $k/m_r = \kappa$; esta igualdad explica por qué la constante de la aceleración incluye la suma de las masas.

Definición. La energía específica y el momento angular específico del movimiento relativo son

$$\mathcal{E} = \frac{\|\mathbf{u}\|^2}{2} - \frac{\kappa}{r}, \qquad \mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{u}, \qquad h = \|\mathbf{h}\|.$$

Sus unidades son $\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$ y m^2/s, respectivamente. La energía relativa es $E = m_r\mathcal{E}$ y el momento angular relativo es $\mathbf{L} = m_r\mathbf{h}$. Ambos se conservan por los resultados del capítulo 15. Supondremos $h > 0$ durante el desarrollo orbital; el movimiento radial se estudiará por separado.

El vector $\mathbf{h}$ fija una orientación del plano. Elegimos coordenadas angulares positivas en ese sentido, por lo que la ley de áreas se escribe $r^2\dot\theta = h > 0$. Esta elección permite usar un único signo en las fórmulas; un movimiento horario respecto de unos ejes previamente dibujados tiene su normal $\mathbf{h}$ dirigida hacia el lado opuesto de la hoja.

Para el estado inicial, $\mathcal{E} = -3/2\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$ y $\mathbf{h} = 2\mathbf{e}_z\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$. La información angular nos permite sustituir la variable temporal por θ sin perder la orientación del movimiento. La

sustitución resulta especialmente sencilla si usamos el inverso del radio, porque $\dot\theta$ contiene precisamente r^{-2}.

Proposición. En un movimiento gravitatorio con $h>0$, la función $w(\theta)=1/r(\theta)$ satisface

$$\frac{d^2w}{d\theta^2}+w=\frac{\kappa}{h^2}.$$

En consecuencia, existen constantes $e\ge 0$ y ω tales que, sobre la rama donde el radio es positivo,

$$r=\frac{p}{1+e\cos f},\qquad p=\frac{h^2}{\kappa}>0,\qquad f=\theta-\omega.$$

Demostración. Como $\dot\theta=h/r^2$ nunca se anula, podemos expresar localmente el radio como función del ángulo y prolongar esa expresión a lo largo del movimiento. Una prima sobre w indicará derivación respecto de θ. La regla de la cadena da

$$\dot r=-hw',\qquad \ddot r=-h^2w^2w'',\qquad r\dot\theta^2=h^2w^3.$$

Al introducir estas igualdades en la ecuación radial física $\ddot r-r\dot\theta^2=-\kappa/r^2$, obtenemos $-h^2w^2(w''+w)=-\kappa w^2$. La separación positiva permite cancelar w^2 y deja la ecuación enunciada. Su solución es $w=\kappa/h^2+A\cos\theta+B\sin\theta$. Para comprobar que esta familia es completa basta restarle la combinación que reproduce w,w' en un ángulo inicial: la diferencia z satisface $z''+z=0$ con datos nulos; como la derivada de z'^2+z^2 es cero, ambos permanecen nulos. Reunir A,B en una amplitud no negativa y una fase da $w=(1+e\cos f)/p$. La condición $w>0$ selecciona los ángulos físicamente recorridos. □

La ecuación de la cónica ya apareció, pero su fase todavía está pendiente. Podemos encontrarla sin resolver un sistema trigonométrico para cada dato inicial. El cálculo proporciona además una constante vectorial que reconocerá la dirección de menor distancia.

Encontrar la dirección del periastro

Proposición. El vector de excentricidad

$$\mathbf{e}=\frac{\mathbf{u}\times\mathbf{h}}{\kappa}-\frac{\mathbf{r}}{r}$$

es constante, pertenece al plano orbital y satisface

$$\mathbf{e}\cdot\mathbf{r}=p-r,\qquad \|\mathbf{e}\|^2=1+\frac{2\mathcal{E}h^2}{\kappa^2}.$$

Si $\mathbf{e}\neq\mathbf{0}$, su dirección señala el periastro y su módulo es la excentricidad e de la ecuación orbital.

Demostración. Escribamos $\mathbf{e}_r=\mathbf{r}/r$. Como $\mathbf{h}$ es constante,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}\times\mathbf{h})=-\frac{\kappa}{r^2}\mathbf{e}_r\times\mathbf{h}.$$

La identidad del producto vectorial triple da $\mathbf{e}_r\times\mathbf{h}=r\dot r\mathbf{e}_r-r\mathbf{u}=-r^2\dot{\mathbf{e}}_r$. Por tanto, la derivada del primer término de $\mathbf{e}$ es $\dot{\mathbf{e}}_r$ y se cancela con la del segundo. Ambos términos están en el plano perpendicular a $\mathbf{h}$. Para interpretar el vector, tomamos su producto escalar con $\mathbf{r}$: la identidad $(\mathbf{u}\times\mathbf{h})\cdot\mathbf{r}=h^2$ produce $\mathbf{e}\cdot\mathbf{r}=h^2/\kappa-r$. Para $e>0$, si f es el ángulo orientado desde $\mathbf{e}$ hasta $\mathbf{r}$, la igualdad se convierte en $er\cos f=p-r$ y recupera la ecuación orbital. El denominador es máximo en $f=0$, donde el radio es mínimo. Finalmente, $\mathbf{u}\perp\mathbf{h}$ y $(\mathbf{u}\times\mathbf{h})\cdot\mathbf{e}_r=h^2/r$ permiten calcular

$$\|\mathbf{e}\|^2 = 1 + \frac{h^2\|\mathbf{u}\|^2}{\kappa^2} - \frac{2h^2}{\kappa r} = 1 + \frac{2\mathcal{E}h^2}{\kappa^2}.$$

El módulo y la fase coinciden con los de la solución angular. □

El cálculo usa posiciones y velocidades de un mismo instante. También puede escribirse sin un segundo producto vectorial:

$$\mathbf{e} = \left(\frac{\|\mathbf{u}\|^2}{\kappa} - \frac{1}{r}\right)\mathbf{r} - \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{u}}{\kappa}\mathbf{u}.$$

En el estado de apertura, el primer término vale $(1/4, 0)$ y el segundo $(1/4, 1/2)$; así $\mathbf{e} = (0, -1/2)$. El periastro está sobre el semieje negativo de y. Elegimos $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{e}/e = -\mathbf{e}_y$ y $\hat{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{h}} \times \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{e}_x$. El estado observado se encuentra a $f_0 = \pi/2$ del periastro y avanza hacia radios mayores. Este ángulo se obtuvo del par de componentes

$$\cos f = \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{e}_r, \qquad \sin f = \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{e}_r;$$

conservar ambas evita que un arcocoseno confunda el tramo entrante con el saliente.

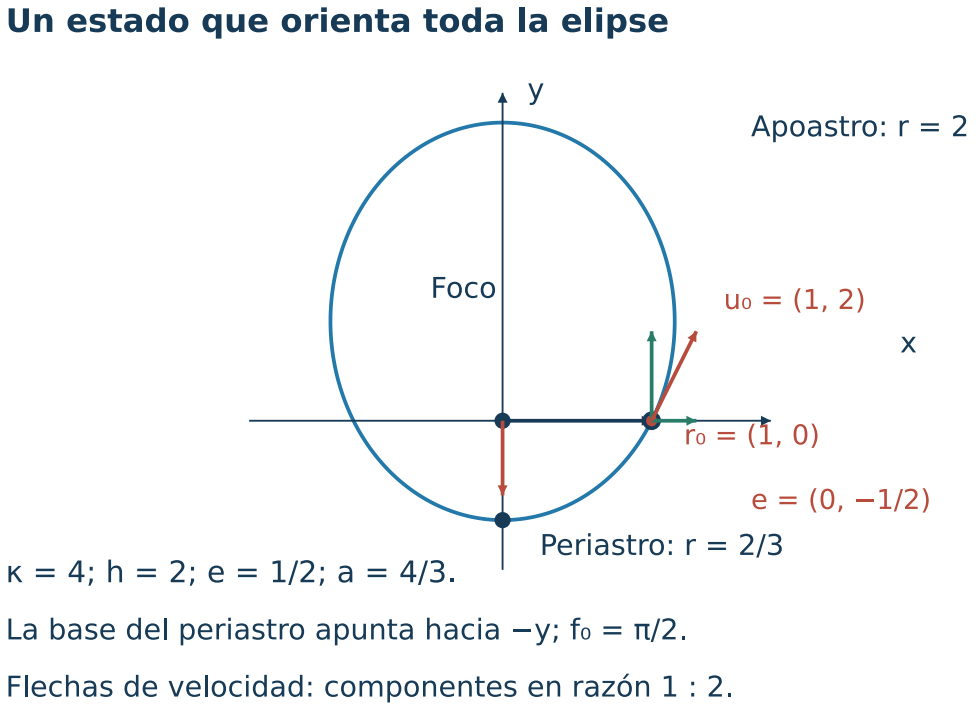


Figura 16.1. El estado inicial fija el plano, la orientación del periastro y el sentido de recorrido. El vector de velocidad se representa descompuesto en sus componentes radial y tangencial.

Leer la forma y los límites de una cónica

Definición. El semilado recto es $p = h^2/\kappa$ y la excentricidad es $e = \|\mathbf{e}\|$. Para $e > 0$, la anomalía verdadera f es el ángulo orientado desde el periastro, medido en el sentido determinado por $\mathbf{h}$. En una órbita elíptica, los radios de periastro y apoastro se denotan r_p, r_a, y sus semiejes mayor y menor se denotan $a, b > 0$.

La palabra «anomalía» nombra aquí una variable angular. Para una circunferencia, $e = 0$, todas las direcciones son equivalentes: se elige un eje de referencia y el ángulo aumenta uniformemente. La dirección del vector nulo no proporciona un periastro distinguido.

Proposición. Para $h > 0$, las órbitas gravitatorias relativas se clasifican de la siguiente manera:

- Si $\mathcal{E} < 0$, entonces $0 \le e < 1$ y la órbita es una elipse, incluida la circunferencia. Se cumple

$$a = -\frac{\kappa}{2\mathcal{E}}, \qquad p = a(1-e^2), \qquad b = a\sqrt{1-e^2}, \qquad r_p = a(1-e), \qquad r_a = a(1+e).$$

- Si $\mathcal{E} = 0$, entonces $e = 1$ y la órbita es una parábola, con $r_p = p/2$ y $-\pi < f < \pi$.
- Si $\mathcal{E} > 0$, entonces $e > 1$ y se recorre una rama de hipérbola, con $r_p = p/(1+e)$ y $-f_\infty < f < f_\infty$, donde $\cos f_\infty = -1/e$ y $\pi/2 < f_\infty < \pi$.

En todos los casos, la rapidez relativa cumple

$$\|\mathbf{u}\|^2 = 2\left(\mathcal{E} + \frac{\kappa}{r}\right).$$

Demostración. El signo de $e^2 - 1 = 2\mathcal{E}h^2/\kappa^2$ determina los tres intervalos de excentricidad. Para reconocer las curvas, tomamos coordenadas $x = r\cos f$, $y = r\sin f$ con origen en el foco. La ecuación orbital equivale a $r = p - ex$. Al elevar al cuadrado obtenemos

$$(1-e^2)x^2 + y^2 + 2pex - p^2 = 0, \qquad p - ex > 0.$$

Si $e < 1$, completar el cuadrado produce

$$\frac{(x+ae)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a = \frac{p}{1-e^2}, \quad b^2 = ap.$$

En esa elipse, $p - ex$ permanece positivo, de modo que el paso al cuadrado es reversible. La relación entre e y la energía da $a = -\kappa/(2\mathcal{E})$; evaluar el radio en $f = 0, \pi$ proporciona los ápsides. Para $e = 1$, la ecuación es $y^2 = p^2 - 2px$, una parábola cuyo vértice está en $(p/2, 0)$; allí $p - x > 0$ y la condición angular exige $\cos f > -1$. Si $e > 1$, escribimos $A = p/(e^2-1) > 0$ y completamos cuadrados:

$$\frac{(x - Ae)^2}{A^2} - \frac{y^2}{A^2(e^2-1)} = 1.$$

La condición $p - ex > 0$ selecciona la rama que contiene $x = A(e-1)$ y excluye la otra. En variables polares, $1 + e\cos f > 0$ equivale al intervalo angular indicado; sus extremos corresponden a radio infinito. La fórmula de rapidez resulta de despejar la definición de $\mathcal{E}$. $\square$

Para una elipse, la última identidad adopta la forma habitual

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \kappa\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Es una relación entre rapidez y posición, llamada ecuación de vis viva. La dirección de la velocidad se recupera con

$$\dot r = \frac{\kappa e}{h}\sin f, \qquad u_\theta = \frac{h}{r} = \frac{\kappa}{h}(1 + e\cos f),$$

y, en la base orientada del periastro,

$$\mathbf{u} = \frac{\kappa}{h}\left[-\sin f\,\hat{\mathbf{p}} + (e + \cos f)\hat{\mathbf{q}}\right].$$

La primera fórmula se obtiene derivando $r(f)$ y usando $\dot f = h/r^2$; la segunda expresa la conservación angular. Escribir $\mathbf{u} = \dot r\mathbf{e}_r + u_\theta\mathbf{e}_\theta$ y sustituir las componentes trigonométricas produce la expresión vectorial. Así, la curva y su sentido de recorrido permiten reconstruir el estado completo en cada punto.

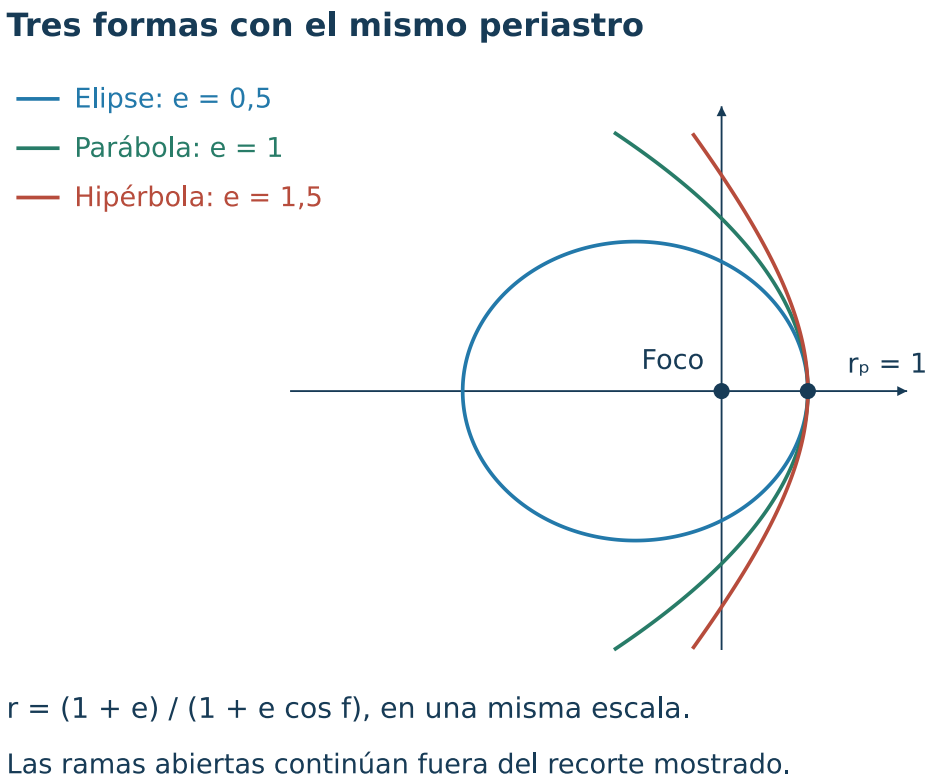


Figura 16.2. Elipse, parábola y rama hiperbólica con un mismo radio de periastro y foco común. La rama física de la hipérbola queda delimitada por la positividad del denominador polar; los extremos infinitos se muestran mediante tramos truncados.

La órbita inicial tiene $p = 1\,\mathrm{m}$ y $e = 1/2$, por lo que $a = 4/3\,\mathrm{m}$, $b = 2\sqrt{3}/3\,\mathrm{m}$ y los ápsides recuperan $r_p = 2/3\,\mathrm{m}$, $r_a = 2\,\mathrm{m}$. La ecuación cartesiana está girada respecto de los ejes del laboratorio, pues su periastro apunta hacia abajo. La orientación sale del dato vectorial, mientras que los valores escalares obtenidos por energía permanecen iguales.

Medir el período mediante el área

Una curva cerrada admite muchas parametrizaciones. La gravedad escoge una mediante la ley de áreas: el área barrida respecto del foco crece a razón $h/2$. En una elipse podemos usar su área total para obtener el período antes de resolver la posición como función del tiempo.

Proposición. Una órbita elíptica gravitatoria con semieje mayor relativo a tiene período

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\kappa}}, \qquad \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)}.$$

Demostración. El radio es positivo y está acotado por r_p, r_a, de modo que $\dot f = h/r^2$ conserva un límite inferior positivo y una vuelta angular se completa en tiempo finito. La posición y la velocidad recuperan sus valores al aumentar f en 2π. Durante esa vuelta se barre el área πab; como su tasa es $h/2$, se tiene $T = 2\pi ab/h$. Las relaciones $b^2 = ap$ y $h^2 = \kappa p$ reducen este cociente a $2\pi\sqrt{a^3/\kappa}$. Para $e = 0$ la cuenta coincide con la circunferencia recorrida uniformemente. $\square$

La tercera ley compara órbitas que comparten el mismo parámetro gravitatorio. Si cambia la masa total, cambia también la constante T^2/a^3. En el problema de dos cuerpos, a pertenece a la separación relativa. Los semiejes baricéntricos son

$$a_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}a, \qquad a_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}a, \qquad a = a_1 + a_2,$$

y ambos cuerpos tienen el mismo período. La relación $m_1 a_1 = m_2 a_2$ permite repartir las masas cuando se conocen ambos semiejes físicos. Una observación angular proyectada exige además distancia y orientación para obtener esas longitudes.

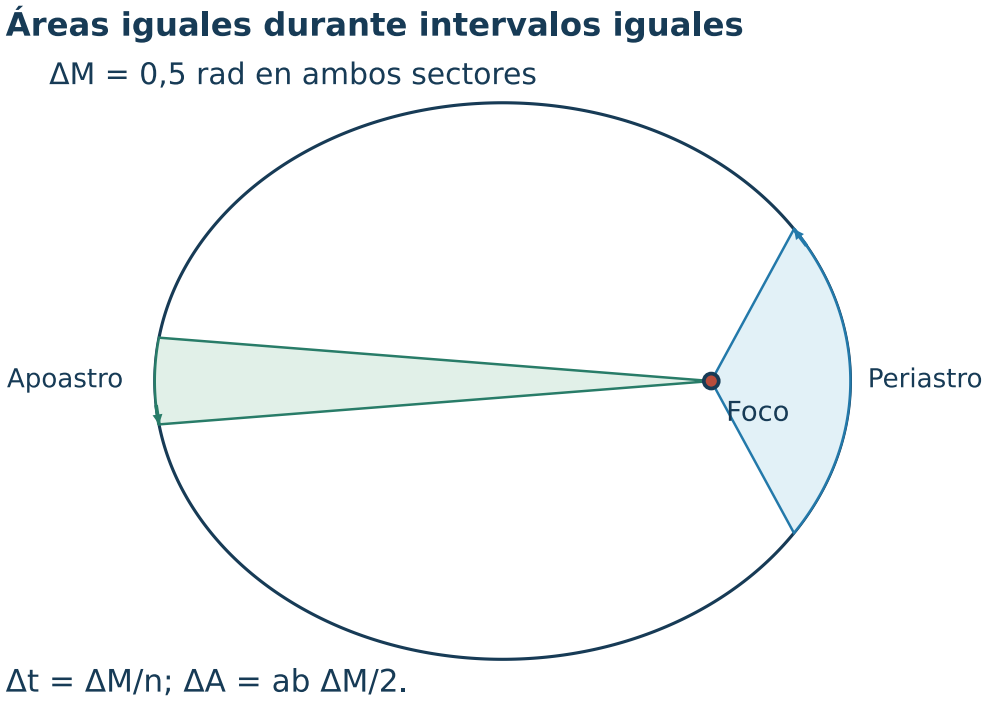


Figura 16.3. Dos sectores focales de una misma elipse barridos durante intervalos iguales. Cerca del periastro se recorre un ángulo mayor; la igualdad relevante es la de áreas.

Construir un reloj sobre la elipse

El período de la órbita inicial es $T = 8\pi/(3\sqrt{3})\,\mathrm{s}$. Para localizar el instante del estado observado necesitamos calcular el área parcial barrida desde el periastro. Integrar directamente $r(f)^2$ es posible, pero otra parametrización convierte esa integral en una expresión elemental.

Definición. En una elipse con $0 \le e < 1$, la anomalía excéntrica χ se define mediante

$$x = a(\cos\chi - e), \qquad y = b\sin\chi,$$

con origen de coordenadas en el foco y eje x dirigido hacia el periastro. La anomalía media es $\mathcal{M} = n(t-\tau)$, donde $n = \sqrt{\kappa/a^3} = 2\pi/T$ y τ es una época de paso por el periastro. Para $e = 0$ se elige como época el cruce del eje de referencia.

La parametrización parte de un círculo de radio a centrado en el centro de la elipse: se conserva la coordenada horizontal y se multiplica la vertical por b/a. El ángulo χ se mide desde ese centro, mientras que f se mide desde el foco. Para seguir varias vueltas se usan ángulos continuos, sin reducirlos después de cada paso a un intervalo de longitud 2π.

De las ecuaciones cartesianas se deduce

$$r = a(1 - e\cos\chi), \qquad \cos f = \frac{\cos\chi - e}{1 - e\cos\chi}, \qquad \sin f = \frac{\sqrt{1-e^2}\,\sin\chi}{1 - e\cos\chi}.$$

El denominador es al menos $1 - e > 0$. Recíprocamente,

$$\cos\chi = \frac{e + \cos f}{1 + e\cos f}, \qquad \sin\chi = \frac{\sqrt{1-e^2}\,\sin f}{1 + e\cos f}.$$

Estos pares permiten usar la función $\operatorname{atan2}(y, x)$, que devuelve el ángulo con los signos de seno y coseno especificados. Después se añade el múltiplo de 2π que corresponda a la vuelta seguida.

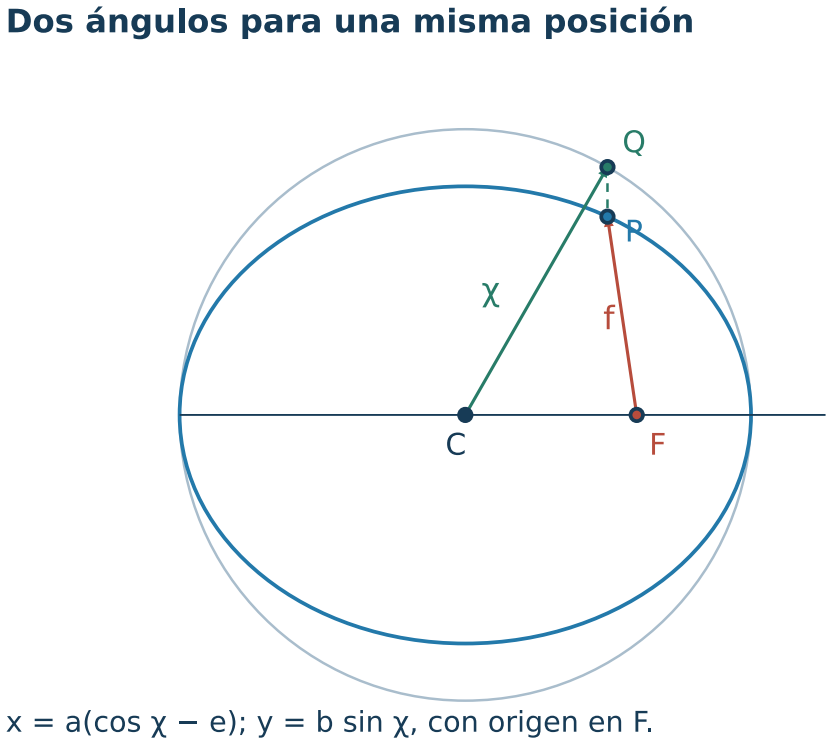


Figura 16.4. La misma posición sobre la elipse se describe desde el foco mediante f y desde el centro del círculo auxiliar mediante χ. La proyección vertical construye la parametrización elíptica.

Proposición. Para una elipse con $0 \le e < 1$, la evolución temporal satisface la ecuación de Kepler

$$\chi - e\sin\chi = \mathcal{M} = n(t-\tau).$$

Para todo $\mathcal{M} \in \mathbb{R}$ hay una única solución real χ. Si un valor aproximado $\widetilde{\chi}$ tiene residuo $R = \widetilde{\chi} - e\sin\widetilde{\chi} - \mathcal{M}$, entonces

$$|\widetilde{\chi} - \chi| \le \frac{|R|}{1-e}.$$

Demostración. El área orientada barrida por el radio focal satisface $dA = (x\,dy - y\,dx)/2$. Al derivar la parametrización elíptica se obtiene

$$x\frac{dy}{d\chi} - y\frac{dx}{d\chi} = ab(1 - e\cos\chi).$$

La ley de áreas da $dt/d\chi = (ab/h)(1-e\cos\chi)$. Como $ab/h = \sqrt{a^3/\kappa} = 1/n$, integrar desde $\chi = 0, t = \tau$ produce la ecuación. Para justificar su inversión, consideremos $F(\chi) = \chi - e\sin\chi$: su derivada cumple $F' \ge 1-e > 0$, de modo que es estrictamente creciente, y $|F(\chi)-\chi| \le e$ garantiza que sus límites son $-\infty, +\infty$. La continuidad proporciona existencia para todo dato y el crecimiento estricto da unicidad. Aplicando el teorema del valor medio entre χ y $\widetilde{\chi}$, obtenemos $|F(\widetilde{\chi}) - F(\chi)| \ge (1-e)|\widetilde{\chi} - \chi|$, que es la cota del enunciado. $\square$

El error angular adquiere sentido observacional al trasladarlo a la posición que reconstruimos. Para hacer esa comparación mantendremos fijos los parámetros de la elipse, su

orientación y el movimiento del centro de masa; la única aproximación que estudiaremos será la inversión de su reloj.

Proposición (del residuo temporal a la posición). Sean $a > 0$, $0 \le e < 1$ y $b = a\sqrt{1-e^2}$ los parámetros exactos de una elipse orientada mediante los vectores unitarios ortogonales $\widehat{\mathbf{p}}, \widehat{\mathbf{q}}$. Para el mismo valor de anomalía media, sean χ la solución exacta de Kepler y $\widetilde{\chi}$ una aproximación de residuo R. Las posiciones relativas reconstruidas satisfacen

$$\|\mathbf{r}(\widetilde{\chi}) - \mathbf{r}(\chi)\| \le a|\widetilde{\chi} - \chi| \le \frac{a|R|}{1-e}.$$

Demostración. Derivar la parametrización da $d\mathbf{r}/d\chi = -a\sin\chi\,\widehat{\mathbf{p}} + b\cos\chi\,\widehat{\mathbf{q}}$. Por ortogonalidad, el cuadrado de su módulo es $a^2\sin^2\chi + b^2\cos^2\chi \le a^2$, pues $b \le a$. La diferencia entre las posiciones es la integral de esa derivada sobre el intervalo que une ambas anomalías. La desigualdad triangular para la integral proporciona la primera cota; el control del residuo ya demostrado proporciona la segunda.

Si se exige un error espacial no mayor que una longitud $\varepsilon > 0$, basta imponer $|R| \le (1-e)\varepsilon/a$. Las unidades se conservan: el residuo es adimensional y la cota de posición lleva la escala a. Para los cuerpos originales, la misma reconstrucción multiplica estas cotas por $m_2/(m_1+m_2)$ y $m_1/(m_1+m_2)$, respectivamente, cuando sus masas y el centro de masa se mantienen exactos. Las incertidumbres de distancia, orientación y parámetros orbitales se incorporan mediante sus propios datos; el residuo controla la parte del cálculo que acabamos de aislar.

La anomalía media aumenta uniformemente; la verdadera lo hace a razón h/r^2. Para invertir la ecuación numéricamente siempre disponemos del intervalo

$$\mathcal{M} - e \le \chi \le \mathcal{M} + e,$$

porque $\chi = \mathcal{M} + e\sin\chi$. La bisección conserva la raíz dentro del intervalo y proporciona una cota por su anchura. El método de Newton usa

$$\chi_{j+1} = \chi_j - \frac{\chi_j - e\sin\chi_j - \mathcal{M}}{1 - e\cos\chi_j}.$$

El denominador permanece positivo, aunque puede ser pequeño para órbitas muy excéntricas cerca del periastro. Para tener un procedimiento controlado se conserva también el intervalo de signos: se acepta el paso de Newton si cae en su interior y, en otro caso, se usa su punto medio. Puede exigirse además una bisección periódica para garantizar que la anchura tienda a cero. Al detenerse, la cota por residuo o por anchura expresa la precisión obtenida.

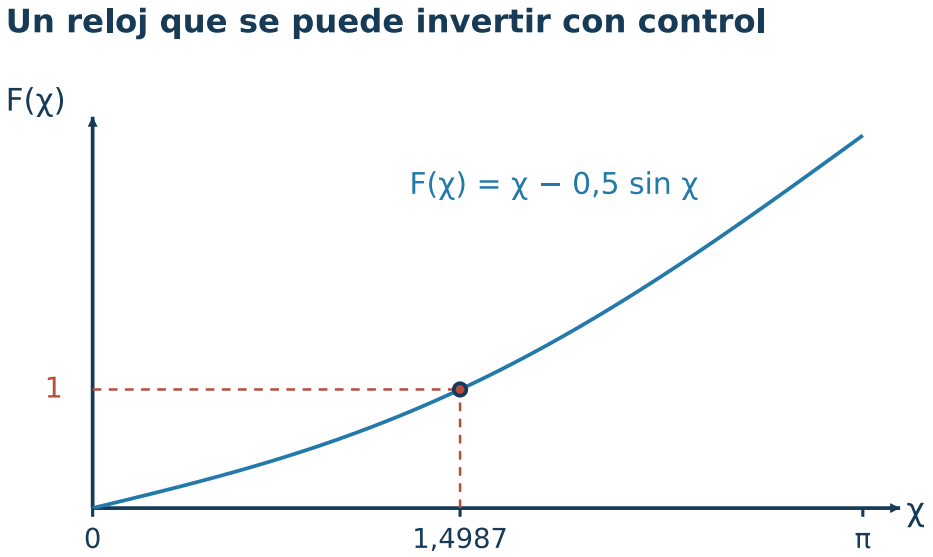


Figura 16.5. La función $\chi - e\sin\chi$ crece estrictamente. El residuo de una aproximación controla su error angular mediante el límite inferior $1-e$ de la pendiente.

En la órbita inicial, $f_0 = \pi/2$ da $\cos\chi_0 = 1/2$ y $\sin\chi_0 = \sqrt{3}/2$, de modo que $\chi_0 = \pi/3$. El tiempo transcurrido desde el periastro satisface

$$n(t_0 - \tau) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}, \qquad n = \frac{3\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{s}^{-1}.$$

De aquí resulta $t_0 - \tau \approx 0{,}473\,\mathrm{s}$ y faltan aproximadamente $4{,}364\,\mathrm{s}$ para el siguiente periastro. El ángulo verdadero es un cuarto de vuelta y ha transcurrido menos de una décima parte del período; la aceleración del barrido cerca del periastro explica la diferencia.

Recuperar posiciones y reconocer la información que falta

La reconstrucción temporal elíptica puede hacerse directamente en coordenadas cartesianas. Una vez resuelta la ecuación de Kepler,

$$\mathbf{r}(t) = a(\cos\chi - e)\hat{\mathbf{p}} + b\sin\chi\,\hat{\mathbf{q}},$$

$$\mathbf{u}(t) = \frac{an}{1 - e\cos\chi}\left[-\sin\chi\,\hat{\mathbf{p}} + \sqrt{1-e^2}\cos\chi\,\hat{\mathbf{q}}\right].$$

La segunda fórmula usa $\dot\chi = n/(1-e\cos\chi)$. Estas expresiones fijan posición y velocidad relativas; para pasar al laboratorio se añade el movimiento uniforme del centro de masa:

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{R}_0 + \mathbf{V}_0(t-t_0) - \frac{m_2}{m_1+m_2}\mathbf{r}(t),$$

$$\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{R}_0 + \mathbf{V}_0(t-t_0) + \frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{r}(t).$$

En el marco baricéntrico ambas curvas son elipses homotéticas de la relativa, con foco en el centro de masa y la misma excentricidad. El periastro de un cuerpo y el del otro apuntan

en direcciones opuestas; los dos alcanzan simultáneamente su menor distancia al centro. En un laboratorio donde $\mathbf{V}_0 \neq 0$, la traslación se suma durante cada vuelta y las trayectorias pueden dejar de ser curvas cerradas.

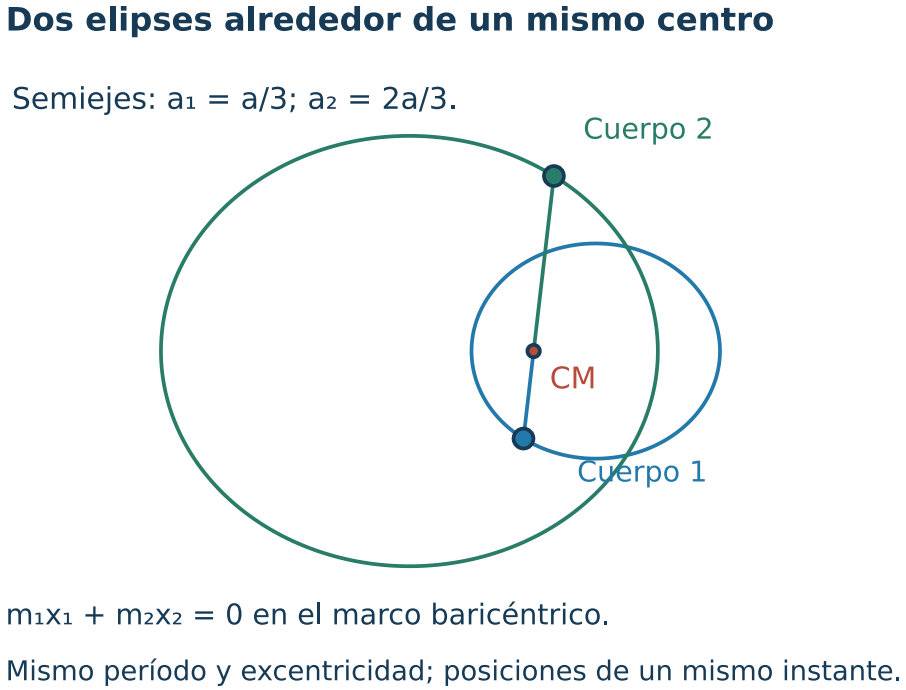


Figura 16.6. Para masas en razón dos a uno, los semiejes baricéntricos están en razón uno a dos. Las posiciones se dibujan al mismo instante y pertenecen a lados opuestos del centro de masa.

Una energía y un momento angular escalar fijan el tamaño y la forma, pero aún permiten girar la órbita en el espacio y desplazar su origen temporal. Incluso un radio y una rapidez conocidos pueden corresponder a estados diferentes, porque el ángulo de la velocidad determina h. El problema observacional exige recuperar esos datos a partir de mediciones: proyecciones en el cielo, distancias y velocidades. Las inferencias de los ejercicios declararán qué información se considera ya reconstruida.

Las parábolas y las hipérbolas admiten también relojes adaptados a su geometría; dos problemas los desarrollan sin forzar una continuación de la anomalía excéntrica elíptica. El caso $h = 0$ conserva la ecuación radial y puede alcanzar una colisión en tiempo finito. Distinguir esos dominios mantiene las fórmulas orbitales ligadas al estado físico que las produjo.

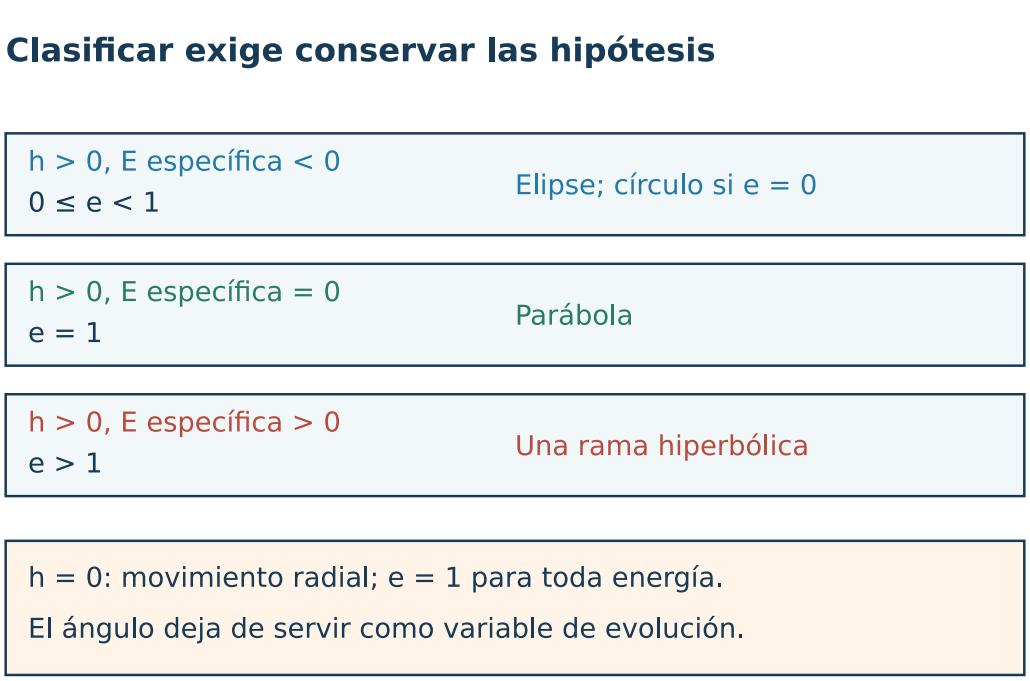


Figura 16.7. La excentricidad clasifica cónicas cuando $h > 0$. El movimiento radial tiene $h = 0$ y requiere su propia ecuación temporal; el valor $e = 1$ por sí solo pierde entonces capacidad de clasificación.

Ejercicios

Salvo indicación contraria, las coordenadas son relativas, el marco es inercial, las unidades son SI y $\kappa > 0$ es constante. Los problemas con datos reducidos usan parámetros ideales del modelo. Cuando se necesite un valor numérico de G, se usará $6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}^3/(\mathrm{kg\,s}^2)$. Cada solución debe recuperar el sentido de recorrido además de la curva.

1. Terminar la órbita inicial

Para $\kappa = 4\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2$, $\mathbf{r}_0 = (1, 0)\,\mathrm{m}$ y $\mathbf{u}_0 = (1, 2)\,\mathrm{m/s}$, calcule $\mathcal{E}, \mathbf{h}, \mathbf{e}, p, a, b, r_p, r_a, T$. Sitúe el estado respecto del periastro y determine su rapidez en ambos ápsides.

2. Una raíz angular con dos ramas

Cambie la velocidad inicial anterior por $(-1, 2)\,\mathrm{m/s}$. Compare energía, módulo del momento angular, excentricidad, orientación y signo de $\dot{r}$. Explique qué información pierde calcular f únicamente mediante un arcocoseno.

3. Recuperar una elipse desde dos extremos

Una órbita relativa tiene $r_p = 2\,\mathrm{m}$, $r_a = 6\,\mathrm{m}$ y $\kappa = 12\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2$. Halle $a, e, p, h, \mathcal{E}, T$ y las rapideces en los ápsides. Compruebe que ambas evaluaciones de la energía coinciden.

4. El mismo punto con tres destinos

En $\mathbf{r} = (1, 0)\,\mathrm{m}$, con $\kappa = 1\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2$, se dan velocidades $(0, 1)$, $(0, \sqrt{2})$ y $(0, 2)\,\mathrm{m/s}$. Clasifique las tres órbitas, calcule p, e y determine si el punto inicial es un periastro distinguido.

5. El ángulo que termina en el infinito

Una órbita tiene $\kappa = 2\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2$, $h = 2\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$ y $\mathcal{E} = 1\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$. Determine su excentricidad, periastro, intervalo de anomalía verdadera y rapidez asintótica. Explique por qué el extremo angular queda fuera de la trayectoria a tiempo finito.

6. Construir una cónica desde su foco

Parta de $r = p/(1 + e\cos f)$ con $p > 0$. Derive la ecuación cartesiana para $e = 1$ y la directriz correspondiente. Para $e > 1$, explique qué condición elimina la rama extra introducida al elevar al cuadrado.

7. Velocidad tangencial no significa circunferencia

En $r = 2\,\mathrm{m}$, con $\kappa = 8\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2$, la velocidad es puramente tangencial de magnitud $1\,\mathrm{m/s}$. Obtenga la excentricidad, clasifique el punto como periastro o apoastro y calcule el otro ápside. Compare la rapidez dada con la circular local.

8. Una órbita sin dirección privilegiada

Para $\kappa = 9\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2$, $\mathbf{r} = (4, 0)\,\mathrm{m}$ y $\mathbf{u} = (0, 3/2)\,\mathrm{m/s}$, calcule $\mathbf{e}$ y el período. Describa cómo fijar una época y un ángulo sin dividir por la excentricidad.

9. Repartir las masas de un binario elíptico

Se han reconstruido semiejes físicos baricéntricos $a_1 = 1{,}00 \times 10^8\,\mathrm{m}$, $a_2 = 3{,}00 \times 10^8\,\mathrm{m}$, período $T = 2{,}00 \times 10^5\,\mathrm{s}$ y excentricidad $e = 0{,}40$. Determine la masa total, las masas individuales y las separaciones extremas entre los cuerpos. Indique qué papel desempeña la excentricidad en la inferencia de masa.

10. Transportar un estado de la órbita

Para la elipse inicial, calcule posición y velocidad relativas en el apoastro usando la base del periastro. Suponga además $m_1 = 2m_2$, $\mathbf{R}(t_0) = (3, 1)\,\mathrm{m}$, $\mathbf{V}_0 = (1, 0)\,\mathrm{m/s}$. Exprese las posiciones de ambos cuerpos cuando se alcance ese apoastro; puede dejar el intervalo temporal en términos de n.

11. Un cuarto de vuelta que tarda poco

En una elipse con $e = 1/2$, calcule la fracción de período que transcurre desde el periastro hasta $f = \pi/2$. Compare con $1/4$ y explique la diferencia mediante la ley de áreas.

12. Invertir el reloj con una precisión declarada

Resuelva $\chi - \frac{1}{2}\sin\chi = 1$ con error menor que 10^{-6} radianes. Use el intervalo inicial garantizado y un método numérico; presente un valor y un residuo que certifique la precisión, sin basarse sólo en que dos iteraciones se parezcan. Para la elipse del ejemplo inicial, con $a = 4/3\,\mathrm{m}$, traduzca su certificado a una cota del error de posición relativa. Determine también qué residuo bastaría para garantizar un error espacial no mayor que un micrómetro, manteniendo exactos los parámetros y la orientación.

13. Lo delicado de una excentricidad grande

Para $e = 0{,}99$ y $\mathcal{M} = 0{,}001$, evalúe el primer paso de Newton desde $\chi_0 = \mathcal{M}$. Compare su valor con el intervalo garantizado. Si otro cálculo entrega residuo absoluto 2×10^{-8}, ¿qué error angular permite certificar la cota general?

14. Cuánto tiempo se permanece lejos

En una elipse con $e = 1/2$, determine la fracción del período durante la cual $r > a$. Use anomalía excéntrica e interprete el resultado como una proporción temporal, sin atribuirle uniformidad al ángulo verdadero.

15. Posición y velocidad desde la anomalía excéntrica

En una elipse con $a = 2\,\mathrm{m}$, $e = 3/5$, $\kappa = 8\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2$ y ejes orientados al periastro, tome $\chi = \pi/2$. Halle $r, \mathbf{r}, \mathbf{u}$, tiempo desde el periastro y anomalía verdadera. Compruebe energía y momento angular.

16. La rapidez sola deja una familia

En $r = 1\,\mathrm{m}$, con $\kappa = 4\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2$ y rapidez $2\,\mathrm{m/s}$, compare una velocidad tangencial con otra de componentes $(u_r, u_\theta) = (\sqrt{3}, 1)\,\mathrm{m/s}$. Determine las energías, excentricidades y ápsides. Explique qué dato adicional selecciona una órbita.

17. Un intervalo de períodos y masas

Se conoce un semieje relativo físico exacto $a = 10^8\,\mathrm{m}$ y se acota $T \in [0{,}99, 1{,}01] \times 10^5\,\mathrm{s}$. Halle un intervalo garantizado para la masa total. Compare con la estimación diferencial de su incertidumbre relativa y declare las limitaciones de tomar a como exacto.

18. Un reloj para la parábola

Para una órbita parabólica con $h > 0$, introduzca $D = \tan(f/2)$. Demuestre que

$$x = \frac{p}{2}(1 - D^2), \qquad y = pD, \qquad t - \tau = \frac{p^{3/2}}{2\sqrt{\kappa}}\left(D + \frac{D^3}{3}\right).$$

Aplique el resultado a $\kappa = 2\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2$, $r_p = 1\,\mathrm{m}$ y al punto saliente con $r = 2\,\mathrm{m}$. Determine el tiempo y la rapidez allí.

19. Un reloj para la hipérbola

Las funciones hiperbólicas se definen por $\cosh H = (\exp H + \exp(-H))/2$ y $\sinh H = (\exp H - \exp(-H))/2$. Para $e > 1$ defina $A = \kappa/(2\mathcal{E}) > 0$ y use

$$x = A(e - \cosh H), \qquad y = A\sqrt{e^2 - 1}\,\sinh H.$$

Obtenga r y $t - \tau$ mediante la ley de áreas. Evalúe el estado con $\kappa = 1\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2$, $A = 1\,\mathrm{m}$, $e = 2$, $H = \log 2$: calcule posición, radio, tiempo desde el periastro y rapidez. Explique por qué H recorre toda la recta real.

20. Una excentricidad que ya no clasifica

Considere un movimiento radial entrante con $\kappa = 4\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2$, $r_0 = 2\,\mathrm{m}$ y velocidad inicial cero. Calcule $\mathcal{E}, \mathbf{h}, \mathbf{e}$ y el tiempo hasta la colisión. Examine la afirmación «$e = 1$ implica una parábola» y localice la hipótesis que necesita.

Soluciones

1. Terminar la órbita inicial

La rapidez al cuadrado es $5\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$; al restarle $\kappa/r = 4\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$ a su mitad obtenemos $\mathcal{E} = -3/2\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$. El producto vectorial da $\mathbf{h} = 2\mathbf{e}_z\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$. Para el vector de excentricidad usamos $\mathbf{u}\times\mathbf{h} = (4,-2)$ en las unidades correspondientes: dividir por κ y restar $\mathbf{e}_r = (1,0)$ produce $\mathbf{e} = (0,-1/2)$. Así $p = 1\,\mathrm{m}$, $e = 1/2$ y

$$a = \frac{4}{3}\,\mathrm{m}, \quad b = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{m}, \quad r_p = \frac{2}{3}\,\mathrm{m}, \quad r_a = 2\,\mathrm{m}, \quad T = \frac{8\pi}{3\sqrt{3}}\,\mathrm{s} \approx 4{,}837\,\mathrm{s}.$$

La base del periastro es $\widehat{\mathbf{p}} = -\mathbf{e}_y$, $\widehat{\mathbf{q}} = \mathbf{e}_x$. Las componentes del radio dan $f_0 = \pi/2$, con $\dot r_0 > 0$. En los ápsides la velocidad es tangencial y su magnitud vale h/r: resulta $3\,\mathrm{m/s}$ en el periastro y $1\,\mathrm{m/s}$ en el apoastro. Su razón tres coincide con la razón inversa de los radios y ambas energías específicas valen $-3/2\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$.

2. Una raíz angular con dos ramas

El cambio de signo de la componente radial conserva la rapidez y $h = 2\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$; por tanto, conserva $\mathcal{E}, p, e, a$ y los ápsides. Sin embargo, $\mathbf{u}\times\mathbf{h} = (4,2)$ y $\mathbf{e} = (0,1/2)$: el periastro apunta hacia arriba. Su base orientada tiene $\widehat{\mathbf{p}} = \mathbf{e}_y$, $\widehat{\mathbf{q}} = -\mathbf{e}_x$. En el punto $(1,0)$ se tiene $\cos f = 0$, $\sin f = -1$, por lo que $f = -\pi/2$ módulo 2π. Es una rama entrante, de acuerdo con $\dot r = -1\,\mathrm{m/s}$.

El arcocoseno de cero devuelve $\pi/2$ para ambos signos del seno. Usar el par de componentes o la función atan2 conserva el cuadrante y permite decidir si el cuerpo se acerca al periastro o ya lo dejó atrás. Las dos curvas de este ejercicio tienen los mismos escalares orbitales y orientaciones distintas.

3. Recuperar una elipse desde dos extremos

Sumar y restar $r_p = a(1-e)$, $r_a = a(1+e)$ da $a = 4\,\mathrm{m}$ y $e = 1/2$. Luego $p = a(1-e^2) = 3\,\mathrm{m}$ y $h = \sqrt{\kappa p} = 6\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$. La energía específica es $\mathcal{E} = -\kappa/(2a) = -3/2\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$, y

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{64}{12}}\,\mathrm{s} = \frac{8\pi}{\sqrt{3}}\,\mathrm{s}.$$

En el periastro la rapidez es $6/2 = 3\,\mathrm{m/s}$ y en el apoastro $6/6 = 1\,\mathrm{m/s}$. Evaluar $u^2/2 - \kappa/r$ da respectivamente $9/2-6 = -3/2$ y $1/2-2 = -3/2$. El acuerdo comprueba que los extremos pertenecen a la misma energía y al mismo momento angular.

4. El mismo punto con tres destinos

Para una velocidad tangencial positiva v en ese punto, $h = v$, $p = v^2$ y $\mathbf{e} = (v^2-1,0)$ al expresar las magnitudes en las unidades dadas. Con $v = 1$, la energía es $-1/2$, $p = 1$ y $e = 0$: se obtiene una circunferencia de radio un metro sin periastro distinguido. Con $v = \sqrt{2}$, la energía es cero, $p = 2\,\mathrm{m}$ y $e = 1$: el punto es el periastro de una parábola. Con $v = 2$, la energía es $1\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$, $p = 4\,\mathrm{m}$ y $e = 3$: es el periastro de una hipérbola.

En los dos últimos casos, la velocidad supera la circular y la aceleración de la distancia inicial es $\ddot r = v^2/r - \kappa/r^2 > 0$. Esa comprobación identifica directamente un mínimo de distancia y concuerda con la dirección positiva de $\mathbf{e}$.

5. El ángulo que termina en el infinito

Resulta $p = h^2/\kappa = 2\,\mathrm{m}$ y $e = \sqrt{1 + 2\mathcal{E}h^2/\kappa^2} = \sqrt{3}$. Así

$$r_p = \frac{2}{1+\sqrt{3}}\,\mathrm{m} = (\sqrt{3}-1)\,\mathrm{m}, \qquad f_\infty = \arccos(-1/\sqrt{3}) \approx 2{,}1863.$$

El dominio físico es $(-f_\infty, f_\infty)$ y la rapidez tiende a $\sqrt{2\mathcal{E}} = \sqrt{2}\,\mathrm{m/s}$. En la rama saliente, el radio puede crecer sin cota, mientras que la rapidez permanece acotada a partir de cualquier radio fijo. Una distancia ilimitada con rapidez acotada requiere tiempo infinito. El ángulo posee un límite finito porque $\dot{f} = h/r^2$ disminuye suficientemente; ese límite describe la dirección asintótica del radio y no una posición adicional a distancia finita.

6. Construir una cónica desde su foco

Para $e = 1$, la ecuación es $r + x = p$. Como $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, al cuadrar obtenemos $y^2 = p^2 - 2px$. Esta parábola tiene $x \le p/2$, por lo que $p - x > 0$; la operación es reversible. La distancia de un punto a la recta $x = p$ es $p - x$, igual a su distancia al foco situado en el origen. Ésa es su directriz.

Para $e > 1$, la ecuación cuadrática describe dos ramas, pero el paso anterior exige $r = p - ex > 0$. La rama física contiene el vértice $x = p/(1 + e)$ y satisface esa desigualdad; la otra corresponde al signo opuesto de la raíz cuadrada. El requisito de positividad debe acompañar a la ecuación elevada al cuadrado para conservar equivalencia.

7. Velocidad tangencial no significa circunferencia

Se tiene $h = rv = 2\,\mathrm{m^2/s}$, $p = h^2/\kappa = 1/2\,\mathrm{m}$ y $\mathcal{E} = 1/2 - 4 = -7/2\,\mathrm{m^2/s^2}$. Luego $a = 8/7\,\mathrm{m}$ y $e = 3/4$. El radio inicial es $a(1 + e) = 2\,\mathrm{m}$: se encuentra en el apoastro, y el periastro vale $a(1 - e) = 2/7\,\mathrm{m}$.

La rapidez circular local sería $\sqrt{\kappa/r} = 2\,\mathrm{m/s}$. La rapidez dada es menor; por tanto, $\ddot{r} = v^2/r - \kappa/r^2 = 1/2 - 2 = -3/2\,\mathrm{m/s^2}$ y la distancia comienza a disminuir. La condición tangencial sólo garantiza $\dot{r} = 0$ en ese instante. Mantener el radio exige además el balance circular.

8. Una órbita sin dirección privilegiada

El momento específico es $h = 6\,\mathrm{m^2/s}$ y $\mathcal{E} = (9/4)/2 - 9/4 = -9/8\,\mathrm{m^2/s^2}$. El producto $\mathbf{u} \times \mathbf{h} = (9, 0)$ produce $\mathbf{e} = (0, 0)$. Así $a = p = 4\,\mathrm{m}$ y

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{64}{9}}\,\mathrm{s} = \frac{16\pi}{3}\,\mathrm{s}.$$

Elegimos el eje positivo de x como referencia y el instante inicial como época. El ángulo cumple $f = nt$ si se toma ese instante como cero; también podemos usar $\chi = f$ y $\mathcal{M} = \chi$. Las posiciones se reconstruyen con $4(\cos nt, \sin nt)$, sin normalizar el vector de excentricidad nulo. El eje elegido sirve para medir fase y carece de privilegio dinámico.

9. Repartir las masas de un binario elíptico

El semieje relativo es $a = a_1 + a_2 = 4{,}00 \times 10^8\,\mathrm{m}$. La tercera ley da

$$M = m_1 + m_2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2} \approx 9{,}470 \times 10^{26}\,\mathrm{kg}.$$

El balance baricéntrico proporciona $m_1/m_2 = a_2/a_1 = 3$. Así $m_1 = 3M/4 \approx 7{,}103 \times 10^{26}\,\mathrm{kg}$ y $m_2 = M/4 \approx 2{,}368 \times 10^{26}\,\mathrm{kg}$. Las separaciones extremas son $a(1-e) = 2{,}40 \times 10^8\,\mathrm{m}$ y $a(1 + e) = 5{,}60 \times 10^8\,\mathrm{m}$.

La masa total inferida a partir de a, T es independiente de e dentro del modelo. La excentricidad sí interviene al convertir otras mediciones en esos elementos, al obtener las separaciones extremas y al predecir la distribución temporal. Aquí los semiejes físicos ya están reconstruidos, condición que evita confundirlos con proyecciones angulares.

10. Transportar un estado de la órbita

En el apoastro $f=\pi$, de modo que $\mathbf{r}_a=-r_a\widehat{\mathbf{p}}=(0,2)\,\mathrm{m}$. La expresión de velocidad da $\mathbf{u}_a=(\kappa/h)(e-1)\widehat{\mathbf{q}}=(-1,0)\,\mathrm{m/s}$. El sentido es coherente con $\mathbf{h}$ hacia $+z$.

Desde $\chi_0=\pi/3$ hasta el apoastro $\chi_a=\pi$, el intervalo temporal es

$$\Delta t=\frac{\pi-(\pi/3-\sqrt{3}/4)}{n}=\frac{2\pi/3+\sqrt{3}/4}{n}.$$

El centro llega a $\mathbf{R}_a=(3+\Delta t,1)\,\mathrm{m}$, entendiendo Δt en segundos y la velocidad de traslación en metros por segundo. Con los factores de masa $1/3, 2/3$,

$$\mathbf{x}_{1,a}=(3+\Delta t,1/3)\,\mathrm{m},\qquad \mathbf{x}_{2,a}=(3+\Delta t,7/3)\,\mathrm{m}.$$

Su diferencia es $(0,2)\,\mathrm{m}$ y su promedio ponderado recupera $\mathbf{R}_a$. Las velocidades de laboratorio serían $(4/3,0)$ y $(1/3,0)\,\mathrm{m/s}$: restarlas devuelve $(-1,0)\,\mathrm{m/s}$.

11. Un cuarto de vuelta que tarda poco

Las fórmulas de conversión dan $\cos\chi=e=1/2$ y $\sin\chi=\sqrt{3}/2$ para el punto saliente con $f=\pi/2$. Así $\chi=\pi/3$ y

$$\frac{t-\tau}{T}=\frac{\chi-e\sin\chi}{2\pi}=\frac{\pi/3-\sqrt{3}/4}{2\pi}\approx 0{,}09775.$$

Se ha recorrido un cuarto del ángulo verdadero durante aproximadamente el 9,78% del período. Cerca del periastro el radio es pequeño y la velocidad angular h/r^2 es grande. La fracción temporal coincide con la fracción del área focal barrida, que en este tramo es menor que un cuarto del área de la elipse.

12. Invertir el reloj con una precisión declarada

La raíz pertenece a $[1-1/2,1+1/2]=[0{,}5,1{,}5]$. Para $F(\chi)=\chi-\tfrac{1}{2}\sin\chi-1$, los signos en los extremos son negativo y positivo. Una bisección de veinte pasos deja una anchura $2^{-20}<10^{-6}$, por lo que su punto medio tendría error menor que 2^{-21}. También podemos acelerar con Newton, conservando ese intervalo como respaldo.

Un valor obtenido es $\widetilde{\chi}=1{,}4987011335$. Sustituirlo da un residuo de módulo menor que 2×10^{-11}, incluso dejando margen frente al redondeo de las funciones trigonométricas. Como $1-e=1/2$, el error angular queda por debajo de 4×10^{-11} radianes y satisface ampliamente la tolerancia pedida. El residuo comprueba la ecuación; la cota de pendiente transforma esa comprobación en una estimación del error de la solución.

Con $a=4/3\,\mathrm{m}$, la cota angular certificada implica

$$\|\Delta\mathbf{r}\|<\frac{4}{3}(4\times10^{-11})\,\mathrm{m}<5{,}34\times10^{-11}\,\mathrm{m}.$$

Para una tolerancia de un micrómetro, la condición suficiente sobre el residuo es $|R|\le(1/2)(10^{-6})/(4/3)=3{,}75\times10^{-7}$. La elección de esa tolerancia puede hacerse antes de iterar y proporciona un criterio de parada ligado a la posición que se quiere predecir. El certificado incluye la evaluación del residuo; la aritmética y las funciones trigonométricas utilizadas deben tener una precisión compatible con la cota que se declara.

13. Lo delicado de una excentricidad grande

Desde $\chi_0=0{,}001$, el residuo es $-0{,}99\sin(0{,}001)\approx-0{,}000989999835$ y la derivada vale $1-0{,}99\cos(0{,}001)\approx0{,}010000495$. El primer paso resulta $\chi_1\approx0{,}0999951$, dentro del intervalo garantizado $[-0{,}989,0{,}991]$. En este caso el paso es admisible, aunque la corrección es casi cien veces el valor inicial; la pequeñez del denominador explica ese comportamiento.

Un residuo absoluto 2×10^{-8} permite certificar error angular a lo sumo 2×10^{-6} radianes, porque $1-e=0{,}01$. Esta cota es uniforme y conservadora. Una precisión residual fijada sin atender a la excentricidad puede dar garantías angulares muy diferentes. El ejemplo tampoco demuestra convergencia global de Newton sin protección; para eso conservamos el intervalo y recurrimos a bisecciones.

14. Cuánto tiempo se permanece lejos

La condición $r>a$ equivale a $1-e\cos\chi>1$ y, como $e>0$, a $\cos\chi<0$. Durante una vuelta corresponde a $\pi/2<\chi<3\pi/2$. La diferencia de anomalía media en los extremos es

$$\left(\frac{3\pi}{2}+e\right)-\left(\frac{\pi}{2}-e\right)=\pi+2e.$$

La fracción temporal es $(\pi+1)/(2\pi)=1/2+1/(2\pi)\approx0{,}65915$. La igualdad $r=a$ ocurre en dos instantes aislados y no altera la duración. Se permanece cerca del apoastro más tiempo, tal como predice el menor barrido angular allí. La parametrización excéntrica facilita el cálculo, pero tampoco es uniforme en el tiempo: el factor $1-e\cos\chi$ aparece precisamente en su reloj.

15. Posición y velocidad desde la anomalía excéntrica

Se tiene $b=a\sqrt{1-e^2}=8/5\,\mathrm{m}$ y $n=\sqrt{\kappa/a^3}=1\,\mathrm{s}^{-1}$. Para $\chi=\pi/2$,

$$\mathbf{r}=(-6/5,8/5)\,\mathrm{m},\qquad r=2\,\mathrm{m},\qquad \mathbf{u}=(-2,0)\,\mathrm{m/s}.$$

El tiempo desde el periastro es $(\pi/2-3/5)\,\mathrm{s}\approx0{,}9708\,\mathrm{s}$. Las componentes de anomalía verdadera son $\cos f=-3/5$ y $\sin f=4/5$, por lo que $f\approx2{,}2143$ radianes, en el segundo cuadrante. El radio está aumentando, pues $\mathbf{r}\cdot\mathbf{u}/r=6/5\,\mathrm{m/s}$.

La energía específica vale $4/2-8/2=-2\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$, igual a $-\kappa/(2a)$. El momento específico es $h=xu_y-yu_x=16/5\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$ y su cuadrado coincide con $\kappa a(1-e^2)=256/25\,\mathrm{m}^4/\mathrm{s}^2$. Son dos controles independientes de la reconstrucción.

16. La rapidez sola deja una familia

Ambos estados tienen $\mathcal{E}=2-4=-2\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$ y $a=1\,\mathrm{m}$. En el tangencial, $h=2\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$ y $e=0$; la órbita es circular de radio un metro. En el segundo estado, $h=1\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$ y

$$e=\sqrt{1-\frac{4}{16}}=\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad r_p=1-\frac{\sqrt{3}}{2},\quad r_a=1+\frac{\sqrt{3}}{2},$$

con radios en metros. La componente radial positiva selecciona un tramo saliente y la orientación completa de la velocidad permite calcular el vector de excentricidad. Los estados comparten energía y período $T=\pi\,\mathrm{s}$, pero sus distancias extremas y sus curvas difieren. El ángulo entre posición y velocidad, junto con la orientación espacial, aporta la información que la rapidez omite.

17. Un intervalo de períodos y masas

La masa $M=4\pi^2a^3/(GT^2)$ decrece con $T>0$. Por ello el intervalo garantizado es

$$\frac{4\pi^2(10^8)^3}{G(1{,}01\times10^5)^2}\le M\le\frac{4\pi^2(10^8)^3}{G(0{,}99\times10^5)^2}.$$

Evaluado con redondeo hacia afuera, queda $M\in[5{,}802,6{,}040]\times10^{25}\,\mathrm{kg}$. El valor central es aproximadamente $5{,}919\times10^{25}\,\mathrm{kg}$. La variación diferencial $dM/M=-2\,dT/T$ estima un 2% de variación relativa ante un 1% de período; las cotas exactas son ligeramente asimétricas.

Tomar a como exacto concentra toda la incertidumbre en el reloj. Si también se midiera con error pequeño, aparecería el término $3\,da/a$; para cotas garantizadas habría que propagar ambos intervalos mediante monotonía y considerar cualquier dependencia entre los datos. El intervalo calculado es una cota de parámetros dentro del modelo y de los supuestos de medición declarados.

18. Un reloj para la parábola

Las identidades $\cos f = (1-D^2)/(1+D^2)$, $\sin f = 2D/(1+D^2)$ convierten $r = p/(1+\cos f)$ en $r = p(1+D^2)/2$. Multiplicar por seno y coseno da las coordenadas pedidas. Para obtener el reloj calculamos el área focal:

$$x\frac{dy}{dD} - y\frac{dx}{dD} = \frac{p^2}{2}(1+D^2), \qquad \frac{dt}{dD} = \frac{p^2}{2h}(1+D^2).$$

Como $h = \sqrt{\kappa p}$, integrar desde $D = 0, t = \tau$ produce $t - \tau = p^{3/2}(D + D^3/3)/(2\sqrt{\kappa})$. Su derivada es positiva para todo D, de modo que distingue el tramo entrante, $D < 0$, del saliente, $D > 0$.

En el caso dado, $p = 2r_p = 2\,\mathrm{m}$ y $r = 2\,\mathrm{m}$ implica $D^2 = 1$. La rama saliente selecciona $D = 1$, así $f = \pi/2$, $(x, y) = (0, 2)\,\mathrm{m}$ y $t - \tau = 4/3\,\mathrm{s}$. La energía cero da rapidez $\sqrt{2\kappa/r} = \sqrt{2}\,\mathrm{m/s}$. Cuando D crece sin cota, también lo hacen el radio y el tiempo, en acuerdo con el escape marginal.

19. Un reloj para la hipérbola

Las definiciones exponenciales dan $\cosh^2 H - \sinh^2 H = 1$, $(\sinh H)' = \cosh H$ y $(\cosh H)' = \sinh H$; la primera identidad se obtiene restando los cuadrados y las otras derivando las exponenciales. Esa identidad permite comprobar que $x^2 + y^2 = A^2(e\cosh H - 1)^2$. Como $e > 1$, su raíz positiva es $r = A(e\cosh H - 1)$. Además $p = A(e^2 - 1)$ y $r + ex = p$, por lo que la parametrización pertenece a la rama física de la cónica.

El área focal proporciona

$$x\frac{dy}{dH} - y\frac{dx}{dH} = A^2\sqrt{e^2-1}\,(e\cosh H - 1).$$

Dividir por $h = \sqrt{\kappa A(e^2-1)}$ e integrar desde el periastro $H = 0$ da

$$t - \tau = \sqrt{\frac{A^3}{\kappa}}\,(e\sinh H - H).$$

La derivada temporal es positiva y el miembro derecho tiende a $\pm\infty$ cuando $H \to \pm\infty$; por ello cubre todo tiempo real y las dos mitades del encuentro, mientras f permanece en un intervalo finito.

Para $H = \log 2$, $\cosh H = 5/4$ y $\sinh H = 3/4$. Resulta $(x, y) = (3/4, 3\sqrt{3}/4)\,\mathrm{m}$, $r = 3/2\,\mathrm{m}$ y $t - \tau = (3/2 - \log 2)\,\mathrm{s} \approx 0{,}80685\,\mathrm{s}$. La energía específica es $\kappa/(2A) = 1/2\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$, de modo que la rapidez es $\sqrt{1 + 4/3} = \sqrt{7/3}\,\mathrm{m/s}$. El signo positivo de H corresponde a la rama saliente.

20. Una excentricidad que ya no clasifica

Los datos dan $\mathcal{E} = -\kappa/r_0 = -2\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$ y $\mathbf{h} = \mathbf{0}$. El vector de excentricidad vale $\mathbf{e} = -\mathbf{e}_r$, con módulo uno, y permanece constante mientras el movimiento sigue sobre el mismo rayo y $r > 0$. La energía negativa ya muestra que la clasificación parabólica sería errónea.

La ecuación radial es $\dot r = -\sqrt{2\kappa(1/r - 1/r_0)}$ para el tramo entrante posterior a la liberación. Con $r = r_0\cos^2\eta$, la integral hasta el centro da

$$t_{\mathrm{col}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r_0^3}{2\kappa}} = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{s}.$$

La deducción polar de las cónicas requería $h > 0$ para usar el ángulo como variable y obtener $p > 0$. Con $h = 0$, la identidad $e^2 = 1 + 2\mathcal{E}h^2/\kappa^2$ reduce siempre a $e = 1$ y pierde la información energética. La solución llega a la singularidad puntual en tiempo finito; su continuación física exige un modelo para los cuerpos y su interacción a corta distancia.

Lecturas y conexiones

Spivak, *Physics for Mathematicians. Mechanics I*, capítulo 4, desarrolla la ecuación angular de las fuerzas centrales, la geometría gravitatoria y la relación entre energía y período; los problemas 10 y 11 examinan las masas comparables y la ecuación de Kepler. El desarrollo de este capítulo conserva explícitas las unidades específicas, la reconstrucción vectorial y las ramas temporales para convertir ese material en un procedimiento de resolución desde datos iniciales.

Sears y Zemansky, *Física universitaria*, volumen 1, §13.5, y Serway y Jewett, *Física para ciencias e ingeniería*, volumen 1, §13.4, relacionan las leyes de Kepler con gravitación, áreas y observación. La tercera ley se ha formulado aquí para el semieje relativo y la suma de masas; las aplicaciones a una fuente casi inmóvil se recuperan controlando la razón de masas. El encuentro hiperbólico deja preparada la geometría que permitirá estudiar desviaciones y observaciones de dispersión.

Capítulo 17

Dispersión clásica

Un haz de partículas llega con rapidez conocida a una región donde una interacción central modifica sus trayectorias. Un detector situado lejos registra las direcciones de salida. Queremos relacionar esa distribución con la fuerza que actuó durante el encuentro. La pregunta obliga a unir dos cálculos: la desviación de una trayectoria preparada y el número de partículas que acaba dentro de una ventana angular.

Tomemos como primer modelo una interacción repulsiva de energía potencial $U(r) = \alpha/r$, con $\alpha = 4\,\mathrm{J\,m}$. La masa reducida es $m_r = 1\,\mathrm{kg}$ y la rapidez relativa lejana es $v_\infty = 2\,\mathrm{m/s}$. Una trayectoria incidente pasa, en su prolongación asintótica, a distancia $b = \sqrt{3}\,\mathrm{m}$ del centro. Calcularemos cuánto gira su velocidad y qué conjunto de preparaciones produce desviaciones entre 60° y 90°. La segunda pregunta convertirá un ángulo en un área y dará sentido a la sección eficaz.

El capítulo puede leerse como una profundización del problema de dos cuerpos. Se mantienen sus conservaciones, la masa reducida y la reconstrucción del laboratorio. El desarrollo supone encuentros clásicos, no relativistas, con interacción conservativa central y datos asintóticos bien definidos. La comparación con un detector real requiere además especificar su aceptación, el ancho del haz y las condiciones en que pueden despreciarse otros encuentros.

Preparar un encuentro desde lejos

Denotemos por m_p la masa del proyectil y por m_t la del blanco. Conservamos la convención relativa de los capítulos anteriores tomando el blanco como cuerpo 1 y el proyectil como cuerpo 2:

$$\mathbf{r} = \mathbf{x}_p - \mathbf{x}_t, \qquad m_r = \frac{m_p m_t}{m_p + m_t}, \qquad m_r \ddot{\mathbf{r}} = -U'(r)\mathbf{e}_r.$$

Al elegir la referencia $U(\infty) = 0$, un encuentro que llega desde el infinito tiene energía relativa positiva $E = m_r v_\infty^2/2$. En el marco relativo elegimos la velocidad incidente $v_\infty \mathbf{e}_x$ y una trayectoria que entra por encima del centro. Su momento angular apunta hacia $-\mathbf{e}_z$. El módulo conserva la información que necesitaremos para el radio mínimo.

Definición. El parámetro de impacto $b \geq 0$ es la distancia perpendicular entre el centro de fuerza y la asíntota incidente; equivalentemente, $b = L/(m_r v_\infty)$, donde L es el módulo del momento angular relativo. El ángulo de dispersión $\chi \in [0, \pi]$ es el ángulo entre las velocidades relativas incidente y saliente:

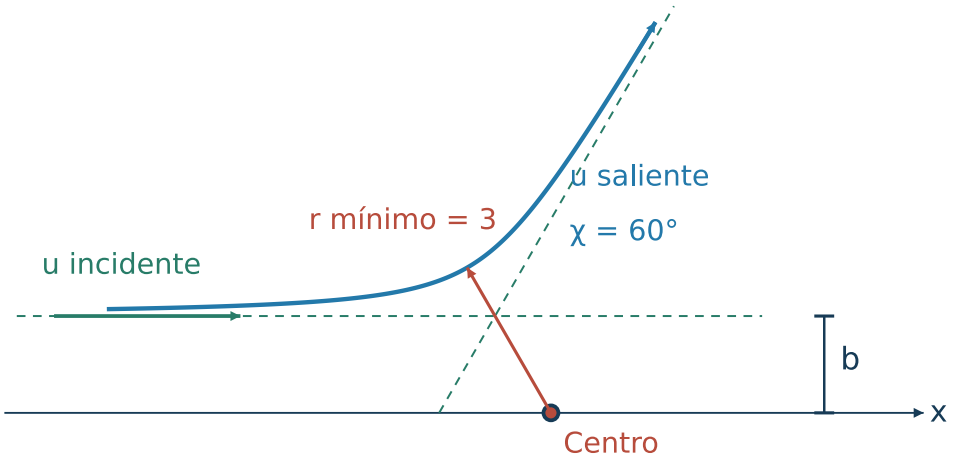
$$\cos\chi = \frac{\mathbf{u}_{\mathrm{in}} \cdot \mathbf{u}_{\mathrm{out}}}{v_\infty^2}.$$

La igualdad de sus módulos proviene de la conservación de energía y de $U(\infty) = 0$. Para encuentros que admiten dirección asintótica e intercepto transversal, la identidad del parámetro se obtiene tomando el producto vectorial de la recta incidente con su velocidad. El parámetro de impacto tiene unidades de longitud; describe la preparación lejana y suele diferir de la distancia mínima alcanzada durante la interacción.

Usaremos también un ángulo orientado ψ en el plano dibujado, desde $+x$ hacia la velocidad saliente, positivo hacia $+y$. Para el haz situado por encima del centro, una repulsión produce

una desviación positiva y una atracción una negativa en los encuentros sencillos. El detector angular que integra todos los azimuts registra su magnitud χ; conocer además el lado de salida puede aportar información sobre el signo de la interacción.

Preparar un encuentro y medir el giro



α = 4 J·m; m_r = 1 kg; v∞ = 2 m/s; b = √3 m.

Las flechas incidentes y salientes comparan velocidades.

Figura 17.1. Trayectoria repulsiva del ejemplo inicial y sus asíntotas. El parámetro de impacto se mide respecto de la preparación incidente; el giro compara las direcciones de las velocidades, no los radios de los puntos lejanos de entrada y salida.

Obtener la desviación a partir del movimiento radial

La energía separa el acercamiento y el alejamiento mediante

$$\dot r^2 = v_\infty^2 \left(1 - \frac{U(r)}{E} - \frac{b^2}{r^2}\right).$$

La expresión entre paréntesis determina los radios accesibles. Su primer cero encontrado al entrar desde el infinito es el radio de retorno, siempre que el encuentro efectivamente vuelva a salir. Una raíz doble o una caída al centro requieren otro examen; la construcción siguiente declara un retorno simple y una rama conectada con el infinito.

Proposición. Sea $b > 0$ y sea U continuamente diferenciable para $r \geq r_{\mín} > 0$, con límite cero en el infinito. Supongamos que

$$Q(r) = 1 - \frac{U(r)}{E} - \frac{b^2}{r^2}$$

cumple $Q(r_{\mín}) = 0$, $Q'(r_{\mín}) > 0$ y $Q(r) > 0$ para $r > r_{\mín}$. Supongamos además que el encuentro admite las direcciones asintóticas descritas y que converge la integral

$$I(b, E) = \int_{r_{\mín}}^{\infty} \frac{b\, dr}{r^2 \sqrt{Q(r)}}.$$

El ángulo total barrido por el radio durante el encuentro es $2I$. Para la entrada por encima del centro, un representante continuo del giro de la velocidad es $\psi = \pi - 2I$; su ángulo no orientado es

$$\chi = \arccos\big(\cos(\pi - 2I)\big).$$

Demostración. La conservación angular da $|\dot\theta| = b v_\infty / r^2$. En el tramo saliente, $\dot r = v_\infty \sqrt{Q(r)}$, por lo que el módulo del cambio angular entre el retorno y el infinito es la integral indicada. La raíz simple implica $Q(r) \sim Q'(r_{\mín})(r - r_{\mín})$ cerca del retorno: la singularidad inversa de su raíz cuadrada es integrable y el retorno se alcanza en tiempo finito desde cualquier radio mayor fijo. En el acercamiento, el signo negativo de $\dot r$ reproduce la misma integral angular entre el infinito y el retorno. Los dos barridos tienen igual módulo y el total es $2I$. En la entrada lejana, el radio apunta hacia la izquierda mientras la velocidad apunta hacia la derecha. En la salida, radio y velocidad tienen la misma dirección límite. Como el radio gira en sentido horario para la preparación elegida, la dirección final, continuada angularmente, es $\pi - 2I$. Pasar al ángulo entre dos vectores da la expresión con arcocoseno. □

Para un encuentro con $0 < 2I < 2\pi$, se puede escribir $\chi = |\pi - 2I|$. La forma con coseno conserva su significado si una interacción produce vueltas adicionales. En esos casos, distintos parámetros de impacto pueden terminar en una misma dirección: el conteo posterior tendrá que sumar sus contribuciones. En el potencial inverso del radio, cada $b > 0$ determina una desviación de magnitud única y monótona.

Resolver la interacción inversa del radio

Escribamos $U(r) = \alpha / r$ con $\alpha \neq 0$. La fuerza relativa es $\alpha \mathbf{e}_r / r^2$: el signo positivo corresponde a repulsión y el negativo a atracción. Separar el signo de la intensidad evita trasladar sin modificación una fórmula gravitatoria a un encuentro repulsivo. Introducimos la longitud positiva

$$a_* = \frac{|\alpha|}{2E} = \frac{|\alpha|}{m_r v_\infty^2}.$$

Proposición. Para $b > 0$, el encuentro con $U(r) = \alpha / r$ tiene

$$\chi = 2 \arctan \frac{a_*}{b}, \qquad b = a_* \cot \frac{\chi}{2}, \qquad 0 < \chi < \pi,$$

$$r_{\mín} = \frac{\alpha}{2E} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2E}\right)^2 + b^2}.$$

Para la entrada por encima del centro, $\psi = \operatorname{sgn}(\alpha)\chi$.

Demostración. La condición $Q(r) = 0$, multiplicada por r^2, es $r^2 - (\alpha/E) r - b^2 = 0$. Sus raíces tienen producto $-b^2 < 0$, así que sólo una es positiva; es la expresión enunciada y constituye un retorno simple. Para evaluar el barrido introducimos $z = b/r$, $s = \operatorname{sgn}(\alpha)$ y $x = a_*/b > 0$. La integral se convierte en

$$I = \int_0^{z_{\máx}} \frac{dz}{\sqrt{1 - 2sxz - z^2}}, \qquad z_{\máx} = -sx + \sqrt{1 + x^2}.$$

Completar el cuadrado deja el radicando $1 + x^2 - (z + sx)^2$. Una primitiva es $\arcsin((z + sx)/\sqrt{1 + x^2})$; evaluar entre los extremos da $I = \pi/2 - s \arctan x$. La identidad trigonométrica usada es $\arcsin(x/\sqrt{1 + x^2}) = \arctan x$ para $x > 0$. En consecuencia, $\psi = \pi - 2I = 2s \arctan x$, cuyo módulo está entre cero y π. Despejar la tangente de la mitad del ángulo proporciona la relación inversa. □

En el ejemplo de apertura, $E = 2\,\mathrm{J}$ y $a_* = 1\,\mathrm{m}$. El parámetro $b = \sqrt{3}\,\mathrm{m}$ produce $\chi = \pi/3$, y la distancia mínima es $1 + \sqrt{1+3} = 3\,\mathrm{m}$. Si se cambia el signo de α conservando su módulo y la preparación, la magnitud del giro sigue siendo $\pi/3$, pero la partícula sale hacia abajo y alcanza $r_{\mathrm{mín}} = 1\,\mathrm{m}$. El radio mínimo y el lado de salida permiten distinguir dos interacciones que producen la misma distribución de magnitudes angulares.

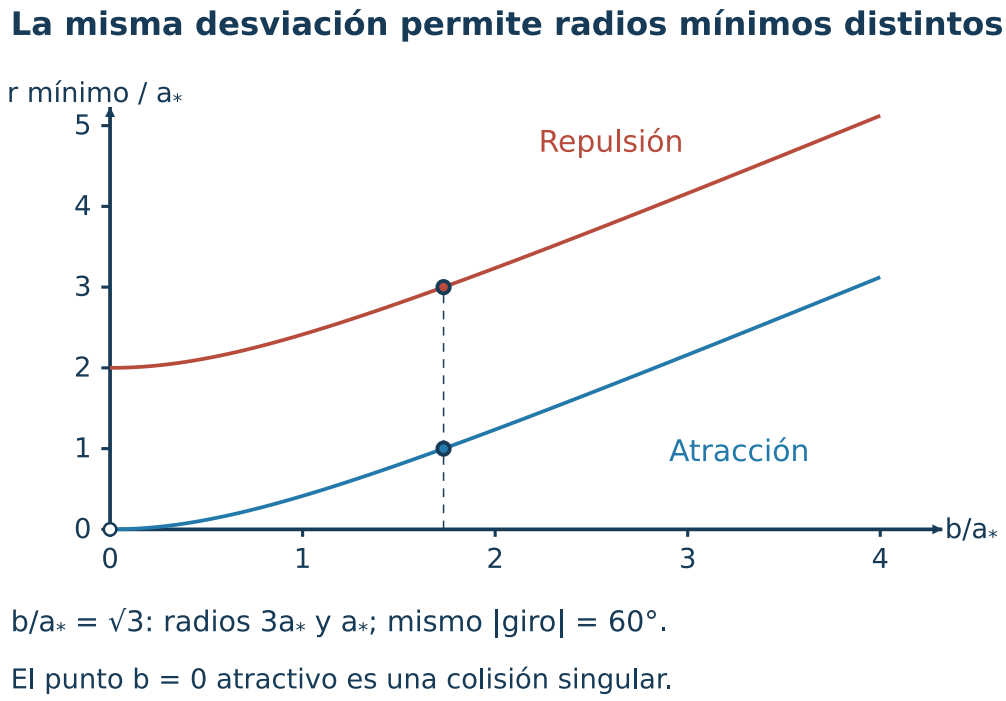


Figura 17.2. Radios mínimos para el mismo valor de a_* y distintos parámetros de impacto. La rama atractiva se aproxima al centro cuando b tiende a cero; el encuentro radial atractivo alcanza una singularidad y necesita tratamiento separado.

La conexión con Kepler también es explícita. La órbita atractiva es una hipérbola de excentricidad $e = \sqrt{1 + (b/a_*)^2}$ y satisface $\sin(\chi/2) = 1/e$. La repulsión recorre una rama hiperbólica con el mismo valor de esa excentricidad, aunque el foco de fuerza queda al otro lado de la geometría pertinente. La igualdad de magnitudes angulares procede de ambas geometrías y queda justificada por la integral, sin tener que identificar sus ramas.

En el límite $b \to 0$, el ángulo tiende a π. Para repulsión, el encuentro frontal se detiene a distancia $2a_*$ y regresa. Para atracción puntual, $b = 0$ conduce al centro y la ecuación singular no determina por sí sola una trayectoria saliente. El valor límite de la fórmula angular conserva la información de encuentros con $b > 0$; extenderlo a una colisión central exige especificar otra física.

Del área de preparación al ángulo sólido

Un haz uniforme contiene más partículas en una corona ancha que en una estrecha. El radio de esa corona es el parámetro de impacto, de modo que la ley $b \mapsto \chi$ transforma áreas de preparación en intervalos de direcciones. Para efectuar el conteo en el espacio necesitamos medir las direcciones por ángulo sólido.

Definición. La sección eficaz $\sigma(A)$ de un conjunto de direcciones salientes A es el área del plano de impacto formada por las preparaciones que salen en esas direcciones. En coordenadas polares alrededor del eje incidente, el elemento de ángulo sólido es $d\Omega = \sin\chi\, d\chi\, d\varphi$. Cuando existe una densidad respecto de esa medida, la denotamos $D(\chi) = d\sigma/d\Omega$ para una interacción con simetría axial.

El ángulo sólido de una región es su área sobre la esfera de radio unidad. En una esfera de radio R, el área correspondiente es $R^2 d\Omega$; un detector pequeño y perpendicular al radio subtiene aproximadamente su área dividida por R^2. La unidad habitual es el estereorradián, adimensional en el análisis dimensional. La densidad D se expresa en m^2/sr, mientras que $\sigma(A)$ se expresa en m^2.

La forma $d\Omega = \sin\chi\, d\chi\, d\varphi$ puede reconstruirse tomando una banda de la esfera unidad: su ancho meridiano es $d\chi$ y su longitud en azimut es $\sin\chi\, d\varphi$. Integrar todo el azimut da $2\pi \sin\chi\, d\chi$. La geometría del plano de impacto produce, por su parte, una corona de área $2\pi b\, db$.

Proposición. Supongamos dispersión central con simetría axial y una ley angular que admite, cerca de $\chi \in (0,\pi)$, un número finito de ramas inversas diferenciables $b_i(\chi) > 0$, sin puntos críticos. Entonces

$$D(\chi) = \sum_{i} \frac{b_i(\chi)}{\sin\chi} \left| \frac{db_i}{d\chi} \right| .$$

Demostración. En una rama monótona, las preparaciones que llegan a una banda angular de ancho $d\chi$ ocupan una corona de área $2\pi b_i |db_i/d\chi| d\chi$ a primer orden. Esa banda ocupa ángulo sólido $2\pi \sin\chi\, d\chi$. El cociente proporciona la contribución de la rama a la densidad. El valor absoluto conserva un área positiva tanto si el parámetro aumenta como si disminuye con el ángulo. Cuando varias coronas disjuntas llegan a la misma banda, sus áreas se suman; las hipótesis de finitud y regularidad permiten efectuar esa suma local. Dividir por el ángulo sólido da la fórmula enunciada. $\square$

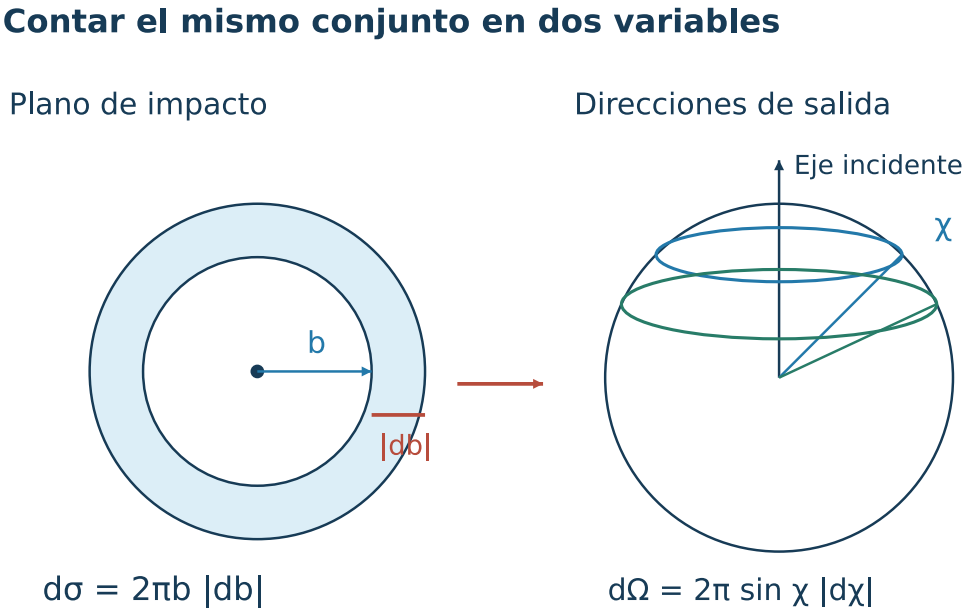


Figura 17.3. El área $2\pi b|db|$ y la banda angular $2\pi \sin\chi|d\chi|$ describen el mismo conjunto de encuentros mediante dos variables diferentes. La representación de la esfera es esquemática.

La sección eficaz tiene una interpretación geométrica aun cuando la fuerza actúe sin contacto. Una interacción puede desviar partículas que estaban preparadas a distancias muy superiores al tamaño del blanco. El área de un disco material aparece como sección eficaz sólo cuando el modelo de interacción y la condición observada conducen precisamente a ese disco de preparaciones.

Contar partículas dentro de una ventana finita

Proposición. Para $U(r) = \alpha/r$, con las hipótesis anteriores y $b > 0$, la densidad angular es

$$D(\chi) = \frac{a_*^2}{4\sin^4(\chi/2)}.$$

Si se acepta todo el azimut y $0 < \chi_1 < \chi_2 \le \pi$, la sección eficaz de la ventana es

$$\sigma_{[\chi_1,\chi_2]} = \pi a_*^2 \left[\cot^2\frac{\chi_1}{2} - \cot^2\frac{\chi_2}{2}\right].$$

Demostración. La relación inversa tiene derivada $db/d\chi = -(a_*/2)\csc^2(\chi/2)$. Sustituirla en el cambio de variables y usar $\sin\chi = 2\sin(\chi/2)\cos(\chi/2)$ reduce la densidad a la fórmula indicada para $0 < \chi < \pi$; su límite en π es $a_*^2/4$. La ventana angular corresponde a la corona comprendida entre $b(\chi_2)$ y $b(\chi_1)$, cuyo área es $\pi[b(\chi_1)^2 - b(\chi_2)^2]$. Esta área da directamente la expresión integrada y coincide con integrar $D\,d\Omega$. Incluir el extremo π no cambia el área. $\square$

Ésta es la forma clásica de la ley de Rutherford para una interacción inversa del radio. En una aplicación electrostática, α contiene las cargas y la constante de la convención de unidades; aquí se toma como el coeficiente definido en U. La deducción conserva la masa reducida y la energía relativa, por lo que permite después incorporar el retroceso del blanco.

Para la ventana de apertura, $[\pi/3, \pi/2]$, el área es $\pi a_*^2(3-1) = 2\pi\,\mathrm{m}^2$. Es mayor que la sección de algunos blancos materiales posibles porque mide preparaciones que se desvían, sin imponer una condición de contacto.

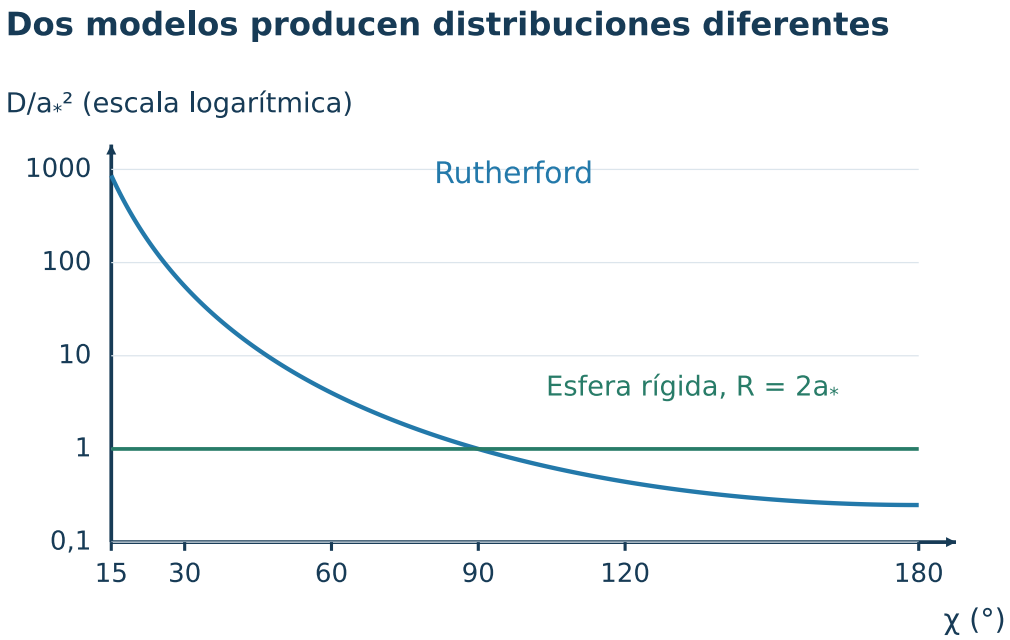


Figura 17.4. Densidad de Rutherford y densidad constante de una esfera rígida de radio $2a_*$. El eje vertical es logarítmico y la curva inversa del radio se trunca antes del ángulo cero.

Al aceptar todos los ángulos mayores que $\chi_0 > 0$, se obtiene $\sigma_{\chi \ge \chi_0} = \pi a_*^2 \cot^2(\chi_0/2)$. Esta cantidad crece sin cota cuando $\chi_0 \to 0$. El modelo atribuye desviaciones pequeñas a preparaciones con b arbitrariamente grande: la sección total de desviación no nula resulta infinita. En una preparación de radio finito o en una interacción modificada a gran distancia, aparece un corte que debe incluirse en el cálculo. Las secciones integradas sobre ventanas separadas de cero permanecen finitas.

Definición. La fluencia incidente $\mathcal{F}$ es el número de partículas que cruza una unidad de área durante una exposición. La densidad areal de blancos n_s es su número por unidad de área transversal. La eficiencia $\eta \in [0,1]$ es la fracción de eventos aceptados que el detector registra en las condiciones especificadas.

Para un centro y una fluencia uniforme, el número esperado en una ventana es $\mathcal{F}\sigma_A$. Para una lámina con n_s uniforme, atravesada por N_{inc} partículas, el número esperado registrado es

$$\langle N_A \rangle = N_{\mathrm{inc}} n_s \eta \sigma_A .$$

La fórmula describe una lámina suficientemente diluida para despreciar encuentros múltiples que alteren la ventana estudiada, con eficiencia uniforme allí y preparación homogénea

sobre las escalas relevantes. Se obtiene sumando el conteo de centros independientes: la probabilidad aproximada por proyectil es $n_s\sigma_A$, y la eficiencia multiplica los eventos aceptados. Un número esperado puede ser no entero; las observaciones concretas son conteos enteros que fluctúan entre exposiciones.

Si la eficiencia o la cobertura dependen de la dirección, se integra $\eta(\chi,\varphi)D(\chi)\,d\Omega$ sobre la aceptación real. Reemplazar una ventana ancha por D en su centro multiplicada por su ángulo sólido puede sesgar el conteo, sobre todo cerca de la dirección incidente, donde la densidad varía rápidamente.

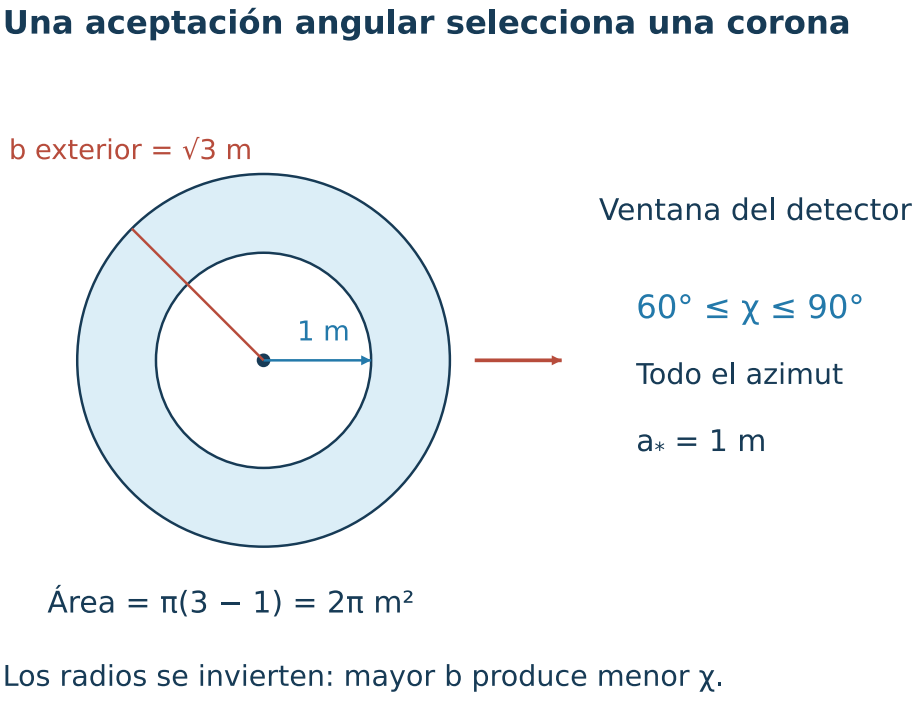


Figura 17.5. Para $a_* = 1\,\mathrm{m}$, aceptar entre 60° y 90° equivale a una corona entre $b = 1\,\mathrm{m}$ y $b = \sqrt{3}\,\mathrm{m}$. El área es $2\pi\,\mathrm{m}^2$.

Reconstruir lo que mide el laboratorio

El ángulo de la velocidad relativa coincide con el del proyectil en la aproximación de blanco inmóvil. Para masas comparables, el detector observa una velocidad a la que se suma el movimiento del centro de masa. Consideremos un blanco inicialmente en reposo y un proyectil con velocidad $v\mathbf{e}_x$ lejos de él. La rapidez relativa incidente es $v_\infty = v$, pero la energía relativa es

$$E = \frac{1}{2}m_r v^2 = \frac{m_t}{m_p + m_t}E_{\mathrm{lab}}, \qquad E_{\mathrm{lab}} = \frac{1}{2}m_p v^2.$$

Para esta reconstrucción elegimos el eje transversal del lado de la salida, de modo que su componente sea positiva.

Proposición. En un encuentro elástico de dos partículas, con blanco inicialmente en reposo, sea la velocidad relativa saliente $v(\cos\chi, \sin\chi)$ para un plano de salida elegido. Las velocidades finales de laboratorio son

$$\mathbf{v}_{p,f} = \frac{v}{m_p + m_t}(m_p + m_t\cos\chi,\; m_t\sin\chi),$$

$$\mathbf{v}_{t,f} = \frac{m_p v}{m_p + m_t}(1 - \cos\chi,\, -\sin\chi).$$

Con $q = m_p/m_t$, el ángulo del proyectil es

$$\beta = \operatorname{atan2}(\sin\chi,\, q + \cos\chi).$$

Para $q < 1$, esta correspondencia es creciente de 0 a π. Para $q = 1$, vale $\beta = \chi/2$ cuando $0 \le \chi < \pi$; en $\chi = \pi$ el proyectil se detiene y su dirección queda indefinida. Para $q > 1$, el ángulo máximo es $\beta_{\max} = \arcsin(1/q)$ y cada $0 < \beta < \beta_{\max}$ tiene dos preimágenes.

Demostración. El centro de masa se mueve con $\mathbf{V} = m_p v \mathbf{e}_x/(m_p + m_t)$. Las velocidades de reconstrucción del capítulo 15 son $\mathbf{v}_p = \mathbf{V} + (m_t/(m_p + m_t))\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}_t = \mathbf{V} - (m_p/(m_p + m_t))\mathbf{u}$. Sustituir la velocidad relativa saliente da las expresiones enunciadas, que conservan directamente el momento total. El módulo de $\mathbf{u}$ conserva la energía cinética relativa y, con ella, la energía cinética total lejana. La dirección del proyectil se obtiene usando sus dos componentes. En los puntos donde su velocidad no se anula, derivar el argumento da

$$\frac{d\beta}{d\chi} = \frac{1 + q\cos\chi}{1 + q^2 + 2q\cos\chi}.$$

Para $q < 1$ el numerador es positivo y el recorrido va de la dirección delantera a la trasera. Si $q = 1$, las identidades de ángulo mitad dan directamente $\beta = \chi/2$ en el intervalo indicado. Para $q > 1$, el denominador sigue positivo y la derivada cambia de signo una sola vez, en $\cos\chi = -1/q$. Evaluar la dirección allí da $\sin\beta_{\max} = 1/q$. La función parte de cero, alcanza ese máximo y vuelve a cero en $\chi = \pi$, por lo que cada ángulo interior tiene una preimagen a cada lado del máximo. □

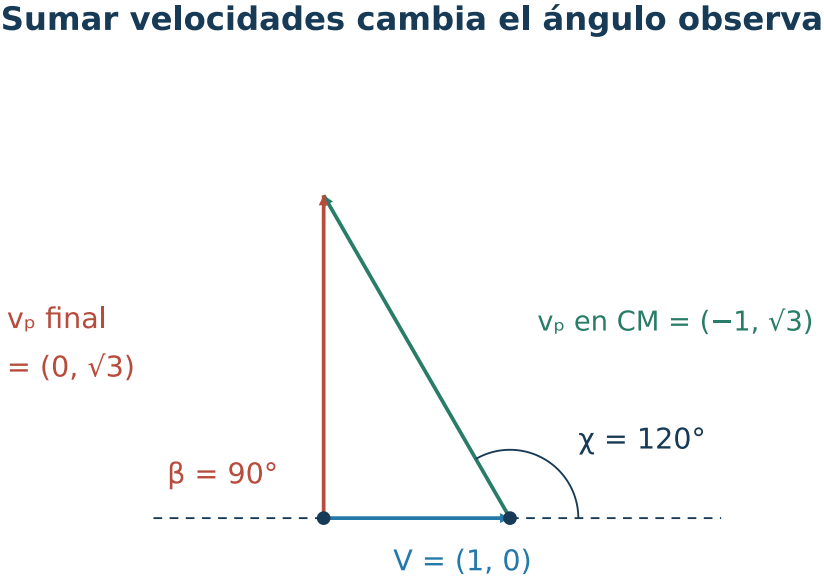


Figura 17.6. Sumar la velocidad del centro de masa transforma la dirección relativa en la del proyectil. Con $m_t = 2m_p$ y $\chi = 120°$, el proyectil sale a $\beta = 90°$ en el laboratorio.

