MATEMÁTICA PREUNIVERSITARIA

Teoría y problemas resueltos

A. Peña

MATEMÁTICA ABIERTA

Matemática preuniversitaria

Teoría y problemas resueltos

A. Peña · Matemática Abierta · Octubre de 2026

Copyright © 2026 A. Peña.

Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.3 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled “GNU Free Documentation License”.

El texto y las figuras originales de esta obra se distribuyen bajo GNU FDL 1.3 o posterior, sin secciones invariantes ni textos de cubierta. La licencia íntegra se incluye al final del libro y en las fuentes editables. Licencia de Matemática Abierta.

Diseño y composición

La composición adapta *Colored Math TextBook*, de AMD Raizen, distribuido bajo LaTeX Project Public License 1.3c. El proyecto editable identifica las modificaciones y conserva los archivos originales recibidos. La plantilla original está disponible en la galería de Overleaf. Tipografía

Latin Modern. Composición con XeLaTeX. Los componentes de terceros conservan sus respectivas licencias.

Índice

Prefacio ii

Introducción. Un problema que vuelve a aparecer iii

0 Antes de calcular: ¿qué significa resolver un problema? 1

1 Los números, el orden y la recta real 18

2 Fracciones, razones, proporciones y porcentajes 35

3 Potencias, raíces y notación científica 51

4 Estimación, aproximación y control del error 70

5 El lenguaje del álgebra: expresiones e identidades 90

6 Ecuaciones, inecuaciones y valor absoluto 107

7 Sistemas de ecuaciones y relaciones lineales 122

8 Ecuaciones cuadráticas y polinomios elementales 138

9 Expresiones racionales, factorización y restricciones 154

10 Sucesiones, progresiones y matemática financiera 170

11 Geometría plana: construcciones y argumentos 185

12 Congruencia, semejanza, Pitágoras y escalas 201

13 Circunferencia, círculo y geometría del espacio 219

14 Razones trigonométricas, radianes e identidades 235

15 Coordenadas, rectas, distancias y vectores 251

16 Funciones, dominios y representaciones 267

17 Funciones afines y cuadráticas 284

18 Funciones polinómicas, racionales y radicales 301

19 Funciones exponenciales y logarítmicas 317

20 Funciones trigonométricas y modelos periódicos 333

21 Composición, inversión y modelización funcional 349

22 Combinatoria, muestreo y descripción de datos 365

23 Probabilidad y distribuciones elementales 383

24 Variación, acumulación y umbral del cálculo 400

A Demostraciones de las propiedades 417

GNU Free Documentation License 499

Prefacio

Quien llega a un problema de matemáticas suele traer consigo una experiencia larga de cuentas, figuras y fórmulas. Ha aprendido a sumar fracciones, a despejar una incógnita o a calcular el área de un triángulo; quizá reconoce un ejercicio y recuerda el procedimiento que le permitió resolver otro parecido. La dificultad aparece cuando cambia una condición, cuando el dibujo admite varias interpretaciones o cuando una respuesta numérica deja sin explicar algo que el enunciado pedía. Este libro quiere acompañar ese momento en que los conocimientos escolares necesitan organizarse para poder usarlos con mayor libertad.

He querido que la explicación conserve algo de una clase en la que hay tiempo para pensar. Un profesor escribe un problema, escucha una respuesta y vuelve sobre ella para averiguar de dónde salió; al hacerlo puede descubrir que hace falta precisar una palabra, recuperar una propiedad o ensayar otra representación. El camino se va construyendo alrededor de lo que se busca. En estas páginas, los cálculos y las definiciones aparecen ligados a preguntas que permiten entender su utilidad, y las soluciones se detienen en las decisiones que un lector que estudia solo necesita poder reconstruir.

La palabra *preuniversitaria* describe aquí un lugar de encuentro. El libro retoma la aritmética y la geometría escolar mientras prepara el lenguaje de las funciones, de la probabilidad y del cálculo. La continuidad entre esos temas se construye al volver sobre ciertos problemas con herramientas nuevas: una proporción reaparece como pendiente, una ecuación se reconoce en una intersección de gráficas y una suma finita prepara el estudio de una acumulación. El lector podrá reconocer objetos conocidos y descubrir en ellos relaciones que antes no necesitaba formular.

Los problemas resueltos forman parte de ese recorrido. Su lectura puede comenzar con un intento propio, aunque sea breve: un dibujo, unos valores de prueba o una expresión que todavía no sabemos transformar. Tener algo escrito ayuda a reconocer qué decisión aporta la solución y dónde cambió la dirección del razonamiento. Los ejercicios ofrecen después un espacio más amplio para trabajar; sus soluciones desarrolladas permiten revisar tanto el resultado como los pasos que lo sostienen. En ambos casos, volver al enunciado original será una parte habitual del trabajo.

Las tablas de propiedades se sitúan después de las explicaciones que les dan sentido. Servirán para consultar una fórmula o recuperar sus condiciones cuando el argumento ya se haya comprendido. El apéndice reúne fundamentos y demostraciones a los que el texto remite expresamente, de modo que el lector pueda seguir una justificación con más detalle y reconocer qué propiedades se han adoptado como punto de partida. Esta organización permite avanzar por el problema que se está estudiando sin perder la posibilidad de preguntar por sus razones.

Puede ocurrir que una página requiera varios intentos. Una cuenta hecha a mano, una figura que se modifica o una hipótesis que resulta insuficiente dan información para la siguiente lectura. He procurado dejar visibles los lugares donde una elección merece explicación, con la esperanza de que el lector vaya encontrando sus propias maneras de explorar y justificar. El recorrido empieza con una pregunta que admite una comprobación inmediata y que, al examinarla con cuidado, nos invita a seguir pensando.

Introducción. Un problema que vuelve a aparecer

Un terreno rectangular tiene veinte metros de perímetro. Si queremos averiguar su área, podemos comenzar dibujando un rectángulo de cuatro metros por seis: su perímetro es veinte y su área, veinticuatro metros cuadrados. El cuadrado de cinco metros de lado cumple la misma condición y ocupa veinticinco metros cuadrados. Las dos construcciones responden al dato disponible; para escoger una necesitamos saber algo más sobre el terreno o formular otra pregunta.

Supongamos que nos interesa obtener el área mayor. La condición del perímetro dice que los dos lados deben sumar diez, de modo que elegir uno de ellos determina el otro. Una elección cercana a cero deja un rectángulo muy estrecho; al acercarnos a cinco obtenemos figuras más equilibradas, y al pasar de cinco volvemos a encontrar las mismas dimensiones intercambiadas. El dibujo sugiere que el cuadrado proporciona el área máxima. Habrá que explicar por qué ningún rectángulo permitido puede superarla.

Este problema podrá acompañarnos en distintos momentos del libro. El álgebra permitirá escribir el área en función de una longitud y transformar su expresión hasta reconocer el máximo. La gráfica mostrará cómo varía el área a medida que cambia el lado elegido. La geometría ayudará a interpretar la simetría de las dimensiones y, cuando lleguemos al umbral del cálculo, podremos estudiar el cambio de esa misma área mediante tasas. Cada regreso hará una pregunta nueva sobre un objeto que ya conocemos.

El capítulo cero prepara la forma de leer esas preguntas. Trabajaremos con ejemplos pequeños para distinguir una solución de una lista completa de soluciones, reconocer el alcance de una afirmación y justificar los pasos de una transformación. Se usarán algunas herramientas escolares que después retomaremos con más amplitud. Cuando una propiedad geométrica se adopte como base, el texto lo indicará y remitirá a los capítulos donde se desarrolla su justificación.

Al estudiar un capítulo puede ayudar llevar un cuaderno junto al libro. Antes de continuar una solución, conviene intentar el paso que se anuncia y conservar lo escrito para compararlo después. Si dos procedimientos dan resultados diferentes, la comparación empieza por las condiciones de uso de cada uno: el signo de una cantidad, un denominador que podría anularse, una unidad o el conjunto al que debe pertenecer la respuesta. Si dan el mismo resultado, todavía podemos preguntar por qué funcionan ambos y cuál hace más visible la estructura del problema.

En el terreno rectangular, la primera decisión fue detener la búsqueda de una cifra única al reconocer que el perímetro admitía varias figuras. Esa observación permitió cambiar la pregunta y buscar un máximo. El trabajo del libro seguirá muchas veces un movimiento semejante: examinar los datos, dar una forma precisa a lo que queremos saber y construir los recursos que permitan responderlo. Para empezar, bastará una igualdad mucho más pequeña.

CAPÍTULO 0

Antes de calcular: ¿qué significa resolver un problema?

Imaginemos que se nos pide hallar todos los números reales cuyo cuadrado sea cuatro. Podemos empezar por el dos: al multiplicarlo por sí mismo obtenemos cuatro, de modo que ya tenemos una respuesta que cumple la condición. Antes de dar por terminado el trabajo, probemos con su opuesto. El producto de menos dos por menos dos también es cuatro; al escribir ambos valores aparece una cuestión que la primera cuenta había dejado abierta: cómo asegurarnos de haber encontrado todos los números pedidos.

La palabra «todos» nos obliga a avanzar un poco más. Probar con otros números podría ayudarnos a explorar, pero cada comprobación hablaría únicamente del valor elegido. Necesitamos una razón que abarque a cualquier número que cumpla la condición. Podemos buscarla transformando la igualdad hasta reconocer un producto cuyos factores indiquen las únicas posibilidades; para hacerlo tendremos que saber qué propiedades permiten esa transformación y por qué se puede regresar de ella a la pregunta original.

Al recorrer ese argumento iremos dando nombre a varias tareas que aparecen al resolver problemas. Una solución es un objeto que satisface las condiciones planteadas, y resolver el problema exige justificar que la respuesta abarca lo que pide el enunciado. En nuestro ejemplo debemos encontrar todas las soluciones reales y demostrar que la lista está completa. Si la pregunta pidiera solo una, el dos bastaría; si pidiéramos un real cuyo cuadrado fuera menos cuatro, tendríamos que explicar por qué no existe.

Empezaremos con unas pocas herramientas escolares para poder desarrollar estas ideas en situaciones concretas. La igualdad inicial volverá enseguida, cuando dispongamos del producto que permite resolverla. Después cambiaremos algunas condiciones para estudiar qué sucede con los argumentos: veremos cuándo una comprobación alcanza, cómo se refuta una afirmación y qué debemos conservar al transformar una ecuación. Las diferencias entre esas tareas se irán haciendo visibles mientras trabajamos sobre ellas.

Una caja de herramientas para los primeros argumentos

Para volver a la igualdad del comienzo necesitamos una manera de transformar cuadrados en productos. La distributividad, $a(b+c) = ab + ac$, permite abrir los paréntesis de un producto; si la aplicamos dos veces y reunimos los términos, obtenemos $(x-a)(x+a) = x^2 - a^2$ y $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$. Podemos leer la primera identidad en sentido inverso: una diferencia de cuadrados queda escrita como producto de dos factores. Ese cambio de escritura será útil porque conocemos qué debe ocurrir cuando un producto de reales vale cero.

Supongamos que $uv = 0$. Si $u = 0$, ya tenemos un factor nulo; si $u \neq 0$, podemos dividir la igualdad por u y obtener $v = 0$. Los dos casos cubren todos los valores de u, por lo que un producto real nulo tiene al menos un factor nulo. También podemos regresar: si cualquiera de los factores vale cero, el producto vale cero. Esta propiedad permitirá pasar de una ecuación factorizada a las posibilidades que debemos examinar.

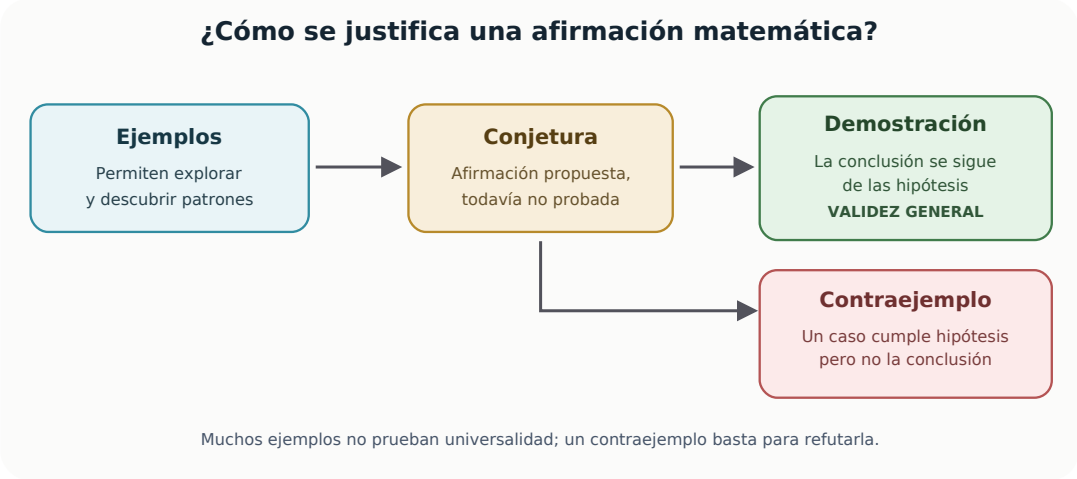


Figura 0.1: Del ejemplo a la demostración y el contraejemplo: las distintas tareas de un argumento matemático.

Otros problemas nos pedirán razonar sobre enteros. Llamamos enteros al cero, a los números con los que contamos y a sus negativos. Un entero es par si es $2k$ e impar si es $2k+1$, con k entero; cada entero pertenece exactamente a una de estas dos clases. Escribirlos de esa manera permitirá conservar en una letra todos los casos que cumplen la misma condición. Los números reales incluyen también fracciones y longitudes como $\sqrt{2}$; estudiaremos sus conjuntos y su orden en el capítulo siguiente.

Para comparar algunas de esas longitudes usaremos que un cuadrado real es no negativo. Cuando $0 \leq a < b$, la identidad $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a) > 0$ muestra que elevar al cuadrado conserva el orden entre números no negativos. La raíz $\sqrt{c}$, para $c \geq 0$, nombra la raíz no negativa, de modo que esa comparación permitirá situarla entre dos valores conocidos. El símbolo $|x-a|$ expresa la distancia de x a a: vale $x-a$ si $x \geq a$ y $a-x$ si $x < a$. Por ello, pedir $|x-a| < r$, con $r > 0$, equivale a situar x entre $a-r$ y $a+r$.

Los ejemplos geométricos se apoyarán en las fórmulas escolares del área del rectángulo y del triángulo, el teorema de Pitágoras y la suma angular del triángulo euclidiano. Adoptamos aquí esas propiedades y señalaremos cuándo se usan; sus demostraciones corresponden a los capítulos de geometría. También usaremos que un triángulo congruente a otro puede superponerse mediante un movimiento rígido y que, en consecuencia, conserva las longitudes de sus lados.

Herramientas que acabamos de justificar

Las letras representan números reales. Estas reglas reúnen las herramientas algebraicas iniciales; las fórmulas geométricas adoptadas se justificarán en los capítulos de geometría.