La densidad angular también debe transformarse. En cada rama regular se conservan los eventos y el azimut, con lo que

$$D_{\mathrm{lab}}(\beta) = \sum_{i} D(\chi_i) \frac{\sin \chi_i}{\sin \beta} \left| \frac{d\chi_i}{d\beta} \right|, \qquad 0 < \beta < \pi.$$

La suma se restringe a las ramas físicamente accesibles. Para masas iguales, $D_{\mathrm{lab}}(\beta) = 4 \cos\beta \, D(2\beta)$ en $0 < \beta < \pi/2$. En un extremo donde la derivada angular se anula, la densidad puede divergir aunque la sección integrada sobre una ventana sea finita. Los conteos experimentales involucran justamente esas ventanas, con sus coberturas y eficiencias.

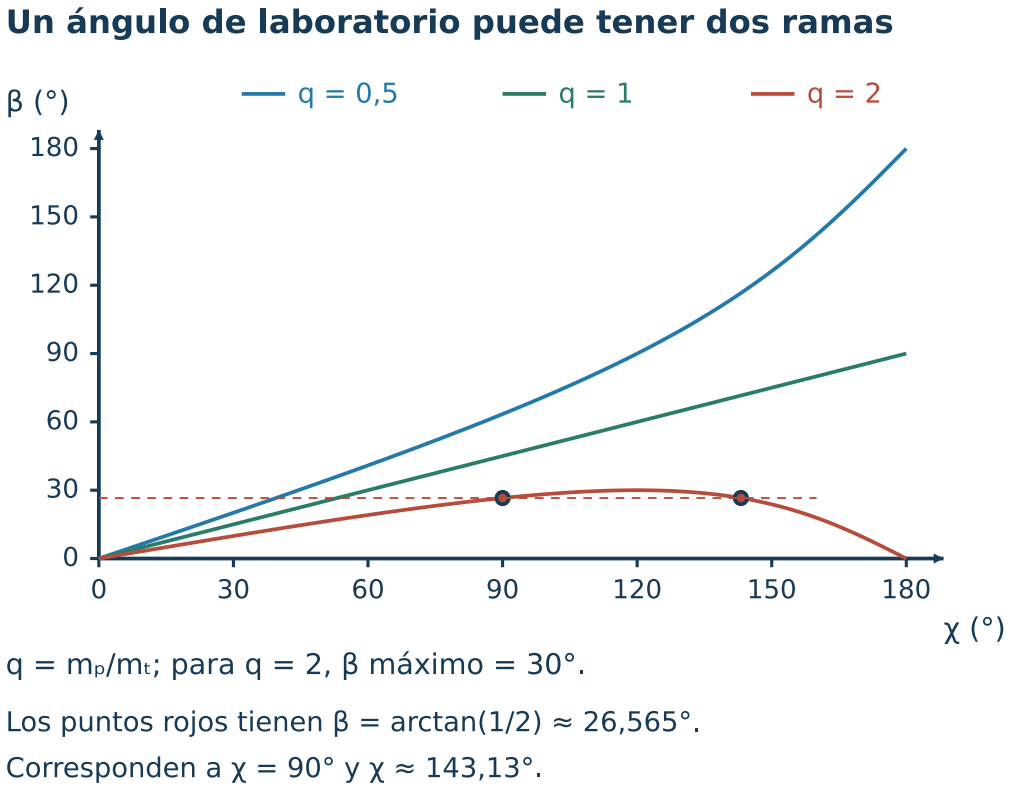


Figura 17.7. El ángulo de laboratorio puede corresponder a dos desviaciones relativas distintas cuando el proyectil es más pesado que el blanco. La energía final del proyectil permite distinguirlas.

La inferencia física reúne así la preparación, la ley angular, el cambio de variables y el modelo de detector. Una misma distribución de magnitudes puede conservar ambigüedades: el signo de α, una normalización de blancos desconocida o dos ramas que el detector angular no separa. Medir otra magnitud, variar la energía o precisar el rango de validez permite decidir qué parte de la interacción ha sido realmente identificada.

Ejercicios

Los parámetros numéricos son ideales y se expresan en SI. Salvo indicación contraria, los ángulos pertenecen al movimiento relativo, el haz es uniforme, se acepta todo el azimut y la interacción es $U = \alpha/r$. Los conteos suponen una lámina diluida y encuentros múltiples despreciables en la aceptación indicada. Para cálculos gravitatorios use $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3/(kg\,s^2)}$.

1. Traducir la preparación a conservaciones

Para $m_r = 1\,\mathrm{kg}$, $v_\infty = 2\,\mathrm{m/s}$, $\alpha = 4\,\mathrm{J\,m}$ y $b = \sqrt{3}\,\mathrm{m}$, calcule $E, L, a_*, r_{\mathrm{mín}}$ y χ. Indique la dirección del momento angular si la entrada pasa por encima del centro.

2. Una desviación que cambia con la preparación

Con $a_* = 1\,\mathrm{m}$, calcule χ para $b = 0{,}5, 1, \sqrt{3}, 3\,\mathrm{m}$. Determine qué intervalo de parámetros produce $\chi \geq \pi/2$ y describa los límites de la relación angular.

3. Atracción y repulsión con el mismo giro

Cambie $\alpha = 4\,\mathrm{J\,m}$ por $-4\,\mathrm{J\,m}$ en el ejercicio 1. Compare las desviaciones orientadas y las distancias mínimas. Explique por qué una distribución que integra el azimut puede perder la información sobre el signo.

4. Inferir el coeficiente de interacción

Se prepara $b = 2\,\mathrm{m}$, $m_r = 0{,}5\,\mathrm{kg}$ y $v_\infty = 4\,\mathrm{m/s}$. La desviación es $\chi = 60^\circ$. Obtenga $|\alpha|$ y diga qué medición adicional permitiría conocer su signo para una trayectoria cuya preparación transversal es conocida.

5. Cambiar energía sin cambiar el blanco

Para el mismo α y m_r, se duplica E. Determine cómo cambian a_*, la sección diferencial a un ángulo fijo y la sección integrada sobre una ventana angular fija. Compare con el cambio producido al duplicar v_∞.

6. Integrar una aceptación completa en azimut

Con $a_* = 1\,\mathrm{m}$, calcule las secciones eficaces para $\chi \geq 60^\circ$ y para $60^\circ \leq \chi \leq 90^\circ$. Reobtenga la segunda mediante las áreas de las coronas del plano de impacto.

7. Del área a un conteo esperado

Un haz de $N_{\mathrm{inc}} = 2{,}00 \times 10^6$ partículas atraviesa una lámina con $n_s = 2{,}00 \times 10^{-5}\,\mathrm{m^{-2}}$. Para $a_* = 1\,\mathrm{m}$, un detector acepta $30^\circ \leq \chi \leq 60^\circ$, todo el azimut y tiene eficiencia uniforme $\eta = 0{,}75$. Halle el conteo esperado y la probabilidad registrada aproximada por proyectil.

8. Propagar una cota angular

Con $b = 1\,\mathrm{m}$, $m_r = 1\,\mathrm{kg}$ y $v_\infty = 2\,\mathrm{m/s}$ exactos, se acota $\chi \in [58^\circ, 62^\circ]$. Determine un intervalo garantizado para $|\alpha|$ y explique la monotonía utilizada. Considere por separado la información sobre el signo.

9. Una energía de laboratorio que no es la relativa

Un proyectil de masa $m_p = 2\,\mathrm{kg}$ llega con rapidez $3\,\mathrm{m/s}$ a un blanco inicialmente en reposo de masa $m_t = 1\,\mathrm{kg}$. Calcule E_{lab}, E, m_r. Para $\alpha = 6\,\mathrm{J\,m}$ y $b = 1\,\mathrm{m}$, compare la desviación relativa correcta con la que resultaría de sustituir indebidamente E_{lab} por E.

10. Estimar el impulso en una trayectoria casi recta

Para repulsión débil, aproxime la trayectoria por $(x, y) = (v_\infty t, b)$ e integre la componente transversal de la fuerza $\alpha b/[(v_\infty t)^2 + b^2]^{3/2}$. Compare el impulso obtenido con la componente transversal exacta del cambio de momento relativo. Evalúe su error relativo cuando $a_*/b = 0{,}05$, usando el valor exacto como referencia.

11. Cortar un haz de radio finito

Un haz ocupa uniformemente el disco $0 \le b \le B$, con $B = 4a_*$. Para una interacción repulsiva, determine el menor ángulo de salida y la sección eficaz total correspondiente a ese disco. Obtenga una densidad de probabilidad angular normalizada respecto de $d\chi$.

12. Comparar con una esfera rígida

Considere un blanco esférico inmóvil de radio R, con reflexión especular elástica: la componente normal de la velocidad se invierte y la tangencial se conserva. Para $0 < b < R$, derive $b = R\cos(\chi/2)$ y demuestre que $D(\chi) = R^2/4$. Calcule la sección total de encuentros que chocan con la esfera. Las trayectorias con $b > R$ siguen rectas.

13. Captura por atracción gravitatoria

Una esfera inmóvil de radio R y masa M absorbe toda partícula de prueba que llega a su superficie. Fuera de ella, $U = -GMm/r$. Derive la sección de captura para partículas incidentes de rapidez v_∞. Evalúela para $R = 1\,\mathrm{m}$, $GM = 2\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2$ y $v_\infty = 2\,\mathrm{m/s}$. Declare qué cambia si la masa incidente deja de ser despreciable.

14. Llegar a una superficie repulsiva

Un centro tiene $U = \alpha/r$, $\alpha = 4\,\mathrm{J\,m} > 0$, y una superficie absorbente de radio $R = 1\,\mathrm{m}$. Para un parámetro fijo $b = 0{,}5\,\mathrm{m}$, determine la energía relativa mínima para alcanzar la superficie. Obtenga la sección de acceso a esa superficie como función de E y explique qué ocurre si $b \ge R$.

15. Sumar dos ramas de preparación

Se da una ley angular idealizada, sin asignarle un potencial,

$$\chi(b) = 4\chi_m \frac{b}{B}\left(1 - \frac{b}{B}\right), \qquad 0 \le b \le B, \qquad \chi_m = \frac{\pi}{3}.$$

Halle sus dos ramas inversas y la densidad $D(\chi)$ para $0 < \chi < \chi_m$. Examine el comportamiento cerca del máximo angular y compruebe que la sección integrada es πB^2.

16. Lo que la distribución identifica

Se conoce $D(90^\circ) = 9\,\mathrm{m}^2/\mathrm{sr}$, $m_r = 1\,\mathrm{kg}$ y $v_\infty = 2\,\mathrm{m/s}$. Determine $|\alpha|$. Explique qué ambigüedad queda respecto de su signo y qué ocurre con la identificación de su módulo si sólo se conocen conteos y la densidad areal de blancos es desconocida.

17. Reconstruir un encuentro con retroceso

Un proyectil de masa $1\,\mathrm{kg}$ y rapidez incidente $3\,\mathrm{m/s}$ encuentra un blanco de masa $2\,\mathrm{kg}$ inicialmente en reposo. Para una velocidad relativa saliente con $\chi = 120^\circ$ y componente transversal positiva, calcule ambas velocidades de laboratorio, el ángulo del proyectil y las energías cinéticas finales. Compruebe el momento y la energía totales.

18. Transformar la densidad para masas iguales

Para $m_p = m_t$ y $a_* = 1\,\mathrm{m}$, obtenga $D_{\mathrm{lab}}(\beta)$ en el hemisferio delantero. Evalúela en $\beta = 60^\circ$ e indique la fracción de energía cinética incidente que conserva el proyectil a ese ángulo. Trate el extremo donde se detiene.

19. Dos encuentros vistos bajo el mismo ángulo

Para $q = m_p/m_t = 2$, calcule el ángulo máximo del proyectil en el laboratorio. Encuentre las dos desviaciones relativas que producen $\beta = \arctan(1/2)$. Determine las dos razones entre rapidez final e inicial del proyectil y explique cómo una medición de energía separa las ramas.

20. Controlar la aproximación de ángulo pequeño

Con $x = a_*/b > 0$, la desviación exacta es $\chi = 2\arctan x$. Demuestre

$$0 \le 2x - \chi \le \frac{2x^3}{3}.$$

Obtenga una cota del error relativo de aproximar χ por $2x$, referido al ángulo exacto, válida para todo $x > 0$. Evalúe la garantía en $x = 0{,}05$ e identifique el parámetro que debe mantenerse pequeño.

21. Una ventana que reúne dos ramas

Un proyectil tiene el doble de masa que un blanco inicialmente en reposo. La interacción repulsiva es $U = \alpha/r$ y la preparación relativa satisface $a_* = \alpha/(2E) = 1\,\mathrm{m}$. Un detector acepta todo el azimut y los ángulos de laboratorio

$$\arctan(1/2) \le \beta \le \pi/6.$$

Determine las dos bandas de desviación relativa que contribuyen, sus intervalos de parámetro de impacto y la sección eficaz total de la ventana. Compare con el resultado de conservar sólo una rama. Examine el comportamiento de la densidad de laboratorio al aproximarse al ángulo máximo y explique por qué el conteo de la ventana permanece finito. Suponga haz uniforme en todo el plano de impacto relevante y las hipótesis de un único encuentro del capítulo.

Soluciones

1. Traducir la preparación a conservaciones

La energía relativa es $E = m_r v_\infty^2/2 = 2\,\mathrm{J}$ y el módulo angular es $L = m_r b v_\infty = 2\sqrt{3}\,\mathrm{kg\,m^2/s}$. El producto vectorial de una posición incidente con componente transversal positiva y una velocidad hacia $+x$ apunta hacia $-z$. La longitud de interacción es $a_* = |\alpha|/(2E) = 1\,\mathrm{m}$.

La relación angular da $\chi = 2\arctan(1/\sqrt{3}) = \pi/3$. Para la repulsión, $r_{\mín} = a_* + \sqrt{a_*^2 + b^2} = 3\,\mathrm{m}$. La distancia mínima supera el parámetro de impacto: la fuerza aleja la trayectoria del centro antes de que llegue a la región donde la recta incidente habría pasado más cerca.

2. Una desviación que cambia con la preparación

Los cuatro valores son $2\arctan 2 \approx 126{,}87°$, $90°$, $60°$ y $2\arctan(1/3) \approx 36{,}87°$. La función decrece estrictamente con $b > 0$. Para $\chi \ge \pi/2$ se requiere $a_*/b \ge 1$, es decir, $0 < b \le 1\,\mathrm{m}$ dentro del dominio no radial.

Cuando $b \to \infty$, la desviación tiende a cero; cuando $b \to 0^+$, tiende a π. En repulsión el límite frontal se realiza como un retorno radial regular a distancia positiva. En atracción puntual habría que examinar la colisión central por separado. Esas diferencias físicas permanecen aunque los límites de la magnitud angular coincidan.

3. Atracción y repulsión con el mismo giro

El módulo $|\alpha|$ conserva $a_* = 1\,\mathrm{m}$ y, con ello, $\chi = 60°$. La desviación orientada pasa de $+60°$ a $-60°$. El radio mínimo atractivo es $-1 + \sqrt{1+3} = 1\,\mathrm{m}$, frente a $3\,\mathrm{m}$ en la repulsión.

En un haz axialmente simétrico, cada preparación puede rotarse alrededor del eje incidente. Cambiar el signo de la desviación transversal reorganiza sus azimuts, mientras conserva el número de eventos en cada valor de χ. Por ello la densidad angular integrada sobre azimut depende de α^2. Una trayectoria preparada con desplazamiento transversal conocido sí permite usar el lado de salida para distinguir los signos.

4. Inferir el coeficiente de interacción

Despejamos primero la longitud: $a_* = b\tan(\chi/2) = 2/\sqrt{3}\,\mathrm{m}$. Como $m_r v_\infty^2 = 8\,\mathrm{J}$, resulta

$$|\alpha| = m_r v_\infty^2 b \tan\frac{\chi}{2} = \frac{16}{\sqrt{3}}\,\mathrm{J\,m} \approx 9{,}238\,\mathrm{J\,m}.$$

El lado de salida respecto del desplazamiento transversal incidente distingue atracción y repulsión en este modelo. El valor angular sin esa orientación sólo determina el módulo. La fórmula usa una energía relativa reconstruida y un parámetro de impacto físico, condiciones que forman parte de la inferencia.

5. Cambiar energía sin cambiar el blanco

Con α fijo, $a_* = |\alpha|/(2E)$ se reduce a la mitad cuando se duplica E. Tanto $D(\chi)$ como una sección de ventana fija son proporcionales a a_*^2, así que se reducen a un cuarto. La comparación mantiene exactamente los mismos límites angulares.

Si se duplica v_∞ manteniendo m_r, la energía se multiplica por cuatro, a_* se divide por cuatro y ambas secciones se dividen por dieciséis. Confundir energía con rapidez llevaría a una dependencia incorrecta. En particular, la ley inversa del radio predice $D \propto v_\infty^{-4}$ para un ángulo fijo y parámetros restantes constantes.

6. Integrar una aceptación completa en azimut

Para $\chi \geq 60°$, el máximo parámetro es $b = a_* \cot 30° = \sqrt{3}\,\mathrm{m}$, y la sección vale $3\pi\,\mathrm{m}^2$. La ventana entre $60°$ y $90°$ corresponde a $1 \leq b \leq \sqrt{3}$ metros; su área es

$$\pi\left[(\sqrt{3}\,\mathrm{m})^2 - (1\,\mathrm{m})^2\right] = 2\pi\,\mathrm{m}^2.$$

Integrar la densidad con $2\pi \sin\chi\, d\chi$ da el mismo resultado. La corona permite comprobar el jacobiano sin depender de una segunda manipulación trigonométrica. La unidad final es área, pues el ángulo sólido ya se integró.

7. Del área a un conteo esperado

La sección aceptada es $\pi a_*^2[\cot^2(15°) - \cot^2(30°)]$. Con $\cot 15° = 2 + \sqrt{3}$, el corchete vale $4 + 4\sqrt{3}$. Por tanto,

$$\sigma_A = 4\pi(1+\sqrt{3})\,\mathrm{m}^2 \approx 34{,}332\,\mathrm{m}^2.$$

El producto $N_{\mathrm{inc}} n_s \eta$ vale $30\,\mathrm{m}^{-2}$. El conteo esperado es $120\pi(1+\sqrt{3}) \approx 1030$ eventos, y la probabilidad registrada aproximada por proyectil es $n_s\eta\sigma_A \approx 5{,}150 \times 10^{-4}$. Su pequeñez es compatible con el supuesto de eventos raros dentro de la aceptación. La validez física de despreciar desviaciones acumuladas fuera de ella requiere además las condiciones de preparación declaradas.

8. Propagar una cota angular

En $0 < \chi < \pi$, la función $\tan(\chi/2)$ crece estrictamente. Con los demás datos fijos, se obtiene

$$4\tan 29^\circ \le \frac{|\alpha|}{\mathrm{J\,m}} \le 4\tan 31^\circ.$$

Un intervalo con redondeo hacia afuera es $|\alpha| \in [2{,}217, 2{,}404]\,\mathrm{J\,m}$. Las cotas se propagan evaluando extremos y no requieren una linealización. Si el signo sigue desconocido, el conjunto de valores admisibles de α es la unión del intervalo positivo y su reflejo negativo; llenar el espacio entre ambos incluiría coeficientes incompatibles con el dato angular.

9. Una energía de laboratorio que no es la relativa

La masa reducida es $m_r = 2/3\,\mathrm{kg}$. La energía del proyectil incidente es $E_{\mathrm{lab}} = (1/2)(2)(3^2) = 9\,\mathrm{J}$, mientras que la relativa vale $(1/2)(2/3)(3^2) = 3\,\mathrm{J}$. La diferencia es la energía de traslación del centro de masa, que permanece durante el encuentro.

Usando la energía relativa, $a_* = 6/(2\cdot 3) = 1\,\mathrm{m}$ y $\chi = 2\arctan 1 = 90^\circ$. Si se usara indebidamente $9\,\mathrm{J}$, se obtendría $a_* = 1/3\,\mathrm{m}$ y $\chi \approx 36{,}87^\circ$. La conservación de la rapidez relativa no autoriza a identificar sus energías con las de un proyectil de masa diferente de m_r.

10. Estimar el impulso en una trayectoria casi recta

Con $z = v_\infty t/b$, la integral propuesta queda

$$\Delta p_y^{\mathrm{recta}} = \frac{\alpha}{b v_\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(1+z^2)^{3/2}} = \frac{2\alpha}{b v_\infty}.$$

Una primitiva del integrando es $z/\sqrt{1+z^2}$; sus límites son -1 y 1. Para el resultado exacto, la velocidad saliente tiene componente $v_\infty \sin\chi$, así que $\Delta p_y = m_r v_\infty \sin\chi$. Al usar $\chi = 2\arctan x$, con $x = a_*/b$, obtenemos

$$\Delta p_y = \frac{2\alpha}{b v_\infty}\,\frac{1}{1+x^2}.$$

El error relativo del impulso rectilíneo, referido al exacto, es x^2. Para $x = 0{,}05$, vale $0{,}0025$, esto es, $0{,}25\%$. La componente longitudinal exacta también cambia; es de orden x^2 en unidades del momento incidente, mientras la transversal comienza en orden x. La aproximación conserva el término transversal dominante bajo ese control.

11. Cortar un haz de radio finito

La desviación decrece con b, por lo que el ángulo mínimo es $\chi_{\mathrm{mín}} = 2\arctan(a_*/B) = 2\arctan(1/4) \approx 28{,}07^\circ$. El disco contiene sección $\pi B^2 = 16\pi a_*^2$. Todos sus encuentros repulsivos tienen una dirección saliente; el punto frontal no altera el área.

La densidad respecto de $d\chi$ se obtiene dividiendo la sección de una banda por el área total:

$$p(\chi) = \frac{2\pi \sin\chi\, D(\chi)}{\pi B^2} = \frac{a_*^2 \sin\chi}{2B^2 \sin^4(\chi/2)}, \qquad \chi_{\mathrm{mín}} \le \chi \le \pi.$$

Fuera de ese intervalo vale cero. Su integral es uno porque la sección angular integrada es πB^2. El corte en el plano de preparación elimina las desviaciones arbitrariamente pequeñas y vuelve finito el conjunto de encuentros considerado.

12. Comparar con una esfera rígida

La normal exterior en el primer contacto es $\mathbf{n} = (-\sqrt{R^2 - b^2}, b)/R$. La ley de reflexión es $\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_i - 2(\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$. Para $\mathbf{v}_i = v\mathbf{e}_x$ se obtiene $\cos\chi = 1 - 2n_x^2 = 2b^2/R^2 - 1$. Así $b = R\cos(\chi/2)$ para $0 < \chi < \pi$.

Su derivada tiene módulo $(R/2)\sin(\chi/2)$; el cambio de variables da

$$D(\chi) = \frac{R\cos(\chi/2)}{\sin\chi}\frac{R}{2}\sin(\chi/2) = \frac{R^2}{4}.$$

Integrar sobre la esfera de direcciones produce $4\pi(R^2/4) = \pi R^2$, igual al disco de preparaciones que golpea el blanco. Las preparaciones exteriores continúan hacia adelante y no pertenecen a esa sección de choque. El modelo de contacto usa una regla de reflexión ideal; su fuerza impulsiva no satisface las hipótesis suaves del resultado de cuadratura radial y se ha resuelto directamente.

13. Captura por atracción gravitatoria

La llegada a la superficie requiere que la raíz radial atractiva no quede por fuera de R. Con $a_* = GM/v_\infty^2$, la condición $-a_* + \sqrt{a_*^2 + b^2} \le R$ equivale a

$$b^2 \le R^2 + 2a_* R.$$

La sección de captura es

$$\sigma_{\mathrm{cap}} = \pi R^2\left(1 + \frac{2GM}{Rv_\infty^2}\right).$$

El factor adicional describe el enfoque gravitatorio: trayectorias cuya preparación pasaría fuera del disco geométrico llegan a la superficie por atracción. Para los datos dados, $a_* = 1/2\,\mathrm{m}$ y $\sigma_{\mathrm{cap}} = 2\pi\,\mathrm{m}^2$. La absorción es una condición de frontera; la energía mecánica conservada describe el tramo exterior anterior al impacto. Si la masa incidente es apreciable, se usa el movimiento relativo con parámetro gravitatorio $G(M + m)$ y radio de contacto apropiado, y se reconstruye el retroceso del blanco.

14. Llegar a una superficie repulsiva

La energía radial en R exige $Q(R) = 1 - \alpha/(ER) - b^2/R^2 \ge 0$. Para $b < R$, esto equivale a

$$E \ge \frac{\alpha R}{R^2 - b^2}.$$

Con $R = 1\,\mathrm{m}$, $b = 0{,}5\,\mathrm{m}$ y $\alpha = 4\,\mathrm{J\,m}$, la energía mínima es $16/3\,\mathrm{J}$. A igualdad se llega con velocidad radial nula; la superficie absorbente determina el destino posterior.

A energía fija, el disco de acceso tiene $b_{\mathrm{máx}}^2 = R^2 - \alpha R/E$, siempre que $E \ge \alpha/R$. Por ello $\sigma_{\mathrm{acc}} = \pi R^2\,\mathrm{máx}(0, 1 - \alpha/(ER))$. En el umbral sólo el encuentro frontal puede alcanzar la superficie y su sección es cero. Si $b \ge R$, la repulsión mantiene el radio mínimo estrictamente mayor que b a toda energía finita, por lo que no se llega a la superficie.

15. Sumar dos ramas de preparación

Resolver la cuadrática da

$$b_\pm = \frac{B}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\chi}{\chi_m}}\right), \qquad \left|\frac{db_\pm}{d\chi}\right| = \frac{B}{4\chi_m\sqrt{1 - \chi/\chi_m}}.$$

Las ramas tienen suma B. Su contribución conjunta es

$$D(\chi)=\frac{B^2}{4\chi_m\sin\chi\sqrt{1-\chi/\chi_m}},\qquad 0<\chi<\chi_m.$$

Al aproximarse al máximo angular, la densidad crece como $(\chi_m-\chi)^{-1/2}$, pues $\sin\chi_m>0$. Esa divergencia es integrable: multiplicar por $2\pi\sin\chi$ y efectuar $z=1-\chi/\chi_m$ da

$$\sigma=\frac{\pi B^2}{2}\int_0^1 z^{-1/2}\,dz=\pi B^2.$$

El factor singular indica que una banda angular pequeña recoge preparaciones de ambos lados del máximo. El ejercicio usa una ley angular prescrita y no demuestra que un potencial central particular la produzca.

16. Lo que la distribución identifica

En $\chi=90^\circ$, se cumple $\sin^4(\chi/2)=1/4$, así que $D(90^\circ)=a_*^2$. El dato da $a_*=3\,\mathrm{m}$ y $|\alpha|=m_r v_\infty^2 a_*=12\,\mathrm{J\,m}$. La distribución de magnitudes angulares deja posibles ambos signos; el seguimiento orientado de una preparación conocida o una medición de distancia mínima puede separarlos.

Si sólo se conocen conteos, con eficiencia y fluencia calibradas pero n_s desconocido, la normalización es proporcional a $n_s\alpha^2$. Multiplicar $|\alpha|$ por un factor $c>0$ y dividir n_s por c^2 deja esos conteos invariantes. La forma angular comprueba una dependencia del modelo, pero no rompe por sí sola esta degeneración de parámetros. Una medición independiente de n_s permite recuperar el módulo.

17. Reconstruir un encuentro con retroceso

El centro de masa se mueve con $(1,0)\,\mathrm{m/s}$. La velocidad relativa saliente es

$$3(-1/2,\sqrt{3}/2)\,\mathrm{m/s}$$

. Al reconstruir,

$$\mathbf{v}_{p,f}=(0,\sqrt{3})\,\mathrm{m/s},\qquad \mathbf{v}_{t,f}=(3/2,-\sqrt{3}/2)\,\mathrm{m/s}.$$

El proyectil sale a $\beta=90^\circ$. Su energía cinética final es $3/2\,\mathrm{J}$ y la del blanco $3\,\mathrm{J}$; suman $9/2\,\mathrm{J}$, igual a la energía inicial. El momento total final es $(0,\sqrt{3})+2(3/2,-\sqrt{3}/2)=(3,0)\,\mathrm{kg\,m/s}$, que también coincide con el inicial. El ángulo relativo de 120° y el de laboratorio de 90° describen velocidades diferentes dentro del mismo encuentro.

18. Transformar la densidad para masas iguales

La relación es $\chi=2\beta$ para $0<\beta<\pi/2$. El jacobiano angular da

$$D_{\mathrm{lab}}(\beta)=4\cos\beta\,D(2\beta)=\frac{a_*^2\cos\beta}{\sin^4\beta}.$$

En $\beta=60^\circ$, resulta $D_{\mathrm{lab}}=8/9\,\mathrm{m^2/sr}$. La rapidez del proyectil es $v\cos\beta$, de modo que conserva una fracción $\cos^2\beta=1/4$ de su energía cinética incidente; el resto queda en el blanco.

Al tender χ a π, el proyectil se detiene y su dirección deja de estar definida en el extremo exacto. La fórmula se usa en el intervalo abierto y su límite cuando $\beta\to\pi/2$ es cero. El encuentro frontal corresponde a un punto del plano de impacto, de área nula, por lo que no añade una masa angular finita de eventos.

19. Dos encuentros vistos bajo el mismo ángulo

El máximo es $\beta_{\max} = \arcsin(1/2) = 30^\circ$. Para el ángulo dado, $\sin\beta = 1/\sqrt{5}$ y $\cos\beta = 2/\sqrt{5}$. La relación de direcciones puede escribirse

$$\sin(\chi - \beta) = q\sin\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Una solución es $\chi_1 = 90^\circ$. La segunda tiene $\cos\chi_2 = -4/5$, $\sin\chi_2 = 3/5$, es decir, $\chi_2 \approx 143{,}13^\circ$. En ambas, el vector $q + \cos\chi, \sin\chi$ apunta al primer cuadrante y tiene tangente $1/2$, de modo que no se introdujo una dirección opuesta al despejar el seno.

La razón de rapideces es $\sqrt{q^2 + 1 + 2q\cos\chi}/(q+1)$. Para la primera rama vale $\sqrt{5}/3$ y para la segunda $1/\sqrt{5}$. Las fracciones de energía son $5/9$ y $1/5$. Un detector de energía puede distinguir eventos con el mismo ángulo de laboratorio; un conteo puramente angular debe sumar ambas ramas con sus jacobianos.

20. Controlar la aproximación de ángulo pequeño

La diferencia se expresa mediante una integral de signo conocido:

$$x - \arctan x = \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\,dt.$$

Para $0 \le t \le x$, el integrando está entre cero y t^2. Integrar esas cotas y multiplicar por dos da $0 \le 2x - \chi \le 2x^3/3$. Para convertirla en una cota relativa, necesitamos además un límite inferior del denominador exacto. Como $1/(1+t^2) \ge 1/(1+x^2)$ en ese intervalo,

$$\arctan x \ge \frac{x}{1+x^2}, \qquad \frac{2x-\chi}{\chi} \le \frac{x^2(1+x^2)}{3}.$$

En $x = 0{,}05$, la cota es $0{,}00083542$, aproximadamente $0{,}08355\%$. El ángulo aproximado es $0{,}1$ radianes y el exacto $2\arctan(0{,}05) \approx 0{,}0999168$ radianes. El parámetro de control es $a_*/b = |\alpha|/(m_r v_\infty^2 b)$: reducirlo puede lograrse aumentando la energía o el parámetro de impacto, mientras se mantiene el régimen físico de la interacción.

21. Una ventana que reúne dos ramas

La preparación fija la razón $q = 2$, por lo que el máximo angular ocurre en $\cos\chi_* = -1/2$: $\chi_* = 2\pi/3$ y $\beta_{\max} = \pi/6$. El ejercicio 19 ya identificó las dos preimágenes del extremo inferior de esta ventana: $\chi_1 = \pi/2$ y $\chi_2 = \arccos(-4/5)$, con seno positivo. Entre ambas, el ángulo de laboratorio sube hasta su máximo y vuelve a bajar. La ventana recibe las bandas $[\chi_1, \chi_*]$ y $[\chi_*, \chi_2]$.

Para contar los encuentros conservamos el área de preparación. La ley $b = a_*\cot(\chi/2)$ es decreciente y transforma esos límites en

$$b(\chi_1) = a_*, \qquad b(\chi_*) = \frac{a_*}{\sqrt{3}}, \qquad b(\chi_2) = \frac{a_*}{3}.$$

La última igualdad utiliza $\cot(\chi_2/2) = \sin\chi_2/(1-\cos\chi_2) = (3/5)/(9/5) = 1/3$. Las dos coronas tienen áreas

$$\sigma_1 = \pi\left(a_*^2 - \frac{a_*^2}{3}\right) = \frac{2\pi a_*^2}{3}, \qquad \sigma_2 = \pi\left(\frac{a_*^2}{3} - \frac{a_*^2}{9}\right) = \frac{2\pi a_*^2}{9}.$$

Su unión es la corona entre $a_*/3$ y a_*; el borde común tiene área nula. Por tanto, $\sigma_A = 8\pi a_*^2/9 = 8\pi/9\,\mathrm{m}^2$. Usar sólo la primera rama produciría $2\pi/3\,\mathrm{m}^2$ y omitiría la cuarta parte del área total. Conservar sólo la segunda omitiría tres cuartas partes. La eficiencia y la densidad de blancos multiplicarían la sección completa al calcular un conteo esperado.

El máximo angular requiere examinar el límite de la transformación. La derivada $d\beta/d\chi$ se anula en χ_* y, al derivarla otra vez, resulta $\beta''(\chi_*) = -1/\sqrt{3}$. El desarrollo local, con ángulos en radianes, es

$$\beta_{\text{máx}} - \beta(\chi) = \frac{(\chi - \chi_*)^2}{2\sqrt{3}} + o((\chi - \chi_*)^2).$$

En cada rama, el valor absoluto de $d\chi/d\beta$ crece como una constante positiva por $(\beta_{\text{máx}} - \beta)^{-1/2}$. Los otros factores de la densidad, $D(\chi)$ y $\sin\chi/\sin\beta$, tienen límites finitos y positivos allí. La densidad de laboratorio diverge con esa potencia al acercarse al máximo desde abajo. Su integral es finita porque $\int_0^\delta s^{-1/2}\,ds = 2\sqrt{\delta}$ y $\sin\beta$ permanece acotado y positivo cerca del máximo.

La corona calculada conserva exactamente esa área finita y permite evaluar la ventana sin integrar una expresión singular. Para una medición que incluya el máximo, la preparación y las ramas aportan una descripción más cómoda que el valor puntual de la densidad. Los encuentros situados exactamente en el borde angular corresponden a una circunferencia del plano de impacto y su área es cero.

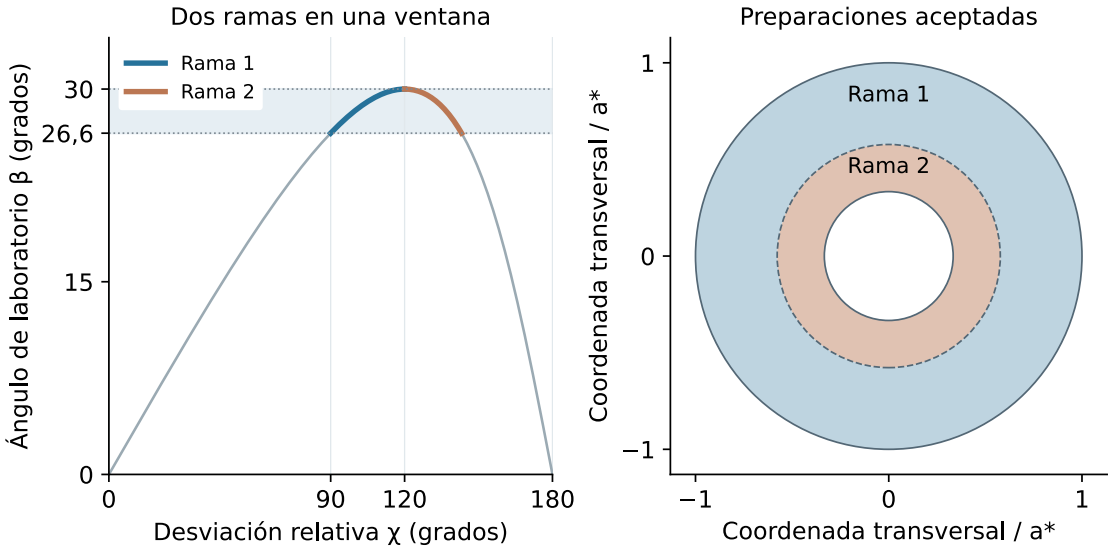


Figura 17.8. La ventana va de $\arctan(1/2)$ a 30° en el laboratorio. La rama 1 ocupa la corona exterior, entre $a_*/\sqrt{3}$ y a_*; la rama 2 ocupa la interior, entre $a_*/3$ y $a_*/\sqrt{3}$. El borde discontinuo separa las preparaciones de ambas ramas. Las áreas se suman y dan $8\pi a_*^2/9$, aunque la densidad angular crezca sin cota al aproximarse al máximo.

Lecturas y conexiones

Spivak, *Physics for Mathematicians. Mechanics I*, addendum 4C, relaciona la hipérbola, el parámetro de impacto y la distribución de Rutherford. La deducción presente explicita la energía relativa, conserva las ramas del cambio de variables y compara ventanas finitas con las limitaciones de una sección total idealizada. El paso al laboratorio permite reconocer cuándo una misma dirección reúne encuentros físicamente distintos.

Sears y Zemansky, *Física universitaria*, volumen 1, §8.4, y Serway y Jewett, *Física para ciencias e ingeniería*, volumen 1, §§9.4–9.5, ofrecen problemas de choques elásticos y conservación del momento y la energía. Esas conservaciones controlan aquí el retroceso y la reconstrucción de velocidades; la ley de interacción aporta la información adicional que fija la desviación. La comparación entre marcos se ampliará a observadores acelerados y giratorios.

Capítulo 18

Marcos acelerados y giratorios

Una partícula está sujeta a una plataforma que gira uniformemente. Al soltarla, desaparece la fuerza horizontal que la mantenía en movimiento circular. Un observador del laboratorio ve que continúa por la tangente, mientras otro, ligado a la plataforma, registra una curva que se aleja del punto de liberación. Ambos describen el mismo movimiento. Para comparar sus ecuaciones necesitamos saber cómo cambia una derivada cuando también se mueven el origen y los ejes.

Supondremos una plataforma horizontal ideal y una partícula que después de la liberación carece de fuerza horizontal: el peso y la normal se compensan verticalmente. Si el radio inicial es r_0 y la rapidez angular es $\Omega > 0$, la velocidad inicial de laboratorio tiene magnitud Ωr_0. Obtendremos la trayectoria en ambos marcos, identificaremos los términos que curvan la descripción giratoria y comprobaremos que al reconstruir la aceleración de laboratorio vuelve a resultar cero.

La comparación se desarrolla dentro de la mecánica newtoniana, con un tiempo común y transformaciones euclídeas dependientes de ese tiempo. Los relojes, las reglas y las velocidades se entienden en ese régimen clásico. La dinámica de quien hace girar la plataforma puede intercambiar energía con la partícula cuando hay vínculos; fijar el movimiento del marco constituye un dato del problema, no una ley de conservación para todo el dispositivo.

Especificar el movimiento del observador

Definición. Un marco móvil respecto de un marco inercial se describe por su origen $\mathbf{R}(t)$ y por una matriz de orientación $Q(t)$, ambos de clase C^2 en el intervalo considerado, con $Q^{\mathsf{T}}Q = I$ y $\det Q = 1$. Las columnas de Q son los ejes unitarios móviles expresados en el laboratorio. La posición de una partícula se relaciona con sus coordenadas móviles $\boldsymbol{\rho}$ mediante

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{R}(t) + Q(t)\boldsymbol{\rho}(t).$$

La matriz Q transforma componentes móviles en componentes inerciales; su inversa es Q^{T}. Por ello $\boldsymbol{\rho} = Q^{\mathsf{T}}(\mathbf{x}-\mathbf{R})$. Ambas expresiones representan la misma separación física. Trasladar el origen modifica qué vector de posición usamos; girar los ejes modifica las componentes con que lo describimos.

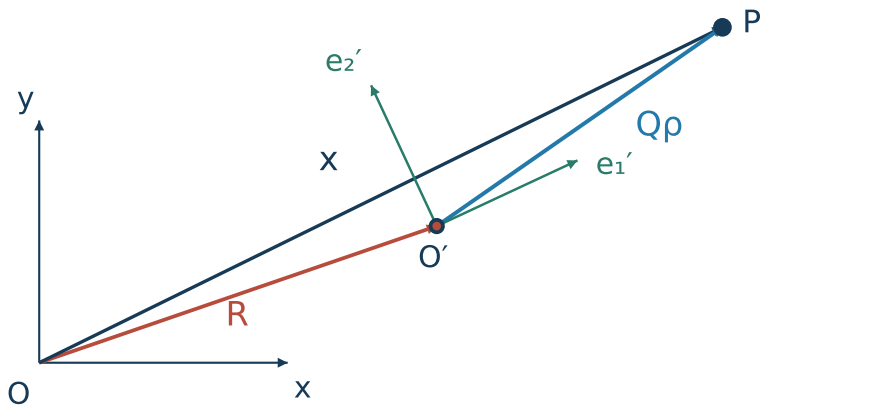


Figura 18.1. La posición se construye sumando el desplazamiento del origen móvil y la separación desde él. El factor Q expresa esa separación en los ejes del laboratorio.

Para derivar un vector representado en ejes móviles necesitamos conocer el cambio de los propios ejes. La ortogonalidad hace que esa información tenga una forma muy restringida.

Proposición. Existe un único vector $\boldsymbol{\omega}(t)$, expresado en componentes móviles, tal que

$$Q^{\mathsf{T}}\dot{Q}\,\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a} \quad \text{para todo } \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3.$$

Para cualquier vector físico $\mathbf{A}(t) = Q(t)\mathbf{a}(t)$ con componentes móviles diferenciables se cumple la regla de transporte

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = Q\left(\dot{\mathbf{a}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}\right).$$

Demostración. Derivar $Q^{\mathsf{T}}Q = I$ da $\dot{Q}^{\mathsf{T}}Q + Q^{\mathsf{T}}\dot{Q} = 0$. Así, $W = Q^{\mathsf{T}}\dot{Q}$ es antisimétrica. Toda matriz antisimétrica de orden tres tiene una única escritura

$$W = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Multiplicarla por una columna $\mathbf{a}$ reproduce las tres componentes de $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}$. La derivada ordinaria de $\mathbf{A} = Q\mathbf{a}$ es $\dot{Q}\mathbf{a} + Q\dot{\mathbf{a}}$; al usar $\dot{Q} = QW$ aparece la fórmula de transporte. La unicidad proviene de las tres entradas independientes de W. $\square$

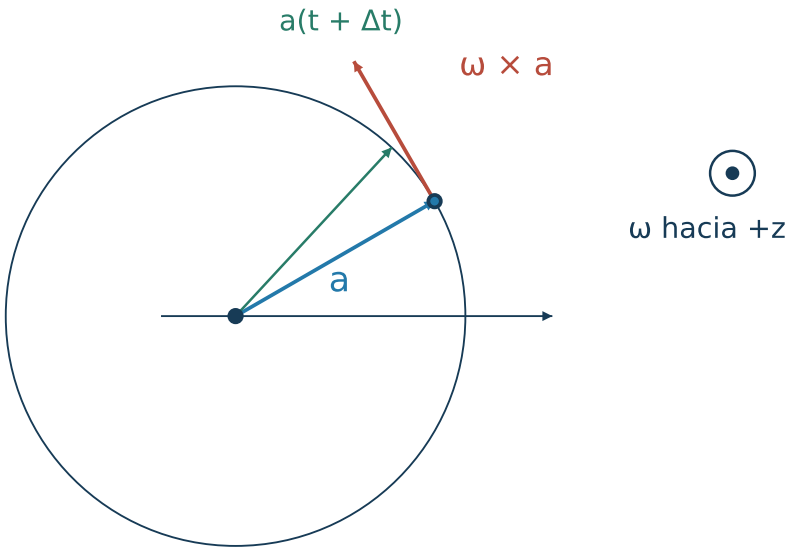
El vector físico de velocidad angular es $Q\boldsymbol{\omega}$. La regla distingue el cambio de las componentes del cambio de la base. Para un vector fijo en el laboratorio, sus componentes móviles satisfacen $\dot{\mathbf{a}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}$ y los dos términos se cancelan. Para un vector de componentes móviles constantes, toda la derivada procede de la rotación.

En un giro plano de ángulo $\theta(t)$ alrededor de $+z$,

$$Q(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\,\mathbf{e}_z.$$

El signo positivo significa giro antihorario visto desde $+z$ hacia el plano. Todas las componentes que aparecen juntas dentro de un producto vectorial se expresarán en la misma base móvil.

El cambio de la base también se deriva



Componentes fijas: da/dt = 0; derivada física = Q(ω × a).

La derivada de un vector de longitud fija es perpendicular a él.

Figura 18.2. Un vector de longitud fija ligado a un eje giratorio tiene derivada tangencial. El cambio de la base aporta $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}$ incluso cuando sus componentes permanecen constantes.

Derivar la posición dos veces

Definición. La velocidad y la aceleración relativas son las derivadas de las coordenadas móviles,

$$\mathbf{v}_{\text{rel}} = \dot{\boldsymbol{\rho}}, \qquad \mathbf{a}_{\text{rel}} = \ddot{\boldsymbol{\rho}}.$$

Son magnitudes medidas con respecto al origen y a los ejes móviles. La velocidad de laboratorio de una partícula con $\mathbf{v}_{\text{rel}} = 0$ puede ser distinta de cero, porque el origen se traslada y la separación gira.

Proposición. Las velocidades y aceleraciones de ambos marcos se relacionan por

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{R}} + Q\,(\mathbf{v}_{\text{rel}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})\,,$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{R}} + Q\,[\mathbf{a}_{\text{rel}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})]\,.$$

Demostración. La primera fórmula resulta de derivar $\mathbf{R}+Q\boldsymbol{\rho}$ con la regla de transporte. Para la segunda, apliquemos esa misma regla al vector de componentes $\mathbf{v}_{\mathrm{rel}}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}$. La derivada de sus componentes aporta $\mathbf{a}_{\mathrm{rel}}+\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{\rho}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_{\mathrm{rel}}$. La derivada de la base aporta además $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_{\mathrm{rel}}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})$. Sumar ambas contribuciones explica el factor dos y da la expresión enunciada. □

La derivada $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ de la fórmula es la derivada de las componentes móviles de la velocidad angular. Su correspondiente vector inercial es $Q\dot{\boldsymbol{\omega}}$: al derivar $Q\boldsymbol{\omega}$, el término adicional contiene $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}=0$. Esta observación permite usar la fórmula también cuando varían el eje y la rapidez angular, sin mezclar componentes de dos sistemas.

Las dimensiones sirven como control. Los términos $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_{\mathrm{rel}}$, $\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{\rho}$ y $\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})$ tienen unidades de aceleración. El doble producto depende del cuadrado de la rapidez angular y apunta hacia el eje; el producto con $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ depende de cómo cambia la rotación.

Formular Newton en las coordenadas móviles

Sea $\mathbf{F}$ la suma de fuerzas de interacción sobre una partícula de masa constante $m>0$, y sean

$$\mathbf{F}'=Q^{\mathsf{T}}\mathbf{F},\qquad \mathbf{A}'=Q^{\mathsf{T}}\ddot{\mathbf{R}}$$

sus componentes móviles y la aceleración del origen expresada en esa base. La segunda ley en el laboratorio permite despejar qué aceleración registrará el observador móvil.

Proposición. La ecuación dinámica en el marco móvil es

$$m\mathbf{a}_{\mathrm{rel}}=\mathbf{F}'-m\mathbf{A}'-2m\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_{\mathrm{rel}}-m\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{\rho}-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}).$$

En un intervalo, el marco describe todas las partículas libres mediante movimientos rectilíneos uniformes si y sólo si $\boldsymbol{\omega}=0$ y $\ddot{\mathbf{R}}=0$ durante ese intervalo.

Demostración. Sustituir la transformación de aceleraciones en $m\ddot{\mathbf{x}}=\mathbf{F}$, multiplicar por Q^{T} y despejar produce la ecuación. Para caracterizar los marcos inerciales, fijemos un instante y una posición y comparemos dos partículas libres con velocidades relativas arbitrarias. Si ambas tienen aceleración relativa nula, restar sus ecuaciones da $\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)=0$ para toda diferencia de velocidades. Esto exige $\boldsymbol{\omega}=0$. Al cumplirse en todo el intervalo, también $\dot{\boldsymbol{\omega}}=0$, y la ecuación libre restante exige $\mathbf{A}'=0$, equivalente a $\ddot{\mathbf{R}}=0$. Recíprocamente, esas condiciones dejan $m\mathbf{a}_{\mathrm{rel}}=\mathbf{F}'$, de modo que toda partícula libre tiene velocidad relativa constante. □

Los cuatro términos añadidos reciben los nombres de fuerza de inercia traslacional, fuerza de Coriolis, fuerza de Euler y fuerza centrífuga, en el orden en que aparecen. Su origen está en la descripción cinemática del marco. Las fuerzas de interacción, como la tensión, el peso o el empuje de una pared, se identifican por los cuerpos que interactúan. Una pareja de acción y reacción une dos cuerpos; la corrección centrífuga y una fuerza centrípeta sobre la misma partícula cumplen funciones distintas en la ecuación.

La dirección centrífuga se reconoce con el producto triple. Si $\boldsymbol{\rho}_{\perp}$ es la proyección de la posición sobre el plano perpendicular al eje y $\omega=\|\boldsymbol{\omega}\|$, entonces

$$-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})=m\omega^{2}\boldsymbol{\rho}_{\perp}.$$

En un giro con $\boldsymbol{\omega}=\Omega\mathbf{e}_z$, una velocidad relativa hacia $+x$ produce corrección de Coriolis hacia $-y$. Si además $\dot{\Omega}>0$, la corrección de Euler sobre una partícula situada en $+x$ apunta también hacia $-y$, aunque puede existir cuando la velocidad relativa es cero. La dependencia de cada término permite distinguirlos mediante estados preparados de manera diferente.

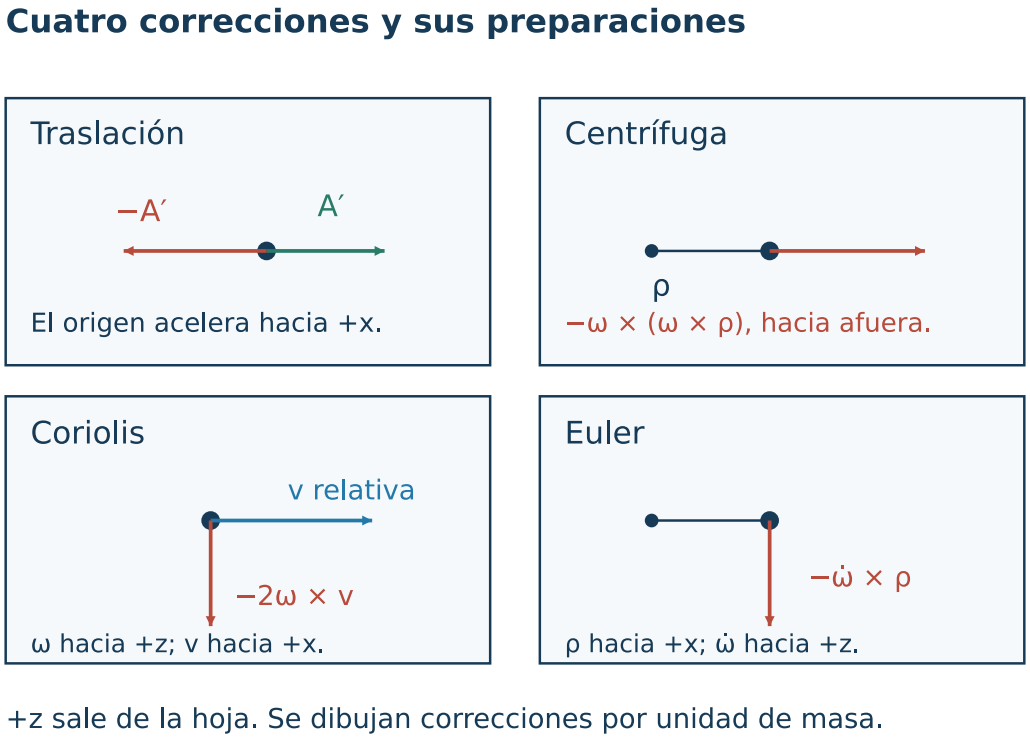


Figura 18.3. Direcciones de las correcciones traslacional, centrífuga, de Coriolis y de Euler en cuatro ejemplos planos. Las flechas representan términos de la ecuación móvil; cada panel declara la preparación que los produce.

Para ejes que sólo se trasladan, Q es constante y queda $m\mathbf{a}_{\mathrm{rel}} = \mathbf{F}' - m\mathbf{A}'$. Un disco horizontal libre permanece en reposo en el laboratorio si ése era su estado inicial. Respecto de un carro que acelera hacia $+x$, su coordenada disminuye con aceleración $-A$. Si una pared lo obliga a acompañar al carro, debe ejercer una fuerza física mA hacia adelante; el término traslacional se compensa en el balance de reposo relativo.

En un campo uniforme $\mathbf{g}$ y con traslación de aceleración constante, se puede agrupar la gravedad y la corrección del marco en $\mathbf{g}_{\mathrm{ef}} = \mathbf{g} - \mathbf{A}'$. La dirección de una cuerda en equilibrio y la lectura de un apoyo se obtienen entonces con el balance de fuerzas. Para una báscula horizontal en un ascensor de aceleración vertical A_z, el contacto estacionario requiere $N = m(g + A_z)$ y $N \geq 0$. Una normal negativa indica que la hipótesis de contacto debe abandonarse.

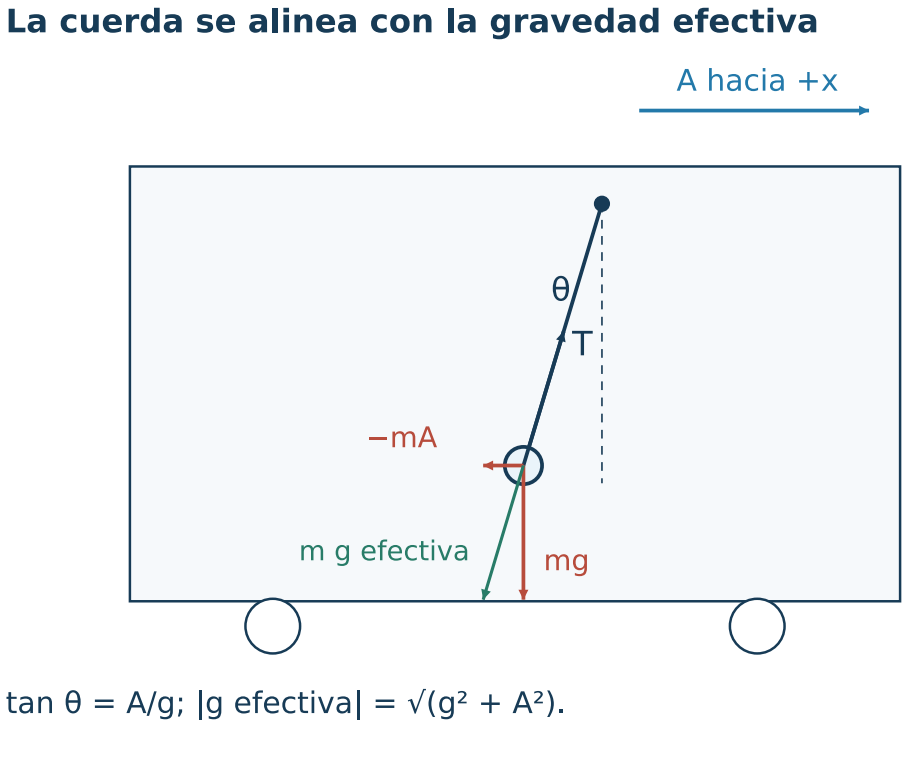


Figura 18.4. Un péndulo en reposo respecto de un carro acelerado se inclina hacia atrás. La tensión compensa el peso y la corrección traslacional; la aceleración efectiva apunta en la dirección de la cuerda hacia la masa.

Reconstruir la partícula liberada de la plataforma

La partícula inicial estaba en reposo relativo antes de soltarla. Tomemos un origen fijo, $Q(0) = I$, radio inicial $(r_0, 0)$ y rotación uniforme $\Omega > 0$. La velocidad de laboratorio en el instante de liberación es $(0, \Omega r_0)$. Al desaparecer la fuerza horizontal, la posición inercial resulta $(r_0, \Omega r_0 t)$.

Proposición. Para esa liberación, con $\tau = \Omega t$, las coordenadas giratorias son

$$\rho_x = r_0(\cos\tau + \tau\sin\tau), \qquad \rho_y = r_0(-\sin\tau + \tau\cos\tau).$$

Su velocidad relativa y su distancia al origen cumplen

$$\mathbf{v}_{\mathrm{rel}} = r_0\Omega\tau(\cos\tau, -\sin\tau), \qquad \|\boldsymbol{\rho}\| = r_0\sqrt{1+\tau^2}.$$

Demostración. Multiplicar la recta inercial $(r_0, \Omega r_0 t)$ por la rotación inversa de ángulo $-\Omega t$ da las dos coordenadas. Al derivarlas, los términos provenientes de seno y coseno se cancelan parcialmente y quedan $d\rho_x/d\tau = r_0\tau\cos\tau$, $d\rho_y/d\tau = -r_0\tau\sin\tau$; multiplicar por Ω produce la velocidad. Al sumar los cuadrados de las posiciones, los términos cruzados se cancelan y resulta $r_0^2(1+\tau^2)$. La reconstrucción mediante Q devuelve la recta, que satisface los datos y la ecuación inercial libre. $\square$

En el instante inicial, la velocidad relativa es cero y la aceleración relativa vale $(\Omega^2 r_0, 0)$. La corrección centrífuga explica ese comienzo radial. A medida que aparece velocidad relativa, Coriolis modifica su dirección y la curva se desvía respecto de la prolongación radial. Derivar otra vez la solución da

$$\mathbf{a}_{\mathrm{rel}} = r_0\Omega^2(\cos\tau - \tau\sin\tau, -\sin\tau - \tau\cos\tau),$$

que coincide con $-2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_{\mathrm{rel}}-\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})$. Todos esos términos reconstruyen aceleración inercial cero. Su presencia en la ecuación giratoria es compatible con la ausencia de fuerza horizontal después de la liberación.

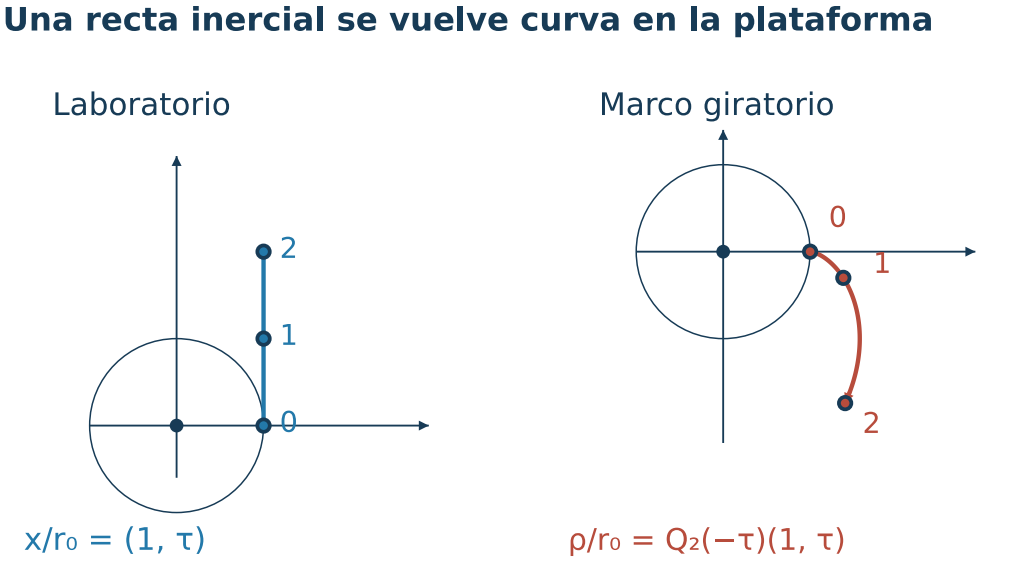


Figura 18.5. La trayectoria de laboratorio es una recta tangente al círculo inicial. La trayectoria relativa es curva. Los puntos numerados representan los mismos instantes $\tau=0,1,2$ y ambos paneles usan escalas iguales en sus ejes.

Si se preparara la partícula en reposo en el laboratorio, su velocidad relativa inicial sería $-\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}_0$. Sus coordenadas móviles recorrerían una circunferencia en sentido contrario al giro. La diferencia entre ambos problemas está en la velocidad inicial, antes de resolver ninguna ecuación.

Reconocer qué energía puede conservarse

Un producto escalar inmediato muestra que la corrección de Coriolis tiene potencia relativa nula:

$$\mathbf{v}_{\mathrm{rel}}\cdot(-2m\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_{\mathrm{rel}})=0.$$

Esto se refiere a la velocidad relativa. Una fuerza de vínculo puede tener potencia nula respecto de esa velocidad y transferir energía en el laboratorio si su punto de aplicación se mueve con la plataforma. Las velocidades y los balances de trabajo deben pertenecer al marco en que se formula cada afirmación.

Restrinjamos primero el análisis a origen fijo, velocidad angular constante y fuerzas conservativas cuya energía potencial es estacionaria en coordenadas giratorias, $U'(\boldsymbol{\rho})$. Se permiten además reacciones ideales $\mathbf{N}'$ que satisfacen $\mathbf{N}'\cdot\mathbf{v}_{\mathrm{rel}}=0$.

Definición. Bajo esas condiciones, el potencial efectivo giratorio es

$$U_{\mathrm{ef}}(\boldsymbol{\rho}) = U'(\boldsymbol{\rho}) - \frac{m}{2}\|\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}\|^2.$$

El término centrífugo queda representado por una energía potencial negativa que disminuye al aumentar la distancia al eje. Su uso depende de la rotación constante y de la estacionariedad declarada.

Proposición. Si $\mathbf{F}' = -\nabla U' + \mathbf{N}'$ bajo las condiciones anteriores, la cantidad

$$\mathcal{J} = \frac{m}{2}\|\mathbf{v}_{\mathrm{rel}}\|^2 + U_{\mathrm{ef}}(\boldsymbol{\rho})$$

es constante. Para un origen inercial fijo, se puede escribir también

$$\mathcal{J} = E_{\mathrm{lab}} - \boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{L}_{\mathrm{lab}}, \qquad \boldsymbol{\Omega} = Q\boldsymbol{\omega},$$

con energía y momento angular respecto de ese origen, usando el mismo potencial físico.

Demostración. Para $\boldsymbol{\omega}$ constante, el gradiente de $-m\|\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}\|^2/2$ es $m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})$. La ecuación móvil se escribe entonces $m\mathbf{a}_{\mathrm{rel}} = -\nabla U_{\mathrm{ef}} + \mathbf{N}' - 2m\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_{\mathrm{rel}}$. Tomar producto escalar con $\mathbf{v}_{\mathrm{rel}}$ anula los dos últimos trabajos y produce $d\mathcal{J}/dt = 0$. Para verificar la segunda forma, usemos $\dot{\mathbf{x}} = Q(\mathbf{v}_{\mathrm{rel}} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})$ y $\mathbf{x} - \mathbf{R} = Q\boldsymbol{\rho}$. Expandir el cuadrado de la rapidez en E_{lab} y restar $\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{L}_{\mathrm{lab}} = m(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})\cdot(\mathbf{v}_{\mathrm{rel}} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})$ cancela el término cruzado y deja $\mathcal{J}$. La igualdad es algebraica; su constancia procede del balance ya demostrado. $\square$

El potencial físico puede depender del tiempo en el laboratorio si gira con el dispositivo. En ese caso, la constancia de $\mathcal{J}$ no obliga a que E_{lab} y $\mathbf{L}_{\mathrm{lab}}$ se conserven por separado. Para la partícula libre de la plataforma, $U' = 0$ y se obtiene $\mathcal{J} = -m\Omega^2 r_0^2/2$: la energía cinética relativa crece mientras el potencial centrífugo disminuye en la misma cantidad.

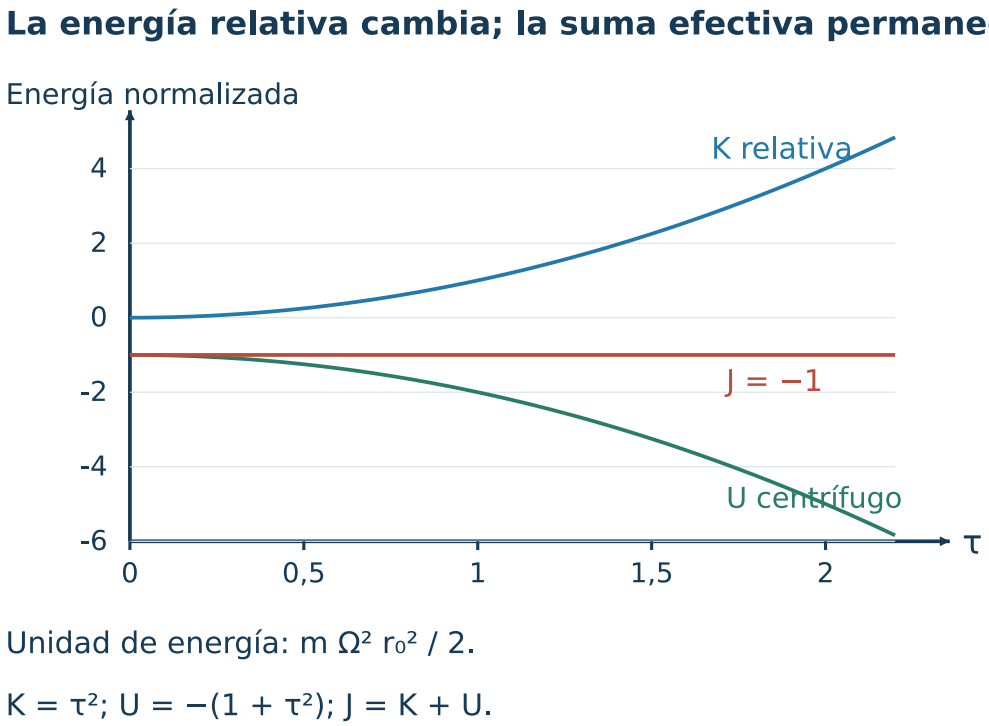


Figura 18.6. En unidades de $m\Omega^2 r_0^2/2$, la energía cinética relativa es τ^2, el potencial centrífugo es $-(1+\tau^2)$ y su suma permanece en -1.

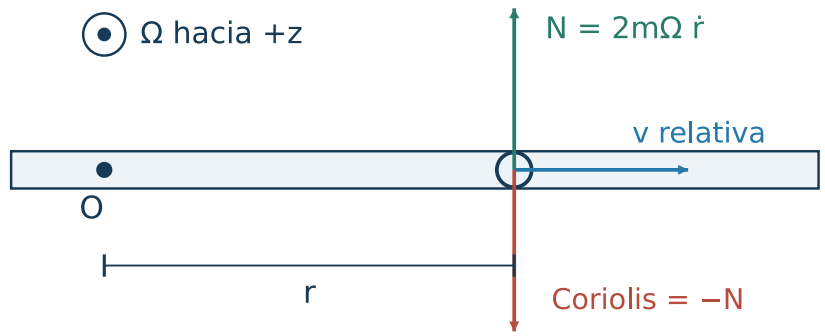
La forma de $\mathcal{J}$ también invita a preguntar qué información aporta su signo. Para un oscilador armónico isótropo de frecuencia $\omega_0 = \sqrt{k/m} > 0$, observado desde un giro plano uniforme, $U_{\mathrm{ef}} = m(\omega_0^2 - \Omega^2)\|\boldsymbol{\rho}\|^2/2$. Cuando $|\Omega| > \omega_0$, ese potencial tiene un máximo en el origen. La energía de laboratorio ofrece otra forma conservada,

$$\mathcal{H} = \frac{m}{2}\left(\|\mathbf{v}_{\mathrm{rel}} + \Omega J\boldsymbol{\rho}\|^2 + \omega_0^2\|\boldsymbol{\rho}\|^2\right), \qquad J(\rho_x, \rho_y) = (-\rho_y, \rho_x).$$

Es positiva para todo estado distinto del equilibrio y controla sus dos componentes, posición y velocidad. El cuadrado de posición controla $\boldsymbol{\rho}$; el otro cuadrado controla la velocidad inercial, y su diferencia con $\Omega J\boldsymbol{\rho}$ controla la relativa. Ambas coordenadas permanecen pequeñas al preparar una energía pequeña. El problema 14 desarrolla cotas uniformes y muestra cómo el cambio de referencia permite aprovechar la solución armónica del capítulo 10. El criterio de un mínimo efectivo conserva su utilidad como condición suficiente de confinamiento; el movimiento giroscópico pide examinar también el balance completo.

Una cuenta sobre una varilla radial giratoria permite examinar el papel de un vínculo. Si se desliza sin rozamiento y no hay fuerza aplicada a lo largo de la varilla, su coordenada satisface $\ddot{r} = \Omega^2 r$; la reacción transversal de la varilla es $2m\Omega\dot{r}$. Su potencia relativa es cero porque resulta perpendicular al deslizamiento. En el laboratorio, el punto de contacto tiene componente transversal de velocidad Ωr y la reacción realiza trabajo a razón $2m\Omega^2 r\dot{r}$. El mecanismo que mantiene la rotación aporta esa energía. Los ejercicios comparan este movimiento con otro donde un actuador fija una velocidad radial constante.

La reacción mantiene la cuenta dentro de la ranura



La reacción es perpendicular al deslizamiento relativo.

En el laboratorio, la pared puede aportar potencia N Ωr.

Figura 18.7. Para un deslizamiento radial hacia afuera, Coriolis apunta hacia atrás en la ecuación móvil. La pared ejerce una reacción física hacia adelante que mantiene la cuenta dentro de la ranura. El trabajo de esa reacción depende de la velocidad usada en el balance.

Aplicar un marco giratorio local a la Tierra

En una región pequeña fijamos ejes este, norte y arriba, con $\mathbf{e}_E \times \mathbf{e}_N = \mathbf{e}_U$. A latitud λ, las componentes de la velocidad angular terrestre son

$$\boldsymbol{\omega} = (0, \Omega\cos\lambda, \Omega\sin\lambda).$$

El valor local g incorporará el equilibrio de referencia entre gravitación y aceleración del marco, incluida la contribución centrífuga en el punto elegido. Para desplazamientos pequeños respecto del radio terrestre, podemos tratar esa gravedad efectiva como uniforme y estudiar por separado la corrección de Coriolis. Se omiten sus variaciones espaciales y la del campo gravitatorio, además de rozamiento y efectos atmosféricos en los ejemplos ideales.

Una velocidad hacia el norte produce aceleración de Coriolis hacia el este en el hemisferio norte. Una velocidad hacia el este produce componentes hacia el sur y hacia arriba. Esas direcciones se calculan con el producto vectorial y dependen de la latitud y de la dirección de movimiento. Cerca del ecuador, la componente vertical de la rotación se anula, pero la componente horizontal permanece y puede desviar una caída vertical.

Para una partícula soltada desde reposo relativo a altura H, el movimiento vertical dominante es $v_U = -gt$. Sustituirlo en el término de Coriolis da, al primer orden en Ω,

$$\ddot{x}_E = 2\Omega g t\cos\lambda, \qquad x_E(t) = \frac{\Omega g\cos\lambda}{3}t^3, \qquad T_0 = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

La desviación es hacia el este. La sustitución se justifica porque la velocidad horizontal inducida es ya de primer orden en Ω; volver a introducirla en Coriolis produce correcciones de orden superior. El parámetro temporal es $\Omega T_0 \ll 1$. También se necesita H pequeño frente al radio terrestre para sostener el modelo local, y un control independiente de las fuerzas atmosféricas si se busca interpretar una medición. La pequeñez de un término respecto de la caída vertical puede coexistir con una desviación horizontal medible.

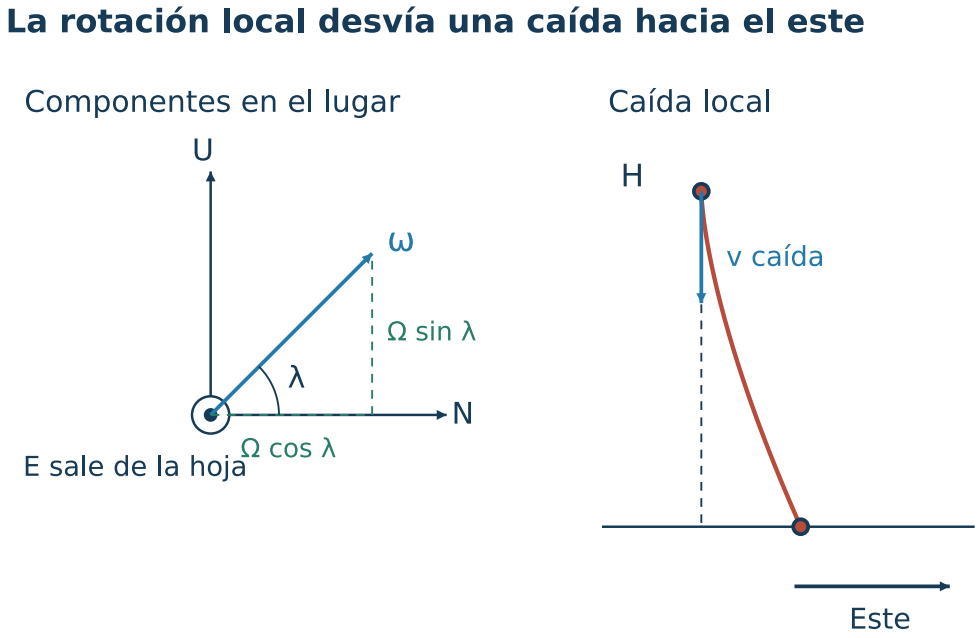


Figura 18.8. La rotación se descompone en los ejes locales. En una caída vertical, su componente hacia el norte produce desviación al este. El desplazamiento horizontal del dibujo está ampliado para mostrar el signo del efecto.

En un péndulo de pequeña amplitud, las componentes horizontales de Coriolis acoplan las dos direcciones de oscilación. El último problema construye la precesión dentro de un modelo lineal declarado y distingue la solución exacta de ese modelo de la precisión de sus aproximaciones físicas. La regla de transporte, por su parte, queda disponible para describir el momento angular de un cuerpo rígido desde ejes ligados al propio cuerpo.

Ejercicios

Salvo indicación contraria, se usan unidades SI, los vectores de una misma fórmula están expresados en la base móvil y el marco inercial de referencia es clásico. En los giros planos, $+z$ sale de la hoja y el giro positivo es antihorario. Los ejemplos terrestres usan los datos ideales redondeados $\Omega = 7{,}30 \times 10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1}$ y $g = 9{,}80\,\mathrm{m/s^2}$.

1. Un disco libre respecto de un carro

Un carro parte del reposo y su origen tiene aceleración constante $A = 3\,\mathrm{m/s^2}$ hacia $+x$, sin girar. Un disco horizontal libre parte en reposo en el laboratorio desde el mismo origen. Halle su posición, velocidad y aceleración relativas al cabo de $2\,\mathrm{s}$, y reconstruya el movimiento de laboratorio.

2. Una báscula que puede perder el contacto

Una persona de masa $60\,\mathrm{kg}$ está sobre el piso de un ascensor. Con $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$, calcule la normal que exigiría el reposo relativo para aceleraciones del ascensor $A_z = 2, -9{,}8, -12\,\mathrm{m/s^2}$. Decida cuándo esa hipótesis es físicamente posible y describa la aceleración relativa justo después de perder el contacto.

3. Un péndulo en un carro acelerado

Un carro acelera horizontalmente a $A = 3\,\mathrm{m/s^2}$. Un péndulo ideal de longitud $\ell = 0{,}5\,\mathrm{m}$ y masa $0{,}2\,\mathrm{kg}$ cuelga en su interior. Use $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$. Halle la inclinación de equilibrio, la tensión y el período de pequeñas oscilaciones alrededor de ese equilibrio; explique cómo aparece la gravedad efectiva.

4. Un vector fijo con componentes cambiantes

Los ejes giran con $\theta = 2t$, y el vector físico $\mathbf{A} = \mathbf{e}_x$ permanece fijo en el laboratorio. Obtenga sus componentes móviles y su derivada ordinaria. Evalúe ambos términos de la regla de transporte en $t = \pi/4\,\mathrm{s}$ y compruebe que la derivada física es cero.

5. Usar la transformación en tres dimensiones

En un instante se dan $\boldsymbol{\omega} = (1,2,3)\,\mathrm{s^{-1}}$, $\dot{\boldsymbol{\omega}} = (0,1,-1)\,\mathrm{s^{-2}}$, $\boldsymbol{\rho} = (2,-1,1)\,\mathrm{m}$, $\mathbf{v}_{\mathrm{rel}} = (-1,2,0)\,\mathrm{m/s}$, $\mathbf{a}_{\mathrm{rel}} = (0{,}5,-0{,}5,1)\,\mathrm{m/s^2}$ y $\mathbf{A}' = (2,0,-1)\,\mathrm{m/s^2}$. Calcule las componentes móviles de la aceleración inercial $Q^{\mathsf{T}}\ddot{\mathbf{x}}$, separando cada contribución.

6. Reconstruir a la inversa

En un instante, Q gira 90° alrededor de $+z$, $\boldsymbol{\rho} = (2,-1)\,\mathrm{m}$, $\boldsymbol{\omega} = 2\mathbf{e}_z\,\mathrm{s^{-1}}$ y $\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0{,}5\mathbf{e}_z\,\mathrm{s^{-2}}$. En el laboratorio se dan $\dot{\mathbf{R}} = (1,0)\,\mathrm{m/s}$, $\ddot{\mathbf{R}} = (2,-1)\,\mathrm{m/s^2}$, $\dot{\mathbf{x}} = (0,5)\,\mathrm{m/s}$ y $\ddot{\mathbf{x}} = (-6,4)\,\mathrm{m/s^2}$. Halle $\mathbf{v}_{\mathrm{rel}}$ y $\mathbf{a}_{\mathrm{rel}}$.

7. Sostener un punto mientras cambia la rotación

Una masa de $2\,\mathrm{kg}$ está fija en el marco móvil en $\boldsymbol{\rho} = (0{,}5,0)\,\mathrm{m}$. El origen permanece fijo, la rapidez angular instantánea es $\Omega = 3\,\mathrm{s^{-1}}$ y $\dot{\Omega} = 2\,\mathrm{s^{-2}}$. Calcule la fuerza horizontal de interacción necesaria y las correcciones centrífuga y de Euler. Examine por qué aparece Euler aun estando la masa en reposo relativo.

8. Seguir la liberación hasta un cuarto de giro

En el problema de apertura, tome $r_0 = 2\,\mathrm{m}$, $\Omega = 1\,\mathrm{s^{-1}}$ y $t = \pi/2\,\mathrm{s}$. Halle posición, velocidad y aceleración relativas. Reobtenga la aceleración relativa sumando Coriolis y centrífuga; reconstruya posición y velocidad de laboratorio.

9. Cambiar solamente la velocidad inicial

En la misma plataforma, prepare la partícula en reposo en el laboratorio en $(r_0, 0)$, en lugar de darle la velocidad de la plataforma. Obtenga su trayectoria y velocidad relativas. Compruebe la ecuación móvil y compare la distancia al eje con la del ejercicio 8.

10. Decidir si se puede omitir Coriolis

Para un movimiento radial hacia afuera con $\Omega = 3\,\mathrm{s^{-1}}$, $r = 0{,}5\,\mathrm{m}$ y rapidez relativa $u = 0{,}4\,\mathrm{m/s}$, compare los módulos de las aceleraciones de Coriolis y centrífuga. Determine qué cota sobre u garantiza que la primera no supere el 1% de la segunda en esa geometría. Explique por qué el cociente necesita revisión cerca del eje o al cambiar la dirección de la velocidad.

11. Una energía relativa que cambia y una suma que permanece

Para la partícula libre del ejercicio 8, con masa $1\,\mathrm{kg}$, calcule energía cinética relativa, potencial centrífugo y $\mathcal{J}$ cuando $\tau = 1$ y cuando $\tau = \pi/2$. Compare con la energía cinética y el momento angular de laboratorio.

12. Imponer velocidad radial constante

Una cuenta de masa $2\,\mathrm{kg}$ se mueve dentro de una ranura radial que gira uniformemente con $\Omega = 3\,\mathrm{s}^{-1}$. Un actuador mantiene la rapidez radial $u = 0{,}4\,\mathrm{m/s}$ constante. Cuando $r = 0{,}5\,\mathrm{m}$, halle la fuerza radial del actuador y la reacción transversal de la ranura. Verifique el balance en ambos marcos.

13. El trabajo de una pared móvil

Para el estado del ejercicio 12, calcule en el laboratorio la potencia del actuador, la de la reacción de la ranura y su suma. Compare con dK_{lab}/dt y con la energía cinética relativa constante. Identifique las potencias de las correcciones de inercia en el marco móvil.

14. Estabilidad con un máximo efectivo

Una partícula plana está sometida en el laboratorio a la fuerza armónica $\mathbf{F} = -k\mathbf{x}$, con origen común fijo, $m = 1\,\mathrm{kg}$, $k = 1\,\mathrm{N/m}$ y marco giratorio de $\Omega = 2\,\mathrm{s}^{-1}$. Calcule U_{ef}. Examine si su máximo en el origen basta para concluir inestabilidad, usando la solución inercial del oscilador y la rotación inversa. Obtenga además cotas uniformes para posición y velocidad relativas cuando $\|\boldsymbol{\rho}(0)\| \le a$ y $\|\mathbf{v}_{\mathrm{rel}}(0)\| \le b$. Evalúelas con $a = 10^{-3}\,\mathrm{m}$ y $b = 10^{-3}\,\mathrm{m/s}$; use escalas de posición y velocidad compatibles al expresar estabilidad.

15. Dejar libre la coordenada radial

Retire el actuador y deje una cuenta de masa $0{,}5\,\mathrm{kg}$ deslizar sin rozamiento en una varilla radial que gira con $\Omega = 2\,\mathrm{s}^{-1}$. Parta de $r(0) = 0{,}1\,\mathrm{m}$, $\dot r(0) = 0$. Obtenga $r(t)$, la reacción transversal y $\mathcal{J}$. Evalúe posición y reacción en $t = 0{,}5\,\mathrm{s}$ e identifique de dónde procede el aumento de energía de laboratorio.

16. Hacer visible el término de Euler

Un marco de origen fijo parte sin rotación y tiene $\theta(t) = \alpha t^2/2$, con $\alpha > 0$ constante. Una partícula libre permanece fija en el laboratorio en $(r_0, 0)$. Obtenga sus coordenadas y aceleración relativas. Compruebe por separado los términos de Euler, Coriolis y centrífugo, y determine cuál explica la aceleración relativa inicial.

17. Norte y este en los ejes terrestres

A latitud 30° norte, calcule la aceleración de Coriolis para una velocidad de $20\,\mathrm{m/s}$ hacia el norte y para otra de igual magnitud hacia el este. Use los ejes este, norte y arriba. Para un movimiento hacia el este sostenido a altura constante, determine cómo interviene la componente vertical en la normal, dentro del modelo local.

18. Predecir una caída desviada

Se suelta una partícula desde reposo relativo a $H = 100\,\mathrm{m}$ y latitud 45° norte. Calcule el tiempo de caída dominante, la desviación al este de primer orden y el parámetro ΩT_0. Distinga los errores por truncar la rotación de los efectos físicos omitidos en el modelo de caída.

19. Trasladar cotas de medida a una predicción

En el experimento anterior se conocen $H \in [99, 101]\,\mathrm{m}$ y $\lambda \in [44^\circ, 46^\circ]$, con g y Ω fijados como parámetros ideales. Obtenga un intervalo garantizado para la desviación predicha por la fórmula de primer orden. Explique por qué esa cota no incorpora por sí sola el error del modelo físico.

20. Construir la precesión de un péndulo lineal

Se adopta el modelo horizontal de pequeña amplitud

$$\ddot{\mathbf{r}} + fJ\dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = 0, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = 2\Omega\sin\lambda, \quad \omega_0^2 = \frac{g}{\ell}.$$

El modelo conserva Coriolis horizontal y omite variaciones del campo efectivo, términos no lineales de amplitud y otros efectos de orden superior. Use $\mathbf{r} = Q_2(-ft/2)\mathbf{u}$, donde $Q_2(\theta)$ es la rotación plana, y derive la ecuación para $\mathbf{u}$. Obtenga la tasa de giro de los ejes de la elipse oscilante cuando estén distinguidos y el tiempo de precesión completa a latitud 30° norte. Examine el ecuador y explique qué precisión física puede atribuirse a un término cuadrático en Ω que aparezca al transformar el modelo.

Soluciones

1. Un disco libre respecto de un carro

El origen del carro tiene $R_x(t) = At^2/2$, mientras que el disco conserva $x(t) = 0$. Como los ejes permanecen paralelos, $\rho_x = x - R_x = -At^2/2$, $v_{\mathrm{rel},x} = -At$ y $a_{\mathrm{rel},x} = -A$. En $t = 2\,\mathrm{s}$ dan $-6\,\mathrm{m}$, $-6\,\mathrm{m/s}$ y $-3\,\mathrm{m/s^2}$.

Reconstruir la posición suma $R_x + \rho_x = 0$; reconstruir la velocidad suma $At - At = 0$ y reconstruir la aceleración suma $A - A = 0$. La partícula permanece libre en el laboratorio, mientras el carro cambia la posición desde la que se mide su separación. Si se quisiera imponer reposo relativo, habría que añadir una fuerza física hacia adelante.

2. Una báscula que puede perder el contacto

Mientras la persona acompaña al piso, el balance vertical es $N - mg = mA_z$. Para $A_z = 2\,\mathrm{m/s^2}$, la normal es $60(9{,}8 + 2) = 708\,\mathrm{N}$. Para $A_z = -9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$, la normal es cero y el estado de caída libre es compatible con que ambos partan juntos sin velocidad relativa.

Con $A_z = -12\,\mathrm{m/s^2}$, el reposo relativo exigiría $N = -132\,\mathrm{N}$. Un piso que sólo empuja no puede ejercer esa fuerza. Se pierde el contacto y la persona tiene aceleración inercial $-g$; respecto del piso, su aceleración es $-9{,}8 - (-12) = 2{,}2\,\mathrm{m/s^2}$ hacia arriba. La separación se abre porque el piso acelera hacia abajo más que la caída libre.

3. Un péndulo en un carro acelerado

La gravedad efectiva es $\mathbf{g}_{\mathrm{ef}} = (-A, -g)$ en el plano horizontal-vertical. La cuerda desde el apoyo hasta la masa se alinea con esa dirección, así que la inclinación hacia atrás respecto de la vertical cumple $\tan\theta = A/g = 0{,}3$. Resulta $\theta \approx 16{,}70°$ y $g_{\mathrm{ef}} = \sqrt{A^2 + g^2} = \sqrt{109}\,\mathrm{m/s^2}$.

La tensión en equilibrio vale $mg_{\mathrm{ef}} \approx 2{,}088\,\mathrm{N}$. Si δ es el pequeño ángulo desde esa dirección, proyectar la ecuación tangencial da $\ell\ddot{\delta} = -g_{\mathrm{ef}}\sin\delta$. Aproximar $\sin\delta$ por δ para $|\delta| \ll 1$ produce frecuencia $\sqrt{g_{\mathrm{ef}}/\ell}$ y período $T = 2\pi\sqrt{\ell/g_{\mathrm{ef}}} \approx 1{,}375\,\mathrm{s}$. La aceleración constante del carro mantiene fija la dirección efectiva; una aceleración variable requeriría revisar esa condición.

4. Un vector fijo con componentes cambiantes

Aplicar la rotación inversa al vector fijo da

$$\mathbf{a} = (\cos 2t, -\sin 2t, 0)$$

y su derivada es

$$\dot{\mathbf{a}} = (-2\sin 2t, -2\cos 2t, 0)$$

En el instante dado, $\mathbf{a} = (0, -1, 0)$ y $\dot{\mathbf{a}} = (-2, 0, 0)$ en las unidades correspondientes. La contribución de la base es $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a} = 2\mathbf{e}_z \times (0, -1, 0) = (2, 0, 0)$.

Los dos términos dentro de $Q(\dot{\mathbf{a}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a})$ suman cero. La derivada de las componentes móviles es distinta de la derivada física; la regla de transporte identifica exactamente la diferencia.

5. Usar la transformación en tres dimensiones

Los productos vectoriales son

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\mathrm{rel}} = (-6, -3, 4), \qquad \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\rho} = (0, -2, -2),$$

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) = (-25, 20, -5),$$

con las unidades que corresponden a cada término; en la transformación de aceleración, todos quedan en $\mathrm{m/s^2}$. Al sumar $\mathbf{A}'$, $\mathbf{a}_{\mathrm{rel}}$, dos veces el primer producto y los otros dos, obtenemos

$$\begin{aligned} Q^{\mathsf{T}}\ddot{\mathbf{x}} &= (2, 0, -1) + (0{,}5, -0{,}5, 1) + (-12, -6, 8) \\ &\quad + (0, -2, -2) + (-25, 20, -5) \\ &= (-34{,}5, 11{,}5, 1)\,\mathrm{m/s^2}. \end{aligned}$$

El resultado está expresado en la base móvil, aunque representa la aceleración inercial. Multiplicarlo por Q daría sus componentes de laboratorio.

6. Reconstruir a la inversa

Primero se resta la velocidad del origen y se cambia de base: $Q^{\mathsf{T}}(\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{R}}) = (5, 1)\,\mathrm{m/s}$. El término de giro es $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} = (2, 4)\,\mathrm{m/s}$. Al restarlo queda $\mathbf{v}_{\mathrm{rel}} = (3, -3)\,\mathrm{m/s}$.

Para la aceleración, $Q^{\mathsf{T}}(\ddot{\mathbf{x}} - \ddot{\mathbf{R}}) = (5, 8)\,\mathrm{m/s^2}$. Las correcciones cinemáticas son $2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\mathrm{rel}} = (12, 12)$, $\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\rho} = (0{,}5, 1)$ y $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) = (-8, 4)$, todas en $\mathrm{m/s^2}$. Su suma es $(4{,}5, 17)$; por tanto, $\mathbf{a}_{\mathrm{rel}} = (0{,}5, -9)\,\mathrm{m/s^2}$. El orden de operaciones evita restar componentes expresadas en bases distintas.

7. Sostener un punto mientras cambia la rotación

El reposo relativo anula $\mathbf{v}_{\mathrm{rel}}$ y $\mathbf{a}_{\mathrm{rel}}$. La aceleración inercial expresada en ejes móviles contiene $\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\rho} = (0, 1)\,\mathrm{m/s^2}$ y $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) = (-4{,}5, 0)\,\mathrm{m/s^2}$. La fuerza física requerida es $\mathbf{F}' = (-9, 2)\,\mathrm{N}$.

En el balance móvil, la corrección centrífuga es $(9, 0)\,\mathrm{N}$ y la de Euler $(0, -2)\,\mathrm{N}$; ambas compensan la fuerza de interacción. Euler aparece porque la orientación del marco cambia con aceleración angular, incluso cuando la partícula no se desplaza dentro de él. El apoyo transmite la fuerza tangencial que permite seguir ese cambio de rotación.

8. Seguir la liberación hasta un cuarto de giro

Para $\tau = \pi/2$, las fórmulas exactas dan

$$\boldsymbol{\rho} = (\pi, -2)\,\mathrm{m}, \qquad \mathbf{v}_{\mathrm{rel}} = (0, -\pi)\,\mathrm{m/s}, \qquad \mathbf{a}_{\mathrm{rel}} = (-\pi, -2)\,\mathrm{m/s^2}.$$

La aceleración de Coriolis es $-2\Omega J\mathbf{v}_{\mathrm{rel}} = (-2\pi, 0)\,\mathrm{m/s^2}$, y la centrífuga es $\Omega^2\boldsymbol{\rho} = (\pi, -2)\,\mathrm{m/s^2}$. Su suma recupera la aceleración relativa. Para reconstruir la velocidad física se suma primero $\Omega J\boldsymbol{\rho} = (2, \pi)\,\mathrm{m/s}$ a $\mathbf{v}_{\mathrm{rel}}$, y después se gira 90°: resulta $(0, 2)\,\mathrm{m/s}$.

La posición inercial es $Q\boldsymbol{\rho} = (2, \pi)\,\mathrm{m}$. Coincide con la recta $x = 2\,\mathrm{m}$, $y = (2\,\mathrm{m/s})t$, cuya aceleración es cero. La reconstrucción es un control completo de los signos y del factor dos.

9. Cambiar solamente la velocidad inicial

La posición inercial fija se transforma en $\boldsymbol{\rho} = r_0(\cos\Omega t, -\sin\Omega t)$. Su velocidad relativa es $-\Omega J\boldsymbol{\rho}$ y su aceleración $-\Omega^2\boldsymbol{\rho}$. Sustituir la velocidad en Coriolis da $-2\Omega J(-\Omega J\boldsymbol{\rho}) = -2\Omega^2\boldsymbol{\rho}$, mientras la centrífuga aporta $+\Omega^2\boldsymbol{\rho}$. La suma es la aceleración obtenida por derivación.

La distancia al eje permanece en r_0. En la liberación desde reposo relativo, en cambio, era $r_0\sqrt{1+\Omega^2t^2}$. Ambas descripciones son libres en el laboratorio, con velocidades iniciales diferentes. Imponer simultáneamente reposo en los dos marcos en un punto fuera del eje sería incompatible con una plataforma que ya está girando.

10. Decidir si se puede omitir Coriolis

En la geometría plana radial, los módulos son $a_C = 2\Omega u = 2{,}4\,\mathrm{m/s^2}$ y $a_{\mathrm{cf}} = \Omega^2 r = 4{,}5\,\mathrm{m/s^2}$. Su razón es $2u/(\Omega r) \approx 0{,}5333$. El término de Coriolis tiene más de la mitad del módulo del centrífugo y su dirección es distinta.

Para asegurar una razón no mayor que 0,01, se requiere $u \le 0{,}005\Omega r = 0{,}0075\,\mathrm{m/s}$. La cota supone $r > 0$ y la orientación declarada. Sobre el eje, el denominador centrífugo se anula y ese cociente deja de ser una medida útil. Si la velocidad es paralela a $\boldsymbol{\omega}$, Coriolis se anula, independientemente de su magnitud; una comparación sólo de rapideces pierde esa información geométrica.

11. Una energía relativa que cambia y una suma que permanece

Para $r_0 = 2\,\mathrm{m}$, $\Omega = 1\,\mathrm{s^{-1}}$ y $m = 1\,\mathrm{kg}$, se tiene $K_{\mathrm{rel}} = 2\tau^2\,\mathrm{J}$ y $U_{\mathrm{cf}} = -2(1+\tau^2)\,\mathrm{J}$. En $\tau = 1$, los valores son $2\,\mathrm{J}$ y $-4\,\mathrm{J}$; en $\tau = \pi/2$, son $\pi^2/2\,\mathrm{J}$ y $-(2+\pi^2/2)\,\mathrm{J}$. En ambos instantes $\mathcal{J} = -2\,\mathrm{J}$.

En el laboratorio, la rapidez permanece en $2\,\mathrm{m/s}$, así que $E_{\mathrm{lab}} = 2\,\mathrm{J}$. El momento angular respecto del origen es $L_z = mxv_y = 4\,\mathrm{kg\,m^2/s}$. La combinación $E_{\mathrm{lab}} - \Omega L_z$ vale $-2\,\mathrm{J}$, como exige la identidad. Las energías cinéticas de ambos marcos son diferentes y cada balance conserva sus propias variables.

12. Imponer velocidad radial constante

En los ejes de la ranura, $\boldsymbol{\rho} = (r, 0)$, $\mathbf{v}_{\mathrm{rel}} = (u, 0)$ y $\mathbf{a}_{\mathrm{rel}} = 0$. La aceleración inercial expresada en esos ejes es $(-\Omega^2 r, 2\Omega u)$. Por ello la fuerza radial es $F_r = -m\Omega^2 r = -9\,\mathrm{N}$ y la reacción transversal $N_y = 2m\Omega u = 4{,}8\,\mathrm{N}$.

En el marco móvil, la centrífuga aporta $+9\,\mathrm{N}$ radialmente y Coriolis $-4{,}8\,\mathrm{N}$ transversalmente. Ambas compensan las fuerzas físicas, dejando aceleración relativa cero. La reacción de la pared conserva el movimiento dentro de la ranura; el actuador suministra la fuerza radial que fija la rapidez constante.

13. El trabajo de una pared móvil

La velocidad de laboratorio, expresada en ejes móviles, es $(u, \Omega r) = (0{,}4, 1{,}5)\,\mathrm{m/s}$. La potencia radial del actuador es $F_r u = -3{,}6\,\mathrm{W}$, y la de la reacción es $N_y \Omega r = 7{,}2\,\mathrm{W}$. La suma vale $3{,}6\,\mathrm{W}$.

La energía cinética inercial es $K_{\mathrm{lab}} = m(u^2 + \Omega^2 r^2)/2$. Como u y Ω son constantes, su derivada es $m\Omega^2 r u = 3{,}6\,\mathrm{W}$, en acuerdo con las potencias. En el marco móvil, $K_{\mathrm{rel}} = mu^2/2$ es constante: el actuador realiza potencia relativa $-3{,}6\,\mathrm{W}$, la centrífuga aporta $+3{,}6\,\mathrm{W}$ y tanto la reacción transversal como Coriolis tienen potencia relativa cero. La pared giratoria puede transferir energía en el laboratorio aun siendo ideal respecto del deslizamiento.

14. Estabilidad con un máximo efectivo

El potencial físico es $U' = k\|\boldsymbol{\rho}\|^2/2$, pues una rotación conserva la norma. En el plano, $U_{\mathrm{ef}} = (k - m\Omega^2)\|\boldsymbol{\rho}\|^2/2 = -3\|\boldsymbol{\rho}\|^2/2$ al usar las unidades dadas. Tiene un máximo estricto en el origen.

La solución inercial es $\mathbf{x} = \mathbf{a}\cos t + \mathbf{b}\sin t$, con constantes fijadas por el estado inicial. Las coordenadas giratorias son $Q_2(-2t)\mathbf{x}$ y tienen la misma norma, por lo que permanecen acotadas. Su velocidad relativa también se acota por $\|\dot{\mathbf{x}}\| + 2\|\mathbf{x}\|$. Además, ambas cotas dependen linealmente del tamaño de los datos iniciales; datos suficientemente pequeños permanecen pequeños, de modo que el equilibrio es estable.

La fuerza de Coriolis acopla las componentes y cambia el alcance de un argumento basado sólo en el potencial efectivo. Un mínimo con energía positiva puede proporcionar una prueba de confinamiento, pero la ausencia de ese mínimo no demuestra por sí sola inestabilidad en un sistema con términos giroscópicos. El criterio radial del capítulo 15 se refería a una reducción unidimensional distinta.

Podemos hacer explícita la dependencia respecto de la preparación. Escribamos $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, $\boldsymbol{\rho}_0 = \boldsymbol{\rho}(0)$ y $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_{\mathrm{rel}}(0)$. Con $Q(0) = I$, la velocidad inercial inicial es $\mathbf{u}_0 = \mathbf{v}_0 + \Omega J \boldsymbol{\rho}_0$. La solución inercial completa es

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\rho}_0 \cos \omega_0 t + \frac{\mathbf{u}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

La desigualdad triangular, junto con $\|J\boldsymbol{\rho}_0\| = \|\boldsymbol{\rho}_0\|$ en el plano, proporciona para todo $t \geq 0$

$$\|\boldsymbol{\rho}(t)\| = \|\mathbf{x}(t)\| \leq C, \qquad C = \left(1 + \frac{|\Omega|}{\omega_0}\right) a + \frac{b}{\omega_0}.$$

Al derivar la solución obtenemos $\|\dot{\mathbf{x}}\| \leq \omega_0 a + \|\mathbf{u}_0\| \leq \omega_0 C$. Como $\mathbf{v}_{\mathrm{rel}} = Q^{\mathsf{T}}\dot{\mathbf{x}} - \Omega J \boldsymbol{\rho}$, se sigue

$$\|\mathbf{v}_{\mathrm{rel}}(t)\| \leq (\omega_0 + |\Omega|) C.$$

Con los datos pedidos, $\omega_0 = 1\,\mathrm{s}^{-1}$, $C = 4 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$ y la cota de velocidad es $1{,}2 \times 10^{-2}\,\mathrm{m/s}$. Son cotas suficientes, obtenidas sin ajustar el instante de los máximos. Para cualquier tolerancia de posición y otra de velocidad, elegir a, b de modo que las dos expresiones queden bajo esas tolerancias prueba la estabilidad durante todo el futuro. La escala ω_0 convierte una cota de velocidad en longitud y permite comparar datos de estado con unidades coherentes.

15. Dejar libre la coordenada radial

La ecuación radial sin actuador es $\ddot{r} = \Omega^2 r$. Con los datos dados, su solución es $r = r_0 \cosh(\Omega t)$ y $\dot{r} = r_0 \Omega \sinh(\Omega t)$, como se comprueba derivando y evaluando en cero. Las funciones hiperbólicas fueron definidas por exponenciales en el capítulo 16. La reacción transversal es $N_y = 2m\Omega\dot{r}$.

En $t = 0{,}5\,\mathrm{s}$, resulta $r = 0{,}1\cosh 1\,\mathrm{m} \approx 0{,}1543\,\mathrm{m}$ y $N_y = 0{,}4\sinh 1\,\mathrm{N} \approx 0{,}4701\,\mathrm{N}$. La cantidad $\mathcal{J} = m\dot{r}^2/2 - m\Omega^2 r^2/2 = -m\Omega^2 r_0^2/2 = -0{,}01\,\mathrm{J}$ se conserva.