Propiedad	**Fórmula y condiciones de uso**
Distributividad	$a(b+c) = ab + ac$.
Diferencia de cuadrados	$(x-a)(x+a) = x^2 - a^2$.
Cuadrado de una suma	$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$.
Producto nulo	$uv = 0 \iff u = 0$ o $v = 0$.
Cuadrado y signo	$x^2 \geq 0$; si $x \neq 0$, entonces $x^2 > 0$.
Comparación de cuadrados	Si $0 \leq a < b$, entonces $a^2 < b^2$.

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Distancia al centro	$\lvert x-a\rvert < r \iff a-r < x < a+r$, con $r>0$.

Pruebas. Apéndice: «Qué adoptamos y qué demostramos», «Productos de binomios, cuadrados y cubos», «Opuestos, inversos y productos nulos», «Signos y compatibilidad del orden», «Valor absoluto, distancia e intervalos».

Una igualdad no es todavía una respuesta

Regresemos a $x^2 = 4$. La letra x representa el número que buscamos y la igualdad expresa la condición que debe cumplir. Llamamos *solución* a un número que vuelve verdadera esa condición al sustituirlo por x. Ya hemos comprobado que dos y menos dos son soluciones; para saber si existen otras, podemos usar la diferencia de cuadrados:

$$x^2 = 4 \quad \iff \quad (x-2)(x+2) = 0.$$

La propiedad del producto nulo obliga a que $x-2 = 0$ o $x+2 = 0$, de donde salen $x = 2$ y $x = -2$. Cualquier solución de la igualdad inicial tiene que encontrarse entre esos dos valores, y ambos satisfacen la igualdad al comprobarlos. Hemos justificado así que el conjunto solución es $\{-2, 2\}$. La factorización permitió abarcar de una vez todas las posibilidades que las comprobaciones aisladas dejaban abiertas.

Al escribir «números reales» habíamos fijado el conjunto en el que buscábamos. Si el problema pidiera soluciones naturales, solo admitiríamos el dos; si pidiera enteros, conservaríamos ambos valores. Ese conjunto se llama *dominio* del problema. En adelante, cuando no se señale otro dominio, las ecuaciones elementales se interpretarán sobre los números reales.

Podemos modificar también lo que se pide sin cambiar los números de la igualdad. Encontrar *un* número que cumpla $x^2 = 4$ queda resuelto al dar el dos; encontrar *todos* exige incluir menos dos y probar que la lista está completa. Preguntar si *existe* un real con $x^2 = -4$ nos lleva a examinar si la condición puede cumplirse, mientras que preguntar por la *unicidad* exige averiguar si dos soluciones podrían ser distintas. En nuestra primera igualdad, los valores dos y menos dos ya descartan que la solución sea única.

Problema 1. Una respuesta verdadera, pero incompleta

Enunciado. Se propone $x = 3$ como respuesta a $x^2 = 9$. Examina la respuesta y encuentra todas las soluciones reales.

Solución. Sustituyendo $x = 3$ obtenemos $3^2 = 9$; el candidato cumple la ecuación. Sin embargo, también $(-3)^2 = 9$. Factorizar permite demostrar que no hay más posibilidades:

$$x^2 = 9 \iff x^2 - 9 = 0 \iff (x-3)(x+3) = 0.$$

El producto se anula exactamente cuando $x = 3$ o $x = -3$. Comprobamos ambos en la ecuación inicial. Así, $S = \{-3, 3\}$. Si el problema solicitara una sola solución, 3 bastaría; para encontrar *todas*, no bastaba.

Problema 2. La pregunta puede no tener respuesta

Enunciado. Resolver $x^2 + 1 = 0$ en los números reales.

Solución. Para todo real x se cumple $x^2 \geq 0$. Por tanto $x^2 + 1 \geq 1 > 0$. Es imposible que la expresión sea cero: el conjunto solución es vacío, $S = \emptyset$. Observar que la fórmula habitual de una cuadrática tiene discriminante negativo sería un diagnóstico correcto, pero nuestra desigualdad explica directamente *por qué* no hay soluciones reales. Más adelante veremos que, al ampliar el sistema numérico a los complejos, la respuesta cambia; cambiar de universo matemático exige decirlo.

Problema 3. Datos, incógnita y condiciones

Enunciado. Un rectángulo tiene perímetro 20 cm. ¿Cuál es su área?

Solución. Sean $a, b > 0$ los lados. Del perímetro sabemos que $2a+2b = 20$, es decir, $a+b = 10$. El área es $A = ab$. Si $a = 4$ y $b = 6$, el área es $24\,\text{cm}^2$; si $a = b = 5$, el área es $25\,\text{cm}^2$. Dos rectángulos cumplen el dato y producen áreas distintas. La información no determina una única área. No hay un «fallo de cálculo»: el problema está **subdeterminado**. Pedir, en cambio, el *área máxima* sería una nueva pregunta que sí tiene solución, y se puede estudiar por métodos algebraicos.

Las palabras que determinan el alcance de una afirmación

Consideremos la oración «el cuadrado de un número es positivo». Las comprobaciones en 2 y -2 dan cuadrados positivos, pero al incluir el cero obtenemos $0^2 = 0$. Para abarcar todos los reales debemos afirmar que $x^2 \geq 0$: cada cuadrado es mayor o igual que cero. Si queremos conservar la conclusión estricta $x^2 > 0$, la hipótesis debe restringirse a los reales $x \neq 0$. Al formular la afirmación elegimos conjuntamente el dominio de la variable y la conclusión que podemos justificar para cada uno de sus valores.

Cuando escribimos «para todo x», afirmamos que cada elemento del dominio declarado cumple la condición. «Existe un x» afirma que al menos un elemento la cumple. «Existe un único x» afirma la existencia de un elemento que la satisface y exige demostrar que cualquier otro que la satisfaga coincide con él.

Podemos entender estas expresiones antes de aprender sus símbolos. Cuando los encontremos, bastará recordar que $\forall$ abrevia «para todo» y $\exists$ abrevia «existe», y recordar que ambas expresiones siempre se interpretan respecto de un dominio.

Problema 4. ¿Se puede probar algo con un ejemplo?

Enunciado. Evalúa la afirmación «para todo real x, $(x+1)^2 > x^2$». Si es falsa, encuentra cuándo sí es verdadera.

Solución. Probarla en $x = 1$ no basta: $(1+1)^2 = 4 > 1$. Para estudiar *todos* los reales restamos x^2 a ambos lados y desarrollamos:

$$\begin{aligned} (x+1)^2 &> x^2 \\ &\iff x^2 + 2x + 1 > x^2 \\ &\iff 2x + 1 > 0. \end{aligned}$$

Se cumple exactamente cuando $x > -\frac{1}{2}$. El contraejemplo $x = -1$ refuta la afirmación universal, pues $0 > 1$ es falso. El cálculo no solo detectó el error: encontró el dominio preciso donde la comparación sí funciona.

Problema 5. La diferencia entre «existe» y «es único»

Enunciado. ¿Cuántos pares ordenados de números reales (x, y) satisfacen $x + y = 10$?

Solución. Para cada número real t, el par $(t, 10 - t)$ satisface la ecuación. Como hay infinitos valores posibles de t y cada uno determina un par diferente, existen infinitas soluciones. Los pares $(0, 10)$ y $(4, 6)$ son dos ejemplos; la expresión $(t, 10-t)$ muestra el conjunto completo. Si añadimos $x = y$, entonces $2x = 10$ y el par queda determinado de manera única: $(5, 5)$. La segunda condición altera esencialmente el problema.

Problema 6. Una conjetura seductora

Enunciado. Para $n = 0, 1, 2, 3$ los números $n^2 + n + 41$ son primos. ¿Se deduce que la expresión siempre produce primos al tomar enteros no negativos?

Solución. No. Los cuatro casos no agotan el dominio infinito de los enteros no negativos y no demuestran por sí solos la afirmación universal. En un dominio finito, comprobar todos los casos sí podría demostrarla. Un solo contraejemplo basta para refutarla. Con $n = 40$:

$$40^2 + 40 + 41 = 1600 + 81 = 1681 = 41^2,$$

que es compuesto. Los casos iniciales permitían reconocer una posibilidad y formular la conjetura; el valor cuarenta cumple las condiciones de entrada y produce un resultado que la contradice. Por eso resuelve la pregunta universal: la expresión puede producir números compuestos al tomar enteros no negativos. La exploración aportó la pregunta y el contraejemplo determinó su respuesta.

Si sucede esto, ¿debe suceder aquello?

Hay afirmaciones que describen una relación entre dos condiciones. «Si un entero es múltiplo de cuatro, entonces es par». En este caso la implicación es válida: si $n = 4k$, también $n = 2(2k)$, de manera que n es par. Pero no podemos dar por cierto su *recíproco*, «si un número es par, entonces es múltiplo de cuatro»; el número 6 es par y no es divisible entre cuatro.

Una condición **suficiente** para obtener una conclusión es una que garantiza esa conclusión. Ser múltiplo de cuatro es suficiente para ser par. Una condición **necesaria** es una que debe cumplirse cuando la conclusión se cumple: ser par es necesario para ser múltiplo de cuatro. Las palabras «necesario» y «suficiente» se entienden mejor cuando se conectan con una pregunta: ¿alcanza la condición para asegurar el resultado?, ¿es imprescindible que se cumpla?

Dos condiciones son **equivalentes** cuando cada una implica la otra. Escribimos $A \iff B$. Por ejemplo, sobre los reales, $x^2 = 9$ es equivalente a $|x| = 3$. No lo es a $x = 3$, porque este último deja fuera $x = -3$.

Problema 7. El recíproco no es automático

Enunciado. Para $n \in \mathbb{Z}$, compara las afirmaciones: (a) «Si n es múltiplo de 6, entonces n es múltiplo de 3»; (b) «Si n es múltiplo de 3, entonces n es múltiplo de 6».

Solución. En (a), $n = 6k = 3(2k)$ para algún entero k, así que es múltiplo de tres. El argumento sirve para *cualquier* múltiplo de seis. La afirmación (b) es falsa: $n = 9$ es múltiplo de tres, pero no de seis. Un contraejemplo válido debe cumplir la hipótesis de la afirmación que se pretende refutar y desmentir su conclusión. Con esto hemos probado la primera proposición y refutado la segunda, no solo comparado ejemplos.

Problema 8. ¿Qué significa que una condición sea necesaria?

Enunciado. Una persona afirma: «Para que $x^2 = 16$, es necesario que $x = 4$». ¿Tiene razón?

Solución. No. $x = -4$ cumple $x^2 = 16$ sin ser 4. Decir que «$x = 4$ es necesario» significaría que **toda** solución debe ser 4, cosa falsa. Sí es una condición suficiente: si $x = 4$, necesariamente $x^2 = 16$. En cambio, $|x| = 4$ es necesaria y suficiente para que $x^2 = 16$, porque ambas condiciones tienen exactamente el mismo conjunto solución.

Problema 9. De un dibujo a una demostración

Enunciado. En un triángulo plano euclidiano, dos ángulos miden 48° y 67°. Halla el tercero y explica de qué principio dependes.

Solución. Bajo la hipótesis de que trabajamos con un triángulo de geometría euclidiana, la suma de los ángulos interiores es 180°. Por tanto el tercero mide

$$180^\circ - 48^\circ - 67^\circ = 65^\circ.$$

El dibujo podría sugerir un valor próximo, pero la justificación está en la propiedad de la suma angular. No debemos inferir la medida exacta a partir del aspecto de una ilustración. Además, si se cambiara la geometría subyacente, sería necesario revisar la hipótesis de 180°: una propiedad es tan general como las condiciones bajo las que fue probada.

Calcular sin perder ni inventar soluciones

En álgebra necesitamos modificar ecuaciones sin modificar inadvertidamente lo que estamos buscando. Sumar el mismo número a ambos miembros de una igualdad produce una ecuación equivalente. También podemos multiplicar ambos miembros por una constante distinta de cero, porque existe la operación inversa. Pero **multiplicar por una cantidad que puede anularse, dividir por una expresión variable, elevar al cuadrado o extraer una raíz requieren cuidado**.

Si la ecuación original es $x^2 = x$, alguien podría dividir por x y escribir $x = 1$. El resultado funciona, pero al dividir suponemos $x \neq 0$; hemos descartado inadvertidamente una solución. La factorización correcta es $x(x - 1) = 0$, de donde $x = 0$ o $x = 1$.

Algo similar ocurre al elevar al cuadrado. De $a = b$ se sigue $a^2 = b^2$; en cambio $a^2 = b^2$ solo asegura $a = b$ o $a = -b$. Una transformación puede conservar las soluciones originales y, a la vez,

añadir candidatas falsas. Por eso, después de una cadena de pasos no reversibles, es indispensable volver al enunciado inicial.

Problema 10. La solución que desapareció al dividir

Enunciado. Una resolución de $x^2 = 5x$ dice: «dividiendo por x, obtenemos $x = 5$». Examínala.

Solución. Dividir por x presupone que x es distinto de cero. Pero la ecuación original no lo excluye. Factorizando sin esa división:

$$x^2 - 5x = x(x-5) = 0,$$

se obtienen $x = 0$ y $x = 5$. Comprobación: $0^2 = 5\cdot 0$ y $5^2 = 5\cdot 5$. La resolución citada no produjo una raíz falsa; **perdió** una raíz verdadera. Esta distinción importa: existen transformaciones que añaden soluciones y otras que las eliminan.

Problema 11. Una raíz espuria por elevar al cuadrado

Enunciado. Resolver $\sqrt{x+1} = x - 1$ en los reales.

Solución. La raíz exige $x+1 \geq 0$, y su valor es no negativo. Como el lado derecho debe igualarla, se requiere además $x - 1 \geq 0$. Por tanto un candidato admisible debe cumplir $x \geq 1$. Al elevar al cuadrado se obtiene

$$x + 1 = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1,$$

es decir $x^2 - 3x = 0$, por lo que los candidatos son $x = 0$ y $x = 3$. El primero viola $x \geq 1$; en la ecuación inicial, $\sqrt{1} = 1 \neq -1$. El segundo sí cumple: $\sqrt{4} = 2 = 3 - 1$. Conjunto solución $S = \{3\}$. La cadena al cuadrado produjo *candidatos*, y la verificación eliminó uno espurio.

Problema 12. Dividir una desigualdad según el signo

Enunciado. Resuelve $ax > a$ en la variable real x, distinguiendo valores posibles del parámetro real a.

Solución. Si $a > 0$, dividir por a conserva la desigualdad y resulta $x > 1$. Si $a < 0$, dividir por un número negativo **invierte** el signo y resulta $x < 1$. Si $a = 0$, la desigualdad se reduce a $0 > 0$, que es falsa para todo x: no hay soluciones. Así,

$$S_a = \begin{cases} (1, \infty), & a > 0, \\ (-\infty, 1), & a < 0, \\ \emptyset, & a = 0. \end{cases}$$

No era posible dividir por a sin estudiar su signo y su posible nulidad. Una notación elegante no puede ocultar una hipótesis omitida.