La potencia inercial de la reacción es $2m\Omega^2 r\dot{r} > 0$ para $t > 0$. Coincide con la derivada de $m(\dot{r}^2 + \Omega^2 r^2)/2$. La fuente energética es el mecanismo que sostiene la rotación de la varilla; la partícula y la varilla con giro impuesto no forman por sí solas un sistema energéticamente aislado. Una varilla de longitud finita sólo sostiene esta solución hasta que la cuenta llegue a su extremo.

16. Hacer visible el término de Euler

Las coordenadas son $\boldsymbol{\rho} = r_0(\cos\theta, -\sin\theta)$, con $\theta = \alpha t^2/2$ y $\omega = \alpha t$. Al derivar,

$$\mathbf{v}_{\text{rel}} = -\omega J\boldsymbol{\rho}, \qquad \mathbf{a}_{\text{rel}} = -\alpha J\boldsymbol{\rho} - \omega^2\boldsymbol{\rho}.$$

Euler aporta $-\alpha J\boldsymbol{\rho}$, Coriolis $-2\omega J(-\omega J\boldsymbol{\rho}) = -2\omega^2\boldsymbol{\rho}$, y la centrífuga $+\omega^2\boldsymbol{\rho}$. La suma reproduce la derivación directa. En $t = 0$, los dos términos que contienen ω^2 se anulan y queda aceleración relativa $(0, -\alpha r_0)$. La partícula inercial sigue quieta mientras los ejes comienzan a girar con aceleración angular.

17. Norte y este en los ejes terrestres

Con $\boldsymbol{\omega} = (0, \Omega\cos\lambda, \Omega\sin\lambda)$ y velocidad norte $(0, V, 0)$, se obtiene $-2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = (2\Omega V\sin\lambda, 0, 0)$. Para los datos, la componente al este es $1{,}460 \times 10^{-3}\,\mathrm{m/s^2}$.

Para velocidad este $(V, 0, 0)$, las componentes son $(0, -2\Omega V\sin\lambda, 2\Omega V\cos\lambda)$: $-1{,}460 \times 10^{-3}\,\mathrm{m/s^2}$ hacia el norte, equivalente a aceleración al sur, y $2{,}529 \times 10^{-3}\,\mathrm{m/s^2}$ hacia arriba. Para altura constante y apoyo ideal, el balance vertical es $N/m - g + 2\Omega V\cos\lambda = 0$, así que $N = m(g - 2\Omega V\cos\lambda)$. Se usa el g efectivo local ya definido; al invertir la velocidad, se invierte la corrección lineal.

18. Predecir una caída desviada

El tiempo dominante es $T_0 = \sqrt{200/9{,}8}\,\mathrm{s} \approx 4{,}518\,\mathrm{s}$. La desviación predicha es

$$x_E(T_0) = \frac{\Omega g\cos 45^\circ}{3} T_0^3 \approx 0{,}01555\,\mathrm{m},$$

unos 1,55 centímetros hacia el este. El parámetro $\Omega T_0 \approx 3{,}30 \times 10^{-4}$ sostiene la expansión temporal de corta duración en el modelo local.

La integración de primer orden omite realimentaciones de Coriolis de orden superior y cambios correspondientes del tiempo de caída. La representación uniforme del campo omite gradientes de gravedad y aceleración centrífuga, y el ejemplo ideal omite aire y condiciones imperfectas de liberación. El parámetro pequeño de rotación controla una aproximación matemática particular; la precisión de una medición requiere estimar también esos otros efectos.

19. Trasladar cotas de medida a una predicción

Al sustituir el tiempo dominante, la fórmula queda

$$x_E = \frac{2^{3/2}\Omega}{3\sqrt{g}} H^{3/2}\cos\lambda.$$

Crece con $H > 0$ y decrece con λ en el intervalo del problema. Por ello el mínimo usa $H = 99\,\mathrm{m}$, $\lambda = 46^\circ$, y el máximo $H = 101\,\mathrm{m}$, $\lambda = 44^\circ$. Evaluar y redondear hacia afuera produce

$$x_E \in [0{,}01504,\ 0{,}01606]\,\mathrm{m}.$$

Es una cota garantizada para los valores de esa fórmula con los parámetros declarados, sin necesidad de linealizar sus errores. El error de modelado, las fuerzas omitidas y la calidad de la liberación requieren estimaciones adicionales; el intervalo de parámetros no los incorpora automáticamente.

20. Construir la precesión de un péndulo lineal

Escribamos $Q = Q_2(-ft/2)$. Como f es constante y $J^2 = -I$, se tiene $\dot{Q} = -(f/2)QJ$. Al derivar dos veces $\mathbf{r} = Q\mathbf{u}$ y sumar $fJ\dot{\mathbf{r}}$, los términos con $\dot{\mathbf{u}}$ se cancelan y queda

$$\ddot{\mathbf{u}} + \left(\omega_0^2 + \frac{f^2}{4}\right)\mathbf{u} = 0.$$

La solución es $\mathbf{u} = \mathbf{a}\cos(\nu t) + \mathbf{b}\sin(\nu t)$, con $\nu = \sqrt{\omega_0^2 + f^2/4}$. Describe una elipse de ejes fijos, posiblemente degenerada en un segmento; cuando esos ejes están distinguidos, la multiplicación por Q los gira a tasa $-f/2 = -\Omega\sin\lambda$. Una circunferencia carece de una orientación de ejes distinguida. Para un péndulo liberado desde reposo relativo, la elipse auxiliar suele ser muy alargada si $|f| \ll \omega_0$, lo que permite interpretar ese giro como precesión del plano oscilante a primer orden.

El tiempo de un giro completo de la dirección orientada es $T_{\mathrm{prec}} = 2\pi/(\Omega|\sin\lambda|)$. A 30° norte vale aproximadamente $1{,}7214\times10^5$ s, o 47,82 horas; el giro es horario visto desde arriba. La recta de oscilación sin orientación recupera su dirección geométrica tras medio giro. En el ecuador, $f = 0$ y este modelo no produce precesión; ello no anula todos los efectos de la rotación terrestre sobre otros movimientos.

La transformación y el término $f^2/4$ son exactos para la ecuación lineal adoptada. Atribuirles precisión física de segundo orden en Ω exigiría recuperar también los efectos de ese orden que se omitieron al construir el modelo. Resolver exactamente una aproximación no modifica el alcance de sus hipótesis.

Lecturas y conexiones

Spivak, *Physics for Mathematicians. Mechanics I*, capítulo 10, desarrolla las fuerzas de inercia, la cuenta en una varilla giratoria, la desviación de una caída y el péndulo de Foucault. Aquí la regla de transporte se construye desde la ortogonalidad de la matriz de orientación y se usa para reconstruir estados completos; la separación entre solución exacta de un modelo y precisión física de sus aproximaciones acompaña las aplicaciones terrestres.

Sears y Zemansky, *Física universitaria*, volumen 1, ejemplos 5.8–5.9 y ejercicio 4.8, permiten cotejar aceleración, apoyo y peso aparente. Serway y Jewett, *Física para ciencias e ingeniería*, volumen 1, §6.3, presenta movimientos observados en marcos acelerados y giratorios. Los problemas de contacto y de vínculo se resuelven aquí conservando la interpretación de cada fuerza y verificando el movimiento inercial. Las mismas derivadas de ejes móviles permitirán estudiar la dinámica tridimensional de un cuerpo rígido.

Capítulo 19

Cuerpo rígido en tres dimensiones

Una rueda bien alineada puede mantener su giro alrededor de un eje sin que los cojinetes deban cambiar continuamente la dirección de su momento angular. Si distribuimos la masa de otra manera y conservamos el mismo eje, puede hacer falta un torque transversal aunque la rapidez de giro sea constante. El cálculo escalar del momento de inercia sigue describiendo una parte de ese movimiento, pero deja sin determinar la dirección del momento angular y el esfuerzo que deben ejercer los apoyos.

Para ver la dificultad con pocos datos, consideremos cuatro masas iguales en las posiciones $(1,0,0)$, $(-1,0,0)$, $(0,2,0)$ y $(0,-2,0)$ respecto de su centro. Cuando cada masa vale una unidad y la velocidad angular es $(1,1,0)$, el momento angular resulta $(8,2,0)$ en las unidades correspondientes. Ambos vectores pertenecen al mismo plano y forman un ángulo distinto de cero. La distribución de masa responde de manera diferente a cada componente del giro; necesitamos una transformación lineal que reúna esas respuestas.

Supondremos conocidos los balances de un sistema de partículas, la rotación alrededor de un eje y la regla de transporte del capítulo 18. Introduciremos localmente la descomposición en ejes principales. El modelo rígido conserva las distancias internas: resulta adecuado mientras deformaciones y vibraciones no alteren de manera apreciable el movimiento que se desea estudiar. Las tensiones que mantienen esa rigidez pueden importar para la resistencia del material, aunque el balance global permita eliminar sus torques internos.

Describir un cuerpo que se traslada y gira

Definición. Un cuerpo rígido discreto de masas constantes $m_i > 0$ se describe mediante posiciones

$$\mathbf{x}_i(t) = \mathbf{R}(t) + Q(t)\mathbf{s}_i, \qquad Q^{\mathsf{T}}Q = \mathrm{Id}_3, \quad \det Q = 1,$$

con vectores materiales $\mathbf{s}_i$ independientes del tiempo y funciones $\mathbf{R}, Q$ de clase C^2. Si $\mathbf{R}$ es el centro de masa, se exige $\sum_i m_i \mathbf{s}_i = 0$. Escribimos $M = \sum_i m_i$, $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}}$ y definimos las componentes materiales $\boldsymbol{\omega}$ por $Q^{\mathsf{T}}\dot{Q}\,\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}$ para todo $\mathbf{a}$.

La notación Id_3 designa la identidad de orden tres. La matriz Q conserva longitudes y ángulos. Sus columnas son los ejes ligados al cuerpo expresados en el laboratorio, y $\boldsymbol{\Omega} = Q\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular física. Derivar las posiciones da

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{V} + Q(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s}_i).$$

La misma velocidad angular produce velocidades distintas en puntos diferentes: la distancia al eje y la dirección de cada separación intervienen en el producto vectorial. Para recuperar la orientación después de resolver la dinámica de $\boldsymbol{\omega}$, también habrá que integrar

$$\dot{Q} = Q[\boldsymbol{\omega}]_\times, \qquad [\boldsymbol{\omega}]_\times \mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a},$$

con una orientación inicial $Q(0)$. Conocer las tres componentes de velocidad angular no equivale a conocer dónde se encuentra cada punto del cuerpo.

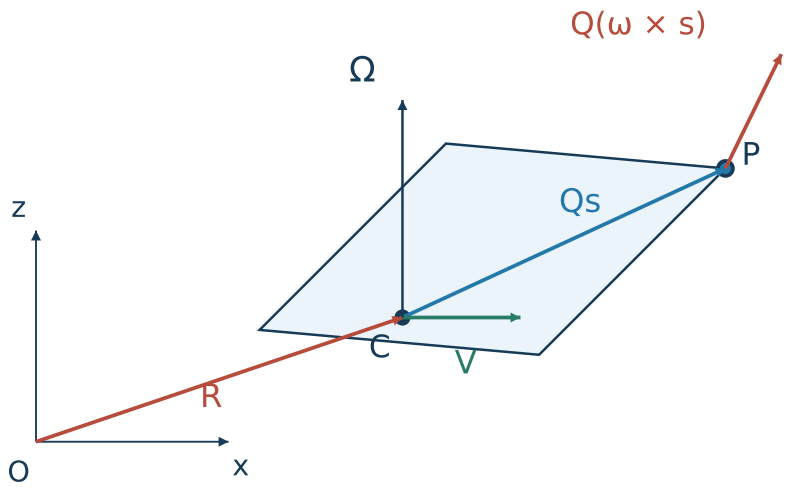


Figura 19.1. La separación material se transporta mediante Q. La velocidad de un punto suma la velocidad del centro y la contribución perpendicular al eje instantáneo de giro; el dibujo representa un instante.

Reunir la distribución de masa en una transformación

El momento angular relativo al centro se obtiene sumando cada separación vectorial cruzada con su cantidad de movimiento relativa. Al sustituir la velocidad rígida aparece, para cada masa, la expresión $\mathbf{s}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s}_i)$. El producto triple permite escribirla como $\|\mathbf{s}_i\|^2 \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{s}_i \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{s}_i$: su dependencia de $\boldsymbol{\omega}$ es lineal.

Definición. El tensor de inercia respecto del origen material elegido es la transformación lineal de matriz

$$\mathsf{I} = \sum_i m_i \left(\|\mathbf{s}_i\|^2 \, \mathrm{Id}_3 - \mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^{\mathsf{T}} \right).$$

Para una distribución continua no negativa se reemplaza la suma por $\int (\|\mathbf{s}\|^2 \, \mathrm{Id}_3 - \mathbf{s}\mathbf{s}^{\mathsf{T}}) \, dm$, suponiendo masa total y segundos momentos finitos.

El término tensor designa aquí una transformación del espacio euclídeo; una matriz concreta expresa sus componentes en una base ortonormal. Al escoger coordenadas $\mathbf{s}_i = (x_i, y_i, z_i)$, su matriz queda

$$\mathsf{I} = \begin{pmatrix} \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum m_i x_i y_i & -\sum m_i x_i z_i \\ -\sum m_i x_i y_i & \sum m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum m_i y_i z_i \\ -\sum m_i x_i z_i & -\sum m_i y_i z_i & \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix}.$$

Las entradas diagonales son momentos respecto de los ejes coordenados. Las entradas restantes conservan correlaciones geométricas entre coordenadas. Algunas convenciones llaman productos de inercia a las sumas sin el signo menos; mantendremos los signos de la matriz escrita.

Proposición. Respecto del centro de masa, las componentes materiales del momento angular son $\boldsymbol{\ell} = \mathsf{I}\boldsymbol{\omega}$. En el laboratorio y para un origen inercial fijo O,

$$\mathbf{L}_C = Q\boldsymbol{\ell}, \qquad K = \frac{M}{2}\|\mathbf{V}\|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathsf{I}\boldsymbol{\omega},$$

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{R}\times M\mathbf{V} + Q\boldsymbol{\ell},$$

donde $\mathbf{R}$ se mide desde O.

Demostración. La parte relativa del momento angular es $Q\sum_i m_i\mathbf{s}_i\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{s}_i)$, porque una rotación de determinante uno conserva el producto vectorial. El producto triple la convierte en $Q\mathsf{I}\boldsymbol{\omega}$. En la suma $\frac{1}{2}\sum_i m_i\|\mathbf{V}+Q(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{s}_i)\|^2$, el término cruzado contiene $\sum_i m_i\mathbf{s}_i = 0$ y se anula. La parte restante usa la identidad $\|\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{s}\|^2 = \boldsymbol{\omega}\cdot[\mathbf{s}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{s})]$, que produce la expresión de energía. Expandir $\sum_i \mathbf{x}_i\times m_i\dot{\mathbf{x}}_i$ elimina los dos términos cruzados por la misma condición de centro de masa y deja la fórmula de $\mathbf{L}_O$. □

En el ejemplo de apertura, $\mathsf{I} = \operatorname{diag}(8,2,10)$. Multiplicar por $(1,1,0)$ da $(8,2,0)$, y la energía rotacional es 5. Conservar únicamente el momento escalar alrededor de $(1,1,0)$ permitiría calcular esa energía, pero perdería la componente transversal del momento angular.

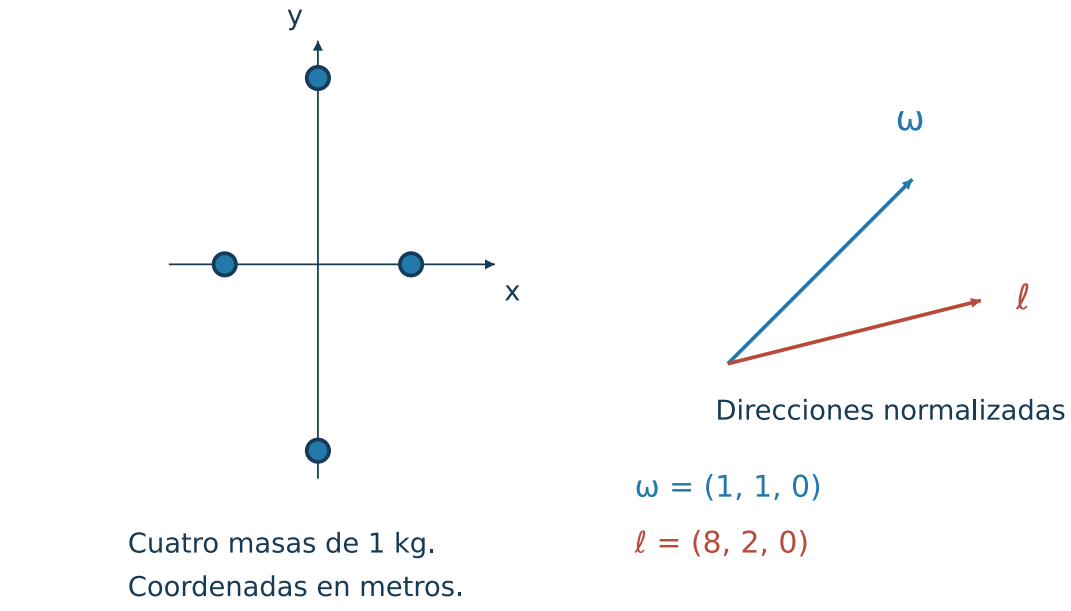


Figura 19.2. Para la distribución de cuatro masas del comienzo, los vectores $(1,1,0)$ y $(8,2,0)$ tienen direcciones diferentes. Las flechas se normalizan por separado para comparar direcciones; no comparten una escala de magnitud ni unidades.

Escoger ejes que separen las respuestas

Para un vector unitario $\mathbf{u}$, el momento alrededor de la recta que pasa por el origen y tiene esa dirección es

$$J(\mathbf{u}) = \mathbf{u}\cdot\mathsf{I}\mathbf{u} = \sum_i m_i\|\mathbf{u}\times\mathbf{s}_i\|^2.$$

Esta expresión recupera la suma de masa por distancia al eje al cuadrado. También muestra que una lámina plana puede tener inercia positiva para todas las direcciones: lo que anula un momento es que toda la masa esté sobre la propia recta considerada.

Definición. Un eje principal es una dirección unitaria $\mathbf{e}$ para la cual $\mathsf{I}\mathbf{e} = I\mathbf{e}$. El número I es su momento principal. Una terna principal es una base ortonormal orientada positivamente formada por esas direcciones.

Los ejes principales convierten el cálculo de $\boldsymbol{\ell}$ en tres multiplicaciones independientes. Su utilidad proviene de la simetría de la transformación, y admite una justificación breve que también precisa los casos degenerados.

Proposición. El tensor de inercia es simétrico y semidefinido positivo; es definido positivo si la distribución de masa no está contenida en una recta que pase por el origen. Posee una terna principal y momentos $I_1, I_2, I_3 \geq 0$. Si P tiene como columnas una terna principal,

$$P^{\mathsf{T}}\mathsf{I}P = \operatorname{diag}(I_1, I_2, I_3).$$

Al rotar físicamente el cuerpo mediante Q, su matriz en el laboratorio es $Q\mathsf{I}Q^{\mathsf{T}}$.

Demostración. Cada matriz $\|\mathbf{s}_i\|^2 \operatorname{Id}_3 - \mathbf{s}_i\mathbf{s}_i^{\mathsf{T}}$ es simétrica. Para todo $\mathbf{a}$,

$$\mathbf{a} \cdot \mathsf{I}\mathbf{a} = \sum_i m_i \|\mathbf{a} \times \mathbf{s}_i\|^2 \geq 0.$$

Con masas positivas, esta suma se anula para $\mathbf{a} \neq 0$ exactamente cuando todos los puntos materiales pertenecen a su recta. En el caso continuo la afirmación se entiende salvo conjuntos de masa nula.

Para construir los ejes, minimizamos la función continua $\mathbf{u} \cdot \mathsf{I}\mathbf{u}$ sobre la esfera unitaria, donde alcanza un mínimo por compacidad. Si $\mathbf{e}$ es un minimizador y $\mathbf{v} \perp \mathbf{e}$, derivar esa función sobre $(\mathbf{e} + t\mathbf{v})/\|\mathbf{e} + t\mathbf{v}\|$ en cero da $2\mathbf{v} \cdot \mathsf{I}\mathbf{e} = 0$. Por ello $\mathsf{I}\mathbf{e}$ es paralelo a $\mathbf{e}$. El plano perpendicular es invariante, pues $\mathbf{e} \cdot \mathsf{I}\mathbf{v} = \mathsf{I}\mathbf{e} \cdot \mathbf{v} = 0$. Repetir el argumento en su circunferencia produce un segundo eje, y el tercero es perpendicular a ambos; se eligen sus signos para obtener orientación positiva. Los autovalores son no negativos por la forma cuadrática. Finalmente, sustituir $\mathbf{s}_i$ por $Q\mathbf{s}_i$ en la definición del tensor da $Q\mathsf{I}Q^{\mathsf{T}}$. $\square$

Si dos momentos coinciden, cualquier base ortonormal de su plano propio sirve; si los tres coinciden, toda dirección es principal. Una terna elegida existe en ambos casos, aunque la distribución no determine tres direcciones únicas. Para $\boldsymbol{\omega} \neq 0$, el paralelismo entre $\boldsymbol{\ell}$ y $\boldsymbol{\omega}$ equivale a que el giro use una dirección propia.

La forma cuadrática también permite visualizar los ejes. Para una energía positiva fijada E, la superficie $\tfrac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathsf{I}\boldsymbol{\omega} = E$ es un elipsoide si los tres momentos son positivos. En ejes principales sus semiejes son $\sqrt{2E/I_j}$; un momento mayor corresponde a menor velocidad angular a la misma energía. No deben confundirse esos semiejes con los de una superficie dibujada en componentes de momento angular.

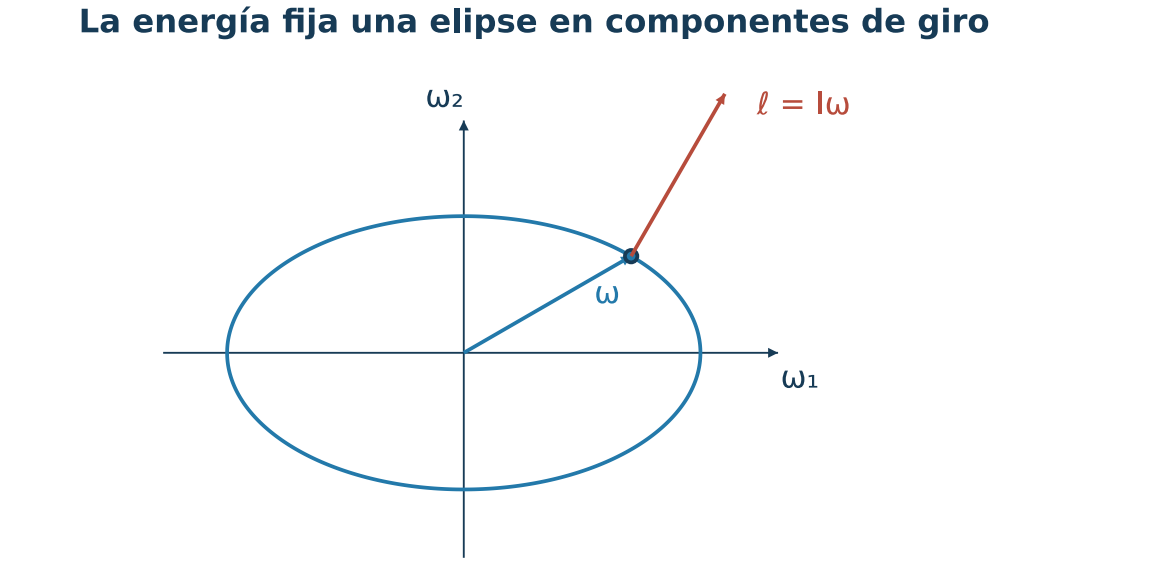


Figura 19.3. Sección $\omega_3 = 0$ de la superficie de energía para momentos 2 y 6 y energía 3 en unidades consistentes. El gradiente de la energía tiene dirección $\mathsf{I}\boldsymbol{\omega}$; normalmente es distinto de la dirección radial $\boldsymbol{\omega}$.

Una matriz reconstruida a partir de medidas debe conservar también las restricciones de una distribución de masa. El momento alrededor de cada eje reúne cuadrados de distancias; por ello las tres respuestas principales están relacionadas. Podemos expresar esa relación sin elegir primero los ejes.

Proposición (realización de una inercia). Una matriz real simétrica H de orden tres es el tensor central de alguna distribución discreta de masa no negativa con segundos momentos finitos si y sólo si

$$\mathsf{S} = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\mathsf{H})\,\mathrm{Id}_3 - \mathsf{H}$$

es semidefinida positiva. Siempre que esa condición se cumple, la distribución puede construirse con cualquier masa total prescrita $M > 0$. En ejes principales equivale a exigir $I_j \le I_k + I_l$ para las tres elecciones de índices distintos.

Demostración. Para una distribución dada, sea $\mathsf{S} = \sum_i m_i \mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^{\mathsf{T}}$. Su forma cuadrática es $\sum_i m_i (\mathbf{a}\cdot\mathbf{s}_i)^2 \ge 0$. La definición de inercia da $\mathsf{H} = \operatorname{tr}(\mathsf{S})\,\mathrm{Id}_3 - \mathsf{S}$ y, al tomar trazas, $\operatorname{tr}(\mathsf{H}) = 2\operatorname{tr}(\mathsf{S})$. Esto prueba la necesidad y la fórmula enunciada.

Para la recíproca, diagonalicemos $\mathsf{S} = \sum_{j=1}^{3} s_j \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j^{\mathsf{T}}$ con $s_j \ge 0$ y una base ortonormal. Sobre cada eje situamos dos masas $M/6$ en las posiciones

$$\mathbf{s}_{j,\pm} = \pm\sqrt{\frac{3 s_j}{M}}\,\mathbf{e}_j .$$

Los pares tienen centro cero, masa total M y matriz de segundos momentos igual a S. Si $s_j = 0$, su par se sitúa en el origen; masas coincidentes pueden reunirse. La inercia construida es $\operatorname{tr}(\mathsf{S})\,\mathrm{Id}_3 - \mathsf{S} = \mathsf{H}$, usando la identidad de trazas. Finalmente, los autovalores de S son $(I_k + I_l - I_j)/2$. Su positividad equivale a las tres desigualdades. $\square$

El criterio incluye las distribuciones planas y lineales. En particular, $I_j = I_k + I_l$ hace cero el segundo momento sobre el eje j; la masa queda en el plano perpendicular a ese eje, salvo conjuntos de masa nula. La positividad de la forma cuadrática de inercia y la realización por masa responden así a dos preguntas que podemos comprobar por separado. El ejercicio 13 construye un caso de frontera y el 20 aplica el criterio a medidas oblicuas.

Trasladar el punto de referencia

Proposición. Sean I_C el tensor respecto del centro y I_O el tensor respecto de otro punto, expresados en ejes paralelos. Si $\mathbf{d}$ va de O al centro,

$$\mathsf{I}_O = \mathsf{I}_C + M(\|\mathbf{d}\|^2\,\mathrm{Id}_3 - \mathbf{d}\mathbf{d}^{\mathsf{T}}).$$

Para ejes paralelos de dirección unitaria $\mathbf{u}$ se obtiene $J_O(\mathbf{u}) = J_C(\mathbf{u}) + M\|\mathbf{u}\times\mathbf{d}\|^2$.

Demostración. Las separaciones desde O son $\mathbf{s}_i + \mathbf{d}$, con $\sum_i m_i\mathbf{s}_i = 0$. Al expandir tanto el cuadrado de la norma como el producto exterior en la definición de I_O, todos los términos lineales en $\mathbf{s}_i$ se anulan por esa igualdad. Quedan el tensor central y el término de una masa M situada en $\mathbf{d}$. Multiplicar a izquierda y derecha por $\mathbf{u}^{\mathsf{T}}$ y $\mathbf{u}$ reduce ese término a $M(\|\mathbf{d}\|^2 - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{d})^2) = M\|\mathbf{u}\times\mathbf{d}\|^2$. $\square$

El traslado puede crear entradas no diagonales incluso si los ejes originales eran principales en el centro. Suponer que basta sumar Md^2 a las tres diagonales pierde tanto las distancias perpendiculares como los términos cruzados.

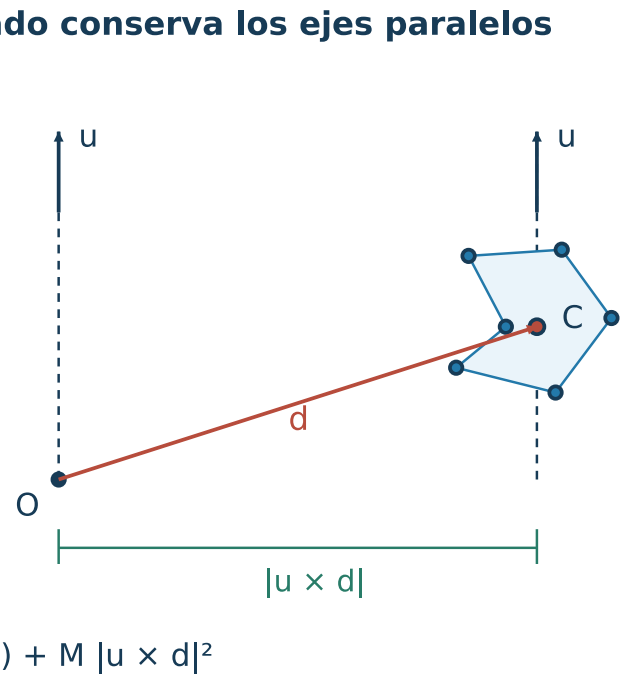


Figura 19.4. Dos ejes paralelos separados por la componente de $\mathbf{d}$ perpendicular a su dirección. La corrección escalar usa esa separación perpendicular; la fórmula tensorial conserva además la información entre direcciones.

Escribir el balance en los ejes del cuerpo

Usaremos el balance angular respecto del centro de masa, incluso cuando éste acelere, o respecto de un punto del cuerpo fijo en un marco inercial. En el centro, las contribuciones de la aceleración del origen desaparecen porque $\sum_i m_i \mathbf{s}_i = 0$. En un punto arbitrario que se mueve de otra manera hay términos adicionales; trasladar geométricamente un tensor no basta para trasladar la ley dinámica.

Supondremos que el balance del sistema elimina los torques internos, como sucede con fuerzas internas centrales por pares, y que los torques restantes se incluyen en el torque externo total. En un pivote ideal fijo, su reacción no tiene brazo respecto del pivote, pero una fricción o un par aplicado allí sí debe contarse.

Proposición. Sea $\boldsymbol{\tau} = Q^{\mathsf{T}} \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{ext}}$ el torque externo en componentes materiales, respecto de uno de los puntos admitidos. El balance angular equivale a

$$\mathsf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathsf{I}\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\tau}.$$

En una terna principal,

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 &= \tau_1, \\ I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_3\omega_1 &= \tau_2, \\ I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 &= \tau_3. \end{aligned}$$

La energía rotacional cumple $\dot{K}_{\mathrm{rot}} = \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\omega}$. Si el torque es cero, K_{rot} y $\|\boldsymbol{\ell}\|$ se conservan, y $Q\boldsymbol{\ell}$ es constante en el laboratorio.

Demostración. La regla de transporte aplicada a $\mathbf{L} = Q\boldsymbol{\ell}$ da $\dot{\mathbf{L}} = Q(\dot{\boldsymbol{\ell}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\ell})$. El tensor material es constante por rigidez, de modo que $\dot{\boldsymbol{\ell}} = \mathsf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}}$. Sustituir en el balance angular produce la ecuación vectorial y sus tres componentes. Por simetría de I, la derivada de K_{rot} es $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathsf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}}$; el término cruzado tiene producto escalar cero con $\boldsymbol{\omega}$, y queda la potencia anunciada. Con torque nulo, $\dot{\boldsymbol{\ell}} = -\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\ell}$, por lo que $\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{\ell}\|^2 = 2\boldsymbol{\ell} \cdot \dot{\boldsymbol{\ell}} = 0$. La constancia de $Q\boldsymbol{\ell}$ es el propio balance en el laboratorio. $\square$

La ecuación contiene una derivada de componentes y una corrección por rotación de la base. Cuando I es invertible determina $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ a partir del estado y del torque. Para describir un cuerpo libre completo se añaden $M\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}_{\mathrm{ext}}$ y la ecuación de orientación, junto con sus datos iniciales.

Un giro uniforme impuesto cumple $\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$ en el cuerpo, pero puede requerir $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\omega} \times \mathsf{I}\boldsymbol{\omega}$. Ese torque es perpendicular al giro y tiene potencia rotacional nula: cambia la dirección del momento angular en el laboratorio sin cambiar su energía. Si se suprimen los apoyos que lo ejercían, las condiciones iniciales permanecen, pero el movimiento posterior debe satisfacer Euler con torque cero.

Resolver un giro libre y precisar su estabilidad

Para un cuerpo de momentos $I_1 = I_2 = A > 0$, $I_3 = C > 0$, las ecuaciones libres dan $\omega_3 = s$ constante. Al escribir $\nu = (C - A)s/A$, las otras dos son $\dot{\omega}_1 = -\nu\omega_2$ y $\dot{\omega}_2 = \nu\omega_1$. Por derivación directa se verifica la solución

$$\begin{aligned} \omega_1(t) &= a\cos \nu t - b\sin \nu t, \\ \omega_2(t) &= a\sin \nu t + b\cos \nu t, \\ \omega_3(t) &= s. \end{aligned}$$

Las componentes transversales giran en los ejes del cuerpo. El eje material de simetría $\mathbf{n} = Q\mathbf{e}_3$ realiza otro movimiento en el laboratorio. En efecto,

$$\mathbf{L} = A\boldsymbol{\Omega} + (C - A)s\mathbf{n}, \qquad \dot{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{n} = \frac{\mathbf{L}}{A} \times \mathbf{n}.$$

Como $\mathbf{L}$ es fijo, $\mathbf{n}$ describe un cono alrededor de él con rapidez angular $\|\mathbf{L}\|/A$, salvo el caso de alineación, en que el eje permanece fijo. Esa rapidez y ν responden a observaciones distintas.

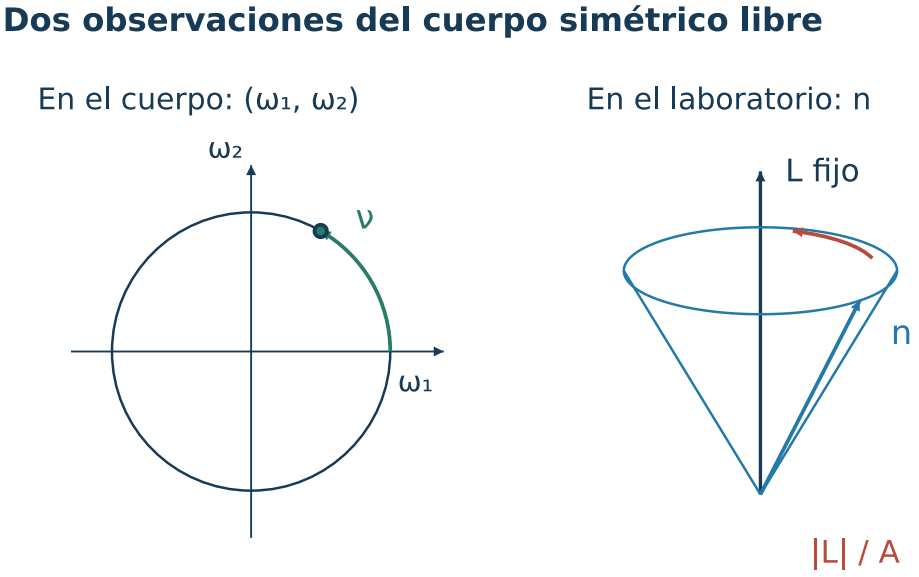


Figura 19.5. En el cuerpo simétrico libre, las componentes transversales recorren una circunferencia a tasa ν; en el laboratorio, el eje de simetría precesa alrededor del momento angular constante. Los paneles representan espacios diferentes.

Para tres momentos distintos, los giros puros $\boldsymbol{\omega} = \Omega\mathbf{e}_j$ también son soluciones libres. Estudiar su estabilidad exige decir qué permanece próximo: trabajaremos con las componentes materiales de velocidad angular. Una diferencia pequeña de rapidez puede acumular una diferencia grande de orientación tras mucho tiempo, aunque esas velocidades permanezcan próximas.

Usaremos la definición del capítulo 8 sobre este estado reducido. Para el giro $\boldsymbol{\omega}_* = \Omega\mathbf{e}_j$, con $\Omega \neq 0$, la distancia adimensional es $\|\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_*\|/|\Omega|$. La estabilidad exige que cada tolerancia positiva suficientemente pequeña admita una tolerancia inicial que mantenga esa distancia por debajo de la elegida durante todo el futuro. Las ecuaciones libres tienen soluciones globales en estas variables: su campo es suave y la conservación de la energía, con los tres momentos positivos, acota todas las componentes.

Proposición. Si $0 < I_1 < I_2 < I_3$ y $\Omega \neq 0$, los giros puros alrededor de los ejes de menor y mayor momento son estables en el sentido de Lyapunov para las ecuaciones libres de $\boldsymbol{\omega}$. El giro alrededor del eje intermedio es inestable.

Demostración. Denotemos $H = 2K_{\mathrm{rot}}$ y $B = \|\boldsymbol{\ell}\|^2$, ambos conservados. Cerca del giro sobre el tercer eje, la combinación

$$H - \frac{B}{I_3} = I_1\left(1 - \frac{I_1}{I_3}\right)\omega_1^2 + I_2\left(1 - \frac{I_2}{I_3}\right)\omega_2^2$$

es una suma con coeficientes positivos. Si el estado inicial está cerca del giro puro, esa constante es pequeña y mantiene pequeñas las dos componentes transversales para todo tiempo. La conservación de B controla entonces ω_3^2 cerca de Ω^2; para datos suficientemente próximos, ω_3 no puede pasar por cero, y su signo inicial selecciona el valor próximo a Ω. Esto prueba que toda vecindad del giro contiene una vecindad inicial cuyas trayectorias permanecen dentro de la primera. En el primer eje se usa $B/I_1 - H$, cuya expresión es una suma positiva en ω_2^2 y ω_3^2, y se repite el control de magnitud y signo.

También podemos reunir las cotas del tercer eje en una sola función conservada. Definamos $h_3 = H/(I_3\Omega^2)$ y $b_3 = B/(I_3^2\Omega^2)$, ambos adimensionales. La función

$$V_3 = h_3 - b_3 + (b_3 - 1)^2$$

es positiva en una vecindad del giro $\Omega\mathbf{e}_3$, salvo en el propio giro, donde vale cero. En efecto, al poner $u_i = \omega_i/|\Omega|$ y $a_i = I_i/I_3$, su primer término es $h_3 - b_3 = \sum_{i=1}^{2} a_i(1 - a_i)u_i^2$. Sus coeficientes son positivos; su anulación exige $u_1 = u_2 = 0$, y el término restante exige $u_3^2 = 1$. Una vecindad que conserve el signo de Ω selecciona el giro estudiado. Para el primer eje se define $h_1 = H/(I_1\Omega^2)$, $b_1 = B/(I_1^2\Omega^2)$ y se usa $V_1 = b_1 - h_1 + (b_1 - 1)^2$, con el mismo argumento. Sobre una esfera pequeña alrededor de cada giro, la función correspondiente alcanza un mínimo positivo. Preparar su valor por debajo de ese mínimo impide llegar a la esfera por conservación y continuidad. Así reaparece la barrera del capítulo 8 sobre un estado de tres componentes.

Para el eje intermedio podemos exhibir soluciones que salen de cualquier vecindad inicial pequeña. Tomemos primero $\Omega > 0$ y definamos

$$c = \sqrt{\frac{I_1(I_2 - I_1)}{I_3(I_3 - I_2)}}, \qquad \gamma = \sqrt{\frac{(I_3 - I_2)(I_2 - I_1)}{I_1 I_3}}, \qquad D = \sqrt{\frac{I_2}{I_1 + I_3 c^2}}.$$

Con $\operatorname{sech} u = 1/\cosh u$, la curva

$$\begin{aligned} \omega_1(t) &= \Omega D \operatorname{sech}(\Omega\gamma t), \\ \omega_2(t) &= -\Omega \tanh(\Omega\gamma t), \\ \omega_3(t) &= -c\Omega D \operatorname{sech}(\Omega\gamma t) \end{aligned}$$

satisface Euler: se comprueba usando $(\tanh u)' = \operatorname{sech}^2 u$, $(\operatorname{sech} u)' = -\operatorname{sech} u \tanh u$ y las definiciones de c, γ, D. Para entender la elección, imponer $\omega_3 = -c\omega_1$ hace $B - I_2 H = 0$; fijar $H = I_2\Omega^2$ reduce la segunda ecuación a $\dot\omega_2 = -\gamma(\Omega^2 - \omega_2^2)$, que resuelve la tangente hiperbólica escrita. Cuando $t \to -\infty$, el estado tiende a $(0, \Omega, 0)$, pero en $t = 0$ alcanza $(\Omega D, 0, -c\Omega D)$, a distancia fija positiva de ese giro. Desplazar el tiempo permite comenzar tan cerca como se quiera y alcanzar después ese estado separado. Para $\Omega < 0$, se aplica a la solución con rapidez $|\Omega|$ la transformación $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \mapsto (-\omega_1, -\omega_2, \omega_3)$. Sustituirla en Euler verifica que preserva las ecuaciones y cambia el signo del giro intermedio inicial. □

La linealización permite calcular una escala de crecimiento. Cerca de $\Omega\mathbf{e}_2$, conservando sólo términos de primer orden en las componentes transversales,

$$\ddot\omega_1 = \Omega^2 \frac{(I_3 - I_2)(I_2 - I_1)}{I_1 I_3}\omega_1.$$

Su tasa exponencial es $|\Omega|\gamma$. La solución exacta de la prueba muestra que la inestabilidad pertenece al sistema completo; la ecuación lineal aproxima su comienzo mientras las perturbaciones son pequeñas respecto de $|\Omega|$. Los momentos repetidos requieren otro examen, porque los coeficientes estrictamente positivos usados en la prueba pueden anularse.

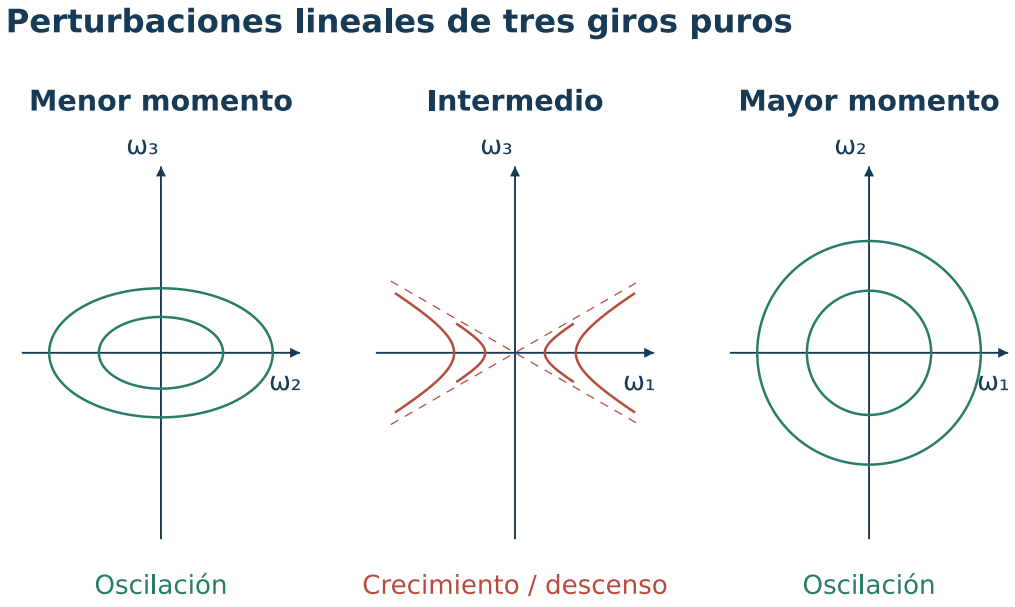


Figura 19.6. Retratos de fase de las ecuaciones transversales linealizadas para momentos $1, 2, 3$ y giro base de módulo uno. Las curvas cerradas y las ramas hiperbólicas muestran mecanismos locales diferentes; la estabilidad no se define como constancia de la orientación completa.

Contrastar una aproximación para el giróscopo

Un cuerpo simétrico con pivote fijo permite distinguir conservación libre y precesión causada por gravedad. Sea $\mathbf{n}$ el eje desde el pivote hacia el centro, a distancia $d > 0$, y $\mathbf{z}$ la vertical ascendente. Usaremos los momentos A, A, C respecto del pivote y gravedad uniforme. En una precesión regular, el ángulo $0 < \theta < \pi$ entre $\mathbf{n}$ y $\mathbf{z}$ es constante, $\dot{\mathbf{n}} = p\mathbf{z} \times \mathbf{n}$ y la componente axial del giro es $s = \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n}$, constante. La velocidad angular puede escribirse

$$\boldsymbol{\Omega} = p\mathbf{z} + (s - p\cos\theta)\mathbf{n},$$

por lo que

$$\mathbf{L} = Ap\mathbf{z} + (Cs - Ap\cos\theta)\mathbf{n}.$$

Derivarla y compararla con $\boldsymbol{\tau} = Mgd\,\mathbf{z} \times \mathbf{n}$ da

$$p(Cs - Ap\cos\theta) = Mgd.$$

La fórmula $p \approx Mgd/(Cs)$ corresponde a despreciar el término cuadrático en p. Para $Cs > 0$ y $\cos\theta > 0$, la rama lenta puede escribirse sin restar números casi iguales:

$$p_{\text{lento}} = \frac{2Mgd}{Cs + \sqrt{(Cs)^2 - 4A\cos\theta\, Mgd}}.$$

Exige discriminante no negativo. La comparación $4A\cos\theta\, Mgd/(Cs)^2 \ll 1$ controla la expansión de esa raíz; también debe comprobarse la separación entre precesión y giro cuando se interprete como giro rápido. La precesión regular requiere datos iniciales preparados para

ella. Soltar un giróscopo con otra velocidad inicial puede producir nutación, es decir, variación de θ, aunque los parámetros permitan una rama regular lenta.

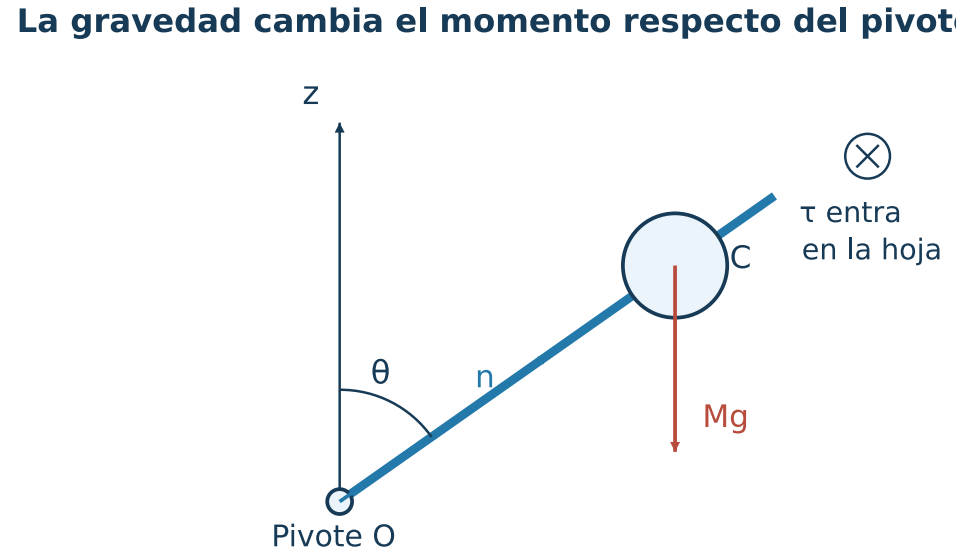


Figura 19.7. El peso actúa en el centro y produce torque respecto del pivote. El dibujo sitúa eje y vertical en el plano de la hoja, con el torque entrando en ella; una precesión regular mantiene el ángulo y satisface el balance vectorial desarrollado en el texto.

Ejercicios

Salvo indicación contraria, use unidades SI, ejes ortonormales con orientación positiva y componentes materiales. Los torques se toman respecto del centro o del pivote inercial fijo indicado. Los cuerpos discretos se unen mediante vínculos ideales sin masa.

1. Reconstruir el ejemplo de apertura

Cuatro masas de $1\,\mathrm{kg}$ ocupan $(\pm1,0,0)$ y $(0,\pm2,0)$, en metros. Calcule el tensor central directamente desde la definición. Para $\boldsymbol{\omega} = (1,1,0)\,\mathrm{s}^{-1}$, halle momento angular, energía rotacional y ángulo entre momento y velocidad angular.

2. Encontrar términos no diagonales

Tres masas de $1\,\mathrm{kg}$ están en $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(-1,-1,0)$ metros. Verifique el centro de masa, construya I y calcule $\boldsymbol{\ell}$ para $\boldsymbol{\omega} = (1,0,0)\,\mathrm{s}^{-1}$. Interprete el signo de su componente transversal.

3. Integrar una lámina rectangular

Una lámina homogénea de masa $3\,\mathrm{kg}$ ocupa $-1 \le x \le 1$, $-2 \le y \le 2$, $z = 0$, en metros. Obtenga su tensor central integrando sobre el rectángulo. Explique qué simetrías anulan entradas cruzadas y qué relación cumplen los tres momentos.

4. Construir una terna principal orientada

Diagonalice el tensor del ejercicio 2. Elija una terna principal de determinante positivo y exprese en ella el estado $\boldsymbol{\omega} = (1, 0, 0)$. Reconstruya $\boldsymbol{\ell}$ en los ejes originales para comprobar el cambio de base.

5. Medir alrededor de un eje oblicuo

Para el cuerpo del ejercicio 2, use $\mathbf{u} = (1, 1, 1)/\sqrt{3}$. Halle $J(\mathbf{u})$ y la energía cuando el giro impuesto es $\boldsymbol{\omega} = 3\mathbf{u}\,\mathrm{s}^{-1}$. Determine si el momento angular es paralelo al eje y calcule el torque necesario para mantener ese giro uniforme.

6. Llevar el tensor a una esquina

Para la lámina del ejercicio 3, cambie el origen del centro a la esquina $O = (-1, -2, 0)$. Mantenga ejes paralelos y calcule el tensor completo. Verifique el momento respecto de la perpendicular a la lámina por esa esquina mediante el teorema escalar.

7. Rotar el cuerpo y cambiar componentes

Rote físicamente 45° alrededor de $+z$ el cuerpo del ejercicio 2. Halle su tensor en el laboratorio. Si Q es esa rotación y $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{e}_1\,\mathrm{s}^{-1}$ en el cuerpo, calcule $\boldsymbol{\Omega}$ y $\mathbf{L}_C$ en el laboratorio. Distinga esta operación de un cambio pasivo de base.

8. Mantener un giro que necesita apoyos

Un cuerpo tiene tensor principal $\mathrm{diag}(1, 2, 3)\,\mathrm{kg\,m}^2$. Un mecanismo mantiene $\boldsymbol{\omega} = (1, 2, 0)\,\mathrm{s}^{-1}$ constante en el cuerpo, con centro fijo. Calcule el torque y su potencia. Explique qué sucedería al retirar el mecanismo conservando el estado inicial.

9. Obtener la derivada libre instantánea

Para el mismo tensor, el cuerpo gira libremente con $\boldsymbol{\omega} = (1, 2, 3)\,\mathrm{s}^{-1}$ en un instante. Obtenga $\dot{\boldsymbol{\omega}}$, K_{rot} y $\|\boldsymbol{\ell}\|^2$. Verifique directamente las derivadas nulas de esas dos cantidades conservadas.

10. Inferir el torque a partir de datos

En el estado del ejercicio 9 se observa $\dot{\boldsymbol{\omega}} = (1, 0, -1)\,\mathrm{s}^{-2}$. Halle el torque y la potencia rotacional. Compare con el resultado de sustituir solamente $\boldsymbol{\tau} = \mathsf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}}$.

11. Separar traslación y giro

Un cuerpo de masa $2\,\mathrm{kg}$ tiene el tensor central y el estado angular del ejercicio 9. En el instante considerado $Q = \mathrm{Id}_3$, $\mathbf{R} = (0, 2, 0)\,\mathrm{m}$ y $\mathbf{V} = (3, 0, 0)\,\mathrm{m/s}$. Calcule la energía cinética total y el momento angular respecto del origen fijo del laboratorio.

12. Rechazar datos incompatibles con la energía

Un cuerpo de momentos principales $1, 2, 3\,\mathrm{kg\,m}^2$ tiene momento angular de módulo $4\,\mathrm{kg\,m}^2/\mathrm{s}$. Determine el intervalo posible de energía rotacional y los estados que alcanzan sus extremos. Decida si una energía de $2\,\mathrm{J}$ es admisible.

13. Comprobar si una matriz puede ser una inercia

Se propone $\mathsf{I} = \mathrm{diag}(1, 2, 4)\,\mathrm{kg\,m}^2$ para una distribución de masa no negativa. Determine si puede realizarse. Examine después $\mathrm{diag}(1, 2, 3)$ y construya una distribución discreta central que la realice.

14. Examinar el límite de una varilla sin espesor

Una varilla homogénea de masa $2\,\mathrm{kg}$ ocupa $-1 \le x \le 1$, $y = z = 0$, en metros. Calcule su tensor. Indique qué componente de velocidad angular no puede recuperarse de $\boldsymbol{\ell}$ y qué idealización explica la degeneración.

15. Resolver el cuerpo simétrico libre

Un cuerpo tiene momentos $A = 2$, $C = 3\,\mathrm{kg\,m^2}$, torque cero, $Q(0) = \mathrm{Id}_3$ y $\boldsymbol{\omega}(0) = (1, 0, 4)\,\mathrm{s^{-1}}$. Halle las componentes materiales de velocidad y momento angular, la energía, el ángulo entre el eje de simetría y $\mathbf{L}$, y las dos tasas de giro descritas en el texto.

16. Reconstruir el eje observado

Para el ejercicio 15, obtenga $\mathbf{n}(t)$ mediante una rotación alrededor de $\mathbf{L}$ fijo. Calcule $\dot{\mathbf{n}}(0)$ y $\mathbf{n}(\pi/\sqrt{37}\,\mathrm{s})$. Explique qué información sigue faltando para orientar un punto que no pertenece al eje de simetría.

17. Comparar escalas de perturbación

Para momentos $1, 2, 3\,\mathrm{kg\,m^2}$, linealice alrededor de cada giro puro de rapidez $4\,\mathrm{s^{-1}}$. Halle las frecuencias transversales estables y la tasa de crecimiento intermedia. En el modo creciente, estime cuánto tarda una perturbación de amplitud $10^{-4}\,\mathrm{s^{-1}}$ en alcanzar $10^{-2}\,\mathrm{s^{-1}}$.

18. Seguir una salida exacta del eje intermedio

Para los mismos momentos, verifique que

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \left(4\operatorname{sech} kt,\, -4\tanh kt,\, -\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{sech} kt \right), \qquad k = \frac{4}{\sqrt{3}}\,\mathrm{s^{-1}},$$

resuelve Euler sin torque, con los números de las componentes expresados en $\mathrm{s^{-1}}$. Calcule sus invariantes, sus límites temporales y el tiempo desde un estado inicial con $\omega_1 = 10^{-4}\,\mathrm{s^{-1}}$ en la rama $t < 0$ hasta $t = 0$.

19. Controlar la rama lenta del giróscopo

Un giróscopo ideal de pivote fijo tiene $M = 0{,}5\,\mathrm{kg}$, $d = 0{,}1\,\mathrm{m}$, $A = 0{,}02$, $C = 0{,}01\,\mathrm{kg\,m^2}$, $s = 100\,\mathrm{s^{-1}}$, $\theta = 60^\circ$ y $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$. Calcule la rama regular lenta, la rápida y la aproximación $Mgd/(Cs)$. Compare el error relativo respecto de la rama lenta y declare qué preparación del movimiento se está suponiendo.

20. Reconstruir una inercia desde seis medidas

Con ejes fijos se miden los momentos $J(\mathbf{e}_1) = 2$, $J(\mathbf{e}_2) = 3$, $J(\mathbf{e}_3) = 4$ y los momentos sobre las bisectrices positivas $J((\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)/\sqrt{2}) = 2$, $J((\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3)/\sqrt{2}) = 3{,}5$, $J((\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3)/\sqrt{2}) = 3{,}25$, todos en $\mathrm{kg\,m^2}$. Reconstruya la matriz. Explique por qué seis direcciones bastan en este diseño y cómo comprobar que el resultado puede provenir de masa no negativa. Suponga después que cada una de las seis lecturas difiere de su valor verdadero en no más de $0{,}01\,\mathrm{kg\,m^2}$ y que los ejes se conocen exactamente. Certifique si todas las matrices reconstruidas compatibles con esas cotas admiten una distribución de masa. Separe el error de lectura del error de orientación del aparato.

Soluciones

1. Reconstruir el ejemplo de apertura

El centro es cero por las parejas opuestas. Las dos masas sobre x aportan $\operatorname{diag}(0,2,2)$ y las dos sobre y aportan $\operatorname{diag}(8,0,8)$, en $\mathrm{kg\,m^2}$. Así,

$$\mathsf{I} = \operatorname{diag}(8,2,10), \qquad \boldsymbol{\ell} = (8,2,0)\,\mathrm{kg\,m^2/s}, \qquad K_{\mathrm{rot}} = 5\,\mathrm{J}.$$

El ángulo β cumple $\cos\beta = 10/(\sqrt{2}\sqrt{68})$, de donde $\beta \approx 30{,}96°$. Su origen es la respuesta desigual de las dos direcciones: el giro suma componentes iguales, pero la distribución de masa multiplica una por ocho y otra por dos. Una masa total por sí sola no conserva esa información.

2. Encontrar términos no diagonales

La suma de los tres vectores posición es cero. Las sumas $\sum x_i^2 = 2$, $\sum y_i^2 = 2$ y $\sum x_i y_i = 1$ dan

$$\mathsf{I} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\,\mathrm{kg\,m^2}.$$

Para el giro dado, $\boldsymbol{\ell} = (2,-1,0)\,\mathrm{kg\,m^2/s}$. La componente negativa viene del término $-\sum m_i x_i y_i$: la masa en $(-1,-1,0)$ tiene producto de coordenadas positivo y produce una contribución transversal negativa. El ángulo con el giro es $\arctan(1/2) \approx 26{,}57°$, y la energía es $1\,\mathrm{J}$. El signo aparece al calcular el producto vectorial; sustituir todos los productos de inercia por sus módulos cambiaría el modelo.

3. Integrar una lámina rectangular

La densidad superficial es $3/8\,\mathrm{kg/m^2}$. Respecto de x, la distancia al eje es $|y|$, por lo que

$$I_{xx} = \frac{3}{8}\int_{-1}^{1}\int_{-2}^{2} y^2\,dy\,dx = \frac{3}{8}\,2\,\frac{16}{3} = 4\,\mathrm{kg\,m^2}.$$

Análogamente, integrar x^2 da $I_{yy} = 1\,\mathrm{kg\,m^2}$. La integral de xy es cero porque cambia de signo bajo $x \mapsto -x$ en un dominio simétrico; las otras entradas cruzadas contienen $z = 0$. Resulta $\mathsf{I} = \operatorname{diag}(4,1,5)\,\mathrm{kg\,m^2}$. La igualdad $I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$ proviene de que toda la masa está en el plano $z = 0$; para una distribución tridimensional general aparece $I_{xx} + I_{yy} - I_{zz} = 2\int z^2 dm$, que puede ser positivo.

4. Construir una terna principal orientada

En el plano, multiplicar la matriz del ejercicio 2 por $(1,1)$ da $(1,1)$ y por $(-1,1)$ da $3(-1,1)$. Podemos elegir

$$\mathbf{f}_1 = \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{(-1,1,0)}{\sqrt{2}}, \quad \mathbf{f}_3 = (0,0,1),$$

con momentos $1, 3, 4\,\mathrm{kg\,m^2}$. El producto $\mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_3$ verifica orientación positiva. Las componentes principales del giro son $P^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\omega} = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)\,\mathrm{s^{-1}}$. Multiplicar por los momentos da $(1/\sqrt{2}, -3/\sqrt{2}, 0)$; reconstruir el vector mediante esa combinación de $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ produce $(2,-1,0)$ en los ejes originales, como exigía el cálculo directo.

5. Medir alrededor de un eje oblicuo

Multiplicar por el vector unitario da $\mathsf{I}\mathbf{u} = (1,1,4)/\sqrt{3}$ y, por tanto, $J(\mathbf{u}) = 2\,\mathrm{kg\,m^2}$. La energía es $\tfrac{1}{2}J(\mathbf{u})3^2 = 9\,\mathrm{J}$. En cambio, el momento angular completo es $(\sqrt{3},\sqrt{3},4\sqrt{3})\,\mathrm{kg\,m^2/s}$, que no es paralelo a $\mathbf{u}$.

Para mantener constantes las componentes materiales del giro se necesita

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\omega} \times \mathsf{I}\boldsymbol{\omega} = (9,-9,0)\,\mathrm{N\,m}.$$

El torque tiene producto escalar cero con $\boldsymbol{\omega}$. El motor y los apoyos deben sostener una dirección de giro que no es principal, aunque el balance rotacional no exija potencia neta. La energía escalar calculada correctamente no autoriza a reemplazar el vector momento por $J(\mathbf{u})\boldsymbol{\omega}$.

6. Llevar el tensor a una esquina

El desplazamiento desde la esquina hasta el centro es $\mathbf{d} = (1,2,0)\,\mathrm{m}$. El término que se añade es

$$3\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{I}_O = \begin{pmatrix} 16 & -6 & 0 \\ -6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}\,\mathrm{kg\,m^2}.$$

La perpendicular por la esquina está a distancia $\sqrt{5}\,\mathrm{m}$ de la perpendicular central, así que su momento es $5 + 3\cdot 5 = 20\,\mathrm{kg\,m^2}$. El traslado preserva el carácter principal de z en este ejemplo, pero introduce una entrada xy y cambia los ejes principales dentro de la lámina.

7. Rotar el cuerpo y cambiar componentes

Con Q igual a la rotación positiva de $45°$, el tensor espacial es $Q\mathsf{I}Q^{\mathsf{T}} = \mathrm{diag}(3,1,4)\,\mathrm{kg\,m^2}$. Puede comprobarse sin multiplicar nueve entradas: el eje de momento uno, antes orientado a $45°$, pasa a $90°$, mientras el de momento tres pasa a la dirección de x con signo contrario.

Los vectores espaciales son $\boldsymbol{\Omega} = (1,1,0)/\sqrt{2}\,\mathrm{s^{-1}}$ y $\mathbf{L}_C = (3,1,0)/\sqrt{2}\,\mathrm{kg\,m^2/s}$, que cumplen la relación con el tensor espacial. Un cambio pasivo con columnas de base Q usaría $Q^{\mathsf{T}}\mathsf{I}Q$ para expresar el mismo cuerpo en otra base; en este caso daría $\mathrm{diag}(1,3,4)$. Las fórmulas difieren porque describen operaciones diferentes y sus vectores deben transformarse de manera consistente.

8. Mantener un giro que necesita apoyos

El momento material vale $(1,4,0)\,\mathrm{kg\,m^2/s}$, y Euler exige $\boldsymbol{\tau} = (1,2,0)\times(1,4,0) = (0,0,2)\,\mathrm{N\,m}$. Su potencia es cero y la energía constante es $\tfrac{1}{2}(1+8) = 4{,}5\,\mathrm{J}$. El torque espacial es $Q(t)\boldsymbol{\tau}$ y, en general, cambia de dirección mientras gira el cuerpo.

Al retirar el mecanismo, el torque pasa a cero y la derivada inicial cumple $\mathsf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} = -(0,0,2)$. Resulta $\dot{\boldsymbol{\omega}}(0) = (0,0,-2/3)\,\mathrm{s^{-2}}$. El cuerpo abandona el giro impuesto; conservar la velocidad inicial no conserva la fuerza que lo mantenía.

9. Obtener la derivada libre instantánea

Las tres ecuaciones dan

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \left(-6,3,-\frac{2}{3}\right)\mathrm{s^{-2}}, \qquad K_{\mathrm{rot}} = 18\,\mathrm{J}, \qquad \|\boldsymbol{\ell}\|^2 = 98\,(\mathrm{kg\,m^2/s})^2.$$

Para revisar la energía se calcula $\sum I_j\omega_j\dot{\omega}_j = -6+12-6 = 0$. Para el cuadrado del momento, la mitad de la derivada es $\sum I_j^2\omega_j\dot{\omega}_j = -6+24-18 = 0$. Las componentes

materiales de momento varían, pues $\dot{\boldsymbol{\ell}} = (-6, 6, -2)$ en las unidades correspondientes; la corrección $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\ell} = (6, -6, 2)$ las compensa al reconstruir la derivada espacial.

10. Inferir el torque a partir de datos

El término de derivada material es $\mathsf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} = (1, 0, -3)\,\mathrm{N\,m}$. Al sumar la corrección $(6, -6, 2)$ se obtiene $\boldsymbol{\tau} = (7, -6, -1)\,\mathrm{N\,m}$. La potencia es $7 - 12 - 3 = -8\,\mathrm{W}$, y coincide con $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathsf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} = 1 - 9 = -8\,\mathrm{W}$.

Omitir la corrección produciría el vector torque equivocado aunque, en este caso y en general para esa omisión, dejara correcta la potencia, porque $\boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\ell}) = 0$. Comprobar solamente energía no detecta todos los errores del balance angular.

11. Separar traslación y giro

La traslación aporta $M\|\mathbf{V}\|^2/2 = 9\,\mathrm{J}$ y el giro aporta $18\,\mathrm{J}$, de modo que $K = 27\,\mathrm{J}$. Respecto del origen fijo,

$$\mathbf{R} \times M\mathbf{V} = (0, 0, -12)\,\mathrm{kg\,m^2/s}, \qquad \mathbf{L}_O = (1, 4, -3)\,\mathrm{kg\,m^2/s}.$$

El signo de la tercera componente total difiere del momento respecto del centro, que era positivo. Cada vector responde a un origen distinto; sumar la traslación a la energía y olvidarla en el momento angular mezclaría dos descripciones incompatibles.

12. Rechazar datos incompatibles con la energía

En ejes principales, $2K_{\mathrm{rot}} = \sum \ell_j^2 / I_j$. Como $1/3 \le 1/I_j \le 1$, la suma se encuentra entre $\|\boldsymbol{\ell}\|^2/3$ y $\|\boldsymbol{\ell}\|^2$. Por tanto,

$$\frac{8}{3}\,\mathrm{J} \le K_{\mathrm{rot}} \le 8\,\mathrm{J}.$$

El mínimo ocurre con momento angular sobre el tercer eje y el máximo sobre el primero. Todos los valores intermedios se obtienen variando continuamente la dirección entre esos ejes a módulo fijo. Una energía de $2\,\mathrm{J}$ queda por debajo del mínimo: los datos no pueden corresponder al estado del cuerpo ideal descrito.

13. Comprobar si una matriz puede ser una inercia

Para cualquier distribución no negativa, $I_1 + I_2 - I_3 = 2\int s_3^2\,dm \ge 0$ en ejes principales. La terna $1, 2, 4$ daría -1, por lo que es imposible, aunque la matriz sea simétrica y definida positiva. La positividad algebraica del tensor es necesaria, pero las entradas también deben ser compatibles con segundos momentos de masa.

La terna $1, 2, 3$ sí se realiza: sitúe masas de $1/2\,\mathrm{kg}$ en $(\pm\sqrt{2}, 0, 0)$ y $(0, \pm 1, 0)$ metros. El centro es cero, las sumas ponderadas de cuadrados son $\sum mx^2 = 2$, $\sum my^2 = 1$, $\sum mz^2 = 0$, y el tensor es $\mathrm{diag}(1, 2, 3)\,\mathrm{kg\,m^2}$. La igualdad en la desigualdad anterior identifica una distribución plana, compatible con momentos positivos en todas las direcciones.

14. Examinar el límite de una varilla sin espesor

La densidad lineal es $1\,\mathrm{kg/m}$. La distancia al eje de la varilla es cero para todas sus masas, mientras que $\int_{-1}^{1} x^2 dx = 2/3$. Resulta $\mathsf{I} = \mathrm{diag}(0, 2/3, 2/3)\,\mathrm{kg\,m^2}$. El momento angular no contiene información sobre ω_1: un giro ideal alrededor de la propia recta no mueve ninguno de sus puntos.

Esa degeneración pertenece al modelo sin espesor. Una varilla real tiene un momento axial pequeño y positivo, y entonces la reconstrucción divide la componente axial de momento por ese número pequeño. Recuperar la velocidad axial puede volverse muy sensible a errores de medida, aun cuando el tensor ya sea invertible.

15. Resolver el cuerpo simétrico libre

Se tiene $s = 4$ y $\nu = (3-2)4/2 = 2\,\mathrm{s}^{-1}$. La solución y el momento material son

$$\boldsymbol{\omega} = (\cos 2t, \sin 2t, 4)\,\mathrm{s}^{-1}, \qquad \boldsymbol{\ell} = (2\cos 2t, 2\sin 2t, 12)\,\mathrm{kg\,m^2/s},$$

donde t se expresa en segundos. La energía es $\frac{1}{2}(2+48) = 25\,\mathrm{J}$ y $\|\mathbf{L}\| = \sqrt{148}\,\mathrm{kg\,m^2/s}$. La proyección de $\mathbf{L}$ sobre el eje de simetría es siempre $Cs = 12$, de modo que $\cos\theta = 12/\sqrt{148}$ y $\theta \approx 9{,}46°$.

La tasa material es $2\,\mathrm{s}^{-1}$, mientras la precesión del eje observado tiene rapidez $\sqrt{148}/2 = \sqrt{37} \approx 6{,}083\,\mathrm{s}^{-1}$. Igualarlas confundiría el giro de componentes en el cuerpo con el movimiento de una dirección material en el laboratorio.

16. Reconstruir el eje observado

Al inicio $\mathbf{L} = (2, 0, 12)$ y su dirección unitaria es $\mathbf{h} = (1, 0, 6)/\sqrt{37}$. La ecuación $\dot{\mathbf{n}} = \sqrt{37}\,\mathbf{h} \times \mathbf{n}$ tiene solución

$$\mathbf{n}(t) = \mathbf{e}_3 \cos\alpha + (\mathbf{h} \times \mathbf{e}_3)\sin\alpha + \mathbf{h}(\mathbf{h}\cdot\mathbf{e}_3)(1-\cos\alpha), \qquad \alpha = \sqrt{37}\,t,$$

que se verifica al derivar y evaluar en cero. Es la fórmula de rotación de un vector alrededor de un eje fijo: su componente paralela permanece y las dos perpendiculares giran. Da $\dot{\mathbf{n}}(0) = (0, -1, 0)\,\mathrm{s}^{-1}$, en acuerdo con $\boldsymbol{\Omega}(0) \times \mathbf{e}_3$.

En el tiempo indicado, $\alpha = \pi$ y $\mathbf{n} = (12/37, 0, 35/37)$, de norma uno. La trayectoria de $\mathbf{n}$ determina dos grados de orientación; falta el giro del cuerpo alrededor de ese eje para localizar una marca fuera de él. El estado angular y $Q(0)$ sí determinan ese giro al integrar la ecuación completa de Q.

17. Comparar escalas de perturbación

Alrededor del primer eje, las ecuaciones transversales son $\dot{\omega}_2 = 4\omega_3$ y $\dot{\omega}_3 = -(4/3)\omega_2$, de donde la frecuencia es $4/\sqrt{3}\,\mathrm{s}^{-1}$. Alrededor del tercero son $\dot{\omega}_1 = -4\omega_2$ y $\dot{\omega}_2 = 4\omega_1$, con frecuencia $4\,\mathrm{s}^{-1}$. Ambas producen oscilaciones en el sistema lineal.

Alrededor del segundo eje aparecen $\dot{\omega}_1 = -4\omega_3$ y $\dot{\omega}_3 = -(4/3)\omega_1$. La tasa creciente es $\lambda = 4/\sqrt{3}\,\mathrm{s}^{-1}$. Para un dato en su modo creciente, la amplitud se multiplica por $e^{\lambda t}$, y aumentar por un factor cien requiere

$$t = \frac{\log 100}{\lambda} \approx 1{,}994\,\mathrm{s}.$$

La estimación supone una componente inicial en ese modo y amplitudes pequeñas respecto del giro de base. El dato final 10^{-2} todavía es pequeño frente a 4; prolongar la exponencial hasta amplitudes arbitrariamente grandes excedería la linealización. Un dato situado exactamente en la dirección decreciente del sistema lineal no sigue esta estimación creciente.

18. Seguir una salida exacta del eje intermedio

Escribiendo $u = kt$, las derivadas de las componentes son $-4k\,\mathrm{sech}\,u\tanh u$, $-4k\,\mathrm{sech}^2 u$ y $(4k/\sqrt{3})\,\mathrm{sech}\,u\tanh u$. Sustituir en las tres ecuaciones libres produce, respectivamente, $-\omega_2\omega_3$, $\omega_3\omega_1$ y $-\omega_1\omega_2/3$, con los mismos valores. La identidad $\tanh^2 u + \mathrm{sech}^2 u = 1$ da $K_{\mathrm{rot}} = 16\,\mathrm{J}$ y $\|\boldsymbol{\ell}\|^2 = 64\,(\mathrm{kg\,m^2/s})^2$.

Los límites son $(0, 4, 0)$ cuando $t \to -\infty$ y $(0, -4, 0)$ cuando $t \to +\infty$, en s^{-1}. En medio, la solución pasa por $(4, 0, -4/\sqrt{3})$, muy separada de ambos giros. Para comenzar en la rama negativa con $\omega_1 = 10^{-4}$, se necesita $\cosh(kT) = 40000$, donde $t = -T$. Así,

$$T = \frac{\operatorname{arcosh}(40000)}{k}, \qquad \operatorname{arcosh} x = \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

Resulta aproximadamente 4,889 s. Esta expresión se obtiene resolviendo $x = (e^{v} + e^{-v})/2$ para $e^{v} \geq 1$. El recorrido es exacto en el modelo rígido y muestra una salida de tamaño finito desde datos arbitrariamente próximos al eje intermedio; no depende de extender una aproximación exponencial fuera de su régimen.

19. Controlar la rama lenta del giróscopo

Los datos dan $Mgd = 0{,}5\,\mathrm{N\,m}$, $Cs = 1\,\mathrm{kg\,m^2/s}$ y $A\cos\theta = 0{,}01\,\mathrm{kg\,m^2}$. La ecuación regular es $0{,}01p^2 - p + 0{,}5 = 0$ en unidades consistentes. Sus raíces son

$$p_{\text{lento}} = \frac{1}{1 + \sqrt{0{,}98}} \approx 0{,}502525\,\mathrm{s^{-1}}, \qquad p_{\text{rápido}} \approx 99{,}4975\,\mathrm{s^{-1}}.$$

La aproximación da $p_0 = 0{,}5\,\mathrm{s^{-1}}$. Su error relativo respecto de la raíz lenta es $(p_{\text{lento}} - p_0)/p_{\text{lento}} \approx 0{,}005025$, cerca de 0,503%. El parámetro de la raíz es 0,02, y $p_{\text{lento}}/s \approx 0{,}00503$ confirma separación de tasas para esa rama. La raíz rápida no cumple esa separación.

La comparación describe un movimiento con ángulo constante y velocidades iniciales ajustadas a la precesión regular. No predice que cualquier liberación real adopte de inmediato esa rama. Rozamiento, deformación y una preparación que excite nutación requieren revisar las hipótesis antes de atribuir una diferencia experimental al error de la aproximación algebraica.

20. Reconstruir una inercia desde seis medidas

En una bisectriz positiva, $J((\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j)/\sqrt{2}) = (I_{ii} + I_{jj})/2 + I_{ij}$. Las tres medidas coordenadas fijan la diagonal y las otras tres despejan, una por una, las entradas independientes restantes:

$$\mathsf{I} = \begin{pmatrix} 2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 3 & -1/4 \\ 1/2 & -1/4 & 4 \end{pmatrix} \mathrm{kg\,m^2}.$$

Seis números bastan porque una matriz simétrica de orden tres tiene seis entradas independientes y este diseño las separa. Seis direcciones arbitrarias no garantizarían lo mismo: repetir ejes o elegir medidas dependientes puede perder información.

Para comprobar realización física, reconstruimos la matriz de segundos momentos $\mathsf{S} = \int \mathbf{s}\mathbf{s}^{\mathsf{T}}\,dm$. La definición implica $\mathsf{I} = \operatorname{tr}(\mathsf{S})\,\mathrm{Id}_3 - \mathsf{S}$ y, al tomar trazas, $\mathsf{S} = \tfrac{1}{2}\operatorname{tr}(\mathsf{I})\,\mathrm{Id}_3 - \mathsf{I}$. Con los datos,

$$\mathsf{S} = \begin{pmatrix} 5/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 3/2 & 1/4 \\ -1/2 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{5}{2}\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^{\mathsf{T}} + \frac{7}{5}\mathbf{v}_2\mathbf{v}_2^{\mathsf{T}} + \frac{5}{16}\mathbf{v}_3\mathbf{v}_3^{\mathsf{T}},$$

con $\mathbf{v}_1 = (1, 1/5, -1/5)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 1/4)$ y $\mathbf{v}_3 = (0, 0, 1)$. La igualdad se comprueba multiplicando cada columna por su traspuesta. Todos los coeficientes son positivos; situar pares de masas de $1/2\,\mathrm{kg}$ en $\pm\sqrt{5/2}\,\mathbf{v}_1$, $\pm\sqrt{7/5}\,\mathbf{v}_2$ y $\pm\sqrt{5/16}\,\mathbf{v}_3$, en metros, realiza esa matriz de segundos momentos y tiene centro cero. Hemos construido una distribución admisible, además de ajustar formalmente las seis medidas. Si las medidas contienen incertidumbre, tanto la reconstrucción como esta comprobación deben aplicarse a sus intervalos o al modelo estadístico declarado.

Para controlar las lecturas conservamos el mismo diseño de reconstrucción. Sea $\varepsilon = 0{,}01\,\mathrm{kg\,m^2}$. Cada entrada diagonal de la perturbación $\Delta\mathsf{I}$ tiene módulo a lo sumo ε; cada entrada cruzada combina una bisectriz y dos mitades de diagonales, de modo que su módulo es a lo sumo 2ε. En la matriz de segundos momentos,

$$\Delta\mathsf{S} = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\Delta\mathsf{I})\,\mathrm{Id}_3 - \Delta\mathsf{I},$$

la diagonal tiene cotas $3\varepsilon/2$ y los términos cruzados 2ε. Cada suma de valores absolutos de una fila es a lo sumo $11\varepsilon/2$. Para una matriz simétrica, esta cota controla su forma cuadrática: usar $2|u_i u_j| \le u_i^2 + u_j^2$ en la suma de los términos cruzados da

$$|\mathbf{u}^{\mathsf{T}} \Delta \mathsf{S} \mathbf{u}| \le \frac{11\varepsilon}{2} \|\mathbf{u}\|^2.$$

Busquemos una cota positiva para la matriz nominal. En valores numéricos SI, los menores principales sucesivos de $\mathsf{S} - 0{,}1\,\mathrm{Id}_3$ son $12/5$, $311/100$ y $619/1000$. La eliminación simétrica tiene por tanto tres pivotes positivos: $12/5$, $311/240$ y $619/3110$. Su factorización como una matriz triangular, una diagonal positiva y la traspuesta triangular prueba que su forma cuadrática es positiva. Así, la matriz nominal cumple $\mathbf{u}^{\mathsf{T}} \mathsf{S} \mathbf{u} \ge 0{,}1 \|\mathbf{u}\|^2$ en esas unidades. Para cualquier lectura admisible,

$$\mathbf{u}^{\mathsf{T}} (\mathsf{S} + \Delta \mathsf{S}) \mathbf{u} \ge (0{,}1 - 0{,}055) \|\mathbf{u}\|^2 = 0{,}045 \|\mathbf{u}\|^2.$$

La cota es estrictamente positiva para $\mathbf{u} \neq 0$. El criterio demostrado en el núcleo teórico certifica la realización de todas las matrices de esta familia, además de la nominal. El resultado supone direcciones exactas: una incertidumbre angular altera las ecuaciones que relacionan las lecturas con las entradas y necesita una cota adicional. La calibración de los ejes forma parte del experimento que permite interpretar las seis medidas.

Lecturas y conexiones

Spivak, *Physics for Mathematicians. Mechanics I*, capítulo 5, pp. 186–194, desarrolla el tensor, los ejes principales, el traslado y la energía; el capítulo 9, pp. 332–339, conecta la derivada en ejes móviles con Euler y la geometría del giro libre. Aquí la regla de transporte se retoma del capítulo anterior y la estabilidad se precisa en el espacio de componentes de velocidad angular, con una trayectoria exacta que permite comprobar el mecanismo de salida.

Sears y Zemansky, *Física universitaria*, volumen 1, §10.5, distingue giro de simetría y momento angular oblicuo; §10.7 analiza la precesión. Serway y Jewett, *Física para ciencias e ingeniería*, volumen 1, §11.3 y §11.5, permite cotejar el alcance de la fórmula escalar y la aproximación de giro rápido. El cálculo de seis medidas recupera la relación del capítulo cero entre operación de medida, parámetros inferidos y consistencia del modelo: una matriz ajustada debe conservar las restricciones que provienen de una distribución de masa real.

Capítulo 20

Oscilaciones acopladas

Desplazamos un carro sobre un riel y lo soltamos. Un segundo carro, inicialmente en reposo, comienza a moverse porque un resorte une ambos cuerpos. Durante un tiempo, la oscilación del primero pierde amplitud mientras crece la del segundo. Después el intercambio se invierte. Para predecirlo necesitamos conservar dos posiciones y dos velocidades iniciales: la fuerza sobre cada carro depende también de dónde está el otro.

El oscilador del capítulo 10 ofrecía una frecuencia y una preparación inicial. Aquí un mismo aparato admite varios movimientos especialmente sencillos. Podemos soltar los carros de manera que avancen juntos o que se aproximen y se separen simétricamente. Cada preparación conserva una proporción entre sus desplazamientos. Encontrar esas proporciones permitirá construir también el movimiento producido al soltar un solo carro.

Trabajaremos primero con resortes ideales, masas constantes y rozamiento despreciable, en un laboratorio inercial. Las fuerzas elásticas actuarán dentro de su intervalo lineal. Después examinaremos cómo esa descripción aparece al aproximar un potencial cerca del equilibrio. Las frecuencias calculadas pertenecerán al modelo elegido; medirlas permitirá contrastar sus masas, sus rigideces y sus condiciones de apoyo.

Dos posiciones para un solo aparato

Dos carros de igual masa $m > 0$ se mueven horizontalmente. Cada uno está unido a una pared fija mediante un resorte de rigidez $k > 0$ y ambos están conectados mediante otro de rigidez $\kappa > 0$. Llamaremos x_1, x_2 a sus desplazamientos respecto de un equilibrio en que los tres resortes tienen su longitud natural. Ambos ejes apuntan hacia la derecha. Al desplazar los carros, la extensión adicional del resorte central es $x_2 - x_1$.

El resorte central tira del primer carro hacia la derecha si $x_2 - x_1 > 0$, y ejerce sobre el segundo la fuerza opuesta. Newton da

$$m\ddot{x}_1 = -(k+\kappa)x_1 + \kappa x_2, \qquad m\ddot{x}_2 = \kappa x_1 - (k+\kappa)x_2.$$

El peso y la normal se compensan en vertical. Cada ecuación horizontal conserva las dos interacciones elásticas del carro correspondiente. Si sujetáramos el segundo carro, el primero oscilaría con rigidez $k+\kappa$. Al liberarlo cambia la situación física: su desplazamiento modifica continuamente la extensión central.

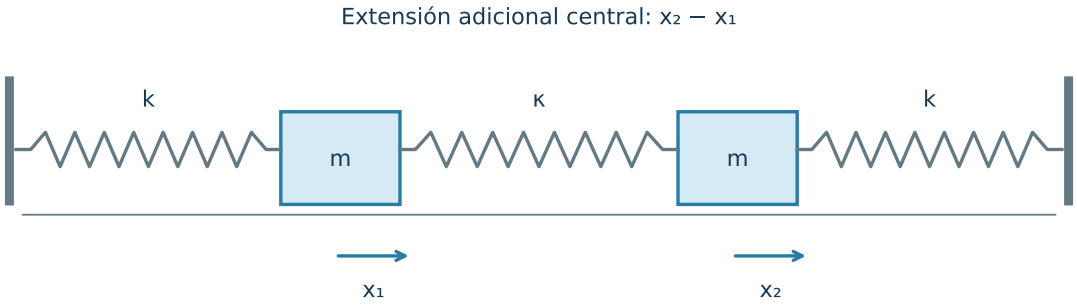


Figura 20.1. La extensión del resorte central depende de la diferencia de desplazamientos. Las paredes fijan el laboratorio y proporcionan las fuerzas externas sobre el conjunto.

Sumemos las ecuaciones y después restémoslas. Las combinaciones

$$Q_+ = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad Q_- = \frac{x_1 - x_2}{2}$$

satisfacen

$$\ddot{Q}_+ + \omega_+^2 Q_+ = 0, \qquad \ddot{Q}_- + \omega_-^2 Q_- = 0, \qquad \omega_+^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_-^2 = \frac{k + 2\kappa}{m}.$$

Los signos de los subíndices indican suma y diferencia; en este aparato $\omega_- > \omega_+$. La suma elimina la fuerza interna del resorte central. La diferencia conserva su contribución dos veces, porque los extremos se desplazan en sentidos opuestos.

Definición. Un modo normal oscilatorio de un sistema lineal es un movimiento de perfil fijo $x(t) = \phi a(t)$, con un vector real constante $\phi \neq 0$ y una función a de amplitud positiva que satisface $\ddot{a} + \omega^2 a = 0$, para una frecuencia angular $\omega > 0$. Las componentes del perfil determinan las proporciones y los signos relativos de los desplazamientos.

Para $\phi_+ = (1, 1)^{\mathsf{T}}$ ambos carros se desplazan igual y el resorte central conserva su extensión. Para $\phi_- = (1, -1)^{\mathsf{T}}$ se desplazan en sentidos opuestos y el resorte central añade restauración. Una componente nula del perfil mantiene ese carro en equilibrio durante el modo. Multiplicar el perfil por una constante y dividir la amplitud por la misma constante describe idéntico movimiento.

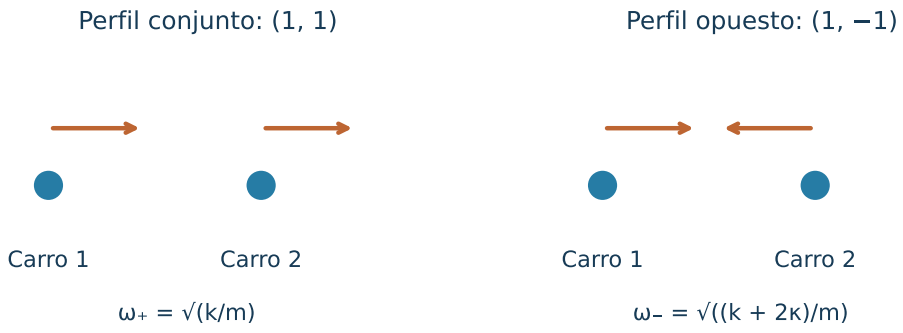


Figura 20.2. Las flechas representan desplazamientos simultáneos. El perfil conserva sus proporciones durante cada oscilación; su escala depende de la preparación.

Preparar los modos y recuperar los datos

La transformación tiene inversa: $x_1 = Q_+ + Q_-$ y $x_2 = Q_+ - Q_-$. Podemos resolver las dos ecuaciones escalares mediante las funciones del capítulo 10 y reconstruir ambos carros.

Proposición. Para cualquier posición inicial $x(0)$ y velocidad inicial $v(0)$ del aparato simétrico, la solución única es

$$Q_\pm(t) = Q_\pm(0)\cos\omega_\pm t + \frac{\dot Q_\pm(0)}{\omega_\pm}\sin\omega_\pm t, \qquad x_1 = Q_+ + Q_-, \quad x_2 = Q_+ - Q_-.$$

Demostración. La suma y la diferencia transforman las ecuaciones de Newton en las dos ecuaciones escalares obtenidas. Cada expresión satisface su ecuación y recupera su posición y derivada iniciales. La inversa reconstruye los cuatro datos originales. La unicidad del oscilador escalar aplicada a cada combinación garantiza la unicidad de la pareja reconstruida. □

Soltemos sólo el primer carro desde $x_1(0) = A$, con $x_2(0) = 0$ y velocidades nulas. Las coordenadas iniciales son $Q_+(0) = Q_-(0) = A/2$, y resulta

$$x_1(t) = \frac{A}{2}(\cos\omega_+ t + \cos\omega_- t), \qquad x_2(t) = \frac{A}{2}(\cos\omega_+ t - \cos\omega_- t).$$

Definiendo $\bar\omega = (\omega_- + \omega_+)/2$ y $\delta = \omega_- - \omega_+ > 0$, las identidades trigonométricas dan

$$x_1 = A\cos(\delta t/2)\cos\bar\omega t, \qquad x_2 = A\sin(\delta t/2)\sin\bar\omega t.$$

Si κ/k es pequeño, la frecuencia $\bar\omega$ marca la oscilación rápida y $\delta/2$ describe una modulación lenta. Los módulos de las envolventes vuelven a su situación inicial después de $2\pi/\delta$. La primera anulación de la envolvente del carro 1 ocurre en $t = \pi/\delta$. Su velocidad en ese instante es $-A\delta\cos(\bar\omega\pi/\delta)/2$ y puede conservar un valor distinto de cero. El registro de posición y el de velocidad deben leerse conjuntamente para decidir qué estado alcanzó el carro.

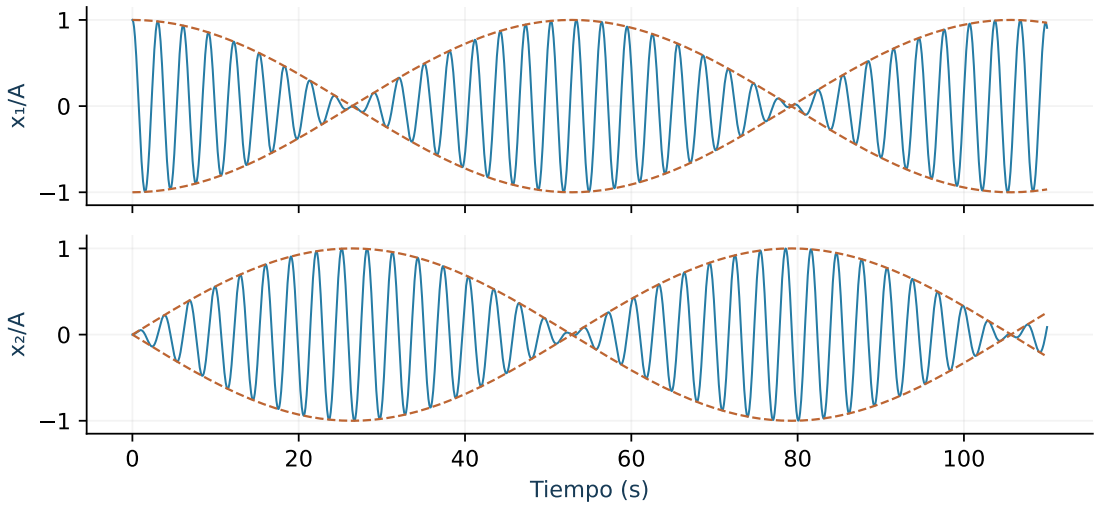


Figura 20.3. Con $m = 1\,\mathrm{kg}$, $k = 4\,\mathrm{N/m}$ y $\kappa = 0{,}245\,\mathrm{N/m}$, las frecuencias son 2 y $\sqrt{4{,}49}$ radianes por segundo. Las líneas discontinuas muestran los límites de amplitud de las expresiones exactas del modelo lineal.

La energía de los carros y los tres resortes es

$$E = \frac{m}{2}(\dot x_1^2 + \dot x_2^2) + \frac{k}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{\kappa}{2}(x_2 - x_1)^2 = m(\dot Q_+^2 + \omega_+^2 Q_+^2) + m(\dot Q_-^2 + \omega_-^2 Q_-^2).$$

Las dos energías modales se conservan por separado. El intercambio entre carros puede coexistir con esas constantes porque cada carro participa en ambos modos. El resorte central conserva además una energía propia. Para atribuir energías a subsistemas hay que declarar cómo se contabiliza esa contribución. En acoplamiento débil resulta útil hablar de intercambio lento entre osciladores, comprobando la aproximación con el balance completo.

La masa decide cómo proyectar

Al cambiar una masa desaparece la igualdad de aceleraciones asociada a fuerzas iguales. Conservemos las dos posiciones cartesianas, permitamos masas $m_1, m_2 > 0$ y rigideces de pared k_1, k_2. Las ecuaciones toman la forma

$$M\ddot{x} + Kx = 0, \qquad M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} k_1 + \kappa & -\kappa \\ -\kappa & k_2 + \kappa \end{pmatrix}.$$

La energía es $E = \dot{x}^{\mathsf{T}} M \dot{x}/2 + x^{\mathsf{T}} K x/2$. La simetría de K procede aquí de las fuerzas derivadas del potencial elástico. Buscando un perfil fijo obtenemos $K\phi = \omega^2 M\phi$. Para encontrarlo calculamos primero los valores $\lambda = \omega^2$ que satisfacen $\det(K - \lambda M) = 0$ y después resolvemos la ecuación vectorial correspondiente. El determinante permite hallar candidatos; la ecuación vectorial decide sus perfiles.

Definición. Para una matriz real simétrica definida positiva M, el producto escalar de masas es $\langle u, v \rangle_M = u^{\mathsf{T}} M v$. Una base de perfiles $\phi_1, \dots, \phi_n$ es ortonormal respecto de las masas cuando $\phi_i^{\mathsf{T}} M \phi_j = \delta_{ij}$, con una elección coherente de unidades para sus componentes y sus coeficientes.

La forma $\dot{x}^{\mathsf{T}} M \dot{x}$ mide dos veces la energía cinética. Esta es la razón física para usarla al separar movimientos. Una matriz de masas constante también puede tener términos cruzados cuando las coordenadas combinan posiciones de varias partículas. En coordenadas de longitudes, M lleva unidades de masa y los perfiles normalizados pueden llevar unidades de masa elevada a $-1/2$; sus coordenadas modales llevan entonces unidades de longitud por raíz de masa. Si intervienen ángulos, se fijan escalas de coordenadas antes de efectuar operaciones matriciales numéricas. Los productos energéticos conservan sus unidades en cualquier representación coherente.

Proposición. Sean M real simétrica definida positiva y K real simétrica, constantes, en un sistema de n coordenadas. Existe una base real de perfiles que satisface

$$K\phi_j = \lambda_j M \phi_j, \qquad \phi_i^{\mathsf{T}} M \phi_j = \delta_{ij}.$$

Si K es definida positiva, todos los λ_j son positivos. Perfiles correspondientes a valores distintos son ortogonales respecto de M.

Demostración. El resultado espectral para matrices simétricas se obtiene como en el capítulo 19: minimizar la forma cuadrática sobre la esfera produce un autovector unitario; su complemento perpendicular es invariante, y la repetición en ese complemento construye una base ortonormal. Aplicado a M, proporciona $M = O D O^{\mathsf{T}}$ con O ortogonal y D diagonal de entradas positivas. Por tanto existen las matrices simétricas $M^{1/2} = O D^{1/2} O^{\mathsf{T}}$ y $M^{-1/2} = O D^{-1/2} O^{\mathsf{T}}$.

La matriz $A = M^{-1/2} K M^{-1/2}$ es simétrica. El mismo resultado espectral da una base ortonormal u_j con $A u_j = \lambda_j u_j$. Tomando $\phi_j = M^{-1/2} u_j$, obtenemos $K\phi_j = \lambda_j M \phi_j$ y $\phi_i^{\mathsf{T}} M \phi_j = u_i^{\mathsf{T}} u_j = \delta_{ij}$. Si K es definida positiva, $\lambda_j = \phi_j^{\mathsf{T}} K \phi_j > 0$. Finalmente, la simetría implica

$$\lambda_j \phi_i^{\mathsf{T}} M \phi_j = \phi_i^{\mathsf{T}} K \phi_j = \lambda_i \phi_i^{\mathsf{T}} M \phi_j.$$

Para $\lambda_i \neq \lambda_j$, esta identidad obliga a que el producto de masas sea cero. Dentro de un espacio de valor repetido se escoge una base ortonormal para ese producto. $\square$

Para ver qué cambia en la práctica, tomemos valores numéricos SI

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad K = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

El polinomio es $2(\lambda-2)(\lambda-5)$. Podemos elegir los perfiles sin normalizar $(1,1)^{\mathsf{T}}$ y $(-2,1)^{\mathsf{T}}$. Su producto euclídeo es -1, mientras que su producto de masas es $-2+2=0$. Los perfiles normalizados son $\phi_1 = (1,1)^{\mathsf{T}}/\sqrt{3}$ y $\phi_2 = (-2,1)^{\mathsf{T}}/\sqrt{6}$, con las unidades implícitas de esa normalización. Dividir cada ecuación por su masa produce una matriz $M^{-1}K$ cuyas entradas cruzadas son -2 y -1. La simetría relevante se conserva en la pareja (K, M).

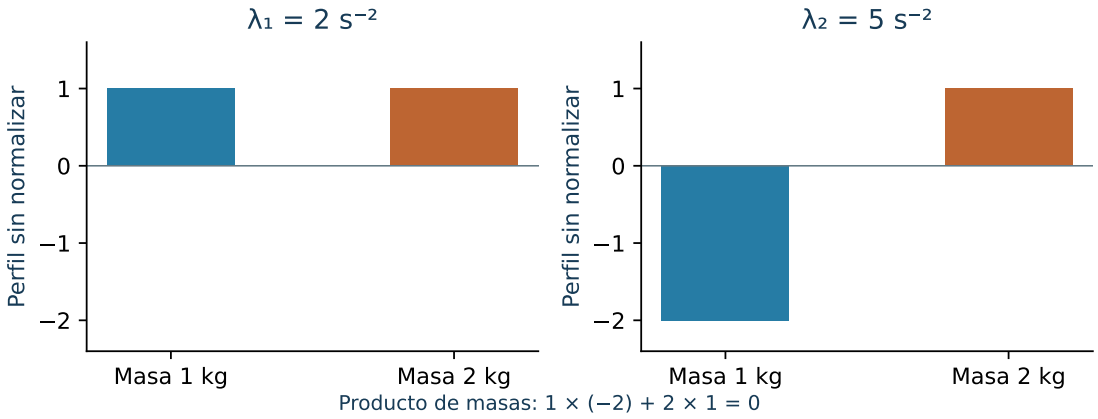


Figura 20.4. Para masas de uno y dos kilogramos, el perfil rápido desplaza el primer carro con el doble de amplitud y signo opuesto. Las masas intervienen tanto en la frecuencia como en la proyección de una preparación.

Separar las ecuaciones y la energía

Reunamos los perfiles normalizados en las columnas de S. Las identidades anteriores son $S^{\mathsf{T}}MS = I$ y $S^{\mathsf{T}}KS = \Lambda$, donde Λ tiene entradas diagonales λ_j. Escribir $x = S\eta$ permite usar cada columna como una dirección de movimiento.

Definición. Las coordenadas normales asociadas a esa base son los coeficientes $\eta = S^{\mathsf{T}}Mx$ de la expansión $x = S\eta$. Sus velocidades son $\dot\eta = S^{\mathsf{T}}M\dot x$.

Proposición. La transformación anterior convierte $M\ddot x + Kx = 0$ en las ecuaciones independientes $\ddot\eta_j + \lambda_j \eta_j = 0$ y descompone la energía como

$$E = \frac{1}{2}\sum_{j} (\dot\eta_j^2 + \lambda_j \eta_j^2).$$

Para $\lambda_j = \omega_j^2 > 0$, cada coordenada queda determinada por sus datos mediante $\eta_j(t) = \eta_j(0)\cos\omega_j t + \dot\eta_j(0)\sin\omega_j t/\omega_j$.

Demostración. Como S es una base, es invertible. La igualdad $S^{\mathsf{T}}MS = I$ muestra que su inversa es $S^{\mathsf{T}}M$. Sustituimos $x = S\eta$ en las ecuaciones y multiplicamos por S^{T}. Las identidades de las matrices producen $\ddot\eta + \Lambda\eta = 0$. La misma sustitución en las dos formas cuadráticas de la energía da la suma anunciada. Cada término tiene derivada $\dot\eta_j(\ddot\eta_j + \lambda_j\eta_j) = 0$. La solución escalar recupera directamente sus dos datos iniciales. $\square$

En el ejemplo de masas diferentes, una preparación $x(0) = (A, 0)^{\mathsf{T}}$ en reposo tiene coeficientes $\eta_1(0) = A/\sqrt{3}$ y $\eta_2(0) = -2A/\sqrt{6}$ en las unidades escogidas. De ahí,

$$x_1 = \frac{A}{3}\cos(\sqrt{2}\,t) + \frac{2A}{3}\cos(\sqrt{5}\,t), \qquad x_2 = \frac{A}{3}[\cos(\sqrt{2}\,t) - \cos(\sqrt{5}\,t)].$$

En estas fórmulas numéricas t se expresa en segundos y las frecuencias en radianes por segundo. En $t = 0$ se recupera la preparación; las derivadas iniciales son cero. La segunda masa recibe una superposición cuya amplitud está determinada por los dos perfiles. La proyección ponderada conserva esa información aun cuando los vectores de desplazamiento se dibujen sobre los mismos ejes cartesianos.