Problema 13. El valor absoluto pide dos casos

Enunciado. Resolver $|x-2|=3$ e interpretar el resultado.

Solución. La expresión $|x-2|$ mide la distancia del número x al punto 2 de la recta real. Los puntos situados a distancia tres son 5 y -1. Algebraicamente, $|x-2|=3$ significa $x-2=3$ o $x-2=-3$. Así $x=5$ o $x=-1$. Comprobando: $|5-2|=3$ y $|-1-2|=3$. El valor absoluto no se elimina simplemente quitando las barras; se interpreta mediante una distancia o un análisis por casos.

Problema 14. Una igualdad puede valer para todos los valores

Enunciado. Compara $(x+2)^2=x^2+4x+4$ con $(x+2)^2=9$.

Solución. La primera igualdad es una **identidad**, una ecuación verdadera para todo valor de su dominio: desarrollar el cuadrado por distributividad produce la misma expresión para *todo* real x. La segunda es una **ecuación**: su verdad depende de qué valor tome x. Se resuelve como $x+2=3$ o $x+2=-3$, de donde $x=1$ o $x=-5$. Usar el mismo símbolo $=$ no hace que todas las igualdades tengan la misma función matemática. El lector debe atender a qué se está afirmando, no solo a los signos.

Transformaciones y conservación de soluciones

Para expresiones reales definidas, la doble flecha exige que el paso pueda deshacerse. Si se usa una expresión variable como factor o divisor, la condición de que sea no nula debe cumplirse en el dominio considerado.

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Sumar a ambos miembros	$A=B \iff A+c=B+c$.
Multiplicar por un no nulo	$A=B \iff cA=cB$, si $c\neq 0$.
Dividir por un no nulo	$A=B \iff A/c=B/c$, si $c\neq 0$. Si el divisor puede anularse, ese caso se estudia aparte.
Elevar al cuadrado	$A=B \Longrightarrow A^2=B^2$. La vuelta solo asegura $A=B$ o $A=-B$.
Raíz principal	$\sqrt{A}=B \iff A=B^2$ y $B\geq 0$, con $A\geq 0$. La condición de signo evita las candidatas espurias.

Pruebas. Apéndice: «Transformaciones que conservan una ecuación».

Demostrar: deducir una conclusión de sus hipótesis

Al explorar casos podemos encontrar un patrón y formular una conjetura. Una demostración es un argumento que deduce la conclusión de las hipótesis mediante pasos justificados por definiciones, propiedades admitidas o resultados ya establecidos. Su extensión depende del razonamiento necesario para abarcar el dominio del enunciado.

Por ejemplo, la suma de dos enteros impares es par. Podemos comprobar $3+5=8$, $7+9=16$ y otros cien ejemplos. La demostración, en cambio, parte de la definición: todo impar puede escribirse como $2k+1$ para algún entero k. Si tenemos dos impares $2k+1$ y $2m+1$, su suma es

$$(2k+1)+(2m+1)=2(k+m+1),$$

que es el doble de un entero. Eso prueba el resultado para cualquier pareja de impares, sin necesidad de recorrerlas una por una.

Los ejemplos de sumas impares ayudaron a reconocer el patrón; la escritura general permitió seguirlo para cualquier pareja. Llamamos **exploración** al trabajo de buscar patrones y nuevas preguntas, y **demostración** al argumento que encadena inferencias justificadas desde las hipótesis hasta la conclusión. Cuando una afirmación universal falla, podemos resolver la cuestión mediante una **refutación**, exhibiendo un contraejemplo que cumpla sus hipótesis y contradiga su conclusión. La pregunta que estemos investigando determinará cuál de estas tareas necesitamos realizar.

Problema 15. Un resultado sobre enteros consecutivos

Enunciado. Demuestra que el producto de dos enteros consecutivos siempre es par.

Solución. Si n es par, $n=2k$ para algún entero k y $n(n+1)=2k(n+1)$ es par. Si n es impar, $n=2k+1$ y entonces $n+1=2(k+1)$ es par; de nuevo $n(n+1)$ es múltiplo de dos. Como todo entero es par o impar, los dos casos agotan las posibilidades. La prueba explica por qué ningún entero es una excepción.

Problema 16. El valor de un contraejemplo geométrico

Enunciado. «Dos triángulos con la misma área son congruentes». ¿Verdadero o falso?

Solución. Es falso. Consideremos dos triángulos rectángulos: uno de catetos 3 y 4; otro de catetos 2 y 6. Sus áreas son

$$\frac{3\cdot 4}{2}=6, \qquad \frac{2\cdot 6}{2}=6.$$

Sin embargo, los conjuntos de longitudes de sus lados son distintos: el primero tiene lados $3,4,5$; el segundo $2,6,\sqrt{40}$. No pueden ser congruentes. Los dos cumplen la hipótesis «misma área» y contradicen la conclusión «congruentes»; por eso forman un contraejemplo válido. Un dibujo impreciso no sería suficiente para justificar la afirmación sobre congruencia.

Problema 17. Una demostración con letras

Enunciado. Demuestra que el cuadrado de un número entero impar también es impar.

Solución. Escribimos un entero impar como $n=2k+1$ con $k\in\mathbb{Z}$. Entonces

$$n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1.$$

Como $2k^2+2k$ es entero, el cuadrado tiene forma $2m+1$. Es, por definición, impar. La variable k recorre todos los enteros, así que la prueba no depende de un ejemplo particular.

Problema 18. Una propiedad de los cuadrados

Enunciado. Encuentra el mínimo de $(x-3)^2+2$ para $x \in \mathbb{R}$ y explica por qué es un mínimo global.

Solución. Para todo real x, un cuadrado es no negativo, de modo que $(x-3)^2+2 \geq 2$. La igualdad se alcanza exactamente cuando $(x-3)^2=0$, es decir, cuando $x=3$. Por tanto el mínimo global es 2, alcanzado en $x=3$. Evaluar muchos puntos alrededor del tres sugeriría el resultado, pero la desigualdad válida para **todo** real constituye la prueba.

Problema 19. Descubrir una fórmula y justificarla

Enunciado. La suma de los primeros n impares positivos parece ser un cuadrado:

$$1=1^2, \qquad 1+3=2^2, \qquad 1+3+5=3^2.$$

Demuestra que para cada entero positivo n se cumple $1+3+\cdots+(2n-1)=n^2$.

Solución. Demostraremos la afirmación por *inducción*: verificaremos el primer caso y estableceremos que la validez de cada caso implica la del siguiente. Para $n=1$, la suma vale $1=1^2$. Supongamos que para algún $n \geq 1$ la suma de los primeros n impares es n^2. El siguiente impar es $2n+1$, así que

$$1+3+\cdots+(2n-1)+(2n+1)=n^2+2n+1=(n+1)^2.$$

Hemos demostrado que, si es verdad para n, también lo es para $n+1$. Como comienza siendo verdad para 1, la propiedad se extiende sucesivamente a todos los enteros positivos. Los tres ejemplos iniciales inspiraron la conjetura; el argumento general es lo que la demuestra.

Una respuesta exacta puede expresarse de modo aproximado

Si un cuadrado tiene lado de un centímetro, su diagonal mide $\sqrt{2}$ centímetros. Podemos conservar esa longitud mediante el símbolo de raíz o dar una medida decimal con la que trabajar al cortar una pieza. Al elegir 1,414 centímetros obtenemos una aproximación: su cuadrado es 1,999396, de modo que el decimal elegido queda algo por debajo de la longitud buscada. La raíz sigue nombrando el valor exacto, y la diferencia con el decimal nos lleva a preguntar qué precisión necesita el trabajo.