Frecuencias nulas, crecimiento y periodicidad

Retiremos los resortes de pared y conservemos el resorte central. Trasladar ambos carros por igual deja intacta su extensión. La matriz K tiene entonces un núcleo que contiene $(1, 1)^{\mathsf{T}}$ y el valor correspondiente es $\lambda = 0$. La coordenada modal satisface $\ddot{\eta} = 0$: permite una posición constante y una traslación uniforme. Sus dos datos iniciales siguen siendo necesarios.

Proposición. Para las matrices simétricas K y definida positiva M anteriores, cada dirección modal evoluciona según el signo de su valor λ. Si $\lambda = 0$, $\eta = a + bt$. Si $\lambda = -\sigma^2 < 0$, $\eta = a\cosh \sigma t + (b/\sigma)\sinh \sigma t$, con $a = \eta(0)$ y $b = \dot{\eta}(0)$. Un valor negativo permite perturbaciones arbitrariamente pequeñas que crecen exponencialmente en el sistema lineal.

Demostración. Integramos dos veces cuando $\lambda = 0$. Para $\lambda = -\sigma^2$, derivar las funciones hiperbólicas verifica la ecuación $\ddot{\eta} - \sigma^2 \eta = 0$ y sus datos. La preparación $b = \sigma a$ produce $\eta = a e^{\sigma t}$. Para cualquier $a \neq 0$, su módulo supera una tolerancia fija a tiempo suficientemente grande, aunque el módulo inicial se escoja tan pequeño como se quiera. □

En un equilibrio de un sistema elástico, una dirección de curvatura negativa del potencial produce precisamente esa salida lineal. Una curvatura nula exige examinar también los términos superiores del potencial: puede describir una traslación libre, pero también una fuerza restauradora que comienza en orden cúbico. El problema 14 compara esas posibilidades.

Dos frecuencias positivas tampoco aseguran que toda la trayectoria se repita. Cuando ambas participaciones son distintas de cero, un período común T exige $\omega_1 T$ y $\omega_2 T$ múltiplos enteros de 2π. Por tanto, exige una razón racional ω_1/ω_2. La descomposición modal permite sumar movimientos periódicos cuyas fases relativas siguen cambiando sin un período común exacto.

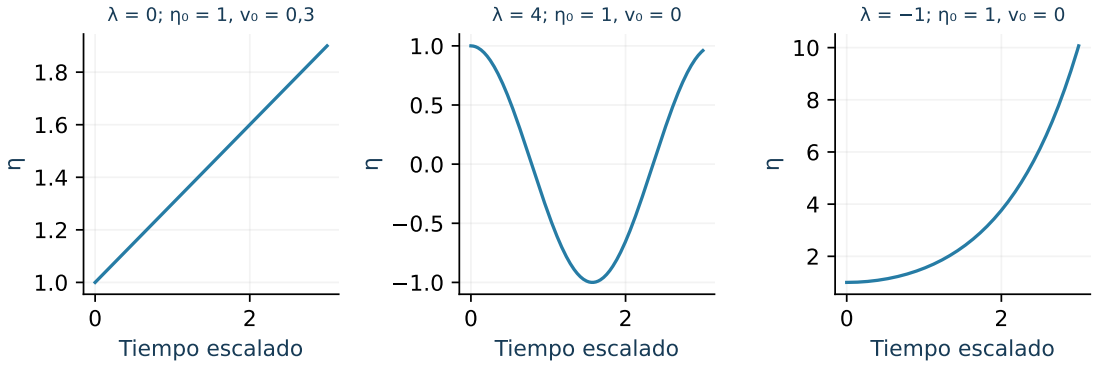


Figura 20.5. Los valores cero, positivo y negativo de λ producen evoluciones distintas de la coordenada modal. Cada curva corresponde a una ecuación lineal y a los datos iniciales indicados.

La aproximación cerca de un equilibrio

Consideremos posiciones cartesianas independientes x y un potencial U de clase C^3 cerca de un equilibrio $x = 0$, con $\nabla U(0) = 0$. La expansión local de su gradiente es

$$\nabla U(x) = Kx + r(x), \qquad K = D^2U(0), \qquad \|r(x)\| \le C\|x\|^2$$

en una vecindad suficientemente pequeña y con una elección fija de escalas. La cota procede de aplicar Taylor a las componentes del gradiente y acotar las derivadas terceras en una vecindad cerrada contenida en el dominio. Con masas constantes, Newton queda $M\ddot{x} + Kx = -r(x)$. Suprimir el resto define la aproximación lineal. La simetría del Hessiano y la positividad de la energía cinética permiten el análisis modal construido.

La cota compara fuerzas a medida que disminuye el desplazamiento. En direcciones donde la restauración lineal se anula, el resto puede aportar la fuerza dominante. Incluso con frecuencias positivas, una diferencia pequeña de frecuencia puede acumular un desfase tras muchas oscilaciones. Para contrastar el modelo se registran amplitud, duración, condiciones iniciales y precisión temporal. Una predicción de corto alcance y otra de largo alcance requieren controles distintos.

El capítulo 21 extenderá la energía cinética a una matriz que depende de coordenadas y de la geometría del vínculo. Cerca de un equilibrio fijo reaparecerá una pareja de formas cuadráticas como (K, M). El presente capítulo construye las proyecciones y la ortogonalidad que ese uso necesita.

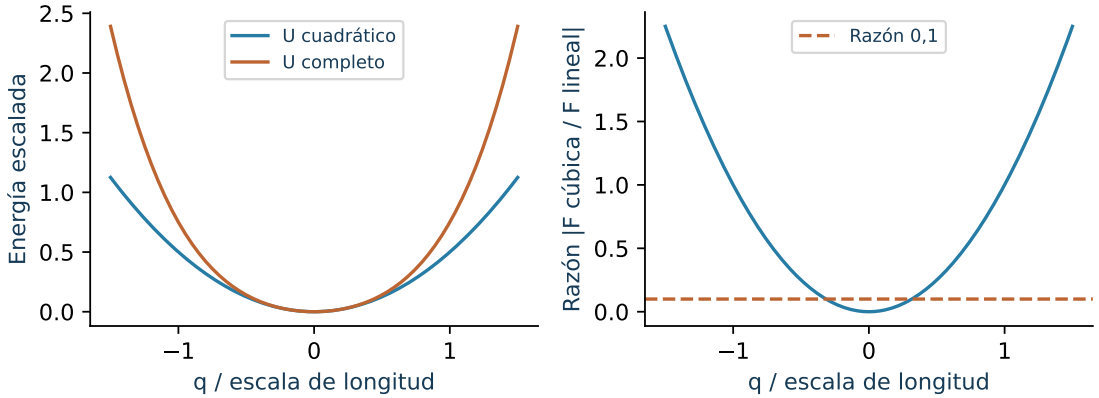


Figura 20.6. Para $U(q) = kq^2/2 + \alpha q^4/4$ con $k, \alpha > 0$, la razón entre la fuerza cúbica y la lineal es $\alpha q^2/k$ cuando $q \neq 0$. Esa comparación permite declarar una escala de amplitud.

Lo que una medición de modos permite inferir

En el aparato simétrico, si se conocen la masa y las dos frecuencias, se obtiene $k = m\omega_+^2$ y $\kappa = m(\omega_-^2 - \omega_+^2)/2$. Las frecuencias estiman parámetros dentro de una familia de modelos. Los perfiles aportan una prueba adicional: con la preparación de movimiento conjunto debe conservarse $x_1 = x_2$, y con la opuesta debe conservarse $x_1 = -x_2$. Una desigualdad de masas o apoyos puede cambiar ambas proporciones.

Para estudiar el acoplamiento débil hay que registrar un intervalo suficientemente largo para ver la modulación. Las lecturas repetidas, la calibración de los sensores y la elección de la frecuencia de muestreo conservan el papel que tenían en el capítulo 0. Una serie muy precisa puede seguir siendo compatible con varias frecuencias si sus instantes de registro pierden información. Los problemas finales separan el ajuste de parámetros del contraste de un modelo y del diseño de observaciones nuevas.

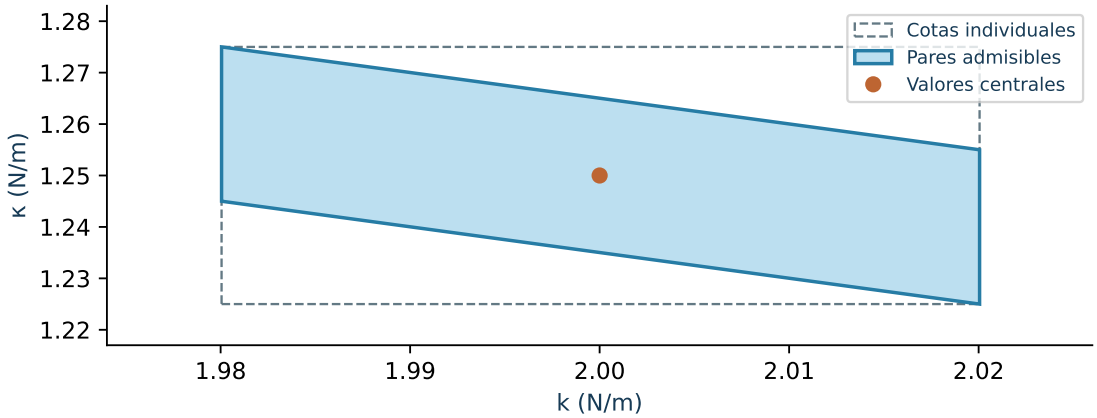


Figura 20.7. Con masa conocida, las cotas de ambas frecuencias delimitan rigideces admisibles. Las proyecciones sobre los ejes dan cotas individuales; conservar la pareja de frecuencias preserva también la relación entre los parámetros.

Elegir qué combinación registrar

El primer carro se había soltado solo y su movimiento reunía dos modos. Si el sensor publica únicamente el promedio $y = (x_1 + x_2)/2$, entrega Q_+ en cada instante. Podemos cambiar por completo Q_- y conservar esa serie temporal. La duración del registro y la precisión de sus lecturas actúan sobre la combinación elegida; la elección de esa combinación determina qué movimientos llegan hasta el registro.

Para precisar la recuperación, supongamos conocidos los parámetros del aparato simétrico y las dos frecuencias positivas distintas. Un registro lineal tiene la forma $y = g_+Q_+ + g_-Q_-$, donde g_+, g_- son coeficientes conocidos y constantes.

Proposición (recuperar dos modos desde un registro). Si $g_+g_- \neq 0$, un registro exacto de y en un intervalo abierto permite recuperar ambos modos mediante

$$Q_+ = \frac{\ddot{y} + \omega_-^2 y}{g_+(\omega_-^2 - \omega_+^2)}, \qquad Q_- = \frac{\ddot{y} + \omega_+^2 y}{g_-(\omega_+^2 - \omega_-^2)}.$$

Si uno de los coeficientes es cero, el registro conserva la contribución del otro modo y admite cualquier preparación del modo cuyo coeficiente se anula.

Demostración. Para aislar Q_+ aplicamos la operación $d^2/dt^2 + \omega_-^2$ a y. La ecuación de Q_- anula su contribución; la ecuación de Q_+ deja $g_+(\omega_-^2 - \omega_+^2)Q_+$. Las hipótesis permiten dividir. Intercambiar los índices prueba la segunda fórmula. Cuando un coeficiente es cero, la propia expresión de y es independiente del modo correspondiente; sus dos datos iniciales pueden variarse libremente. □

Al medir sólo x_1 los dos coeficientes valen uno y el registro temporal exacto contiene ambos modos. Al medir el promedio, el coeficiente del modo opuesto vale cero. Esta diferencia se decide antes de muestrear. Las fórmulas de recuperación con derivadas describen información ideal: al aplicarlas a datos experimentales hay que estimar derivadas y controlar sus errores. Una separación pequeña entre frecuencias o un coeficiente pequeño amplifica esos errores a través de los denominadores. El problema 21 retoma la liberación inicial para comparar dos movimientos que un promedio vuelve indistinguibles.

Ejercicios

En los problemas del aparato simétrico se usan los dos resortes de pared de rigidez k, el central de rigidez κ y masas iguales m. Los desplazamientos se miden desde el equilibrio y en el mismo sentido. Salvo indicación contraria se omite el rozamiento, se permanece en el régimen lineal y se utilizan unidades SI.

1. La fuerza del resorte compartido

Para $m = 1\,\mathrm{kg}$, $k = 4\,\mathrm{N/m}$ y $\kappa = 2\,\mathrm{N/m}$, se observa $x_1 = 0{,}03\,\mathrm{m}$, $x_2 = 0{,}01\,\mathrm{m}$. Obtenga las dos aceleraciones mediante fuerzas individuales. Un cálculo asigna $-\kappa x_1$ al resorte central del primer carro. Determine qué condición adicional describiría esa expresión.

2. Preparar una sola frecuencia

Con los parámetros del problema 1, encuentre las trayectorias si se sueltan en reposo desde $(x_1, x_2) = (A, A)$ y desde $(A, -A)$. Calcule las energías para $A = 0{,}02\,\mathrm{m}$. Explique qué registro permitiría reconocer cada preparación.

3. Cuatro datos iniciales

Para el mismo aparato, $x(0) = (0{,}06, -0{,}02)\,\mathrm{m}$ y $\dot{x}(0) = (0{,}10, 0{,}30)\,\mathrm{m/s}$. Obtenga $Q_{\pm}(t)$ y reconstruya las posiciones. Compruebe las velocidades iniciales.

4. Energías que pertenecen a los modos

Calcule la energía inicial del problema 3, primero en carros y resortes y después en coordenadas $Q_{\pm}$. Explique qué energías conservan individualmente un valor constante.

5. Leer una envolvente

Un aparato simétrico tiene frecuencias angulares $\omega_+ = 2\,\mathrm{s^{-1}}$ y $\omega_- = 2{,}12\,\mathrm{s^{-1}}$. Se prepara $x(0) = (A, 0)$, $\dot{x}(0) = 0$. Obtenga el primer cero de la envolvente de x_1 y el tiempo de retorno de los módulos de las dos envolventes. Para $A = 0{,}05\,\mathrm{m}$, calcule x_1 y $\dot{x}_1$ en aquel primer cero. Decida si el carro está en reposo.

6. Inferir los tres resortes

Se conoce $m = 0{,}5\,\mathrm{kg}$ y se miden frecuencias 2 y $3\,\mathrm{s^{-1}}$, con perfiles proporcionales a $(1, 1)$ y $(1, -1)$. Infiera k y κ. Prediga la frecuencia del primer carro si el segundo se sujeta en el equilibrio.

7. La ortogonalidad que usan las masas

Para $M = \mathrm{diag}(1, 2)\,\mathrm{kg}$ y $K = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\,\mathrm{N/m}$, encuentre valores modales, perfiles y normalizaciones. Compare sus productos euclídeo y de masas. Identifique resortes positivos que realicen esta matriz K.

8. Soltar la masa ligera

En el problema 7 se prepara $x(0) = (A, 0)$ y $\dot{x}(0) = 0$. Obtenga las dos posiciones y las energías modales. Determine la razón entre estas últimas. Utilice los valores numéricos SI y mantenga la unidad de energía al expresar el resultado.

9. Coordenadas que mezclan posiciones

Para el aparato del problema 1, defina $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2 - x_1$. Obtenga las matrices de energía cinética y potencial en y, sus valores modales y los dos perfiles. Verifique la ortogonalidad mediante la nueva matriz de masas.

10. Una traslación que sigue libre

Dos masas de 2 y 3 kg están unidas por un resorte de rigidez 6 N/m sobre un riel libre de fuerzas horizontales externas. Los desplazamientos desde un equilibrio cumplen $x(0) = (0{,}1, -0{,}1)\,\mathrm{m}$ y $\dot{x}(0) = (0{,}4, 0{,}4)\,\mathrm{m/s}$. Use el centro de masa y la extensión adicional para resolver ambas posiciones. Identifique el modo nulo.

11. Tres masas y dos resortes

Tres masas de un kilogramo forman una cadena libre con dos resortes iguales de un newton por metro, sin resortes de pared. Construya K y encuentre sus tres valores modales y perfiles. Explique el significado del perfil de frecuencia nula y del que mantiene quieta la masa central.

12. Dos modos con igual frecuencia

Un sistema tiene $M = mI$ y $K = 4m\,\mathrm{s}^{-2} I$ en dos coordenadas de longitud. Estudie $x(t) = A(\cos(2t), \sin(2t))$, con t numérico en segundos. Descompóngalo en modos de perfiles fijos. Describa la trayectoria y la libertad para escoger una base modal.

13. Una curvatura que permite salir

En unidades SI, $M = I$ y $K = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Halle las dos direcciones modales. Resuelva el movimiento desde $x(0) = \varepsilon(1, 1)$ y velocidad nula. Relacione la curvatura del potencial con el crecimiento de esa preparación.

14. Cuando desaparece la restauración lineal

Dos coordenadas cartesianas de masa $m > 0$ tienen potencial $U = \alpha(x_1^4 + x_2^4)/4$, con $\alpha > 0$. Calcule el Hessiano en cero y la aproximación lineal. Utilizando la energía exacta, demuestre que preparaciones suficientemente pequeñas en posición y velocidad permanecen pequeñas para todo tiempo futuro. Compare esa conclusión con lo que permite decidir el Hessiano.

15. Amortiguamiento proporcional a la masa

Añada al problema 7 una fuerza viscosa $-C\dot{x}$ con $C = \gamma M$, $\gamma = 1\,\mathrm{s}^{-1}$. Obtenga las ecuaciones modales y sus exponentes temporales. Si se instala un único amortiguador sobre la primera masa, $C = \mathrm{diag}(c, 0)$, calcule el término cruzado de $S^{\mathsf{T}} C S$ y explique cómo cambia la separación.

16. Forzar un carro y observar el otro

En el aparato del problema 1 actúa $(F\cos\Omega t, 0)$, con $F = 0{,}1\,\mathrm{N}$. Busque una solución particular periódica para Ω distinta de las frecuencias normales. Determine la frecuencia a la que la respuesta particular de x_1 se anula y calcule x_2 en ella. Declare qué preparación permite observar sólo esa respuesta en el modelo sin disipación.

17. Un reloj que confunde frecuencias

Un sensor registra $x(n\Delta t) = A\cos(\omega n \Delta t)$ para enteros $n \geq 0$, con $\Delta t = 0{,}1\,\mathrm{s}$. Construya otra frecuencia positiva que produzca exactamente todos esos registros. Explique qué información adicional o cambio de observación permitiría distinguirlas.

18. El paso temporal y el modo más rápido

En coordenadas normales de frecuencia $\omega > 0$, se usa la actualización $v_{n+1} = v_n - h\omega^2 \eta_n$, $\eta_{n+1} = \eta_n + h v_{n+1}$. Obtenga su matriz, traza y determinante. Halle el intervalo positivo de pasos para el cual todas sus iteradas permanecen acotadas para cualquier dato inicial. Aplíquelo al problema 7 y examine la frontera superior.

19. Una prueba con producto ordinario

Un argumento aplica el teorema espectral euclídeo directamente a $M^{-1}K$ del problema 7 y concluye que sus dos perfiles son perpendiculares en el dibujo cartesiano. Localice el paso que necesita revisión. Pruebe directamente la simetría de $M^{-1}K$ respecto del producto de masas y use esa identidad para obtener la ortogonalidad correcta.

20. Cotas y contraste de una identificación

En el aparato simétrico se conoce exactamente $m = 0{,}5\,\mathrm{kg}$ dentro del modelo. Las frecuencias angulares pertenecen a $[1{,}99, 2{,}01]$ y $[2{,}99, 3{,}01]\,\mathrm{s}^{-1}$. Se admiten todas las combinaciones de esas bandas. Obtenga cotas para k y κ. Diseñe un ensayo de perfiles que contraste la hipótesis de simetría con información distinta de las dos frecuencias empleadas en el ajuste.

21. Dos movimientos detrás de un mismo registro

En el aparato simétrico tome $m = 1\,\mathrm{kg}$, $k = 4\,\mathrm{N/m}$, $\kappa = 2\,\mathrm{N/m}$ y $A = 0{,}02\,\mathrm{m}$. Compare las preparaciones en reposo $x(0) = (A, 0)$ y $x(0) = (A/2, A/2)$. Un sensor registra de manera continua e ideal $y = (x_1 + x_2)/2$. Obtenga las trayectorias, compare sus registros y sus energías. Describa qué familia de preparaciones queda compatible con el mismo registro en el modelo lineal. Si se añade la lectura de x_1, reconstruya ambos carros. Examine también si un registro exacto de x_1 por sí solo bastaría con parámetros conocidos. Distinga esa recuperación ideal de la estimación de derivadas con ruido.

Soluciones

1. La fuerza del resorte compartido

La extensión adicional central es $0{,}01 - 0{,}03 = -0{,}02\,\mathrm{m}$. El resorte está comprimido respecto de su equilibrio y empuja el primer carro hacia la izquierda con $0{,}04\,\mathrm{N}$. Su resorte de pared añade $-0{,}12\,\mathrm{N}$. Por tanto $\ddot{x}_1 = -0{,}16\,\mathrm{m/s^2}$.

El segundo recibe $+0{,}04\,\mathrm{N}$ del resorte central y $-0{,}04\,\mathrm{N}$ de su pared, de modo que su aceleración instantánea es cero. Puede tener velocidad distinta de cero en ese instante. La expresión $-\kappa x_1$ para la fuerza central del primer carro corresponde a mantener $x_2 = 0$. Esa condición describe un extremo central sujeto o un instante en que el segundo carro pasa por su equilibrio. En el registro dado x_2 tiene otro valor y debe conservarse en la extensión.

2. Preparar una sola frecuencia

La preparación conjunta tiene $Q_+(0) = A$, $Q_-(0) = 0$ y ambas velocidades modales nulas. Resulta $x_1 = x_2 = A\cos(2t)$. La preparación opuesta da $Q_+ = 0$, $Q_- = A\cos(\sqrt{8}\,t)$ y, por tanto, $x_1 = A\cos(\sqrt{8}\,t)$, $x_2 = -A\cos(\sqrt{8}\,t)$. Las igualdades entre posiciones permanecen durante todo el movimiento.

Para $A = 0{,}02\,\mathrm{m}$, las energías iniciales son $E_+ = kA^2 = 0{,}0016\,\mathrm{J}$ y $E_- = (k + 2\kappa)A^2 = 0{,}0032\,\mathrm{J}$. En el segundo caso el resorte central tiene extensión de módulo $2A$ y aporta $2\kappa A^2$. Dos sensores permiten comparar simultáneamente signos y proporciones; un sensor aislado reconoce una frecuencia, pero pierde la comprobación del perfil.

3. Cuatro datos iniciales

La transformación se aplica tanto a posiciones como a velocidades. Produce $Q_+(0) = 0{,}02\,\mathrm{m}$, $Q_-(0) = 0{,}04\,\mathrm{m}$, $\dot{Q}_+(0) = 0{,}20\,\mathrm{m/s}$ y $\dot{Q}_-(0) = -0{,}10\,\mathrm{m/s}$. En valores numéricos SI,

$$Q_+ = 0{,}02\cos(2t) + 0{,}10\sin(2t), \qquad Q_- = 0{,}04\cos(\sqrt{8}\,t) - \frac{0{,}10}{\sqrt{8}}\sin(\sqrt{8}\,t).$$

Sumar y restar estas expresiones da x_1 y x_2. En el origen las posiciones son $0{,}02 + 0{,}04 = 0{,}06$ y $0{,}02 - 0{,}04 = -0{,}02$. Las derivadas son $0{,}20 - 0{,}10 = 0{,}10$ y $0{,}20 + 0{,}10 = 0{,}30$, como exigía la preparación. Dividir cada velocidad modal por su frecuencia fue necesario para que el coeficiente del seno tuviera unidades de longitud.

4. Energías que pertenecen a los modos

La energía cinética inicial es $(0{,}10^2 + 0{,}30^2)/2 = 0{,}05\,\mathrm{J}$. Los resortes de pared aportan $4(0{,}06^2 + 0{,}02^2)/2 = 0{,}008\,\mathrm{J}$ y el central aporta $2(-0{,}08)^2/2 = 0{,}0064\,\mathrm{J}$. El total es $0{,}0644\,\mathrm{J}$.

Las contribuciones modales son $E_+ = 1(0{,}20^2 + 4\cdot 0{,}02^2) = 0{,}0416\,\mathrm{J}$ y $E_- = 1(0{,}10^2 + 8\cdot 0{,}04^2) = 0{,}0228\,\mathrm{J}$. Su suma recupera el mismo total. Cada una es constante porque su coordenada satisface una ecuación escalar independiente. La energía cinética de cada carro y la potencial de cada resorte cambian durante la evolución; esos intercambios componen las constantes modales.

5. Leer una envolvente

Aquí $\delta = 0{,}12\,\mathrm{s^{-1}}$ y $\bar{\omega} = 2{,}06\,\mathrm{s^{-1}}$. El primer cero de la envolvente de x_1 ocurre en $\tau = \pi/\delta = 25\pi/3\,\mathrm{s}$, aproximadamente $26{,}18\,\mathrm{s}$. El retorno de los módulos ocurre a $2\pi/\delta = 50\pi/3\,\mathrm{s}$, aproximadamente $52{,}36\,\mathrm{s}$.

En τ, $x_1 = 0$, pero al derivar el producto queda $\dot{x}_1 = -A\delta\cos(\bar{\omega}\tau)/2$. El ángulo rápido es $103\pi/6$, cuyo coseno vale $-\sqrt{3}/2$. Así, $\dot{x}_1 = 0{,}0015\sqrt{3}\,\mathrm{m/s}$, aproximadamente $0{,}00260\,\mathrm{m/s}$. El carro cruza el equilibrio con velocidad positiva. El cero de la envolvente determina un evento del registro de posición; la velocidad calculada completa su interpretación física.

6. Inferir los tres resortes

El perfil conjunto identifica $\omega_+ = 2$ y el opuesto identifica $\omega_- = 3$. Por tanto, $k = m\omega_+^2 = 2\,\mathrm{N/m}$ y $\kappa = m(\omega_-^2 - \omega_+^2)/2 = 1{,}25\,\mathrm{N/m}$. Ambos parámetros son positivos y corresponden al aparato supuesto.

Sujetar el segundo carro fija un extremo del resorte central: el primero recibe una fuerza $-(k+\kappa)x_1$. Su frecuencia es $\sqrt{(k+\kappa)/m} = \sqrt{6{,}5}\,\mathrm{s^{-1}}$, aproximadamente $2{,}55\,\mathrm{s^{-1}}$. Esa tercera medición utiliza una condición de apoyo nueva y contrasta la predicción obtenida con los parámetros ajustados.

7. La ortogonalidad que usan las masas

El determinante es $(4-\lambda)(6-2\lambda) - 4 = 2(\lambda-2)(\lambda-5)$. Para $\lambda_1 = 2$, la primera fila da $\phi_1^{(1)} = \phi_1^{(2)}$; para $\lambda_2 = 5$, da $\phi_2^{(1)} = -2\phi_2^{(2)}$. Tomamos los perfiles $(1,1)$ y $(-2,1)$. Sus normas de masas al cuadrado son tres y seis en valores numéricos SI. La normalización divide por $\sqrt{3}$ y $\sqrt{6}$.

El producto euclídeo de los perfiles elegidos es -1 y el de masas es cero. Las frecuencias son $\sqrt{2}$ y $\sqrt{5}\,\mathrm{s^{-1}}$. Los resortes se reconstruyen leyendo el término cruzado: $\kappa = 2\,\mathrm{N/m}$, $k_1 = 4 - 2 = 2\,\mathrm{N/m}$ y $k_2 = 6 - 2 = 4\,\mathrm{N/m}$. La asimetría de las masas y las paredes explica que el perfil opuesto tenga amplitudes diferentes.

8. Soltar la masa ligera

La proyección de masas da $\eta_1(0) = A/\sqrt{3}$, $\eta_2(0) = -2A/\sqrt{6}$ y derivadas nulas. Multiplicar cada coseno por su perfil reconstruye

$$x_1 = \frac{A}{3}\cos\sqrt{2}t + \frac{2A}{3}\cos\sqrt{5}t, \qquad x_2 = \frac{A}{3}(\cos\sqrt{2}t - \cos\sqrt{5}t).$$

Las energías son $E_1 = \lambda_1\eta_1(0)^2/2 = (1\,\mathrm{N/m})A^2/3$ y $E_2 = \lambda_2\eta_2(0)^2/2 = 5(1\,\mathrm{N/m})A^2/3$. Su razón es $E_2/E_1 = 5$. La suma es $2(1\,\mathrm{N/m})A^2$, igual a $K_{11}A^2/2$. Las unidades de los coeficientes modales normalizados incorporan la raíz de masa; conservarlas convierte cada producto en joules cuando A se expresa en metros.

9. Coordenadas que mezclan posiciones

La relación es $x = By$, con $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Sustituir en las energías, antes de escribir ecuaciones, da

$$M_y = B^{\mathsf{T}} M B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\,\mathrm{kg}, \qquad K_y = B^{\mathsf{T}} K B = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}\,\mathrm{N/m}.$$

Los términos cruzados conservan la participación de $\dot{y}_1$ en ambas velocidades cartesianas. El determinante numérico es $\lambda^2 - 12\lambda + 32 = (\lambda - 4)(\lambda - 8)$, de modo que se recuperan las frecuencias originales. El perfil conjunto se transforma en $(1, 0)$ y el opuesto en $(1, -2)$. Su producto de masas es $(1,0)M_y(1,-2)^{\mathsf{T}} = 0$. Cambiar coordenadas conserva la dinámica y cambia la forma en que la energía registra las direcciones.

10. Una traslación que sigue libre

Sean $R = (2x_1 + 3x_2)/5$ y $r = x_2 - x_1$, la extensión adicional del resorte. La cancelación de fuerzas internas da $\ddot{R} = 0$. Restar aceleraciones da $\ddot{r} + 6(1/2 + 1/3)r = 0$, es decir, $\ddot{r} + 5r = 0$. Los datos son $R(0) = -0{,}02\,\mathrm{m}$, $\dot{R}(0) = 0{,}4\,\mathrm{m/s}$, $r(0) = -0{,}2\,\mathrm{m}$, $\dot{r}(0) = 0$.

Por tanto, en valores SI, $R = -0{,}02 + 0{,}4t$ y $r = -0{,}2\cos\sqrt{5}t$. La reconstrucción es $x_1 = R - 3r/5 = -0{,}02 + 0{,}4t + 0{,}12\cos\sqrt{5}t$ y $x_2 = R + 2r/5 = -0{,}02 + 0{,}4t - 0{,}08\cos\sqrt{5}t$. Se recuperan las dos posiciones y velocidades iniciales. El perfil nulo $(1, 1)$ transporta el centro de masa uniformemente y mantiene la extensión del resorte. La oscilación relativa tiene frecuencia $\sqrt{5}\,\mathrm{s}^{-1}$ y masa reducida $6/5\,\mathrm{kg}$.

11. Tres masas y dos resortes

El potencial es $[(x_2 - x_1)^2 + (x_3 - x_2)^2]/2$ en unidades SI. Sus derivadas proporcionan

$$K = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\,\mathrm{N/m}.$$

Multiplicar por $(1, 1, 1)^{\mathsf{T}}$ da cero; multiplicar por $(1, 0, -1)^{\mathsf{T}}$ devuelve ese mismo vector; multiplicar por $(1, -2, 1)^{\mathsf{T}}$ devuelve tres veces el vector. Son tres direcciones independientes, con valores 0, 1 y $3\,\mathrm{s}^{-2}$ y frecuencias oscilatorias 1 y $\sqrt{3}\,\mathrm{s}^{-1}$. Las normas euclídeas son $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ y $\sqrt{6}$, respectivamente, y el factor de masa completa su normalización física.

El primer perfil representa traslación de la cadena. En el segundo, las masas extremas se desplazan en sentidos opuestos y los dos resortes ejercen sobre la central fuerzas iguales y opuestas. La masa central puede permanecer quieta durante todo ese modo. El tercero desplaza conjuntamente los extremos y la central en sentido contrario, con el doble de amplitud.

12. Dos modos con igual frecuencia

Cada coordenada satisface $\ddot{x}_i + 4x_i = 0$ en valores SI. La expresión propuesta suma el modo de perfil $(1,0)$ con amplitud $A\cos 2t$ y el de perfil $(0,1)$ con amplitud $A\sin 2t$. Su trayectoria cumple $x_1^2 + x_2^2 = A^2$: recorre una circunferencia con rapidez constante $2A$ por segundo.

Todo vector del plano es autovector del mismo valor $4\,\mathrm{s}^{-2}$, de modo que cualquier base ortonormal de masas sirve para descomponerlo. La trayectoria circular necesita dos coeficientes temporales con diferencia de fase. Un solo perfil real fijo describiría una recta de movimiento. La degeneración de frecuencias conserva la separación en una base elegida y permite varias elecciones igualmente válidas de esa base.

13. Una curvatura que permite salir

Las direcciones $(1,1)$ y $(1,-1)$ tienen valores -1 y $3\,\mathrm{s}^{-2}$. La preparación dada participa sólo en la primera. Su solución es $x(t) = \varepsilon \cosh t\,(1,1)$, tomando t numérico en segundos. Satisface los datos y crece en módulo como $|\varepsilon| e^t/2$ a tiempos grandes.

Sobre $x = a(1,1)$, el potencial cuadrático vale $U = -a^2$ en las unidades elegidas. Alejarse en esa dirección disminuye el potencial y la fuerza acelera la salida. Cualquier tolerancia fija de posición se supera para datos iniciales suficientemente pequeños pero distintos de cero, si se espera el tiempo correspondiente. La conclusión se refiere al modelo lineal; en un aparato real debe respetarse el intervalo en que la fuerza utilizada representa el mecanismo.

14. Cuando desaparece la restauración lineal

Las fuerzas son $-\alpha x_i^3$ y el Hessiano en el origen es cero. La aproximación lineal satisface $\ddot{x} = 0$, que permite derivas para velocidades iniciales distintas de cero. El sistema exacto conserva

$$E = \frac{m}{2}\|\dot{x}\|^2 + \frac{\alpha}{4}(x_1^4 + x_2^4).$$

De $x_1^4 + x_2^4 \geq (x_1^2 + x_2^2)^2/2$ se sigue $\|x\| \leq (8E/\alpha)^{1/4}$ y $\|\dot{x}\| \leq (2E/m)^{1/2}$. Para tolerancias de posición $a > 0$ y velocidad $b > 0$, basta elegir la energía inicial estrictamente menor que $\min(\alpha a^4/8, m b^2/2)$. Por continuidad de E y por $E(0,0) = 0$, una vecindad inicial suficientemente pequeña cumple esa condición. Las dos cotas se mantienen para toda la trayectoria.

Las ecuaciones son suaves y los subniveles de energía son acotados y cerrados; las soluciones permanecen en un conjunto compacto de estados y se prolongan para todo tiempo futuro. Hemos demostrado estabilidad del equilibrio exacto mediante sus términos cuárticos. El Hessiano registra la ausencia de restauración de primer orden; el potencial completo suministra la barrera que controla el movimiento.

15. Amortiguamiento proporcional a la masa

Al multiplicar por S^{T}, el término viscoso se transforma en $S^{\mathsf{T}} C S \dot{\eta} = \gamma \dot{\eta}$. Las ecuaciones son $\ddot{\eta}_1 + \dot{\eta}_1 + 2\eta_1 = 0$ y $\ddot{\eta}_2 + \dot{\eta}_2 + 5\eta_2 = 0$ en las unidades fijadas. Sus exponentes son $(-1 \pm i\sqrt{7})/2$ y $(-1 \pm i\sqrt{19})/2$ por segundo. Ambos modos oscilan con envolvente $e^{-t/2}$, y la energía total satisface $\dot{E} = -\dot{x}^{\mathsf{T}} C \dot{x} \leq 0$.

Con un solo amortiguador, los perfiles del problema 7 dan un coeficiente cruzado numérico $-2c/\sqrt{18}$ en $S^{\mathsf{T}} C S$, con las unidades correspondientes a la normalización. Esa entrada multiplica la velocidad del otro coeficiente modal. La base que separaba masa y rigidez sigue representando el estado, pero las ecuaciones viscosas conservan un acoplamiento. La proporcionalidad a M era la hipótesis que eliminaba precisamente esa mezcla.

16. Forzar un carro y observar el otro

Sumar y restar las fuerzas produce $\ddot{Q}_\pm+\omega_\pm^2 Q_\pm = F\cos\Omega t/(2m)$. Una respuesta particular es

$$Q_\pm^{\mathrm{p}} = \frac{F}{2m(\omega_\pm^2-\Omega^2)}\cos\Omega t.$$

La suma de coeficientes que determina x_1^{p} se anula cuando $\Omega^2=(\omega_+^2+\omega_-^2)/2 = 6\,\mathrm{s}^{-2}$. La diferencia da $x_2^{\mathrm{p}} = -(F/\kappa)\cos\Omega t = -0{,}05\cos(\sqrt{6}t)\,\mathrm{m}$. Aunque el primer carro permanece en su equilibrio, el resorte central transmite una fuerza que compensa instantáneamente la excitación.

En el modelo sin disipación, la solución general añade los dos modos libres. Para observar exclusivamente esta respuesta se prepara $x_1(0)=0$, $x_2(0)=-0{,}05\,\mathrm{m}$ y velocidades nulas, tomando la fuerza con la fase de coseno indicada. Otros datos conservan oscilaciones libres. En $\Omega = 2$ o $\sqrt{8}\,\mathrm{s}^{-1}$ el denominador respectivo se anula y hay que resolver una respuesta resonante con término secular.

17. Un reloj que confunde frecuencias

La frecuencia $\omega' = \omega + 2\pi/\Delta t = \omega + 20\pi\,\mathrm{s}^{-1}$ produce $\cos(\omega' n\Delta t) = \cos(\omega n\Delta t + 2\pi n) = \cos(\omega n\Delta t)$ para todo entero n. Todas las lecturas coinciden, aun con precisión ideal y una serie arbitrariamente larga en esos instantes.

Puede distinguirse esa pareja mediante registros en tiempos intermedios elegidos para que la diferencia de fase deje de ser un múltiplo de vuelta completa. Para identificar una frecuencia entre todas las alternativas se necesita además un rango previo justificado y una pauta temporal adecuada a ese rango, o mediciones adicionales de velocidad y del movimiento entre muestras. La repetición exacta de registros preserva su precisión; el diseño temporal decide qué frecuencias permiten inferir.

18. El paso temporal y el modo más rápido

Con el estado ordenado como (η, v), la matriz es

$$B_h = \begin{pmatrix} 1-h^2\omega^2 & h \\ -h\omega^2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det B_h = 1, \quad \operatorname{tr} B_h = 2-h^2\omega^2.$$

Para $0<h\omega<2$, sus autovalores son distintos, conjugados y de módulo uno: el polinomio es $z^2-(2-h^2\omega^2)z+1$ y su discriminante es negativo. La diagonalización compleja conserva una cota para todas las potencias y, por tanto, para todos los datos iniciales. Si $h\omega>2$, los autovalores son reales recíprocos y uno tiene módulo mayor que uno. En $h\omega=2$ ambos son -1, pero $B_h\neq -I$; el bloque doble produce crecimiento lineal de algunas iteradas.

Para que todos los modos positivos queden acotados se impone $0<h<2/\omega_{\mathrm{máx}}$. En el problema 7 resulta $0<h<2/\sqrt{5}\,\mathrm{s}$, aproximadamente $0<h<0{,}8944\,\mathrm{s}$. El extremo superior es un supremo excluido. Esta condición controla acotación del algoritmo; la precisión de fase y amplitud requiere comparar pasos menores y el estado exacto cuando se conoce.

19. Una prueba con producto ordinario

En los valores SI, $M^{-1}K = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ es una matriz con entradas cruzadas distintas. La aplicación directa del teorema espectral euclídeo exige una simetría que esa matriz carece en esas coordenadas. Los perfiles del problema 7 confirman el resultado geométrico: su producto euclídeo es -1.

Sea $A = M^{-1}K$. Para cualesquiera u, v,

$$\langle u, Av\rangle_M = u^{\mathsf{T}} K v = \langle Au, v\rangle_M,$$

pues K y M son simétricas. Si $Au = \lambda u$ y $Av = \mu v$, la identidad da $(\mu - \lambda)\langle u, v\rangle_M = 0$. Para valores distintos se obtiene ortogonalidad de masas. La conjugación $M^{1/2} A M^{-1/2} = M^{-1/2} K M^{-1/2}$ produce la matriz simétrica euclídea que utiliza la prueba general del capítulo.

20. Cotas y contraste de una identificación

Las frecuencias son positivas, por lo que elevarlas al cuadrado conserva el orden. Para el resorte de pared,

$$k \in [0{,}5(1{,}99)^2, 0{,}5(2{,}01)^2] = [1{,}98005, 2{,}02005]\,\mathrm{N/m}.$$

El acoplamiento aumenta con la frecuencia rápida y disminuye con la lenta. Admitiendo todas las combinaciones,

$$\kappa \in \frac{1}{4}[(2{,}99)^2 - (2{,}01)^2, (3{,}01)^2 - (1{,}99)^2] = [1{,}225, 1{,}275]\,\mathrm{N/m}.$$

Estas bandas son envolventes individuales válidas. Una frecuencia lenta mayor aumenta k y, para una misma rápida, disminuye κ; conservar las dos frecuencias mantiene esa dependencia entre parámetros. Una región rectangular de cotas individuales admite combinaciones adicionales.

Para contrastar los perfiles, se desplazan ambos carros por igual y se sueltan con velocidades nulas, registrando $x_1 - x_2$ durante varios ciclos. Después se prepara la disposición opuesta y se registra $x_1 + x_2$. El aparato simétrico predice cero para esas combinaciones en los respectivos ensayos. Las tolerancias deben incluir la preparación, las calibraciones y el muestreo de ambos sensores. Una discrepancia persistente motiva revisar masas, apoyos, rozamiento y linealidad. Esos ensayos aportan información sobre el modelo mediante proporciones que las dos frecuencias usadas para ajustar sus rigideces dejaban abiertas.

21. Dos movimientos detrás de un mismo registro

Las frecuencias son $\omega_+ = 2\,\mathrm{s}^{-1}$ y $\omega_- = 2\sqrt{2}\,\mathrm{s}^{-1}$. La primera preparación tiene $Q_+(0) = Q_-(0) = A/2$; la segunda tiene $Q_+(0) = A/2$, $Q_-(0) = 0$. En ambas las velocidades iniciales son cero. Por tanto, expresando t en segundos,

$$x_1^{(a)} = \frac{A}{2}[\cos(2t) + \cos(2\sqrt{2}\,t)], \quad x_2^{(a)} = \frac{A}{2}[\cos(2t) - \cos(2\sqrt{2}\,t)],$$
$$x_1^{(b)} = \frac{A}{2}\cos(2t), \qquad\qquad x_2^{(b)} = \frac{A}{2}\cos(2t).$$

El promedio de ambas parejas es exactamente $y = (A/2)\cos(2t)$. El sensor conserva el movimiento conjunto y elimina la participación opuesta. Podemos añadir a Q_- cualquier solución $B\cos(\omega_- t) + C\sin(\omega_- t)$ manteniendo $Q_+ = (A/2)\cos(\omega_+ t)$, y obtenemos el mismo registro. Las preparaciones compatibles tienen $x(0) = (A/2 + B, A/2 - B)$ y $\dot{x}(0) = (\omega_- C, -\omega_- C)$.

La energía modal vale

$$E = \frac{k A^2}{4} + m\omega_-^2 (B^2 + C^2).$$

Para las dos preparaciones concretas, $E_a = 1{,}2 \times 10^{-3}\,\mathrm{J}$ y $E_b = 4 \times 10^{-4}\,\mathrm{J}$. En el modelo lineal ideal, el registro permite energías sin cota superior al variar B, C. En un aparato físico, las amplitudes admisibles siguen sujetas al intervalo lineal de los resortes y a las distancias disponibles. La pérdida de información subsiste dentro de cualquier intervalo que admita más de una de estas preparaciones.

Añadir $z = x_1$ permite reconstruir $x_1 = z$ y $x_2 = 2y - z$ en cada instante. Si ambas lecturas tienen errores absolutos acotados por ε, la cota directa para el segundo carro es 3ε. Mantener la relación entre ambas lecturas permite afinarla cuando se conocen dependencias de calibración, como en el capítulo 0.

Con parámetros exactos, el registro de $z = x_1$ solo también permite recuperar los dos modos mediante la proposición, pues ambos coeficientes valen uno. En este caso $\omega_-^2 - \omega_+^2 = 4\,\mathrm{s}^{-2}$, y las fórmulas son $Q_+ = (\ddot{z} + \omega_-^2 z)/(\omega_-^2 - \omega_+^2)$ y $Q_- = z - Q_+$. Las velocidades iniciales se obtienen derivando, lo que introduce la tercera derivada de z. La información temporal exacta contiene los cuatro datos; estimar esas derivadas a partir de lecturas perturbadas exige un control de ruido y de muestreo que la identidad algebraica deja abierto.

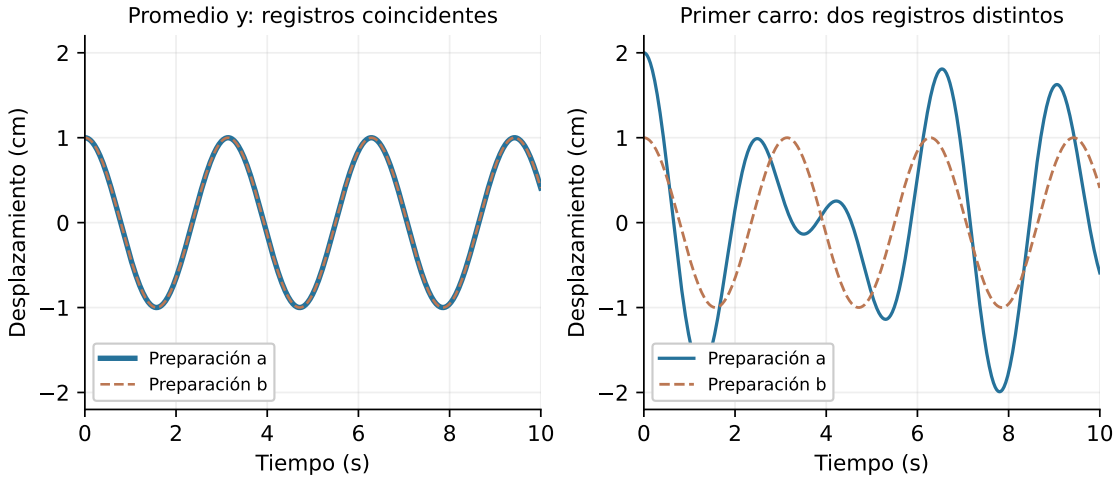


Figura 20.8. En el panel izquierdo coinciden los promedios de las dos preparaciones, aunque sus energías son distintas. El derecho conserva la lectura del primer carro y distingue los movimientos. Las curvas son soluciones exactas del modelo lineal; se muestran diez segundos del registro continuo.

Lecturas y relaciones

Spivak, *Physics for Mathematicians. Mechanics I*, capítulo 8, pp. 302–307, desarrolla el paso desde dos osciladores a sus perfiles y a la modulación; el capítulo 14, pp. 476–481, sitúa la separación en la aproximación de pequeñas oscilaciones y el problema generalizado de masas y rigideces. Aquí las ecuaciones se construyen primero desde Newton y las formas de energía; la formulación lagrangiana se desarrolla en los capítulos siguientes.

Sears–Zemansky, Young y Freedman, *Física universitaria*, volumen 1, §14.3, pp. 445–447, permite cotejar la contabilidad energética del oscilador; §15.8, pp. 495–496, amplía la idea de perfil a una cuerda. Serway–Jewett, *Física para ciencias e ingeniería*, volumen 1, §17.7, pp. 469–471, desarrolla la lectura temporal de los batimientos. La identidad trigonométrica compartida sirve aquí para interpretar las posiciones de dos carros cuyas fuerzas están acopladas.

El apunte *MEC Resumen Oscilaciones Acopladas con Lagrangeano*, conservado en la biblioteca de problemas, ofrece una familia de dos masas libres y un resorte con modo de traslación. Esa familia se retoma con masas distintas y reconstrucción desde datos iniciales. Los problemas, datos, demostraciones y figuras de este capítulo se desarrollaron para esta redacción.

Capítulo 21

Trabajo virtual, coordenadas generalizadas y acción

Un péndulo obliga a elegir entre dos descripciones de la misma posición. En el plano podemos dar sus coordenadas x, y y exigir que permanezcan sobre una circunferencia. También podemos dar el ángulo que forma la varilla con la vertical. La primera descripción conserva dos ecuaciones de Newton y la fuerza desconocida que ejerce la varilla; la segunda conserva directamente la posición admisible mediante un solo número. Encontrar la ecuación de ese ángulo requiere entender qué parte de las ecuaciones originales decide el movimiento a lo largo de la circunferencia.

La fuerza de la varilla actúa en dirección radial. Si proyectamos sobre la tangente, su contribución es cero, mientras que la gravedad conserva una componente que hace variar el ángulo. Esta operación permite resolver el movimiento antes de calcular la reacción. En un aparato de muchas partículas, repetir una proyección tangencial para cada vínculo puede resultar laborioso. El trabajo virtual organizará esas proyecciones y conducirá a una ecuación para cada coordenada independiente.

Después aparecerá una segunda descripción de las mismas ecuaciones. Una integral construida con las energías asignará un número a cada trayectoria de comparación. Calcular cómo cambia ese número cuando se deforma la trayectoria permitirá reconocer la ecuación de movimiento. Las deformaciones tendrán sus extremos fijados, y sus primeras variaciones se anularán sobre el movimiento físico. El cálculo explicará con precisión el contenido de esa afirmación.

Elegir posiciones que satisfacen los vínculos

Tomemos N partículas de masas constantes $m_a > 0$, observadas en un marco inercial. Sus posiciones cartesianas son $\mathbf{r}_a$, con $a = 1, \dots, N$. Para un péndulo de longitud ℓ, con el origen en su soporte y el eje vertical orientado hacia arriba, el vínculo es $x^2 + y^2 = \ell^2$. Una parametrización útil cerca del punto inferior es

$$\mathbf{r}(\theta) = (\ell \sin\theta, -\ell\cos\theta).$$

El ángulo es adimensional y su derivada tiene unidades de tiempo inverso. La velocidad resulta de derivar la posición: $\dot{\mathbf{r}} = \ell(\cos\theta, \sin\theta)\dot{\theta}$. De ahí se obtiene $T = m\ell^2\dot{\theta}^2/2$. El coeficiente $m\ell^2$ incorpora la geometría del recorrido: una misma velocidad angular produce una velocidad lineal mayor al aumentar la longitud.

Definición. Un conjunto regular de vínculos holónomos es un sistema de relaciones $f_\alpha(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0$ cuyos gradientes respecto de las posiciones son linealmente independientes en la región considerada. Unas coordenadas generalizadas locales son parámetros independientes $q = (q_1, \dots, q_n)$ que describen de manera suave e invertible esa región de configuraciones admisibles mediante $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_a(q, t)$, con diferencial de rango n respecto de q.

Con s restricciones independientes, la dimensión local es $n = 3N - s$. En un problema plano puede comenzarse directamente con sus dos coordenadas cartesianas por partícula y descontar las restricciones adicionales. La palabra local importa: un ángulo representa adecuadamente un arco y puede continuarse a lo largo de un movimiento, aunque posiciones separadas por una vuelta completa coincidan físicamente. Para representar el estado se necesitan también las velocidades $\dot{q}$.

Los vínculos admiten dependencia explícita del tiempo. Si el soporte del péndulo tiene una posición horizontal prescrita $a(t)$, escribimos

$$\mathbf{r}(\theta, t) = (a(t) + \ell \sin\theta, -\ell\cos\theta).$$

Su velocidad es la suma de dos contribuciones, una debida a la variación del ángulo y otra al movimiento impuesto del soporte. Para cualquier parametrización,

$$\dot{\mathbf{r}}_a = \sum_i \mathbf{r}_{a,i}\dot{q}_i + \mathbf{r}_{a,t}, \qquad \mathbf{r}_{a,i} = \frac{\partial \mathbf{r}_a}{\partial q_i}, \quad \mathbf{r}_{a,t} = \frac{\partial \mathbf{r}_a}{\partial t}.$$

En estas derivadas parciales se mantienen fijas las demás variables. En una derivada temporal a lo largo de la trayectoria cambian a la vez $q(t)$ y t.

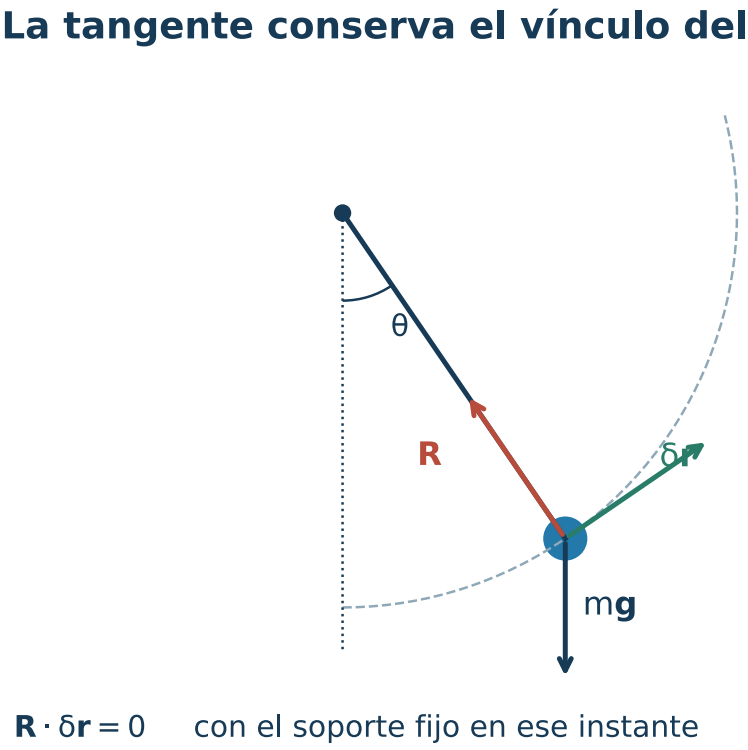


Figura 21.1. El perfil tangente se obtiene al derivar la posición respecto del ángulo. La reacción radial tiene producto escalar cero con ese perfil.

Comparar posiciones en un mismo instante

Imaginemos que detenemos el reloj mientras comparamos dos posiciones admisibles del péndulo. Un pequeño cambio de ángulo produce, a primer orden, una separación tangente a la circunferencia. El soporte permanece en la posición que tiene en ese instante, incluso cuando su movimiento posterior está prescrito. Esta comparación fija el significado de la variación que usaremos.

Definición. Un desplazamiento virtual admisible en un instante fijo es una variación tangente a la configuración permitida en ese instante. En coordenadas generalizadas tiene la forma $\delta\mathbf{r}_a = \sum_i \mathbf{r}_{a,i}\delta q_i$, con incrementos independientes δq_i. El trabajo virtual de fuerzas $\mathbf{F}_a$ es la forma lineal $\delta W = \sum_a \mathbf{F}_a \cdot \delta\mathbf{r}_a = \sum_i Q_i \delta q_i$, donde $Q_i = \sum_a \mathbf{F}_a \cdot \mathbf{r}_{a,i}$ es la fuerza generalizada conjugada a q_i.

Cada producto $Q_i\delta q_i$ tiene unidades de energía. Para una coordenada de longitud, Q_i tiene unidades de fuerza; para un ángulo, tiene unidades de torque. La independencia de los δq_i permitirá identificar por separado cada coeficiente de una igualdad de trabajos virtuales.

Un desplazamiento real durante dt contiene además $\mathbf{r}_{a,t}dt$. Por eso una reacción puede tener trabajo virtual cero y transmitir energía cuando el soporte se mueve. Una cuenta que conserve esa contribución decidirá cuándo puede usarse la conservación de energía del sistema de partículas.

Definición. Un conjunto de reacciones de vínculo $\mathbf{R}_a$ es ideal cuando su trabajo virtual total satisface $\sum_a \mathbf{R}_a \cdot \delta\mathbf{r}_a = 0$ para todo desplazamiento virtual admisible.

Una guía lisa ejerce una reacción normal a sus direcciones tangentes y cumple esta condición. Las tensiones internas de una cuerda ideal pueden cumplirla por cancelación entre sus extremos. La idealidad se refiere al conjunto completo de reacciones y a los desplazamientos permitidos. Al introducir fricción, sus componentes tangenciales deben conservarse como fuerzas activas. Para un contacto unilateral, primero se determina el tramo de movimiento en que se mantiene el contacto; una reacción calculada con signo físicamente inadmisible exige cambiar ese modelo de vínculos.

La energía cinética conserva la geometría

Para vínculos fijos, $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_a(q)$, sustituir las velocidades en la energía cinética da una forma cuadrática,

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j} G_{ij}(q)\dot q_i \dot q_j, \qquad G_{ij}(q) = \sum_a m_a \mathbf{r}_{a,i}\cdot\mathbf{r}_{a,j}.$$

Proposición. La matriz G es simétrica y definida positiva en una carta regular. Si los vínculos dependen del tiempo, la energía cinética tiene la forma $T = \tfrac12 \dot q^{\mathsf T} G \dot q + \sum_i b_i \dot q_i + c$, con $b_i = \sum_a m_a \mathbf{r}_{a,i}\cdot\mathbf{r}_{a,t}$ y $c = \tfrac12 \sum_a m_a \|\mathbf{r}_{a,t}\|^2$.

Demostración. La simetría procede del producto escalar. Para cualquier vector z,

$$z^{\mathsf T} G z = \sum_a m_a \left\| \sum_i \mathbf{r}_{a,i} z_i \right\|^2 .$$

Si esta suma es cero, la positividad de las masas obliga a que cada vector interior sea cero. El diferencial de la parametrización tiene rango n, de modo que su núcleo es $\{0\}$ y se obtiene $z = 0$. Por tanto, la forma es estrictamente positiva para $z \neq 0$. En el caso dependiente del tiempo, expandir el cuadrado de $\sum_i \mathbf{r}_{a,i}\dot q_i + \mathbf{r}_{a,t}$ produce los tres términos anunciados. $\square$

La matriz de masas del capítulo 20 reaparece como el caso de una geometría cinética constante. En coordenadas curvilíneas, G puede variar con la posición. Esa variación tendrá consecuencias dinámicas: en coordenadas polares, por ejemplo, $T = m(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2)/2$ conserva explícitamente el cambio de longitud de un arco al variar el radio.

Proyectar Newton mediante el trabajo virtual

Escribamos las fuerzas activas como una parte potencial y una parte adicional,

$$m_a \ddot{\mathbf{r}}_a = -\nabla_a U + \mathbf{F}_a^{\mathrm{ad}} + \mathbf{R}_a .$$

El potencial puede depender del tiempo y se expresa en coordenadas generalizadas por composición con $\mathbf{r}_a(q,t)$. Multiplicar cada ecuación por un desplazamiento virtual y sumar elimina el trabajo total de las reacciones ideales. Resulta

$$\sum_a (m_a \ddot{\mathbf{r}}_a + \nabla_a U - \mathbf{F}_a^{\mathrm{ad}}) \cdot \delta \mathbf{r}_a = 0.$$

Esta igualdad es la forma de d'Alembert del balance dinámico para los vínculos considerados. Su origen está en Newton y en la hipótesis física de idealidad. Para evaluarla necesitamos expresar la proyección de la aceleración con las derivadas de T.

Proposición. Con parametrizaciones suficientemente suaves, reacciones ideales y $L(q,\dot q,t) = T(q,\dot q,t) - U(q,t)$, la proyección de Newton equivale a

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^{\mathrm{ad}}, \qquad Q_i^{\mathrm{ad}} = \sum_a \mathbf{F}_a^{\mathrm{ad}} \cdot \mathbf{r}_{a,i}.$$

Demostración. La velocidad depende de $\dot q_i$ con coeficiente $\mathbf{r}_{a,i}$, así que $\partial T/\partial \dot q_i = \sum_a m_a \dot{\mathbf{r}}_a \cdot \mathbf{r}_{a,i}$. Al derivar esta expresión a lo largo del movimiento aparecen dos términos,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i} = \sum_a m_a \ddot{\mathbf{r}}_a \cdot \mathbf{r}_{a,i} + \sum_a m_a \dot{\mathbf{r}}_a \cdot \frac{d\mathbf{r}_{a,i}}{dt}.$$

El segundo se cancelará con $\partial T/\partial q_i$. Para verlo, la conmutación de derivadas parciales da $\partial \dot{\mathbf{r}}_a/\partial q_i = d\mathbf{r}_{a,i}/dt$, incluyendo el término $\partial_t \mathbf{r}_{a,i}$ cuando el soporte se mueve. Por tanto,

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_a m_a \dot{\mathbf{r}}_a \cdot \frac{d\mathbf{r}_{a,i}}{dt}, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_a m_a \ddot{\mathbf{r}}_a \cdot \mathbf{r}_{a,i}.$$

La regla de la cadena da $\partial U/\partial q_i = \sum_a \nabla_a U \cdot \mathbf{r}_{a,i}$. Sustituir ambas identidades en el balance virtual y usar la independencia de los δq_i produce cada ecuación anunciada. Recíprocamente, esas ecuaciones anulan la proyección sobre todos los desplazamientos tangentes. El residuo cartesiano define entonces reacciones ideales compatibles con Newton. $\square$

La ecuación determina el movimiento en las coordenadas elegidas. Para recuperar una tensión o una reacción normal se vuelve a Newton con la trayectoria calculada. La descripción reducida conserva así la posibilidad de preguntar por las fuerzas que mantienen el vínculo.

En el péndulo fijo, $U = -mg\ell\cos\theta$ y $T = m\ell^2\dot\theta^2/2$. Las derivadas dan $m\ell^2\ddot\theta + mg\ell\sin\theta = 0$. La ecuación angular tiene unidades de torque. Dividir por $m\ell^2$ produce $\ddot\theta + (g/\ell)\sin\theta = 0$, cuya reducción de pequeño ángulo ya se estudió. Toda esta construcción conserva el seno exacto del modelo de varilla rígida.

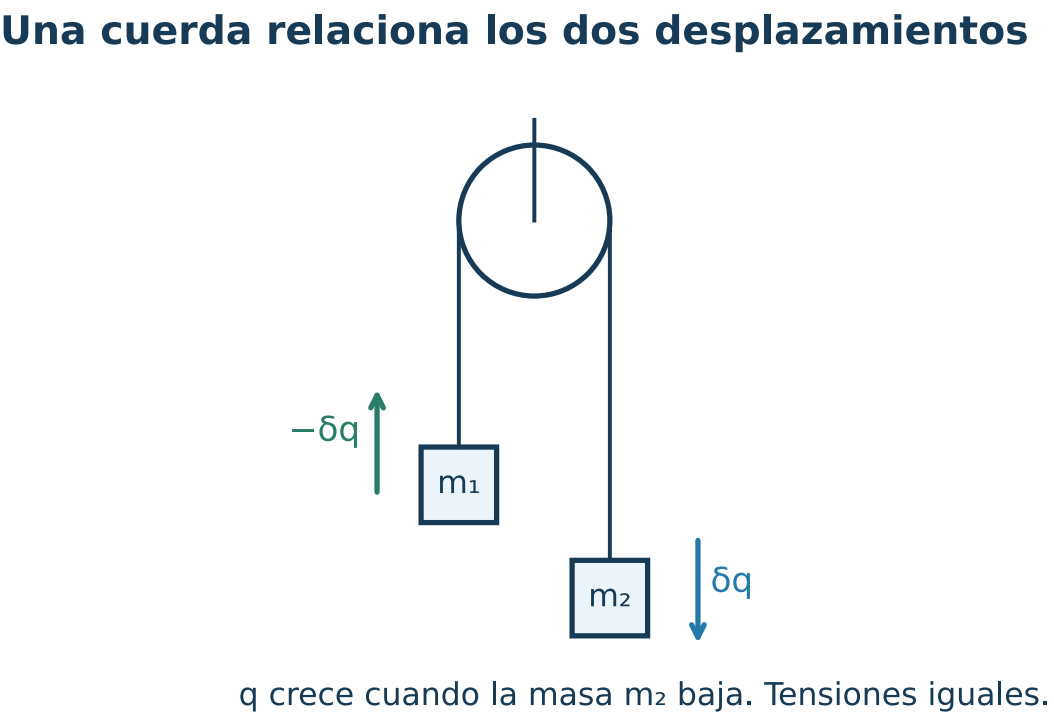


Figura 21.2. Una cuerda inextensible relaciona los desplazamientos de las masas. Al elegir una coordenada, las velocidades y la energía cinética deben incorporar esa relación.

Variar una trayectoria completa

La proyección anterior compara posiciones posibles en cada instante. También podemos comparar curvas completas que empiezan y terminan en posiciones fijadas a tiempos fijados. Para ello se toma una curva $q(t)$ y una función de prueba $\eta(t)$ que vale cero en ambos extremos, y se considera $q_\varepsilon(t) = q(t) + \varepsilon\eta(t)$. El parámetro ε etiqueta las curvas comparadas. A lo largo de cada curva sigue transcurriendo el tiempo t.

Definición. Para un lagrangiano L, la acción de una trayectoria en $[t_0, t_1]$ es $S[q] = \int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot q(t), t)\, dt$. Una trayectoria es estacionaria con extremos fijos cuando la primera variación $\delta S[q;\eta] = dS[q+\varepsilon\eta]/d\varepsilon|_{\varepsilon=0}$ vale cero para toda variación suave η con $\eta(t_0) = \eta(t_1) = 0$ que permanezca en la carta para ε suficientemente pequeño.

La acción tiene unidades de energía multiplicada por tiempo: $\mathrm{J\,s} = \mathrm{kg\,m^2/s}$. La estacionariedad es una condición sobre la derivada respecto del parámetro de variación. Una curva minimizante satisface además una desigualdad frente a sus competidoras; esa propiedad requiere un argumento adicional.

Proposición. Para L de clase C^2 y una trayectoria q de clase C^2, contenida en una carta abierta durante un intervalo compacto, la estacionariedad con extremos fijos equivale a las ecuaciones de Euler–Lagrange $d(\partial L/\partial \dot q_i)/dt - \partial L/\partial q_i = 0$.

Demostración. Derivar dentro de la integral, usando la regularidad sobre un entorno compacto de la curva, da

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\eta_i + \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot\eta_i \right) dt.$$

La integración por partes coloca todo el interior en función de η y conserva un término de borde,

$$\delta S = \left[\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\eta_i\right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right)\eta_i \, dt.$$

Los valores extremos fijados anulan el corchete. Si se cumplen las ecuaciones, la integral es cero para toda variación. Para la implicación recíproca, llamemos $h_i(t)$ al coeficiente continuo de η_i. Si fuera positivo en un punto interior, sería positivo en un intervalo más pequeño. Podemos elegir allí una función suave, positiva en parte del intervalo y con soporte contenido en él, y tomar las otras componentes cero. La integral sería positiva, contradiciendo la estacionariedad. Si el coeficiente fuera negativo, la misma construcción produciría una integral negativa. Todos los coeficientes son, pues, cero en el interior; la continuidad extiende la igualdad a los extremos. □

Una función de prueba con el soporte requerido se obtiene trasladando y reescalando $\exp[-1/(1-s^2)]$ para $|s|<1$, prolongada por cero para $|s|\ge 1$. La prueba anterior explica por qué disponer de todas las variaciones, incluidas las muy localizadas, permite recuperar una ecuación en cada instante.

Para un sistema conservativo con vínculos ideales holónomos, la acción estacionaria reproduce las ecuaciones obtenidas de Newton. Los datos iniciales de posición y velocidad siguen siendo la preparación habitual para predecir un movimiento. Los extremos fijos de la prueba organizan la comparación entre trayectorias y no prescriben una manera de preparar el experimento. Con fuerzas adicionales, la ecuación equivalente es $\delta S + \int \sum_i Q_i^{\mathrm{ad}} \eta_i \, dt = 0$; el caso de acción estacionaria ordinaria corresponde a fuerzas adicionales de proyección cero.

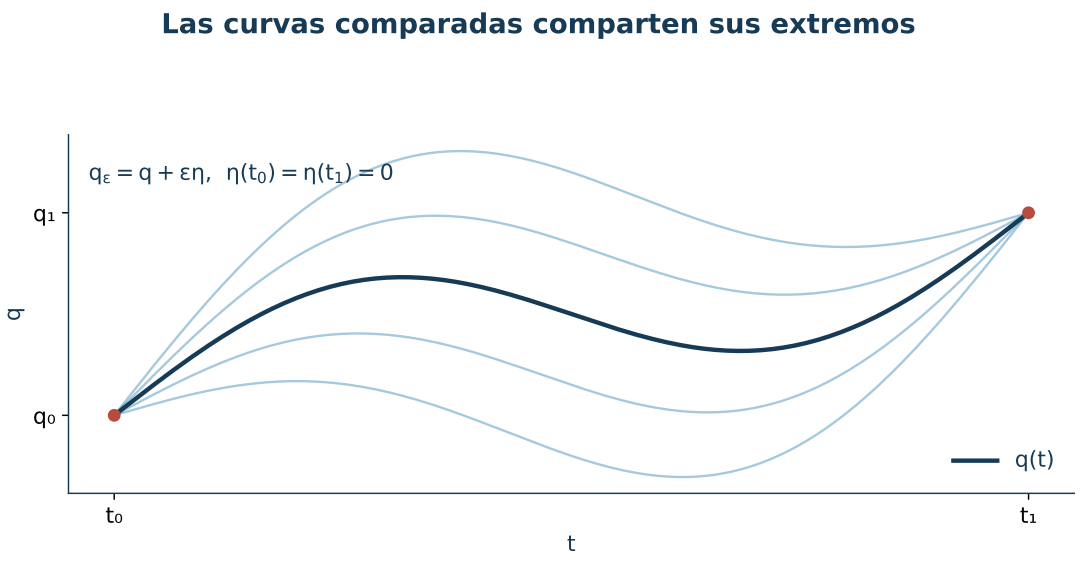


Figura 21.3. Una familia de curvas comparte sus posiciones en los tiempos extremos. El parámetro de comparación cambia la curva completa; la coordenada horizontal sigue representando el tiempo.

El término de borde y la elección del lagrangiano

Una fuerza potencial depende de derivadas del potencial. Añadirle una constante conserva las ecuaciones y cambia la acción en una constante común a todas las curvas del intervalo. La libertad es algo más amplia y se entiende conservando el término de borde que acaba de aparecer.

Proposición. Si $G(q,t)$ es una función suave, los lagrangianos L y $L' = L + dG/dt = L + \sum_i G_{q_i}\dot{q}_i + G_t$ tienen las mismas trayectorias estacionarias con extremos fijos.

Demostración. Para cada curva, el teorema fundamental del cálculo da $S'[q] - S[q] = G(q(t_1),t_1) - G(q(t_0),t_0)$. En la familia de variaciones permitida, ambos valores de borde permanecen fijos. La primera variación de su diferencia es cero, de modo que $\delta S' = \delta S$. La equivalencia con Euler–Lagrange prueba también la igualdad de las ecuaciones de movimiento. □

La función G tiene unidades de acción. Aunque las trayectorias coincidan, las cantidades $p_i = \partial L/\partial \dot{q}_i$ cambian a $p_i' = p_i + G_{q_i}$. Para interpretar un momento generalizado se conserva la definición de L que se está usando. Con extremos libres, el término de borde entra en las condiciones variacionales y debe examinarse de nuevo.

La diferencia entre estacionariedad y mínimo ya puede verse en un solo oscilador. Para $L = m(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2)/2$, la trayectoria $x = 0$ satisface la ecuación. Entre 0 y un tiempo $\tau > 0$, la curva comparada $x_\varepsilon = \varepsilon A \sin(\pi t/\tau)$ tiene los mismos extremos y cumple

$$S[x_\varepsilon] - S[0] = \frac{m\varepsilon^2 A^2 \tau}{4}\left[\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2 - \omega^2\right].$$

Cuando $\tau > \pi/\omega$, esta diferencia es negativa. A la vez, variaciones de frecuencia suficientemente alta dan diferencias positivas. La trayectoria estacionaria tiene entonces direcciones de ambos signos. El resultado surge de integrar dos cuadrados y permite precisar la afirmación antes de introducir herramientas de segundo orden más generales.

El cambio de acción puede tener ambos signos

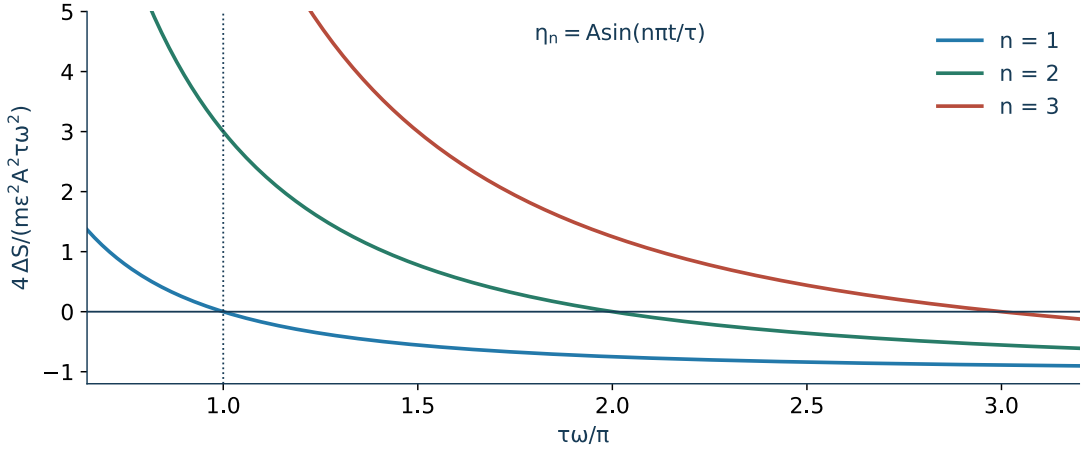


Figura 21.4. Para variaciones sinusoidales del oscilador, el signo del cambio cuadrático de acción depende de la duración y de la frecuencia de la variación.

La partícula libre permite ir un paso más allá y usar la acción para controlar una trayectoria de comparación. Si sus extremos están fijados, la recta de velocidad constante ofrece una

referencia con la que medir cuánto cuesta una desviación. La diferencia de acciones reúne el cuadrado de la velocidad de esa desviación, y de allí se obtiene también una cota de posición.

Proposición (acción y distancia a la recta libre). Para una partícula libre de masa $m > 0$ en $\mathbb{R}^d$, sean $\tau > 0$ y $x_*(t) = x_0 + (x_1 - x_0)t/\tau$. Toda curva x de clase C^1 con esos extremos tiene exceso de acción $\Delta S = S[x] - S[x_*] \geq 0$ y satisface

$$\|x(t) - x_*(t)\|^2 \leq \frac{2\Delta S}{m}\frac{t(\tau - t)}{\tau}, \qquad \sup_{0\leq t\leq \tau} \|x(t) - x_*(t)\| \leq \sqrt{\frac{\tau \Delta S}{2m}}.$$

Demostración. Escribamos $\eta = x - x_*$, con $\eta(0) = \eta(\tau) = 0$. Al expandir la energía cinética, el término cruzado integra la velocidad constante de la recta multiplicada por $\int_0^\tau \dot\eta\, dt = 0$. Por tanto, $\Delta S = (m/2)\int_0^\tau \|\dot\eta\|^2 dt$. La información de ambos extremos puede conservarse en una sola identidad:

$$\eta(t) = \frac{\tau - t}{\tau}\int_0^t \dot\eta(s)\, ds - \frac{t}{\tau}\int_t^\tau \dot\eta(s)\, ds.$$

La desigualdad de Cauchy–Schwarz aplicada a esta integral vectorial acota su norma al cuadrado por el producto de $\int_0^\tau \|\dot\eta\|^2 ds$ y el cuadrado integrado de sus coeficientes. Este último es $t(\tau - t)^2/\tau^2 + (\tau - t)t^2/\tau^2 = t(\tau - t)/\tau$. Sustituir el exceso de acción prueba la cota puntual. Su factor temporal alcanza $\tau/4$ en el punto medio, lo que da la cota uniforme. □

La estimación tiene unidades de longitud y cuantifica la proximidad de toda la curva a la recta. Su uso requiere un exceso de acción acotado para una curva con los extremos especificados; si esa cantidad se estima a partir de medidas, sus errores entran en el certificado. La primera variación identifica las ecuaciones; esta desigualdad adicional aprovecha la forma cuadrática y positiva de la acción libre. El ejercicio 12 desarrolla el mínimo y aplica el control a una trayectoria aproximada.

Distinguir la integral energética del trabajo del soporte

Definamos $\mathcal{E} = \sum_i \dot q_i\, \partial L/\partial \dot q_i - L$. Su derivada permite decidir cuándo es constante y cómo se relaciona con las energías físicas.

Proposición. A lo largo de una solución de Euler–Lagrange con fuerzas adicionales,

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \sum_i Q_i^{\mathrm{ad}} \dot q_i - \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Para vínculos fijos, energía cinética cuadrática homogénea en las velocidades y potencial independiente de ellas, se cumple $\mathcal{E} = T + U$.

Demostración. Al derivar la definición, los términos $\ddot q_i\, \partial L/\partial \dot q_i$ se cancelan con los correspondientes en dL/dt. Queda

$$\dot{\mathcal{E}} = \sum_i \dot q_i \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial t},$$

que produce la identidad al sustituir las ecuaciones. En el caso indicado, $\partial L/\partial \dot q_i = \sum_j G_{ij}\dot q_j$, por lo que $\sum_i \dot q_i \partial L/\partial \dot q_i = 2T$. Sustituir $L = T - U$ da $\mathcal{E} = T + U$. □

Para una geometría impuesta dependiente del tiempo, $T = \tfrac12 \dot q^{\mathsf T} G \dot q + b\cdot \dot q + c$ produce $\mathcal{E} = \tfrac12 \dot q^{\mathsf T} G \dot q - c + U$. La diferencia respecto de $T + U$ exige conservar la energía transferida por el aparato que impone el movimiento. Un aro que gira con velocidad prescrita puede tener un lagrangiano reducido independiente del tiempo y una integral $\mathcal{E}$ constante, mientras su motor transmite energía a la partícula. El ejercicio 8 desarrolla ambas cuentas.

Las coordenadas elegidas deben seguir describiendo una región regular y las reacciones deben satisfacer la idealidad usada. Las restricciones expresadas sólo mediante relaciones

de velocidades requieren examinar su integrabilidad y su principio dinámico antes de variar curvas con este procedimiento. Los ejemplos que siguen mantienen explícitas las ecuaciones geométricas de posición; las reacciones se recuperan cuando hacen falta para decidir el régimen físico.

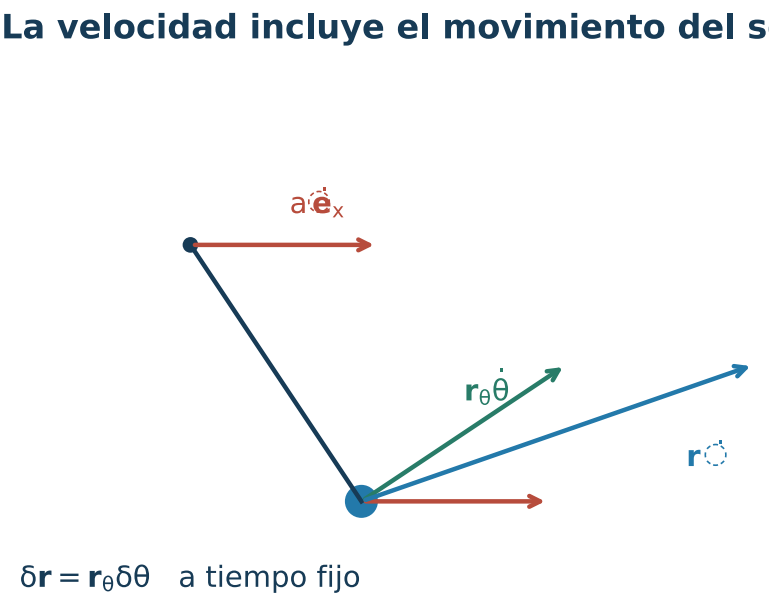


Figura 21.5. La variación virtual mantiene fijo el soporte en un instante. La velocidad física incluye además el movimiento impuesto del apoyo.

Ejercicios

Use masas positivas, gravedad uniforme y unidades SI. Las cuerdas se suponen inextensibles y sin masa; las poleas de los ejercicios 4 y 5 tienen masa despreciable y ejes lisos. Las guías son bilaterales y lisas. Declare el sentido de cada coordenada antes de derivar velocidades.

1. La proyección que elimina la tensión

Para $\mathbf{r}(\theta) = (\ell \sin\theta, -\ell\cos\theta)$, calcule el desplazamiento virtual y el trabajo virtual de la gravedad. Deduzca la ecuación angular mediante la proyección de Newton. Explique cómo se recupera la tensión de una cuerda tensa.

2. Una guía parabólica

Una masa m se mueve en la guía $y = x^2/(2a)$, con $a > 0$ y vertical ascendente. Use $q = x$. Construya T, U, deduzca la ecuación exacta y determine la frecuencia de pequeñas oscilaciones en el fondo. Calcule la reacción en el fondo cuando la rapidez allí es v.

3. Dos escalas para un mismo plano inclinado

Una masa desliza por un plano fijo de ángulo $\alpha \in (0, \pi/2)$. Describa su posición mediante la distancia s descendente sobre el plano y después mediante su descenso vertical $h = s\sin\alpha$. Derive las dos ecuaciones y compare sus fuerzas generalizadas.

4. Resolver Atwood y recuperar la tensión

Dos masas $m_1 = 2$ y $m_2 = 3$ cuelgan de una polea fija. Tome q descendente para la segunda masa y $g = 10$. Obtenga la aceleración usando L y recupere la tensión con Newton. Verifique la cancelación de los trabajos virtuales de las tensiones.

5. Una polea móvil cambia la masa efectiva

Un extremo de una cuerda está fijo al techo; la cuerda baja, rodea una polea móvil que sostiene una masa total m, sube sobre una polea fija y termina en una masa M. Si q mide hacia abajo la posición de la polea móvil y z la de M, se cumple $2q + z = C$. Deduzca la aceleración de q y la tensión. Evalúe con $m = 3$, $M = 1$ y $g = 10$.

6. Preparar el estado del péndulo

Use $m = 1$, $\ell = 0{,}5$ y $g = 10$. En un instante se tiene $\theta = 0{,}2$ rad y $\dot\theta = 1\,\mathrm{s}^{-1}$. Calcule la aceleración angular, la tensión y la energía referida al punto inferior. Compare con la aceleración del modelo de pequeño ángulo.

7. Un soporte con aceleración horizontal

Para el péndulo de soporte $a(t)$, construya T, U, L y deduzca la ecuación exacta de θ. Para $a(t) = A\cos\Omega t$, obtenga la ecuación lineal en θ y declare la escala de la fuerza omitida en esa reducción.

8. Un aro giratorio y dos energías

Una cuenta se desliza por un aro vertical de radio R que gira con velocidad angular prescrita Ω alrededor de su diámetro vertical. El ángulo θ se mide desde el punto inferior y el azimut es Ωt. Deduzca la ecuación de θ, la integral $\mathcal{E}$ y la energía física $E = T + U$. Halle los equilibrios y su estabilidad lineal para $\Omega^2 = 2g/R$. Calcule la potencia transmitida a la cuenta.

9. El origen de los términos polares

Para una partícula plana con potencial central $U(r)$ y $r > 0$, derive las ecuaciones en (r, φ) desde T. Identifique el momento angular conservado. Explique el origen del término $r\dot\varphi^2$ y el dominio de las coordenadas.

10. Una coordenada que se vuelve singular

Para una partícula libre sobre el eje, considere $q = x^3$. Exprese T y la ecuación para $q \neq 0$. Transforme la trayectoria $x(t) = vt$ y examine qué sucede al cruzar el origen. Compare con las condiciones de una carta regular.

11. Un vínculo móvil tiene velocidad y variación distintas

Una cuenta de masa m está sobre una recta horizontal cuya altura se prescribe como $y = a(t)$. Use $q = x$ y gravedad uniforme. Calcule la reacción vertical, su potencia, δW_R, E y $\mathcal{E}$. Compruebe el balance para cualquier función suave $a(t)$.

12. El mínimo de acción de una partícula libre

Con $L = m\dot x^2/2$, extremos $x(0) = 0$, $x(\tau) = b$ y $\tau > 0$, deduzca la trayectoria estacionaria. Demuestre directamente que minimiza la acción frente a cualquier curva de clase C^1 con los mismos extremos y encuentre el valor mínimo. Suponga después $m = 1\,\mathrm{kg}$, $\tau = 2\,\mathrm{s}$ y $b = 0{,}4\,\mathrm{m}$. Una curva de comparación de clase C^1 comparte esos extremos y se ha certificado $S[x] \le 0{,}0401\,\mathrm{kg\,m^2/s}$. Obtenga una cota uniforme para su distancia a la trayectoria libre. Declare qué dato necesita ese certificado.

13. Una trayectoria estacionaria con variaciones de ambos signos

Para el oscilador del texto, use $\eta_n(t) = A\sin(n\pi t/\tau)$. Calcule exactamente $S[\varepsilon\eta_n] - S[0]$. Muestre que si $\tau > \pi/\omega$ hay variaciones con cambio negativo y otras con cambio positivo, por pequeñas que sean sus amplitudes.

14. Añadir una derivada total

Parta de $L = m\dot{x}^2/2 - U(x)$ y tome $G(x,t) = ctx$, con c constante de unidades apropiadas. Halle L', la ecuación de movimiento, el momento p' y $\mathcal{E}'$. Compruebe qué permanece igual con extremos fijos.

15. Un potencial que recibe energía desde afuera

Para $L = m\dot{x}^2/2 - k(t)x^2/2$, con k suave, derive la ecuación y el balance energético. Evalúe la potencia instantánea cuando $x = 0{,}1\,\mathrm{m}$ y $\dot{k} = 2\,\mathrm{N\,m^{-1}s^{-1}}$. Explique qué parte del aparato controla esa energía.

16. Mantener la fuerza de rozamiento

Un oscilador fijo tiene fuerza adicional $F^{\mathrm{ad}} = -b\dot{x}$, con $b > 0$. Deduzca su ecuación y el balance de energía usando fuerzas generalizadas. Escriba la identidad variacional correspondiente y compruebe su signo.

17. El péndulo doble conecta con los modos

Dos masas iguales m cuelgan en serie de varillas de longitud ℓ y masa despreciable. Los ángulos absolutos desde la vertical inferior son θ_1, θ_2. Construya la energía cinética exacta. Reduzca alrededor del equilibrio inferior y halle las matrices de masa y rigidez, las frecuencias y dos razones de amplitud.

18. Una guía helicoidal

Una cuenta se mueve sobre $\mathbf{r}(q) = (R\cos q, R\sin q, hq)$, con $R > 0$ y $h > 0$. Derive la ecuación bajo gravedad, su solución para datos $q(0) = q_0$, $\dot{q}(0) = u_0$ y el balance de energía. Interprete las unidades de la masa generalizada.

19. Fuerza tangencial sobre una circunferencia

Una cuenta está en una circunferencia horizontal fija de radio ℓ y recibe una fuerza tangencial de módulo constante $F > 0$ en sentido creciente de θ. Halle Q_θ, el movimiento desde reposo y el trabajo entre dos ángulos. Determine si existe un potencial monovaluado de esa fuerza en la circunferencia completa.

20. Una guía radial que hace trabajo

Una cuenta en un plano horizontal tiene radio prescrito $r = a(t) > 0$ y ángulo libre θ. La guía ejerce una reacción radial R_r y permite movimiento tangencial liso. Construya L, halle el momento angular, recupere R_r y compruebe $\dot{E} = R_r\dot{a}$. Explique el trabajo virtual de la reacción.

Soluciones

1. La proyección que elimina la tensión

Derivar respecto del ángulo da $\delta\mathbf{r} = \ell(\cos\theta, \sin\theta)\delta\theta$. El peso $(0, -mg)$ tiene trabajo $-mg\ell\sin\theta\,\delta\theta$. La tensión radial tiene producto escalar cero con la tangente. Al derivar la velocidad, la proyección de la aceleración sobre $\mathbf{r}_\theta$ vale $\ell^2\ddot{\theta}$: el término centrípeto queda perpendicular a esa dirección. La ecuación proyectada es $m\ell^2\ddot{\theta} = -mg\ell\sin\theta$.

Para recuperar la tensión $\mathcal{T}$, use el vector radial exterior $\mathbf{e}_r = (\sin\theta, -\cos\theta)$. La componente radial de la aceleración vale $-\ell\dot{\theta}^2$ y la del peso vale $mg\cos\theta$. Newton da $-m\ell\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - \mathcal{T}$, de donde $\mathcal{T} = mg\cos\theta + m\ell\dot{\theta}^2$. Para una cuerda, se verifica $\mathcal{T} \geq 0$ durante el movimiento supuesto. Una varilla rígida bilateral admite también compresión.

2. Una guía parabólica

La elección $q = x$ incorpora el vínculo mediante $\mathbf{r}(q) = (q, q^2/(2a))$. Así, $\|\dot{\mathbf{r}}\|^2 = (1 + q^2/a^2)\dot{q}^2$ y

$$T = \frac{m}{2}\left(1 + \frac{q^2}{a^2}\right)\dot{q}^2, \qquad U = \frac{mgq^2}{2a}.$$

Al calcular $d(\partial T/\partial\dot{q})/dt$ aparecen $m(1 + q^2/a^2)\ddot{q} + 2mq\dot{q}^2/a^2$. Restar $\partial T/\partial q = mq\dot{q}^2/a^2$ deja

$$\left(1 + \frac{q^2}{a^2}\right)\ddot{q} + \frac{q}{a^2}\dot{q}^2 + \frac{g}{a}q = 0.$$

La linealización del estado $(q, \dot{q}) = (0, 0)$ es $\ddot{q} + (g/a)q = 0$, con frecuencia $\sqrt{g/a}$. El término geométrico depende de posición y velocidad y debe conservarse para movimientos amplios. En el fondo la curvatura es $1/a$, dirigida hacia arriba: $\ddot{y} = v^2/a$. Newton vertical da $R_y - mg = mv^2/a$, por lo que $R_y = m(g + v^2/a)$. La reacción aparece después de resolver o conocer el estado.

3. Dos escalas para un mismo plano inclinado

Tomando el potencial cero en $s = 0$, se tiene $U = -mgs\sin\alpha$ y $T = m\dot{s}^2/2$. La fuerza generalizada es $Q_s = mg\sin\alpha$ y la ecuación $\ddot{s} = g\sin\alpha$. Con $h = s\sin\alpha$,

$$T = \frac{m}{2\sin^2\alpha}\dot{h}^2, \qquad U = -mgh, \qquad \frac{m}{\sin^2\alpha}\ddot{h} = mg.$$

La aceleración vertical es $\ddot{h} = g\sin^2\alpha$, igual a $\ddot{s}\sin\alpha$. Aunque ambas coordenadas tienen unidades de longitud, sus fuerzas generalizadas difieren: $Q_h = mg$. El trabajo coincide porque $Q_s\delta s = Q_h\delta h$. También se transforma la masa cinética; usar $m\ddot{h} = mg$ perdería la geometría del plano.

4. Resolver Atwood y recuperar la tensión

La segunda masa tiene desplazamiento descendente q y la primera el opuesto. Sus velocidades tienen igual módulo, así que $T = (m_1 + m_2)\dot{q}^2/2$. El potencial es $U = (m_1 - m_2)gq$ más una constante. Resulta $(m_1 + m_2)\ddot{q} = (m_2 - m_1)g$, y para los datos $\ddot{q} = 2\,\mathrm{m/s^2}$. La masa más pesada baja.

Para la primera masa, que acelera hacia arriba, $\mathcal{T} - m_1 g = m_1\ddot{q}$; por tanto, $\mathcal{T} = 24\,\mathrm{N}$. La segunda verifica $m_2 g - \mathcal{T} = m_2\ddot{q}$. El trabajo virtual de la tensión sobre la masa 2 es $-\mathcal{T}\delta q$ y sobre la masa 1 es $+\mathcal{T}\delta q$. Su suma es cero. La cancelación depende de la igualdad de tensiones y de la relación geométrica de los desplazamientos, ambas incluidas en el modelo ideal.

5. Una polea móvil cambia la masa efectiva

El vínculo proporciona $z = C - 2q$ y $\dot z = -2\dot q$. La masa móvil y su polea se incluyen en m. Entonces

$$T = \frac{1}{2}(m + 4M)\dot q^2, \qquad U = -mgq - Mgz = (2M - m)gq + \text{constante}.$$

La ecuación es $(m + 4M)\ddot q = (m - 2M)g$. El factor cuatro proviene del cuadrado de la velocidad de M; el factor dos del potencial procede del desplazamiento. Con los datos, $\ddot q = 10/7\,\mathrm{m/s^2}$ y $\ddot z = -20/7\,\mathrm{m/s^2}$.

La polea móvil recibe dos tensiones ascendentes, así que $m\ddot q = mg - 2\mathcal{T}$. Se obtiene $\mathcal{T} = 90/7\,\mathrm{N}$. La otra masa cumple $M\ddot z = Mg - \mathcal{T}$ y da el mismo valor. El trabajo virtual total es $-2\mathcal{T}\delta q - \mathcal{T}\delta z = 0$. Las aceleraciones se han deducido del vínculo antes de usar la dinámica, lo que evita asignarles por error igual módulo.

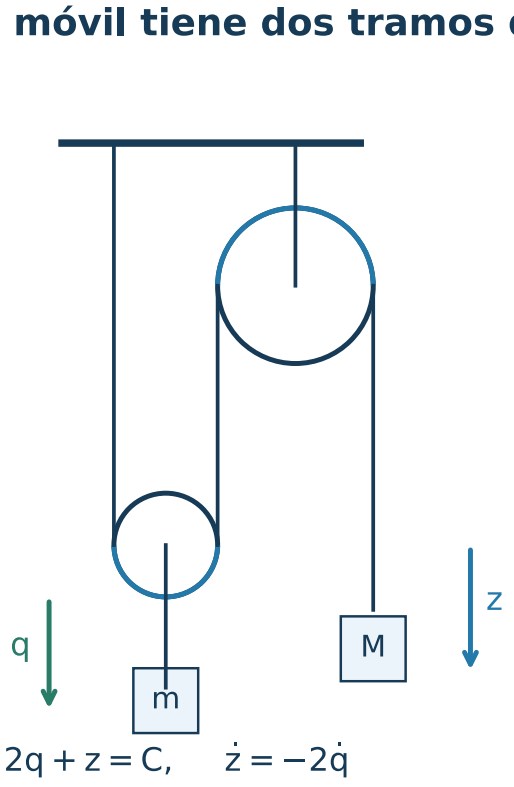


Figura 21.6. La coordenada descendente de la polea móvil modifica dos tramos de cuerda; el extremo libre debe recorrer el doble de distancia en sentido opuesto.

6. Preparar el estado del péndulo

La ecuación exacta da $\ddot\theta = -20\sin 0{,}2 \approx -3{,}9733866\,\mathrm{s^{-2}}$. La aproximación lineal daría $-4\,\mathrm{s^{-2}}$; la diferencia absoluta es $0{,}0266134\,\mathrm{s^{-2}}$, aproximadamente un 0,670% del módulo exacto. La tensión es $10\cos 0{,}2 + 0{,}5 \approx 10{,}3006658\,\mathrm{N}$ y mantiene la cuerda tensa en ese instante.

Con cero de potencial abajo, $E = m\ell^2\dot\theta^2/2 + mg\ell(1 - \cos\theta) = 0{,}125 + 5(1 - \cos 0{,}2) \approx 0{,}2246671\,\mathrm{J}$. El estado incluye el ángulo y la velocidad angular; omitir la segunda perdería tanto energía como información necesaria para la tensión. La pequeña diferencia entre aceleraciones mide la reducción del seno en ese estado, dentro del péndulo ideal.

7. Un soporte con aceleración horizontal

Derivar las dos componentes de posición produce

$$T = \frac{m}{2}\left[\dot a^2 + 2\ell\dot a\cos\theta\dot\theta + \ell^2\dot\theta^2\right], \qquad U = -mg\ell\cos\theta.$$

El momento conjugado es $\partial L/\partial\dot\theta = m\ell\dot a\cos\theta + m\ell^2\dot\theta$. Al derivarlo aparecen $m\ell\ddot a\cos\theta - m\ell\dot a\sin\theta\dot\theta + m\ell^2\ddot\theta$. El término $-m\ell\dot a\sin\theta\dot\theta$ coincide con la contribución de $\partial T/\partial\theta$ y se cancela. Queda

$$\ddot\theta + \frac{g}{\ell}\sin\theta = -\frac{\ddot a}{\ell}\cos\theta.$$

Para la oscilación prescrita, la reducción es $\ddot\theta + (g/\ell)\theta = (A\Omega^2/\ell)\cos\Omega t$. Al sustituir $\sin\theta$ por θ se omiten términos de escala $(g/\ell)|\theta|^3$; al sustituir el coseno por uno, de escala $(|A|\Omega^2/\ell)\theta^2$. La amplitud de la solución debe sostener esas comparaciones durante el intervalo de uso. Cerca de resonancia, un desplazamiento pequeño del soporte puede dejar de producir ángulos pequeños después de suficiente tiempo.

8. Un aro giratorio y dos energías

Las coordenadas cartesianas son $(R\sin\theta\cos\Omega t, R\sin\theta\sin\Omega t, -R\cos\theta)$. Su derivada da

$$T = \frac{mR^2}{2}(\dot\theta^2 + \Omega^2\sin^2\theta), \quad U = -mgR\cos\theta, \quad \ddot\theta = (\Omega^2\cos\theta - g/R)\sin\theta.$$

El lagrangiano reducido es independiente de t, y por ello se conserva

$$\mathcal{E} = \frac{mR^2}{2}\dot\theta^2 - \frac{mR^2\Omega^2}{2}\sin^2\theta - mgR\cos\theta.$$

La energía física cumple $E = \mathcal{E} + mR^2\Omega^2\sin^2\theta$. Al derivar,

$$\dot E = 2mR^2\Omega^2\sin\theta\cos\theta\dot\theta.$$

Es la potencia transmitida por el aparato que mantiene el giro. También se obtiene con el momento angular vertical $J_z = mR^2\Omega\sin^2\theta$: el torque del motor sobre la cuenta vale $\dot J_z$ y su potencia es $\Omega\dot J_z$.

Los equilibrios tienen $\sin\theta = 0$ o $\cos\theta = g/(R\Omega^2)$. Para $\Omega^2 = 2g/R$, el punto inferior $\theta = 0$ tiene perturbación $\ddot\eta = (g/R)\eta$ y es linealmente inestable. El superior $\theta = \pi$ cumple $\ddot\eta = (3g/R)\eta$ y también es inestable. Los dos puntos $\theta = \pm\pi/3$ cumplen $\ddot\eta = -(3g/(2R))\eta$ y son linealmente estables. La conservación de $\mathcal{E}$ concuerda con un mínimo local de su potencial efectivo en estos últimos; la cuenta física E incluye el intercambio con el motor.

9. El origen de los términos polares

Con $L = m(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2)/2 - U(r)$, las dos ecuaciones son

$$m\ddot r - mr\dot\varphi^2 = -U'(r), \qquad \frac{d}{dt}(mr^2\dot\varphi) = 0.$$

La segunda conserva $J = mr^2\dot\varphi$, el momento angular perpendicular al plano. El término $mr\dot\varphi^2$ procede de derivar la energía cinética respecto del radio. Geométricamente corresponde a la parte radial de la aceleración al cambiar la dirección del vector velocidad. Para J fijado puede sustituirse $\dot\varphi = J/(mr^2)$ en la ecuación radial. Las coordenadas cubren regiones con $r > 0$ y una elección local de ángulo; un paso por el origen requiere cambiar de carta. El fallo angular allí pertenece a la representación.

10. Una coordenada que se vuelve singular

Para $q \neq 0$, $x = q^{1/3}$ y $\dot{x} = \dot{q}/(3q^{2/3})$, con potencias reales. De ahí

$$T = \frac{m}{18} q^{-4/3} \dot{q}^2, \qquad \ddot{q} - \frac{2}{3q}\dot{q}^2 = 0.$$

La derivación usa $d(q^{-4/3}\dot{q})/dt$ y conserva el término que queda al restar $\partial T/\partial q$. La recta libre $x = vt$ se transforma en $q = v^3 t^3$, que satisface esa ecuación para $t \neq 0$. En $q = 0$ su coeficiente cinético diverge y la forma escrita deja de estar definida. El mapa $x \mapsto x^3$ tiene derivada cero en el origen, y su inversa tiene derivada ilimitada allí; por eso falta la invertibilidad suave exigida para una carta regular. El movimiento cartesiano atraviesa el punto con velocidad finita. La regularidad de la trayectoria física se conserva usando x.

11. Un vínculo móvil tiene velocidad y variación distintas

Las velocidades son $(\dot{q}, \dot{a})$ y los desplazamientos virtuales $(\delta q, 0)$. Newton vertical da $R_y = m(\ddot{a} + g)$, con trabajo virtual cero y potencia $P_R = m(\ddot{a} + g)\dot{a}$. Horizontalmente, $\ddot{q} = 0$.

La energía física es $E = m(\dot{q}^2 + \dot{a}^2)/2 + mga$; su derivada es $m\dot{a}(\ddot{a} + g) = P_R$. El lagrangiano reducido es $L = m\dot{q}^2/2 + m\dot{a}^2/2 - mga$, por lo que $\mathcal{E} = m\dot{q}^2/2 - m\dot{a}^2/2 + mga$. Entonces $\dot{\mathcal{E}} = -m\dot{a}\ddot{a} + mg\dot{a} = -\partial L/\partial t$. Ambas identidades son válidas, y comparan cantidades distintas. La reacción vertical transmite exactamente la energía que gana la cuenta al cambiar su altura y su velocidad vertical.