La escritura matemática refleja esta diferencia con dos signos: $=$ para igualdad, $\approx$ para proximidad. Podemos escribir $\sqrt{2} \approx 1{,}414$, pero no $\sqrt{2}=1{,}414$. También importa el nivel de precisión requerido. Si un problema de geometría pregunta por la longitud de una diagonal, $\sqrt{2}\,\text{cm}$ puede ser la respuesta exacta; una aplicación concreta puede necesitar un decimal a centésimas.

Problema 20. El error de una aproximación

Enunciado. Demuestra que $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$ sin usar la cifra de la calculadora como prueba.

Solución. Ambos extremos son positivos. Sus cuadrados pueden compararse con 2:

$$1{,}414^2 = 1{,}999396 < 2, \qquad 1{,}415^2 = 2{,}002225 > 2.$$

Como la función $x \mapsto x^2$ preserva el orden entre números no negativos, se sigue que $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$. Esta doble desigualdad da una cota verificable: al aproximar $\sqrt{2}$ por 1,414, el error absoluto es menor que 0,001. No hemos calculado el error exacto ni afirmado que una medición posee esa precisión; hemos establecido una **cota matemática**.

Problema 21. Un porcentaje necesita una base

Enunciado. Un precio de 200 unidades monetarias sube un 20% y después baja un 20%. ¿Vuelve al valor inicial?

Solución. Aumentar 20% equivale a multiplicar por 1,20; disminuir después 20% equivale a multiplicar por 0,80, pero la segunda variación se calcula sobre el precio actualizado. Así,

$$200 \cdot 1{,}20 \cdot 0{,}80 = 192.$$

El precio final es 192, ocho unidades menos que al principio, una reducción neta del 4%. Los signos «+20%» y «−20%» no son cambios aditivos del mismo número cuando actúan sucesivamente sobre bases diferentes. El resultado también puede verificarse paso a paso: primero 240 y luego $240 - 48 = 192$.

Cuando la matemática describe algo fuera de ella

Una ley matemática deducida de hipótesis es distinta de un modelo que pretende representar observaciones. Pensemos en un viaje. Si un vehículo recorre 150 km en dos horas, sabemos que su **rapidez media sobre el recorrido** es 75 km/h. No sabemos, solo por este dato, si mantuvo esa rapidez en cada instante: pudo ir más rápido durante una parte y detenerse en otra. Un único cociente no establece una historia completa del movimiento.

La posibilidad de reconstruir un movimiento dependerá de las hipótesis que añadamos a los datos. Suponer rapidez constante, por ejemplo, permite describir cómo se reparte la distancia durante el viaje; sin esa condición, los mismos ciento cincuenta kilómetros en dos horas admiten recorridos con detenciones y cambios de rapidez. En una tabla de observaciones encontraremos una dificultad semejante: habrá que decidir qué clase de relaciones estamos considerando antes de escoger una fórmula. En *Física preuniversitaria* estudiaremos los instrumentos y los errores de medición; el problema siguiente permite examinar, con datos exactos, cuántas relaciones distintas pueden coincidir en las observaciones disponibles.

Problema 22. Una tabla no demuestra una ley

Enunciado. Se conocen los datos $(0,1)$, $(1,2)$ y $(2,3)$ de una relación entre dos variables reales. Una persona afirma: «La ley es necesariamente $y = x + 1$». Examínala.

Solución. La función $f(x) = x + 1$ pasa por los tres puntos. Pero también lo hace

$$g(x) = x + 1 + x(x-1)(x-2),$$

porque el producto agregado se anula cuando $x = 0, 1, 2$. Las dos funciones no son iguales; por ejemplo, para $x = 3$ tenemos $f(3) = 4$ y $g(3) = 4 + 3 \cdot 2 \cdot 1 = 10$. Por lo tanto tres observaciones no obligan a una única ley funcional. Para escoger entre modelos necesitaríamos hipótesis adicionales sobre la clase de funciones admisibles o un criterio de selección justificado. Exigir solo continuidad o suavidad no basta: ambas funciones son polinomios y tienen esas propiedades. Si se supusiera de antemano que la relación es afín, dos puntos de abscisas distintas fijarían la recta; el tercero permitiría comprobar su compatibilidad. Más observaciones finitas, sin restringir la clase de funciones, tampoco garantizan una ley única. La recta es una propuesta plausible, no una demostración de unicidad.

Qué puede hacer el lector al encontrarse ante un problema

En la igualdad con la que comenzamos, comprobar el dos nos dio una solución y factorizar permitió encontrar el conjunto completo. En la tabla de tres observaciones, el mismo cuidado por lo que se pedía condujo a construir otra función que cumplía los datos. La elección del argumento fue cambiando con la pregunta: una comprobación servía para un candidato, una equivalencia permitía describir todas las raíces y un contraejemplo resolvía una afirmación de necesidad.

Al trabajar en los ejercicios, podemos conservar esas formas de proceder. Si aparece una división, revisaremos en qué valores tiene sentido; si una afirmación dice «siempre», intentaremos comprender qué abarca ese alcance y si hay un caso que la contradiga. Un dibujo o algunos números de prueba pueden orientar la búsqueda. Después habrá que volver al enunciado y escribir las razones por las que la respuesta obtenida cumple sus condiciones. En el primer ejercicio volverá a aparecer un cuadrado, esta vez igual a veinticinco, y el dominio nos pedirá considerar dos respuestas distintas al mismo cálculo.

Ejercicios para trabajar sin profesor

Los siguientes ejercicios están ordenados aproximadamente por dificultad. Intenta resolverlos antes de leer las soluciones. En varios casos, encontrar la respuesta correcta será menos importante que explicar por qué otras respuestas no sirven.

Enunciados

1. Halla todas las soluciones de $x^2 = 25$ primero en $\mathbb{R}$ y luego en los números naturales positivos. Explica por qué cambia la respuesta.

2. Resuelve $2x + 3 = 2x + 5$. No fuerces una solución si las condiciones son incompatibles.

3. Resuelve $2(x + 3) = 2x + 6$ e indica si hay cero, una o infinitas soluciones.

4. ¿Es verdadera la afirmación «si $x > 1$, entonces $x^2 > 1$» para reales? ¿Y su recíproca?

5. Demuestra que el cuadrado de cualquier entero impar deja resto 1 al dividirse por 8.

6. Resuelve $|x-1|<2$ e interpreta el resultado como un conjunto de distancias.

7. Para cada valor real de a, describe las soluciones de $ax=0$ en la variable x.

8. Resuelve $(x-1)^2=x-1$. Explica por qué dividir por $x-1$ puede dar una respuesta incompleta.

9. Resuelve $\sqrt{x+2}=x$ en los números reales y comprueba el resultado.

10. Resuelve la ecuación $\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{x+1}{x^2-1}$, declarando su dominio antes de operar.

11. Refuta con un contraejemplo la afirmación «si $ab=0$, entonces $a=0$» sobre los reales. Escribe una afirmación correcta.

12. ¿Determina el perímetro de 24 cm el área de un rectángulo? Construye dos ejemplos que permitan contestar.

13. Un valor inicial positivo baja un 25% y luego sube un 25%. ¿Cuál es su variación porcentual neta?

14. Usando solo cuadrados decimales, prueba que $1{,}732<\sqrt{3}<1{,}733$ y deduce una cota del error de usar 1,732.

15. Demuestra que si n es un entero par, entonces n^3 también es par.

16. Discute la proposición «si $a>b$, entonces $1/a<1/b$». Da un contraejemplo si es falsa y una hipótesis suficiente para corregirla.