12. El mínimo de acción de una partícula libre

Euler–Lagrange da $m\ddot{x} = 0$. Los extremos fijan $x_*(t) = bt/\tau$. Para cualquier competidora escriba $x = x_* + \eta$, con $\eta(0) = \eta(\tau) = 0$. Expandir el cuadrado da

$$S[x] - S[x_*] = \frac{mb}{\tau}\int_0^\tau \dot{\eta}\, dt + \frac{m}{2}\int_0^\tau \dot{\eta}^2\, dt = \frac{m}{2}\int_0^\tau \dot{\eta}^2\, dt \geq 0.$$

El primer término es cero por los extremos. La igualdad exige $\dot{\eta} = 0$ y, con los valores de borde, $\eta = 0$. La recta es el único mínimo en esta clase, y $S_{\mín} = mb^2/(2\tau)$. La prueba aporta una desigualdad global que la sola primera variación no proporcionaba. Para b en metros, las unidades son $\mathrm{kg\,m^2/s}$, las de acción.

Con los valores adicionales, $S[x_*] = mb^2/(2\tau) = 0{,}04\,\mathrm{kg\,m^2/s}$. La diferencia queda en $0 \leq \Delta S \leq 10^{-4}\,\mathrm{kg\,m^2/s}$. La proposición sobre distancia a la recta da

$$\sup_{0\leq t\leq 2\,\mathrm{s}} |x(t) - 0{,}2\,\mathrm{m/s}\,t| \leq \sqrt{\frac{(2\,\mathrm{s})(10^{-4}\,\mathrm{kg\,m^2/s})}{2(1\,\mathrm{kg})}} = 0{,}01\,\mathrm{m}.$$

Toda la curva queda a un centímetro o menos de la recta. La cota puntual se reduce hasta cero al acercarse a cualquiera de los extremos. El dato utilizado es una cota superior certificada de la acción, que en este modelo integra el cuadrado de la velocidad; la regularidad y los extremos comunes permiten la prueba. Un ajuste de posiciones por sí solo necesitaría justificar también esa cota de acción antes de usar el resultado como certificado.

13. Una trayectoria estacionaria con variaciones de ambos signos

En el intervalo completo, tanto $\sin^2(n\pi t/\tau)$ como $\cos^2(n\pi t/\tau)$ integran $\tau/2$. Por tanto,

$$S[\varepsilon\eta_n] - S[0] = \frac{m\varepsilon^2 A^2 \tau}{4}\left[\left(\frac{n\pi}{\tau}\right)^2 - \omega^2\right].$$

La expresión es exactamente cuadrática en ε, y su derivada en cero es cero para todo n. Si $\tau > \pi/\omega$, el caso $n = 1$ da cambio negativo. Al elegir un entero $n > \omega\tau/\pi$, se obtiene cambio

positivo. Para cada uno de estos dos valores fijados de n podemos hacer $|\varepsilon|$ tan pequeño como se quiera, también en una norma que controle posición y primera derivada. La trayectoria cero es, pues, estacionaria con direcciones de ambos signos. En el caso límite $\tau = \pi/\omega$, la primera familia tiene acción idéntica a cero para toda amplitud; ese hecho requiere su propio examen y no implica unicidad de extremos.

14. Añadir una derivada total

Se tiene $dG/dt = ct\dot{x} + cx$. Por ello $L' = m\dot{x}^2/2 - U(x) + ct\dot{x} + cx$. Sus derivadas son $\partial L'/\partial \dot{x} = m\dot{x} + ct$ y $\partial L'/\partial x = -U'(x) + c$. En Euler–Lagrange se cancelan los dos términos c y queda $m\ddot{x} = -U'(x)$.

El momento es $p' = m\dot{x} + ct$ y $\mathcal{E}' = m\dot{x}^2/2 + U(x) - cx = E - cx$. Si el potencial es fijo, E se conserva, mientras $\dot{\mathcal{E}}' = -c\dot{x} = -\partial L'/\partial t$. La diferencia entre acciones es $c[t_1 x(t_1) - t_0 x(t_0)]$, constante en la clase de extremos fijados. Las unidades de c son las de fuerza. Las trayectorias y la energía mecánica cartesiana mantienen su interpretación; los valores del momento conjugado y de la integral definida mediante L' reflejan el término de borde elegido.

15. Un potencial que recibe energía desde afuera

Euler–Lagrange da $m\ddot{x} + k(t)x = 0$. La energía $E = m\dot{x}^2/2 + k(t)x^2/2$ tiene derivada

$$\dot{E} = \dot{x}(m\ddot{x} + kx) + \frac{1}{2}\dot{k}x^2 = \frac{1}{2}\dot{k}x^2.$$

Coincide con $-\partial L/\partial t$. Para el dato indicado resulta $\dot{E} = 0{,}01\,\mathrm{W}$. El mecanismo que modifica la rigidez controla esa transferencia; el potencial ya depende de un parámetro externo prescrito. Un aumento de rigidez a desplazamiento distinto de cero eleva la energía del oscilador con esa cuenta. La fórmula evalúa la potencia instantánea, aunque la evolución posterior de x requiera resolver la ecuación con el historial de $k(t)$.

16. Mantener la fuerza de rozamiento

Con $L = m\dot{x}^2/2 - kx^2/2$ y $Q = -b\dot{x}$, se obtiene $m\ddot{x} + kx = -b\dot{x}$. La energía satisface $\dot{E} = Q\dot{x} = -b\dot{x}^2 \le 0$. La integral perdida entre dos instantes es $b\int \dot{x}^2 dt$, que representa energía transferida fuera de los grados de libertad modelados.

La identidad variacional es $\delta S + \int_0^\tau (-b\dot{x})\eta\, dt = 0$ para extremos fijos. En efecto, integrar por partes da $\delta S = -\int (m\ddot{x} + kx)\eta\, dt$, y la suma se anula precisamente cuando $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$. Mantener el signo del trabajo adicional permite recuperar tanto la ecuación como la disminución de energía. La acción mecánica ordinaria satisface esa identidad de trabajo añadido en presencia de la disipación.

17. El péndulo doble conecta con los modos

Las posiciones son $\mathbf{r}_1 = \ell(\sin\theta_1, -\cos\theta_1)$ y $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \ell(\sin\theta_2, -\cos\theta_2)$. Al sumar las energías de las dos masas,

$$T = \frac{m\ell^2}{2}\left[2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\cos(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right], \quad U = -mg\ell(2\cos\theta_1 + \cos\theta_2).$$

La aproximación cuadrática alrededor del reposo inferior produce

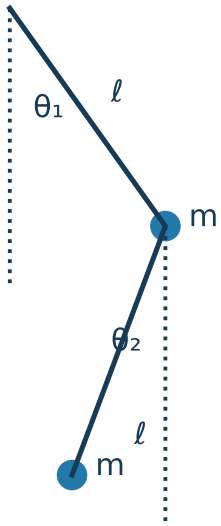
$$M = m\ell^2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad K = mg\ell\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Los términos cinéticos cruzados registran que el movimiento de la primera varilla arrastra ambas masas. Con $\mu = \omega^2\ell/g$, el determinante reducido es $(2-2\mu)(1-\mu) - \mu^2 = \mu^2 - 4\mu + 2$. Sus raíces son $2 \mp \sqrt{2}$, y

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{g}{\ell}(2 \mp \sqrt{2})}.$$

La segunda fila del problema generalizado da $-\mu\phi_1 + (1-\mu)\phi_2 = 0$. En el modo lento, $\phi_2/\phi_1 = \sqrt{2}$; en el rápido, $\phi_2/\phi_1 = -\sqrt{2}$. El primero mueve ambas varillas con ángulos del mismo signo y el segundo con signos opuestos. El cálculo usa la misma ortogonalidad ponderada por masa del capítulo 20, ahora con una matriz cinética cruzada derivada de la geometría. La aproximación describe estados cercanos al reposo inferior, con ángulos y velocidades de la escala pequeña de oscilación.

Dos ángulos absolutos para el péndulo doble



Cada ángulo se mide respecto de una vertical descendente.

Figura 21.7. Ambos ángulos son absolutos respecto de la vertical inferior. La velocidad de la segunda masa incorpora el movimiento de ambas varillas.

18. Una guía helicoidal

Derivar la posición da $\|\mathbf{r}_q\|^2 = R^2+h^2$. En consecuencia, $T = m(R^2+h^2)\dot{q}^2/2$ y $U = mghq$. La fuerza generalizada es $Q_q = -mgh$ y la ecuación

$$\ddot{q} = -\frac{gh}{R^2+h^2}, \qquad q(t) = q_0 + u_0 t - \frac{gh}{2(R^2+h^2)}t^2.$$

La derivada de $E = m(R^2+h^2)\dot{q}^2/2 + mghq$ es $\dot{q}[m(R^2+h^2)\ddot{q} + mgh] = 0$. El parámetro q es un ángulo adimensional; tanto R como h tienen unidades de longitud, y la masa generalizada $m(R^2+h^2)$ tiene unidades de momento de inercia. La guía fija transmite una reacción ortogonal a su tangente y realiza potencia cero. La solución se usa durante el tramo de guía disponible; un extremo material introduciría otro evento físico.

19. Fuerza tangencial sobre una circunferencia

El perfil $\mathbf{r}_\theta$ tiene módulo ℓ y dirección tangente creciente. Por ello $Q_\theta = F\ell$ y $m\ell^2\ddot{\theta} = F\ell$. Desde $\theta(0) = \theta_0$ y reposo,

$$\theta(t) = \theta_0 + \frac{F}{2m\ell}t^2, \qquad W = F\ell(\theta_b - \theta_a).$$

En un arco, el potencial local $U = -F\ell\theta$ reproduce la fuerza. Tras una vuelta, el trabajo vale $2\pi F\ell$. Un potencial monovaluado en toda la circunferencia tendría el mismo valor al empezar y terminar esa vuelta y produciría trabajo cero. El trabajo positivo calculado muestra que este campo sólo admite esos potenciales locales. El ángulo continuado registra las vueltas y el trabajo acumulado, aunque la posición cartesiana vuelva a coincidir. La fuente que aplica la fuerza aporta la energía cinética ganada.

20. Una guía radial que hace trabajo

La velocidad tiene componentes radial $\dot{a}$ y tangencial $a\dot{\theta}$, por lo que $L = m(\dot{a}^2 + a^2\dot{\theta}^2)/2$. El ángulo es cíclico y se conserva $J = ma^2\dot{\theta}$. Así, $\dot{\theta} = J/(ma^2)$ y $\theta(t) = \theta(0) + (J/m)\int_0^t a(s)^{-2}ds$.

La aceleración radial cartesiana es $\ddot{a} - a\dot{\theta}^2$, de donde

$$R_r = m\ddot{a} - \frac{J^2}{ma^3}, \qquad E = \frac{m}{2}\dot{a}^2 + \frac{J^2}{2ma^2}.$$

Derivar E usando J constante da $\dot{E} = (m\ddot{a} - J^2/(ma^3))\dot{a} = R_r\dot{a}$. La variación instantánea permitida es tangencial, $\delta\mathbf{r} = a\mathbf{e}_\theta\delta\theta$, y el trabajo virtual de la reacción radial es cero. Su potencia conserva la componente radial real de la velocidad. Para a constante se recupera una fuerza centrípeta con potencia cero; para una guía que cambia el radio, el mecanismo puede aportar o extraer energía según el signo del producto calculado.

Lecturas y conexiones

Spivak, *Physics for Mathematicians. Mechanics I*, capítulo 12, pp. 439–443, desarrolla la reducción a coordenadas mediante la proyección de las fuerzas y las derivadas de la energía cinética. Sus pp. 449–450 precisan la relación entre la integral lagrangiana y la energía cuando los vínculos dependen del tiempo. El capítulo 13, pp. 461–463, construye la primera variación, conserva el término de borde y relaciona sus puntos críticos con Euler–Lagrange. La exposición presente introduce la geometría tangente mediante el péndulo y desarrolla localmente el argumento de funciones de prueba para permitir una lectura autónoma.

Sears y Zemansky, *Física universitaria*, volumen 1, §6.1, pp. 178–179, permite contrastar la interpretación del trabajo de fuerzas perpendiculares al desplazamiento. Serway y Jewett, *Física para ciencias e ingeniería*, volumen 1, §5.7, ejemplo 5.9, pp. 112–113, desarrolla la máquina de Atwood mediante Newton. Esos problemas conservan su valor como comprobación de las fuerzas que el procedimiento variacional proyecta fuera. Los ejercicios de este capítulo se han construido para comparar las dos descripciones y para recuperar explícitamente las reacciones.

Capítulo 22

Mecánica lagrangiana

Un bloque baja por una cuña que puede deslizarse horizontalmente sobre el suelo. Si la cuña está fija, basta la componente del peso a lo largo de su cara inclinada. Al liberarla, esa cuenta cambia: la superficie se desplaza mientras el bloque la recorre y la reacción acelera también a la cuña. La velocidad del bloque incorpora ambos movimientos. Construirla correctamente será el paso que decida las ecuaciones.

El capítulo anterior obtuvo las ecuaciones de Lagrange mediante el trabajo virtual y la acción. Las usaremos para resolver este mecanismo y seguir lo que sucede al modificar sus apoyos, aplicar una fuerza o introducir rozamiento. La energía cinética conservará las relaciones geométricas entre las velocidades, y las ecuaciones reducidas permitirán recuperar después las fuerzas de los vínculos. Un problema estará resuelto cuando sus posiciones, sus fuerzas y su régimen físico concuerden entre sí.

Dos velocidades contribuyen al movimiento del bloque

La cuña tiene masa $M > 0$ y se traslada horizontalmente con orientación fija sobre una base lisa. Su cara forma un ángulo $\alpha \in (0, \pi/2)$ con la horizontal. El bloque, de masa $m > 0$, se desliza por esa cara, también lisa. Durante el tramo considerado se mantiene el contacto y el bloque permanece dentro de la superficie disponible. Tomamos un marco inercial, un eje vertical ascendente y las coordenadas X, posición horizontal de la cuña, y s, distancia recorrida por el bloque hacia abajo a lo largo de la cara. Su posición es

$$x = X + s\cos\alpha, \qquad y = h - s\sin\alpha,$$

con h constante. Derivar ambas componentes da $\dot{x} = \dot{X} + \dot{s}\cos\alpha$, $\dot{y} = -\dot{s}\sin\alpha$. La energía cinética de la cuña es $M\dot{X}^2/2$; la del bloque requiere elevar al cuadrado su velocidad completa. Al sumar,

$$T = \frac{1}{2}(M+m)\dot{X}^2 + m\cos\alpha\,\dot{X}\dot{s} + \frac{1}{2}m\dot{s}^2, \qquad U = -mgs\sin\alpha.$$

Se ha elegido el cero del potencial para omitir su constante. El término cruzado procede de que ambas velocidades contribuyen a la misma componente horizontal del bloque. Cuando sus signos se oponen, sus contribuciones pueden compensarse parcialmente. Esa información desaparecería si se sumaran sólo los cuadrados de las velocidades de las coordenadas.

El lagrangiano $L = T - U$ produce

$$\begin{aligned}(M+m)\ddot{X} + m\cos\alpha\,\ddot{s} &= 0,\\ m\cos\alpha\,\ddot{X} + m\ddot{s} &= mg\sin\alpha.\end{aligned}$$

La primera ecuación conserva la cantidad $(M+m)\dot{X} + m\cos\alpha\dot{s}$, que coincide con el momento horizontal total. En la segunda, la aceleración de la cuña contribuye al movimiento relativo del bloque. Al resolver el sistema,

$$\ddot{X} = -\frac{mg\sin\alpha\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}, \qquad \ddot{s} = \frac{(M+m)g\sin\alpha}{M + m\sin^2\alpha}.$$

La cuña retrocede y el bloque aumenta su coordenada descendente. Con masas y ángulo constantes, ambas aceleraciones son constantes mientras se mantenga este modelo de contacto. Los datos iniciales determinan las posiciones y velocidades mediante dos integraciones.

Dos coordenadas y una velocidad cartesiana

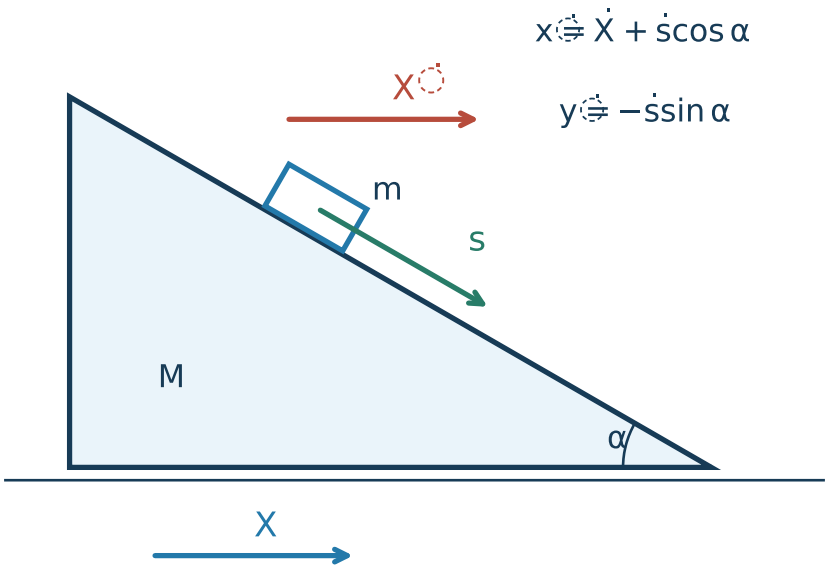


Figura 22.1. La velocidad horizontal del bloque combina la traslación de la cuña y su movimiento relativo sobre la cara. El término cruzado de la energía cinética conserva esa combinación.

La matriz cinética determina las aceleraciones

Las ecuaciones anteriores forman un sistema lineal en las aceleraciones, aunque otros mecanismos pueden tener coeficientes que dependan de las posiciones y velocidades. Es útil reconocer esa estructura antes de intentar despejar una ecuación a la vez.

Definición. El lagrangiano de un modelo mecánico natural con vínculos fijos es una función $L(q,\dot q)=\tfrac12 \dot q^{\mathsf T} G(q)\dot q - U(q)$, donde G es la matriz cinética simétrica definida positiva. Un lagrangiano es regular respecto de las velocidades en una región cuando su Hessiana $W_{ij}=\partial^2 L/(\partial \dot q_i \partial \dot q_j)$ es invertible allí.

Para el modelo natural, $W=G$. En coordenadas con unidades diferentes, las entradas de esta matriz llevan las unidades que necesita cada producto; la positividad se interpreta después de fijar unidades coherentes para las coordenadas. El contenido físico permanece en la energía que representa la forma cuadrática.

Proposición. Para un modelo natural con G y U de clase C^1, las ecuaciones de Lagrange con fuerzas adicionales Q_i equivalen al sistema

$$\sum_{j} G_{ij}\ddot q_j + \sum_{j,k} \Gamma_{ijk}\dot q_j \dot q_k + U_{q_i} = Q_i, \qquad \Gamma_{ijk}=\frac12\left(\partial_j G_{ik}+\partial_k G_{ij}-\partial_i G_{jk}\right).$$

La positividad de G determina de manera única las aceleraciones para cada posición y velocidad de esa región y cada valor de las fuerzas.

Demostración. La derivada respecto de $\dot{q}_i$ es $\sum_j G_{ij}\dot{q}_j$. Su derivada temporal aporta $\sum_j G_{ij}\ddot{q}_j + \sum_{j,k}(\partial_k G_{ij})\dot{q}_k\dot{q}_j$. Por otro lado, $\partial T/\partial q_i = \frac{1}{2}\sum_{j,k}(\partial_i G_{jk})\dot{q}_j\dot{q}_k$. Al restar estas expresiones, podemos promediar los coeficientes con los índices j,k intercambiados, pues multiplican el mismo producto de velocidades. El resultado es precisamente Γ_{ijk}. El término del potencial entra con signo positivo en Euler–Lagrange. Finalmente, una matriz definida positiva tiene núcleo cero y es invertible; multiplicar por G^{-1} despeja un único vector de aceleraciones. □

La afirmación final es una propiedad algebraica en cada estado. La continuación de una trayectoria requiere además conservar la regularidad y las condiciones físicas del aparato. Para la cuña,

$$G = \begin{pmatrix} M+m & m\cos\alpha \\ m\cos\alpha & m \end{pmatrix}, \qquad \det G = m(M + m\sin^2\alpha) > 0.$$

La energía también muestra directamente la positividad: es la suma de las energías cartesianas de dos cuerpos de masas positivas. Si una parametrización vuelve singular la matriz, se examina la independencia de las coordenadas y las idealizaciones empleadas antes de invertirla.

Usar una coordenada cíclica y reconstruirla

En la cuña libre, X aparece a través de su velocidad. Su ecuación ya está integrada una vez. Mantener esa información permite reducir el cálculo y reconstruir luego el movimiento completo.

Definición. El momento conjugado a q_i es $p_i = \partial L/\partial\dot{q}_i$. Una coordenada es cíclica en la representación elegida cuando $\partial L/\partial q_i = 0$ en su dominio.

Su ecuación es $\dot{p}_i = Q_i$. Si la fuerza generalizada adicional correspondiente es cero, ese momento es constante. La expresión concreta de p_i procede del lagrangiano: en la cuña combina dos velocidades, mientras que un ángulo polar tiene como momento conjugado una componente del momento angular.

Consideremos un modelo de dos coordenadas (X, s) de la forma

$$L = \frac{1}{2}A(s)\dot{X}^2 + B(s)\dot{X}\dot{s} + \frac{1}{2}C(s)\dot{s}^2 - U(s),$$

con A, B, C, U de clase C^2, $A > 0$ y $AC - B^2 > 0$. Supongamos fuerzas adicionales nulas y fijemos el momento conservado $P = A\dot{X} + B\dot{s}$. Podemos recuperar $\dot{X} = (P - B\dot{s})/A$. Para deducir la ecuación restante hay que conservar qué cantidad se mantiene fija al efectuar la reducción.

Proposición. Las ecuaciones con momento P fijado se reducen a la ecuación de Lagrange de

$$\mathcal{R}_0(s, \dot{s}; P) = \frac{1}{2}\left(C - \frac{B^2}{A}\right)\dot{s}^2 - \left(U + \frac{P^2}{2A}\right),$$

junto con la reconstrucción $\dot{X} = (P - B\dot{s})/A$. La masa reducida $C - B^2/A$ es positiva.

Demostración. Llamemos $v(X, s, \dot{s}; P) = (P - B\dot{s})/A$ a la velocidad eliminada; en este caso es independiente de X. Formamos $\mathcal{R} = L(s, v, \dot{s}) - Pv$. Al derivar respecto de s o de $\dot{s}$, las contribuciones que contienen derivadas de v llevan el factor $\partial L/\partial\dot{X} - P$, que vale cero por la elección de v. Por ello $\mathcal{R}_s = L_s$ y $\mathcal{R}_{\dot{s}} = L_{\dot{s}}$ evaluados en esa velocidad. La ecuación de s conserva exactamente su forma original. La otra ecuación queda satisfecha al reconstruir X con momento constante.

Expandir la expresión da

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2}\left(C - \frac{B^2}{A}\right)\dot{s}^2 + \frac{PB}{A}\dot{s} - U - \frac{P^2}{2A}.$$

En un intervalo de la coordenada s, el término lineal es la derivada temporal de $P\int^s B(\sigma)/A(\sigma)\,d\sigma$. El resultado sobre términos de borde del capítulo 21 permite retirarlo y obtener $\mathcal{R}_0$. Finalmente, $C - B^2/A = (AC - B^2)/A > 0$. □

En la cuña, $A = M+m$, $B = m\cos\alpha$ y $C = m$. La masa reducida es $m(M+m\sin^2\alpha)/(M+m)$ y el término $P^2/(2A)$ es constante. La ecuación reducida recupera la aceleración de s y el momento proporciona después $\dot{X}$. El término cuadrático de P puede variar con s en otros mecanismos y producir una fuerza efectiva, como mostrará el ejercicio 20. Esta operación se denomina reducción de Routh para la coordenada cíclica eliminada.

Recuperar la reacción y comprobar el contacto

El movimiento reducido todavía permite preguntar qué fuerza debe ejercer la cara de la cuña. Su normal exterior hacia el bloque es $\mathbf{n} = (\sin\alpha, \cos\alpha)$. La aceleración del bloque es $(\ddot{X} + \ddot{s}\cos\alpha, -\ddot{s}\sin\alpha)$ y su proyección normal vale $\ddot{X}\sin\alpha$. Así,

$$N - mg\cos\alpha = m\ddot{X}\sin\alpha, \qquad N = \frac{mMg\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}.$$

El valor es positivo para las hipótesis usadas y confirma la fuerza compresiva del contacto. Su componente horizontal sobre la cuña es $-N\sin\alpha$ y satisface $M\ddot{X} = -N\sin\alpha$. Esa comprobación conecta la solución de Lagrange con Newton para cada cuerpo.

La recuperación puede organizarse también con todas las coordenadas cartesianas. Escribamos r para el vector que reúne sus componentes, M para la matriz diagonal de masas y J para la matriz cuyas filas son los gradientes de los vínculos $f_\alpha(r,t) = 0$.

Definición. Los multiplicadores de reacción de un sistema regular de vínculos son los coeficientes λ_α que representan la reacción ideal mediante $R = J^{\mathsf{T}}\lambda$, es decir, como combinación de los gradientes de las restricciones.

La representación usa que el espacio normal está generado por esos gradientes independientes. El significado numérico de cada multiplicador depende de la normalización de su función f_α. La fuerza física se obtiene multiplicándolo por el gradiente correspondiente.

Proposición. Para masas constantes positivas y vínculos de clase C^2 con filas de J independientes, la recuperación de las aceleraciones y reacciones satisface

$$\mathsf{M}\ddot{r} = F + J^{\mathsf{T}}\lambda, \qquad (J\mathsf{M}^{-1}J^{\mathsf{T}})\lambda = b - J\mathsf{M}^{-1}F,$$

con

$$b_\alpha = -\dot{r}^{\mathsf{T}}(\nabla_r^2 f_\alpha)\dot{r} - 2\,\nabla_r(\partial_t f_\alpha)\cdot\dot{r} - \partial_t^2 f_\alpha.$$

La matriz que multiplica a λ es definida positiva y la reacción queda determinada de manera única en un estado compatible.

Demostración. Derivar dos veces $f_\alpha(r(t),t) = 0$ produce $J\ddot{r} = b$ con los términos escritos. Sustituir $\ddot{r} = \mathsf{M}^{-1}(F + J^{\mathsf{T}}\lambda)$ da la ecuación lineal de los multiplicadores. Para un vector z de coeficientes,

$$z^{\mathsf{T}}J\mathsf{M}^{-1}J^{\mathsf{T}}z = (J^{\mathsf{T}}z)^{\mathsf{T}}\mathsf{M}^{-1}(J^{\mathsf{T}}z).$$

La positividad de las masas hace positiva esta forma siempre que $J^{\mathsf{T}}z \neq 0$. La independencia de las filas de J asegura precisamente esa condición para $z \neq 0$. Se puede, pues, resolver de manera única por λ y recuperar luego la aceleración. □

Los datos iniciales deben satisfacer tanto $f = 0$ como $J\dot{r} + f_t = 0$. Para un vínculo unilateral se comprueba además el sentido de la reacción. Si el cálculo exige una reacción atractiva de la superficie, el tramo de contacto supuesto ha terminado. La ecuación geométrica debe entonces dejar paso al movimiento libre apropiado.

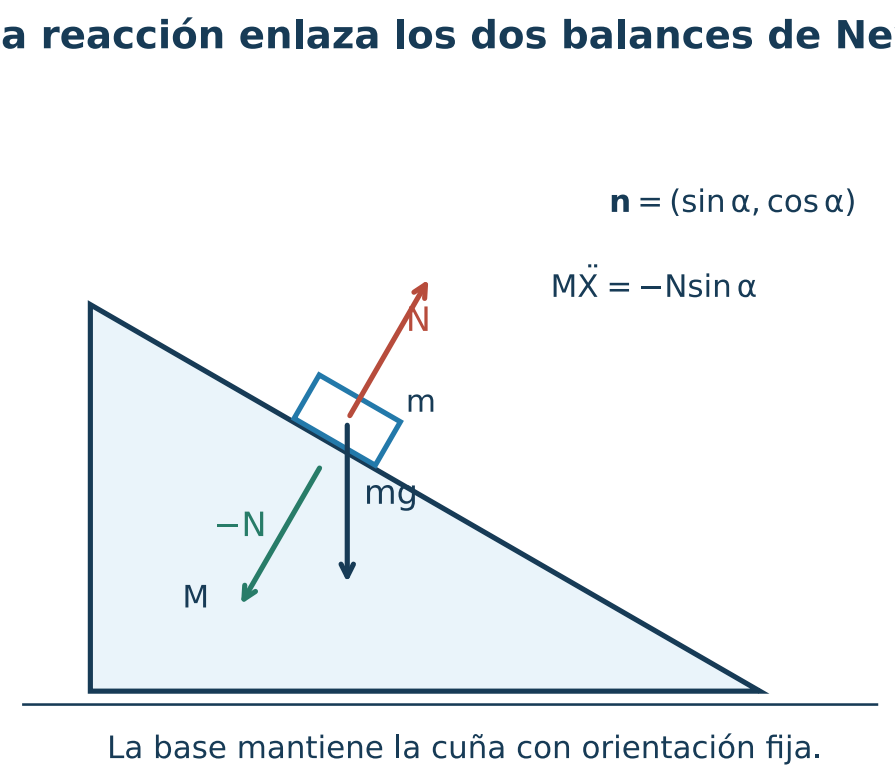


Figura 22.2. La reacción normal aparece en sentidos opuestos sobre ambos cuerpos. Proyectar Newton permite recuperar su módulo después de resolver las coordenadas independientes.

Cambiar coordenadas conservando las ecuaciones

La cuña podría describirse mediante la posición horizontal del bloque y la de su apoyo. Un mecanismo impulsado puede resultar más sencillo al medir desplazamientos respecto de una referencia móvil. Estos cambios modifican las fórmulas de T y de las fuerzas generalizadas y conservan la trayectoria física cuando se aplican de manera completa.

Proposición. Para un lagrangiano L de clase C^2, sea $q = \psi(Q, t)$ un cambio suave de coordenadas con Jacobiana invertible $\psi_{,a} = \partial\psi/\partial Q_a$. Definamos

$$\widetilde{L}(Q, \dot{Q}, t) = L(\psi(Q,t), \psi_{,Q}\dot{Q} + \psi_{,t}, t).$$

Entonces los residuos de Euler–Lagrange se transforman como

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{Q}_a} - \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial Q_a} = \sum_i \psi_{i,a}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right).$$

Las fuerzas adicionales se transforman con el mismo factor: $\widetilde{Q}_a = \sum_i Q_i \psi_{i,a}$.

Demostración. La regla de la cadena da $\partial\widetilde{L}/\partial\dot{Q}_a = \sum_i p_i\psi_{i,a}$. Su derivada temporal contiene $\sum_i \dot{p}_i\psi_{i,a} + \sum_i p_i\, d\psi_{i,a}/dt$. Al derivar $\widetilde{L}$ respecto de Q_a, la contribución de las posiciones es $\sum_i L_{q_i}\psi_{i,a}$. La de las velocidades es $\sum_i p_i\, d\psi_{i,a}/dt$, porque las derivadas mixtas de ψ conmutan, incluyendo su dependencia explícita de t. Estos últimos términos se cancelan al restar y queda la identidad. El trabajo virtual conserva $\sum_i Q_i\delta q_i = \sum_a \widetilde{Q}_a\delta Q_a$, que prueba la fórmula de las fuerzas. La invertibilidad permite recuperar también las ecuaciones iniciales. □

Por ejemplo, para un oscilador cuya posición de equilibrio es $a(t)$, el potencial cartesiano es $k(x-a(t))^2/2$. La coordenada relativa $q = x - a(t)$ produce

$$L = \frac{m}{2}(\dot{q}+\dot{a})^2 - \frac{k}{2}q^2, \qquad m\ddot{q} + kq = -m\ddot{a}.$$

El término de aceleración del apoyo nace de derivar la energía cinética transformada. Si se conserva únicamente $m\dot{q}^2/2$, se está cambiando el modelo. Restar la derivada total de $m\dot{a}q$ permite escribir, además de un término que sólo depende del tiempo, el lagrangiano equivalente $m\dot{q}^2/2 - kq^2/2 - m\ddot{a}q$.

El equilibrio del potencial se desplaza

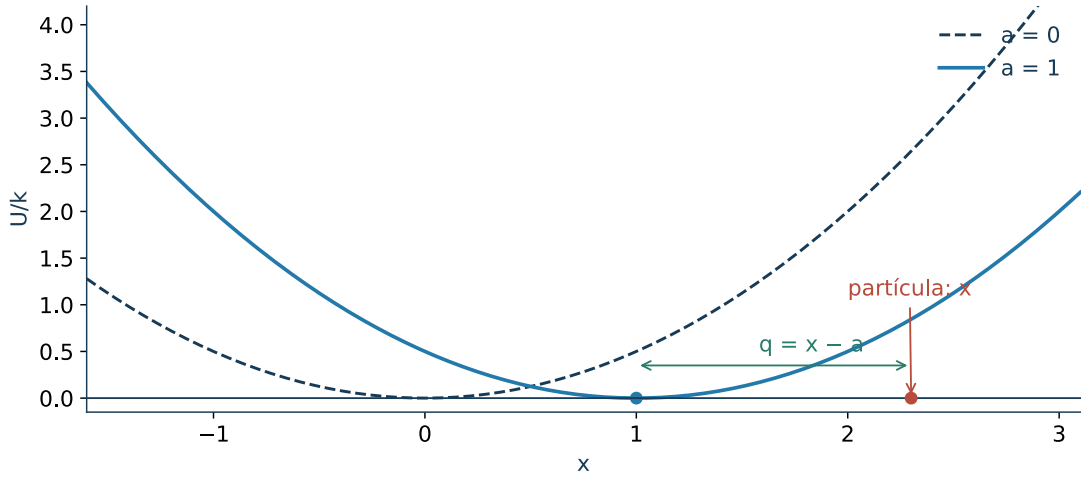


Figura 22.3. La posición cartesiana y el desplazamiento relativo se relacionan por $x = a + q$. El movimiento prescrito del apoyo entra en la ecuación relativa mediante su aceleración.

Hacer la cuenta de energía del aparato correcto

Para la cuña libre, el sistema incluye bloque y cuña y su energía $T + U$ se conserva. La reacción transfiere energía entre ambos cuerpos; la suma de sus potencias es cero porque sus velocidades tienen la misma componente normal en el contacto. Si imponemos $X = a(t)$, el actuador que mueve la cuña puede transferir energía al bloque y debe figurar en el balance.

Proposición. Para partículas de masas constantes con potencial cartesiano $U(r,t)$ de clase C^1, fuerzas adicionales F^{ad} y reacciones ideales $R = J^{\mathsf{T}}\lambda$, la energía física satisface

$$\frac{d}{dt}(T+U) = F^{\mathrm{ad}}\cdot\dot{r} + \partial_t U - \lambda^{\mathsf{T}} f_t.$$

La derivada parcial del potencial se toma aquí con las posiciones cartesianas fijas.

Demostración. Newton da $\mathsf{M}\ddot{r} = -\nabla_r U + F^{\mathrm{ad}} + J^{\mathsf{T}}\lambda$. Multiplicar por $\dot{r}$ y sumar la derivada del potencial produce $\dot{T} + \dot{U} = F^{\mathrm{ad}} \cdot \dot{r} + \partial_t U + \lambda^{\mathsf{T}} J\dot{r}$. La primera derivada de los vínculos es $J\dot{r} + f_t = 0$. Sustituirla transforma el último término en $-\lambda^{\mathsf{T}} f_t$. $\square$

Para vínculos fijos, el último término es cero. Para vínculos móviles, representa la potencia de las reacciones sobre las partículas modeladas. La integral lagrangiana $\mathcal{E} = \dot{q} \cdot L_{\dot{q}} - L$, estudiada en el capítulo anterior, conserva su propio balance. Su comparación con $T + U$ exige reconstruir las velocidades cartesianas y fijar qué aparato se incluye en el sistema.

El procedimiento ya permite incorporar disipación. Si un amortiguador entre el bloque y la cuña ejerce una fuerza relativa $-b\dot{s}$, su contribución generalizada es $Q_s = -b\dot{s}$ y $Q_X = 0$. El momento horizontal total sigue siendo constante y la energía pierde potencia $b\dot{s}^2$. El cálculo puede conservar una cantidad mientras otra cambia, porque cada balance responde a una interacción concreta.

Usar el formalismo en un mecanismo con ángulos

Un carrito de masa M sostiene un péndulo de masa m y longitud ℓ. El carro se mueve horizontalmente y el ángulo θ se mide desde la vertical inferior. Para la masa suspendida, $x = X + \ell \sin\theta$, $y = -\ell\cos\theta$. La suma de energías proporciona

$$T = \frac{1}{2}(M+m)\dot{X}^2 + m\ell\cos\theta\,\dot{X}\dot{\theta} + \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2, \qquad U = -mg\ell\cos\theta.$$

El parentesco con la cuña es visible en el término cruzado. Su coeficiente depende ahora del ángulo y sus derivadas generan términos cuadráticos en las velocidades. Los ejercicios desarrollarán las ecuaciones exactas, su aproximación de pequeño ángulo y la modificación producida por un resorte en el carro. La misma geometría cinética conectará el mecanismo con los modos del capítulo 20.

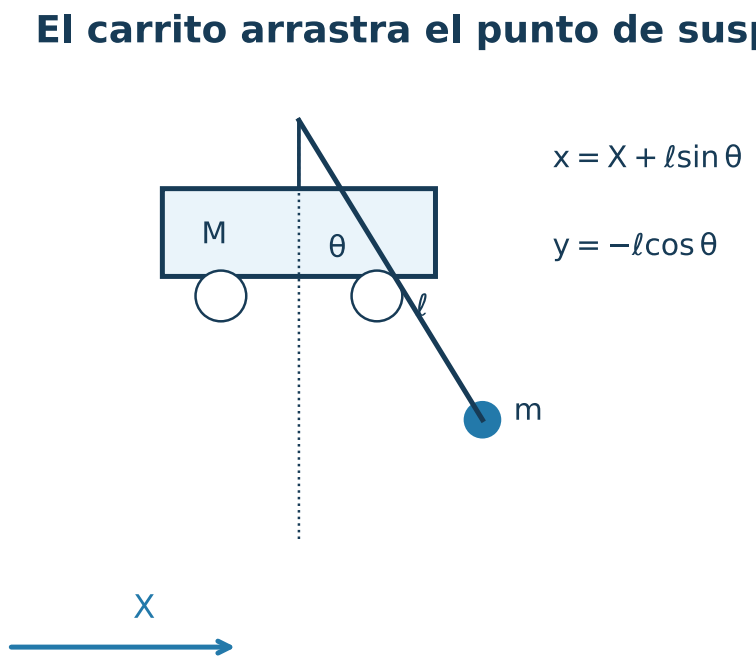


Figura 22.4. El ángulo y la posición del carro describen conjuntamente la posición de la masa suspendida. Derivar su posición antes de construir T permite conservar el arrastre del soporte.

Ejercicios

Use unidades SI y declare las posiciones cartesianas antes de escribir las energías. Las fuerzas de fricción indicadas en los ejercicios 7 y 8 tienen sus leyes propias; los demás contactos se suponen lisos. Las fórmulas se usan durante el tramo físico en que se mantienen los vínculos.

1. Encontrar el término que acopla dos velocidades

Construya desde las posiciones la energía cinética de la cuña móvil. Compare la rapidez del bloque con $\dot{X} = 1$, $\dot{s} = -1$ y $\alpha = \pi/3$ frente a la que se obtendría omitiendo el término cruzado. Identifique qué velocidades son relativas y cuáles son cartesianas.

2. Despejar las aceleraciones del mecanismo libre

Para $M = 3$, $m = 1$, $\alpha = \pi/6$ y $g = 10$, derive y resuelva las dos ecuaciones. Halle también las componentes cartesianas de la aceleración del bloque y compruebe la conservación del momento horizontal.

3. Reconstruir el estado desde un momento dado

En el aparato del ejercicio 2, se prepara $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = 0$ y momento horizontal total $P = 2\,\mathrm{kg\,m/s}$. Obtenga $s(t)$ y $X(t)$ para $X(0) = 0$. Halle las velocidades cuando $s = 0{,}2\,\mathrm{m}$, mediante la solución y mediante energía reducida.

4. Recuperar la fuerza normal y examinar límites

Calcule la reacción del aparato libre y evalúela para el ejercicio 2. Examine los límites $M \to \infty$ y $M \to 0^+$ con m, α fijos. Interprete las aceleraciones cartesianas del bloque en el segundo límite.

5. Imponer el movimiento de la cuña

Si un motor prescribe $X = a(t)$, deduzca la ecuación de s, la reacción y la potencia de esa reacción sobre el bloque. Determine el requisito de contacto. Evalúe su admisibilidad con $\alpha = \pi/6$, $g = 10$ y $\ddot{a} = -20\,\mathrm{m/s^2}$.

6. Aplicar una fuerza horizontal a la cuña

Una fuerza externa constante F actúa hacia la derecha sobre la cuña. Derive las aceleraciones y el valor de F que mantiene s constante si inicialmente $\dot{s} = 0$. Calcule la reacción en esa preparación.

7. Añadir un amortiguador relativo

En la cuña libre se añade un amortiguador viscoso con $Q_s = -b\dot{s}$, $b > 0$, y $Q_X = 0$. Obtenga $\dot{s}(t)$ y $s(t)$ desde reposo relativo. Halle la velocidad relativa límite y compruebe el balance energético del sistema completo.

8. Rodar en una pendiente y comprobar la fricción disponible

Un cuerpo de masa m, radio R e inercia $I = \beta m R^2$, con $\beta > 0$, rueda por una pendiente fija de ángulo α. Su eje mantiene dirección fija y se cumple $s - R\varphi =$ constante. Deduzca la aceleración por Lagrange. Recupere la fricción estática y el mínimo coeficiente necesario. Evalúe para $\beta = 1/2$ y $\alpha = \pi/6$.

9. Una polea que almacena energía de rotación

Dos masas $m_1 = 2$, $m_2 = 3$ cuelgan de una polea fija con $I/R^2 = 1\,\mathrm{kg}$. La cuerda mantiene contacto adherente y $g = 10$. Halle la aceleración mediante una coordenada, recupere ambas tensiones y compruebe el torque sobre la polea.

10. Resolver el carrito con péndulo

Deduzca las dos ecuaciones exactas del mecanismo del texto, sin fuerzas horizontales externas. Despeje las aceleraciones. Para $M = 3$, $m = 1$, $\ell = 0{,}5$ y $g = 10$, halle la frecuencia de la oscilación pequeña respecto del reposo inferior y la relación entre los desplazamientos del carro y del ángulo en el modo oscilatorio.

11. Sujetar el carrito con un resorte

Para el carrito con péndulo, añada un resorte horizontal de constante k, con equilibrio en $X = 0$. Use $M = 3$, $m = 1$, $\ell = 1$, $g = 10$ y $k = 8$. Construya las matrices lineales y halle los cuadrados de las frecuencias y dos razones de amplitud. Explique por qué desaparece el modo de traslación libre.

12. Aplicar una fuerza sobre la masa suspendida

Una fuerza horizontal prescrita $f(t)$ actúa sobre la masa del péndulo del carrito. Halle las dos fuerzas generalizadas, las ecuaciones modificadas y la potencia. Para f constante, construya un potencial local que incorpore esa fuerza y explique el balance de energía correspondiente.

13. Un oscilador con equilibrio acelerado

Una partícula horizontal tiene potencial $U(x,t) = k(x - a(t))^2/2$. Derive la ecuación en x y en $q = x - a$. Compare la energía física con la energía relativa $E_{\mathrm{rel}} = m\dot{q}^2/2 + kq^2/2$. Para $a(t) = a_0 + v_0 t + ct^2/2$, encuentre una solución con q constante y compruebe el trabajo del agente externo.

14. Un cambio regular de escala curvilínea

Para un oscilador cartesiano, tome $x = a \sinh Q$, con $a > 0$. Construya el lagrangiano, su matriz cinética y la ecuación en Q. Muestre que reconstruye $\ddot{x} + (k/m)x = 0$ para toda posición. Compare su regularidad con la coordenada singular estudiada en el capítulo 21.

15. La reacción circular mediante un multiplicador

Una masa $m = 1$ está sujeta a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ bajo gravedad $g = 10$. Use $f = (x^2 + y^2 - 1)/2$ y $R = \lambda(x, y)$. En el estado $r = (0{,}6, -0{,}8)\,\mathrm{m}$, $\dot{r} = (1{,}6, 1{,}2)\,\mathrm{m/s}$, calcule λ, la reacción, la aceleración y la tensión equivalente.

16. Un vínculo móvil transmite potencia

Una guía plana satisface $f(x, y, t) = y - b(t)x = 0$, con $b(t) = \nu t$, donde $\nu = 1\,\mathrm{s}^{-1}$. Con $m = 1$, $g = 10$, evalúe en $t = 0$, $r = (1, 0)\,\mathrm{m}$ y $\dot{r} = (0, 1)\,\mathrm{m/s}$. Compruebe la compatibilidad del estado, calcule la reacción y compare su potencia con $-\lambda f_t$.

17. Dos restricciones y dos multiplicadores

Una masa describe una circunferencia horizontal de radio R en el plano $z = 0$. Use $f_1 = (x^2 + y^2 + z^2 - R^2)/2$ y $f_2 = z$. Para $r = (R, 0, 0)$, $\dot{r} = (0, v, 0)$ y peso $(0, 0, -mg)$, calcule los multiplicadores y la reacción completa. Compruebe la independencia de los dos gradientes.

18. Detectar el momento de perder contacto

Una partícula desliza por la cara exterior lisa de una esfera fija de radio R, en un plano vertical que pasa por el centro. El ángulo θ parte de la vertical superior. Se libera desde reposo con $0 < \theta_0 < \pi/2$. Halle la rapidez, la reacción y el ángulo de separación. Examine el límite $\theta_0 \to 0^+$ y la preparación exacta $\theta_0 = 0$, $\dot{\theta}_0 = 0$.

19. Una energía conservada puede ocultar un modelo mal construido

Para la cuña libre, alguien propone $L_{\mathrm{err}} = (M + m)\dot{X}^2/2 + m\dot{s}^2/2 + mgs \sin\alpha$. Derive sus predicciones desde reposo y examine la energía cartesiana y el momento horizontal físico. Determine qué comprobación descubre el error y cuál podría pasarlo por alto.

20. Reducir una coordenada cíclica con el signo correcto

Para $L = m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)/2 - U(r)$, con $r > 0$ y momento $J = mr^2\dot{\varphi}$ fijado, compare la sustitución directa en L con la reducción $\mathcal{R} = L - J\dot{\varphi}$. Halle el potencial efectivo correcto. Para $U = kr^2/2$, $k > 0$ y $J \neq 0$, determine el radio circular y la frecuencia de pequeñas oscilaciones radiales con J fijo. Para $m = 1\,\mathrm{kg}$, $k = 1\,\mathrm{N/m}$ y $J = 2\,\mathrm{kg\,m^2/s}$, prepare un estado de energía radial total $E = 2{,}5\,\mathrm{J}$. Determine el intervalo exacto de radios. Use $z = r^2$ para obtener una ecuación lineal y hallar el período radial exacto. Compare su alcance con el cálculo de pequeña amplitud.

Soluciones

1. Encontrar el término que acopla dos velocidades

El bloque tiene $\dot r = (\dot X + \dot s\cos\alpha, -\dot s\sin\alpha)$. Elevar al cuadrado da $\|\dot r\|^2 = \dot X^2 + 2\cos\alpha \dot X\dot s + \dot s^2$. Al añadir $M\dot X^2/2$ se obtiene la energía del texto. El valor $\dot s$ es una velocidad relativa sobre la cuña; sus componentes deben sumarse a las del apoyo para obtener la velocidad en el marco inercial.

Para los datos, $\dot r = (1/2, \sqrt{3}/2)\,\mathrm{m/s}$ y su rapidez es $1\,\mathrm{m/s}$. Omitir el término cruzado produciría una rapidez calculada de $\sqrt{2}\,\mathrm{m/s}$. La diferencia procede de la compensación parcial en la componente horizontal, que puede comprobarse directamente con las posiciones, antes de usar cualquier ecuación dinámica.

2. Despejar las aceleraciones del mecanismo libre

Las ecuaciones son $4\ddot X + (\sqrt{3}/2)\ddot s = 0$ y $(\sqrt{3}/2)\ddot X + \ddot s = 5$, en unidades coherentes. La primera permite sustituir $\ddot X = -(\sqrt{3}/8)\ddot s$ en la segunda y obtener $(13/16)\ddot s = 5$. Así,

$$\ddot s = \frac{80}{13}\,\mathrm{m/s^2}, \qquad \ddot X = -\frac{10\sqrt{3}}{13}\,\mathrm{m/s^2}.$$

El bloque tiene $\ddot x = \ddot X + \ddot s\cos\alpha = 30\sqrt{3}/13\,\mathrm{m/s^2}$ y $\ddot y = -40/13\,\mathrm{m/s^2}$. La derivada del momento horizontal total es $M\ddot X + m\ddot x = 3(-10\sqrt{3}/13) + 30\sqrt{3}/13 = 0$. El bloque acelera horizontalmente aunque la resultante horizontal sobre el sistema completo sea cero: la reacción distribuye ese movimiento entre sus componentes.

3. Reconstruir el estado desde un momento dado

El momento da $\dot X = P/4 - (\sqrt{3}/8)\dot s$. Desde reposo relativo, $s(t) = 40t^2/13$ y

$$X(t) = \frac{P}{4}t - \frac{\sqrt{3}}{8}s(t), \qquad \dot X(t) = \frac{P}{4} - \frac{\sqrt{3}}{8}\dot s(t),$$

al expresar P y los demás parámetros por sus valores SI. La cuña comienza con velocidad $0{,}5\,\mathrm{m/s}$; el sistema completo tiene momento distinto de cero aunque el bloque empiece en reposo relativo.

Cuando $s = 0{,}2$, el tiempo es $t = \sqrt{13/200} \approx 0{,}254951\,\mathrm{s}$. Se obtiene $\dot s = \sqrt{32/13} \approx 1{,}568929\,\mathrm{m/s}$ y $\dot X = 1/2 - (\sqrt{3}/8)\sqrt{32/13} \approx 0{,}160317\,\mathrm{m/s}$. Para comprobarlo por energía, completar el cuadrado en T separa $P^2/8$ de $\frac{1}{2}(13/16)\dot s^2$. El descenso del potencial es $5s$, por lo que $\frac{1}{2}(13/16)\dot s^2 = 5s$. La contribución constante del momento se conserva y el movimiento relativo recupera el mismo valor.

4. Recuperar la fuerza normal y examinar límites

La proyección normal de la aceleración del bloque es $\ddot X\sin\alpha$. De $N - mg\cos\alpha = m\ddot X\sin\alpha$ resulta $N = mMg\cos\alpha/(M + m\sin^2\alpha)$. Para los datos, $N = 60\sqrt{3}/13 \approx 7{,}994081\,\mathrm{N}$. La fuerza horizontal sobre la cuña es $-N\sin\alpha = -30\sqrt{3}/13\,\mathrm{N}$, igual a $M\ddot X$.

Si $M \to \infty$, se obtiene $\ddot X \to 0$, $\ddot s \to g\sin\alpha$ y $N \to mg\cos\alpha$, los valores de un plano fijo. Si $M \to 0^+$ a ángulo fijo, $\ddot X \to -g\cot\alpha$, $\ddot s \to g/\sin\alpha$ y $N \to 0$. Al reconstruir el bloque, $\ddot x \to 0$ y $\ddot y \to -g$. Ese límite se aproxima a caída libre mientras la cuña muy ligera se retira. El modelo original mantiene $M > 0$; la interpretación del límite exige además que la geometría disponible permita el tramo calculado.

5. Imponer el movimiento de la cuña

Sustituir $X = a(t)$ en la velocidad antes de formar T da $L = m(\dot a^2 + 2\cos\alpha\dot a\dot s + \dot s^2)/2 + mgs\sin\alpha$, hasta términos que sólo dependen del tiempo si se incluye el apoyo. La ecuación es

$$\ddot s = g\sin\alpha - \ddot a\cos\alpha, \qquad N = m(g\cos\alpha + \ddot a\sin\alpha).$$

El contacto compresivo requiere $N \geq 0$, equivalente a $\ddot a \geq -g\cot\alpha$. La reacción tiene potencia $N\mathbf{n}\cdot\dot r = N\dot a\sin\alpha$. Puede verificarse al derivar la energía cartesiana del bloque y sustituir su ecuación.

Con la aceleración indicada, $N/m = 5\sqrt{3} - 10 < 0$. La superficie exterior exigiría una tracción sobre el bloque y el supuesto de contacto falla. Una guía bilateral que lo sujetara sí podría realizar esa reacción, pero correspondería a otro aparato. Para la superficie de apoyo, se determina el instante de separación y se continúa con el vuelo libre desde su posición y velocidad.

6. Aplicar una fuerza horizontal a la cuña

El trabajo virtual es $F\delta X$, de modo que $Q_X = F$ y $Q_s = 0$. Las ecuaciones cambian a $(M+m)\ddot X + m\cos\alpha\ddot s = F$ y $\cos\alpha\ddot X + \ddot s = g\sin\alpha$. Resolverlas produce

$$\ddot X = \frac{F - mg\sin\alpha\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}, \qquad \ddot s = g\sin\alpha - \ddot X\cos\alpha.$$

Para mantener s constante hace falta $\ddot X = g\tan\alpha$. La primera ecuación, con $\ddot s = 0$, fija $F = (M+m)g\tan\alpha$. El bloque acompaña la traslación del apoyo, y la normal vale $N = m(g\cos\alpha + g\tan\alpha\sin\alpha) = mg/\cos\alpha$. La fuerza aplicada acelera horizontalmente toda la masa mientras la reacción sostiene la componente vertical del peso del bloque.

7. Añadir un amortiguador relativo

La primera ecuación sigue conservando $P = (M+m)\dot X + m\cos\alpha\dot s$. Eliminar $\ddot X$ de la segunda deja $D\ddot s + b\dot s = mg\sin\alpha$, con $D = m(M + m\sin^2\alpha)/(M+m)$. Su positividad fija el tiempo $\tau = D/b$. Con reposo relativo inicial,

$$\dot s(t) = v_\infty(1 - e^{-t/\tau}), \qquad s(t) - s(0) = v_\infty[t - \tau(1 - e^{-t/\tau})], \qquad v_\infty = \frac{mg\sin\alpha}{b}.$$

Se comprueban los datos y la ecuación al derivar la expresión. El momento reconstruye $\dot X = [P - m\cos\alpha\dot s]/(M+m)$. La energía total satisface $\dot E = Q_s\dot s = -b\dot s^2$. La fuerza viscosa actúa internamente entre bloque y cuña: sus contribuciones al momento horizontal se cancelan, mientras su potencia total depende de la velocidad relativa. La velocidad límite pertenece al modelo de pendiente prolongada; en una cuña finita puede alcanzarse el extremo antes de observarla.

8. Rodar en una pendiente y comprobar la fricción disponible

La relación integrada permite usar s como coordenada única y escribir $\dot\varphi = \dot s/R$. Entonces $T = \tfrac{1}{2}m(1+\beta)\dot s^2$, $U = -mgs\sin\alpha$ y $\ddot s = g\sin\alpha/(1+\beta)$. La traslación del centro cumple $m\ddot s = mg\sin\alpha - f$, donde f es la fricción ascendente. Por ello

$$f = \frac{\beta}{1+\beta}mg\sin\alpha, \qquad \mu_s \geq \frac{\beta}{1+\beta}\tan\alpha.$$

Se usó $N = mg\cos\alpha$ y la cota de fricción estática $f \leq \mu_s N$. Para un cilindro homogéneo, $\beta = 1/2$, se obtiene $\ddot s = (2/3)g\sin\alpha$ y $\mu_s \geq 1/(3\sqrt{3}) \approx 0{,}192450$. El torque $fR = I\ddot\varphi$ verifica la rotación. El punto de contacto está instantáneamente en reposo sobre el plano fijo y la

potencia de la fricción estática es cero. Se ha usado la restricción integrable de rodadura en una dirección fija; la rodadura con cambios libres de orientación exige examinar sus vínculos por separado.

9. Una polea que almacena energía de rotación

Tomando q descendente para la masa 2, las velocidades de las masas son opuestas y $\dot\varphi = \dot q/R$. La energía cinética es $[m_1 + m_2 + I/R^2]\dot q^2/2$ y el potencial $(m_1 - m_2)gq$. Así,

$$\ddot q = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + I/R^2} = \frac{5}{3}\,\mathrm{m/s^2}.$$

Newton para cada masa da $T_1 = m_1(g+\ddot q) = 70/3\,\mathrm{N}$ y $T_2 = m_2(g-\ddot q) = 25\,\mathrm{N}$. Su diferencia es $T_2 - T_1 = 5/3\,\mathrm{N} = (I/R^2)\ddot q$. Multiplicar por R verifica el torque $I\ddot\varphi$. Las tensiones son distintas porque la polea recibe aceleración angular y almacena energía; la ley de contacto adherente se supone realizable por la cuerda y el material de la polea en ese régimen.

10. Resolver el carrito con péndulo

Las ecuaciones exactas son

$$\begin{aligned}(M+m)\ddot X + m\ell\cos\theta\ddot\theta - m\ell\sin\theta\dot\theta^2 &= 0,\\ \cos\theta\ddot X + \ell\ddot\theta + g\sin\theta &= 0.\end{aligned}$$

El término cuadrático de la primera procede de derivar $\cos\theta\dot\theta$. En la segunda se cancelan los términos que contienen $\dot X\dot\theta$. Al despejar,

$$\ddot X = \frac{m\sin\theta(\ell\dot\theta^2 + g\cos\theta)}{M + m\sin^2\theta},\quad \ddot\theta = -\frac{\sin\theta[(M+m)g + m\ell\dot\theta^2\cos\theta]}{\ell(M + m\sin^2\theta)}.$$

Al linealizar alrededor de un reposo inferior se obtiene $(M+m)\ddot X + m\ell\ddot\theta = 0$, $\ddot X + \ell\ddot\theta + g\theta = 0$. El modo oscilatorio tiene $\omega^2 = (M+m)g/(M\ell) = 80/3\,\mathrm{s^{-2}}$, y $\omega \approx 5{,}163978\,\mathrm{s^{-1}}$. Sus amplitudes satisfacen $X = -m\ell\theta/(M+m) = -\theta/8\,\mathrm{m}$ cuando el ángulo se expresa en radianes. Además existe la traslación uniforme del sistema, con $\theta = 0$. Su preparación inicial determina cuánto de cada comportamiento aparece.

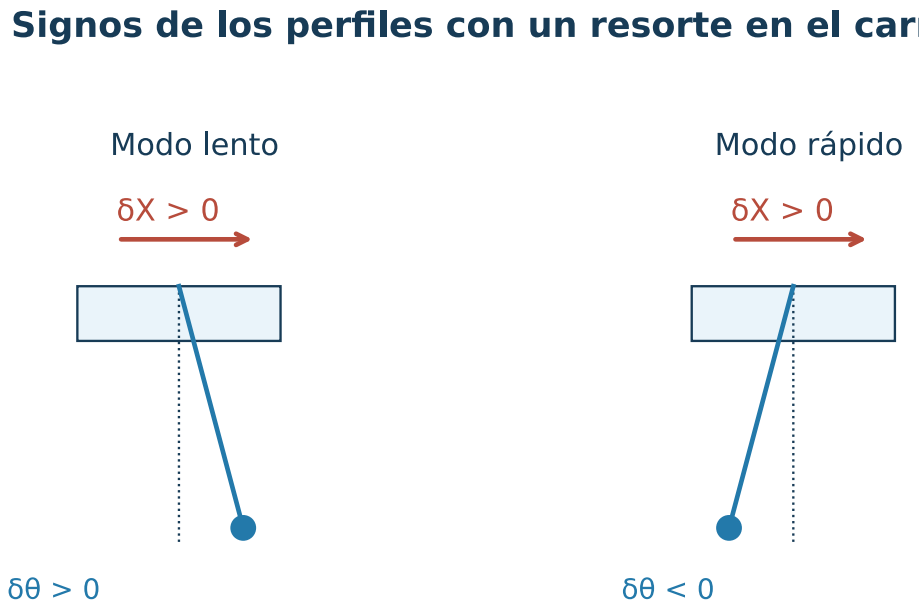


Figura 22.5. Las amplitudes de traslación y ángulo tienen unidades diferentes. El dibujo representa dos configuraciones de los perfiles del ejercicio 11 y conserva su relación de signos; las amplitudes de traslación y ángulo se amplían por separado.

11. Sujetar el carrito con un resorte

La aproximación cuadrática añade $kX^2/2$ al potencial y deja

$$G_0 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad K_0 = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix},$$

con unidades por entrada determinadas por las coordenadas (X, θ). Para valores numéricos en SI, $\det(K_0 - \lambda G_0) = 3\lambda^2 - 48\lambda + 80$. Por tanto,

$$\lambda_{1,2} = 8 \mp \frac{4}{3}\sqrt{21} \quad \mathrm{s}^{-2}, \qquad \omega_{1,2} \approx 1{,}374736,\ 3{,}756341 \quad \mathrm{s}^{-1}.$$

La segunda fila da $\theta/X = \lambda/(10-\lambda)$ en m^{-1}, positiva en el modo lento y negativa en el rápido. Elegir una amplitud de longitud para X fija el ángulo correspondiente; las componentes de este perfil llevan unidades diferentes. Ambas formas cuadráticas son positivas y los dos cuadrados de frecuencia son positivos. El resorte añade una fuerza restauradora a la traslación que antes era libre, de modo que el modo cero adquiere frecuencia positiva.

12. Aplicar una fuerza sobre la masa suspendida

La variación horizontal de la masa es $\delta x = \delta X + \ell\cos\theta\,\delta\theta$. El trabajo $f\,\delta x$ identifica $Q_X = f$ y $Q_\theta = f\ell\cos\theta$. La primera ecuación del ejercicio 10 recibe f en el miembro derecho; la segunda, antes de dividir por $m\ell$, recibe $f\ell\cos\theta$ en la forma $m\ell\cos\theta\,\ddot{X} + m\ell^2\ddot{\theta} + mg\ell\sin\theta = Q_\theta$.

La potencia es $f(\dot{X} + \ell\cos\theta\,\dot{\theta})$, igual a la fuerza por la velocidad cartesiana del punto de aplicación. Para f constante se puede incluir $U_f = -f(X + \ell\sin\theta)$ en el potencial. Entonces $T + U_g + U_f$ se conserva, mientras la energía mecánica que sólo incluye gravedad cumple

$d(T+U_g)/dt = f\dot{x}$. Dar únicamente $Q_X = f$ habría colocado la fuerza en el carro y habría descrito otra aplicación física.

13. Un oscilador con equilibrio acelerado

En el marco inercial, $m\ddot{x} + k(x-a) = 0$. Con $q = x - a$ se obtiene $m\ddot{q} + kq = -m\ddot{a}$. Las dos cuentas de energía satisfacen

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}(x-a)^2\right] = -kq\dot{a}, \qquad \dot{E}_{\mathrm{rel}} = -m\ddot{a}\dot{q}.$$

La primera usa la dependencia explícita del potencial en el marco cartesiano; la segunda multiplica la ecuación relativa por $\dot{q}$. Cuando $\ddot{a} = c$ es constante, $q_* = -mc/k$ es una solución constante si se preparan $q(0) = q_*$ y $\dot{q}(0) = 0$. La partícula tiene $x = a - mc/k$ y acelera con el apoyo. La fuerza es $-kq_* = mc$ y la potencia recibida es $mc\dot{a}$, igual a la derivada de su energía física. Su energía relativa permanece constante porque la distancia al equilibrio móvil y la velocidad relativa permanecen fijas.

14. Un cambio regular de escala curvilínea

Se tiene $\dot{x} = a\cosh Q\dot{Q}$, de modo que $L = ma^2\cosh^2 Q\dot{Q}^2/2 - ka^2\sinh^2 Q/2$. La matriz cinética de una entrada es $G = ma^2\cosh^2 Q > 0$ para todo Q. Euler–Lagrange da

$$\cosh^2 Q\ddot{Q} + \sinh Q\cosh Q\dot{Q}^2 + \frac{k}{m}\sinh Q\cosh Q = 0.$$

Dividir por $\cosh Q$ y multiplicar por a identifica $\ddot{x} + (k/m)x = 0$, pues $\ddot{x} = a(\cosh Q\ddot{Q} + \sinh Q\dot{Q}^2)$. El mapa $Q \mapsto a\sinh Q$ tiene derivada estrictamente positiva y una inversa suave en toda la recta. Su matriz cinética conserva la regularidad, incluso al pasar por el origen. La coordenada es adimensional y su fuerza generalizada tiene unidades de energía.

15. La reacción circular mediante un multiplicador

La posición tiene módulo uno y $r\cdot\dot{r} = 0{,}96 - 0{,}96 = 0$, por lo que los datos satisfacen el vínculo y su primera derivada. La segunda impone $r\cdot\ddot{r} = -\|\dot{r}\|^2 = -4$. Como $m\ddot{r} = (0,-mg) + \lambda r$,

$$\lambda = \frac{mgy - m\|\dot{r}\|^2}{\|r\|^2} = -12\,\mathrm{N/m}.$$

La reacción es $(-7{,}2,\,9{,}6)\,\mathrm{N}$, la aceleración $(-7{,}2,\,-0{,}4)\,\mathrm{m/s^2}$ y la tensión equivalente es $12\,\mathrm{N}$. Al comprobar $0{,}6(-7{,}2) - 0{,}8(-0{,}4) = -4$ se recupera la compatibilidad acelerada. El multiplicador tiene unidades de fuerza por longitud por la normalización cuadrática de f; su producto por r da la fuerza.

16. Un vínculo móvil transmite potencia

En el instante indicado, $J = (-b, 1) = (0, 1)$ y $f_t = -\nu x = -1\,\mathrm{m/s}$. Se cumple $f = 0$ y $J\dot{r} + f_t = 1 - 1 = 0$. Derivar otra vez da $\ddot{y} - b\ddot{x} = 2\nu\dot{x} = 0$ en ese estado. Por tanto, $\ddot{y} = 0$ y Newton vertical exige $\lambda = mg = 10\,\mathrm{N}$.

La reacción es $(0, 10)\,\mathrm{N}$, la aceleración cartesiana es cero en ese instante y la potencia de la reacción es $R\cdot\dot{r} = 10\,\mathrm{W}$. El balance de vínculos da el mismo valor: $-\lambda f_t = 10\,\mathrm{W}$. Aunque la variación virtual a tiempo fijo sea horizontal, la velocidad real contiene la componente vertical impuesta por el giro de la recta. La energía potencial aumenta con potencia $mg\dot{y}$ y la energía cinética tiene derivada cero en ese instante.

17. Dos restricciones y dos multiplicadores

Los gradientes son $(R,0,0)$ y $(0,0,1)$, independientes para $R>0$. La matriz de recuperación es diagonal con entradas R^2/m y $1/m$. Las segundas derivadas de los vínculos requieren $r\cdot\ddot r=-v^2$ y $\ddot z=0$. Se obtiene

$$\lambda_1=-\frac{mv^2}{R^2},\qquad \lambda_2=mg,\qquad R_{\text{total}}=\left(-\frac{mv^2}{R},0,mg\right).$$

La primera contribución mantiene la curvatura horizontal y la segunda equilibra el peso. Sus unidades son distintas, porque f_1 tiene unidades de longitud al cuadrado y f_2 de longitud. La fuerza total es inequívoca. Su potencia es cero al multiplicar por $(0,v,0)$, en acuerdo con los vínculos fijos y con la rapidez constante del movimiento circular.

18. Detectar el momento de perder contacto

Durante el contacto, la energía conservada da $v^2=R^2\dot\theta^2=2gR(\cos\theta_0-\cos\theta)$. La normal exterior y la proyección radial de Newton producen

$$N=mg\cos\theta-\frac{mv^2}{R}=mg(3\cos\theta-2\cos\theta_0).$$

La reacción parte del valor positivo $mg\cos\theta_0$ y llega a cero cuando $\cos\theta_*=2\cos\theta_0/3$. El ángulo de separación es $\theta_*=\arccos(2\cos\theta_0/3)$, mayor que el inicial y menor que $\pi/2$. Desde ese estado se continúa en vuelo libre.

Al tomar $\theta_0\to0^+$, el ángulo tiende a $\arccos(2/3)$. La preparación exacta en la cima con velocidad cero conserva el equilibrio del modelo: la ecuación angular $\ddot\theta=(g/R)\sin\theta$ admite $\theta(t)=0$, y sus datos exactos determinan esa solución. En efecto, la integral de tiempo para una salida desde la cima contiene $d\theta/\sqrt{2g(1-\cos\theta)/R}$; como $1-\cos\theta\le\theta^2/2$, esa integral diverge al comenzar en cero. El valor límite del ángulo de separación corresponde a preparaciones perturbadas que sí empiezan a deslizar. El tiempo para abandonar una vecindad de la cima crece al reducir la perturbación inicial. Distinguir ambas preparaciones evita atribuir movimiento espontáneo a un estado de equilibrio ideal.

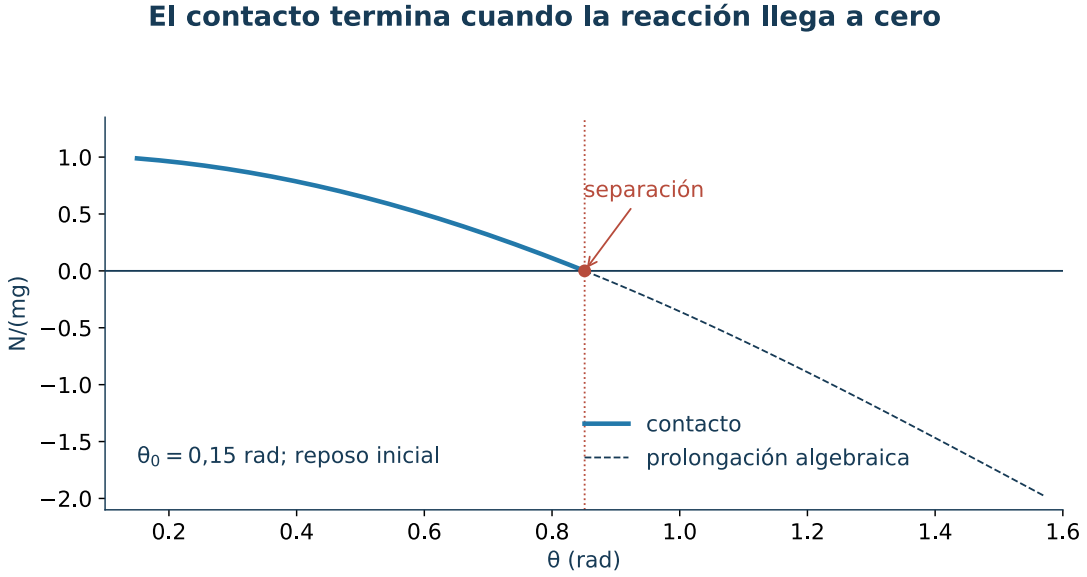


Figura 22.6. La reacción compresiva disminuye hasta cero. La ecuación de contacto se usa hasta ese punto y el movimiento posterior se reconstruye como vuelo libre.

19. Una energía conservada puede ocultar un modelo mal construido

El lagrangiano propuesto da $\ddot{X} = 0$, $\ddot{s} = g\sin\alpha$. Desde reposo, la cuña queda fija y el bloque sigue la aceleración tangencial de un plano fijo. El momento horizontal físico es $P = (M+m)\dot{X} + m\cos\alpha\,\dot{s}$, por lo que $\dot{P} = mg\sin\alpha\cos\alpha > 0$. Esa variación exige una fuerza horizontal externa, ausente en el aparato libre.

En cambio, a lo largo de esta trayectoria errónea se tiene $\dot{X} = 0$, y el término cruzado de la energía cartesiana vale cero. La energía física coincide allí con $m\dot{s}^2/2 - mgs\sin\alpha$ y permanece constante. Un control basado sólo en energía habría pasado por alto el error. Newton para la cuña descubre también el problema: una normal positiva ejerce fuerza horizontal sobre ella, incompatible con su aceleración nula. Construir las velocidades y comprobar el momento total detecta lo que ese balance energético particular deja indeterminado.

20. Reducir una coordenada cíclica con el signo correcto

La sustitución directa de $\dot{\varphi} = J/(mr^2)$ produce $L_{\mathrm{dir}} = m\dot{r}^2/2 + J^2/(2mr^2) - U(r)$. Variarlo como un lagrangiano radial ordinario daría $m\ddot{r} = -J^2/(mr^3) - U'(r)$, con signo centrípeto en el término que debe provenir del momento conservado. La operación correcta conserva fijo J mediante

$$\mathcal{R} = L - J\dot{\varphi} = \frac{m}{2}\dot{r}^2 - \left(U(r) + \frac{J^2}{2mr^2}\right).$$

Su ecuación es $m\ddot{r} = J^2/(mr^3) - U'(r)$, igual a la ecuación radial original. El potencial efectivo es $U_{\mathrm{ef}} = U + J^2/(2mr^2)$ y la reconstrucción angular sigue siendo $\dot{\varphi} = J/(mr^2)$. La resta corrige precisamente los términos que surgirían al variar una velocidad eliminada manteniendo fijo su momento.

Para el potencial armónico, $kr_0 - J^2/(mr_0^3) = 0$ da $r_0 = (J^2/(mk))^{1/4}$. La segunda derivada del potencial efectivo en ese radio vale $k + 3J^2/(mr_0^4) = 4k$. Las pequeñas oscilaciones radiales con J fijo tienen frecuencia $\omega_r = 2\sqrt{k/m}$. El movimiento circular tiene rapidez angular $|\dot{\varphi}| = \sqrt{k/m}$, y su signo coincide con el de J. Las dos frecuencias responden a observaciones diferentes del mismo sistema.

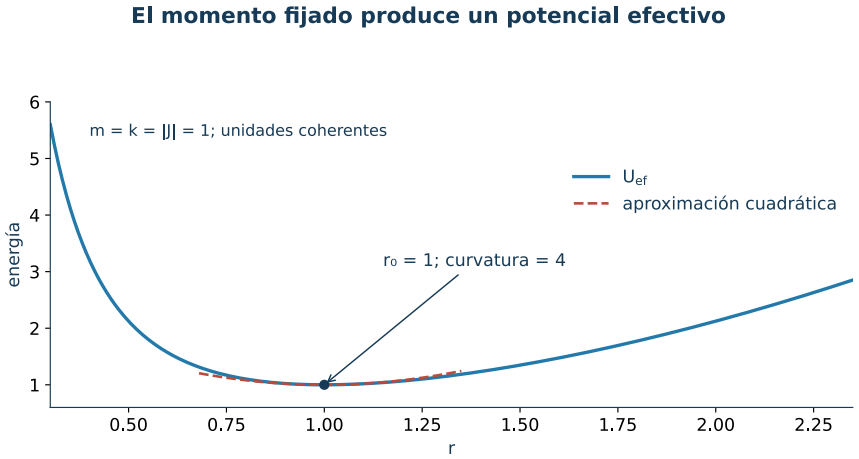


Figura 22.7. La energía de momento angular produce una barrera al acercarse al origen y un mínimo de radio positivo en el oscilador central. La curvatura de ese mínimo determina la oscilación radial pequeña.

Para precisar el regreso al potencial efectivo del capítulo 15, conservemos la energía

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{k}{2}r^2 + \frac{J^2}{2mr^2}.$$

Con $J \neq 0$, los radios positivos admisibles cumplen $kr^4 - 2Er^2 + J^2/m \leq 0$. Al usar $z = r^2$ se obtiene una desigualdad cuadrática con raíces

$$z_{\pm} = \frac{E \pm \sqrt{E^2 - kJ^2/m}}{k}.$$

La condición $E \geq |J|\sqrt{k/m}$ asegura un intervalo admisible; la igualdad corresponde al círculo. Para los datos nuevos, el mínimo de energía es $2\,\mathrm{J}$, mientras $z_- = 1\,\mathrm{m}^2$ y $z_+ = 4\,\mathrm{m}^2$. Los radios recorren $[1, 2]\,\mathrm{m}$ y sus extremos son retornos con velocidad radial cero.

El cuadrado del radio permite resolver también el reloj de esos retornos. Derivar dos veces y usar la ecuación radial da $\ddot{z} = 2\dot{r}^2 + 2J^2/(m^2r^2) - 2(k/m)r^2$. La energía elimina los dos primeros términos y resulta

$$\ddot{z} + \frac{4k}{m} z = \frac{4E}{m}, \qquad z(t) = \frac{E}{k} + \frac{\sqrt{E^2 - kJ^2/m}}{k} \cos\left(2\sqrt{\frac{k}{m}}(t - t_*)\right).$$

Aquí t_* es un instante de radio máximo; el signo de la velocidad en otro estado selecciona la fase. Como $z > 0$, recuperar $r = \sqrt{z}$ conserva la solución y su período. Para los datos, $r(t) = \sqrt{2{,}5 + 1{,}5\cos(2(t - t_*))}\,\mathrm{m}$ cuando los tiempos se expresan en segundos. El período radial exacto es $\pi\,\mathrm{s}$. La frecuencia $2\sqrt{k/m}$ coincide con la obtenida cerca del círculo y, en este potencial armónico particular, sigue gobernando r^2 a amplitud finita. La transformación y la energía explican esa coincidencia; otros potenciales requieren su propio análisis del tiempo entre retornos. El ángulo se reconstruye mediante $\dot{\varphi} = J/(mr^2)$ y conserva el dato angular inicial.

Lecturas y conexiones

Spivak, *Physics for Mathematicians. Mechanics I*, capítulo 12, pp. 443–447, desarrolla las coordenadas polares, los momentos conjugados, la cuña móvil y la rodadura sobre una pendiente. El mecanismo de la cuña conserva aquí esas elecciones geométricas y se amplía con preparación inicial, recuperación de reacciones, apoyos prescritos y fuerzas adicionales. La reducción de Routh se demuestra localmente para dos coordenadas y prepara el examen posterior de la relación entre momentos y velocidades.

Sears y Zemansky, *Física universitaria*, volumen 1, §10.3, pp. 316–317, permite cotejar la velocidad del punto de contacto y la suma de energías traslacional y rotacional. Serway y Jewett, *Física para ciencias e ingeniería*, volumen 1, ejemplo 10.14, pp. 275–277, distingue el trabajo externo y el movimiento del punto de aplicación en un carrete. Esos pasajes sostienen el contraste físico de los ejercicios de rodadura: la restricción debe ser realizable y cada potencia debe referirse al punto que recibe la fuerza. Los ejercicios y figuras de este capítulo son de elaboración propia.

Capítulo 23

Simetrías y conservación

Dos masas unidas por un resorte pueden intercambiar velocidad mientras su momento total permanece constante. Cambiar la posición del aparato completo conserva la extensión del resorte y, por tanto, su energía potencial. Las ecuaciones reconocen esa libertad: una combinación de sus fuerzas se cancela y deja una cantidad constante. Si sujetamos una de las masas a una pared mediante otro resorte, la posición absoluta vuelve a intervenir y el momento total puede cambiar.

La cuña móvil del capítulo 22 mostraba la misma estructura. Su posición horizontal era una coordenada cíclica y su momento conjugado coincidía con el momento horizontal del sistema. El objeto que se conserva puede ser menos visible en otras coordenadas. Una rotación mezcla componentes cartesianas, un cambio de velocidad modifica posiciones de forma dependiente del tiempo y una traslación temporal mueve los extremos de la integral de acción. Seguir esas transformaciones permitirá reunir balances que hasta aquí habíamos obtenido por caminos distintos.

El teorema de Noether relacionará una variación del lagrangiano con una derivada a lo largo del movimiento. Sus hipótesis conservarán el modelo físico elegido, sus vínculos y sus fuerzas adicionales. La cuenta se hará primero con el tiempo fijo y después con transformaciones que también cambian el tiempo; en ambos casos habrá que conservar los términos de borde.

Trasladar el aparato completo

Sean dos partículas en una recta, con masas $m_1, m_2 > 0$ y potencial $U = V(x_2 - x_1)$. Su lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - V(x_2 - x_1).$$

La transformación $x_1 \mapsto x_1 + \varepsilon$, $x_2 \mapsto x_2 + \varepsilon$ conserva las velocidades y la diferencia de posiciones. Por ello conserva L para cualquier trayectoria de comparación. Derivar esa igualdad respecto de ε en cero da $L_{x_1} + L_{x_2} = 0$. Sobre una solución de Lagrange, las dos derivadas coinciden con $d(m_1\dot{x}_1)/dt$ y $d(m_2\dot{x}_2)/dt$. Su suma muestra que $P = m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2$ es constante.

La transformación se aplica activamente a las posiciones del modelo dentro del mismo marco. La comparación exige conservar los parámetros externos: trasladar las masas mientras una pared permanece fija cambia la extensión del resorte unido a ella. El sistema que se incluye y los elementos que se mantienen prescritos forman parte de la pregunta sobre su simetría.

Definición. Una integral primera es una función $C(q, \dot{q}, t)$ cuyo valor permanece constante a lo largo de cada solución del modelo en el dominio considerado.

Su valor puede variar de una preparación inicial a otra. Para las dos masas, P es una integral primera y su valor concreto se obtiene midiendo las velocidades iniciales. La función y la constante asignada por los datos cumplen papeles distintos.

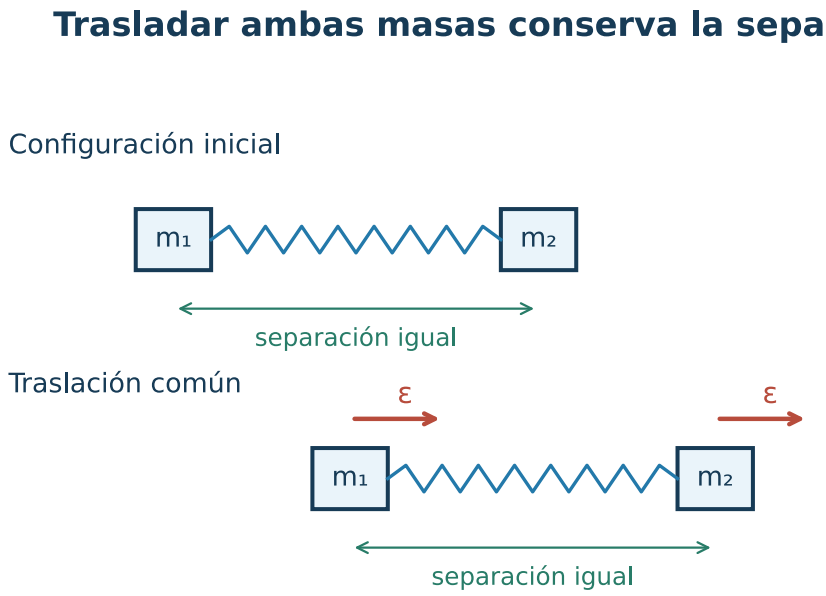


Figura 23.1. La traslación común conserva la separación y la extensión del resorte. Un resorte unido a una pared fija introduciría otra dependencia geométrica.

Variar el lagrangiano a tiempo fijo

Trabajamos localmente con coordenadas independientes $q = (q_1, \dots, q_n)$, lagrangiano $L(q, \dot{q}, t)$ de clase C^2 y trayectorias de clase C^2. Escribimos $p_i = L_{\dot{q}_i}$. Para una función $F(q, t)$, su derivada total a lo largo de una curva es

$$D_t F = \partial_t F + \sum_i \dot{q}_i \partial_{q_i} F.$$

Esta operación conserva el tiempo que transcurre a lo largo de la curva. La usaremos también componente a componente para funciones vectoriales.

Definición. Una simetría de la acción a tiempo fijo es una familia suave de transformaciones locales invertibles $q \mapsto \Phi_\varepsilon(q, t)$, con $\Phi_0(q, t) = q$, que satisface

$$L(\Phi_\varepsilon, D_t \Phi_\varepsilon, t) = L(q, \dot{q}, t) + D_t F_\varepsilon(q, t)$$

para todos los estados de su dominio, donde F_ε es suave y $F_0 = 0$. Su generador es $\xi = \partial_\varepsilon \Phi_\varepsilon|_0$, y su término infinitesimal de borde es $B = \partial_\varepsilon F_\varepsilon|_0$.

Al integrar, las dos acciones difieren en los valores de F_ε en los extremos. Para una transformación con $F_\varepsilon = 0$, el lagrangiano se conserva exactamente. La transformación debe respetar las configuraciones admisibles; cuando un vínculo está impuesto por un aparato externo, ese aparato conserva la prescripción incluida en el modelo.

Derivar la igualdad en $\varepsilon = 0$ produce la condición verificable

$$\sum_i \left(L_{q_i} \xi_i + p_i D_t \xi_i \right) = D_t B.$$

La identidad se comprueba para posiciones y velocidades arbitrarias del dominio. Evaluarla sólo en una trayectoria particular podría ocultar términos que sí cambian al comparar otras curvas.

Proposición. Si el generador y el término de borde satisfacen esa identidad, la cantidad

$$J = \sum_i p_i \xi_i - B$$

cumple $\dot{J} = \sum_i Q_i \xi_i$ a lo largo de las ecuaciones de Lagrange $\dot{p}_i - L_{q_i} = Q_i$. En particular, es una integral primera cuando esa proyección de las fuerzas adicionales es cero.

Demostración. La derivada del producto separa el cálculo en dos partes:

$$\dot{J} = \sum_i \dot{p}_i \xi_i + \sum_i p_i D_t \xi_i - D_t B.$$

Sustituir $\dot{p}_i = L_{q_i} + Q_i$ reúne los términos del lagrangiano en la identidad de simetría y los cancela con $D_t B$. Queda exactamente $\sum_i Q_i \xi_i$. Por eso la misma fórmula expresa conservación y balance frente a una fuerza añadida. □

Ésta es la forma de Noether a tiempo fijo que usaremos primero. Si la identidad tiene un residuo $\sigma = L_q \cdot \xi + p \cdot D_t \xi - D_t B$, el cálculo conserva ese término y da $\dot{J} = \sigma + Q \cdot \xi$. Una pequeña modificación del potencial puede medirse mediante este balance; la conservación aproximada exige controlar la integral del residuo durante el intervalo estudiado.

Identificar las cantidades de traslación y rotación

Para partículas cartesianas con masas constantes positivas y energía cinética $T = \frac{1}{2} \sum_a m_a \|\dot{r}_a\|^2$, el momento conjugado coincide con $m_a \dot{r}_a$. Esa identificación permite reconocer la cantidad de Noether sin construir una coordenada cíclica especial.

Proposición. En un dominio de coordenadas cartesianas independientes, si el potencial cartesiano es invariante bajo traslaciones comunes en una dirección fija e, el generador $\xi_a = e$ produce la componente $e \cdot P$ del momento total $P = \sum_a m_a \dot{r}_a$. Si es invariante bajo rotaciones comunes alrededor de un eje fijo por el origen, de dirección unitaria e, el generador $\xi_a = e \times r_a$ produce $e \cdot \mathcal{L}$, con $\mathcal{L} = \sum_a r_a \times m_a \dot{r}_a$. Las fuerzas adicionales aportan respectivamente $e \cdot \sum_a F_a^{\mathrm{ad}}$ y $e \cdot \sum_a r_a \times F_a^{\mathrm{ad}}$ a sus derivadas temporales.

Demostración. En una traslación, las velocidades permanecen iguales y $D_t \xi_a = 0$. La hipótesis del potencial hace cero su variación; el término de borde puede elegirse cero. El producto $\sum_a m_a \dot{r}_a \cdot e$ identifica la componente del momento, y la fórmula de balance da la componente de fuerza total.

En una rotación infinitesimal, las velocidades cambian como $D_t \xi_a = e \times \dot{r}_a$. Su contribución cinética es $\sum_a m_a \dot{r}_a \cdot (e \times \dot{r}_a) = 0$. La variación del potencial es cero por la hipótesis de invariancia. La cantidad asociada es

$$\sum_a m_a \dot{r}_a \cdot (e \times r_a) = e \cdot \sum_a r_a \times m_a \dot{r}_a,$$

por la identidad del producto triple. Aplicar esa misma identidad al trabajo de las fuerzas adicionales produce la componente de torque indicada. □

La conservación de las tres componentes requiere las tres direcciones correspondientes de simetría. Un potencial axial puede conservar sólo la componente del momento angular sobre su eje. Un potencial central respecto de un origen fijo conserva todo el momento angular sobre ese origen, mientras el momento lineal de la partícula puede cambiar. En un sistema de partículas con interacción central por pares, las traslaciones y rotaciones comunes conservan el potencial y permiten obtener ambas cantidades totales.

Las hipótesis sobre el potencial constituyen parte de la descripción de las interacciones. Noether muestra sus consecuencias dentro de ese modelo. La adecuación de esas interacciones y de los vínculos a un aparato concreto se contrasta mediante fuerzas, torques y observaciones, como en los capítulos precedentes.

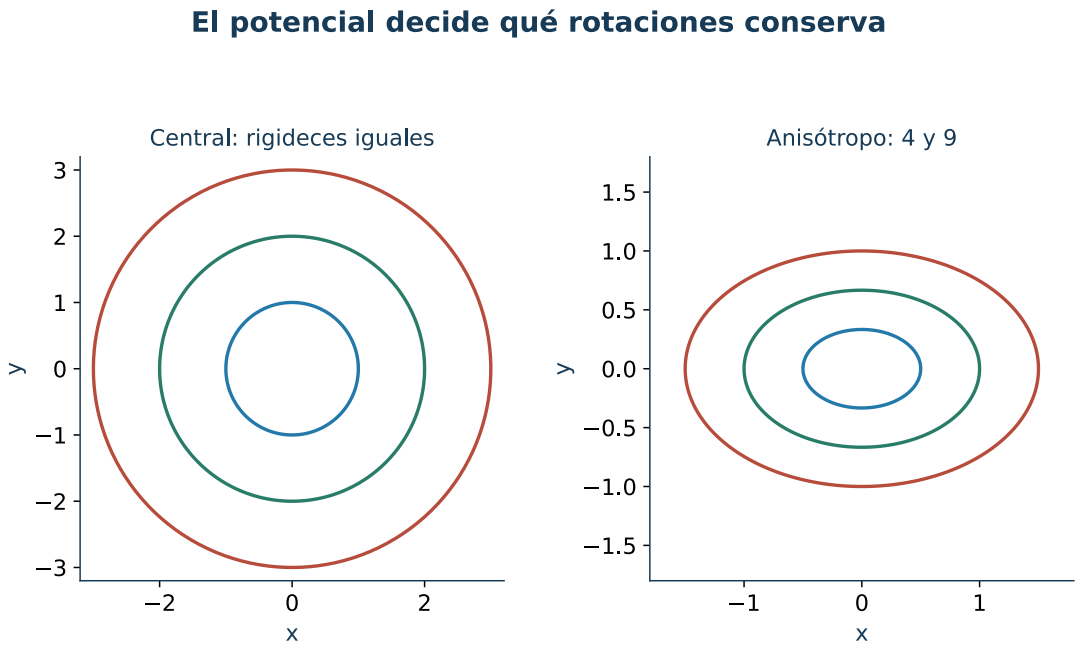


Figura 23.2. Las curvas de nivel circulares admiten rotaciones continuas que conservan el potencial. Una dependencia distinta en las dos direcciones selecciona ejes y cambia ese cálculo de simetría.

Transformar también el tiempo

La traslación temporal requiere comparar t con $t+\varepsilon$, y por ello mueve también los extremos de integración. En general escribimos, a primer orden,

$$t_\varepsilon = t + \varepsilon\tau(q,t), \qquad q_\varepsilon = q + \varepsilon\xi(q,t).$$

El parámetro etiqueta la transformación. En una región compacta de la curva, se elige suficientemente pequeño para mantener la orientación temporal y la invertibilidad local. Al dividir las derivadas respecto de t, la velocidad transformada tiene variación

$$\delta\dot q = D_t\xi - \dot q D_t\tau, \qquad dt_\varepsilon = (1+\varepsilon D_t\tau)dt + O(\varepsilon^2).$$

El último factor es esencial: se transforma la densidad $L\,dt$ completa.

Definición. Una simetría variacional infinitesimal puntual es una terna suave

$$(\tau(q,t), \xi(q,t), B(q,t))$$

que satisface, para todos los estados de su dominio,

$$L_q\cdot\xi + p\cdot(D_t\xi - \dot q D_t\tau) + L_t\tau + LD_t\tau = D_tB.$$

La palabra puntual indica que las funciones de la transformación dependen de las posiciones y del tiempo. El término B conserva la variación de borde. Con $\tau = 0$ se recupera la identidad anterior.

Proposición. Para esa terna y las ecuaciones $\dot p - L_q = Q$, la cantidad

$$J = p\cdot\xi - \mathcal{E}\tau - B, \qquad \mathcal{E} = p\cdot\dot q - L,$$

cumple el balance

$$\dot{J} = Q \cdot (\xi - \dot{q}\tau).$$

Demostración. Definamos $\mathcal{A}$ como el miembro izquierdo de la identidad de simetría. Reunir los términos con $D_t\tau$ permite escribir $\mathcal{A} = L_q \cdot \xi + p \cdot D_t\xi + L_t\tau - \mathcal{E}D_t\tau$. Por otro lado, derivar $\mathcal{E}$ a lo largo de cualquier curva da $\dot{\mathcal{E}} = \dot{q} \cdot (\dot{p} - L_q) - L_t$; sobre la solución vale $\dot{q} \cdot Q - L_t$. Así,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(p \cdot \xi - \mathcal{E}\tau) &= (L_q + Q) \cdot \xi + p \cdot D_t\xi - (\dot{q} \cdot Q - L_t)\tau - \mathcal{E}D_t\tau \\ &= \mathcal{A} + Q \cdot (\xi - \dot{q}\tau).\end{aligned}$$

Restar $D_tB = \mathcal{A}$ demuestra la fórmula. El término temporal combina el cambio del lagrangiano con el cambio de la medida de integración; ambos se han conservado en $\mathcal{A}$. □

Para una traslación temporal de un lagrangiano autónomo se toma $\tau = 1$, $\xi = 0$ y $B = 0$. La cantidad obtenida es $-\mathcal{E}$; cambiarle el signo conserva su carácter de integral primera. Con fuerzas añadidas se recupera $\dot{\mathcal{E}} = Q \cdot \dot{q}$. En vínculos fijos y energía cinética cuadrática homogénea, $\mathcal{E} = T + U$. Un vínculo móvil puede conservar una representación autónoma y producir una integral diferente de la energía física de las partículas, como mostrará el aro giratorio.

Un potencial que se desplaza con rapidez constante ofrece otra combinación: trasladar el tiempo y desplazar a la vez la posición para acompañarlo conserva su forma. La cantidad asociada combina energía y momento. El ejercicio 20 desarrollará esa cuenta y su interpretación en coordenadas relativas.

La traslación temporal desplaza el intervalo

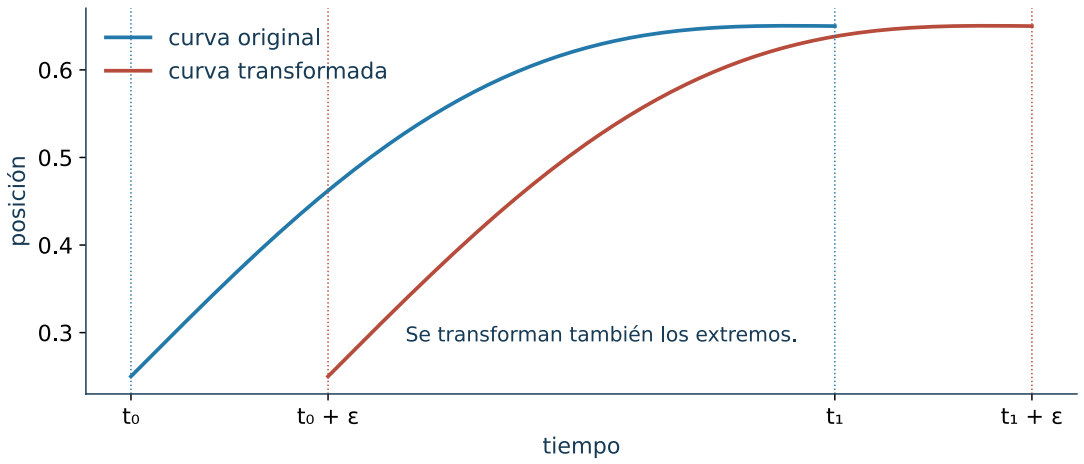


Figura 23.3. Una transformación temporal modifica el intervalo de integración. La condición variacional conserva el factor que relaciona dt_ε con dt.

Conservar el término de borde

Para una partícula libre, cambiar su velocidad mediante $x \mapsto x + \varepsilon t$ conserva la ecuación $\ddot{x} = 0$. La energía cinética, en cambio, cambia:

$$\frac{m}{2}(\dot{x} + \varepsilon)^2 - \frac{m}{2}\dot{x}^2 = m\varepsilon\dot{x} + \frac{m}{2}\varepsilon^2 = D_t\left(m\varepsilon x + \frac{m}{2}\varepsilon^2 t\right).$$

La transformación es una simetría de la acción con borde. Su generador es $\xi = t$ y su borde infinitesimal $B = mx$. La cantidad $J = tp - mx$ se conserva y registra la posición de la partícula en el instante de referencia. El término de borde permite recuperar esa cantidad a partir de un cambio de velocidad.

La misma atención hace que la respuesta sea consistente al cambiar el lagrangiano por una derivada total. El capítulo 21 mostró que $L' = L + D_t G$ conserva las ecuaciones. El momento conjugado y la integral energética pueden cambiar de expresión, y la cuenta de borde cambia con ellos.

Proposición. Si una terna (τ, ξ, B) satisface la identidad variacional para L, entonces para $L' = L + D_t G$, con $G(q, t)$ suave, la misma transformación tiene borde

$$B' = B + \xi \cdot G_q + \tau G_t.$$

La cantidad de Noether es la misma función del estado: $p' \cdot \xi - \mathcal{E}'\tau - B' = p \cdot \xi - \mathcal{E}\tau - B$.

Demostración. La contribución añadida a la acción es la diferencia de los valores extremos de G. Bajo la transformación de posiciones y tiempo, su variación es la diferencia de los valores de $\xi \cdot G_q + \tau G_t$ en esos extremos. Por ello el borde infinitesimal se transforma según la fórmula anunciada; equivalentemente, variar el diferencial dG da el diferencial de su variación. Las derivadas directas de L' producen $p' = p + G_q$ y $\mathcal{E}' = \mathcal{E} - G_t$. Al sustituir,

$$(p + G_q) \cdot \xi - (\mathcal{E} - G_t)\tau - (B + \xi \cdot G_q + \tau G_t) = p \cdot \xi - \mathcal{E}\tau - B.$$

Los términos añadidos se cancelan exactamente. □

El lagrangiano y el borde deben acompañarse durante el cálculo. Tomar sólo el momento conjugado nuevo podría atribuir una variación física a lo que procede de la representación elegida.

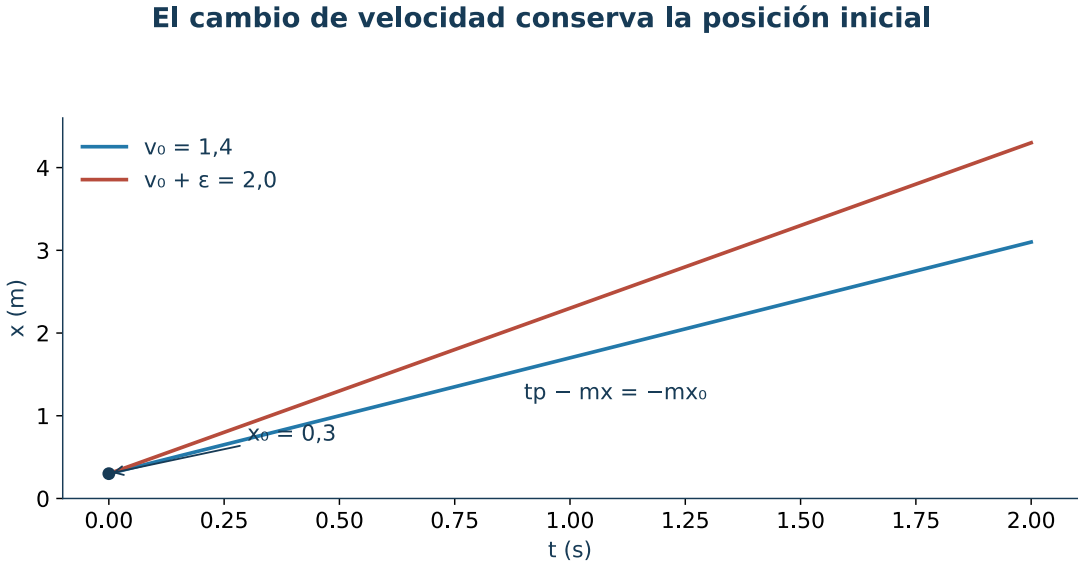


Figura 23.4. El cambio de velocidad produce otra trayectoria libre con el mismo valor inicial de posición. La cantidad $tp - mx$ conserva ese dato inicial.

Seguir un potencial que acelera

El potencial que avanza con rapidez constante conserva una combinación de energía y momento. Si su centro acelera, el oscilador con apoyo móvil del capítulo 22 sugiere medir de nuevo desde ese centro. Para mantener el balance en el laboratorio necesitamos conservar también la variación de su velocidad.

Proposición. Sea $L = m\dot{x}^2/2 - V(x - a(t))$, con $m > 0$, V de clase C^2 y a de clase C^3. Sobre sus soluciones, la cantidad

$$C = E - \dot{a}\,p + m\ddot{a}\,x, \qquad E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + V(x-a), \quad p = m\dot{x},$$

satisface $\dot{C} = m\,\dddot{a}\,x$. Para aceleración constante es una integral primera. En un intervalo con cotas $|x| \le R$ y $|\,\ddot{a}\,| \le j$, cumple además $|C(t) - C(t_0)| \le mRj|t - t_0|$.

Demostración. La fuerza es $F = -V'(x - a)$, de modo que $\dot{p} = F$. La dependencia temporal del potencial produce $\dot{E} = -\dot{a}V' = \dot{a}F$. Derivar $E - \dot{a}p$ cancela esos términos de fuerza y deja $-\ddot{a}p$. Al añadir la derivada de $m\ddot{a}x$ se cancela también $-\ddot{a}p$ y queda $m\,\dddot{a}\,x$. Integrar esta identidad y aplicar las cotas del intervalo prueba la estimación. □

El cálculo variacional conserva la misma información. Para $\tau = 1$, $\xi = \dot{a}(t)$ y $B = m\ddot{a}(t)x$, el miembro izquierdo de la identidad de simetría es $m\ddot{a}\dot{x}$ y $D_tB = m\ddot{a}\dot{x} + m\,\dddot{a}\,x$. El residuo es $-m\,\dddot{a}\,x$ y la cantidad de Noether es $-C$. Una aceleración constante hace cero ese residuo y el término de borde completa la simetría. Cuando la aceleración varía, el balance integrado cuantifica su efecto siempre que se disponga también de una cota de posición sobre la trayectoria.

En coordenadas $q = x - a(t)$, la ecuación es $m\ddot{q} + V'(q) = -m\ddot{a}$. Con aceleración constante, el potencial $V(q) + m\ddot{a}q$ incorpora esa fuerza uniforme y su energía se conserva. El ejercicio 21 construye la transformación finita, conserva su borde y resuelve un oscilador cuyo centro acelera. Así vuelve a aparecer el apoyo móvil con una interpretación variacional del balance que ya habíamos obtenido desde Newton.

Reconocer constantes que guardan la fase

Las cantidades de Noether también pueden contener explícitamente el tiempo. Para el oscilador $L = m(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2)/2$, con $\omega > 0$, una solución auxiliar $f(t)$ permite desplazar la curva como $x \mapsto x + \varepsilon f(t)$. Esa suma conserva la ecuación lineal, y el cálculo de la acción decidirá si existe el borde requerido.

Proposición. Si $\ddot{f} + \omega^2 f = 0$, el generador $\xi = f(t)$, $\tau = 0$, con borde $B = mx\dot{f}$, satisface la identidad variacional del oscilador. Su cantidad $J_f = m(\dot{x}f - x\dot{f})$ es constante sobre las soluciones libres. Con $f_1 = \cos\omega t$ y $f_2 = \sin\omega t$ se obtienen dos constantes que reconstruyen posición y velocidad.

Demostración. La variación infinitesimal de L es $-m\omega^2 xf + m\dot{x}\dot{f}$. Como $\ddot{f} = -\omega^2 f$, esta expresión coincide con $D_t(mx\dot{f})$. La primera forma del teorema prueba la conservación. Para comprobarla directamente, derivar J_f cancela los términos de primeras derivadas y deja $m(\ddot{x}f - x\ddot{f}) = 0$. Para las dos elecciones,

$$J_1 = m(\dot{x}\cos\omega t + \omega x \sin\omega t), \qquad J_2 = m(\dot{x}\sin\omega t - \omega x\cos\omega t).$$

Multiplicar estas igualdades por senos y cosenos y sumar o restar elimina los términos cruzados. Resulta

$$x = \frac{J_1\sin\omega t - J_2\cos\omega t}{m\omega}, \qquad \dot{x} = \frac{J_1\cos\omega t + J_2\sin\omega t}{m}.$$

Las dos constantes recuperan los dos datos del estado. □

La energía vale $(J_1^2+J_2^2)/(2m)$ y reúne sus módulos, mientras las dos constantes conservan también la información de fase. Una sola integral de energía suele dejar por determinar la posición sobre una órbita. La forma temporal de estas constantes hace explícita esa información respecto del reloj elegido.

La condición variacional siempre debe comprobarse. En el mismo oscilador, multiplicar una solución por una constante produce otra solución, pero multiplica su acción por el cuadrado de esa constante. El ejercicio 19 estudiará esa transformación y mostrará qué hipótesis del teorema falta. Las simetrías discretas, como invertir simultáneamente posición y velocidad en ese oscilador, también relacionan movimientos; las cantidades obtenidas aquí proceden de familias diferenciables y de sus generadores.

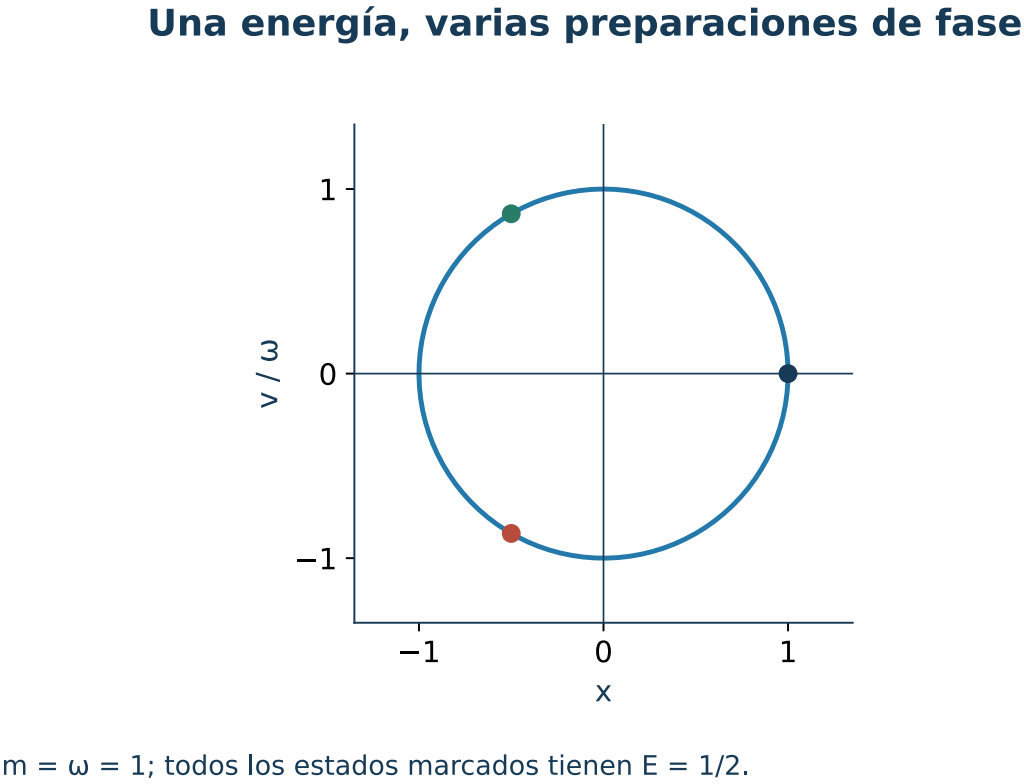


Figura 23.5. Dos constantes reconstruyen el estado del oscilador respecto del reloj elegido. La energía fija una órbita y el dato de fase selecciona el punto de esa órbita en cada instante.

Ejercicios

Identifique en cada caso la transformación, el término de borde y la cantidad obtenida. Compruebe su derivada con las ecuaciones del modelo. Use coordenadas cartesianas inerciales y masas constantes positivas salvo indicación expresa; los intervalos de uso deben conservar el dominio de coordenadas y de vínculos.

1. La traslación de un par unido por un resorte

Dos masas $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ se unen por un resorte de constante $\kappa = 6$ y se trasladan libremente sobre una recta. Los desplazamientos respecto de una separación natural son x_1, x_2. Halle la cantidad de Noether para una traslación común. Evalúela con $x(0) = (0{,}1, 0)\,\mathrm{m}$, $\dot{x}(0) = (0{,}3, 0)\,\mathrm{m/s}$, e identifique la ley del centro de masa.

2. Una pared rompe la traslación común

Añada al aparato anterior el potencial $Kx_1^2/2$, con $K = 4$. Calcule la variación de L bajo la traslación común y la derivada del momento total. Evalúela en un estado con $x_1 = 0{,}1\,\mathrm{m}$ y escriba el balance integrado entre dos instantes.

3. Reconocer el momento en otras coordenadas

Para la cuña libre del capítulo 22, use las coordenadas (X, x), donde x es la posición horizontal cartesiana del bloque. Se cumple $y = h - (x - X)\tan\alpha$. Construya T y el potencial. Halle los dos momentos conjugados y aplique la traslación común de X y x para recuperar el momento horizontal físico.

4. Una rotación infinitesimal en el espacio

Para una partícula de masa $m = 2$ en un potencial central $U(\|r\|)$, use el generador de rotación alrededor del eje z. Halle su cantidad de Noether y el momento angular completo en el estado $r = (1, 2, 0)\,\mathrm{m}$, $\dot r = (-1, 0, 1)\,\mathrm{m/s}$. Verifique directamente la derivada de ese vector bajo una fuerza central.

5. Dos rigideces seleccionan ejes

Considere $L = (\dot x^2 + \dot y^2)/2 - (4x^2 + 9y^2)/2$ en unidades SI para una masa unitaria. Calcule la variación bajo una rotación infinitesimal y $\dot{\mathcal{L}}_z$. Compare con las inversiones discretas $x \mapsto -x$ y $y \mapsto -y$. Determine qué igualdad entre las rigideces restauraría las rotaciones continuas.

6. Una simetría axial conserva una sola componente

Una partícula tiene $U = k(x^2 + y^2)/2 + k_z z^2/2 + \beta z^4$, con constantes positivas. Identifique la componente conservada del momento angular. Para valores SI $m = 1$, $k = 1$, $k_z = 3$, $\beta = 1/2$ y $r = (1, 0, 1)\,\mathrm{m}$, calcule la fuerza, el torque y la derivada de P_z.

7. El aro impulsado conserva una integral distinta de su energía física

Una cuenta en un aro vertical de radio R gira con azimut prescrito Ωt. Su lagrangiano reducido es $L = mR^2(\dot\theta^2 + \Omega^2 \sin^2\theta)/2 + mgR\cos\theta$. Aplique la traslación temporal y compare $\mathcal{E}$ con $E = T + U$. Evalúe ambas y $\dot E$ para valores coherentes $m = R = g = 1$, $\Omega = 2$, $\theta = \pi/4$ y $\dot\theta = 1/2$.

8. El borde de un cambio de velocidad

Para una partícula libre, compruebe la transformación finita $x \mapsto x + \varepsilon t$ y determine F_ε, B y J. Evalúe la constante con $m = 2$, $x(0) = 0{,}3\,\mathrm{m}$ y $\dot x(0) = 1{,}4\,\mathrm{m/s}$. Declare las unidades del parámetro y de J.

9. Traslación y cambio de velocidad bajo una fuerza constante

Para $L = m\dot x^2/2 + Fx$, con F constante, halle los bordes infinitesimales para $\xi = 1$ y $\xi = t$, manteniendo el tiempo fijo. Obtenga las dos cantidades conservadas y verifíquelas con la solución cartesiana.

10. Cambiar el lagrangiano sin cambiar la carga

Para una partícula libre, añada $D_t G$, con $G = a(t)x$ y a suave. Calcule p', $\mathcal{E}'$ y el borde para la traslación espacial. Repita el cálculo para la traslación temporal y verifique que se recupera la energía cinética mediante la cantidad de Noether.

11. Una transformación helicoidal

En coordenadas cilíndricas con $\rho > 0$, considere $T = m(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2)/2$ y $U = U_0(\rho) + V_0\cos(z/h - \varphi)$, con $h > 0$ y U_0 de clase C^2. Compruebe la transformación $\varphi \mapsto \varphi + \varepsilon$, $z \mapsto z + h\varepsilon$. Halle su integral primera y explique por qué el potencial queda bien definido al identificar φ con $\varphi + 2\pi$.

12. Contraer el radio conservando el momento angular

Una masa $m = 2$ se mueve en un plano horizontal y un actuador radial prescribe suavemente su radio. Parte de $r_i = 2\,\mathrm{m}$, $\dot\varphi_i = 3\,\mathrm{s}^{-1}$ y termina en $r_f = 1\,\mathrm{m}$. Las velocidades radiales inicial y final son cero. El actuador ejerce fuerza radial y el potencial es cero. Halle el momento conservado, la velocidad angular final y el trabajo externo neto.

13. Separar el momento angular orbital e interno

Dos partículas interactúan mediante $U = V(\|r_2 - r_1\|)$ en una región de separación positiva. Use $R = (m_1 r_1 + m_2 r_2)/(m_1 + m_2)$, $r = r_2 - r_1$ y masa reducida $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$. Obtenga las cantidades de traslación y rotación común y demuestre $\mathcal{L} = R \times P + \mu r \times \dot r$.

14. Dilatar el espacio y el tiempo de una partícula libre

Para $L = m\dot x^2/2$, compruebe la transformación finita $t_\varepsilon = e^{2\varepsilon}t$, $x_\varepsilon = e^{\varepsilon}x$. Halle τ, ξ, B y la cantidad conservada. Verifique con $x = x_0 + v_0 t$.

15. El potencial inversamente cuadrático

Una partícula en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tiene $L = m\|\dot r\|^2/2 - \gamma/\|r\|^2$, con $\gamma > 0$. Examine la dilatación del ejercicio 14 y deduzca su cantidad de Noether. Compruebe la conservación derivando $p\cdot r$ y usando la fuerza cartesiana. Declare el dominio físico del cálculo.

16. Reconstruir el oscilador desde dos constantes

Use $m = 2$, $\omega = 3\,\mathrm{s}^{-1}$, $x(0) = 0{,}1\,\mathrm{m}$ y $\dot x(0) = -0{,}2\,\mathrm{m/s}$. Calcule J_1, J_2, reconstruya $x(t)$ y halle su energía. Para $x \mapsto x + \varepsilon f(t)$, con f solución auxiliar adimensional, encuentre también un borde finito F_ε.

17. La fuerza disipativa modifica el balance de Noether

Añada al oscilador una fuerza $Q = -b\dot x$, $b > 0$. Calcule $\dot J_1$, $\dot J_2$ y $\dot E$. Evalúe $\dot J_1$ en $t = 0$ con $b = 0{,}4\,\mathrm{kg/s}$ y $\dot x = 0{,}2\,\mathrm{m/s}$. Explique qué parte de la hipótesis conservativa cambió.

18. Controlar una ruptura pequeña durante un intervalo

Un par inicialmente libre recibe el potencial adicional $\varepsilon k x_1^2/2$. Si se sabe que $|x_1(t)| \le A$ durante $0 \le t \le T$, acote la variación del momento total. Evalúe con $\varepsilon = 0{,}01$, $k = 4\,\mathrm{N/m}$, $A = 0{,}2\,\mathrm{m}$ y $T = 5\,\mathrm{s}$. Compare con un momento inicial de $2\,\mathrm{kg\,m/s}$.

19. Conservar las soluciones y cambiar la acción

Para el oscilador, considere $x_\varepsilon = e^{\varepsilon}x$ a tiempo fijo. Muestre que transforma soluciones en soluciones y calcule su variación infinitesimal del lagrangiano. Determine si existe $B(x,t)$ que satisfaga la condición variacional para todos los estados. Explique qué sucede con la acción y por qué el teorema formulado aquí exige comprobar esa condición.

20. Una traslación que acompaña al potencial

Una partícula tiene $L = m\dot{x}^2/2 - V(x - ut)$, con u constante. Use $t_\varepsilon = t + \varepsilon$, $x_\varepsilon = x + u\varepsilon$. Halle la combinación conservada de energía y momento y reconstruya su significado en $q = x - ut$. Para $m = 1$, $V(q) = 2q^2$, $u = 0{,}5\,\mathrm{m/s}$, $x(0) = 0{,}2\,\mathrm{m}$ y $\dot{x}(0) = 0$, calcule la constante, la energía relativa y la solución.

21. Un potencial acelerado y su término de borde

Una partícula tiene $L = m\dot{x}^2/2 - k(x - a(t))^2/2$, con $a(t) = ut + \gamma t^2/2$ y constantes $m, k > 0$. Compruebe la transformación finita $t_\varepsilon = t+\varepsilon$, $x_\varepsilon = x+a(t+\varepsilon)-a(t)$, conservando el cambio de velocidades y el término de borde. Halle la integral de Noether y relaciónela con la energía en $q = x - a(t)$. Para $m = 1\,\mathrm{kg}$, $k = 4\,\mathrm{N/m}$, $u = 0{,}5\,\mathrm{m/s}$, $\gamma = 0{,}2\,\mathrm{m/s^2}$, $x(0) = 0{,}2\,\mathrm{m}$ y $\dot{x}(0) = 0$, obtenga la solución y evalúe la constante. Examine qué balance se conserva si la aceleración del centro pasa a ser variable.

Soluciones

1. La traslación de un par unido por un resorte

La traslación común tiene $\xi = (1, 1)$, $\tau = 0$ y $B = 0$. Como $x_2 - x_1$ permanece igual y las velocidades tampoco cambian, la identidad de simetría se satisface en todos los estados. La cantidad es $J = p_1 + p_2 = m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2$. Para los datos, $J = 0{,}3\,\mathrm{kg\,m/s}$.

El centro de masa tiene $R(0) = 1/30\,\mathrm{m}$ y $\dot{R} = J/(m_1 + m_2) = 0{,}1\,\mathrm{m/s}$, de modo que $R(t) = 1/30 + 0{,}1t$ en metros para t en segundos. Las fuerzas del resorte son opuestas y su suma es cero; derivar J con Newton confirma la conservación. El valor de κ gobierna el movimiento relativo y deja intacta esta ley del centro de masa.

2. Una pared rompe la traslación común

La energía cinética conserva su forma, pero la derivada del potencial añadido bajo una traslación es Kx_1. La variación de L es $-Kx_1$. Con $B = 0$ y sin otras fuerzas adicionales, el balance da $\dot{P} = -Kx_1$. En el estado indicado vale $-0{,}4\,\mathrm{N}$.

Entre t_a y t_b,

$$P(t_b) - P(t_a) = -K \int_{t_a}^{t_b} x_1(t)\, dt.$$

El miembro derecho es el impulso de la fuerza de la pared sobre el sistema elegido. La extensión del resorte interno sigue siendo invariante y sus fuerzas se cancelan, mientras el apoyo fijo introduce una referencia de posición. Incluir la pared como parte de un sistema dinámico más amplio cambiaría tanto las variables como su balance total.

3. Reconocer el momento en otras coordenadas

La velocidad vertical del bloque es $-(\dot{x} - \dot{X}) \tan\alpha$. Por ello,

$$T = \frac{M}{2}\dot{X}^2 + \frac{m}{2}[\dot{x}^2 + (\dot{x} - \dot{X})^2 \tan^2\alpha], \qquad U = -mg(x - X)\tan\alpha.$$

Los momentos son $p_X = M\dot{X} - m(\dot{x} - \dot{X})\tan^2\alpha$ y $p_x = m\dot{x} + m(\dot{x} - \dot{X})\tan^2\alpha$. La traslación común tiene generador $(1, 1)$ y conserva $x - X$; su cantidad $p_X + p_x = M\dot{X} + m\dot{x}$ es el momento horizontal físico. Cada momento conjugado por separado incorpora el cambio de altura asociado a variar una coordenada manteniendo la otra fija. Su combinación recupera el desplazamiento puramente horizontal del aparato completo.

4. Una rotación infinitesimal en el espacio

Para e_z, el generador es $\xi = (-y, x, 0)$ y $J_z = m(x\dot{y} - y\dot{x})$. Los datos producen $p = (-2, 0, 2)\,\mathrm{kg\,m/s}$ y

$$\mathcal{L} = r \times p = (4, -2, 4) \quad \mathrm{kg\,m^2/s}.$$

En particular, $J_z = 4\,\mathrm{kg\,m^2/s}$. La derivada del vector es $\dot{r} \times m\dot{r} + r \times F = r \times F$. Una fuerza central es paralela a r y su producto cruzado es cero. Las rotaciones alrededor de cualquiera de los tres ejes conservan el potencial central, y sus tres cantidades coinciden con las tres componentes de ese vector.

5. Dos rigideces seleccionan ejes

Para $\xi = (-y, x)$, la contribución cinética es cero y la variación del potencial es $4x(-y) + 9yx = 5xy$. Así, $\delta L = -5xy$ y $\dot{\mathcal{L}}_z = -5xy$. Newton da el mismo torque: $x(-9y) - y(-4x) = -5xy$. La energía permanece constante porque el lagrangiano es autónomo; ese hecho permite comparar dos conservaciones con hipótesis diferentes.

Las inversiones de cada eje conservan los cuadrados de coordenadas y velocidades, por lo que son simetrías discretas. Su presencia deja todavía una diferencia entre las rigideces. Para rigideces iguales, el potencial se vuelve proporcional a $x^2 + y^2$ y admite todas las rotaciones planas; entonces la variación y el torque son cero para todos los estados. Una coincidencia instantánea $xy = 0$ sólo anula el torque en ese instante y requiere seguir la trayectoria antes de concluir una conservación.

6. Una simetría axial conserva una sola componente

El potencial depende de x, y mediante $x^2 + y^2$. Las rotaciones alrededor de z lo conservan y la cantidad $\mathcal{L}_z = m(x\dot{y} - y\dot{x})$ es constante. En el punto elegido,

$$F = (-kx, -ky, -k_z z - 4\beta z^3) = (-1, 0, -5)\,\mathrm{N}, \qquad r \times F = (0, 4, 0)\,\mathrm{N\,m}.$$

La componente z del torque es cero y concuerda con la simetría axial, mientras otra componente del momento angular cambia. La derivada de P_z vale $-5\,\mathrm{N}$. Trasladar la partícula verticalmente cambia el potencial y no satisface la identidad de traslación espacial con borde cero. La dirección de la simetría identifica precisamente la componente que puede conservarse.

7. El aro impulsado conserva una integral distinta de su energía física

El lagrangiano reducido es autónomo. La terna temporal $(1, 0, 0)$ conserva $-\mathcal{E}$, con

$$\mathcal{E} = \frac{mR^2}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{mR^2\Omega^2}{2}\sin^2\theta - mgR\cos\theta.$$

La energía física es $E = \mathcal{E} + mR^2\Omega^2\sin^2\theta$. Con los datos, $\mathcal{E} = 1/8 - 1 - 1/\sqrt{2} \approx -1{,}582107\,\mathrm{J}$ y $E = 1/8 + 1 - 1/\sqrt{2} \approx 0{,}417893\,\mathrm{J}$. Derivar la diferencia da $\dot{E} = 2mR^2\Omega^2\sin\theta\cos\theta\dot{\theta} = 2\,\mathrm{W}$ en ese instante.

El motor que impone el azimut aporta esa potencia. La conservación obtenida mediante la traslación temporal pertenece al lagrangiano reducido con su prescripción de giro. Reconstruir la energía cartesiana de la cuenta conserva la transferencia del motor, de acuerdo con el balance de vínculos móviles del capítulo 22.

8. El borde de un cambio de velocidad

La diferencia entre lagrangianos es $m\varepsilon\dot{x} + m\varepsilon^2/2$, derivada de $F_\varepsilon = m\varepsilon x + m\varepsilon^2 t/2$. Por tanto, $B = mx$ y la fórmula del teorema da

$$J = tp - mx.$$

Para $x = x_0 + v_0 t$ y $p = mv_0$, los términos con t se cancelan y queda $J = -mx_0 = -0{,}6\,\mathrm{kg\,m}$. El parámetro ε tiene unidades de velocidad, y la cantidad conjugada a esa transformación tiene unidades de masa por longitud. Su producto por ε tiene unidades de acción. Tanto el término con ε como el cuadrático son necesarios para la igualdad finita de acciones; el cálculo infinitesimal conserva el primero en B.

9. Traslación y cambio de velocidad bajo una fuerza constante

Para $\xi = 1$, la variación es $F = D_t(Ft)$. Así, $B_1 = Ft$ y $J_1 = p - Ft$. Para $\xi = t$, la variación es $Ft + m\dot{x} = D_t(mx + Ft^2/2)$. Resultan

$$B_2 = mx + \frac{1}{2}Ft^2, \qquad J_2 = tp - mx - \frac{1}{2}Ft^2.$$

La solución $x = x_0 + v_0 t + Ft^2/(2m)$ tiene $p = mv_0 + Ft$. Sustituirla da $J_1 = mv_0$ y $J_2 = -mx_0$. Sus derivadas son cero. Las dos cantidades retienen los datos iniciales después de descontar el impulso y el desplazamiento producidos por la fuerza constante. El momento instantáneo por sí mismo cambia con tasa F.

10. Cambiar el lagrangiano sin cambiar la carga

El lagrangiano nuevo es $L' = m\dot{x}^2/2 + a(t)\dot{x} + \dot{a}(t)x$. Sus expresiones son $p' = m\dot{x} + a$ y $\mathcal{E}' = m\dot{x}^2/2 - \dot{a}x$. Para la traslación espacial, el borde se vuelve $B'_x = G_x = a(t)$ y la cantidad $p' - B'_x = m\dot{x}$ conserva el momento físico.

Para la traslación temporal, el borde es $B'_t = G_t = \dot{a}x$. La cantidad resulta $-\mathcal{E}' - B'_t = -m\dot{x}^2/2$. La identidad puede comprobarse directamente: $\partial_t L' = \dot{a}\dot{x} + \ddot{a}x = D_t(\dot{a}x)$. La energía cinética se conserva aunque la representación elegida contenga funciones explícitas del tiempo. El borde transformado permite reconocer la misma simetría original en esa representación.

11. Una transformación helicoidal

La combinación $z/h - \varphi$ permanece igual bajo el cambio propuesto. Tampoco cambian ρ ni las tres velocidades, porque el parámetro es constante en el tiempo. Con $B = 0$, el generador tiene componentes $(0, 1, h)$ y da

$$J = p_\varphi + hp_z = m\rho^2\dot{\varphi} + hm\dot{z}.$$

Las ecuaciones para las dos coordenadas son $\dot{p}_\varphi = -V_0 \sin(z/h - \varphi)$ y $\dot{p}_z = (V_0/h)\sin(z/h - \varphi)$; su combinación tiene derivada cero. Cada término de J tiene unidades de momento angular. El coseno es periódico en el ángulo, de modo que el potencial es monovaluado para $\rho > 0$. En el eje, el ángulo deja de describir una posición y esta formulación requiere revisar el campo y sus coordenadas.

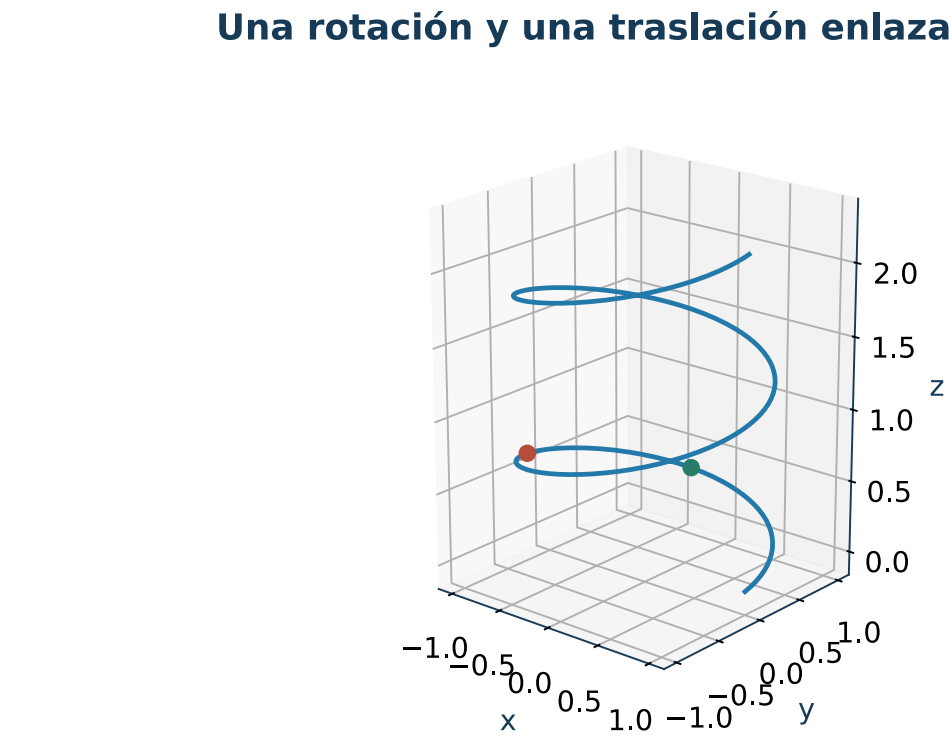


Figura 23.6. Aumentar el ángulo y la altura en la proporción fijada por h conserva $z/h - \varphi$. La cantidad asociada combina momento angular y momento vertical.

12. Contraer el radio conservando el momento angular

La coordenada angular sigue siendo cíclica para cualquier radio prescrito y las fuerzas radiales tienen torque angular cero. Así, $J = mr^2\dot{\varphi} = 24\,\mathrm{kg\,m^2/s}$. En el radio final, $\dot{\varphi}_f = J/(mr_f^2) = 12\,\mathrm{s^{-1}}$.

Como las velocidades radiales son cero en ambos extremos, las energías de esos estados son sólo angulares: $E_i = J^2/(2mr_i^2) = 36\,\mathrm{J}$ y $E_f = J^2/(2mr_f^2) = 144\,\mathrm{J}$. El trabajo externo neto vale $108\,\mathrm{J}$. La fuerza radial puede hacer trabajo cuando hay velocidad radial y, al mismo tiempo, tener torque angular cero. La conservación del momento angular fija cómo cambia la energía de rotación, y el actuador aporta la diferencia.

13. Separar el momento angular orbital e interno

Las traslaciones comunes conservan $r_2 - r_1$ y producen $P = m_1\dot{r}_1 + m_2\dot{r}_2 = (m_1 + m_2)\dot{R}$. Las rotaciones comunes conservan su módulo y producen $\mathcal{L} = r_1 \times m_1\dot{r}_1 + r_2 \times m_2\dot{r}_2$. Para descomponerla, escriba

$$r_1 = R - \frac{m_2}{m_1 + m_2} r, \qquad r_2 = R + \frac{m_1}{m_1 + m_2} r.$$

Derivar las mismas expresiones da las velocidades. Al expandir los productos cruzados, los términos mixtos $R \times \dot{r}$ y $r \times \dot{R}$ tienen coeficientes opuestos y se cancelan. El término de centro de masa es $(m_1 + m_2)R \times \dot{R} = R \times P$. El coeficiente de $r \times \dot{r}$ es $m_1 m_2^2/(m_1 + m_2)^2 + m_2 m_1^2/(m_1 + m_2)^2 = \mu$. Se obtiene la identidad pedida. En este modelo, $R \times P$ es constante porque P y $\dot{R}$ son paralelos; la parte interna también se conserva por la fuerza central relativa.

14. Dilatar el espacio y el tiempo de una partícula libre

La velocidad transformada es $dx_\varepsilon/dt_\varepsilon = e^{-\varepsilon}\dot{x}$, mientras $dt_\varepsilon = e^{2\varepsilon}dt$. Los dos factores se cancelan en $L_\varepsilon dt_\varepsilon = L dt$. El generador es $\tau = 2t$, $\xi = x$ y $B = 0$.

La identidad infinitesimal da $m\dot{x}(\dot{x} - 2\dot{x}) + 2L = 0$. Su cantidad es $J = px - 2tE$. Para una recta libre, $px - 2tE = mv_0(x_0 + v_0 t) - tmv_0^2 = mv_0 x_0$. El parámetro es adimensional y J tiene unidades de acción. La transformación modifica también las velocidades iniciales y los tiempos extremos de las curvas comparadas, tal como exige la cuenta de la densidad de acción.

15. El potencial inversamente cuadrático

La energía cinética se multiplica por $e^{-2\varepsilon}$ bajo la dilatación y el potencial $\gamma/\|r\|^2$ adquiere el mismo factor. La densidad $L dt$ se conserva, con $\tau = 2t$, $\xi = r$ y $B = 0$. La integral primera es

$$J = p \cdot r - 2tE, \qquad E = \frac{m}{2}\|\dot{r}\|^2 + \frac{\gamma}{\|r\|^2}.$$

La fuerza cartesiana es $F = 2\gamma r/\|r\|^4$. Por ello $d(p\cdot r)/dt = m\|\dot{r}\|^2 + r\cdot F = 2T + 2U = 2E$. La autonomía conserva E y la derivada de J es cero. El cálculo se realiza en intervalos con $r \neq 0$ y transformaciones que conserven ese dominio. Para energía finita, la barrera positiva del modelo mantiene una distancia al origen: $\|r\|^2 \geq \gamma/E$. Esa cota pertenece al potencial ideal elegido y usa $\gamma > 0$.

16. Reconstruir el oscilador desde dos constantes

En $t = 0$, $J_1 = m\dot{x}(0) = -0{,}4\,\mathrm{kg\,m/s}$ y $J_2 = -m\omega x(0) = -0{,}6\,\mathrm{kg\,m/s}$. La reconstrucción da

$$x(t) = 0{,}1\cos 3t - \frac{1}{15}\sin 3t \quad \mathrm{m}, \qquad E = \frac{J_1^2 + J_2^2}{2m} = 0{,}13\,\mathrm{J},$$

con t en segundos. Derivar en cero recupera $-0{,}2\,\mathrm{m/s}$ y la energía directa es $m\dot{x}(0)^2/2 + m\omega^2 x(0)^2/2 = 0{,}04 + 0{,}09$ joules.

Para la transformación finita, expandir los dos cuadrados produce un término lineal $m\varepsilon(\dot{x}\dot{f} - \omega^2 x f)$ y otro cuadrático $m\varepsilon^2(\dot{f}^2 - \omega^2 f^2)/2$. Como $\ddot{f} = -\omega^2 f$, ambos son derivadas y se puede tomar

$$F_\varepsilon = m\varepsilon x\dot{f} + \frac{m}{2}\varepsilon^2 f\dot{f}.$$

La amplitud ε tiene unidades de longitud cuando f es adimensional. El borde infinitesimal recupera $B = mx\dot{f}$ y la igualdad finita queda comprobada para todas las curvas comparadas.

17. La fuerza disipativa modifica el balance de Noether

La parte mecánica de L conserva sus identidades de simetría, pero las ecuaciones reciben $Q = -b\dot{x}$. Para las dos funciones auxiliares,

$$\dot{J}_1 = -b\dot{x}\cos\omega t, \qquad \dot{J}_2 = -b\dot{x}\sin\omega t, \qquad \dot{E} = -b\dot{x}^2.$$

La primera tasa en el estado indicado es $-0{,}08\,\mathrm{N}$. También se comprueba derivando J_f y sustituyendo $m\ddot{x} = -m\omega^2 x - b\dot{x}$: queda $-b\dot{x}f$. La fuerza adicional tiene proyección sobre los generadores y convierte las constantes del sistema libre en cantidades con balance. Los valores de J_1, J_2 siguen reconstruyendo algebraicamente el estado instantáneo mediante las mismas fórmulas, pero evolucionan con el tiempo.

18. Controlar una ruptura pequeña durante un intervalo

El residuo de la traslación es $\sigma = -\varepsilon k x_1$. Integrar $\dot{P} = \sigma$ y usar la cota supuesta da

$$|P(T) - P(0)| \le |\varepsilon| k \int_0^T |x_1(t)|\,dt \le |\varepsilon| k A T.$$

Los datos producen $0{,}04\,\mathrm{kg\,m/s}$, un 2% del momento inicial indicado. La cota de amplitud debe justificarse o medirse durante ese intervalo; la pequeñez de ε por sí sola deja abierta la acumulación a tiempos largos. La desigualdad controla la variación del momento y puede ser más amplia que el cambio real, porque conserva los módulos antes de integrar.

19. Conservar las soluciones y cambiar la acción

La ecuación es lineal y homogénea: si $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, también la satisface $e^{\varepsilon} x$. El lagrangiano, sin embargo, cambia a $e^{2\varepsilon} L$ y la acción adquiere ese mismo factor. El generador $\xi = x$, a tiempo fijo, produce

$$\delta L = m\dot{x}^2 - m\omega^2 x^2 = 2L.$$

Una derivada $D_t B(x,t) = B_t + B_x \dot{x}$ es afín en la velocidad. Su segunda derivada respecto de $\dot{x}$ es cero, mientras la de $2L$ vale $2m > 0$. Por tanto, ninguna función $B(x,t)$ satisface la identidad para todos los estados. La transformación relaciona las soluciones de la ecuación, pero queda fuera de la clase variacional puntual con borde formulada para este generador a tiempo fijo. La cantidad candidata px tiene derivada $2L$, en general distinta de cero. La dilatación del ejercicio 14 incluía además un cambio de tiempo que modificaba la condición variacional.

20. Una traslación que acompaña al potencial

La transformación conserva $x - ut$, la velocidad y dt. Su generador es $\tau = 1$, $\xi = u$ y $B = 0$. La identidad se comprueba mediante $L_x u + L_t = -uV' + uV' = 0$. La cantidad de Noether es $up - E$; cambiando el signo, se conserva

$$C = E - up = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + V(x - ut) - um\dot{x}.$$

En coordenadas relativas, $\dot{q} = \dot{x} - u$ y completar el cuadrado da $C = m\dot{q}^2/2 + V(q) - mu^2/2$. La energía relativa E_{rel} es constante y difiere de C en una constante del cambio de referencia. En el marco inercial, $\dot{E} = -uV' = uF$ y $\dot{p} = F$, de modo que $d(E - up)/dt = 0$ incluso mientras cambia la energía física.

Para los datos, $q(0) = 0{,}2$, $\dot{q}(0) = -0{,}5$ y la frecuencia es $2\,\mathrm{s^{-1}}$. Se obtiene

$$q(t) = 0{,}2\cos 2t - 0{,}25\sin 2t, \qquad x(t) = 0{,}5t + 0{,}2\cos 2t - 0{,}25\sin 2t,$$

en metros con tiempo en segundos. La energía relativa vale $0{,}125 + 0{,}08 = 0{,}205\,\mathrm{J}$ y $C = 0{,}205 - 0{,}125 = 0{,}08\,\mathrm{J}$, igual a $E(0) - up(0)$. La preparación inicial y la velocidad del potencial fijan la combinación conservada y permiten comprobar su interpretación sin suponer que la energía cartesiana sea constante.

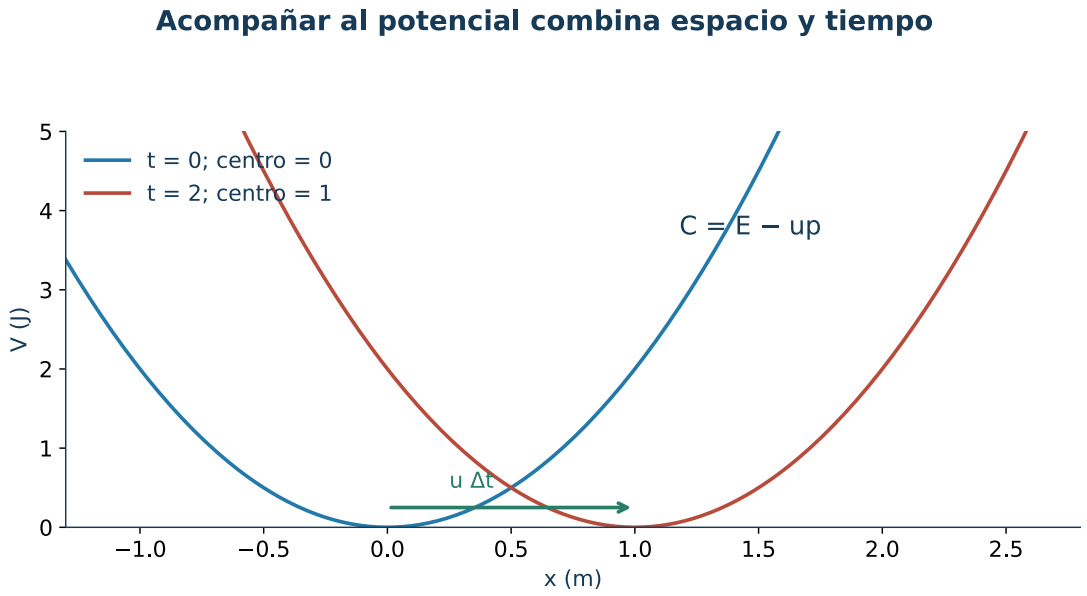


Figura 23.7. La traslación conjunta de posición y tiempo acompaña al potencial. Su cantidad conservada combina energía y momento y se relaciona con la energía del movimiento relativo.

21. Un potencial acelerado y su término de borde

La transformación conserva exactamente $x_\varepsilon - a(t_\varepsilon) = x - a(t)$ y satisface $dt_\varepsilon = dt$. Como $\dot a = u + \gamma t$, la velocidad transformada es $\dot x_\varepsilon = \dot x + \gamma\varepsilon$. Por tanto,

$$L(x_\varepsilon, \dot x_\varepsilon, t_\varepsilon) - L(x, \dot x, t) = m\gamma\varepsilon\dot x + \frac{m}{2}\gamma^2\varepsilon^2 = D_t\left(m\gamma\varepsilon x + \frac{m}{2}\gamma^2\varepsilon^2 t\right).$$

El generador tiene $\tau = 1$, $\xi = u + \gamma t$ y $B = m\gamma x$. El parámetro ε tiene unidades de tiempo; su borde finito tiene unidades de acción y B tiene unidades de energía. La cantidad de Noether es $J = p(u + \gamma t) - E - m\gamma x$. Cambiando su signo obtenemos la constante

$$C = E - (u + \gamma t)p + m\gamma x.$$

Para interpretarla completamos el cuadrado en $\dot q = \dot x - (u + \gamma t)$. La energía relativa efectiva es

$$K_{\mathrm{rel}} = \frac{m}{2}\dot q^2 + \frac{k}{2}q^2 + m\gamma q, \qquad C = K_{\mathrm{rel}} - \frac{m}{2}u^2.$$

Se usó $\gamma a - (u + \gamma t)^2/2 = -u^2/2$. La ecuación relativa es $m\ddot q + kq = -m\gamma$, con equilibrio $q_{\mathrm{eq}} = -m\gamma/k$. Trasladar a $z = q - q_{\mathrm{eq}}$ produce un oscilador de frecuencia $\sqrt{k/m}$. Los datos dan $q_{\mathrm{eq}} = -0{,}05\,\mathrm{m}$, $z(0) = 0{,}25\,\mathrm{m}$ y $\dot z(0) = -0{,}5\,\mathrm{m/s}$. Así, con t en segundos y posiciones en metros,

$$q(t) = -0{,}05 + 0{,}25\cos 2t - 0{,}25\sin 2t,$$
$$x(t) = 0{,}5t + 0{,}1t^2 - 0{,}05 + 0{,}25\cos 2t - 0{,}25\sin 2t.$$

Al evaluar la energía efectiva en el instante inicial resulta $K_{\mathrm{rel}} = 0{,}125 + 0{,}08 + 0{,}04 = 0{,}245\,\mathrm{J}$. La constante vale $C = 0{,}245 - 0{,}125 = 0{,}12\,\mathrm{J}$. En el laboratorio, $E(0) = 0{,}08\,\mathrm{J}$, $p(0) = 0$ y $m\gamma x(0) = 0{,}04\,\mathrm{J}$, que recuperan el mismo resultado.

El potencial móvil cambia la energía física a tasa $\dot E = (u + \gamma t)F$ y el momento a tasa $\dot p = F$. La combinación $E - (u + \gamma t)p$ tiene derivada $-\gamma p$; el término de borde proporciona

el sumando cuya derivada compensa esa tasa. Con un centro de aceleración variable, la proposición del núcleo conserva el balance $\dot{C} = m\,\ddot{a}\,x$ y su forma integrada. Una cota para la variación de aceleración debe acompañarse de una cota de posición durante el intervalo antes de atribuir una precisión a la conservación aproximada.

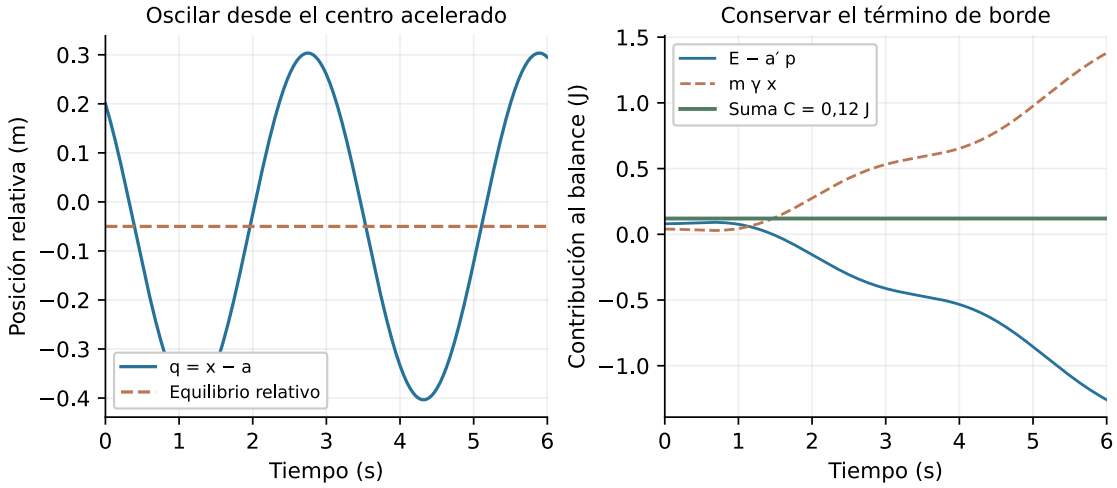


Figura 23.8. La coordenada relativa oscila alrededor de $-0{,}05\,\mathrm{m}$. En el laboratorio, $E - \dot{a}p$ cambia y la contribución $m\gamma x$ completa la constante $C = 0{,}12\,\mathrm{J}$. Las curvas muestran soluciones del modelo ideal con aceleración constante.

Lecturas y conexiones

Spivak, *Physics for Mathematicians. Mechanics I*, capítulo 13, pp. 467–470, introduce Noether mediante familias que conservan el lagrangiano y relaciona sus cantidades con coordenadas cíclicas, traslaciones y momento total. El desarrollo presente conserva esa entrada y demuestra localmente la extensión a términos de borde y a transformaciones temporales. Las hipótesis se verifican sobre todos los estados del dominio antes de evaluar las cantidades sobre una solución.

Sears y Zemansky, *Física universitaria*, volumen 1, §10.6, pp. 325–326, permite cotejar la conservación del momento angular y los cambios de inercia. Serway y Jewett, *Física para ciencias e ingeniería*, volumen 1, §9.3, p. 217, conserva el balance entre impulso y variación del momento cuando actúa una fuerza externa. Esos balances se recuperan aquí como proyecciones de las fuerzas sobre generadores concretos. Los ejercicios y figuras son propios; sus datos se eligen para comparar conservación, transferencia y preparación inicial dentro del modelo.

Capítulo 24

Mecánica hamiltoniana

Una fotografía de un bloque unido a un resorte fija su posición y deja abiertas muchas evoluciones. El bloque puede pasar por ese lugar hacia la derecha, hacia la izquierda o detenerse allí antes de volver. Para preparar una predicción hacen falta la posición y la velocidad iniciales. En la descripción lagrangiana esa información aparece como $(q, \dot{q})$; en los capítulos anteriores también apareció el momento conjugado $p = L_{\dot{q}}$, que permitía reconocer cantidades conservadas. Usarlo como parte del estado ofrece una manera de seguir el movimiento que hace visibles sus retornos, sus giros y sus intercambios de energía.

El primer trabajo consiste en recuperar la velocidad a partir del momento. Para un bloque cartesiano, $p = m\dot{q}$ resuelve el problema inmediatamente. Para un péndulo, el momento de su ángulo es $p_\theta = m\ell^2\dot{\theta}$; para un mecanismo con varias coordenadas, la velocidad de cada pieza puede contribuir a varios momentos. La relación depende del aparato y de las coordenadas elegidas. Construirla, invertirla y conservar su significado físico será parte de cada problema.

El resorte visto desde posición y momento

Consideremos un bloque de masa $m > 0$ unido a un resorte ideal de rigidez $k > 0$, en una guía horizontal fija, con rozamiento despreciable. La coordenada q mide la elongación y el lagrangiano es

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2.$$

El momento es $p = m\dot{q}$. La ecuación de Lagrange da $\dot{p} = -kq$, mientras la inversión del momento da $\dot{q} = p/m$. Son dos ecuaciones de primer orden para las dos cantidades que necesitamos preparar. Si definimos

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2,$$

las ecuaciones se escriben $\dot{q} = H_p$ y $\dot{p} = -H_q$. En este aparato H es su energía mecánica. Sus niveles positivos son elipses en el plano (q, p), y las ecuaciones dan el sentido y la rapidez con que el estado recorre cada una. En el extremo derecho, $p = 0$ y $\dot{p} < 0$: el recorrido sale hacia abajo. Al cruzar $q = 0$ con $p < 0$, la posición disminuye con rapidez máxima.

La curva de energía permite conocer las posiciones extremas; la flecha del movimiento permite distinguir una llegada de una salida. Dos preparaciones sobre la misma elipse tienen la misma energía y distinta fase. Las masas del resorte, las pérdidas por rozamiento y los límites de elasticidad pertenecen al contraste del modelo con el aparato; la elipse expresa una consecuencia exacta de las idealizaciones declaradas.

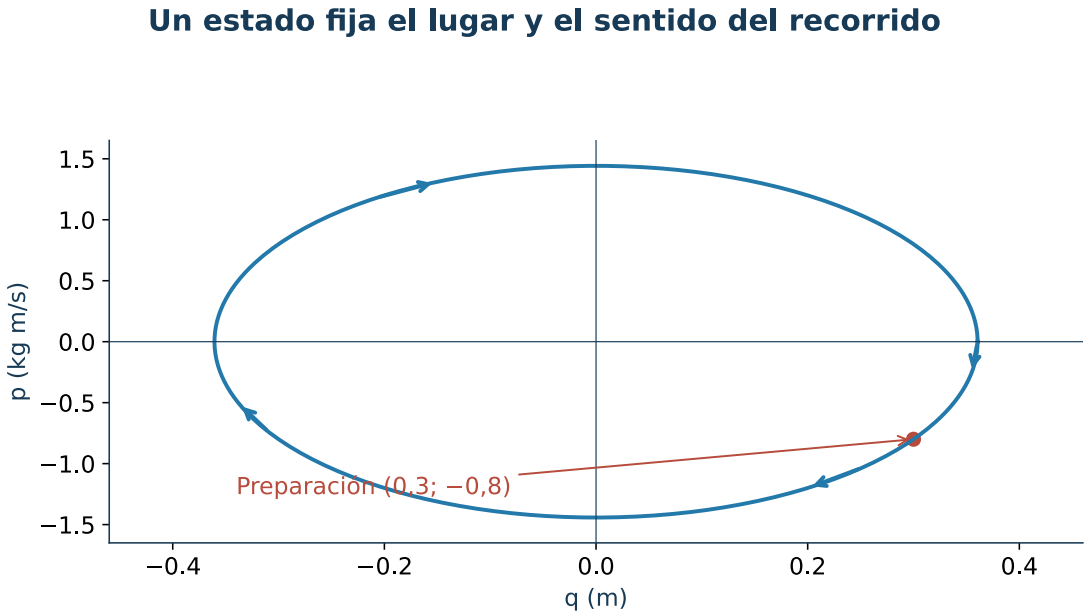


Figura 24.1. Para $m = 2$, $k = 8$ y energía $0,52$, la preparación $q = 0,3$, $p = -0,8$ fija un punto y una dirección en la elipse. Las unidades son SI.

Invertir los momentos

Escribiremos v como argumento independiente de $L(q, v, t)$ y reservaremos $\dot{q}$ para la velocidad de una trayectoria. Trabajamos en cartas locales de coordenadas independientes, con L suave. La matriz de derivadas de los momentos respecto de las velocidades es

$$W_{ij}(q, v, t) = \frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j}.$$

Definición. Un lagrangiano es regular en un estado si W es invertible allí. Es hiperregular en un dominio de velocidades completo sobre las configuraciones consideradas si, para cada (q, t), la aplicación $v \mapsto L_v(q, v, t)$ es un difeomorfismo sobre el dominio de momentos elegido.

La regularidad permite invertir localmente el momento por el teorema de la función inversa. La hiperregularidad reúne las inversas en una sola representación sobre todo el dominio especificado. Aquí «regular» tiene el alcance local de la matriz invertible; en el pasaje de Spivak citado al final, la palabra acompaña una condición global de inversión por fibras. Mantendremos explícita esa diferencia de convención.

Cerca de un estado regular, sea $v = V(q, p, t)$ la inversa de $p = L_v(q, v, t)$. En todas las expresiones siguientes se utiliza una misma rama suave de esa inversa.

Definición. El Hamiltoniano asociado a esa rama es la función

$$H(q, p, t) = p \cdot V(q, p, t) - L(q, V(q, p, t), t).$$

Esta operación es la transformación de Legendre respecto de las velocidades. El producto $p \cdot v = \sum_i p_i v_i$ tiene unidades de energía: cuando q_i es un ángulo, p_i tiene unidades de momento angular. En general, p_i tiene unidades de acción dividida por la unidad de q_i, de modo que $p_i v_i$ tiene unidades de energía.

Para una función escalar de una velocidad, la tangente a la gráfica de $L(v)$ en v tiene pendiente $p = L_v(v)$ y ordenada en el origen $L(v) - pv = -H(p)$. La figura muestra cómo el valor de la pendiente selecciona el punto de contacto. Si esa selección tiene varias ramas, habrá que elegir el dominio en el que la inversión describe el estado que estamos siguiendo.

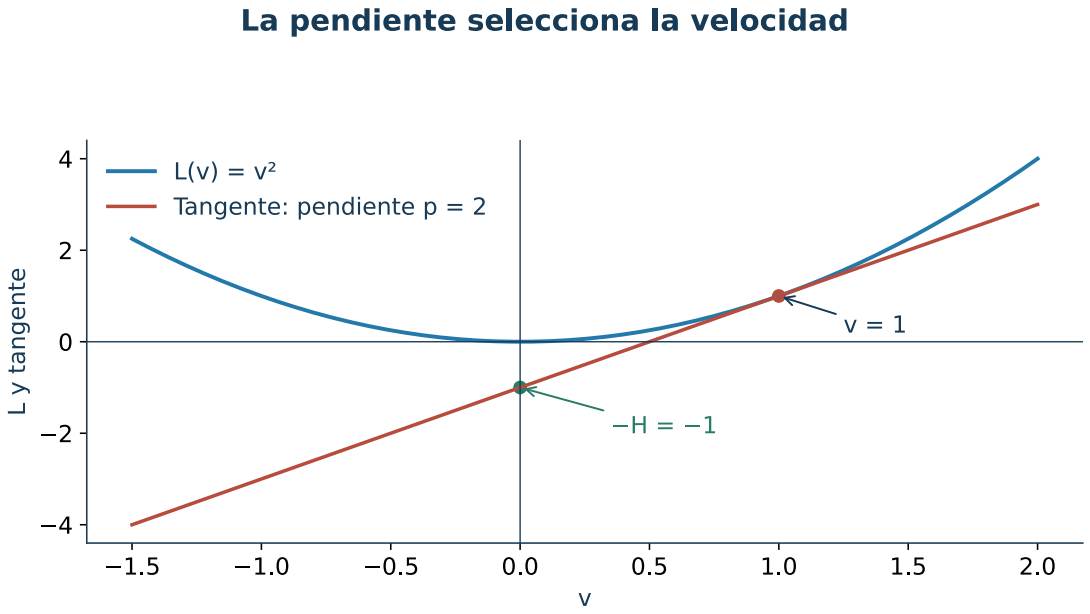


Figura 24.2. A posición y tiempo fijos, la pendiente p selecciona una velocidad en la parábola $L = v^2$. La ordenada de su tangente vale $-H$; se muestran valores numéricos adimensionales.

Proposición. En una rama regular, las derivadas del Hamiltoniano satisfacen

$$H_{p_i} = V_i, \qquad H_{q_i} = -L_{q_i}(q, V, t), \qquad H_t = -L_t(q, V, t).$$

Demostración. Diferenciar la definición conserva todas las dependencias de la velocidad recuperada:

$$dH = \sum_i V_i\, dp_i + \sum_i p_i\, dV_i - \sum_i L_{q_i}\, dq_i - \sum_i L_{v_i}\, dV_i - L_t\, dt.$$

La propia inversión establece $p_i = L_{v_i}$ en el estado evaluado, y cancela los coeficientes de dV_i. Quedan coeficientes de dp_i, dq_i y dt, que son precisamente las tres derivadas indicadas. La cancelación explica por qué, al derivar H respecto de q, deben mantenerse fijos los momentos y dejar que V varíe según la inversa. $\square$

La definición exige expresar finalmente H mediante (q, p, t). Dejar $\dot q$ como una incógnita adicional impediría calcular las derivadas parciales con las variables independientes correctas. Para el resorte, sustituir $V = p/m$ en $pV - L$ recupera la energía escrita al comienzo.

La matriz cinética y los términos lineales

Los mecanismos con vínculos holónomos regulares suelen producir un lagrangiano de la forma

$$L(q, v, t) = \frac{1}{2} v^{\mathsf T} G(q, t) v + b(q, t) \cdot v + c(q, t) - U(q, t),$$

con G simétrica definida positiva. Los términos lineales y el término c pueden surgir al describir el aparato desde coordenadas móviles. La positividad de G corresponde a velocidades independientes y masas positivas en una parametrización de rango completo.

Proposición. Para este lagrangiano, la inversión existe para todo $p \in \mathbb{R}^n$ en cada (q,t) del dominio y viene dada por

$$p = Gv + b, \qquad V = G^{-1}(p-b), \qquad H = \frac{1}{2}(p-b)^{\mathsf{T}} G^{-1}(p-b) + U - c.$$

Demostración. Derivar la forma cuadrática respecto de v produce Gv, por simetría de G. La positividad hace invertible a G y proporciona una inversa lineal suave, trasladada por b. En la resta $p \cdot v - L$, el término $b \cdot v$ se cancela y queda $\frac{1}{2} v^{\mathsf{T}} G v + U - c$. Sustituir $v = G^{-1}(p-b)$ y usar la simetría de G^{-1} da la expresión afirmada. $\square$

Cuando el aparato y sus coordenadas son fijos y $L = T - U$ con T homogénea cuadrática en las velocidades, $b = c = 0$ y $H = T + U$. Las coordenadas móviles conservan otra relación entre el movimiento medido y las velocidades coordenadas. En ese caso la interpretación física requiere reconstruir la velocidad de cada pieza en el marco elegido para medir energía.

El péndulo plano, por ejemplo, tiene $G = m\ell^2$ y $b = c = 0$. Una partícula libre descrita por $x = q + a(t)$ tiene $G = m$, $b = m\dot{a}$, $c = m\dot{a}^2/2$ y $U = 0$. Resulta $p = m(\dot{q} + \dot{a})$ y $H = p^2/(2m) - \dot{a}\, p$. La energía cinética en el laboratorio es $p^2/(2m)$. Ambas funciones tendrán usos precisos en los ejercicios.

Ecuaciones y balances

Definición. El estado hamiltoniano local es el par (q,p) de coordenadas y momentos conjugados. Su espacio de fases tiene dimensión $2n$; una órbita en fases es la imagen de una solución $t \mapsto (q(t), p(t))$ de las ecuaciones canónicas $\dot{q} = H_p$, $\dot{p} = -H_q$, para el Hamiltoniano y el intervalo considerados.

La parametrización temporal aporta el ritmo del recorrido. Con dependencia temporal explícita, el instante también forma parte de los datos para predecir la evolución. Para un ángulo periódico, las cartas de q se unen identificando ángulos que difieren en 2π; el espacio de fases del péndulo es un cilindro, que podemos dibujar cortado a lo largo de una generatriz.

Proposición. En una rama regular, las ecuaciones de Lagrange con fuerzas generalizadas adicionales $Q_i(q, v, t)$ equivalen a

$$\dot{q}_i = H_{p_i}, \qquad \dot{p}_i = -H_{q_i} + Q_i(q, H_p, t).$$

A lo largo de ellas se cumple

$$\frac{dH}{dt} = H_t + \sum_i Q_i \dot{q}_i.$$

Demostración. Una solución lagrangiana define $p = L_v(q, \dot{q}, t)$. La inversión da $\dot{q} = V = H_p$; la ecuación $\dot{p}_i = L_{q_i} + Q_i$ y la primera proposición dan la segunda ecuación. En sentido inverso, la primera ecuación hamiltoniana reconstruye $\dot{q} = V$, por lo que $p = L_v(q, \dot{q}, t)$. La segunda recupera $d(L_v)/dt - L_q = Q$, que es la ecuación de Lagrange en ese dominio.

Derivar H sobre la solución y sustituir las dos ecuaciones produce

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i H_{q_i} H_{p_i} + \sum_i H_{p_i}(-H_{q_i} + Q_i) + H_t = H_t + \sum_i Q_i \dot{q}_i.$$

Los términos conservativos se cancelan por pares. La dependencia temporal explícita y la potencia de las fuerzas añadidas permanecen en el balance. $\square$

Si $Q = 0$ y $H_t = 0$, cada órbita permanece en un nivel de H. Para H suave, el campo de ecuaciones tiene unicidad local de soluciones: un estado inicial y su instante fijan la evolución mientras ésta permanezca en el dominio. La existencia global requiere controlar las salidas del dominio y el crecimiento de la solución. Un potencial singular en el origen, por ejemplo, exige estudiar separadamente la posibilidad de llegar a ese punto.

En un grado de libertad, $H = p^2/(2m) + U(q)$ convierte el nivel $H = E$ en $p = \pm\sqrt{2m(E - U(q))}$. Las dos ramas conservan los dos sentidos de movimiento. Los puntos con $p = 0$ requieren mirar también $\dot{p} = -U'(q)$ para decidir si hay retorno o equilibrio. Una ecuación de energía por sí sola permite curvas con un uso incorrecto del tiempo; las dos ecuaciones canónicas eliminan esa ambigüedad.

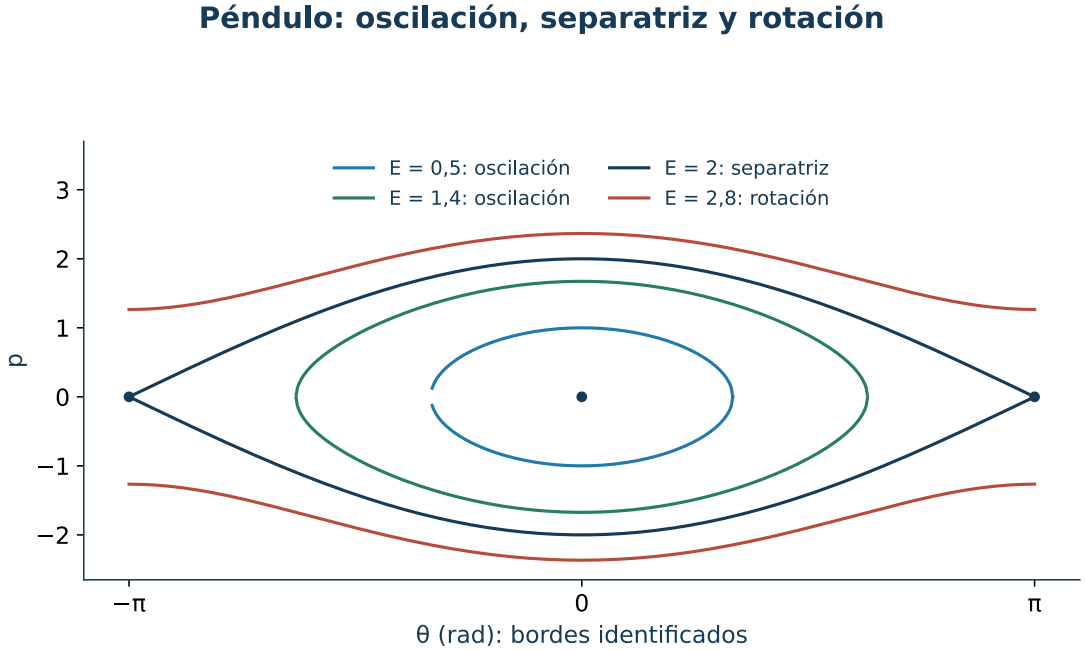


Figura 24.3. El cilindro del péndulo se representa con el corte $-\pi \le \theta \le \pi$. Las oscilaciones quedan bajo la energía de la posición superior; las rotaciones atraviesan el corte. La separatriz contiene, además del equilibrio superior, ramas que se le acercan asintóticamente. Parámetros $m = \ell = g = 1$.

La acción en posición y momento

La integral de acción puede escribirse sobre curvas que tienen $q(t)$ y $p(t)$ como componentes independientes. Fijamos los tiempos extremos y las posiciones en ambos extremos. Las variaciones de los momentos permanecen libres.

Proposición. Las curvas estacionarias de

$$\mathcal{A}[q,p] = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q,p,t) \right) dt$$

bajo esas variaciones satisfacen exactamente las ecuaciones canónicas con $Q = 0$.

Demostración. Variar el integrando da una contribución $\delta p_i \dot{q}_i + p_i \delta \dot{q}_i - H_{q_i}\delta q_i - H_{p_i}\delta p_i$ para cada índice. La integración por partes del término que contiene $\delta\dot{q}_i$ produce

$$\delta\mathcal{A} = \left[\sum_i p_i \delta q_i \right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \left[(\dot{q}_i - H_{p_i})\delta p_i - (\dot{p}_i + H_{q_i})\delta q_i \right] dt.$$

Las posiciones fijadas hacen cero el término de borde. Elegir variaciones suaves con soporte en el interior y variar cada componente de forma independiente obliga a anular los dos coeficientes, por el lema fundamental del cálculo variacional. Recíprocamente, las ecuaciones

canónicas anulan la integral y las condiciones de extremo anulan el borde; la primera variación es cero. □

La integral permite comparar muchas curvas de fases. En una curva que cumple $\dot{q} = V(q, p, t)$, su integrando coincide con el lagrangiano original. La condición estacionaria impone esa relación mediante la variación de p. La estacionariedad expresa una primera variación nula; decidir si una curva produce un mínimo exige información adicional sobre las variaciones de orden superior.

Cambiar el borde y conservar la trayectoria

El capítulo anterior mostró que añadir $D_t F(q, t)$ al lagrangiano modifica la acción por un término de extremo. Ese cambio también traslada los momentos y cambia la expresión del Hamiltoniano. Supongamos F suave y una rama regular para L.

Proposición. Para $\widetilde{L} = L + D_t F$, los momentos y el Hamiltoniano transformados son

$$P = p + F_q, \qquad K(q, P, t) = H(q, P - F_q, t) - F_t.$$

Las ecuaciones canónicas de K describen las mismas curvas $q(t)$ que las de H, con $P(t) = p(t) + F_q(q(t), t)$.

Demostración. Como $D_t F = F_q \cdot v + F_t$, derivar respecto de v da $P = p + F_q$ y conserva la matriz W. Sustituir en $P \cdot v - \widetilde{L}$ deja $p \cdot v - L - F_t$, que da la fórmula de K. También $K_P = H_p$, de modo que la velocidad de q coincide.

Para comprobar el momento, las derivadas con P fijo dan, en notación matricial,

$$K_q = H_q - F_{qq} H_p - F_{tq}.$$

Por otra parte, derivar $P = p + F_q$ sobre la solución da $\dot{P} = -H_q + F_{qq}\dot{q} + F_{qt} = -K_q$, usando $\dot{q} = H_p$ e igualdad de derivadas mixtas. Las dos ecuaciones quedan verificadas, y la traslación inversa de momentos recupera la solución original. □

La relación entre los integrandos de acción es igualmente directa: $P \cdot \dot{q} - K = p \cdot \dot{q} - H + D_t F$. La trayectoria física y sus datos medibles se recuperan conservando la traducción entre ambas representaciones. Si una medición proporciona velocidad, el momento conjugado se obtiene del lagrangiano que efectivamente estamos usando.

Ejercicios

Los datos numéricos están en unidades SI salvo que se declaren variables adimensionales. Las coordenadas y los parámetros permanecen en los dominios indicados. Cada problema pide construir o comprobar una parte de la descripción, además de obtener un resultado.

1. Preparar el resorte

Un bloque tiene $m = 2$, $k = 8$, $q(0) = 0,3$ y $\dot{q}(0) = -0,4$. Construya H, obtenga la solución en (q, p) y calcule la energía y la amplitud. Determine el sentido de recorrido de su elipse.

2. Fuerza constante y energía negativa

Una partícula de masa $m = 2$ recibe una fuerza constante $F = 6$ en una recta. Use $U = -Fq$ y datos $q(0) = 0,5$, $p(0) = -2$. Obtenga el movimiento, el estado en $t = 1$ y el valor conservado de H. Interprete su signo.

3. Momentos mezclados

En variables adimensionales, sea $L = (v_1^2 + v_1 v_2 + v_2^2) + (v_1 - v_2) - (q_1^2 + q_2^2)/2$. Construya la matriz cinética, invierta los momentos y obtenga H y las ecuaciones. Calcule las velocidades y H en $q = (1, 0)$, $p = (3, 0)$.

4. La coordenada cuadrada

Una partícula cartesiana con $L = m\dot{x}^2/2 - kx^2/2$ se describe mediante $x = q^2$, con $q > 0$. Tome q con unidades de raíz de longitud. Obtenga su momento, su Hamiltoniano y sus ecuaciones. Explique qué ocurre al acercarse al borde $q = 0$ y cómo recuperar el movimiento cartesiano.

5. Momento de un ángulo

Una partícula plana en un potencial central $U(r)$ tiene $L = m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2)/2 - U(r)$, con $r > 0$. Construya los dos momentos, H y las cuatro ecuaciones. Identifique las unidades de cada momento y la velocidad tangencial.

6. Reducir y reconstruir la órbita

Para $U(r) = kr^2/2$, fije $p_\phi = \lambda \neq 0$. Obtenga el Hamiltoniano radial reducido, el radio de la órbita circular y la frecuencia de pequeñas oscilaciones radiales. Reconstruya la velocidad angular. Use también $m = k = \lambda = 1$ en variables adimensionales.

7. El cilindro del péndulo

Un péndulo rígido ideal tiene longitud ℓ, masa puntual m y ángulo θ medido desde abajo. Construya H usando energía potencial cero abajo. Obtenga los equilibrios, la energía que separa oscilación y rotación, y las ramas de la separatriz en $-\pi < \theta < \pi$.

8. El tiempo que una curva de energía conserva

Para el péndulo con $m = \ell = g = 1$ en variables adimensionales, use $\theta(0) = \pi/3$, $p(0) = 0$. Calcule la energía, el momento al pasar por abajo y una integral que dé el periodo. Determine por qué el tiempo de llegada a la posición superior sobre la separatriz es infinito.

9. Coordenadas que acompañan a un apoyo

Una partícula libre se describe por $x = q + a(t)$, con a prescrita. Construya p, H, las ecuaciones y dH/dt. Para $a(t) = At^2/2$, determine $\ddot{q}$ y compare H con la energía cinética del laboratorio.

10. Trasladar el momento mediante un borde

Al lagrangiano del resorte añada $D_t(a(t)q)$. Obtenga P, K y las ecuaciones transformadas. Compruebe que recuperan $m\ddot{q} = -kq$ y exprese la energía física mediante (q, P, t).

11. Un resorte cuya rigidez cambia

Un dispositivo prescribe una rigidez positiva $k(t)$, manteniendo fija la guía. Use $L = m\dot{q}^2/2 - k(t)q^2/2$. Obtenga el balance de energía y evalúelo en un instante con $q = 0,2$ y $\dot{k} = 3$. Indique qué intercambio incluye el modelo del dispositivo.

12. Fuerza viscosa añadida

Para el resorte fijo, añada $Q = -b\dot{q}$, con $b > 0$. Obtenga las ecuaciones en (q, p) y el balance de H. Evalúe la potencia para $m = 2$, $b = 0,4$, $p = 0,8$. Explique cómo cambia el retrato de fases.

13. Dos osciladores y sus momentos modales

En variables adimensionales, dos masas unitarias tienen $T = (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)/2$ y $U = (x_1^2 + x_2^2)/2 + (x_2 - x_1)^2/2$. Construya H y use $Q_\pm = (x_1 \pm x_2)/\sqrt{2}$, $P_\pm = (p_1 \pm p_2)/\sqrt{2}$ para separarlo. Resuelva los datos $x_1(0) = a$, $x_2(0) = 0$, $p_1(0) = p_2(0) = 0$.

14. Cambiar la escala de una coordenada

Un oscilador adimensional tiene $H = (p^2 + q^2)/2$. Introduzca $Q = \alpha q$, con $\alpha > 0$ constante. Determine el momento P que conserva el producto $p\,dq = P\,dQ$, obtenga el nuevo Hamiltoniano y compruebe sus ecuaciones. Compare con la propuesta $P = \alpha p$.

15. Elegir una rama de la inversión

Considere el lagrangiano adimensional $L(v) = v^4/4 - v^2/2$, independiente de q. Calcule los momentos y la matriz W. Determine sus dominios locales regulares y muestre que un mismo momento puede corresponder a tres velocidades. Exprese H de manera paramétrica en cada rama.

16. Una matriz cinética singular

Sea $L = m(\dot{x} + \dot{y})^2/2 - k(x + y)^2/2$, con $m, k > 0$. Calcule los momentos y el rango de W. Use $s = x + y$ y $d = x - y$ para describir las ecuaciones y los datos que determinan el movimiento de s. Explique el alcance de la indeterminación de d en este modelo.

17. La variación que determina la velocidad

Para $H = p^2/(2m) + kq^2/2$, calcule la primera variación de la acción de fases con posiciones extremas fijas. Muestre cómo las variaciones independientes de p y q recuperan ambas ecuaciones. Determine el término de borde si se permite variar una posición extrema.

18. Un potencial que viaja

Una partícula tiene $H(x, p, t) = p^2/(2m) + V(x - ut)$, con u constante. Use $q = x - ut$ y conserve el momento conjugado apropiado. Construya el Hamiltoniano K en esas variables, relaciónelo con la cantidad conservada del capítulo 23 y con la energía relativa al potencial.

19. La energía del método de Euler explícito

Para $H = (q^2 + p^2)/2$ en variables adimensionales, el método explícito usa $q_{n+1} = q_n + hp_n$, $p_{n+1} = p_n - hq_n$, con $h > 0$. Calcule exactamente el cambio de H por paso y después de N pasos. Evalúe $h = 0,1$, $N = 200$ y explique qué diagnostica ese crecimiento.

20. Una actualización que conserva otra elipse

Para el mismo oscilador, actualice primero $p_{n+1} = p_n - hq_n$ y después $q_{n+1} = q_n + hp_{n+1}$. Pruebe que conserva $I_h = (q^2 + p^2 - hqp)/2$, que esa forma es definida positiva para $0 < h < 2$ y que su error de energía permanece acotado para todos los pasos. Compare con el ejercicio 19 sin identificar los estados discretos con la solución exacta. Desde $(q_0, p_0) = (1, 0)$, obtenga una fórmula exacta para los estados discretos usando $a_h = \sqrt{1 - h^2/4}$ y $\vartheta_h = 2\arcsin(h/2)$. Puede verificarla directamente en la recurrencia. Compare el estado después de 200 pasos de tamaño $h = 0{,}1$ con el estado del oscilador exacto en el mismo tiempo. Examine qué parte de esa comparación controla la cota energética.

Soluciones

1. Preparar el resorte

El momento inicial se obtiene de la velocidad medida: $p_0 = 2(-0,4) = -0,8$. El Hamiltoniano es $H = p^2/4 + 4q^2$ y sus derivadas dan $\dot q = p/2$, $\dot p = -8q$. Derivar la primera ecuación y sustituir la segunda recupera $\ddot q = -4q$, cuya frecuencia es $\omega = 2$. Ajustar posición y derivada iniciales produce

$$q(t) = 0,3\cos(2t) - 0,2\sin(2t), \qquad p(t) = -1,2\sin(2t) - 0,8\cos(2t).$$

En $t = 0$ se recuperan ambos datos. La energía vale $H_0 = 0,16 + 0,36 = 0,52\,\mathrm{J}$ y la amplitud es $\sqrt{0,3^2 + 0,2^2} = \sqrt{0,13}\,\mathrm{m}$. Sustituir la solución en H cancela los términos cruzados y conserva $0,52$. Con q hacia la derecha y p hacia arriba, la órbita se recorre en sentido horario; en el estado inicial tanto $\dot q = -0,4$ como $\dot p = -2,4$ son negativos.

2. Fuerza constante y energía negativa

La inversión da $\dot q = p/2$ y $H = p^2/4 - 6q$. La derivada con respecto a q produce $\dot p = 6$: el signo reproduce la fuerza indicada. Integrar con los datos da

$$p(t) = -2 + 6t, \qquad q(t) = 0,5 - t + 1,5t^2.$$

En $t = 1$ resultan $p = 4\,\mathrm{kg\,m/s}$ y $q = 1\,\mathrm{m}$. El valor de H es $1 - 3 = -2\,\mathrm{J}$ al inicio y $4 - 6 = -2\,\mathrm{J}$ al final. El cero elegido para U fija ese signo; sumar una constante al potencial traslada todos los valores de energía y conserva las mismas fuerzas. El punto de retorno ocurre cuando $p = 0$, en $t = 1/3$, donde $q = 1/3\,\mathrm{m}$.

3. Momentos mezclados

La matriz y el término lineal son $G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $b = (1, -1)$. Sus autovalores son 1 y 3, ambos positivos. Sean $r_1 = p_1 - 1$, $r_2 = p_2 + 1$; entonces

$$G^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad v_1 = \frac{2r_1 - r_2}{3}, \quad v_2 = \frac{-r_1 + 2r_2}{3},$$

$$H = \frac{r_1^2 - r_1 r_2 + r_2^2}{3} + \frac{q_1^2 + q_2^2}{2}.$$

Las dos ecuaciones de posición son las expresiones de v_1, v_2 y las de momento son $\dot p_i = -q_i$. En los datos dados, $r = (2, 1)$, luego $v = (1, 0)$ y $H = 1 + 1/2 = 3/2$. Aunque la segunda velocidad vale cero, su momento es $p_2 = 0$ por la compensación entre el acoplamiento y el término lineal; la identificación de cada momento requiere conservar toda la derivada de L.

4. La coordenada cuadrada

La regla de la cadena da $\dot x = 2q\dot q$ y

$$L = 2mq^2\dot q^2 - \frac{1}{2}kq^4, \quad p = 4mq^2\dot q, \quad H = \frac{p^2}{8mq^2} + \frac{1}{2}kq^4.$$

Sobre $q > 0$, la matriz cinética escalar es $4mq^2 > 0$. Las ecuaciones resultan

$$\dot q = \frac{p}{4mq^2}, \qquad \dot p = \frac{p^2}{4mq^3} - 2kq^3.$$

El momento cartesiano es $p_x = m\dot x = p/(2q)$; por ello $p_x\,dx = p\,dq$ y la energía recupera $p_x^2/(2m) + kx^2/2$. La carta $q > 0$ cubre $x > 0$. En su borde la derivada $dx/dq = 2q$ se anula y la inversión coordenada pierde su regularidad. Si la trayectoria cartesiana cruza $x = 0$, se continúa usando x u otra carta adecuada. La singularidad de esta descripción tiene su origen en la elección $x = q^2$.

5. Momento de un ángulo

Las derivadas de L dan $p_r = m\dot{r}$ y $p_\phi = mr^2\dot{\phi}$. Su inversión es válida para $r > 0$, donde la matriz diagonal $\operatorname{diag}(m, mr^2)$ tiene determinante positivo. El Hamiltoniano y sus ecuaciones son

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} + U(r), \qquad \dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2},$$

$$\dot{p}_r = \frac{p_\phi^2}{mr^3} - U'(r), \qquad \dot{p}_\phi = 0.$$

El momento radial tiene unidades $\mathrm{kg\,m/s}$; el momento angular tiene unidades $\mathrm{kg\,m^2/s}$. La velocidad tangencial es $r\dot{\phi} = p_\phi/(mr)$, que conserva la dependencia del radio. Sustituir $p_\phi = mr^2\dot{\phi}$ en la ecuación radial recupera $m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = -U'(r)$, el balance de fuerza central.

6. Reducir y reconstruir la órbita

La coordenada ϕ es cíclica y su momento queda fijado por la preparación. En ese nivel, la evolución radial depende de

$$H_\lambda(r, p_r) = \frac{p_r^2}{2m} + U_{\mathrm{ef}}(r), \qquad U_{\mathrm{ef}}(r) = \frac{\lambda^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}kr^2.$$

Un radio constante exige $p_r = 0$ y $U'_{\mathrm{ef}}(r) = 0$, es decir $kr_0^4 = \lambda^2/m$. Por tanto $r_0 = (\lambda^2/(mk))^{1/4}$. La segunda derivada en ese radio es $3\lambda^2/(mr_0^4) + k = 4k$. Para $r = r_0 + \eta$, con $|\eta|/r_0 \ll 1$, la ecuación linealizada es $m\ddot{\eta} = -4k\eta$, cuya frecuencia es $2\sqrt{k/m}$. El error de fuerza de esa linealización es de orden η^2 localmente.

La reconstrucción angular requiere integrar $\dot{\phi} = \lambda/(mr(t)^2)$. En la órbita circular vale $\dot{\phi} = \operatorname{sgn}(\lambda)\sqrt{k/m}$. Para los parámetros unitarios, $r_0 = 1$, la frecuencia radial linealizada es 2 y la velocidad angular circular es 1. El término centrífugo del potencial efectivo expresa el momento fijado y la geometría de la reducción.

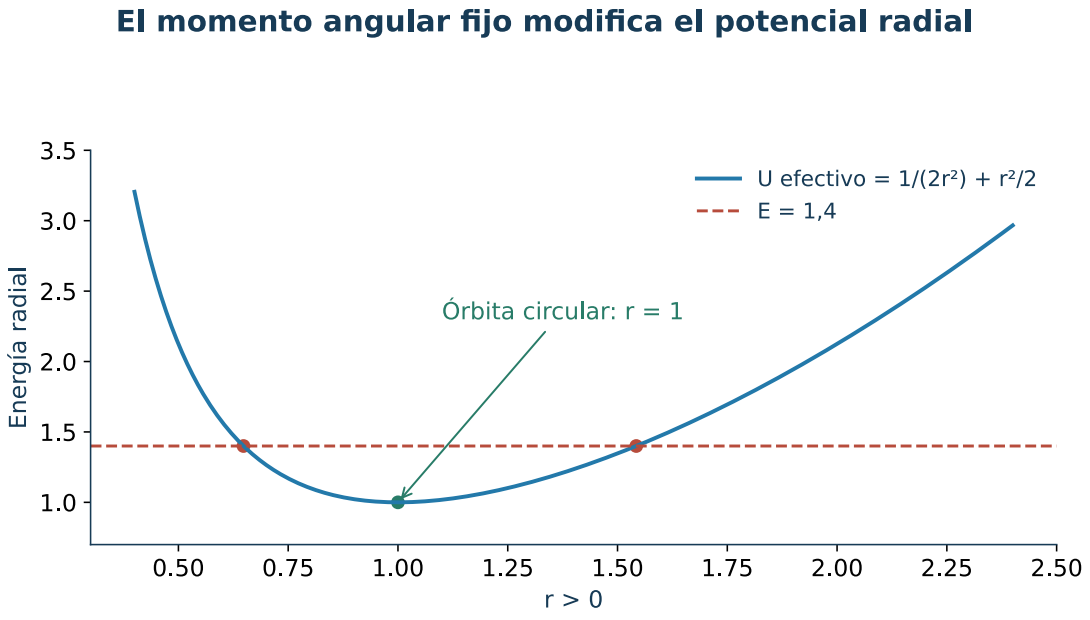


Figura 24.4. Para $m = k = \lambda = 1$, el potencial efectivo tiene mínimo en $r = 1$. La figura representa el movimiento radial reducido; la órbita plana exige integrar también la ecuación del ángulo.

7. El cilindro del péndulo

La velocidad de la masa tiene módulo $\ell|\dot\theta|$. Con $I = m\ell^2$ y $A = mg\ell$ se obtiene $p = I\dot\theta$ y

$$H = \frac{p^2}{2I} + A(1-\cos\theta), \qquad \dot\theta = \frac{p}{I}, \quad \dot p = -A\sin\theta.$$

Los equilibrios cumplen $p = 0$ y $\sin\theta = 0$. En el cilindro hay una posición inferior, $\theta = 0$ módulo 2π, y una superior, $\theta = \pi$ módulo 2π. Sus energías son 0 y $2A$. Para $0 < E < 2A$, el ángulo tiene retornos; para $E > 2A$, el momento mantiene un signo y hay rotación completa. En $E = 2A$,

$$p = \pm\sqrt{2IA(1+\cos\theta)} = \pm 2\sqrt{IA}\cos(\theta/2), \qquad -\pi < \theta < \pi.$$

La positividad del coseno en ese intervalo justifica retirar el valor absoluto. Los extremos del corte representan el mismo equilibrio superior. El signo de p selecciona la dirección de cada rama; el equilibrio mismo es una solución constante.

8. El tiempo que una curva de energía conserva

Los datos dan $E = 1-\cos(\pi/3) = 1/2$. Al llegar abajo, la conservación impone $p^2/2 = 1/2$, de donde $|p| = 1$. El primer cruce tiene $p = -1$ porque inicialmente $\dot p = -\sin(\pi/3) < 0$. Para obtener un cuarto del periodo podemos seguir la rama que va de abajo al retorno positivo:

$$\frac{T}{4} = \int_0^{\pi/3} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - 1/2)}}.$$

En el extremo superior el denominador se anula como una constante por $\sqrt{\pi/3-\theta}$, pues $\sin(\pi/3) > 0$. Esa singularidad es integrable y el periodo resulta finito. Sobre la separatriz positiva, $\dot\theta = 2\cos(\theta/2)$ y el tiempo es $\int d\theta/[2\cos(\theta/2)]$. Al escribir $\theta = \pi - \varepsilon$, el denominador es $2\sin(\varepsilon/2) \sim \varepsilon$. La integral diverge logarítmicamente cuando $\varepsilon \to 0^+$. La rama se aproxima a la posición superior durante tiempo infinito, en acuerdo con la unicidad de la evolución en el equilibrio.

9. Coordenadas que acompañan a un apoyo

La velocidad del laboratorio es $\dot x = \dot q + \dot a$. Por ello $L = m(\dot q + \dot a)^2/2$, $p = m(\dot q + \dot a)$ y

$$H = \frac{p^2}{2m} - \dot a\, p, \qquad \dot q = \frac{p}{m} - \dot a, \quad \dot p = 0, \quad \frac{dH}{dt} = -\ddot a\, p.$$

Integrar da $x(t) = x_0 + (p_0/m)t$ y $q(t) = x_0 + (p_0/m)t - a(t)$. Para $a = At^2/2$, $\ddot q = -A$, mientras $\ddot x = 0$. La energía cinética del laboratorio $E_{\mathrm{lab}} = p_0^2/(2m)$ permanece constante. El Hamiltoniano genera la evolución de q y cambia según la aceleración de la representación. El apoyo sólo define el origen móvil de coordenadas en este problema; una fuerza de contacto requeriría incorporarse al modelo.

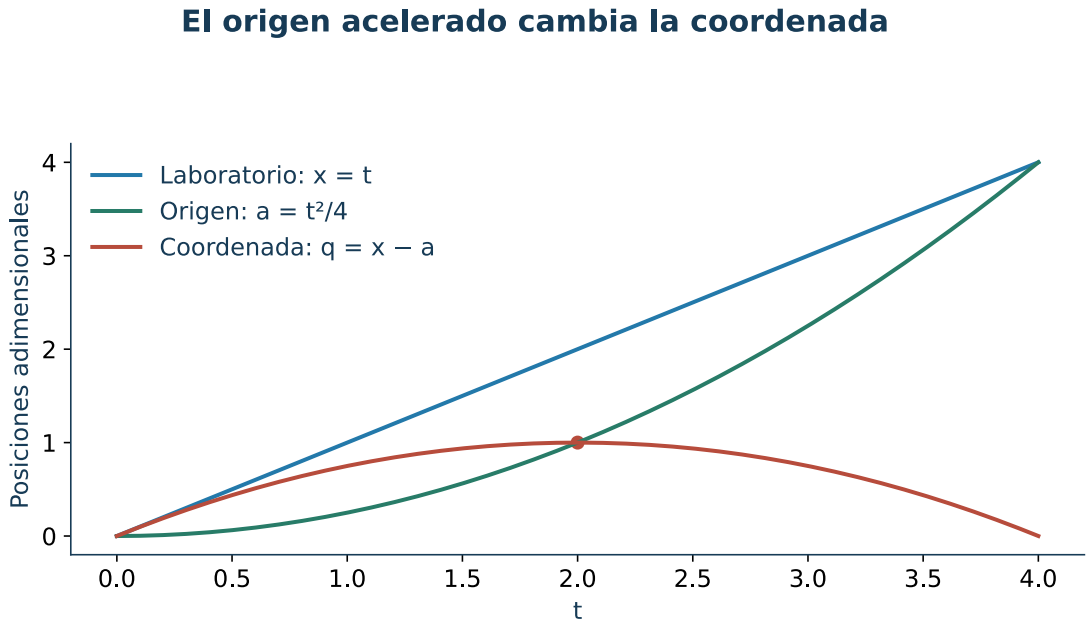


Figura 24.5. El movimiento libre $x = t$ conserva su velocidad de laboratorio. El origen prescrito $a = t^2/4$ produce la coordenada $q = x - a$. El máximo de q registra igualdad instantánea de velocidades.

10. Trasladar el momento mediante un borde

Expandir la derivada total da $D_t(aq) = a\dot{q} + \dot{a}\,q$. El momento transformado es $P = m\dot{q} + a$ y la fórmula de borde produce

$$K = \frac{(P-a)^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 - \dot{a}\,q, \qquad \dot{q} = \frac{P-a}{m}, \quad \dot{P} = -kq + \dot{a}.$$

Derivar $m\dot{q} = P - a$ y usar la segunda ecuación cancela $\dot{a}$, dejando $m\ddot{q} = -kq$. La energía física es $E = (P-a)^2/(2m) + kq^2/2$. Aun con a dependiente del tiempo, su derivada sobre la solución es $\dot{E} = \dot{q}(\dot{P} - \dot{a} + kq) = 0$. En un instante fijo, cada curva de energía queda trasladada en el eje del momento por la cantidad $a(t)$; la calibración que convierte velocidad medida en momento conjugado incluye esa cantidad.

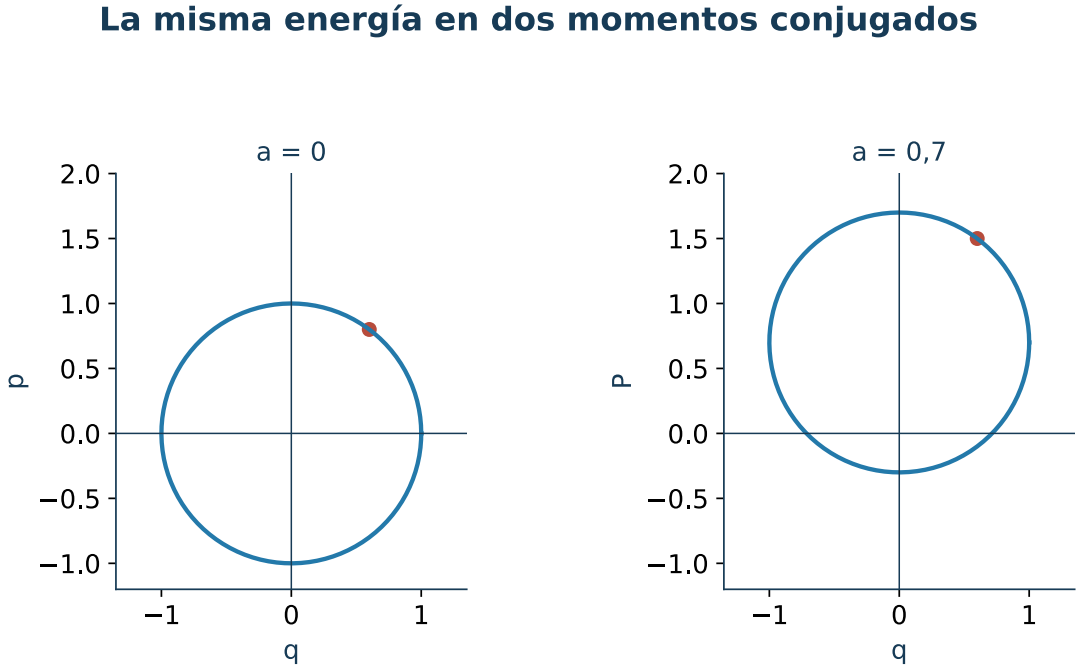


Figura 24.6. Para un oscilador unitario, la misma energía física se representa mediante $q^2 + p^2 = 1$ o $q^2 + (P - a)^2 = 1$. La traslación mostrada usa $a = 0,7$ en un instante fijo; las curvas representan energía física.

11. Un resorte cuya rigidez cambia

La inversión sigue dando $p = m\dot{q}$ y $H = p^2/(2m) + k(t)q^2/2$. Las ecuaciones son $\dot{q} = p/m$, $\dot{p} = -k(t)q$. Al derivar H, sus términos de movimiento se cancelan y queda

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{2}\dot{k}(t)q^2.$$

En el instante indicado resulta $\dot{H} = (3)(0,2)^2/2 = 0,06\,\mathrm{W}$. Aumentar la rigidez mientras el resorte está deformado aporta energía mecánica al subsistema descrito. El dispositivo que cambia k es externo y su acción entra mediante el parámetro prescrito. Incluirlo como parte de un sistema cerrado exigiría describir sus grados de libertad y su fuente de energía. Si el cambio ocurre al pasar por $q = 0$, la potencia instantánea de este término vale cero.

12. Fuerza viscosa añadida

Conservar el Hamiltoniano del resorte y evaluar la fuerza en la velocidad recuperada da

$$\dot{q} = \frac{p}{m}, \qquad \dot{p} = -kq - \frac{b}{m}p, \qquad \dot{H} = -\frac{b}{m^2}p^2 = -b\dot{q}^2.$$

Los parámetros dados producen $\dot{q} = 0,4\,\mathrm{m/s}$ y $\dot{H} = -0,064\,\mathrm{W}$. La fuerza añadida retira energía mecánica, que puede transferirse al medio como energía interna. En cada estado con velocidad distinta de cero el movimiento cruza niveles de energía hacia valores menores. Para $b^2 < 4mk$, las soluciones describen espirales que se acercan al origen; la clasificación crítica y sobreamortiguada exige otros retratos. El término de fuerza adicional conserva su presencia explícita en la ecuación de momento y en el balance.

13. Dos osciladores y sus momentos modales

Los momentos cartesianos son $p_i = \dot{x}_i$. La expansión del potencial da $U = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$. Las ecuaciones de momento son $\dot{p}_1 = -2x_1 + x_2$ y $\dot{p}_2 = x_1 - 2x_2$. La transformación ortogonal indicada conserva $p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 = P_+\,dQ_+ + P_-\,dQ_-$. En esas variables,

$$H = \frac{1}{2}(P_+^2 + Q_+^2) + \frac{1}{2}(P_-^2 + 3Q_-^2).$$

Los dos modos tienen frecuencias 1 y $\sqrt{3}$. Los datos dan $Q_+(0) = Q_-(0) = a/\sqrt{2}$ y momentos cero. La evolución es $Q_+ = a\cos t/\sqrt{2}$, $Q_- = a\cos(\sqrt{3}t)/\sqrt{2}$, $P_+ = -a\sin t/\sqrt{2}$, $P_- = -a\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t)/\sqrt{2}$. Volver a las posiciones proporciona

$$x_1 = \frac{a}{2}\left(\cos t + \cos(\sqrt{3}t)\right), \qquad x_2 = \frac{a}{2}\left(\cos t - \cos(\sqrt{3}t)\right).$$

Derivarlas recupera los momentos y los cuatro datos iniciales. Las energías modales son $a^2/4$ y $3a^2/4$; su suma a^2 coincide con la energía potencial de la preparación original. La separación permite reconstruir el intercambio entre piezas sin perder la preparación concreta.

14. Cambiar la escala de una coordenada

Como $dQ = \alpha\, dq$, la igualdad de los productos exige $P = p/\alpha$. Sustituir $q = Q/\alpha$ y $p = \alpha P$ produce

$$K(Q,P) = \frac{1}{2}\left(\alpha^2 P^2 + \frac{Q^2}{\alpha^2}\right), \quad \dot{Q} = \alpha^2 P, \quad \dot{P} = -\frac{Q}{\alpha^2}.$$

Estas ecuaciones coinciden con las obtenidas al derivar $Q = \alpha q$, $P = p/\alpha$ sobre la solución original. La propuesta alternativa $P = \alpha p$ daría $K = (P^2 + Q^2)/(2\alpha^2)$ por sustitución. Su ecuación canónica predeciría $\dot{Q} = P/\alpha^2$, mientras la trayectoria transformada cumple $\dot{Q} = P$. La discrepancia desaparece aquí sólo para $\alpha = 1$. La escala dual de momento conserva el producto que interviene en la acción y prepara el estudio de cambios de coordenadas en fases.

15. Elegir una rama de la inversión

Derivar respecto de la velocidad da $p = v^3 - v$ y $W = 3v^2 - 1$. Los intervalos $(-\infty, -1/\sqrt{3})$, $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ y $(1/\sqrt{3}, \infty)$ tienen W de signo constante y distinto de cero, de modo que $p(v)$ es estrictamente monótona y tiene inversa suave en cada imagen. En los extremos $v = \pm 1/\sqrt{3}$ la regularidad se pierde. Para $p = 0$, las velocidades $v = -1, 0, 1$ satisfacen la misma relación y son estados regulares.

El Hamiltoniano de cada rama puede describirse sin resolver la cúbica explícitamente:

$$p(v) = v^3 - v, \qquad H(p(v)) = \frac{3}{4}v^4 - \frac{1}{2}v^2.$$

Derivar respecto de v da $dH/dv = v(3v^2 - 1)$; dividir por dp/dv verifica $H_p = v$ en cada intervalo regular. Como $H_q = 0$, el momento y la velocidad de una rama permanecen constantes. Los estados con $p = 0$ producen velocidades distintas y valores de H iguales a 1/4, 0, 1/4, respectivamente. La elección de rama es parte de la representación del estado. Este ejemplo sirve para estudiar las hipótesis de inversión; su lagrangiano se presenta como modelo matemático adimensional.

16. Una matriz cinética singular

Los dos momentos coinciden: $p_x = p_y = m(\dot{x} + \dot{y})$. La matriz es $W = m\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, de rango uno. Los datos de momento pertenecen a la recta $p_x = p_y$ y conservan sólo la suma de las velocidades. En las coordenadas indicadas,

$$L = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 - \frac{1}{2}ks^2, \qquad m\ddot{s} = -ks, \qquad 0 = 0 \quad \text{para } d.$$

Los datos $s(0)$ y $\dot{s}(0)$ determinan un oscilador. Toda función suave $d(t)$, junto con ese $s(t)$, define $x = (s + d)/2$, $y = (s - d)/2$ que satisface las ecuaciones. El modelo asigna inercia y potencial a la suma; si x e y pretenden describir dos posiciones físicas medibles independientes, hace falta información dinámica adicional para determinar su diferencia.

La construcción regular del capítulo se aplica directamente al grado de libertad s. Una formulación con todos los momentos y sus restricciones requiere herramientas adicionales.

17. La variación que determina la velocidad

La variación del integrando es $\delta p\,\dot q + p\,\delta\dot q - (p/m)\delta p - kq\delta q$. Al integrar por partes se obtiene

$$\delta\mathcal{A} = [p\,\delta q]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} [(\dot q - p/m)\delta p - (\dot p + kq)\delta q]\,dt.$$

Con $\delta q = 0$ en los extremos, primero elegimos $\delta q = 0$ en todo el intervalo y δp arbitraria con soporte interior. La estacionariedad obliga a $\dot q = p/m$. Elegir después $\delta p = 0$ y variar q obliga a $\dot p = -kq$. La primera elección impone la relación entre momento y velocidad; la segunda impone la fuerza.

Si el extremo final de posición varía con el tiempo final fijo y sin término de borde añadido, queda $p(t_1)\delta q(t_1)$. Exigir estacionariedad para toda esa variación añade la condición natural $p(t_1) = 0$. Cambiar las condiciones de extremo cambia el problema variacional que estamos planteando.

18. Un potencial que viaja

Sustituir $x = q + ut$ en el lagrangiano original da $L = m(\dot q + u)^2/2 - V(q)$. Su momento sigue siendo $p = m(\dot q + u)$, el momento del laboratorio. La transformación de Legendre produce

$$K(q,p) = \frac{p^2}{2m} - up + V(q) = \frac{(p-mu)^2}{2m} + V(q) - \frac{1}{2}mu^2.$$

Sus ecuaciones son $\dot q = p/m - u$, $\dot p = -V'(q)$ y su autonomía hace constante a K. En las variables originales, ese valor es $H - up$, la cantidad conservada por la traslación conjunta de tiempo y posición del capítulo 23. La energía relativa al potencial es $E_{\mathrm{rel}} = m\dot q^2/2 + V(q) = K + mu^2/2$. La energía del laboratorio cumple $\dot H = -uV'(q) = u\dot p$, en acuerdo con el trabajo de un potencial que se desplaza.

19. La energía del método de Euler explícito

Expandir los cuadrados hace visibles los términos cruzados que se cancelan:

$$H_{n+1} = \frac{1}{2}\left[(q_n + hp_n)^2 + (p_n - hq_n)^2\right] = (1+h^2)H_n.$$

Por inducción, $H_N = (1+h^2)^N H_0$. Para $h = 0{,}1$ y $N = 200$, el factor es $1{,}01^{200} \simeq 7{,}316$. El oscilador continuo conserva H exactamente; el incremento calculado corresponde al esquema de actualización. Para un tiempo final fijo $T = Nh$, el factor tiende a uno al reducir h, porque $N\log(1+h^2) \sim Th$. A paso fijo, prolongar el número de pasos acumula el error de energía. La observación de crecimiento en una simulación exige por ello revisar el método y su paso junto con las hipótesis físicas.