17. Encuentra el par ordenado real que satisface $x+y=7$ y $x-y=1$, y demuestra su unicidad.

18. Una tabla presenta $(n,y)=(1,1),(2,4),(3,9),(4,16)$. ¿Queda demostrada la ley $y=n^2$ para todos los enteros positivos?

19. «Si dos triángulos tienen el mismo perímetro, son congruentes». Examina la afirmación.

20. Demuestra: «si el cuadrado de un entero es impar, el entero es impar». Puedes razonar por contraposición.

21. Dos modelos, $f(t)=t$ y $g(t)=t^2$, producen los mismos valores para $t=0$ y $t=1$. ¿Qué puede concluirse de esa coincidencia y qué no?

22. Evalúa la afirmación «existe un único real que satisface $x^2+5x+6=0$». Justifica la respuesta.

Soluciones desarrolladas de los ejercicios

Ejercicio 1. El dominio cambia la respuesta

La ecuación equivale a $(x-5)(x+5)=0$. En los números reales hay exactamente dos soluciones, $x=5$ y $x=-5$, pues cualquiera de los factores puede anularse y no existe otra posibilidad. En los naturales positivos, -5 no pertenece al dominio permitido, así que la única solución es 5. La ecuación es la misma, pero el conjunto sobre el que buscamos las soluciones no lo es.

Ejercicio 2. Una contradicción

Restar $2x$ en ambos miembros produce $3=5$. Como esta afirmación es falsa independientemente de x, ninguna sustitución puede satisfacer la igualdad inicial. Por tanto el conjunto solución es $\emptyset$. La reducción no demuestra que «x no tenga valor», sino que las dos condiciones de la igualdad son incompatibles.

Ejercicio 3. Una identidad disfrazada

Por distributividad, $2(x+3) = 2x+6$. La igualdad original se convierte en $2x+6 = 2x+6$, que es cierta para cualquier real. Así $S = \mathbb{R}$. Decir simplemente «se cancelan las x» no termina el problema; debemos distinguir el resultado tautológico $0 = 0$ del caso contradictorio que apareció en el ejercicio 2.

Ejercicio 4. Una implicación y su converso

Si $x > 1$, entonces x y 1 son positivos; al multiplicar $x > 1$ por $x > 0$ obtenemos $x^2 > x > 1$, de modo que la primera proposición es verdadera. El converso es falso: para $x = -2$ tenemos $x^2 = 4 > 1$, pero $-2 > 1$ es falso. Una forma equivalente a $x^2 > 1$ es $x < -1$ o $x > 1$; el converso fallaba por omitir la rama negativa.

Ejercicio 5. El resto de un cuadrado impar

Sea $n = 2k+1$ un entero impar. Entonces

$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1.$$

Uno de los enteros consecutivos $k, k+1$ es par, por lo que $k(k+1) = 2m$ para algún entero m. Sustituyendo, $n^2 = 8m + 1$. Por definición de resto, al dividir n^2 entre ocho el resto es uno. No se ha supuesto que k sea positivo, por lo que el resultado también vale para enteros negativos impares.

Ejercicio 6. Distancia menor que dos

La desigualdad $|x-1| < 2$ significa que la distancia entre x y 1 es estrictamente menor que dos. En símbolos, $-2 < x - 1 < 2$. Sumamos uno a los tres miembros y obtenemos $-1 < x < 3$. El conjunto solución es el intervalo abierto $(-1, 3)$. Los extremos no pertenecen: en -1 y 3 la distancia vale exactamente dos.

Ejercicio 7. El parámetro puede anularse

Si $a \neq 0$, dividir $ax = 0$ por a es legítimo y conduce a $x = 0$, solución única. Si $a = 0$, la igualdad resulta $0 \cdot x = 0$, verdadera para cualquier real x; hay infinitas soluciones. La respuesta se expresa por casos:

$$S_a = \begin{cases} \{0\}, & a \neq 0, \\ \mathbb{R}, & a = 0. \end{cases}$$

El valor $a = 0$ no es una complicación artificial: era precisamente el caso que se habría perdido si hubiésemos dividido por a desde el comienzo.

Ejercicio 8. Dividir por un factor variable

Sea $u = x - 1$. La ecuación es $u^2 = u$, equivalente a $u(u-1) = 0$. Por tanto $u = 0$ o $u = 1$, y de aquí $x = 1$ o $x = 2$. Comprobando, ambas soluciones sirven. Dividir la ecuación original por $x - 1$ equivale a dividir por u y presupone $u \neq 0$; de ese modo se eliminaría la solución $x = 1$. El método seguro fue conservar el producto factorizado.

Ejercicio 9. Comprobación después de elevar al cuadrado

Como $\sqrt{x+2} \geq 0$, cualquier solución debe satisfacer $x \geq 0$. Elevando al cuadrado aparece $x+2 = x^2$, es decir, $(x-2)(x+1) = 0$. Los candidatos son 2 y -1. Este último no cumple la restricción $x \geq 0$ y, de hecho, $\sqrt{1} = 1 \neq -1$. En cambio, para $x = 2$ se cumple $\sqrt{4} = 2$. Por tanto $S = \{2\}$. La comprobación en el enunciado original es indispensable.

Ejercicio 10. Igualdad de expresiones, pero no de dominios

Los denominadores originales exigen $x - 1 \neq 0$ y $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) \neq 0$. Por tanto $x \neq 1$ y $x \neq -1$. En ese dominio, multiplicar ambos lados por $(x-1)(x+1)$ es reversible y da $x+1 = x+1$, identidad. En consecuencia **todos los reales salvo** -1 **y** 1 son soluciones. Si simplificáramos el lado derecho a $1/(x-1)$ y olvidáramos su dominio de origen, agregaríamos incorrectamente el valor $x = -1$.

Ejercicio 11. Una conclusión demasiado fuerte

Basta tomar $a = 1$ y $b = 0$. Se cumple $ab = 0$, pero $a \neq 0$. La afirmación universal queda refutada. Una formulación correcta en los reales es: «si $ab = 0$, entonces $a = 0$ **o** $b = 0$». La palabra «o» permite que cualquiera de los factores sea el que se anule; no obliga a que se anule siempre el primero.

Ejercicio 12. El área no está determinada

Sean a y b los lados positivos. El perímetro 24 da $2(a+b) = 24$, por tanto $a + b = 12$. Para $a = 3, b = 9$, el área es $27\,\text{cm}^2$; para $a = b = 6$, el área es $36\,\text{cm}^2$. Ambas figuras cumplen el mismo perímetro, así que el área no queda determinada de manera única. No es legítimo escoger el cuadrado sin que el enunciado lo pida.

Ejercicio 13. Factores sucesivos

Bajar 25% equivale a multiplicar por 0,75. Subir luego 25% equivale a multiplicar el nuevo valor por 1,25. El factor neto es $0{,}75 \cdot 1{,}25 = 0{,}9375$. El resultado queda en el 93,75% del valor inicial: la variación es una **disminución del** 6,25%. La compensación no funciona porque las dos tasas actúan sobre bases distintas.

Ejercicio 14. Una cota y no un decimal supuesto

Calculamos $1{,}732^2 = 2{,}999824$ y $1{,}733^2 = 3{,}003289$. Como ambos números son positivos y la función cuadrado crece para argumentos positivos,

$$1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733.$$

Al usar 1,732 como aproximación, la diferencia $\sqrt{3} - 1{,}732$ es estrictamente mayor que cero y menor que 0,001. Ese es un límite superior probado para el error absoluto, no una estimación estadística.