20. Una actualización que conserva otra elipse

La actualización completa es $p' = p - hq$, $q' = (1-h^2)q + hp$. Sustituir ambos polinomios en $q'^2 + p'^2 - hq'p'$ y agrupar los coeficientes de q^2, qp y p^2 recupera $q^2 + p^2 - hqp$. Por tanto I_h se conserva en cada paso. También puede comprobarse usando $q' - q = hp'$ y $p' - p = -hq$ para cancelar las diferencias de los productos. La matriz simétrica de la forma $2I_h$ es $\begin{pmatrix} 1 & -h/2 \\ -h/2 & 1 \end{pmatrix}$ y sus autovalores son $1 \pm h/2$. Para $0 < h < 2$ ambos son positivos y se obtiene

$$(1 - h/2)H_n \le I_h \le (1 + h/2)H_n.$$

El mismo I_h en todos los pasos deja H_n entre $I_h/(1+h/2)$ e $I_h/(1-h/2)$. Como $I_h \le (1+h/2)H_0$, la diferencia entre dos energías de la secuencia satisface, en particular,

$$|H_n - H_0| \le \frac{h}{1-h/2} H_0.$$

La cota procede de la anchura del intervalo y vale para todo n. Para $h = 0,1$, resulta $|H_n - H_0| \le 0,1053 H_0$. El esquema sigue una elipse modificada y puede acumular desfase temporal; conservar una forma cercana a la energía controla una propiedad concreta del cálculo. La solución exacta sigue teniendo su propia fase y su energía H_0.

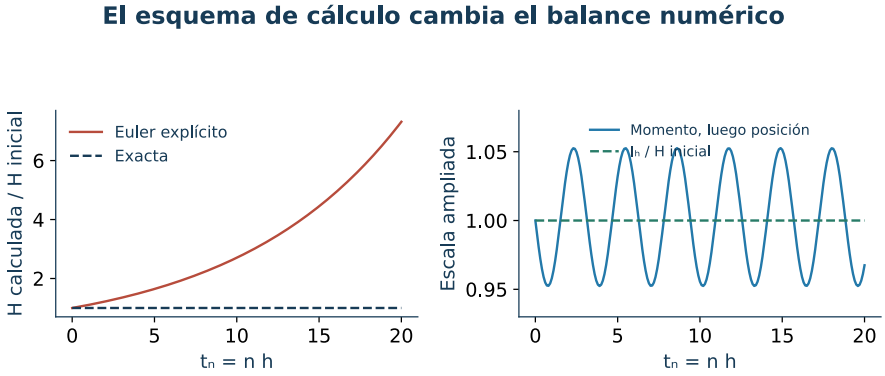


Figura 24.7. Desde $(q_0, p_0) = (1, 0)$, con $h = 0,1$, Euler explícito multiplica la energía por $1,01$ en cada paso. La actualización sucesiva de momento y posición conserva I_h y mantiene acotada la energía física calculada. Los puntos corresponden a estados discretos.

El estado se puede seguir sin acumular redondeos de doscientas actualizaciones. Para $0 < h < 2$, pongamos $a_h = \sqrt{1 - h^2/4}$ y $\vartheta_h = 2\arcsin(h/2)$. Entonces $\cos\vartheta_h = 1 - h^2/2$ y $\sin\vartheta_h = h a_h$. Las expresiones

$$q_n = \cos(n\vartheta_h) - \frac{h}{2a_h}\sin(n\vartheta_h), \qquad p_n = -\frac{1}{a_h}\sin(n\vartheta_h)$$

recuperan $(1, 0)$ cuando $n = 0$. Sustituirlas en $p_{n+1} = p_n - h q_n$ y en $q_{n+1} = q_n + h p_{n+1}$, usando las fórmulas de suma de seno y coseno, verifica ambas igualdades. La recurrencia determina de manera única cada estado siguiente, así que la fórmula representa toda la secuencia.

Para $h = 0{,}1$, $n = 200$ y tiempo $t = 20$, se obtiene aproximadamente $(q_n, p_n) = (0{,}35458, -0{,}91747)$. El estado exacto es $(\cos 20, -\sin 20) \simeq (0{,}40808, -0{,}91295)$. La distancia euclídea entre esos estados adimensionales es aproximadamente $0{,}05369$. La energía discreta permanece dentro de la banda demostrada, mientras la posición sobre la elipse difiere de la fase exacta. El capítulo 25 hará visible el reloj del esquema mediante un cambio canónico que convierte esa elipse en una circunferencia.

Lecturas y relaciones

Spivak, *Physics for Mathematicians. Mechanics I*, capítulo 16, pp. 515–517, construye la transformación de Legendre y la derivada por fibras; el capítulo 17, pp. 528–529 y 534–535, deriva las ecuaciones y su principio variacional. La convención de regularidad de este capítulo separa explícitamente inversión local e inversión global. Las pruebas se desarrollaron aquí incluyendo dependencia temporal y traducción a datos físicos.

Sears–Zemansky, Young y Freedman, *Física universitaria*, volumen 1, §14.3, p. 446, y Serway–Jewett, *Física para ciencias e ingeniería*, volumen 1, §15.3, pp. 394–396, permiten cotejar energía, amplitud y puntos de retorno del oscilador. Esos balances físicos son los que la curva de fases representa y los que una integración numérica debe controlar. Los ejercicios y las figuras de este capítulo son de elaboración propia.

Capítulo 25

Poisson y geometría del espacio de fases

Cambiar la escala de una coordenada del oscilador obligó a cambiar de manera recíproca la escala de su momento. Al escribir $Q = \alpha q$ y $P = p/\alpha$, las ecuaciones conservaron su forma; al multiplicar ambas variables por α, aparecieron factores adicionales. Esa diferencia plantea un problema concreto: elegir variables que simplifiquen el cálculo y conserven la relación entre una función de energía y el movimiento que genera.

También podemos seguir otras magnitudes sobre una órbita: la posición de una pieza, una componente de momento angular o una combinación de constantes. Cada una cambia por la regla de la cadena. El corchete de Poisson reunirá esa cuenta y permitirá reconocer cómo una misma función participa en dos tareas: describir una magnitud que medimos y generar una transformación de los estados. El momento lineal generará traslaciones; el momento angular, rotaciones.

La geometría que aparece conserva las parejas de posición y momento. Primero la construiremos en coordenadas mediante matrices y áreas orientadas. Los ejemplos exigirán distinguir esa estructura de la conservación de energía y del volumen de una región. Las coordenadas, los momentos y el Hamiltoniano provienen de un modelo mecánico ya elegido, con sus masas, vínculos y condiciones de preparación.

Derivar una magnitud sobre la órbita

Trabajamos localmente con n coordenadas independientes y momentos conjugados, y un Hamiltoniano suave $H(q, p, t)$. Usamos las ecuaciones canónicas sin fuerzas adicionales; cuando añadamos rozamiento, lo declararemos en la ecuación correspondiente. Para una función suave $f(q, p, t)$, la regla de la cadena da

$$\frac{df}{dt} = f_t + \sum_i \left(f_{q_i} H_{p_i} - f_{p_i} H_{q_i} \right).$$

La posición q_i selecciona H_{p_i}; el momento p_i selecciona $-H_{q_i}$. El resto de las funciones combina esas mismas dos operaciones. La masa, por ejemplo, sigue entrando a través del Hamiltoniano del aparato.

Definición. El corchete de Poisson de dos funciones f y g es la función

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} \right),$$

con las derivadas espaciales evaluadas al mismo instante si las funciones dependen del tiempo.

La operación combina la sensibilidad de cada función a posiciones y momentos. En particular, $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$, $\{q_i, q_j\} = 0$ y $\{p_i, p_j\} = 0$. Aquí δ_{ij} vale uno si los índices coinciden y cero en caso contrario. Estas igualdades fijan las parejas conjugadas y el signo de la convención.

Proposición. A lo largo de las ecuaciones canónicas,

$$\frac{df}{dt} = f_t + \{f, H\}.$$

Una función es integral primera para todas las soluciones de un dominio exactamente cuando $f_t + \{f, H\} = 0$ en ese dominio.

Demostración. La regla de la cadena escrita antes de la definición coincide término por término con el corchete. Si la expresión se anula en el dominio, la derivada de f vale cero en cualquier solución que permanezca allí. Recíprocamente, por cada estado e instante del dominio pasa una solución local del campo suave. Si f permanece constante en todas ellas, evaluar su derivada en cada dato inicial hace cero la expresión en todos los puntos. □

Para el oscilador $H = p^2/(2m) + kq^2/2$, resulta $\{q^2, H\} = 2qp/m$. El cuadrado de la elongación crece cuando posición y momento tienen igual signo y disminuye cuando tienen signos opuestos. La energía satisface $\{H, H\} = 0$; si depende del tiempo, su derivada total conserva el término H_t. La conservación de una magnitud se decide con todas sus dependencias presentes.

Una función que genera movimientos

A una función $g(q, p)$ le asociamos el campo $X_g = (g_p, -g_q)$. Sus curvas, parametrizadas por s, satisfacen $dq/ds = g_p$ y $dp/ds = -g_q$. Sobre ellas, $df/ds = \{f, g\}$. Cuando $g = H$, el parámetro es el tiempo físico. Otros generadores emplean parámetros con unidades diferentes: para $g = p$ en una recta, $dq/ds = 1$, $dp/ds = 0$ y s mide una traslación de longitud.

En el plano, $L_z = xp_y - yp_x$ genera

$$\frac{dx}{ds} = -y, \quad \frac{dy}{ds} = x, \quad \frac{dp_x}{ds} = -p_y, \quad \frac{dp_y}{ds} = p_x.$$

Las posiciones y los momentos giran con el mismo ángulo s. Para $g = L_z$, el producto entre la variación angular y el momento tiene unidades de acción. Si H conserva su valor bajo esas rotaciones, $\{H, L_z\} = 0$, y la antisimetría del corchete da $\{L_z, H\} = 0$: el momento angular se conserva en la evolución física. La invariancia del modelo bajo la transformación aporta la hipótesis que conecta ambas afirmaciones.

Un mismo giro para posición y momento

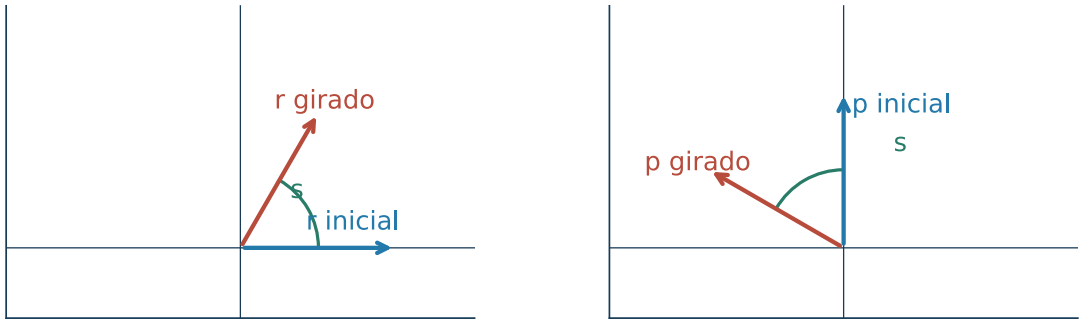


Figura 25.1. La transformación generada por L_z gira posición y momento con el mismo ángulo. El origen y el marco respecto de los cuales se define el momento angular permanecen fijados.

Proposición. El corchete es bilineal, antisimétrico y cumple la regla de producto y la identidad de Jacobi:

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\},$$

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0.$$

Si f y g son integrales primeras suaves, posiblemente dependientes del tiempo, también lo es $\{f, g\}$.

Demostración. La linealidad de las derivadas proporciona bilinealidad. Intercambiar f y g cambia el signo de cada sumando, y derivar el producto fg separa la expresión en los dos términos indicados.

Para comprobar Jacobi, agrupemos las variables como $z = (q, p)$ y escribamos

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}, \qquad \{f, g\} = \nabla f^{\mathsf{T}} J \nabla g.$$

La matriz J es constante y $J^{\mathsf{T}} = -J$. Al expandir la suma de Jacobi, cada término contiene una segunda derivada de una de las tres funciones. Los términos que contienen segundas derivadas de f se reúnen en

$$\sum_{i,j} f_{ij} \left[(J\nabla h)_i (J\nabla g)_j - (J\nabla g)_i (J\nabla h)_j \right].$$

El Hessiano f_{ij} es simétrico, mientras el corchete entre corchetes cuadrados cambia de signo al intercambiar i, j. La suma es cero por cancelación de cada pareja. Agrupar las segundas derivadas de g y después las de h da la misma cancelación y agota la expansión; Jacobi queda probada.

Sea $D_H f = f_t + \{f, H\}$. La derivada temporal distribuye sobre el corchete porque las derivadas mixtas conmutan. Jacobi reorganiza la parte hamiltoniana y produce

$$D_H\{f, g\} = \{D_H f, g\} + \{f, D_H g\}.$$

Cuando $D_H f = D_H g = 0$, el miembro derecho vale cero, y la primera proposición convierte esa identidad en conservación sobre todas las soluciones. □

La nueva integral puede coincidir con una de las conocidas o ser cero. Obtener una expresión conservada y probar que contiene información independiente son problemas diferentes. Los movimientos libres del ejercicio 17 permiten comprobar esa diferencia de manera explícita.

Áreas orientadas y parejas conjugadas

La forma matricial de las ecuaciones es $\dot{z} = J\nabla H$. Para dos pequeños desplazamientos del estado, $u = (u_q, u_p)$ y $v = (v_q, v_p)$, consideremos

$$\omega(u, v) = u^{\mathsf{T}} J v = \sum_i (u_{q_i} v_{p_i} - u_{p_i} v_{q_i}).$$

En un grado de libertad, es el área orientada del paralelogramo que forman ambos desplazamientos en el plano (q, p). El signo registra su orientación. En varios grados, suma las áreas orientadas proyectadas en cada plano conjugado. Las unidades de cada producto son las de acción, aunque las unidades de las coordenadas sean distintas.

Definición. La forma simpléctica canónica es la forma bilineal alternada ω dada por esa expresión. Su notación diferencial es $\omega = \sum_i dq_i \wedge dp_i$, donde $(dq_i \wedge dp_i)(u, v) = u_{q_i} v_{p_i} - v_{q_i} u_{p_i}$.

La alternancia significa $\omega(u, u) = 0$. La forma es no degenerada: si $\omega(u, v) = 0$ para todo v, elegir sucesivamente los vectores de las direcciones p_i y q_i obliga a $u_{q_i} = u_{p_i} = 0$. Con la convención de este capítulo, $\omega(X_H, v) = dH(v)$, pues $(J\nabla H)^{\mathsf{T}} J = \nabla H^{\mathsf{T}}$. Esta igualdad recupera el campo de movimiento a partir de las derivadas de H y de las parejas de posición y momento.

Definición. Una transformación canónica independiente del tiempo es un difeomorfismo local $Z = \Phi(z) = (Q, P)$ que preserva la forma simpléctica: para todo estado y todo par de desplazamientos tangentes, $\omega(D\Phi\, u, D\Phi\, v) = \omega(u, v)$.

El requisito compara todos los desplazamientos en cada estado. Permite que el cambio sea no lineal y que sus derivadas varíen de un lugar a otro. Para transformaciones que dependen del tiempo, exigiremos esta condición a cada instante fijo y calcularemos además el término temporal del Hamiltoniano.

Estirar q y comprimir p conserva el área

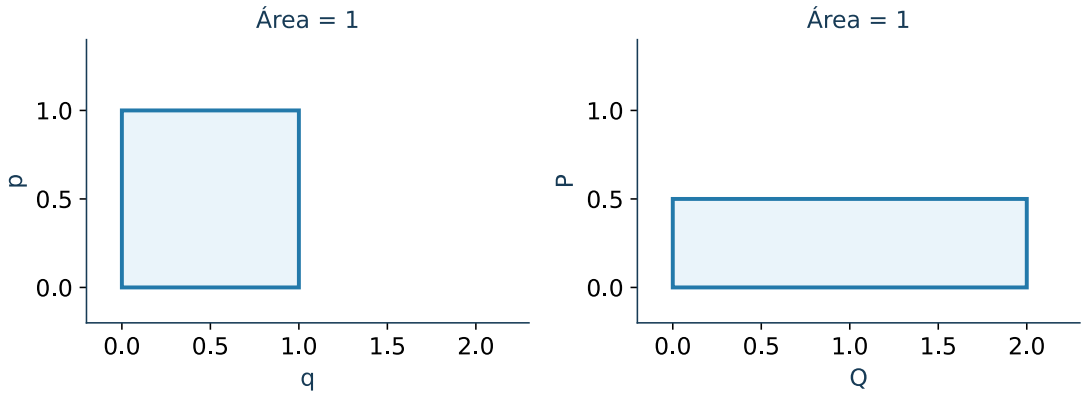


Figura 25.2. $Q = 2q$, $P = p/2$ estira una dirección y comprime su pareja. El paralelogramo conserva su área orientada. Las longitudes dibujadas se expresan en coordenadas adimensionales.

Comprobar una transformación

Proposición. Sea $A = D\Phi$ la matriz derivada de un difeomorfismo local independiente del tiempo. Son equivalentes la conservación de ω, la identidad $AJA^{\mathsf{T}} = J$ y las relaciones

$$\{Q_i, Q_j\} = 0, \quad \{P_i, P_j\} = 0, \quad \{Q_i, P_j\} = \delta_{ij}.$$

Estas condiciones equivalen también a transportar las ecuaciones canónicas de todo H a las de $K = H \circ \Phi^{-1}$. Bajo ellas, el corchete calculado en las nuevas variables representa la misma operación sobre funciones.

Demostración. La conservación de la forma es $A^{\mathsf{T}} J A = J$. Como A es invertible y $J^{-1} = -J$, invertir esa igualdad y multiplicar por A y A^{T} muestra su equivalencia con $AJA^{\mathsf{T}} = J$. Las entradas de esta última matriz son los corchetes de las funciones coordenadas que forman las filas de A, por la fórmula matricial ya demostrada; sus bloques dan las tres relaciones indicadas.

La regla de la cadena para $H(z) = K(\Phi(z))$ da $\nabla_z H = A^{\mathsf{T}} \nabla_Z K$. Sobre una solución,

$$\dot{Z} = A\dot{z} = AJA^{\mathsf{T}} \nabla_Z K.$$

La identidad matricial produce las ecuaciones canónicas de K. Recíprocamente, si esa forma se conserva para todo Hamiltoniano, podemos elegir funciones lineales cuya gradiente en el punto sea cualquier vector; por tanto las dos matrices que actúan sobre esa gradiente deben coincidir.

Para funciones $f(z) = F(\Phi(z))$ y $g(z) = G(\Phi(z))$, aplicar la regla de la cadena a ambas gradientes da $\{f, g\}_z = \nabla_Z F^{\mathsf{T}} AJA^{\mathsf{T}} \nabla_Z G = \{F, G\}_Z$. Las expresiones se evalúan en puntos correspondientes por Φ, que es el significado de preservar la operación. □

La prueba exige conservar las ecuaciones de todos los Hamiltonianos con el Hamiltoniano compuesto indicado. Un cambio puede funcionar accidentalmente para una función particular y carecer de esa propiedad estructural. En un plano de fases, la identidad $AJA^{\mathsf{T}} = (\det A)J$ reduce el criterio a $\det A = 1$. En cuatro dimensiones, ese determinante controla el volumen, mientras las entradas de la matriz siguen imponiendo las relaciones entre todas las parejas.

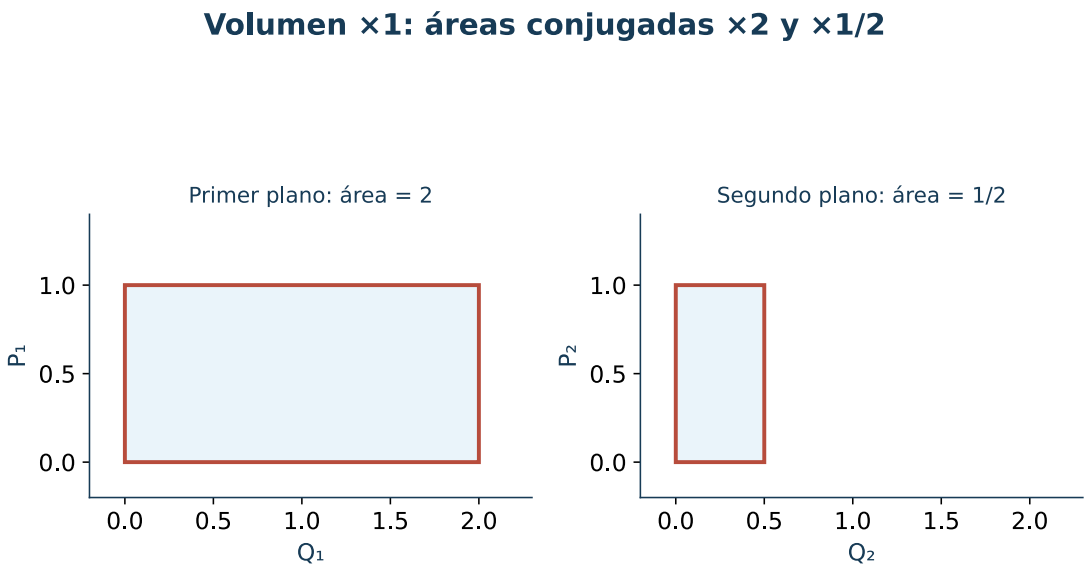


Figura 25.3. La transformación $Q_1 = 2q_1$, $Q_2 = q_2/2$, $P_1 = p_1$, $P_2 = p_2$ conserva el volumen de cuatro dimensiones. Las áreas de los dos planos conjugados se multiplican por 2 y por 1/2, respectivamente.

Cómo evoluciona una región de estados

Una región pequeña de fases puede describir preparaciones cercanas de un aparato: posiciones y momentos iniciales dentro de ciertos intervalos. La evolución transporta cada preparación siguiendo su propia solución. La región se estira y se inclina, incluso cuando su volumen permanece fijo. Interpretarla como incertidumbre exige además especificar una distribución de probabilidades y el procedimiento de preparación; la geometría por sí sola describe el transporte de estados.

Proposición. El flujo local entre dos instantes de un Hamiltoniano suave, incluso dependiente del tiempo, es canónico y conserva el volumen de fases $dq_1 \cdots dq_n\, dp_1 \cdots dp_n$.

Demostración. Sea $M(t)$ la derivada de la solución respecto del estado inicial, con $M(t_0) = I_{2n}$. Diferenciar las ecuaciones respecto de ese dato inicial da la ecuación variacional

$$\dot{M} = B(t)M, \qquad B(t) = JS(t), \qquad S(t) = D_z^2 H(z(t), t).$$

La suavidad permite esas derivadas y la simetría del Hessiano da $S^{\mathsf{T}} = S$. De aquí $B^{\mathsf{T}}J + JB = 0$. La derivada del producto matricial queda

$$\frac{d}{dt}(M^{\mathsf{T}} J M) = M^{\mathsf{T}}(B^{\mathsf{T}}J + JB)M = 0.$$

En el instante inicial el producto vale J, y por ello lo conserva: el flujo es canónico. Tomar determinantes produce $(\det M)^2 = 1$. Como $\det M$ es continuo y empieza en uno, permanece igual a uno en el intervalo de existencia. El cambio de variables en una integral de volumen prueba la conservación de toda región transportada dentro del dominio. $\square$

Éste es el teorema de Liouville en el alcance local considerado. La cancelación también aparece en la divergencia del campo: $\sum_i (H_{p_i q_i} - H_{q_i p_i}) = 0$. La autonomía de H conserva además energía; la dependencia temporal puede cambiar la energía mientras el volumen de fases permanece fijo. Con rozamiento viscoso la ecuación del momento recibe una fuerza adicional y el argumento cambia, como muestra el ejercicio 13.

El flujo libre inclina la región de preparaciones

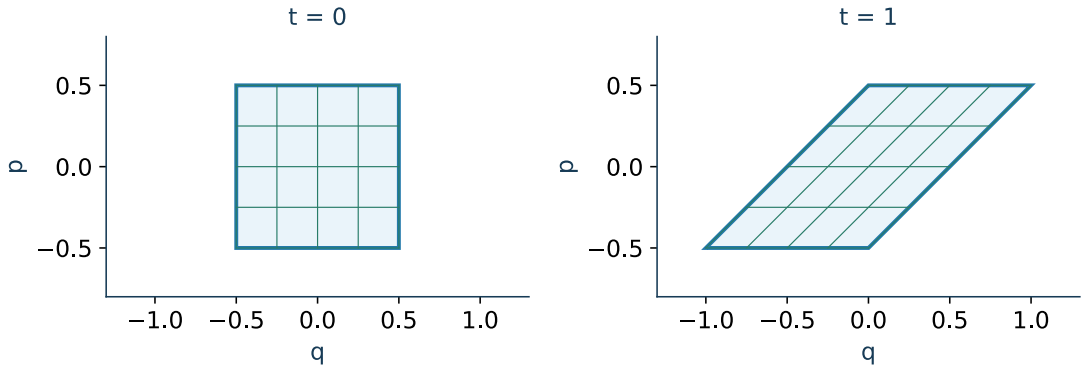


Figura 25.4. Para $H = p^2/2$ y tiempo unitario, el flujo es $(q, p) \mapsto (q + p, p)$. El cuadrado de preparaciones se transforma en un paralelogramo de igual área. Se muestra el transporte exacto del modelo adimensional.

Construir el cambio con una función generadora

A veces es más cómodo construir una transformación a partir de una función que verificar muchas relaciones después. Sea $F(q, P, t)$ suave, con matriz mixta F_{qP} invertible. Definimos las variables mediante

$$p = F_q(q, P, t), \qquad Q = F_P(q, P, t).$$

La primera relación permite resolver localmente P a partir de (q,p,t); la segunda da entonces Q. La matriz mixta invertible también permite resolver q a partir de (Q,P,t), y las dos relaciones construyen un difeomorfismo local a tiempo fijo.

Para diferenciar formas de primer grado usaremos la regla $d(\alpha)=\sum_j da_j\wedge dz_j$ cuando $\alpha=\sum_j a_j\,dz_j$. La igualdad de derivadas mixtas implica $d(dG)=0$ para una función suave G. Esta regla permitirá comprobar la forma simpléctica directamente sobre la identidad que proporciona F.

Proposición. El cambio así definido es canónico a cada instante. El Hamiltoniano que describe las trayectorias transformadas es

$$K(Q,P,t)=H(q,p,t)+F_t(q,P,t),$$

con (q,p) expresados en función de (Q,P,t). Sus integrandos de acción cumplen

$$p\cdot\dot q-H=P\cdot\dot Q-K+\frac{d}{dt}(F-P\cdot Q).$$

Demostración. Las relaciones definitorias producen $dF=p\cdot dq+Q\cdot dP+F_t\,dt$. Restar $d(P\cdot Q)$ y reordenar da la identidad diferencial de acciones. A tiempo fijo, aplicar la derivada exterior a $p\cdot dq-P\cdot dQ=d(F-P\cdot Q)$ da $\sum_i dp_i\wedge dq_i-\sum_i dP_i\wedge dQ_i=0$. Aquí usamos que la derivada de un diferencial exacto es cero, por igualdad de derivadas mixtas; el producto exterior ya fue definido sobre pares de desplazamientos. Cambiar el signo proporciona la conservación de ω.

Para obtener las ecuaciones con la dependencia temporal del cambio basta variar la identidad de acciones con variaciones de soporte interior. El término de extremo tiene primera variación cero para ellas; el difeomorfismo transforma variaciones interiores arbitrarias en variaciones interiores arbitrarias. La estacionariedad de ambas acciones es por tanto equivalente. El principio de acción de fases demostrado en el capítulo 24 da las ecuaciones de Hamilton de K. La identidad diferencial conserva los términos temporales y fija el signo positivo de F_t. $\square$

Para $F=q\cdot P$, se obtiene la identidad. Si $F=\alpha qP$, resultan $Q=\alpha q$, $P=p/\alpha$. Una dependencia temporal en F modifica K mediante su derivada parcial con q,P fijos. Esa cuenta volverá a aparecer en el potencial viajero y en un marco que gira.

El reloj de una elipse discreta

La actualización sucesiva del oscilador conservó en el capítulo 24 una elipse cercana a la curva de energía. Para estudiar también su ritmo podemos aprovechar la libertad de elegir variables canónicas: una cizalla retira el término cruzado de la forma conservada y una escala recíproca la convierte en una circunferencia.

Proposición. Para el esquema adimensional $p'=p-hq$, $q'=q+hp'$, con $0<h<2$, definamos

$$\gamma_h=(1-h^2/4)^{1/4},\qquad Q=\gamma_h q,\qquad P=\frac{p-hq/2}{\gamma_h},\qquad \vartheta_h=2\arcsin(h/2).$$

El cambio es canónico y transforma cada actualización en

$$\begin{pmatrix}Q'\\P'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\vartheta_h & \sin\vartheta_h\\ -\sin\vartheta_h & \cos\vartheta_h\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q\\P\end{pmatrix}.$$

La forma conservada es $I_h=\gamma_h^2(Q^2+P^2)/2$. En estas variables, el paso es el flujo exacto durante h del Hamiltoniano $\widehat H_h=\vartheta_h(Q^2+P^2)/(2h)$.

Demostración. Las derivadas dan $\{Q,P\}=\gamma_h/\gamma_h=1$ y los otros dos corchetes fundamentales son cero. El criterio del capítulo prueba que el cambio es canónico. Escribir $p=$

$\gamma_h P + hq/2$ en la actualización produce $Q' = (1-h^2/2)Q + h\gamma_h^2 P$ y $P' = -h\gamma_h^2 Q + (1-h^2/2)P$. Las identidades $\cos\vartheta_h = 1 - h^2/2$ y $\sin\vartheta_h = h\sqrt{1 - h^2/4}$ identifican la matriz de rotación. Además, $q^2 + p^2 - hqp = (p - hq/2)^2 + (1 - h^2/4)q^2 = \gamma_h^2(P^2 + Q^2)$. Finalmente, las ecuaciones de $\widehat{H}_h$ son $\dot{Q} = (\vartheta_h/h)P$ y $\dot{P} = -(\vartheta_h/h)Q$; su solución durante h da exactamente esa rotación. □

Para una órbita distinta del origen, escribamos $Q = R\cos\phi$, $P = -R\sin\phi$ y levantemos el ángulo de manera continua. El radio permanece fijo y la fase adaptada aumenta ϑ_h por paso. El oscilador que queríamos aproximar tiene frecuencia unitaria; el reloj del esquema tiene frecuencia ϑ_h/h. La diferencia se acumula aun cuando las áreas y la forma cuadrática se conservan. Este Hamiltoniano modificado describe exactamente este esquema lineal; otros métodos y modelos necesitan sus propios controles. El ejercicio 21 utiliza esa separación para elegir un paso a partir de una tolerancia temporal de fase.

Ejercicios

Las funciones se consideran suaves en los dominios indicados. Los ejemplos declarados adimensionales usan escalas de posición, momento y tiempo ya fijadas; las interpretaciones físicas conservan sus unidades explícitas.

1. Leer el intercambio de energía

Para $H = p^2/(2m) + kq^2/2$, calcule los corchetes de q, p, q^2, p^2 y qp con H. Use las dos energías $T = p^2/(2m)$ y $U = kq^2/2$ para comprobar su intercambio.

2. La derivada temporal explícita

Para una partícula en fuerza constante, $H = p^2/(2m) - Fq$, compruebe que $C_1 = p - Ft$ y $C_2 = tp - mq - Ft^2/2$ son integrales primeras. Calcule sus corchetes con H y explique el papel de sus derivadas temporales.

3. Integrar el generador de rotaciones

Calcule los cuatro corchetes de x, y, p_x, p_y con $L_z = xp_y - yp_x$. Integre el movimiento en el parámetro s y aplíquelo a $(x, y, p_x, p_y) = (1, 0, 0, 2)$ para $s = \pi/2$. Compare las transformaciones de posición y momento.

4. El álgebra del momento angular

En tres dimensiones, calcule $\{L_x, L_y\}$ para $L_x = yp_z - zp_y$, $L_y = zp_x - xp_z$. Obtenga las otras dos relaciones por permutación cíclica y compruebe $\{L_x, L^2\} = 0$, donde $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$.

5. La hipótesis del potencial central

Compruebe $\{L_z, H\} = 0$ para $H = (p_x^2 + p_y^2)/(2m) + U(\sqrt{x^2 + y^2})$ en $r > 0$. Repita el cálculo para $U = (k_x x^2 + k_y y^2)/2$. Interprete el resultado como torque y evalúelo en $x = 1$, $y = 2$, $k_x = 4$, $k_y = 9$.

6. Escalas recíprocas

Para $Q = \alpha q$, $P = p/\alpha$, con $\alpha > 0$ constante, verifique el criterio canónico y transforme el Hamiltoniano del oscilador. Calcule qué ocurre con el corchete si se propone en cambio $P = \alpha p$.

7. Una coordenada cúbica

En la carta $q > 0$, use $Q = q^3$ y busque P de modo que $p\,dq = P\,dQ$. Compruebe el corchete fundamental y transforme $H = p^2/(2m) + U(q)$. Verifique la ecuación de Q por la regla de la cadena.

8. Una cizalla en el momento

Sea $Q = q$, $P = p + aq$, con a constante y unidades de momento dividido por longitud. Construya el cambio mediante una función $F(q, P)$, obtenga el Hamiltoniano transformado del resorte y compruebe ambas ecuaciones.

9. Volumen y estructura en cuatro dimensiones

Considere $Q_1 = 2q_1$, $Q_2 = q_2/2$, $P_1 = p_1$, $P_2 = p_2$ en variables adimensionales. Calcule el determinante y los corchetes fundamentales. Para $H = (q_1^2 + q_2^2 + p_1^2 + p_2^2)/2$, compare las velocidades de las trayectorias transformadas con las ecuaciones canónicas del Hamiltoniano compuesto.

10. Acción y ángulo del oscilador

Sea $\omega_0 = \sqrt{k/m} > 0$. En el plano del oscilador fuera del origen, defina localmente $I = H/\omega_0$ y un ángulo por $q = \sqrt{2I/(m\omega_0)}\sin\theta$, $p = \sqrt{2m\omega_0 I}\cos\theta$. Compruebe $\{\theta, I\} = 1$, obtenga K y sus ecuaciones, y calcule $\oint p\,dq$ sobre una órbita en el sentido del movimiento.

11. La nube de preparaciones libres

Para $H = p^2/(2m)$, calcule el flujo en un intervalo Δt, su matriz derivada y el área de la imagen de un rectángulo de lados Δq, Δp. Determine cómo cambia la anchura de posiciones y qué correlación aparece.

12. El flujo exacto del resorte

Obtenga la matriz que lleva (q_0, p_0) a $(q(t), p(t))$ para el oscilador. Compruebe su determinante y el criterio simpléctico. Explique qué conserva además del área y cómo representan distintas masas el mismo ángulo de evolución.

13. El área con rozamiento

Para $\dot q = p/m$, $\dot p = -kq - (b/m)p$, con $b > 0$, determine la divergencia y el determinante del flujo. Calcule el factor de contracción de área en un segundo para $m = 2$, $b = 0,4$. Compare con el balance de energía del capítulo anterior.

14. Energía variable y volumen constante

Para $H = p^2/(2m) + k(t)q^2/2$, con $k(t) > 0$ suave, pruebe que el flujo conserva área aunque H pueda variar. Obtenga la ecuación para la matriz derivada del flujo e identifique qué propiedad asegura su determinante unitario.

15. Un cambio de momento que depende del tiempo

Use $F(q, P, t) = qP + a(t)q^2/2$ para transformar el oscilador fijo. Obtenga Q, P, K y sus ecuaciones. Compruebe que la trayectoria física sigue satisfaciendo $m\ddot Q = -kQ$.

16. Seguir un potencial que viaja

Para $H(q,p,t) = p^2/(2m) + V(q-ut)$, construya mediante $F(q,P,t) = (q-ut)P$ las variables que acompañan al potencial. Calcule K y la integral primera correspondiente en las variables originales.

17. Una integral obtenida de otras

Para una partícula libre en el plano, tome $f = p_x$ y $g = L_z$. Compruebe que ambas son integrales primeras y calcule $\{f,g\}$. Determine si el resultado añade información independiente al conjunto p_x, p_y, L_z.

18. Dos pasos de cálculo y sus áreas

Para el oscilador adimensional $H = (q^2+p^2)/2$, compare Euler explícito con la actualización $p' = p - hq$, $q' = q + hp'$. Calcule los determinantes de sus matrices y exprese el segundo esquema como composición de dos flujos hamiltonianos exactos. Interprete las propiedades que esa composición conserva.

19. Dos modos que se conservan mutuamente

En variables adimensionales, sean $H_+ = (P_+^2 + Q_+^2)/2$ y $H_- = (P_-^2 + 3Q_-^2)/2$, y $H = H_+ + H_-$. Calcule $\{H_+, H_-\}$ y describa dónde sus gradientes son independientes. Relacione estos resultados con las dos energías modales del capítulo 24.

20. Un marco que gira

Sea $R(\varphi)$ la matriz de rotación plana positiva. Use $Q = R(-\Omega t)q$ y $F(q,P,t) = (R(-\Omega t)q)\cdot P$ para el oscilador isótropo $H = \|p\|^2/(2m) + k\|q\|^2/2$. Obtenga p, K, sus ecuaciones y la ecuación de segundo orden de Q. Compare la energía física con el Hamiltoniano del marco giratorio.

21. Elegir el paso para controlar la fase

Para la actualización sucesiva del oscilador, considere la fase adaptada de la proposición y un horizonte adimensional $T = 1000 = Nh$. Compare su avance con el reloj unitario del oscilador, usando el mismo valor inicial de fase. Calcule el adelanto para $h = 0{,}1$. Demuestre la cota

$$0 \le N(\vartheta_h - h) \le \frac{Th^2}{24(1-h^2/4)^{3/2}}, \qquad 0 < h < 2,$$

y decida si $h = 0{,}01$, con un número entero de pasos, garantiza un adelanto no mayor que $0{,}01$ radianes. Distinga esta comparación de relojes de la distancia del estado en las coordenadas originales.

Soluciones

1. Leer el intercambio de energía

Las derivadas de H son $H_p = p/m$ y $H_q = kq$. Aplicar la definición da

$$\{q,H\} = p/m, \quad \{p,H\} = -kq, \quad \{q^2,H\} = 2qp/m, \quad \{p^2,H\} = -2kqp,$$

$$\{qp,H\} = p^2/m - kq^2.$$

La última cantidad compara dos veces la energía cinética con dos veces la potencial. Como T depende sólo de p, su derivada es $\dot T = -kqp/m$. Para U resulta $\dot U = kqp/m$. Ambas

aportaciones se cancelan en $\dot{H}$ y cuantifican el intercambio en cada estado. Cuando $qp > 0$, el bloque se aleja del equilibrio y almacena energía potencial; cuando $qp < 0$, se acerca y recupera energía cinética.

2. La derivada temporal explícita

El Hamiltoniano da $H_p = p/m$ y $H_q = -F$. Por ello $\{C_1, H\} = F$, mientras $(C_1)_t = -F$. La suma vale cero. Para la segunda función, $(C_2)_q = -m$, $(C_2)_p = t$ y $(C_2)_t = p - Ft$, de donde

$$\{C_2, H\} = -p + Ft, \qquad (C_2)_t + \{C_2, H\} = 0.$$

Integrar las ecuaciones produce $p = p_0 + Ft$, $q = q_0 + (p_0/m)t + Ft^2/(2m)$. Sustituir da $C_1 = p_0$ y $C_2 = -mq_0$. Las funciones recuperan datos iniciales descontando el efecto conocido de la fuerza. La prueba de conservación requiere sus derivadas temporales; el corchete aislado expresa sólo la parte del cambio que procede de la evolución del estado.

3. Integrar el generador de rotaciones

La definición selecciona las derivadas $\{x, L_z\} = -y$, $\{y, L_z\} = x$, $\{p_x, L_z\} = -p_y$ y $\{p_y, L_z\} = p_x$. Si $r = (x, y)$ y $p = (p_x, p_y)$, los dos pares cumplen la misma ecuación $w' = Cw$, donde $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C^2 = -I_2$. Su solución es

$$r(s) = R(s)r(0), \quad p(s) = R(s)p(0), \qquad R(s) = \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{pmatrix}.$$

Con los datos indicados y $s = \pi/2$, se obtiene $r = (0, 1)$ y $p = (-2, 0)$. El valor de L_z sigue siendo 2 en las unidades correspondientes. El mismo giro de ambos vectores conserva su producto cruzado y la estructura del estado. El parámetro s es el ángulo de transformación; un Hamiltoniano concreto fijará el movimiento físico en el tiempo.

4. El álgebra del momento angular

En $\{L_x, L_y\}$, la pareja (x, p_x) aporta 0, y la pareja (y, p_y) también aporta 0. La pareja (z, p_z) aporta

$$(-p_y)(-x) - y(p_x) = xp_y - yp_x = L_z.$$

Permutar cíclicamente x, y, z conserva la forma de la definición y da $\{L_y, L_z\} = L_x$, $\{L_z, L_x\} = L_y$. La antisimetría fija las relaciones con los argumentos invertidos. Con la regla de producto,

$$\{L_x, L^2\} = 2L_y\{L_x, L_y\} + 2L_z\{L_x, L_z\} = 2L_yL_z - 2L_zL_y = 0.$$

El generador de rotaciones sobre un eje conserva el cuadrado de la longitud del vector momento angular. Las tres componentes se relacionan mediante las rotaciones que generan.

5. La hipótesis del potencial central

La parte cinética da $\{L_z, T\} = p_yp_x/m - p_xp_y/m = 0$. Para cualquier potencial de posición,

$$\{L_z, U\} = yU_x - xU_y.$$

Si $U = U(r)$, entonces $U_x = U'(r)x/r$ y $U_y = U'(r)y/r$, y la combinación se cancela. Para el potencial anisótropo resulta $\dot{L}_z = (k_x - k_y)xy$. También el torque calculado directamente es $xF_y - yF_x = x(-k_yy) - y(-k_xx)$ y reproduce el mismo valor. Los datos proporcionan

$\dot{L}_z = -10\,\mathrm{N\,m}$ en unidades SI. La dependencia del potencial selecciona la simetría que necesita el argumento de conservación.

6. Escalas recíprocas

Las únicas derivadas distintas de cero son $Q_q = \alpha$ y $P_p = 1/\alpha$, de modo que $\{Q, P\} = 1$. La transformación es invertible y su Hamiltoniano compuesto vale

$$K = \frac{\alpha^2 P^2}{2m} + \frac{kQ^2}{2\alpha^2}, \qquad \dot{Q} = \frac{\alpha^2 P}{m}, \quad \dot{P} = -\frac{kQ}{\alpha^2}.$$

Estas ecuaciones coinciden con las derivadas de las variables transformadas sobre el movimiento original. Para la propuesta $P = \alpha p$, el corchete vale α^2. Cuando $\alpha \neq 1$, ese cambio conserva una relación escalada entre ambas direcciones y altera las ecuaciones canónicas del Hamiltoniano compuesto. La escala recíproca de la primera propuesta mantiene las áreas conjugadas y el producto $p\,dq$.

7. Una coordenada cúbica

Diferenciar $Q = q^3$ da $dQ = 3q^2\,dq$. La igualdad de los productos exige $P = p/(3q^2)$ y el corchete es $\{Q, P\} = (3q^2)(1/(3q^2)) = 1$. La inversa sobre $q > 0$ es $q = Q^{1/3}$, $p = 3Q^{2/3}P$, con $Q > 0$. Por tanto,

$$K(Q, P) = \frac{9Q^{4/3}P^2}{2m} + U(Q^{1/3}), \qquad \dot{Q} = \frac{9Q^{4/3}P}{m}.$$

La regla de la cadena original da $\dot{Q} = 3q^2\dot{q} = 3q^2 p/m$, que tras sustituir $p = 3q^2 P$ coincide con la fórmula obtenida. La segunda ecuación es $\dot{P} = -6Q^{1/3}P^2/m - U'(Q^{1/3})/(3Q^{2/3})$. La carta y su inversa son suaves sobre sus dominios positivos; llegar a su borde exige revisar la representación, como en el cambio cuadrático del capítulo anterior.

8. Una cizalla en el momento

La función $F = qP - aq^2/2$ produce $p = P - aq$ y $Q = q$. La matriz mixta escalar es uno, y el cambio es canónico; directamente, $\{q, p + aq\} = 1$. Como F es independiente del tiempo,

$$K = \frac{(P - aQ)^2}{2m} + \frac{1}{2}kQ^2, \qquad \dot{Q} = \frac{P - aQ}{m}, \quad \dot{P} = \frac{a}{m}(P - aQ) - kQ.$$

Derivar $P = p + aq$ sobre el movimiento original da $\dot{P} = -kq + a\dot{q}$, que coincide con la segunda ecuación. Cada recta de momento fijo se inclina en el nuevo plano. La magnitud mecánica $m\dot{Q}$ se recupera como $P - aQ$, y su derivada sigue siendo $-kQ$.

9. Volumen y estructura en cuatro dimensiones

En el orden (q_1, q_2, p_1, p_2), la matriz derivada es diagonal con entradas $2, 1/2, 1, 1$. Su determinante vale uno. Los corchetes mezclados cruzados son cero, pero $\{Q_1, P_1\} = 2$ y $\{Q_2, P_2\} = 1/2$. La transformación modifica las dos áreas conjugadas en factores recíprocos y conserva su producto.

El Hamiltoniano compuesto es $K = (Q_1^2/4 + 4Q_2^2 + P_1^2 + P_2^2)/2$. La trayectoria transformada cumple

$$\dot{Q}_1 = 2P_1, \quad \dot{Q}_2 = P_2/2, \quad \dot{P}_1 = -Q_1/2, \quad \dot{P}_2 = -2Q_2.$$

Las ecuaciones canónicas de K darían en cambio $\dot{Q}_1 = P_1$, $\dot{Q}_2 = P_2$, $\dot{P}_1 = -Q_1/4$, $\dot{P}_2 = -4Q_2$. Las diferencias son los mismos factores que aparecieron en los corchetes. El determinante expresa aquí una conservación de volumen que deja abiertas las relaciones de cada pareja.

10. Acción y ángulo del oscilador

Escribamos $D = p^2 + m^2\omega_0^2 q^2$. En una carta angular, $\theta = \operatorname{atan2}(m\omega_0 q, p)$ tiene derivadas $\theta_q = m\omega_0 p/D$ y $\theta_p = -m\omega_0 q/D$. Por otra parte,

$$I = \frac{p^2}{2m\omega_0} + \frac{m\omega_0 q^2}{2}, \qquad I_p = \frac{p}{m\omega_0}, \qquad I_q = m\omega_0 q.$$

Sustituir en el corchete da $\{\theta, I\} = (p^2 + m^2\omega_0^2 q^2)/D = 1$. El Hamiltoniano es $K = \omega_0 I$, por lo que $\dot\theta = \omega_0$, $\dot I = 0$. En una órbita con $I > 0$,

$$\oint p\,dq = \int_0^{2\pi} 2I\cos^2\theta\,d\theta = 2\pi I.$$

La integral es positiva con el recorrido físico y equivale al área encerrada en magnitud, para esta convención de $p\,dq$. El ángulo vive módulo 2π y las derivadas usadas son locales; el origen corresponde a $I = 0$ y requiere otra carta. La acción I tiene unidades de energía multiplicada por tiempo, pues se obtiene dividiendo energía por una frecuencia.

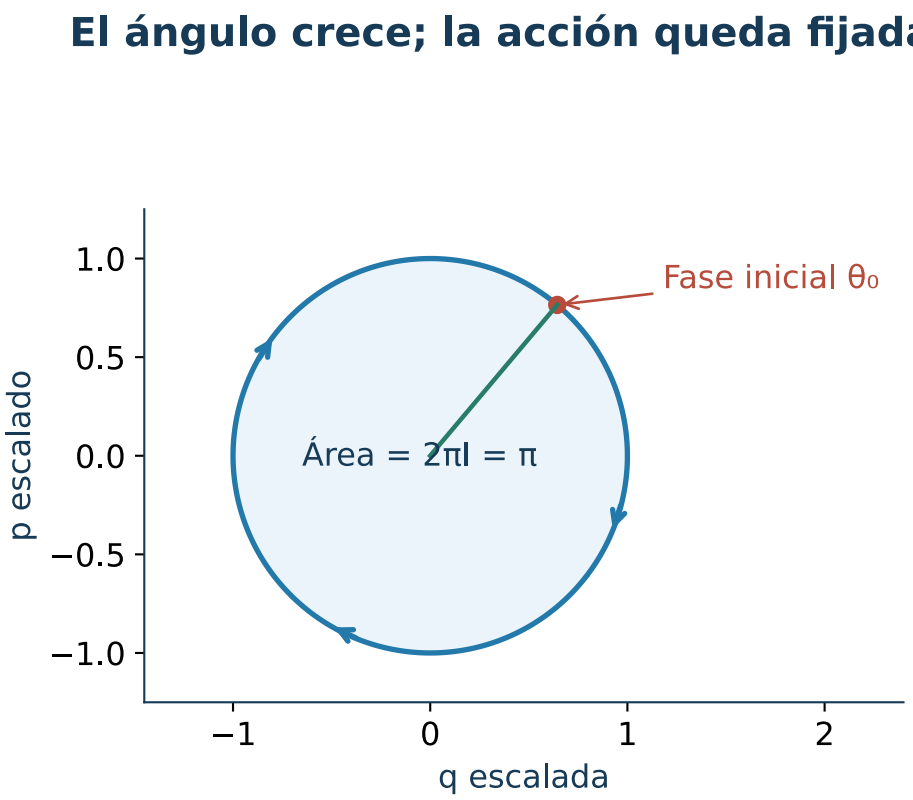


Figura 25.5. Para el oscilador unitario con $I = 1/2$, la elipse es una circunferencia en las coordenadas escaladas. El ángulo aumenta uniformemente y el área encerrada vale $2\pi I$. El punto inicial fija la fase.

11. La nube de preparaciones libres

El momento permanece constante y la posición crece linealmente. En un intervalo Δt,

$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t/m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ p_0 \end{pmatrix}.$$

El determinante es uno y la imagen del rectángulo es un paralelogramo de área $\Delta q\,\Delta p$. Para $\Delta t \geq 0$, sus posiciones abarcan una anchura $\Delta q + (\Delta t/m)\Delta p$, aunque el área se conserve. Las preparaciones con momento mayor avanzan más y hacen que la región se incline. Si, además, la preparación inicial es uniforme en un rectángulo con q_0, p_0 independientes, su covarianza final es $\mathrm{Cov}(q,p) = (\Delta t/m)\,\mathrm{Var}(p_0)$. Esta última afirmación usa la hipótesis probabilística añadida; el cizallamiento de la región se obtiene directamente del flujo.

12. El flujo exacto del resorte

Con $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, resolver la segunda ecuación después de derivar la primera da

$$M(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) & \sin(\omega_0 t)/(m\omega_0) \\ -m\omega_0 \sin(\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t) \end{pmatrix}.$$

Su determinante es $\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t) = 1$, que en un plano equivale al criterio simpléctico. La sustitución en $p^2/(2m) + kq^2/2$ conserva además la energía de cada estado. En las variables escaladas $X = \sqrt{m\omega_0}\,q$, $Y = p/\sqrt{m\omega_0}$, la matriz es $\begin{pmatrix} \cos & \sin \\ -\sin & \cos \end{pmatrix}$: una rotación horaria en el plano (X, Y). El ángulo de evolución es $\omega_0 t$; las masas y rigideces fijan la frecuencia y la traducción de esas escalas a medidas físicas.

13. El área con rozamiento

La matriz del campo es $B = \begin{pmatrix} 0 & 1/m \\ -k & -b/m \end{pmatrix}$ y su traza, igual a la divergencia, es $-b/m$. Si M es la matriz del flujo, la identidad de derivación del determinante da $d(\det M)/dt = \mathrm{tr}(B)\det M$, con valor inicial uno. Integrar produce $\det M = e^{-bt/m}$, por lo que una región de área A_0 pasa a tener $A(t) = e^{-bt/m}A_0$. Para los datos indicados y un segundo, el factor es $e^{-0{,}2} \simeq 0{,}8187$.

El balance de energía es $\dot H = -bp^2/m^2$. La contracción describe el cambio de una familia de preparaciones; el balance describe la pérdida de energía de cada solución, según su momento. Ambas consecuencias proceden de la misma fuerza viscosa añadida al modelo. El flujo en las variables físicas (q, p) tiene ese determinante y queda fuera de la clase canónica definida aquí.

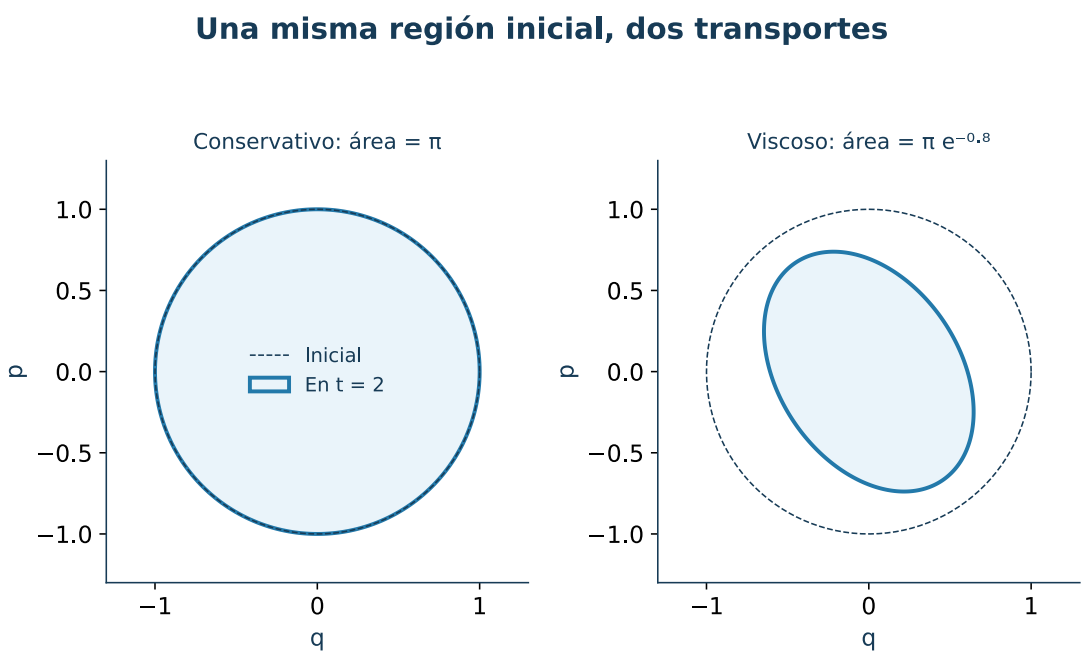


Figura 25.6. El oscilador unitario transporta un disco de estados conservando su área. Con $b = 0,4$ y $m = k = 1$, el mismo conjunto inicial pierde área por el factor $e^{-bt/m}$. Ambas imágenes se calculan mediante los flujos lineales exactos hasta $t = 2$.

14. Energía variable y volumen constante

Las ecuaciones son $\dot q = p/m$ y $\dot p = -k(t)q$. La variación respecto del estado inicial satisface

$$\dot M = \begin{pmatrix} 0 & 1/m \\ -k(t) & 0 \end{pmatrix} M, \qquad M(t_0) = I_2.$$

La matriz del campo tiene traza cero en todo instante. La ecuación del determinante usada en el problema anterior da $\det M = 1$. También puede verificarse directamente $B^{\mathsf T}J + JB = 0$, que conserva la forma completa. En cambio, la energía satisface $\dot H = \dot k(t) q^2/2$. Un mecanismo externo puede aportar energía cambiando la rigidez mientras el flujo sigue preservando el área de fases. La propiedad simpléctica y el balance energético responden a hipótesis distintas del mismo modelo.

15. Un cambio de momento que depende del tiempo

Derivar F da $p = P + aq$ y $Q = q$, luego $P = p - aq$. La matriz mixta vale uno. Mantener q, P fijos al derivar respecto del tiempo da $F_t = \dot a\, q^2/2$ y, por tanto,

$$K = \frac{(P + aQ)^2}{2m} + \frac{1}{2}kQ^2 + \frac{1}{2}\dot a\, Q^2,$$

$$\dot Q = \frac{P + aQ}{m}, \qquad \dot P = -\frac{a}{m}(P + aQ) - kQ - \dot a\, Q.$$

Al derivar $m\dot Q = P + aQ$, se obtiene $m\ddot Q = \dot P + \dot a\, Q + a\dot Q$. Sustituir ambas ecuaciones cancela los términos con a y $\dot a$, dejando $-kQ$. La energía física se representa por $(P + aQ)^2/(2m) + kQ^2/2$ y permanece constante. El término temporal de K compensa la variación de las nuevas coordenadas de momento.

16. Seguir un potencial que viaja

La generadora da $p = P$ y $Q = q - ut$. Como $F_t = -uP$, la expresión correcta es

$$K(Q,P) = \frac{P^2}{2m} + V(Q) - uP.$$

Sus ecuaciones son $\dot{Q} = P/m - u$, $\dot{P} = -V'(Q)$. La independencia temporal de K conserva su valor. En las variables originales, esa cantidad es $p^2/(2m) + V(q-ut) - up = H - up$. Su derivada por la fórmula de Poisson se anula porque $H_t = -uV'(q-ut)$ y $\dot{p} = -V'(q-ut)$. El marco móvil convierte la combinación conservada de energía y momento en un Hamiltoniano autónomo.

17. Una integral obtenida de otras

Para $H = (p_x^2+p_y^2)/(2m)$, la ausencia de posiciones da $\{p_x, H\} = 0$. El cálculo del ejercicio 5 con potencial constante da $\{L_z, H\} = 0$. El nuevo corchete es

$$\{p_x, L_z\} = -\frac{\partial L_z}{\partial x} = -p_y.$$

La regla de conservación por corchetes predice correctamente que p_y permanece constante. Si el conjunto ya incluía p_x, p_y, L_z, el resultado pertenece a las funciones que conocíamos; su gradiente está contenida en las de ese conjunto. La construcción produce una relación útil entre generadores, y su aporte a la determinación de una órbita se evalúa comprobando independencia.

18. Dos pasos de cálculo y sus áreas

Las matrices de Euler explícito y de la actualización sucesiva son, respectivamente,

$$E_h = \begin{pmatrix} 1 & h \\ -h & 1 \end{pmatrix}, \qquad S_h = \begin{pmatrix} 1-h^2 & h \\ -h & 1 \end{pmatrix}.$$

Sus determinantes son $1+h^2$ y 1. En el segundo caso, primero se aplica el flujo de $U = q^2/2$ durante h: mantiene q y lleva p a $p - hq$. Después se aplica el flujo de $T = p^2/2$ durante h: mantiene el momento actualizado y lleva q a $q + hp'$. Cada flujo es canónico, y su composición conserva la forma por aplicación sucesiva de la definición.

El capítulo anterior calculó que S_h conserva una forma cuadrática cercana a la energía para $0 < h < 2$. La conservación de área demostrada aquí vale para cualquier h; su utilidad como aproximación temporal exige también controlar estabilidad y error. La composición representa una aproximación a la evolución del Hamiltoniano suma, mientras cada paso parcial resuelve exactamente su propio Hamiltoniano.

19. Dos modos que se conservan mutuamente

Las derivadas de H_+ respecto de Q_-, P_- valen cero y las de H_- respecto de Q_+, P_+ también. Todos los sumandos del corchete se anulan: $\{H_+, H_-\} = 0$. De aquí $\{H_+, H\} = \{H_-, H\} = 0$. Las dos funciones se dicen en involución porque su corchete es cero.

En el orden (Q_+, Q_-, P_+, P_-), sus gradientes son $(Q_+, 0, P_+, 0)$ y $(0, 3Q_-, 0, P_-)$. Están apoyadas en parejas complementarias y son independientes exactamente donde ambos modos tienen estado distinto de $(0,0)$. Si uno está en su equilibrio, la gradiente de su energía se anula y el rango de ese par de funciones disminuye. La separación modal permite fijar las energías de las dos oscilaciones; recuperar la solución concreta requiere además sus fases iniciales.

20. Un marco que gira

Sea $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. La derivada de $R(-\Omega t)$ es $-\Omega C R(-\Omega t)$ y $F_q = R(\Omega t)P$. Por tanto $p = R(\Omega t)P$ y $Q = R(-\Omega t)q$. La derivada temporal de la generadora es $F_t = -\Omega(CQ)\cdot P = -\Omega L_z(Q,P)$, de donde

$$K = \frac{\|P\|^2}{2m} + \frac{1}{2}k\|Q\|^2 - \Omega(Q_xP_y - Q_yP_x).$$

Las ecuaciones resultan $\dot Q = P/m - \Omega C Q$ y $\dot P = -kQ - \Omega C P$. Derivar la primera, sustituir la segunda y usar $P/m = \dot Q + \Omega C Q$ y $C^2 = -I_2$ da

$$\ddot Q = -\frac{k}{m}Q - 2\Omega C\dot Q + \Omega^2 Q.$$

Los dos últimos términos reproducen Coriolis y la contribución centrífuga del marco giratorio del capítulo 18. La energía mecánica del laboratorio es $E = \|P\|^2/(2m) + k\|Q\|^2/2$. En este potencial isótropo, tanto E como L_z permanecen constantes y $K = E - \Omega L_z$ también. El momento conjugado cumple $P = m(\dot Q + \Omega C Q)$, que permite convertir una velocidad medida en el marco giratorio en el dato del espacio de fases.

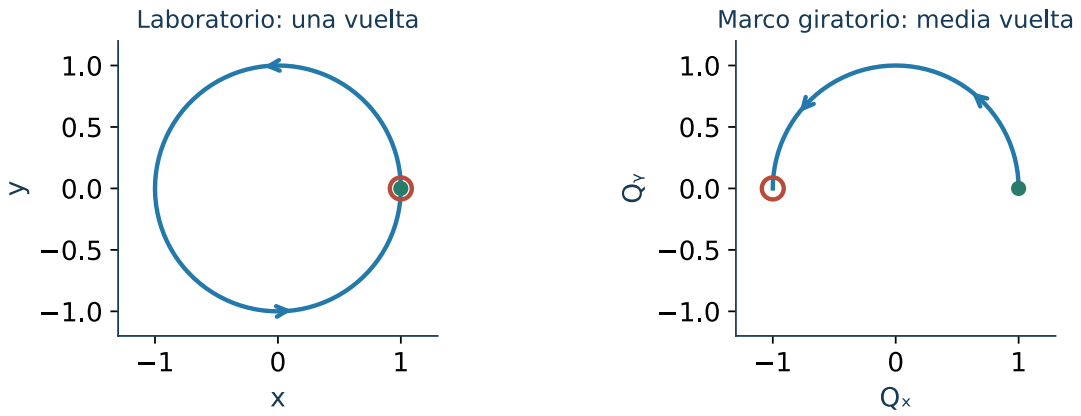


Figura 25.7. Para $m = k = 1$, $\Omega = 1/2$ y órbita circular inercial $q = (\cos t, \sin t)$, la coordenada giratoria es $Q = (\cos(t/2), \sin(t/2))$. En $0 \le t \le 2\pi$, el marco giratorio registra media vuelta. Las flechas señalan el recorrido y los puntos, el mismo instante final.

21. Elegir el paso para controlar la fase

Al usar la misma fase inicial, los dos relojes avanzan $N\vartheta_h$ y $Nh = T$. El primero adelanta porque $\arcsin x \ge x$ para $0 \le x < 1$. Con $h = 0{,}1$, $N = 10000$ y el adelanto es aproximadamente 0,417136 radianes. La conservación de la elipse durante esos pasos es compatible con ese error acumulado de ritmo.

Para certificar una elección de paso conservemos el resto como integral:

$$\vartheta_h - h = 2\int_0^{h/2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-s^2}} - 1\right) ds.$$

La función $f(x) = (1-x)^{-1/2}$ tiene derivada $f'(x) = 1/[2(1-x)^{3/2}]$. Para $0 \le s \le h/2$, el teorema del valor medio da $0 \le f(s^2) - f(0) \le s^2/[2(1-h^2/4)^{3/2}]$. Integrar esa cota y multiplicar por $N = T/h$ produce la desigualdad pedida.

Con $h = 0{,}01$, $N = 100000$ es entero y la cota superior queda por debajo de 0,004167 radianes. El adelanto satisface la tolerancia de 0,01 radianes durante todo ese horizonte. Se ha certificado una fase que aumenta uniformemente en las variables adaptadas. Para comparar estados físicos hay que recuperar q, p mediante la inversa del cambio y conservar sus datos iniciales, como en el ejercicio 24.20. El ángulo euclídeo de los ejes originales y esa fase adaptada responden a representaciones distintas; la predicción de posición requiere cerrar también esa traducción.

Lecturas y relaciones

Spivak, *Physics for Mathematicians. Mechanics I*, capítulo 19, pp. 567–569 y 581–582, coteja los cambios canónicos y su dependencia temporal; el capítulo 20, pp. 605–608, desarrolla corchetes, invariancia e identidad de Jacobi. El teorema de volumen aparece también en el añadido 17A, pp. 536–537. Aquí se fijó explícitamente la convención $\omega = \sum_i dq_i \wedge dp_i$ y se dieron pruebas locales en coordenadas.

Sears–Zemansky, Young y Freedman, *Física universitaria* 1, §10.5, pp. 322–323, y Serway–Jewett, *Física para ciencias e ingeniería* 1, §11.2, pp. 289–290, permiten cotejar el significado del momento angular respecto de un origen y su balance de torque. La representación por corchetes conserva esa interpretación física y hace calculable el generador de las rotaciones. Los problemas y las figuras se elaboraron para este capítulo.

Capítulo 26

Estabilidad y dinámica no lineal

Un péndulo permanece en reposo tanto con la masa debajo del punto de suspensión como con la masa encima, si el soporte permite esa configuración. Las dos posiciones satisfacen la misma condición de equilibrio: el torque se anula. La diferencia aparece al preparar el aparato con una pequeña desviación. Cerca de la posición inferior observamos una oscilación; cerca de la superior, la masa puede alejarse hasta completar un recorrido de gran amplitud. Encontrar un estado de reposo deja abierta la pregunta de qué ocurre cuando la preparación tiene un error.

La medida de ese error necesita incluir posición y velocidad. Una masa colocada exactamente abajo, con una velocidad angular grande, abandona enseguida una vecindad del reposo. También necesita un horizonte temporal: dos preparaciones pueden permanecer próximas durante un minuto y separarse después. La estabilidad relacionará una tolerancia inicial con una tolerancia admitida durante todo el movimiento futuro. La incertidumbre de preparación del capítulo cero reaparece aquí dentro de la evolución del modelo.

Trabajaremos con sistemas mecánicos clásicos deterministas, fuerzas suaves y datos iniciales que fijan una solución local única. El rozamiento viscoso y la excitación periódica serán elecciones explícitas de modelo. Las conclusiones matemáticas se referirán a esas ecuaciones; un experimento permitirá examinar, además, si la fuerza elegida describe el aparato en el régimen observado.

Qué significa permanecer cerca

Para comparar coordenadas de unidades distintas fijamos escalas de referencia. En el péndulo de longitud l elegimos $\omega_0 = \sqrt{g/l}$, el tiempo $\tau = \omega_0 t$ y $u = \dot{\theta}/\omega_0$. El estado adimensional es $z = (\theta, u)$ y su distancia local al reposo inferior es $\|z\| = \sqrt{\theta^2 + u^2}$. El ángulo se mide en radianes. Cerca de una posición usamos una carta angular; para recorridos completos se identifica θ con $\theta + 2\pi$ y el espacio de estados es un cilindro.

En general escribimos $z' = F(z)$, con F de clase C^1 en un abierto de $\mathbb{R}^d$ y prima respecto del tiempo elegido. Un equilibrio z_* satisface $F(z_*) = 0$. Las normas sobre este espacio finito dimensional producen la misma propiedad local de estabilidad, pues sus cocientes están acotados por constantes positivas. Las tolerancias numéricas sí cambian con las escalas escogidas.

Definición. Un equilibrio z_* es estable en el sentido de Lyapunov si para cada $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño existe $\delta > 0$ tal que toda solución con $\|z(0) - z_*\| < \delta$ existe para todo tiempo futuro y cumple $\|z(\tau) - z_*\| < \varepsilon$ para todo $\tau \geq 0$. Es asintóticamente estable si, además, existe una vecindad inicial cuyas soluciones convergen a z_* cuando $\tau \to \infty$.

El orden de los cuantificadores permite elegir la precisión de preparación después de fijar la tolerancia deseada. La misma elección debe servir durante todo el futuro. La continuidad de las soluciones respecto del dato inicial proporciona cercanía en intervalos finitos; al prolongar el intervalo, la tolerancia inicial necesaria puede reducirse sin límite. El ejercicio 2 hará visible esa diferencia.

El capítulo 8 aplicó esta definición a posición y velocidad mediante tolerancias con sus respectivas unidades. Las escalas fijadas aquí reúnen esas exigencias en una distancia del

estado. En el capítulo 19 el estado estudiado era la velocidad angular en componentes materiales: cada giro puro es un punto fijo de sus ecuaciones de Euler. Las funciones conservadas V_1 y V_3 construidas allí controlan la proximidad a ese punto. La orientación del cuerpo se reconstruye después. Dos giros sobre el mismo eje con rapideces Ω y $\Omega + \alpha$, preparados con igual orientación, conservan una separación $|\alpha|$ entre sus velocidades angulares y acumulan un ángulo relativo αt. Para $\alpha \neq 0$ y $t = \pi/|\alpha|$, las proyecciones de un punto material fuera del eje sobre el plano perpendicular a éste quedan en extremos opuestos de un diámetro. La elección del estado determina, por tanto, qué predicción de proximidad contiene la afirmación de estabilidad.

El oscilador $x'' + x = 0$ conserva $x^2 + (x')^2$. Por eso una preparación a distancia menor que $\delta = \varepsilon$ permanece dentro de la tolerancia. Toda órbita de amplitud positiva conserva su distancia al origen, y el límite hacia el reposo requiere la preparación exactamente nula. Es un primer ejemplo de equilibrio estable con movimiento persistente alrededor de él.

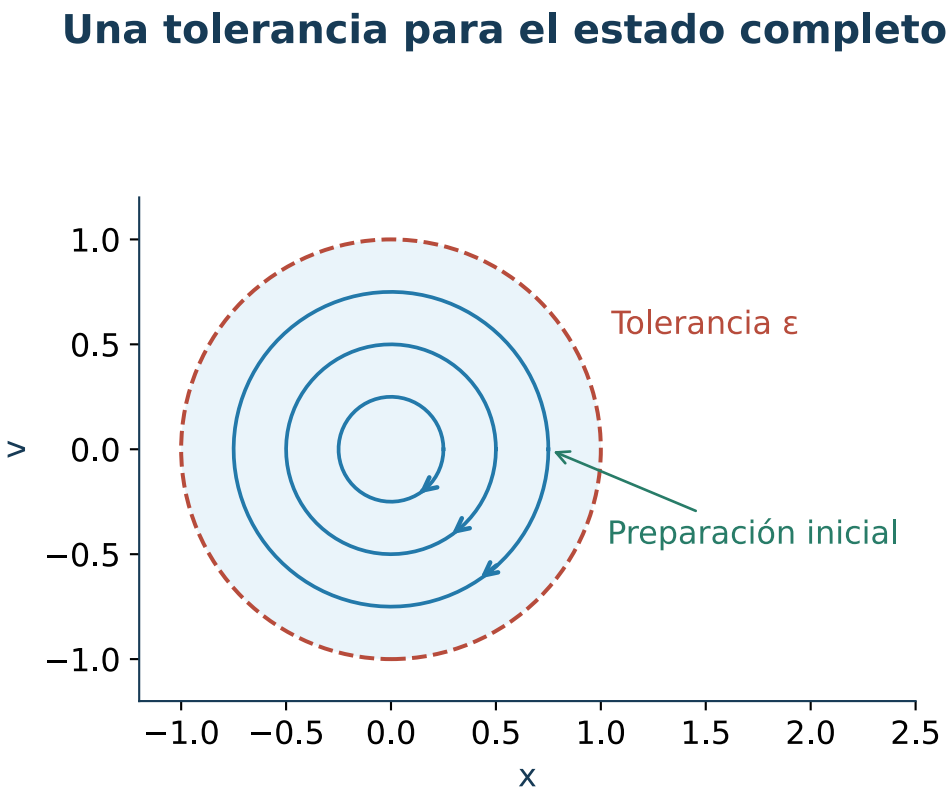


Figura 26.1. Las circunferencias representan órbitas del oscilador adimensional y el disco exterior fija una tolerancia. El control incluye las dos componentes del estado. La distancia al centro permanece constante.

La energía construye una barrera

En ausencia de rozamiento, el péndulo ideal de masa puntual y varilla rígida sin masa satisface

$$ml^2\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta, \qquad \theta' = u, \quad u' = -\sin\theta.$$

La gravedad es uniforme, el pivote está fijo y el movimiento es plano. La varilla permite considerar tanto libraciones como rotaciones sin añadir una condición de tensión de una cuerda. Al dividir la energía mecánica por mgl obtenemos la integral

$$e(\theta, u) = \frac{u^2}{2} + 1 - \cos\theta, \qquad e' = u(-\sin\theta) + \sin\theta\, u = 0.$$

Una preparación con energía pequeña sólo accede a estados de energía igualmente pequeña. Para convertir esa observación en una prueba necesitamos que toda salida de la vecindad atraviese una frontera cuya energía sea mayor.

Definición. Una función de Lyapunov local para el equilibrio z_* es una función V de clase C^1, definida en una vecindad, con $V(z_*) = 0$, $V(z) > 0$ para $z \neq z_*$ y derivada orbital $V'(z) = \nabla V(z) \cdot F(z) \leq 0$.

La positividad es relativa al valor en el equilibrio. En un problema conservativo podemos restar a la energía su valor de equilibrio; en un problema disipativo, la misma función puede decrecer. El nombre de la función expresa su papel en una estimación, y su existencia se comprueba mediante las condiciones indicadas.

Proposición. La existencia de una función de Lyapunov local implica estabilidad del equilibrio. En particular, un mínimo local estricto de una integral primera de clase C^1 produce un equilibrio estable cuando el punto considerado es un equilibrio del campo.

Demostración. Traslademos z_* al origen. Fijemos ε tan pequeño que la bola cerrada de radio ε esté dentro del dominio y la positividad valga allí. La esfera es compacta, de modo que

$$a = \min_{\|z\| = \varepsilon} V(z) > 0.$$

Por continuidad en cero, existe $0 < \delta < \varepsilon$ tal que $\|z\| < \delta$ implica $V(z) < a$. A lo largo de una solución iniciada en esa bola, V permanece menor que a. Una primera llegada a la esfera exigiría simultáneamente $V \geq a$, por la definición de a, y $V < a$, por la monotonía. Por tanto esa llegada es imposible.

La solución queda en el compacto formado por los puntos de la bola cerrada con $V \leq V(z(0)) < a$. El campo es C^1 en una vecindad de ese compacto; la existencia local permite continuar la solución indefinidamente, pues un extremo finito dentro del compacto admitiría una nueva prolongación. Hemos obtenido la existencia futura y la cota requeridas. Para una integral E con mínimo estricto, $V = E - E(z_*)$ cumple las condiciones. $\square$

La prueba ofrece un procedimiento para elegir tolerancias: estimar la energía mínima en la frontera y preparar el estado por debajo de ella. Un Hessiano positivo definido es una manera suficiente de obtener un mínimo estricto, pero la energía $p^2/2 + x^4/4$ también tiene uno aunque su Hessiano sea degenerado en el origen. Las potencias superiores pueden decidir lo que una aproximación cuadrática deja abierto.

Para el péndulo, $1 - \cos\theta > 0$ cuando $0 < |\theta| < 2\pi$. El reposo inferior es un mínimo local estricto de e y resulta estable. Una órbita con $0 < e < 2$ oscila dentro de un intervalo angular acotado alrededor de ese reposo. En $e = 2$ aparece la separatriz; para $e > 2$, u conserva signo y el péndulo gira. La identidad $u^2 = 2(e - 1 + \cos\theta)$ permite dibujar las tres regiones sin integrar la ecuación temporal.

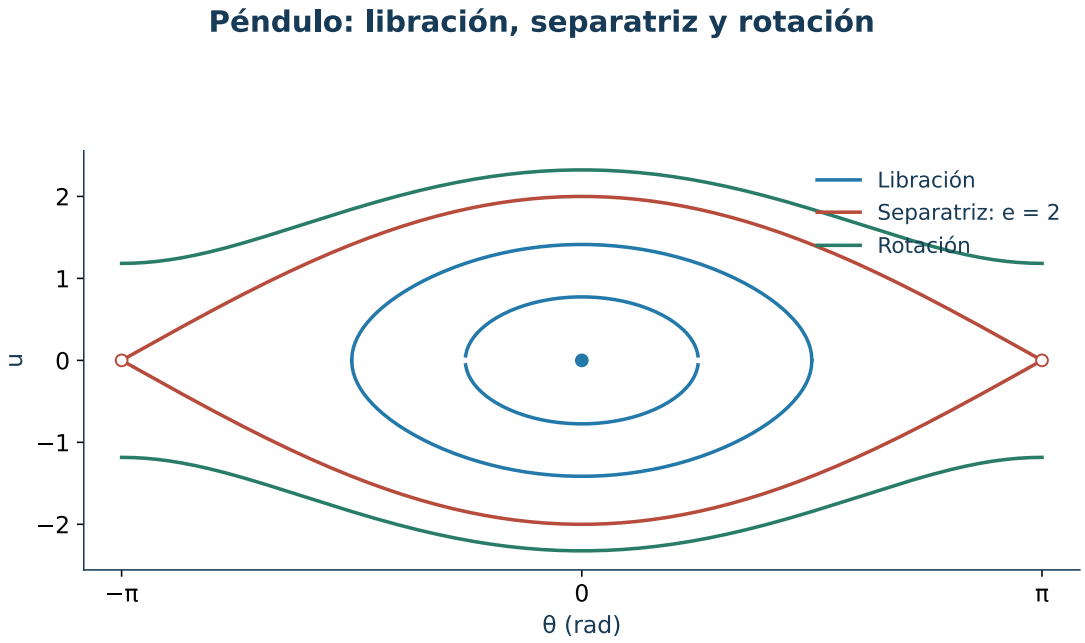


Figura 26.2. Niveles exactos de la energía adimensional del péndulo. Las fronteras angulares $-\pi$ y π representan la misma dirección; la figura muestra una ventana del recubrimiento del cilindro. La separatriz de energía dos conecta los reposos superiores de esa representación.

Qué conserva la linealización

En torno de un equilibrio escribimos $z = z_* + \xi$. La diferenciabilidad del campo da

$$\xi' = A\xi + r(\xi), \qquad A = DF(z_*), \qquad \frac{\|r(\xi)\|}{\|\xi\|} \longrightarrow 0.$$

Definición. La ecuación $\xi' = A\xi$ es la linealización del sistema en z_*. Un equilibrio es hiperbólico cuando la parte real de cada autovalor de A es estrictamente positiva o estrictamente negativa.

La matriz describe la variación de primer orden. Su utilidad para tiempos largos exige controlar el resto. Probaremos el criterio de atracción que utilizaremos; los casos con parte real cero se estudiarán directamente con las ecuaciones y la energía.

Proposición. Si todos los autovalores de $A = DF(z_*)$ tienen parte real estrictamente negativa, el equilibrio es localmente asintóticamente estable. Existen constantes positivas C, c, ρ tales que todo dato inicial con $\|z(0) - z_*\| < \rho$ determina una solución para todo tiempo futuro que satisface

$$\|z(\tau) - z_*\| \le C e^{-c\tau} \|z(0) - z_*\|.$$

Demostración. Usamos la norma euclídea y trasladamos el equilibrio a cero. La forma de Jordan de A expresa $e^{A\tau}$ mediante exponentes con parte real negativa multiplicados por polinomios. Cada polinomio queda dominado por un exponencial de crecimiento arbitrariamente pequeño; en consecuencia existen $M, \alpha > 0$ con $\|e^{A\tau}\| \le M e^{-\alpha\tau}$ para $\tau \ge 0$.

Construimos la matriz real simétrica

$$P = \int_0^{\infty} e^{A^{\mathsf{T}} s} e^{A s} \, ds.$$

La cota exponencial asegura convergencia. Además, $\xi^{\mathsf{T}} P \xi = \int_0^{\infty} \|e^{As}\xi\|^2 ds > 0$ para $\xi \neq 0$, pues el integrando es positivo en un intervalo cercano a cero. Derivar el producto matricial e integrar entre cero e infinito produce $A^{\mathsf{T}}P + PA = -I$; el extremo infinito es cero y el extremo inicial es I.

Tomemos $V(\xi) = \xi^{\mathsf{T}} P \xi$. Existen $p_-, p_+ > 0$ con $p_-\|\xi\|^2 \le V \le p_+\|\xi\|^2$. Al derivar sobre la ecuación completa,

$$V' = -\|\xi\|^2 + 2\xi^{\mathsf{T}} P r(\xi).$$

Escogemos $R > 0$ de modo que $\|r(\xi)\| \le \|\xi\|/(4\|P\|)$ cuando $\|\xi\| < R$. Entonces $V' \le -\|\xi\|^2/2 \le -V/(2p_+)$. La proposición anterior, aplicada dentro de esta bola, proporciona un radio inicial $\rho > 0$ cuyas soluciones permanecen en ella para todo tiempo futuro. Integrar la desigualdad da $V(\tau) \le V(0) e^{-\tau/(2p_+)}$ y, por las dos cotas cuadráticas,

$$\|\xi(\tau)\| \le \sqrt{p_+/p_-}\, e^{-\tau/(4p_+)} \|\xi(0)\|.$$

La estimación demuestra estabilidad y convergencia, con constantes explícitas en términos de P. $\square$

En el péndulo inferior conservativo, $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ tiene autovalores $\pm i$. La hipótesis de la proposición queda fuera de ese caso, y la energía ya proporcionó la respuesta. Más aún, los campos planos

$$x' = -y + \sigma x(x^2+y^2), \qquad y' = x + \sigma y(x^2+y^2)$$

tienen la misma matriz en el origen para $\sigma = -1, 0, 1$. Al escribir $r^2 = x^2 + y^2$ se obtiene $r' = \sigma r^3$ y una velocidad angular igual a uno. Para $\sigma = -1$ las órbitas se acercan al origen; para cero son círculos; para uno se alejan y abandonan cualquier disco fijo. Una misma linealización con espectro imaginario admite las tres conductas.

La misma matriz en el origen, tres evoluciones

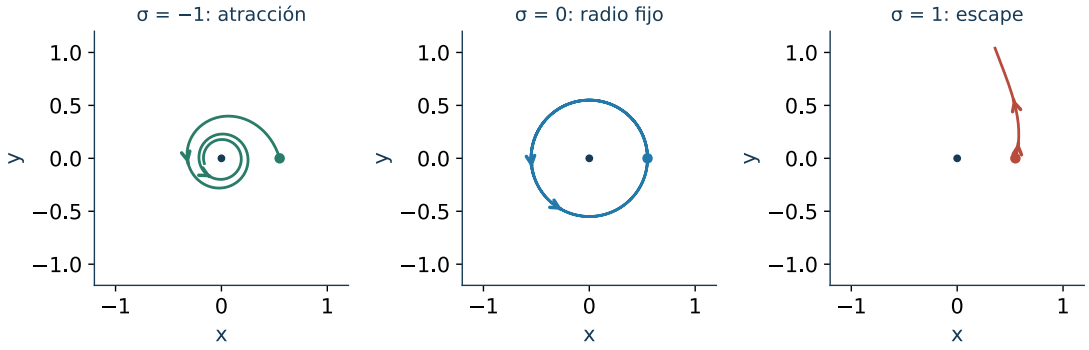


Figura 26.3. Los términos cúbicos cambian la evolución radial y conservan la misma rotación de primer orden en el origen. Las curvas se obtienen de la solución radial exacta; la espiral saliente se representa sólo antes de su escape del disco dibujado.

Disipar energía y demostrar el retorno

Añadamos al péndulo un torque viscoso $-b\dot\theta$, con $b>0$, válido como aproximación en el régimen de velocidades considerado. La ecuación y el balance son

$$\theta' = u, \qquad u' = -\sin\theta - \beta u, \qquad \beta = \frac{b}{ml^2\omega_0} > 0, \qquad e' = -\beta u^2.$$

La energía decrece mientras el péndulo se mueve y su derivada se anula en cualquier instante de retorno, incluso lejos del equilibrio. Por ello, reemplazar $e' \le 0$ por una supuesta desigualdad estricta en todo estado distinto del reposo invalidaría la prueba. Podemos demostrar la convergencia siguiendo qué trayectorias completas caben en el conjunto donde $e' = 0$.

Proposición. Para el péndulo viscoso, toda solución con $|\theta(0)| < \pi$ y $e(0) < 2$ converge al reposo inferior $(0,0)$. Ese reposo es asintóticamente estable.

Demostración. La desigualdad $e(\tau) \le e(0) < 2$ impide alcanzar $\theta = \pm\pi$ y acota u. De hecho, el subnivel dentro de esa carta es compacto y queda separado de ambas fronteras angulares. La solución existe para todo futuro y su energía, decreciente y acotada inferiormente, converge a un valor e_∞.

Tomemos cualquier punto de acumulación a del estado, obtenido mediante tiempos $\tau_j \to \infty$. Para cada $s \ge 0$ fijo, la continuidad del flujo respecto del dato inicial da

$$\Phi_s(a) = \lim_{j\to\infty} z(\tau_j + s), \qquad e(\Phi_s(a)) = e_\infty.$$

El flujo Φ_s está definido en el subnivel compacto, que es invariante hacia delante. La energía permanece constante en toda la trayectoria futura iniciada en a. Su derivada $-\beta u^2$ obliga a $u = 0$ en ella; la ecuación de u exige entonces $\sin\theta = 0$. Dentro del subnivel considerado, el único estado con esas propiedades es $(0,0)$.

Todos los puntos de acumulación coinciden, por tanto, con ese estado. Si la solución no convergiera a él, habría una sucesión de tiempos que permaneciera a una distancia positiva; la compacidad proporcionaría un punto de acumulación diferente. Esa contradicción demuestra convergencia. La estabilidad se sigue de la función e y de su mínimo estricto; junto con la convergencia local, prueba estabilidad asintótica. $\square$

Este argumento usa la estructura del conjunto donde cesa la disipación. Si un sistema conserva un modo desacoplado, la pérdida de energía en otra componente puede dejar oscilaciones persistentes. El ejercicio 10 examina esa hipótesis. Cerca del reposo, el péndulo viscoso tiene autovalores que satisfacen $\lambda^2 + \beta\lambda + 1 = 0$, con parte real negativa; el criterio anterior añade una estimación exponencial local. La prueba energética alcanza todo el pozo $e < 2$.

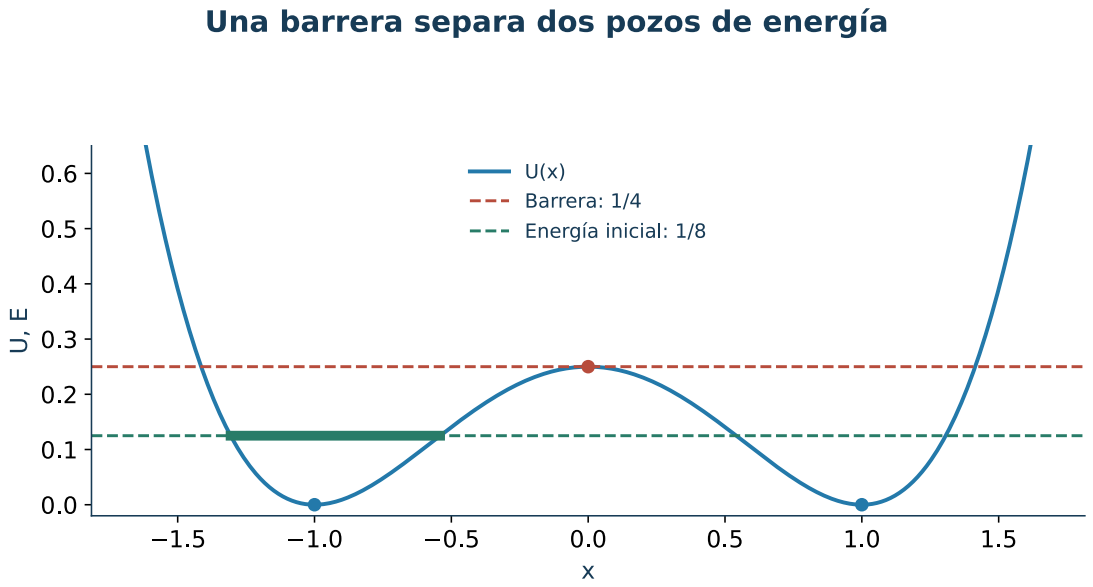


Figura 26.4. El potencial $U(x) = (x^2-1)^2/4$ tiene dos mínimos y una barrera de altura $1/4$. Una energía total inferior a esa barrera confina cada trayectoria conservativa en el pozo donde fue preparada. La misma barrera retiene trayectorias que pierden energía.

Mirar una vez por periodo

Para sostener el movimiento mediante un torque periódico $\Gamma\cos(\Omega t)$ añadimos una fuente externa de trabajo. En las variables adimensionales,

$$\theta' = u, \qquad u' = -\sin\theta - \beta u + f\cos(\nu\tau), \qquad f = \frac{\Gamma}{mgl}, \quad \nu = \frac{\Omega}{\omega_0} > 0.$$

El balance $e' = -\beta u^2 + f u\cos(\nu\tau)$ permite aportes y pérdidas. La fase del actuador forma parte de la preparación: dos ensayos con iguales θ, u y distintas fases iniciales aplican fuerzas diferentes. También podemos incorporar $\varphi' = \nu$ con φ tomado módulo 2π, y sustituir el coseno por $\cos\varphi$. Así obtenemos un sistema autónomo de tres variables.

Definición. Para una ecuación con fuerza de periodo T, el mapa estroboscópico a fase inicial fijada es $\mathcal{P}(z_0) = z(T; z_0)$, definido para los datos cuya solución existe hasta T. Sus iteradas registran el estado en $T, 2T, 3T, \dots$. Un punto fijo satisface $\mathcal{P}(z_*) = z_*$ y determina una solución T-periódica, cuyo periodo mínimo puede ser un divisor de T.

El registro exige observar siempre a la misma fase del actuador. Una órbita cerrada del sistema autónomo ampliado y un punto fijo de este mapa son dos representaciones del mismo retorno. El ejemplo lineal permite construir el mapa por completo antes de recurrir a cálculos numéricos.

Proposición. Para $x'' + \beta x' + x = f\cos(\nu\tau)$, con $\beta, \nu > 0$, el mapa estroboscópico de periodo $T = 2\pi/\nu$ tiene un único punto fijo y todas sus iteradas convergen a él. Para el péndulo forzado con el mismo rozamiento, el determinante de la derivada del mapa es $e^{-\beta T}$ en cada estado.

Demostración. En el sistema lineal, $z = (x, x')$ satisface $z' = Az + g(\tau)$, con $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\beta \end{smallmatrix}\right)$. La fórmula de variación de constantes da

$$\mathcal{P}(z) = Mz + c, \qquad M = e^{AT}, \qquad c = \int_0^T e^{A(T-s)} g(s)\, ds.$$

Los autovalores de A tienen parte real negativa, por la ecuación cuadrática ya estudiada. Los de M son $e^{\lambda T}$, de módulo menor que uno; por tanto $I - M$ es invertible y el único punto fijo es $(I - M)^{-1}c$. Al restarlo de la recurrencia queda $z_n - z_* = M^n(z_0 - z_*)$. La cota exponencial para $e^{A\tau}$ prueba que esta diferencia tiende a cero, incluso en el caso de una raíz doble.

Para el péndulo, la derivada del flujo $N(\tau)$ satisface $N' = B(\tau)N$, $N(0) = I$, donde

$$B(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos\theta(\tau) & -\beta \end{pmatrix}.$$

El flujo es localmente invertible por unicidad. La regla de derivación del determinante da $(\det N)' = (\operatorname{tr} B)\det N = -\beta \det N$. Integrar con $\det N(0) = 1$ produce $\det N(T) = e^{-\beta T}$. Las fuerzas son suaves y de crecimiento a lo sumo lineal en u, de modo que las soluciones necesarias existen durante cada intervalo finito. □

La contracción del área mide el producto de dos factores locales de deformación. Uno de ellos puede superar la unidad mientras el otro compensa esa expansión. Por ello, la fórmula del determinante por sí sola deja abierta la convergencia a un punto fijo del mapa no lineal. La solución lineal probó esa convergencia mediante toda la matriz M.

Observar a la misma fase revela el retorno

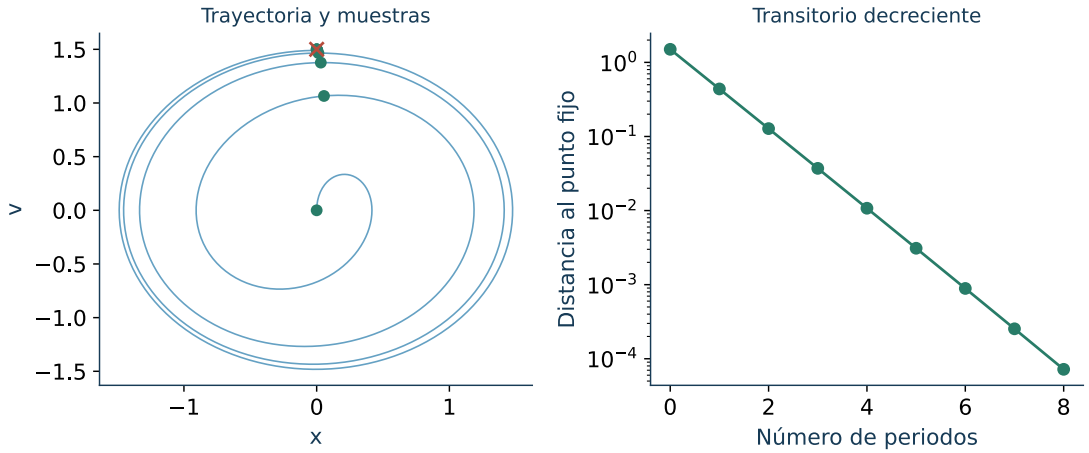


Figura 26.5. Muestras cada periodo del oscilador lineal $x'' + 0{,}4x' + x = 0{,}6\cos\tau$, preparado en reposo. Los puntos convergen al estado de la solución periódica a esa fase: $(x, x') = (0, 1{,}5)$. La curva continua incluye las primeras oscilaciones y no representa por sí sola el mapa discreto.

Sensibilidad y horizonte de predicción

Una desviación inicial crece de modo distinto cerca del equilibrio superior y del inferior. En torno del superior, $\theta = \pi + \eta$ da $\eta'' \simeq \eta$ en tiempo adimensional: una componente crece como e^{τ}. Esa expansión local existe en un sistema conservativo de un grado de libertad cuyo retrato de fases conocemos mediante la energía. Observar separación exponencial durante un intervalo finito requiere, por tanto, examinar dónde ocurre y qué otra estructura tiene la dinámica antes de formular una conclusión sobre caos.

Para cuantificar el horizonte sin atribuir más de lo demostrado, comparemos dos soluciones que permanecen en una región convexa donde el campo cumple $\|F(z) - F(w)\| \le L\|z - w\|$. La forma integral de la ecuación implica, con $d(\tau) = \|z(\tau) - w(\tau)\|$,

$$d(\tau) \le d(0) + L \int_0^\tau d(s)\, ds.$$

Proposición. Bajo esa hipótesis, durante el intervalo común de permanencia en la región se cumple $d(\tau) \le d(0)e^{L\tau}$.

Demostración. Definamos $h(\tau) = d(0) + L\int_0^\tau d(s)ds$. Entonces $d \le h$, $h(0) = d(0)$ y $h' = Ld \le Lh$. La derivada de $e^{-L\tau}h(\tau)$ es menor o igual que cero. Por tanto $h(\tau) \le d(0)e^{L\tau}$ y la misma cota vale para d. El argumento también cubre $d(0) = 0$ y recupera la unicidad en ese intervalo. □

Una curva calculada añade una dificultad a la comparación entre dos preparaciones: puede satisfacer la ecuación con un residuo. Para medir su efecto, consideremos una curva diferenciable $\widetilde{z}$ y definamos $r(\tau) = \widetilde{z}'(\tau) - F(\widetilde{z}(\tau))$. El residuo mide, en las escalas elegidas, cuánto difiere su derivada de la que prescribe el modelo en cada estado.

Proposición (preparación y residuo). Sea z una solución exacta y $\widetilde{z}$ una curva diferenciable, ambas en una región donde F es Lipschitz con constante $L \ge 0$. Si $\|z(0) - \widetilde{z}(0)\| \le \delta$ y $\|r(\tau)\| \le \eta$ durante $0 \le \tau \le S$, entonces, para $L > 0$,

$$\|z(\tau) - \widetilde{z}(\tau)\| \le \delta e^{L\tau} + \frac{\eta}{L}(e^{L\tau} - 1).$$

Para $L = 0$, la cota es $\delta + \eta\tau$.

Demostración. Restar las ecuaciones integrales y aplicar la desigualdad Lipschitz da $d(\tau) \le \delta + \eta\tau + L\int_0^\tau d(s)ds$. Llamemos h al miembro derecho. Entonces $d \le h$, $h(0) = \delta$ y $h' \le \eta + Lh$. Para $L > 0$, derivar $e^{-L\tau}(h + \eta/L)$ muestra que esa función decrece. Despejar h produce la cota y, por $d \le h$, el resultado. Con $L = 0$ basta la desigualdad integral inicial. □

La proposición controla una curva continua con residuo acotado durante todo el intervalo. Para aplicarla a una tabla de puntos numéricos se construye primero una interpolación y se certifica su residuo entre nodos. La diferencia entre dos pasos de cálculo puede ayudar a diagnosticar errores; el certificado exige la cota que figura en la hipótesis. El ejercicio 17 reúne incertidumbre inicial y residuo para calcular un horizonte de precisión.

Esta es una cota superior: garantiza una precisión si el miembro derecho queda dentro de la tolerancia. En un sistema concreto puede sobreestimar ampliamente la separación. Para el campo variacional $v' = DF(z(\tau))v$, el número $\log(\|v(S)\|/\|v(0)\|)/S$ registra amplificación durante el tiempo finito S en la dirección escogida. Su dependencia de dirección, intervalo y trayectoria forma parte del dato; un valor positivo aislado no establece un comportamiento asintótico ni prueba caos.

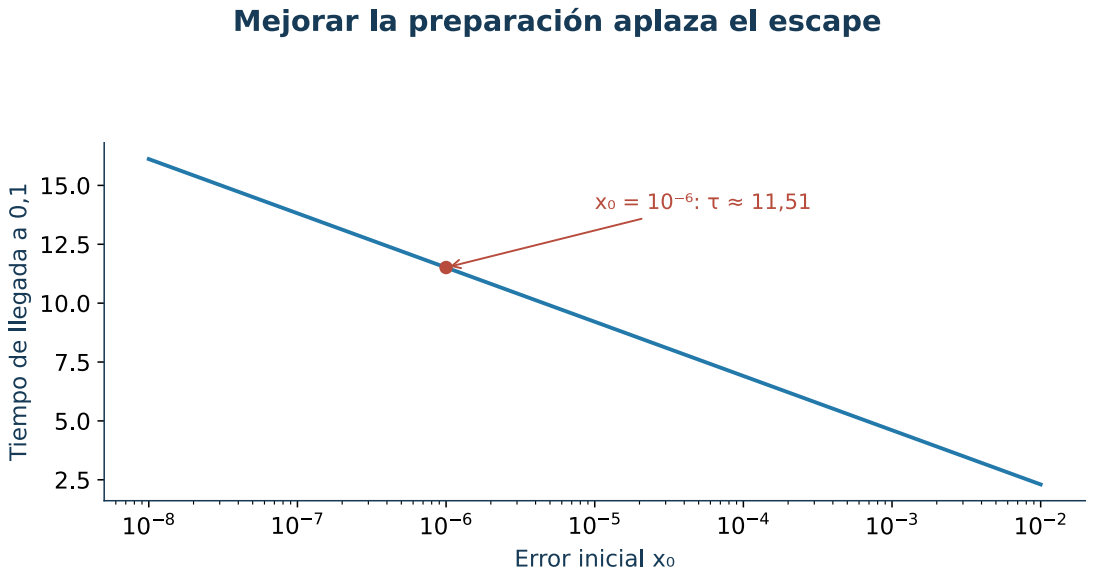


Figura 26.6. Para la ecuación exacta $x' = x$, el tiempo de llegada a $x = 0{,}1$ es $\log(0{,}1/x_0)$. Reducir el error inicial aplaza el escape; cada dato positivo acaba alcanzando la frontera. Los valores corresponden a tiempo y estado adimensionales.

La integración numérica añade otra fuente de error. Antes de interpretar una órbita calculada debemos variar el paso, comparar una magnitud con solución conocida y controlar balances. En un sistema conservativo, un método puede dibujar una espiral por aumentar la energía artificialmente; un método que conserva área puede mantener una órbita acotada y acumular error de fase. La validación necesita responder a la pregunta física que motivó el cálculo.

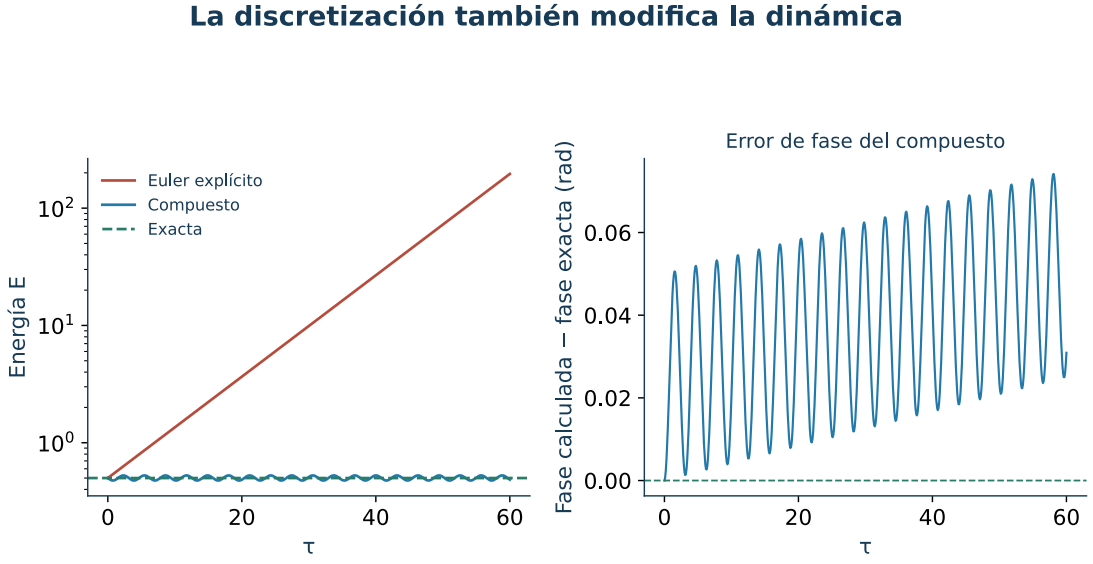


Figura 26.7. Para $x'' + x = 0$ se comparan Euler explícito y la composición de impulso y desplazamiento del capítulo 25, con paso $h = 0{,}1$. El primer método acumula energía; el segundo conserva una forma cuadrática próxima a la energía y mantiene un error de fase. La fase geométrica se obtiene desenvolviendo el ángulo $\operatorname{atan2}(-v, x)$ de manera continua; la fase exacta es τ.

La distinción entre estabilidad, atracción y fidelidad numérica permite formular un experimento más preciso: preparar una región de estados, declarar las escalas y registrar cómo evoluciona. En un péndulo real, la pérdida de energía, el tiempo de cruce y la respuesta al actuador discriminan aspectos diferentes del modelo. Una gráfica calculada adquiere valor físico cuando conocemos qué parte de esas comparaciones controla.

Ejercicios

1. La tolerancia incluye la velocidad

Para $x'' + 4x = 0$, encuentre una norma adimensional que haga inmediato el control de estabilidad del origen. Dé una condición suficiente en la norma euclídea del estado (x, v), con ambas variables expresadas en escalas numéricas fijadas, para mantener $\sqrt{x^2 + v^2} < \varepsilon$. Explique el caso $x(0) = 0$, $v(0) \neq 0$.

2. Un intervalo finito y todo el futuro

Para $x' = x$, determine qué δ mantiene $|x(\tau)| < \varepsilon$ en $0 \leq \tau \leq S$. Pruebe la inestabilidad del origen con un ε fijo y calcule el tiempo de llegada a $\varepsilon = 0{,}1$ desde $x_0 = 10^{-6}$.

3. Un mínimo con Hessiano degenerado

Considere $H = p^2/2 + x^4/4$. Pruebe estabilidad del origen, obtenga cotas de $|x|$ y $|p|$ en función de la energía inicial y decida si hay atracción. Identifique el límite de la linealización.

4. Cuánto se puede preparar el péndulo

Un péndulo ideal de varilla tiene $l = 1\,\mathrm{m}$, $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$, $\theta_0 = 0{,}1$ y $\dot{\theta}_0 = 0{,}2\,\mathrm{s^{-1}}$. Calcule e_0, la amplitud angular y la rapidez angular máxima. Obtenga una condición energética que garantice $|\theta| < 0{,}2$ durante todo el futuro.

5. El reposo superior

En el péndulo conservativo prepare $\theta_0 = \pi + \eta_0$, $u_0 = 0$, con $0 < \eta_0 < a < \pi$. Use energía y el signo de la aceleración para demostrar que η alcanza a en tiempo finito. Relacione el resultado con la estabilidad del equilibrio superior y con la aproximación lineal.

6. La matriz pierde una decisión

Resuelva $x' = -x^3$ y $x' = x^3$ con dato x_0. Clasifique el origen en ambos sistemas y explique cómo dos Jacobianos iguales a cero admiten respuestas distintas. Indique los intervalos de existencia.

7. La misma rotación, tres destinos

Para los tres campos cúbicos del texto, derive las ecuaciones polares y $r(\tau)$, con $r_0 > 0$. Clasifique el origen para $\sigma = -1, 0, 1$, especificando el tiempo durante el cual tiene sentido la solución saliente.

8. Construir la función cuadrática

Para $x' = v$, $v' = -x - 2v$, encuentre la matriz simétrica P que cumple $A^{\mathsf{T}}P + PA = -I$. Compruebe positividad y pruebe estabilidad asintótica. Después añada el término $-x^3$ a la segunda ecuación y determine si el criterio de linealización sigue siendo aplicable.

9. El conjunto donde cesa la disipación

Para el péndulo viscoso con $\beta = 0{,}4$, tome $\theta_0 = 0{,}6$, $u_0 = 0{,}3$. Compruebe las hipótesis del resultado de convergencia. Obtenga $\int_0^\infty u^2 d\tau$ y explique por qué $e' = 0$ en un instante aislado no significa que el movimiento terminó.

10. Disipación en una sola componente

Considere $x'' + x = 0$, $y'' + y + \beta y' = 0$, con $\beta > 0$. La energía total tiene derivada no positiva. Estudie estabilidad y atracción del origen y describa las trayectorias que permanecen en el conjunto donde la derivada energética se anula.

11. Un pozo y la barrera vecina

Para $x'' = -U'(x)$, con $U = (x^2 - 1)^2/4$, encuentre los equilibrios, su clasificación por energía o por un argumento directo y las frecuencias lineales alrededor de los mínimos. Si $x_0 = -1$, $v_0 = 0{,}5$, determine el intervalo accesible. Explique qué cambia al añadir $-\beta x'$.

12. El umbral de una rotación

Desde la posición angular inferior $\theta_0 = 0$, encuentre el valor umbral de $|\dot\theta_0|$ que separa libración y rotación del péndulo ideal de varilla. Estudie qué ocurre en el umbral y calcule su valor para $l = 1\,\mathrm{m}$. Compare con un péndulo viscoso sin fuerza externa.

13. Un retorno que se puede calcular

Para $x'' + 0{,}4x' + x = 0{,}6\cos\tau$, obtenga la solución periódica y el punto fijo estroboscópico a fase cero. Si se prepara el sistema en $(0, 0)$, escriba el error respecto de la solución periódica y su envolvente decreciente. Calcule el determinante del mapa de periodo 2π.

14. Área que se contrae y dirección que crece

El mapa lineal $\mathcal{Q}(x, y) = (2x, y/4)$ tiene determinante $1/2$. Estudie la estabilidad de su punto fijo y explique qué dato adicional aportó la matriz del problema 13. Para el péndulo forzado con $\beta = 0{,}4$ y $\nu = 1$, determine qué afirma exactamente su determinante estroboscópico.

15. La fase del actuador

Dos péndulos forzados parten de $\theta = u = 0$ con las fases $\varphi_0 = 0$ y $\varphi_0 = \pi$. Calcule sus aceleraciones iniciales y explique por qué (θ, u) no determina por sí solo el mismo problema autónomo. Escriba el sistema ampliado y la sección que define el mapa a fase cero.

16. Trabajo por ciclo

Para la solución periódica del problema 13, calcule el trabajo adimensional de la fuerza externa y la energía disipada durante un periodo. Compare ambos y conéctelos con el balance energético; interprete el papel del desfase.

17. Separación en tiempo finito

Para el péndulo conservativo adimensional, pruebe que el campo es globalmente Lipschitz con constante $L = 1$ en el plano que recubre los ángulos, usando la norma euclídea. Si la incertidumbre inicial es como máximo 10^{-6}, encuentre un horizonte garantizado para una separación de a lo sumo 10^{-2}. Tradúzcalo a segundos para $l = 1\,\mathrm{m}$ y explique el alcance de la cota. Compare después una curva aproximada continuamente diferenciable con una solución exacta del mismo péndulo. Suponga error inicial a lo sumo 10^{-6} y residuo de módulo a lo sumo 10^{-5} en tiempo y estado adimensionales, durante el intervalo que se quiere certificar.

Obtenga el horizonte suficiente para una distancia a lo sumo 10^{-2}. Explique qué exige aplicar esa hipótesis a una tabla numérica.

18. Un exponente positivo cerca de la silla

La ecuación variacional exacta en el reposo superior tiene matriz $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Calcule la amplificación del vector $v_0 = (1, 1)$ y la del vector $w_0 = (1, -1)$ durante $S > 0$. Discuta qué permite concluir cada registro sobre el equilibrio y qué información falta para atribuir caos a un sistema.

19. La espiral creada por el método

Para el oscilador unitario considere Euler explícito, $x_{n+1} = x_n + hv_n$, $v_{n+1} = v_n - hx_n$, y el método compuesto $v_{n+1} = v_n - hx_n$, $x_{n+1} = x_n + hv_{n+1}$. Obtenga el factor energético del primero y una forma cuadrática conservada por el segundo. Determine el rango de $h > 0$ que hace positiva definida esa forma y explique qué cambia en $h = 2$.

20. Diseñar una comprobación numérica

Se propone integrar el péndulo forzado y declarar caos porque dos curvas se separan. Diseñe una comprobación más informativa usando el oscilador forzado lineal como calibración. Incluya fase de muestreo, reducción de paso, balance energético y ecuación variacional. Para la calibración del problema 13, calcule el mayor paso de Euler explícito que coloca los dos autovalores discretos estrictamente dentro del círculo unidad y distinga estabilidad de exactitud.

Soluciones

1. La tolerancia incluye la velocidad

La frecuencia natural es dos en las unidades escogidas, de modo que $r = \sqrt{x^2 + (v/2)^2}$ es constante. Esta elección corresponde a medir la velocidad con la escala de frecuencia por la escala de longitud. En los valores numéricos fijados, $r \le \sqrt{x^2 + v^2} \le 2r$; por tanto basta imponer $\sqrt{x_0^2 + v_0^2} < \varepsilon/2$. Entonces $r(0) < \varepsilon/2$ y toda la norma euclídea futura queda por debajo de ε.

Si $x_0 = 0$, la solución es $x(\tau) = (v_0/2)\sin 2\tau$, $v(\tau) = v_0 \cos 2\tau$. El aparato parte de la posición de equilibrio con energía cinética positiva; el estado de equilibrio exige también velocidad nula. La amplitud $|v_0|/2$ controla la excursión posterior.

2. Un intervalo finito y todo el futuro

La solución es $x(\tau) = x_0 e^{\tau}$. Basta $\delta = \varepsilon e^{-S}$ para obtener la desigualdad estricta durante el intervalo cerrado si $|x_0| < \delta$. Para probar inestabilidad fijamos cualquier $\varepsilon > 0$. Dado un $\delta > 0$, elegimos $0 < x_0 < \min(\delta, \varepsilon)$; en el tiempo finito $\log(\varepsilon/x_0)$ la solución alcanza la frontera. Ningún δ sirve para todo el futuro. Con los datos pedidos, el tiempo es $\log(10^5) \simeq 11{,}5129$. Cada mejora multiplicativa de la preparación añade sólo un tiempo logarítmico antes de esa llegada.

3. Un mínimo con Hessiano degenerado

Las ecuaciones son $x' = p$, $p' = -x^3$. La energía tiene un mínimo estricto en el origen y se conserva; el criterio energético prueba estabilidad. De $p^2/2 \le H_0$ y $x^4/4 \le H_0$ obtenemos $|p| \le \sqrt{2H_0}$ y $|x| \le (4H_0)^{1/4}$. Ambas cotas tienden a cero con la energía inicial, aunque con potencias distintas.

Una solución con $H_0 > 0$ no puede converger al origen, pues por continuidad su energía convergería entonces a cero. La matriz lineal es $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, con soluciones lineales $x = x_0 + p_0\tau$, $p = p_0$. El crecimiento de esa aproximación no decide la dinámica completa: el término

cúbico restaurador, omitido al linealizar, confina los niveles de energía. La solución exacta permanece en un compacto y existe para todo tiempo.

4. Cuánto se puede preparar el péndulo

La escala es $\omega_0 = \sqrt{9{,}81} \simeq 3{,}1321\,\mathrm{s}^{-1}$ y $u_0 = 0{,}2/\omega_0 \simeq 0{,}06386$. Así,

$$e_0 = \frac{0{,}2^2}{2(9{,}81)} + 1 - \cos 0{,}1 \simeq 0{,}0070346.$$

En el extremo angular $u = 0$, por lo que $\theta_{\mathrm{máx}} = \arccos(1 - e_0) \simeq 0{,}11868$ rad. Abajo la rapidez es máxima y vale $\omega_0\sqrt{2e_0} \simeq 0{,}37151\,\mathrm{s}^{-1}$. Para mantener el ángulo dentro de 0,2 basta preparar $|\theta_0| < 0{,}2$ y

$$\frac{l\dot\theta_0^2}{2g} + 1 - \cos\theta_0 < 1 - \cos 0{,}2 \simeq 0{,}0199334.$$

La primera condición selecciona el pozo; la desigualdad impide alcanzar su frontera angular. Los valores del problema cumplen ambas. La masa se cancela porque el modelo gravitatorio y su inercia angular contienen el mismo factor m.

5. El reposo superior

La ecuación es $\eta'' = \sin\eta$. Mientras $\eta_0 \le \eta \le a < \pi$, el seno es positivo y tiene un mínimo $c > 0$ en ese intervalo cerrado. La velocidad parte de cero y crece; si la trayectoria permaneciera allí indefinidamente, $\eta(\tau) \ge \eta_0 + c\tau^2/2$ acabaría excediendo a. Por tanto alcanza a en tiempo finito. La energía confirma la rama recorrida:

$$\frac{(\eta')^2}{2} = \cos\eta_0 - \cos\eta > 0 \quad \text{para } \eta_0 < \eta \le a.$$

Podemos hacer η_0 arbitrariamente pequeño y conservar un a fijo: la solución sale de una vecindad fija del equilibrio superior. Eso demuestra inestabilidad. La ecuación lineal $\eta'' = \eta$ tiene una componente creciente y anticipa el mecanismo; el argumento anterior establece la salida en el sistema no lineal sin depender de la aproximación durante tiempos ilimitados.

6. La matriz pierde una decisión

Separando variables, o derivando x^{-2} cuando $x_0 \neq 0$, obtenemos

$$x_-(\tau) = \frac{x_0}{\sqrt{1 + 2x_0^2\tau}}, \qquad x_+(\tau) = \frac{x_0}{\sqrt{1 - 2x_0^2\tau}}.$$

La solución nula se añade directamente. La primera existe para todo $\tau \ge 0$, conserva el signo, disminuye en módulo y converge a cero: el origen es asintóticamente estable. Para un dato no nulo su intervalo maximal es $\tau > -1/(2x_0^2)$. La segunda tiene intervalo maximal $\tau < 1/(2x_0^2)$ y su módulo crece hasta infinito al acercarse al extremo futuro. Desde un dato arbitrariamente pequeño alcanza cualquier frontera positiva fija antes de ese extremo; el origen es inestable. Ambos Jacobianos son cero y ambas linealizaciones son $x' = 0$. La atracción del primer caso es algebraica, compatible con la ausencia de la hipótesis espectral de decaimiento exponencial.

7. La misma rotación, tres destinos

Multiplicar la primera ecuación por x y la segunda por y cancela los términos de rotación y da $(r^2)' = 2\sigma r^4$. La combinación $xy' - yx' = r^2$ da la velocidad angular $\psi' = 1$. Para $r_0 > 0$,

$$r(\tau) = \frac{r_0}{\sqrt{1 - 2\sigma r_0^2\tau}}, \qquad \psi(\tau) = \psi_0 + \tau.$$

Con $\sigma = -1$, la cota $r(\tau) \le r_0$ y el límite cero prueban estabilidad asintótica; con cero, el radio constante prueba estabilidad sin atracción. Con uno, la solución existe hasta $1/(2r_0^2)$ y atraviesa cualquier círculo mayor que el inicial antes de ese tiempo, lo que prueba inestabilidad. El cambio cúbico modifica el radio sin modificar la matriz de rotación en el origen.

8. Construir la función cuadrática

Escribamos $P = \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. La ecuación matricial se reduce a $-2c = -1$, $a - 2c - d = 0$ y $2c - 4d = -1$. Resulta

$$P = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \qquad \det P = \frac{1}{2} > 0.$$

El primer menor positivo y el determinante positivo prueban que la forma es definida positiva. Su derivada es $-(x^2+v^2)$, de modo que la prueba del texto proporciona estabilidad asintótica exponencial. Los autovalores de P son $1 \pm 1/\sqrt{2}$, lo que permite concretar las constantes de esa estimación.

El término adicional produce el resto $r = (0, -x^3)$, con $\|r\|/\|(x,v)\| \to 0$. La matriz A conserva sus dos autovalores -1; el criterio demostrado sigue siendo aplicable. Esta afirmación local se obtiene controlando el resto cúbico, sin exigir que la ecuación completa tenga las mismas soluciones que la lineal.

9. El conjunto donde cesa la disipación

La energía inicial es $e_0 = 0{,}3^2/2 + 1 - \cos 0{,}6 \simeq 0{,}2196644 < 2$ y el ángulo pertenece al pozo central. La proposición da $(\theta, u) \to (0,0)$ y $e(\tau) \to 0$. Integramos el balance entre cero y S y después tomamos el límite:

$$0 - e_0 = -0{,}4 \int_0^\infty u^2 d\tau, \qquad \int_0^\infty u^2 d\tau = \frac{e_0}{0{,}4} \simeq 0{,}5491610.$$

Si $u = 0$ pero $\sin\theta \neq 0$, la aceleración $u' = -\sin\theta$ es distinta de cero y el sistema empieza a moverse otra vez. La energía tiene pendiente cero en ese instante de retorno; una trayectoria que permanezca con pendiente cero debe tener también $\sin\theta = 0$. Esa permanencia es la condición usada en la prueba.

10. Disipación en una sola componente

La función $E = (x^2+(x')^2+y^2+(y')^2)/2$ satisface $E' = -\beta(y')^2 \le 0$ y es positiva definida. Prueba estabilidad. Si el dato del primer oscilador es no nulo, su energía propia permanece positiva y la solución completa no converge al origen.

El conjunto $E' = 0$ está dado por $y' = 0$. Para que una trayectoria permanezca en él, la ecuación de y exige además $y = 0$. Quedan todas las trayectorias $y = y' = 0$ con el oscilador x libre. Por ejemplo, $x = \cos\tau$ es una de ellas. La segunda componente converge a cero y la primera sigue oscilando; el conjunto de disipación nula contiene movimiento persistente. Se identifica así la hipótesis concreta que permitió concluir retorno en el péndulo.

11. Un pozo y la barrera vecina

Como $U' = x(x^2 - 1)$, los equilibrios son $x = 0, \pm 1$ con velocidad nula. Los mínimos estrictos en ± 1 producen estabilidad conservativa. Allí $U'' = 3x^2 - 1 = 2$ y la frecuencia lineal adimensional es $\sqrt{2}$. En cero el potencial tiene un máximo. Para demostrar salida, preparemos $0 < x_0 < a < 1$, $v_0 = 0$; mientras $x \in [x_0, a]$, $x'' = x(1 - x^2)$ tiene un mínimo positivo. El mismo argumento de aceleración del problema 5 prueba llegada a a, y el origen es inestable.

El dato pedido tiene $E_0 = 1/8 < 1/4$. La desigualdad $U(x) \le 1/8$ equivale a $1 - 1/\sqrt{2} \le x^2 \le 1 + 1/\sqrt{2}$. Seleccionando el pozo negativo,

$$-\sqrt{1 + 1/\sqrt{2}} \le x \le -\sqrt{1 - 1/\sqrt{2}},$$

aproximadamente $-1{,}30656 \le x \le -0{,}54120$. Con rozamiento positivo, $E' = -\beta v^2$ mantiene ese confinamiento. Los puntos de acumulación deben estar en trayectorias con $v = 0$ y $U' = 0$; dentro de este subnivel del pozo sólo aparece $(-1, 0)$. El argumento compacto del texto demuestra convergencia a ese mínimo.

12. El umbral de una rotación

Abajo, $e_0 = l\dot\theta_0^2/(2g)$. La condición $e_0 = 2$ da $|\dot\theta_0| = 2\sqrt{g/l}$, que para un metro vale aproximadamente $6{,}2642\,\mathrm{s}^{-1}$. Por debajo hay libración; por encima, rotación con signo fijo de la velocidad.

En el umbral, para la rama ascendente, $u = 2\cos(\theta/2)$ en $0 \le \theta < \pi$. El tiempo hasta un ángulo θ es la integral de $1/[2\cos(\theta/2)]$. Cerca de π, el denominador es comparable a $\pi - \theta$, cuya integral recíproca diverge. El péndulo se aproxima al reposo superior cuando $\tau \to \infty$ y no lo atraviesa en tiempo finito.

Con viscosidad, energía inicial inferior a dos sigue impidiendo la rotación completa. La igualdad inicial deja de proporcionar la energía necesaria para alcanzar arriba: cualquier tramo con velocidad positiva disipa una cantidad positiva. Una energía inicial superior a dos es condición necesaria para cruzar la barrera con rozamiento, pero su suficiencia depende de la pérdida acumulada antes del cruce.

13. Un retorno que se puede calcular

Buscamos $x_p = a\cos\tau + b\sin\tau$. Los términos $x_p'' + x_p$ se cancelan, y $0{,}4x_p' = 0{,}6\cos\tau$ exige $a = 0$, $b = 1{,}5$. Luego $x_p = 1{,}5\sin\tau$ y su estado a fase cero es $(0, 1{,}5)$.

La diferencia $y = x - x_p$ satisface $y'' + 0{,}4y' + y = 0$, con $y(0) = 0$, $y'(0) = -1{,}5$. Para $\omega_d = \sqrt{0{,}96}$ obtenemos

$$y(\tau) = -\frac{1{,}5}{\omega_d} e^{-0{,}2\tau}\sin(\omega_d\tau),$$

$$y'(\tau) = -\frac{1{,}5}{\omega_d} e^{-0{,}2\tau}\left[\omega_d\cos(\omega_d\tau) - 0{,}2\sin(\omega_d\tau)\right].$$

Ambas componentes quedan acotadas por constantes multiplicadas por $e^{-0{,}2\tau}$. El determinante estroboscópico es $e^{-0{,}4(2\pi)} \simeq 0{,}0810026$. Sus dos autovalores tienen módulo $e^{-0{,}2(2\pi)} \simeq 0{,}284610$, que decide la convergencia de las iteradas hacia el punto fijo.

14. Área que se contrae y dirección que crece

Las iteradas son $\mathcal{Q}^n(x_0, y_0) = (2^n x_0, 4^{-n} y_0)$. Todo dato con $x_0 \neq 0$ abandona cualquier vecindad acotada, aunque el área se multiplique por 2^{-n}. El origen es inestable. En el problema 13 conocíamos el módulo de cada autovalor de la matriz de retorno, ambos menores que uno; ese control proporciona $M^n \to 0$.

En el péndulo forzado, $\det D\mathcal{P} = e^{-0{,}8\pi}$ afirma que el factor infinitesimal de área es ese mismo número en cada punto. Como el mapa de flujo es inyectivo, una región regular se transporta con ese factor de área, mediante cambio de variables. La fórmula admite estiramiento en una dirección y plegamiento global en un dominio más amplio; por sí sola no establece un único atractor ni convergencia de toda preparación.

15. La fase del actuador

La aceleración adimensional inicial es $u'(0) = f\cos\varphi_0$, con valores f y $-f$ en los dos ensayos. El estado ampliado satisface

$$\theta' = u, \qquad u' = -\sin\theta - \beta u + f\cos\varphi, \qquad \varphi' = \nu, \quad \varphi \pmod{2\pi}.$$

En este sistema, el estado (θ, u, φ) sí determina una evolución autónoma. La sección $\varphi = 0$ se vuelve a alcanzar tras $T = 2\pi/\nu$, y registrar (θ, u) en esos instantes define el mapa a fase cero. Muestrear con fases variables mezcla fuerzas aplicadas distintas y destruye esa interpretación del registro.

16. Trabajo por ciclo

La velocidad de la solución periódica es $1{,}5\cos\tau$. El trabajo externo adimensional es

$$W=\int_0^{2\pi} 0{,}6\cos\tau\,(1{,}5\cos\tau)d\tau=0{,}9\pi.$$

La disipación positiva acumulada es $D=\int_0^{2\pi}0{,}4(1{,}5\cos\tau)^2d\tau=0{,}9\pi$. Así $\Delta E=W-D=0$, aunque la energía instantánea varíe. El desplazamiento queda retrasado un cuarto de periodo respecto de la fuerza y la velocidad está en fase con ella: el actuador realiza trabajo positivo en todo instante de velocidad no nula. El balance de un ciclo explica cómo una fuente sostiene la oscilación en presencia de pérdida viscosa.

17. Separación en tiempo finito

Para $F(\theta,u)=(u,-\sin\theta)$, la desigualdad $|\sin\theta-\sin\widetilde{\theta}|\le|\theta-\widetilde{\theta}|$ da

$$\|F(z)-F(\widetilde{z})\|^2\le(u-\widetilde{u})^2+(\theta-\widetilde{\theta})^2=\|z-\widetilde{z}\|^2.$$

Podemos usar $L=1$ en todo el recubrimiento. La cota de separación es $10^{-6}e^{\tau}$, menor o igual que 10^{-2} hasta $\tau=\log(10^4)\simeq 9{,}21034$. Para un metro, $t=\tau/\sqrt{9{,}81}\simeq 2{,}94064\,\mathrm{s}$. Es una garantía suficiente y generalmente conservadora: no afirma que dos preparaciones concretas pierdan precisión exactamente en ese instante. La comparación se hace entre levantamientos angulares coherentes; al proyectar sobre el cilindro, la distancia angular mínima puede ser menor.

El residuo se añade al error de preparación. Con $L=1$, la proposición da $d(\tau)\le 10^{-6}e^{\tau}+10^{-5}(e^{\tau}-1)$. La condición $d\le 10^{-2}$ queda garantizada cuando

$$e^{\tau}\le\frac{10^{-2}+10^{-5}}{10^{-6}+10^{-5}}=910,\qquad \tau\le\log 910\simeq 6{,}81344.$$

Para $l=1\,\mathrm{m}$, con $g=9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$, son aproximadamente $2{,}17537\,\mathrm{s}$. El residuo reduce el horizonte suficiente frente al cálculo que sólo comparaba dos soluciones exactas. Para una tabla de estados se necesita una curva interpolada y una cota del residuo en todo el intervalo; una diferencia pequeña entre refinamientos en algunos instantes no certifica por sí sola esa hipótesis. La cota compara la curva con la solución del modelo declarado. La adecuación del péndulo ideal al aparato conserva su contraste físico propio.

18. Un exponente positivo cerca de la silla

Los vectores pedidos son autovectores con autovalores 1 y -1. Así $v(S)=e^{S}v_0$, $w(S)=e^{-S}w_0$ y los cocientes logarítmicos de amplificación valen respectivamente 1 y -1 por unidad de tiempo adimensional. Una dirección crece y otra decrece cerca de la silla. La salida efectiva del péndulo se probó además en el ejercicio 5.

El retrato completo sigue organizado por niveles de una integral de energía. Un tramo de expansión, incluso medido exactamente en la ecuación variacional, no aporta por sí mismo recurrencia, comportamiento de un conjunto invariante ni crecimiento asintótico a lo largo de órbitas típicas de ese conjunto. Una afirmación sobre caos requiere precisar la definición empleada y verificar sus condiciones. Este cálculo identifica una dirección inestable del equilibrio, con un significado más acotado y demostrable.

19. La espiral creada por el método

Para Euler explícito, sumar los cuadrados produce $x_{n+1}^2+v_{n+1}^2=(1+h^2)(x_n^2+v_n^2)$. La energía crece geométricamente con cualquier paso no nulo. Después de n pasos el factor es $(1+h^2)^n$; la espiral saliente describe el algoritmo.

El método compuesto tiene matriz $S=\left(\begin{smallmatrix}1-h^2 & h\\ -h & 1\end{smallmatrix}\right)$. Una multiplicación directa muestra que conserva

$$I_h(x,v) = x^2 + v^2 - hxv = \left(x - \frac{h}{2}v\right)^2 + \left(1 - \frac{h^2}{4}\right)v^2.$$

Para $0 < h < 2$ es positiva definida y acota todas las iteradas mediante sus elipses. La energía física $E = (x^2 + v^2)/2$ no coincide con $I_h/2$; ambas formas son próximas para paso pequeño. En $h = 2$, queda $(x - v)^2$, que no controla la dirección $x = v$. La matriz tiene autovalor doble -1 y un bloque de Jordan no trivial. Por ejemplo, desde $(0, 1)$ las iteradas son $(-1)^n(-2n, 1 - 2n)$ y crecen linealmente en módulo. La igualdad fronteriza requiere esa revisión aparte.

20. Diseñar una comprobación numérica

Empezamos con el problema 13 porque conocemos solución transitoria, respuesta periódica y mapa. Para un tiempo final fijo registramos errores de estado con pasos $h, h/2, h/4$, tomando un número entero de pasos por periodo o una interpolación cuya precisión también se controle. Comparamos las muestras siempre con la misma fase inicial del actuador y con $(0, 1{,}5)$ una vez transcurrido el transitorio. Una estabilidad aparente con un solo paso puede ocultar un desfase acumulado.

La ecuación homogénea tiene autovalores $\lambda = -0{,}2 \pm i\sqrt{0{,}96}$. Euler explícito los convierte en $1 + h\lambda$ y

$$|1 + h\lambda|^2 = (1 - 0{,}2h)^2 + 0{,}96h^2 = 1 - 0{,}4h + h^2.$$

El intervalo de estabilidad estricta es $0 < h < 0{,}4$; $0{,}4$ es su supremo, y no hay un mayor paso incluido. Un valor cercano a esa frontera puede amortiguar muy mal el transitorio y acumular un error apreciable, aunque las iteradas permanezcan acotadas.

Después trasladamos el procedimiento al péndulo y comprobamos la identidad integral

$$e(S) - e(0) = \int_0^S [-\beta u^2 + f u \cos(\nu\tau)]\, d\tau$$

con una cuadratura refinada junto con la integración. Para medir sensibilidad, integramos además $v' = B(\tau)v$ con la matriz de la demostración del mapa, variamos la dirección inicial y calculamos amplificaciones en varios intervalos finitos. Comparamos esa solución con diferencias entre datos próximos antes de que dejen el régimen lineal; la reducción del paso ayuda a separar errores de integración y de preparación. Se registran parámetros, unidades, transitorio descartado y horizonte. El resultado es evidencia reproducible sobre la dinámica calculada. Una conclusión asintótica sobre caos necesita argumentos adicionales que estas comprobaciones finitas, por sí solas, no proporcionan.

Lecturas y relaciones

Spivak estudia la estabilidad de ecuaciones diferenciales en el añadido 8C y muestra las regiones del péndulo en el capítulo 21. El argumento energético y las pruebas locales de este capítulo permiten distinguir los casos que una matriz decide de aquellos en que intervienen términos superiores. La conservación simpléctica del capítulo 25 se relaciona aquí con el área del mapa de retorno y con los métodos discretos.

Sears–Zemansky y Serway desarrollan el péndulo, el amortiguamiento y la respuesta forzada en sus capítulos de movimiento periódico u oscilatorio. Sus balances de fuerza y potencia sostienen la interpretación mecánica de las ecuaciones que hemos estudiado. El registro a fase fija añade una forma de comparar ensayos y simulaciones con un mismo protocolo de preparación.

Capítulo 27

Sistemas abiertos y transferencia de masa

Un carro avanza por un riel horizontal y recibe arena de una tolva fija. La arena cae con velocidad horizontal nula y queda dentro del carro. Aunque el riel ejerza una fuerza horizontal despreciable, la velocidad del carro disminuye: cada porción recogida necesita adquirir movimiento horizontal. Podemos seguir el carro y toda la arena que llegará a él, como un conjunto material de composición fija, o estudiar en cada instante el carro con la arena ya recogida. La segunda elección mantiene un objeto reconocible en el laboratorio y obliga a registrar el momento que cruza su frontera.

El capítulo 9 obtuvo el balance de momento siguiendo las mismas partículas. Aquí cambia la selección de materia: primero entra arena, después sale gas de un cohete y, finalmente, un chorro atraviesa una región elegida. La pregunta que permanece es cuánto momento gana el contenido y cuánto llega o se lleva la materia que atraviesa su borde. La masa y las velocidades de cruce aportan información física diferente.

Usaremos mecánica newtoniana y marcos inerciales. La masa de cada porción material se conserva durante el proceso; la masa reunida dentro de la frontera cambia por transporte. Los modelos concentrados omitirán el tiempo y la distribución interna de la captura o la expulsión. Declararemos cuándo esa aproximación permite representar todo el contenido mediante una masa y una velocidad comunes. Las conversiones entre energía cinética e interna se contabilizarán por separado.

Del choque aislado a la recogida continua

El primer cálculo puede hacerse sin derivadas. Un carro de masa m y velocidad horizontal v captura una porción de masa $\Delta m > 0$, que antes del contacto tiene velocidad horizontal w. Si el impulso externo horizontal durante la captura es despreciable y ambas partes quedan con velocidad $v + \Delta v$, el momento del conjunto material da

$$mv + \Delta m\, w = (m + \Delta m)(v + \Delta v).$$

Reorganizando,

$$(m + \Delta m)\Delta v = \Delta m(w - v).$$

Con arena que cae verticalmente, $w = 0$: el carro entrega parte de su momento horizontal a cada porción entrante. Si la arena llega con $w = v$, la captura mantiene la velocidad común. Esa comparación identifica la magnitud relevante para la aceleración: la velocidad de llegada respecto del receptor.

Definición. Un sistema material es una colección de porciones de materia que seguimos durante el intervalo considerado. Un sistema abierto es una selección de contenido mediante una frontera que permite el paso de materia; su composición en cada instante queda determinada por esa frontera y por el movimiento de la materia.

La elección admite una frontera fija en el laboratorio o una frontera que acompañe al aparato. El conjunto material permite aplicar directamente la ley de balance ya conocida; el contenido abierto permite formular la pregunta experimental sobre el carro. Pasar de una descripción a otra exige incluir las porciones que cruzan.

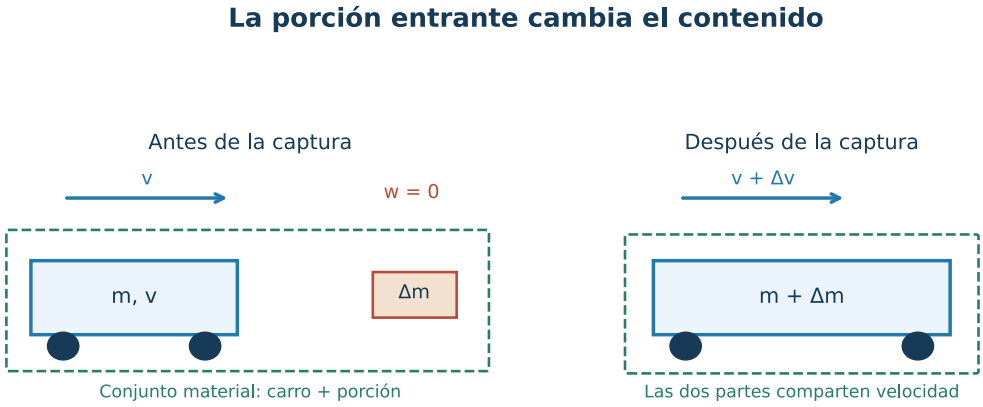


Figura 27.1. La frontera material reúne el carro y la porción que será capturada. Tras el contacto ambos comparten velocidad. La frontera abierta que sigue al carro incorpora la porción al cruzar su borde. Las flechas representan velocidades horizontales.

Dividamos la ecuación anterior por el tiempo de captura Δt. Si $\Delta m/\Delta t \to \mu(t)$, las velocidades son continuas y el incremento de velocidad es de orden Δt, obtenemos $m\dot{v} = \mu(w - v)$. El producto $\Delta m \Delta v$ es de orden Δt^2; al dividir por Δt tiende a cero. El límite declara la aproximación continua que sustituye muchos impactos pequeños.

Definición. El caudal másico de una entrada es la tasa $\mu \geq 0$, dada por $\mu = \lim_{\Delta t \to 0^+} \Delta m_{\text{entrada}}/\Delta t$ de masa que atraviesa la frontera hacia el contenido. Para una salida usaremos la tasa $\nu \geq 0$ orientada hacia fuera. Ambos se expresan en kg/s. Las velocidades de cruce se medirán en un mismo marco inercial, inmediatamente antes de la captura o después de la expulsión, según el proceso.

Cada tasa cuenta la masa por unidad de tiempo en la orientación elegida; la derivada de la masa contenida llevará el signo correspondiente. Un valor de $\dot{m}$ sólo proporciona el saldo. Si entran y salen cantidades iguales por segundo, el contenido puede tener masa constante mientras el transporte de momento permanece activo.

El balance incluye lo que atraviesa la frontera

Supongamos que el contenido puede modelarse con masa $m(t) > 0$ y velocidad común $\mathbf{v}(t)$, de modo que su momento sea $m\mathbf{v}$. Hay un número finito de entradas con tasas μ_a y velocidades $\mathbf{w}_a$, y de salidas con tasas ν_b y velocidades $\mathbf{s}_b$. La fuerza $\mathbf{F}$ es la resultante de las acciones externas sobre el conjunto material usado en el balance, evaluadas en el límite del intervalo: peso, reacciones, tracciones y fuerzas de presión que correspondan a la frontera elegida. Cuando el empuje ya esté representado por el flujo expulsado, su contribución no se añadirá otra vez a $\mathbf{F}$.

Proposición. Bajo esas hipótesis y con tasas y velocidades continuas, los balances concentrados son

$$\dot{m} = \sum_a \mu_a - \sum_b \nu_b,$$

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F} + \sum_a \mu_a \mathbf{w}_a - \sum_b \nu_b \mathbf{s}_b.$$

Equivalentemente,

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F} + \sum_a \mu_a(\mathbf{w}_a - \mathbf{v}) - \sum_b \nu_b(\mathbf{s}_b - \mathbf{v}).$$

Demostración. Durante $[t, t+h]$ tomemos el conjunto material formado por el contenido inicial y las porciones que entrarán durante el intervalo. Al final lo forman el contenido final y las porciones que salieron. Con tasas continuas, las masas transportadas son $\mu_a(t)h + o(h)$ y $\nu_b(t)h + o(h)$. Igualar la masa de ese mismo conjunto en los dos extremos y dividir por h produce el primer balance.

Su momento inicial es $m\mathbf{v} + h\sum_a \mu_a \mathbf{w}_a + o(h)$. Al final vale $(m\mathbf{v})(t+h) + h\sum_b \nu_b \mathbf{s}_b + o(h)$. La diferencia es el impulso externo $h\mathbf{F}(t) + o(h)$, suponiendo acotadas las interacciones adicionales sobre las pequeñas porciones durante su tránsito. La región breve de interacción que produce captura o eyección está incluida en el balance; sus transferencias internas se cancelan al considerar el conjunto material. Restar, dividir por h y tomar el límite da la ecuación de momento. Finalmente expandimos $d(m\mathbf{v})/dt = m\dot{\mathbf{v}} + \dot{m}\mathbf{v}$ y sustituimos el balance de masa. $\square$

El resultado exige que podamos omitir el momento almacenado en una zona interna de tránsito, o incorporarlo al contenido. Un conducto largo con una distribución de velocidades apreciable requerirá una descripción distribuida. También admite fuerzas de presión en una sección de salida; esas tracciones siguen siendo fuerzas aplicadas y se contabilizan con la frontera elegida.

En el carro que recoge arena verticalmente, $\dot{m} = \mu$, $w = 0$ y $F_x = 0$, así que $d(mv)/dt = 0$. Si μ es constante,

$$m(t) = m_0 + \mu t, \qquad v(t) = \frac{m_0 v_0}{m_0 + \mu t}.$$

La aceleración es negativa para $v_0 > 0$; el momento contenido conserva su valor horizontal porque la materia entrante aporta momento horizontal nulo. Si la tolva imprime una velocidad horizontal w constante, el resultado cambia a

$$v(t) = w + \frac{m_0(v_0 - w)}{m_0 + \mu t}.$$

El movimiento se aproxima al de la corriente entrante mientras la recogida continúa. Las ecuaciones incluyen un mecanismo de relajación producido por incorporación de masa, con una evolución algebraica característica.

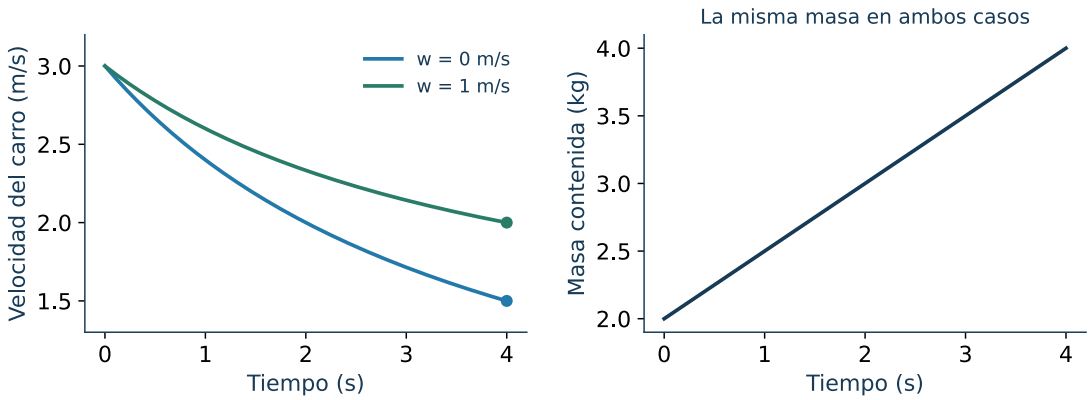


Figura 27.2. Para $m_0 = 2\,\mathrm{kg}$, $v_0 = 3\,\mathrm{m/s}$ y $\mu = 0{,}5\,\mathrm{kg/s}$ se comparan corrientes con velocidad horizontal cero y un metro por segundo. La masa aumenta al mismo ritmo; las velocidades finales difieren por el momento transportado hacia el carro.

Comprobar la ecuación desde otro laboratorio

Un observador que se mueve con velocidad constante $\mathbf{U}$ mide $\widetilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v} - \mathbf{U}$ y transforma del mismo modo cada velocidad de cruce. Las tasas conservan su valor porque describen materia que cruza una misma frontera física, vista desde los dos marcos. El balance debe predecir la misma aceleración.

Proposición. Los balances anteriores conservan su forma bajo un cambio galileano de velocidad constante, con las fuerzas newtonianas transformadas de manera consistente.

Demostración. La derivada del momento contenido se transforma como

$$\frac{d}{dt}(m\widetilde{\mathbf{v}}) = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) - \dot{m}\mathbf{U}.$$

Los transportes del otro miembro cambian en

$$-\left(\sum_{a} \mu_a - \sum_{b} \nu_b\right)\mathbf{U} = -\dot{m}\mathbf{U}.$$

Ambos lados adquieren el mismo término y el balance se mantiene. En la forma de aceleración, las diferencias $\mathbf{w}_a - \mathbf{v}$ y $\mathbf{s}_b - \mathbf{v}$ son directamente invariantes, mientras $\dot{\widetilde{\mathbf{v}}} = \dot{\mathbf{v}}$. $\square$

El cambio de observador permite comprobar también una ecuación propuesta. Escribir $d(m\mathbf{v})/dt = \mathbf{F}$ para un contenido de masa variable y omitir sus transportes dejaría un término extra $-\dot{m}\mathbf{U}$ al cambiar de marco. En el carro con $w = 0$, esa igualdad es válida en el laboratorio donde la materia entrante tiene momento horizontal nulo. El balance completo registra cómo cambia ese aporte entre observadores.

La energía de la captura

Recoger materia puede conservar el momento del conjunto y convertir energía cinética en energía interna. El choque elemental del comienzo tiene una pérdida exacta de energía cinética traslacional

$$D = \frac{1}{2}\frac{m\Delta m}{m + \Delta m}|\mathbf{w} - \mathbf{v}|^2.$$

Se obtiene sustituyendo la velocidad común en las energías antes y después del contacto. El límite continuo relaciona esta pérdida con una potencia y permite comprobar cuánto trabajo necesita un dispositivo que sostenga la velocidad del receptor.

Proposición. Para un contenido de velocidad uniforme que captura una corriente a tasa $\mu \geq 0$, sin salidas, sea $K = m|\mathbf{v}|^2/2$. Su balance cinético es

$$\dot{K} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + \frac{\mu}{2}|\mathbf{w}|^2 - \frac{\mu}{2}|\mathbf{w} - \mathbf{v}|^2.$$

El último término representa la tasa de pérdida de energía cinética en una captura perfectamente inelástica bajo este modelo. El primer término presupone que la potencia mecánica externa sobre el contenido se representa por $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$. El modelo concentra el contenido en una traslación común y omite energía de rotación o movimiento interno resuelto; esas contribuciones requerirían sus propios balances.

Demostración. Derivamos K y usamos $\dot{m} = \mu$ y $m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F} + \mu(\mathbf{w} - \mathbf{v})$:

$$\dot{K} = \frac{\mu}{2}|\mathbf{v}|^2 + \mathbf{v} \cdot [\mathbf{F} + \mu(\mathbf{w} - \mathbf{v})] = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + \mu \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} - \frac{\mu}{2}|\mathbf{v}|^2.$$

La identidad $|\mathbf{w}-\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{w}|^2 - 2\mathbf{w}\cdot\mathbf{v} + |\mathbf{v}|^2$ produce el balance. Para identificar la conversión en la captura, dividimos la pérdida finita D por el tiempo del contacto. Como $\Delta m/\Delta t \to \mu$ y $m/(m + \Delta m) \to 1$, su límite es $\mu|\mathbf{w} - \mathbf{v}|^2/2$. □

Si trabajamos sólo con la componente horizontal del carro, la misma identidad describe la energía cinética horizontal y su pérdida correspondiente. La arena que cae transporta también energía vertical; el balance energético completo del aparato necesita incluirla, junto con las reacciones y la deformación durante la recogida. El experimento horizontal permite inferir una parte de la conversión energética, con un alcance preciso.

Para mantener $v > 0$ constante frente a una entrada con $w = 0$, el motor debe ejercer $F_x = \mu v$. Su potencia es μv^2; la energía cinética horizontal almacenada crece a tasa $\mu v^2/2$ y la otra mitad se convierte en energía interna durante la captura. La fuerza, la potencia suministrada y la energía almacenada responden a preguntas distintas sobre el mismo proceso.

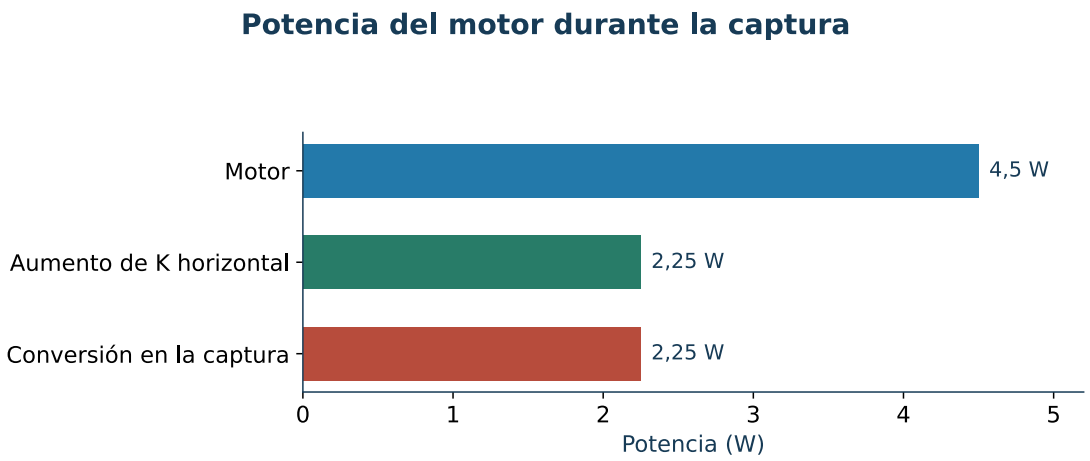


Figura 27.3. Con $v = 3\,\mathrm{m/s}$ y $\mu = 0{,}5\,\mathrm{kg/s}$, la potencia horizontal suministrada es 4,5 W. La mitad incrementa la energía cinética horizontal del contenido y la otra mitad se convierte durante la captura. Se representa sólo este balance horizontal.

Expulsar materia: el cohete ideal

Tomemos un cohete de movimiento rectilíneo. Su masa m reúne estructura, carga y propelente restante. La salida tiene tasa $\nu = -\dot{m} > 0$ y velocidad inercial $s = v - c$, donde $c > 0$ es la rapidez de expulsión hacia atrás respecto del vehículo. La ecuación de aceleración resulta

$$m\dot{v} = F + \nu c = F - c\dot{m}.$$

Aquí F incluye gravedad, resistencia u otras fuerzas externas especificadas aparte del transporte del chorro. La energía que acelera el gas proviene del mecanismo propulsor; los balances de momento fijan el movimiento una vez dados ν y c, pero determinar esas dos funciones exige un modelo del motor o mediciones.

Proposición. En un tramo con $m > 0$, expulsión colineal y rapidez relativa constante c, la velocidad satisface

$$v(t) - v_0 = c \log \frac{m_0}{m(t)} + \int_0^t \frac{F(s)}{m(s)}\, ds.$$

Si $F = 0$, el cambio de velocidad depende sólo de la razón de masas y de c. Con gravedad uniforme vertical y resistencia omitida, $F = -mg$ y se añade el término $-gt$.

Demostración. Dividir la ecuación por m da $\dot{v} = F/m - c\dot{m}/m$. Integramos entre cero y t. La positividad de m permite usar $d(\log m)/dt = \dot{m}/m$; con c constante, el segundo término integrado es $c \log(m_0/m(t))$. Para $F = -mg$, el integrando adicional vale $-g$. $\square$

La razón m_0/m es adimensional y c fija la escala de velocidad. Un cohete puede adquirir una velocidad mayor que c en el laboratorio, pues cada porción de gas sale respecto de un vehículo cuya velocidad va cambiando. Cuando se agota el propelente, el modelo cambia de tramo: la masa llega a un valor seco positivo y la expulsión cesa. Extrapolar una tasa constante hasta masa nula eliminaría el propio aparato que describimos.

Con tasa constante ν, el dominio propulsado termina en $t_b = (m_0 - m_f)/\nu$ y $m = m_0 - \nu t$. En ascenso libre, para gravedad uniforme,

$$v(t) = v_0 + c \log \frac{m_0}{m_0 - \nu t} - gt.$$

Integrar una vez más recupera la altura:

$$y(t) - y_0 = v_0 t + c\left[t - \frac{m(t)}{\nu} \log \frac{m_0}{m(t)}\right] - \frac{1}{2} g t^2.$$

Estas fórmulas presuponen vuelo libre durante el tramo. Si el vehículo está apoyado en una plataforma, la reacción del apoyo debe incluirse hasta que las condiciones permitan el despegue. La ecuación de vuelo libre por sí sola no determina el instante de separación del soporte.

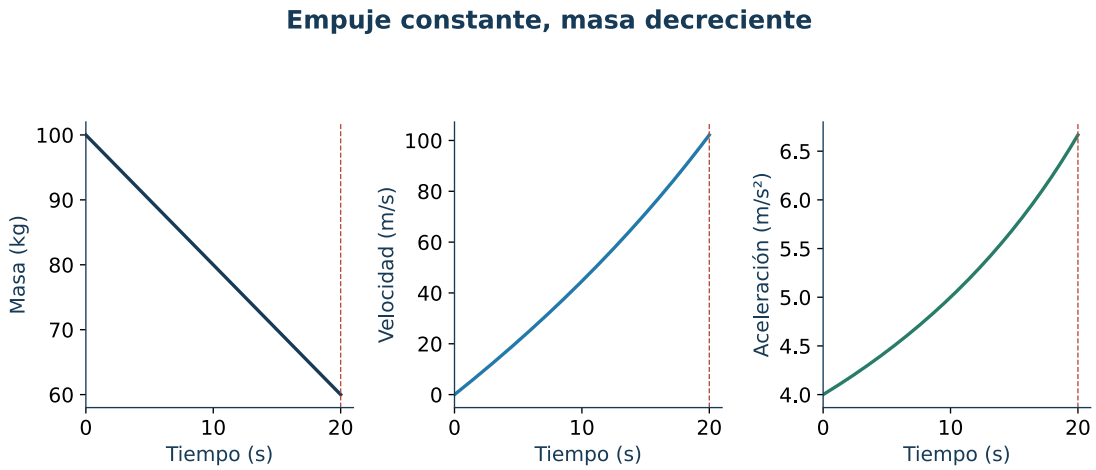


Figura 27.4. En un ejemplo sin fuerza externa, $m_0 = 100\,\mathrm{kg}$, $\nu = 2\,\mathrm{kg/s}$ y $c = 200\,\mathrm{m/s}$. La expulsión termina a los veinte segundos, con masa seca de sesenta kilogramos. El empuje constante produce una aceleración creciente mientras disminuye la masa.

En una tobera puede intervenir una diferencia de presión entre la sección de salida y el ambiente. Para un chorro axial uniforme, una aproximación habitual reúne la contribución de momento y la tracción neta de presión en

$$T = \nu c + (p_e - p_a)A_e.$$

El término de presión resulta de la fuerza neta de las tracciones sobre la sección abierta, comparada con la presión ambiente uniforme sobre la frontera restante. La sección y la orientación fijan el signo: el gas sale hacia atrás y una presión de salida mayor que la ambiente añade empuje hacia delante. La expresión supone una geometría y un estado de salida dados. Si cambia el ambiente y con él cambia el flujo del motor, hacen falta nuevos valores de ν, c, p_e; mantenerlos constantes es una comparación idealizada explícita.

De la corriente discreta a una región del espacio

Un chorro que golpea una placa puede atravesar el aparato sin quedar almacenado. La masa dentro de una región puede mantenerse constante, aunque el aparato reciba una fuerza permanente. El balance concentrado muestra ya el mecanismo: entrada y salida pueden compensar masa y transportar momentos diferentes. Para calcular las tasas necesitamos comparar la velocidad de la materia con la de la frontera.

En una corriente uniforme de densidad ρ, sección A y rapidez axial U, el caudal a través de una sección fija perpendicular al eje es $\rho A U$. Si la sección se desplaza con rapidez $V < U$ hacia delante, sólo atraviesa la sección la columna de longitud $(U - V)\Delta t$ durante el intervalo Δt. La tasa es entonces $\rho A(U - V)$. La velocidad inercial transportada sigue siendo U; $U - V$ decide cuánta materia cruza cada segundo.

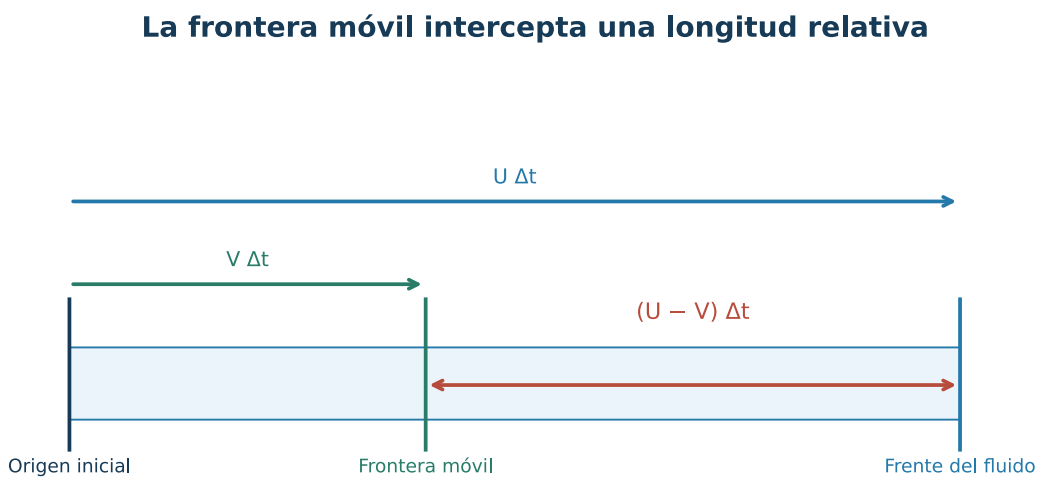


Figura 27.5. Durante el mismo intervalo, el fluido recorre $U\Delta t$ y la placa avanza $V\Delta t$. La longitud de corriente que alcanza la placa es $(U-V)\Delta t$. Se supone $0 \le V < U$ y un chorro uniforme que la placa intercepta por completo.

Definición. Un volumen de control $V(t)$ es una región espacial elegida para contabilizar el contenido y sus transportes. Si su frontera tiene velocidad $\mathbf{b}$ y normal exterior unitaria $\mathbf{n}$, la densidad superficial de flujo másico saliente es $j_m = \rho(\mathbf{u}-\mathbf{b})\cdot\mathbf{n}$, donde $\mathbf{u}$ es la velocidad local de la materia. La integral de j_m sobre una parte de la frontera proporciona su flujo neto de masa hacia fuera.

Un valor positivo expresa salida y uno negativo, entrada. La velocidad $\mathbf{b}$ de la frontera y la velocidad $\mathbf{u}$ del fluido son campos diferentes. Si coinciden en la componente normal, la frontera acompaña materialmente a la materia. La densidad de flujo tiene unidades de $\mathrm{kg/(m^2 s)}$; al integrar en superficie recuperamos kg/s.

La siguiente formulación usa integrales de volumen y superficie, cambio de variables y el teorema de la divergencia. Para un campo $\mathbf{q}$, escribimos $\nabla\cdot\mathbf{q} = \sum_i \partial q_i/\partial x_i$; el teorema identifica su integral sobre una región con el flujo $\int_{\partial V}\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\,dS$ por la frontera, bajo las condiciones usuales de regularidad que declaramos en el resultado. Entender su derivación permite reconocer la misma contabilidad de los paquetes en una descripción distribuida. Los ejemplos anteriores y los balances de puertos pueden seguirse con sus versiones unidimensionales.

Proposición. Sea $V(t)$ una región acotada que se mueve mediante un campo suave $\mathbf{b}$, con frontera suave por partes, y sea $a(\mathbf{x},t)$ una densidad de clase C^1 en una vecindad de la clausura de las regiones durante el intervalo. Las mismas condiciones de regularidad se suponen para ρ y $\mathbf{u}$ al escribir los balances siguientes. Entonces

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} a\,dV = \int_{V(t)} \partial_t a\,dV + \int_{\partial V(t)} a\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}\,dS.$$

Si la materia conserva masa y satisface el balance newtoniano de momento para regiones materiales, los balances de un volumen de control son

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho\,dV = -\int_{\partial V(t)} \rho(\mathbf{u}-\mathbf{b})\cdot\mathbf{n}\,dS,$$

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho\mathbf{u}\,dV = \mathbf{F}_{V(t)} - \int_{\partial V(t)} \rho\mathbf{u}[(\mathbf{u}-\mathbf{b})\cdot\mathbf{n}]\,dS.$$

La fuerza $\mathbf{F}_{V(t)}$ incluye las fuerzas de volumen y las tracciones de superficie sobre el contenido. La regularidad se exige durante el tramo analizado; los choques y discontinuidades necesitan una formulación integral con condiciones de salto.

Demostración. Fijemos un instante y transportemos cada punto $\mathbf{x}$ de la región durante un tiempo h mediante el flujo de $\mathbf{b}$. El cambio de posición es $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + h\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) + o(h)$ y su Jacobiano vale $1 + h\nabla\cdot\mathbf{b} + o(h)$. Esta última identidad se obtiene expandiendo el determinante de $I + hD\mathbf{b}$. El cambio de variables a la región fija inicial y la regla de la cadena dan

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} a\,dV = \int_{V(t)} [\partial_t a + \mathbf{b}\cdot\nabla a + a\nabla\cdot\mathbf{b}]\,dV.$$

La suma de los dos últimos términos es $\nabla\cdot(a\mathbf{b})$. El teorema de la divergencia la convierte en la integral de frontera y prueba la primera identidad. La regularidad y la región acotada permiten tomar los restos uniformes en la clausura durante el paso local.

Apliquemos la identidad a una región material, cuya frontera tiene $\mathbf{b} = \mathbf{u}$. La conservación de su masa implica $\int [\partial_t \rho + \nabla\cdot(\rho\mathbf{u})]dV = 0$ en cualquier región material inicial. Por continuidad del integrando y arbitrariedad de esas regiones,

$$\partial_t \rho + \nabla\cdot(\rho\mathbf{u}) = 0.$$

Sustituir esta ecuación en la primera identidad, ahora para la frontera elegida $\mathbf{b}$, proporciona el balance de masa. Para el momento aplicamos la misma identidad componente por componente a $a = \rho u_i$. La ley de Newton de una región material identifica

$$\int_{V(t)} [\partial_t(\rho u_i) + \nabla\cdot(\rho u_i \mathbf{u})]dV = (\mathbf{F}_{V(t)})_i.$$

Al cambiar a la frontera de velocidad $\mathbf{b}$, restamos el transporte con $\mathbf{u}$ y añadimos el transporte con $\mathbf{b}$. La diferencia es la integral saliente con $\mathbf{u} - \mathbf{b}$, y reunir las componentes da la ecuación vectorial. $\square$

En una sección de flujo uniforme, la integral de momento es el producto del caudal másico por la velocidad inercial de la corriente. Sumando secciones recuperamos los balances de puertos. Esta deducción explica por qué aparecen dos velocidades en el mismo término: una transporta momento por unidad de masa y la otra determina la masa que atraviesa el borde.

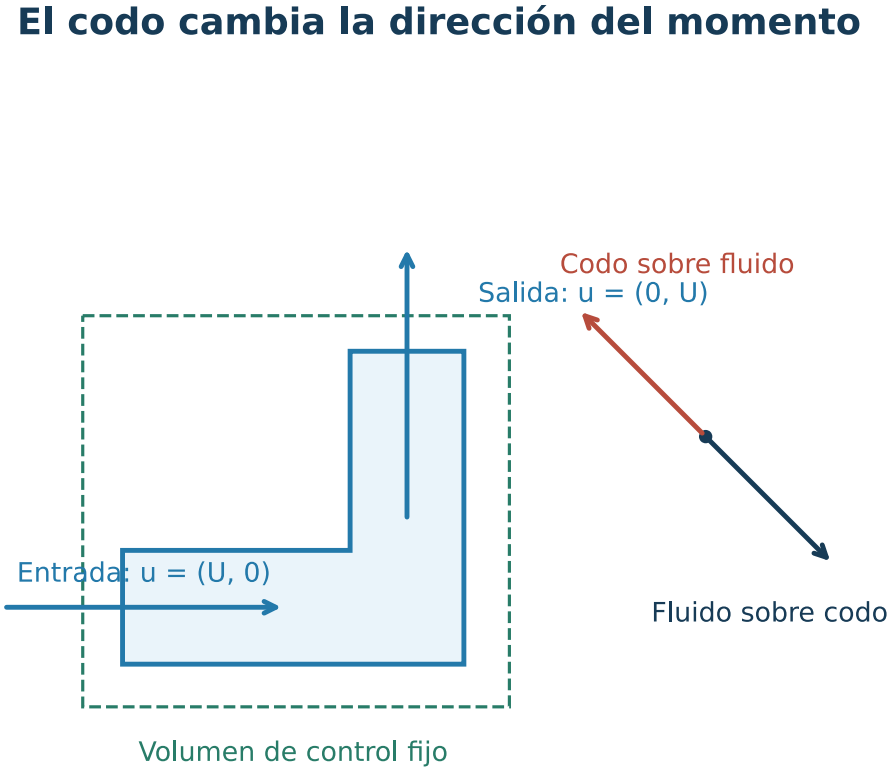


Figura 27.6. Un flujo estacionario entra horizontalmente y sale verticalmente. Con igual rapidez en ambas secciones y presiones manométricas nulas, la fuerza del conducto sobre el fluido tiene la dirección de la variación de momento. El fluido ejerce sobre el conducto la fuerza opuesta.

Qué se mide al contrastar un sistema abierto

Para el carro bastan una balanza, un registro de posición y una estimación independiente de la velocidad de llegada. El cohete requiere además masa seca, historia de consumo y estado del chorro; una placa exige distinguir sección del chorro y área efectiva de salida. Ajustar sólo $m(t)$ y $v(t)$ puede dejar varias corrientes compatibles con el mismo movimiento. Las condiciones de frontera son parte de la información física del problema.

Una comparación útil combina el balance de momento con el energético. Dos entradas con la misma suma de momentos pueden entregar energías cinéticas diferentes. El movimiento del receptor permite inferir una media de velocidades de llegada; la energía convertida durante la mezcla depende también de su dispersión. Los ejercicios finales recuperan así el problema de inferir lo que un registro realmente determina.

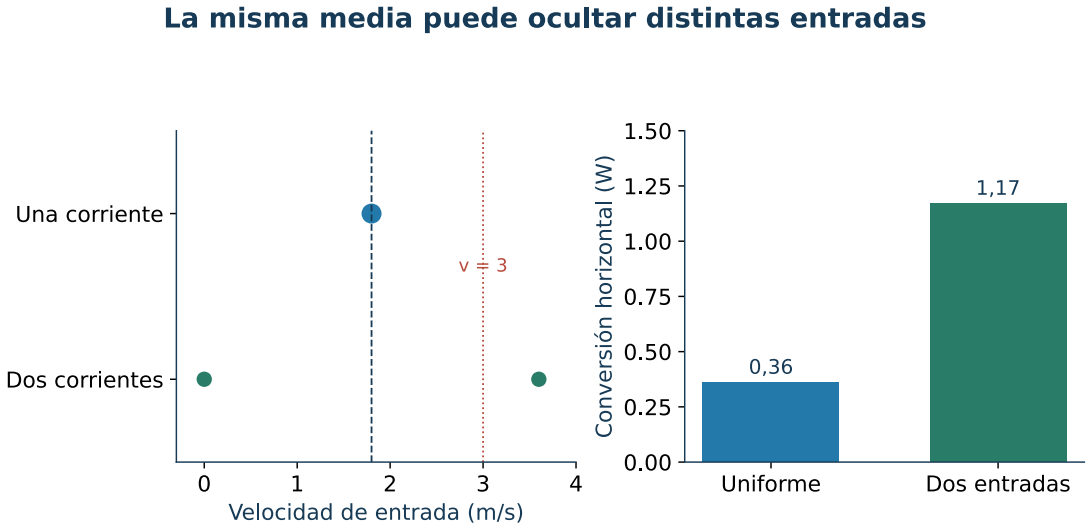


Figura 27.7. Dos preparaciones tienen caudal total 0,5 kg/s y velocidad media de entrada 1,8 m/s. Con receptor a tres metros por segundo, la corriente uniforme y las dos corrientes separadas producen la misma aceleración instantánea y distintas tasas de conversión cinética en la captura.

Podemos expresar con precisión qué añade una medición de energía a la trayectoria del receptor. Consideremos entradas de velocidades horizontales w_a, tasas $\mu_a \geq 0$ y tasa total $\mu = \sum_a \mu_a > 0$, capturadas sin mezclarse antes en otro aparato.

Definición. La media de velocidades de entrada es $\overline{w} = \sum_a \mu_a w_a / \mu$ y su varianza ponderada por caudal es $\sigma_w^2 = \sum_a \mu_a (w_a - \overline{w})^2 / \mu$. La varianza tiene unidades de velocidad al cuadrado y mide la dispersión de las corrientes respecto de su media.

Proposición. En el modelo concentrado de captura perfectamente inelástica, la conversión de energía cinética horizontal por unidad de tiempo es

$$D = \frac{1}{2} \sum_a \mu_a (w_a - v)^2 = \frac{\mu}{2} \left[(\overline{w} - v)^2 + \sigma_w^2 \right].$$

A tasa total y media fijadas, su mínimo es $\mu(\overline{w} - v)^2/2$, alcanzado cuando todas las entradas de caudal positivo comparten esa media. La energía cinética horizontal entrante por unidad de tiempo es $\mu(\overline{w}^2 + \sigma_w^2)/2$.

Demostración. Escribamos $w_a - v = (w_a - \overline{w}) + (\overline{w} - v)$ y expandamos el cuadrado. El término cruzado contiene $\sum_a \mu_a (w_a - \overline{w}) = 0$. Los otros dos sumandos dan la identidad. La varianza es una suma de cuadrados con pesos no negativos; su anulación equivale a $w_a = \overline{w}$ en todas las entradas de peso positivo. Expandir $w_a = (w_a - \overline{w}) + \overline{w}$ del mismo modo prueba la fórmula energética entrante. $\square$

La masa, la velocidad y la aceleración del receptor permiten inferir la media mediante el balance de momento cuando las fuerzas externas son conocidas. Una medición independiente de D, con los demás intercambios controlados, añade la varianza. Diferentes familias de corrientes pueden compartir ambas cantidades. Los ejercicios 20 y 21 separan esas dos etapas de inferencia y recuperan, al final del tomo, la pregunta del capítulo cero sobre qué determina una operación de medida.

Ejercicios

1. Una porción de arena

Un carro de 2 kg avanza a 3 m/s y captura 0,5 kg de material con velocidad horizontal nula. Omita el impulso externo horizontal. Obtenga la velocidad común y la pérdida de energía cinética horizontal. Explique qué materia debe incluir la conservación utilizada.

2. La tolva permanece abierta

El mismo carro recibe arena con caudal constante 0,5 kg/s durante cuatro segundos. Calcule masa, velocidad y distancia recorrida al final, y la conversión acumulada de energía cinética horizontal. Compare con la captura de una sola porción de masa igual a toda la arena recogida.

3. La arena llega en movimiento

Repita la recogida del problema 2 con velocidad horizontal de llegada $w = 1\,\mathrm{m/s}$. Determine la velocidad final, la energía cinética que entra y la energía convertida durante la captura. Compruebe el balance de momento del contenido.

4. Una fuerza constante durante la recogida

Un carro parte del reposo con $m_0 = 2\,\mathrm{kg}$, recibe arena vertical a $\mu = 0{,}5\,\mathrm{kg/s}$ y es tirado horizontalmente con $F = 2\,\mathrm{N}$. Obtenga $v(t)$, $x(t) - x_0$ y la aceleración. A los cuatro segundos compare trabajo, energía cinética y conversión durante la captura.

5. Mantener la velocidad

El motor mantiene un carro a 3 m/s mientras recoge arena vertical a 0,5 kg/s. Calcule fuerza, potencia del motor, crecimiento de energía cinética horizontal y potencia convertida durante la captura. Indique qué habría que añadir para un balance energético tridimensional de la arena que cae.

6. Soltar carga que acompaña al vehículo

Un vehículo de 10 kg viaja a 4 m/s y deja caer carga a 1 kg/s, con velocidad horizontal de salida igual a la del vehículo. Se omiten fuerzas externas horizontales. Calcule aceleración y derivada del momento del contenido. Explique la diferencia entre ambas respuestas.

7. Una expulsión con final físico

Un cohete ideal parte del reposo con $m_0 = 100\,\mathrm{kg}$, masa seca 60 kg, $\nu = 2\,\mathrm{kg/s}$ y $c = 200\,\mathrm{m/s}$. Omita fuerzas externas. Obtenga tiempo de combustión, velocidad final, empuje y aceleraciones inicial y final. Especifique el movimiento posterior al agotamiento.

8. El combustible que exige una maniobra

Para lograr $\Delta v = 300\,\mathrm{m/s}$ con $c = 200\,\mathrm{m/s}$, encuentre la razón inicial/final de masas y la fracción inicial consumida. Calcule la masa inicial necesaria si estructura y carga final suman 20 kg. Revise el límite cuando $\Delta v/c$ es pequeño.

9. Dos historias de consumo

Dos vehículos en vuelo libre vertical parten con $v_0 = 200\,\mathrm{m/s}$ y masa 100 kg; ambos terminan con 60 kg y expulsan con $c = 200\,\mathrm{m/s}$. Uno completa la expulsión en diez segundos y otro en veinte. Con gravedad uniforme $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ y resistencia omitida, compare sus velocidades al término de cada combustión. Compare también el caso sin gravedad. Suponga altura inicial suficiente para evitar contacto con el suelo.

10. El apoyo antes del vuelo

Un pequeño vehículo descansa en una plataforma horizontal. Su masa inicial es $10\,\mathrm{kg}$, la seca es $5\,\mathrm{kg}$ y expulsa hacia abajo a $\nu = 0{,}1\,\mathrm{kg/s}$ con $c = 200\,\mathrm{m/s}$. Con $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$, estudie si despega y determine la reacción mientras permanezca apoyado. Compare con la aceleración que se obtendría al suponer vuelo libre desde el inicio.

11. La sección de presión

Una tobera tiene $\nu = 2\,\mathrm{kg/s}$, $c = 300\,\mathrm{m/s}$, $A_e = 0{,}01\,\mathrm{m^2}$ y $p_e - p_a = 20\,\mathrm{kPa}$. Calcule el empuje total y sus contribuciones. Si disminuye p_a en $10\,\mathrm{kPa}$ manteniendo idealmente los demás datos, calcule el nuevo empuje. Explique la hipótesis de esa comparación.

12. Tres sentidos de una expulsión

Un vehículo inicialmente en reposo tiene masa $10\,\mathrm{kg}$ y expulsa una porción de $2\,\mathrm{kg}$. Calcule su velocidad final si la porción queda con velocidad relativa $-5\,\mathrm{m/s}$ respecto del vehículo final. Repita si la velocidad de la porción es $-5\,\mathrm{m/s}$ respecto del laboratorio inicial. Compare con una expulsión continua de masa desde diez hasta ocho kilogramos a rapidez relativa constante de cinco metros por segundo.

13. Separar una etapa

Un vehículo parte con $120\,\mathrm{kg}$. Consume $40\,\mathrm{kg}$ de propelente, desprende sin impulso relativo una estructura seca de $10\,\mathrm{kg}$ y consume después otros $30\,\mathrm{kg}$. Ambas expulsiones tienen $c = 200\,\mathrm{m/s}$; omita fuerzas externas. Calcule el cambio total de velocidad y compárelo con conservar la estructura hasta terminar ambas combustiones. Identifique las masas que entran en cada logaritmo.

14. Una placa fija frente al chorro

Agua de densidad $1000\,\mathrm{kg/m^3}$ llega a una placa fija con sección de chorro $10^{-4}\,\mathrm{m^2}$ y rapidez $10\,\mathrm{m/s}$. El agua sale con componente axial nula, en un régimen estacionario con presiones manométricas nulas en las secciones y peso omitido. Determine caudal, fuerza axial sobre la placa y potencia mecánica recibida por una placa inmóvil. Decida si estos datos determinan la energía disipada en el flujo.

15. La placa se desplaza

La placa del problema anterior se mueve en la dirección del chorro a velocidad constante $V = 4\,\mathrm{m/s}$. Suponga que intercepta toda la corriente que la alcanza y que la velocidad axial de salida es V en el laboratorio. Obtenga el caudal interceptado, la fuerza axial del agua y la potencia que puede entregar a una carga que mantiene esa velocidad. Declare qué frontera usa para el cálculo.

16. Elegir la velocidad de extracción

Para una placa móvil con las hipótesis del problema 15 y $0 \le V \le U$, maximice $P(V) = \rho A V (U - V)^2$. Compare la potencia máxima con el flujo cinético $\rho A U^3/2$ del chorro completo. Obtenga los valores numéricos con los datos anteriores y explique qué parte del chorro participa en cada segundo.

17. El conducto gira noventa grados

Un flujo estacionario con caudal $1\,\mathrm{kg/s}$ entra en un codo con velocidad $(10, 0)\,\mathrm{m/s}$ y sale con $(0, 10)\,\mathrm{m/s}$. Omita peso y tome presiones manométricas nulas en las dos secciones. Determine la fuerza del codo sobre el fluido y la del fluido sobre el codo. Compare los flujos de energía cinética y decida si la desviación requiere por sí misma una pérdida de esa energía.

18. Un volumen que se alarga

Un fluido de densidad constante ρ se mueve con velocidad uniforme $U > 0$ en un conducto recto de sección A. El volumen de control ocupa $0 < x < L_0 + Vt$, con $0 < V < U$. Calcule la derivada de su masa y de su momento axial. Compruebe ambos balances mediante los flujos y explique por qué puede crecer el momento contenido con fuerza neta nula.

19. La misma corriente en dos fronteras

En un conducto de sección constante A tome $u(x,t) = ax$ y $\rho(t) = \rho_0 e^{-at}$, con $a > 0$ y $x \geq 0$. Compruebe continuidad. Compare la masa en el intervalo fijo $[0, L_0]$ con la de la región material $[0, L_0 e^{at}]$. Calcule el flujo másico saliente en la frontera fija y en la frontera material.

20. Lo que el movimiento permite inferir

Un receptor incorpora masa a tasa total $\mu > 0$, sin fuerza externa horizontal. Se mide $m(t)$ y $v(t)$. Deduzca la velocidad horizontal media de entrada que esos datos determinan. Para $m = 2\,\mathrm{kg}$, $v = 3\,\mathrm{m/s}$, $\mu = 0{,}5\,\mathrm{kg/s}$ y $\dot{v} = -0{,}3\,\mathrm{m/s^2}$, calcule esa media. Compare una entrada uniforme con dos entradas iguales de velocidades cero y $3{,}6\,\mathrm{m/s}$, tanto en aceleración como en conversión de energía cinética horizontal. Identifique qué medición adicional permitiría distinguirlas.

21. Dos entradas con el mismo movimiento y la misma conversión

Un receptor horizontal de masa inicial $2\,\mathrm{kg}$ y velocidad inicial $3\,\mathrm{m/s}$ captura corrientes de tasa total constante $\mu = 0{,}5\,\mathrm{kg/s}$, sin fuerza externa horizontal. Compare dos preparaciones que conservan sus tasas y velocidades mientras dura la captura. En A llegan dos corrientes iguales con velocidades 0 y $3{,}6\,\mathrm{m/s}$. En B llegan tres corrientes con fracciones de caudal $1/4, 1/2, 1/4$ y velocidades $1{,}8 - 1{,}8\sqrt{2}$, $1{,}8$ y $1{,}8 + 1{,}8\sqrt{2}\,\mathrm{m/s}$. Las velocidades negativas corresponden a entradas desde el sentido opuesto y las corrientes permanecen separadas hasta su captura. Obtenga la media, la varianza, el movimiento del receptor y los balances cinéticos horizontales. Calcule en ambas preparaciones el cuarto momento central ponderado $\sum_a \mu_a (w_a - \overline{w})^4/\mu$ y proponga una observación que las distinga.

Soluciones

1. Una porción de arena

El sistema material contiene el carro y la porción que llegará a él. Su momento horizontal inicial es $6\,\mathrm{kg\,m/s}$ y el final es $2{,}5 v_f$, de donde $v_f = 2{,}4\,\mathrm{m/s}$. Las energías cinéticas horizontales son $K_i = 9\,\mathrm{J}$ y $K_f = \tfrac{1}{2}(2{,}5)(2{,}4)^2 = 7{,}2\,\mathrm{J}$. Se convierten $1{,}8\,\mathrm{J}$ en otras formas de energía.

La pérdida también se obtiene de $D = \tfrac{1}{2}[2(0{,}5)/2{,}5](3-0)^2$. El carro solo recibe una interacción de la arena; incluir ambos permite cancelar la transferencia interna de momento durante la captura. La afirmación sobre energía horizontal deja abierta la energía asociada a la caída vertical.

2. La tolva permanece abierta

La masa al final es $m_f = 2 + 0{,}5(4) = 4\,\mathrm{kg}$. Como el flujo de momento horizontal entrante es cero, $mv = 6$ y $v_f = 1{,}5\,\mathrm{m/s}$. Integramos la velocidad:

$$x(t) - x_0 = \frac{m_0 v_0}{\mu} \log \frac{m_0 + \mu t}{m_0}, \qquad x(4) - x_0 = 12 \log 2 \simeq 8{,}3178\,\mathrm{m}.$$

La energía final es $4{,}5\,\mathrm{J}$; se convierten los otros $4{,}5\,\mathrm{J}$, pues faltan trabajo externo horizontal y aporte cinético horizontal de la arena. Una captura única de los dos kilogramos produce

la misma velocidad final por conservación de momento y la misma conversión total. Las historias de velocidad, posición y fuerza durante el proceso difieren: la recogida continua distribuye el intercambio en el tiempo.

3. La arena llega en movimiento

La fórmula general da $v_f = 1 + [2(3-1)]/4 = 2\,\mathrm{m/s}$. Entran dos kilogramos con energía cinética horizontal de un joule y momento de $2\,\mathrm{kg\,m/s}$. El momento contenido crece de seis a ocho y coincide con $m_f v_f = 8$. La energía final vale $8\,\mathrm{J}$; del total disponible de $9+1 = 10\,\mathrm{J}$ se convierten dos joules.

Podemos comprobarlo integrando la potencia de captura: $v - w = m_0(v_0 - w)/m = 4/m$, por lo que $D = \int_0^4 \mu(4/m(t))^2/2\,dt = 2\,\mathrm{J}$. La velocidad de llegada modifica simultáneamente el flujo de momento, el aporte cinético y la conversión en el contacto.

4. Una fuerza constante durante la recogida

El balance es $d(mv)/dt = F$, con momento inicial cero. Por tanto

$$v(t) = \frac{Ft}{m_0 + \mu t}, \qquad \dot v(t) = \frac{F m_0}{(m_0 + \mu t)^2},$$

$$x(t) - x_0 = \frac{F}{\mu}\left[t - \frac{m_0}{\mu}\log\left(1 + \frac{\mu t}{m_0}\right)\right].$$

A los cuatro segundos, $v = 2\,\mathrm{m/s}$, $\dot v = 0{,}25\,\mathrm{m/s^2}$ y la distancia es $16(1-\log 2) \simeq 4{,}90965\,\mathrm{m}$. El trabajo externo es $W = F\Delta x \simeq 9{,}81929\,\mathrm{J}$ y la energía cinética final es $8\,\mathrm{J}$. La diferencia $D \simeq 1{,}81929\,\mathrm{J}$ coincide con $\int_0^4 \mu v^2/2\,dt$. Aplicar $m\dot v = F$ sin el término de captura sobreestimaría la aceleración: una parte del impulso acelera la materia que va incorporándose.

5. Mantener la velocidad

Como $\dot v = 0$, la fuerza externa debe satisfacer $F_x = \mu v = 1{,}5\,\mathrm{N}$. Su potencia es $F_x v = 4{,}5\,\mathrm{W}$. La masa almacenada crece con velocidad fija, así que $\dot K_x = \mu v^2/2 = 2{,}25\,\mathrm{W}$; la captura convierte otros $2{,}25\,\mathrm{W}$ de energía cinética horizontal.

El balance tridimensional necesita la velocidad vertical de llegada, el cambio de energía gravitatoria y las transferencias durante la detención vertical. Conocer la fuerza horizontal y el crecimiento de masa permite cerrar el balance horizontal desarrollado, pero no determina por sí solo esas contribuciones adicionales.

6. Soltar carga que acompaña al vehículo

La salida tiene $s = v$ en la componente horizontal, de modo que $m\dot v = -\nu(s - v) = 0$. El vehículo mantiene $v = 4\,\mathrm{m/s}$ mientras la masa siga positiva y la descarga se sostenga. En cambio,

$$\frac{d}{dt}(mv) = \dot m v = -\nu v = -4\,\mathrm{N}.$$

El contenido pierde momento porque parte de la materia que ya se movía con él cruza la frontera. Esa materia continúa llevando el momento faltante. Desprenderla con velocidad horizontal común deja intacta la velocidad del receptor. El descenso vertical posterior exige su balance propio y no añade automáticamente propulsión horizontal.

7. Una expulsión con final físico

La duración es $t_b = (100-60)/2 = 20\,\mathrm{s}$. El empuje de momento vale $\nu c = 400\,\mathrm{N}$ y

$$v_f = 200 \log \frac{100}{60} \simeq 102{,}1651\,\mathrm{m/s}.$$

Las aceleraciones durante el tramo son $400/100 = 4\,\mathrm{m/s^2}$ al inicio y $400/60 \simeq 6{,}6667\,\mathrm{m/s^2}$ justo antes del agotamiento. Después, el motor cesa, la masa queda en sesenta kilogramos y, bajo la hipótesis de fuerza externa nula, el vehículo mantiene su velocidad final. El cambio de ecuación evita extrapolar la combustión a un estado sin propelente.

8. El combustible que exige una maniobra

Despejando el logaritmo, $m_0/m_f = e^{\Delta v/c} = e^{1{,}5} \simeq 4{,}48169$. La fracción consumida respecto de la masa inicial es $1 - m_f/m_0 = 1 - e^{-1{,}5} \simeq 0{,}77687$. Para masa final de veinte kilogramos, $m_0 = 20e^{1{,}5} \simeq 89{,}6338\,\mathrm{kg}$ y el propelente suma aproximadamente $69{,}6338\,\mathrm{kg}$.

Si $\epsilon = \Delta v/c$ es pequeño, $e^{\epsilon} = 1 + \epsilon + O(\epsilon^2)$ y $1 - e^{-\epsilon} = \epsilon + O(\epsilon^2)$. La fracción inicial requerida es aproximadamente $\Delta v/c$ en ese régimen. Para $\epsilon = 1{,}5$ el término cuadrático y los siguientes tienen un efecto grande, y la aproximación lineal daría una fracción imposible mayor que uno; ese diagnóstico señala el fallo del régimen supuesto.

9. Dos historias de consumo

Ambos vehículos ganan por expulsión $200 \log(5/3) \simeq 102{,}1651\,\mathrm{m/s}$. El primero pierde $98{,}1\,\mathrm{m/s}$ por gravedad y termina con $204{,}0651\,\mathrm{m/s}$. El segundo pierde $196{,}2\,\mathrm{m/s}$ y termina con $105{,}9651\,\mathrm{m/s}$. La comparación se hace al final de cada combustión, en instantes diferentes.

Sin gravedad, ambos terminarían con $302{,}1651\,\mathrm{m/s}$. La razón de masas decide el incremento ideal cuando falta fuerza externa. La gravedad añade una contribución acumulada durante el tiempo transcurrido; por eso cambiar la tasa y la duración puede cambiar el resultado, aunque la masa consumida sea la misma. Esta comparación omite resistencia y supone vuelo libre en ambos casos.

10. El apoyo antes del vuelo

El empuje es $20\,\mathrm{N}$. Mientras permanece apoyado, la aceleración vertical es cero y el balance da

$$N(t) = m(t)g - 20, \qquad m(t) = 10 - 0{,}1t, \qquad 0 \le t \le 50\,\mathrm{s}.$$

La reacción disminuye desde $78{,}1\,\mathrm{N}$ hasta $29{,}05\,\mathrm{N}$ y sigue siendo positiva. El vehículo no despega. La masa crítica que igualaría empuje y peso es $20/9{,}81 \simeq 2{,}03874\,\mathrm{kg}$, inferior a la masa seca de cinco kilogramos y, por ello, fuera del tramo accesible.

Al suponer vuelo libre desde el inicio se obtendría $a(0) = 20/10 - 9{,}81 = -7{,}81\,\mathrm{m/s^2}$, que conduciría hacia el soporte. El contacto proporciona la fuerza que esa hipótesis omite. El agotamiento termina la expulsión; después la reacción vuelve al peso de la masa seca.

11. La sección de presión

El transporte de momento aporta $\nu c = 600\,\mathrm{N}$. La presión añade $(20000\,\mathrm{Pa})(0{,}01\,\mathrm{m^2}) = 200\,\mathrm{N}$. El total es $800\,\mathrm{N}$. Una reducción de presión ambiente de $10000\,\mathrm{Pa}$ añade otros cien newtons y da $900\,\mathrm{N}$ si los demás datos permanecen fijos.

Esta segunda respuesta compara dos estados ideales con igual caudal, velocidad relativa y presión de salida. Una tobera real puede modificar su flujo al cambiar el entorno. La fórmula sigue exigiendo los valores de salida adecuados al nuevo estado; la comparación realizada aísla sólo la contribución explícita de p_a.

12. Tres sentidos de una expulsión

En la primera preparación, si V es la velocidad final del vehículo, la porción expulsada tiene velocidad inercial $V-5$. Conservar el momento del conjunto da $0=8V+2(V-5)$ y $V=1\,\mathrm{m/s}$. En la segunda, la velocidad de la porción es directamente -5 en el laboratorio; el balance es $0=8V+2(-5)$ y resulta $V=1{,}25\,\mathrm{m/s}$.

En la expulsión continua, cada porción sale con velocidad relativa instantánea -5, desde un vehículo cuya velocidad cambia. Por tanto $\Delta v=5\log(10/8)\simeq 1{,}11572\,\mathrm{m/s}$. Las tres respuestas describen tres condiciones de salida distintas. Declarar el instante y el cuerpo respecto de los cuales se especifica una velocidad permite elegir la ecuación correcta y evita tratar un cambio finito como una identidad diferencial exacta.

13. Separar una etapa

La primera combustión lleva de 120 a 80 kg. La separación deja 70 kg y la segunda combustión termina en 40 kg. Al desprender la estructura con velocidad común no aparece un salto de velocidad, como en el problema 6. Así,

$$\Delta v=200\left(\log\frac{120}{80}+\log\frac{70}{40}\right)=200\log\frac{21}{8}\simeq 193{,}0162\,\mathrm{m/s}.$$

Si se conserva la estructura durante las dos combustiones, la segunda lleva de 80 a 50 kg y el incremento total es $200\log(120/50)\simeq 175{,}0937\,\mathrm{m/s}$. La separación permite aproximadamente $17{,}9224\,\mathrm{m/s}$ adicionales. El beneficio aparece durante la segunda expulsión porque se acelera una masa menor, aunque la separación ideal misma carezca de impulso relativo.

14. Una placa fija frente al chorro

El caudal es $\mu=\rho AU=1\,\mathrm{kg/s}$. En un volumen de control fijo y estacionario, el fluido pierde momento axial a tasa $\mu U=10\,\mathrm{N}$. La placa ejerce esa fuerza hacia atrás sobre el agua; el agua ejerce 10 N hacia delante sobre la placa. Como la placa está inmóvil, la potencia mecánica de esa fuerza sobre ella es cero.

La entrada trae $\mu U^2/2=50\,\mathrm{W}$ de energía cinética. La salida tiene componente axial cero, pero puede conservar velocidad lateral. Sin conocer esa velocidad y los demás intercambios energéticos, no podemos adjudicar los cincuenta watts a disipación. Un desvío ideal lateral con rapidez final igual a la inicial conserva el flujo cinético; una captura seguida de salida con rapidez despreciable admite una conversión grande. El balance axial de momento es compatible con ambas situaciones.

15. La placa se desplaza

Elegimos una frontera que acompaña a la placa a velocidad constante V. La tasa que la alcanza es $\mu=\rho A(U-V)=0{,}6\,\mathrm{kg/s}$. Cada kilogramo cambia su velocidad axial de U a V; en régimen sin acumulación apreciable de momento en la zona de desvío, la fuerza axial del agua sobre la placa es

$$T=\mu(U-V)=\rho A(U-V)^2=3{,}6\,\mathrm{N}.$$

Para mantener V constante, una carga ejerce sobre ella la fuerza opuesta; la potencia transferible a esa carga es $TV=14{,}4\,\mathrm{W}$. Usar ρAU como caudal interceptado contaría también materia que durante ese segundo todavía no alcanza la frontera móvil. Las componentes laterales de salida siguen siendo necesarias para cerrar el balance energético completo del fluido.

16. Elegir la velocidad de extracción

Al derivar, $P'(V) = \rho A(U - V)(U - 3V)$. En el intervalo físico, la potencia crece hasta $V = U/3$ y decrece después hasta cero en $V = U$. El otro extremo también da potencia nula. Por tanto

$$V_* = \frac{U}{3}, \qquad P_{\text{máx}} = \frac{4}{27}\rho A U^3, \qquad \frac{P_{\text{máx}}}{\rho A U^3/2} = \frac{8}{27}.$$

Con los datos del chorro, $V_* = 10/3\,\text{m/s}$ y $P_{\text{máx}} \simeq 14{,}8148\,\text{W}$, frente a $50\,\text{W}$ del chorro completo. El cociente es aproximadamente 29,63%. En esa preparación la frontera recibe sólo un caudal $\rho A(2U/3)$; el cociente pedido usa como referencia toda la corriente que atravesaría una sección fija. La diferencia de fronteras explica qué masa se cuenta en cada tasa y evita interpretar el cociente como una eficiencia universal de cualquier dispositivo hidráulico.

17. El conducto gira noventa grados

El momento dentro del volumen fijo es constante. La fuerza del codo sobre el fluido compensa el transporte neto:

$$\mathbf{F} = \mu(\mathbf{u}_{\text{salida}} - \mathbf{u}_{\text{entrada}}) = (-10, 10)\,\text{N}.$$

El fluido ejerce sobre el codo $(10, -10)\,\text{N}$, de módulo $10\sqrt{2} \simeq 14{,}1421\,\text{N}$. La fuerza de sostén externa del conjunto debe considerarla con su signo correspondiente. Las presiones manométricas nulas y el peso omitido hacen que no haya otras contribuciones en el balance especificado.

Ambos flujos de energía cinética valen $50\,\text{W}$. Girar una velocidad puede cambiar su vector sin cambiar su módulo; una descripción ideal de desvío por paredes fijas puede conservar energía cinética mientras transfiere momento. Las pérdidas reales requieren describir rozamiento, turbulencia u otros mecanismos y, si las hay, ajustar los datos de velocidad, presión o aporte energético del flujo.

18. Un volumen que se alarga

La masa contenida es $M = \rho A(L_0 + Vt)$ y su momento es $P = MU$. Sus derivadas son $\dot{M} = \rho A V$ y $\dot{P} = \rho A U V$. En la entrada fija entra masa a tasa $\rho A U$; por la salida móvil sale a tasa $\rho A(U - V)$. Su diferencia es $\rho A V$.

El momento entrante por segundo es $\rho A U^2$ y el saliente es $\rho A U(U - V)$. Restarlos da exactamente $\rho A U V$, igual al crecimiento del momento contenido cuando $F = 0$. La región incorpora una porción de una corriente que ya se mueve con velocidad U. Crece el inventario porque se amplía la selección espacial; cada elemento fluido mantiene su velocidad.

19. La misma corriente en dos fronteras

La densidad cumple $\partial_t \rho = -a\rho$ y $\partial_x(\rho u) = a\rho$, de modo que su suma es cero. Para el intervalo fijo,

$$M_{\text{fijo}} = \rho_0 e^{-at} A L_0, \qquad \dot{M}_{\text{fijo}} = -a\rho_0 e^{-at} A L_0.$$

El extremo izquierdo tiene velocidad fluida cero. Por el derecho sale masa a tasa $\rho a L_0 A$, justamente $-\dot{M}_{\text{fijo}}$. En la región material, el extremo derecho se mueve con $\dot{L} = aL = u(L, t)$; la velocidad relativa de cruce es cero y la masa $\rho_0 e^{-at} A L_0 e^{at} = \rho_0 A L_0$ permanece constante.

Esta corriente describe una dilatación cinemática compatible con conservación de masa. Para determinar las fuerzas que la producen haría falta además el balance de momento: la aceleración material es $\partial_t u + u\partial_x u = a^2 x$. La continuidad por sí sola establece la contabilidad de masa del ejemplo.

20. Lo que el movimiento permite inferir

El balance horizontal da $m\dot v = \sum_a \mu_a(w_a - v)$. Con $\mu = \sum_a \mu_a = \dot m > 0$, se despeja la media ponderada

$$\overline{w} = \frac{\sum_a \mu_a w_a}{\mu} = v + \frac{m\dot v}{\mu}.$$

Los valores medidos dan $\overline{w} = 3 + 2(-0{,}3)/0{,}5 = 1{,}8\,\mathrm{m/s}$. Una corriente única con esa velocidad y dos corrientes de $0{,}25\,\mathrm{kg/s}$ a cero y $3{,}6\,\mathrm{m/s}$ producen el mismo momento entrante $0{,}9\,\mathrm{N}$ y la misma aceleración del receptor.

La conversión cinética horizontal en la corriente uniforme es $D_1 = \tfrac{1}{2}(0{,}5)(1{,}8-3)^2 = 0{,}36\,\mathrm{W}$. Para las corrientes separadas,

$$D_2 = \frac{1}{2}(0{,}25)(0-3)^2 + \frac{1}{2}(0{,}25)(3{,}6-3)^2 = 1{,}17\,\mathrm{W}.$$

La diferencia admite una expresión general. Expandir $w_a - v = (w_a - \overline{w}) + (\overline{w} - v)$ y usar $\sum_a \mu_a(w_a - \overline{w}) = 0$ produce

$$\frac{1}{2}\sum_a \mu_a (w_a - v)^2 = \frac{\mu}{2}(\overline{w} - v)^2 + \frac{1}{2}\sum_a \mu_a (w_a - \overline{w})^2.$$

El segundo término registra la dispersión de velocidades de entrada y vale $0{,}81\,\mathrm{W}$ en el ejemplo. Un registro independiente de las velocidades de llegada o de la energía horizontal convertida, con las otras transferencias controladas, permitiría distinguir las preparaciones. Medir sólo masa y trayectoria fija la media de momento entrante y deja esa dispersión indeterminada.

21. Dos entradas con el mismo movimiento y la misma conversión

La preparación A tiene media $1{,}8\,\mathrm{m/s}$ y varianza $(1{,}8)^2 = 3{,}24\,\mathrm{m^2/s^2}$. En B, los desvíos respecto de la misma media son $-1{,}8\sqrt{2}$, cero y $1{,}8\sqrt{2}$. Sus pesos cancelan el primer momento y la varianza es $(1/4{+}1/4)(1{,}8\sqrt{2})^2 = 3{,}24\,\mathrm{m^2/s^2}$. Ambas preparaciones transportan el mismo momento horizontal por segundo: $\mu\overline{w} = 0{,}9\,\mathrm{N}$.

El balance $m\dot v = \mu(\overline{w} - v)$ es por tanto idéntico en todo el tramo. Con los mismos datos iniciales, da, con tiempo en segundos,

$$m(t) = 2 + 0{,}5t \quad \text{en kilogramos}, \qquad v(t) = 1{,}8 + \frac{2{,}4}{2 + 0{,}5t} \quad \text{en metros por segundo}.$$

La igualdad se refiere a la función temporal completa, dentro del modelo de captura y de su intervalo físico. La potencia cinética horizontal entrante es $\mu(\overline{w}^2 + \sigma_w^2)/2 = 1{,}62\,\mathrm{W}$ en ambos casos. La conversión es también la misma función,

$$D(t) = \frac{\mu}{2}\left[(\overline{w} - v(t))^2 + \sigma_w^2\right], \qquad \dot K = 1{,}62\,\mathrm{W} - D(t).$$

Al comenzar, $D(0) = 1{,}17\,\mathrm{W}$ y $\dot K(0) = 0{,}45\,\mathrm{W}$. Los registros del receptor y estos balances horizontales completos conservan los dos primeros momentos de las entradas.

El cuarto momento central retiene otra propiedad. En A vale $(1{,}8)^4 = 10{,}4976\,\mathrm{m^4/s^4}$. En B vale $(1/2)(1{,}8\sqrt{2})^4 = 20{,}9952\,\mathrm{m^4/s^4}$. Un registro de velocidades individuales inmediatamente antes de la captura distingue las dos familias y permite estimar esa magnitud con una calibración y un muestreo declarados. También las distingue el registro separado de los caudales por puerto. Las dos preparaciones muestran que ajustar trayectoria y conversión energética fija más información que la trayectoria sola, mientras la estructura de las corrientes continúa requiriendo observaciones adicionales.

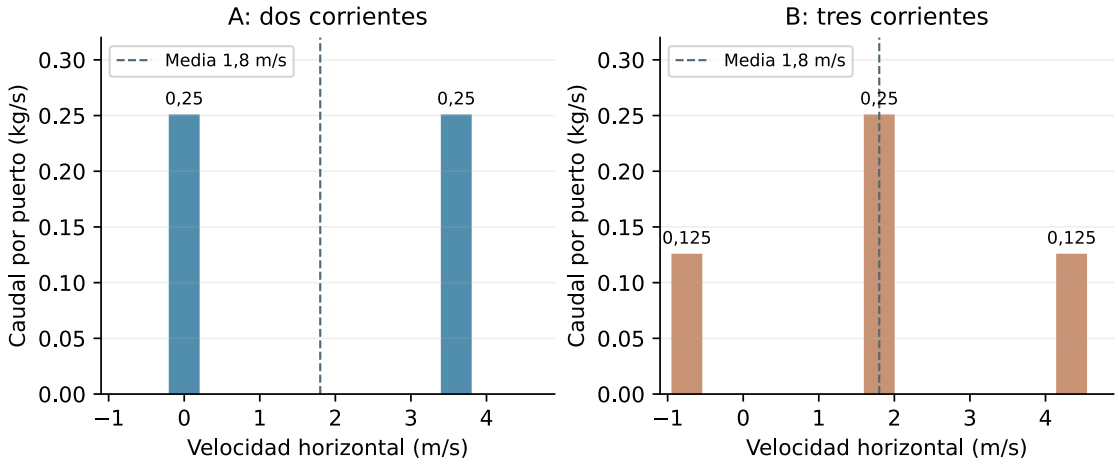


Figura 27.8. Las barras representan caudales por puerto. Las dos familias comparten tasa total, media y varianza de velocidad, y producen los mismos registros del receptor dentro del modelo. El cuarto momento central y las velocidades de cada puerto permiten distinguirlas.

Lecturas y relaciones

Spivak examina el cohete y la incorporación de materia en el añadido 1A de *Physics for Mathematicians. Mechanics I*. La discusión insiste en identificar las porciones materiales y sus velocidades de intercambio. Aquí la captura del capítulo 9 construye primero el balance abierto; el cambio de observador comprueba su consistencia y la forma distribuida explica el papel de una frontera móvil.

Sears–Zemansky desarrolla la propulsión en la sección 8.6 y Serway–Jewett en la sección 9.9 de los volúmenes consultados. Ambos deducen la relación logarítmica mediante conservación de momento. Los problemas de este capítulo añaden condiciones de agotamiento, apoyo, tasas, energía e inferencia para que el cálculo termine en una predicción físicamente interpretable.