Ejercicio 15. El cubo de un par

Por hipótesis $n = 2k$ para algún entero k. Entonces

$$n^3 = (2k)^3 = 8k^3 = 2(4k^3).$$

Como $4k^3$ es entero, n^3 tiene la forma de un número par. La demostración cubre todos los enteros pares, incluidos cero y los negativos.

Ejercicio 16. Los recíprocos y el signo

La expresión exige primero $a \neq 0$ y $b \neq 0$; para valores nulos ni siquiera está definida. Aun restringida a valores no nulos, la proposición es falsa: $a = 1, b = -1$ cumplen $a > b$, pero $1/a = 1$ no es menor que $1/b = -1$. Es suficiente exigir $a > b > 0$. En ese caso $ab > 0$ y

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab} > 0,$$

por lo que $1/a < 1/b$. Hemos exhibido tanto un contraejemplo al enunciado original como una versión corregida cuya validez se demuestra.

Ejercicio 17. Existencia y unicidad

Sumando las dos ecuaciones tenemos $2x = 8$, así que $x = 4$. Sustituyendo en $x+y = 7$, obtenemos $y = 3$. Comprobación: $4+3 = 7$ y $4-3 = 1$. La solución existe porque el par $(4, 3)$ verifica ambas condiciones. Es única porque cualquier solución tendría que cumplir la ecuación obtenida al sumarlas, $2x = 8$, de modo que $x = 4$; después, la primera fija forzosamente $y = 3$.

Ejercicio 18. Varias leyes caben en una tabla

Los datos concuerdan con $f(n) = n^2$. Pero también con

$$g(n) = n^2 + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4),$$

porque el producto añadido se anula para $n = 1, 2, 3, 4$. En $n = 5$, en cambio, $f(5) = 25$ y $g(5) = 25 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 49$. Por tanto no hay una ley única impuesta por los cuatro pares observados. Una regla de simplicidad podría favorecer la primera función, pero es una decisión de modelado, no una consecuencia lógica obligatoria de la tabla.

Ejercicio 19. Un perímetro no fija la forma

Un triángulo rectángulo de lados $3, 4, 5$ tiene perímetro 12. Un triángulo equilátero de lados $4, 4, 4$ tiene el mismo perímetro 12. No son congruentes porque los conjuntos de longitudes de sus lados no coinciden. Esto refuta la proposición universal. La igualdad de perímetro es una propiedad común que no determina por sí sola las demás características de las figuras.

Ejercicio 20. Demostración por contraposición

La contraposición de «si n^2 es impar, entonces n es impar» es «si n es par, entonces n^2 es par». Esta última se prueba directamente: si $n = 2k$, entonces $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$, que es par. Si un entero no fuese impar sería par; acabamos de demostrar que entonces su cuadrado no podría ser impar. Por ello el enunciado original es verdadero.

Ejercicio 21. Coincidencia de dos modelos

Para $t = 0$ se obtiene $f(0) = g(0) = 0$; para $t = 1$, $f(1) = g(1) = 1$. Es legítimo concluir que los modelos coinciden en esos dos valores. No es legítimo concluir que sean funciones idénticas: para $t = 2$ se obtiene $f(2) = 2$ y $g(2) = 4$. Si esos dos valores fueran medidas, la elección entre modelos necesitaría hipótesis o evidencia adicional.

Ejercicio 22. Existencia no es unicidad

Factorizando se tiene

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3).$$

El producto vale cero si $x = -2$ o $x = -3$, y ambos números reales satisfacen la ecuación. Por tanto la proposición «existe un único real» es falsa: **existen exactamente dos soluciones reales**. La factorización demuestra que no hay una tercera.

Diagnóstico de salida

A modo de evaluación final, considera la afirmación:

> «He comprobado cinco casos, y todos resultaron verdaderos; por lo tanto, la propiedad se cumple para todo número».

Escribe una respuesta breve que distinga *evidencia*, *conjetura* y *demostración*. Después explica qué información adicional necesitarías para transformar una afirmación nacida de observaciones en un resultado matemático general. Por último, identifica en tus propias palabras un ejemplo de resultado exacto, uno de aproximación y uno de pregunta insuficientemente determinada.

Pauta de corrección. Una respuesta satisfactoria identifica el dominio y determina si los cinco casos lo agotan. Si lo agotan y las comprobaciones son válidas, constituyen una prueba por enumeración exhaustiva. Si quedan casos por examinar, las comprobaciones aportan evidencia y pueden sugerir una conjetura; para establecer el enunciado universal se necesita un argumento que abarque los casos restantes, fundado en definiciones, propiedades o deducciones válidas. La respuesta también usa correctamente $\sqrt{2}$ frente a 1,414 para distinguir exactitud y aproximación; y puede citar el rectángulo de perímetro dado para explicar la falta de unicidad. La respuesta no requiere símbolos lógicos formales.

CAPÍTULO 1

Los números, el orden y la recta real

Repartamos siete fichas por igual entre dos personas. Si queremos conservar las fichas enteras, podemos entregar tres a cada una y dejar una sobre la mesa; si las fichas representan una cantidad divisible, el reparto admite tres y media por persona. La cuenta se escribe del mismo modo, pero las condiciones del reparto determinan qué respuesta podemos aceptar. Para expresar ambas situaciones necesitamos precisar qué números estamos usando.

La dificultad reaparece al restar siete de tres: una colección de tres objetos no permite retirar siete, mientras que un saldo o una temperatura sí pueden tomar valores negativos. Las operaciones nos van llevando a conjuntos de números más amplios. Más adelante, la diagonal de un cuadrado de lado uno exigirá una longitud que ninguna fracción de enteros expresa exactamente; la raíz cuadrada de dos tendrá entonces un lugar junto a los números con los que ya sabemos contar y repartir.

Podemos reunir esas cantidades sobre una recta y compararlas por sus posiciones. Allí las escrituras distintas de una misma cantidad deberán ocupar el mismo punto: dos cuartos y una mitad coinciden porque dividir cada mitad en dos partes produce cuartos. Estudiaremos cómo reconocer esas coincidencias, cómo se relaciona el orden con las operaciones y qué información conserva una representación decimal. El dominio que en el capítulo cero acompañaba a una ecuación comienza así a adquirir una estructura propia.

Contar, restar y repartir

Para contar usaremos la convención $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ y escribiremos $\mathbb{N}_{>0}$ para los naturales positivos. Otros libros empiezan los naturales en uno; declarar la convención permite saber qué conjunto acompaña a cada afirmación. La suma y el producto de naturales permanecen en ese conjunto, mientras que una resta como $3 - 7$ exige ampliarlo. Los enteros

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

permiten efectuar siempre la resta. El negativo $-a$ es el número que sumado a a produce cero. Por eso restar b significa sumar su opuesto: $a - b = a + (-b)$. El signo menos tiene aquí dos usos relacionados: en $-b$ nombra un opuesto; en $a - b$ indica una operación.

Dividir nos obliga a ampliar otra vez. Un racional es un número representable como p/q, con $p, q \in \mathbb{Z}$ y $q \neq 0$. El conjunto de todos ellos se escribe $\mathbb{Q}$. Dos representaciones p/q y r/s nombran el mismo racional precisamente cuando $ps = rq$. La igualdad $1/2 = 2/4$ expresa esta independencia del representante. Una fracción describe el número mediante una elección de partes: al dividir cada mitad en dos partes iguales, media unidad pasa a ocupar dos cuartos y conserva su tamaño. La regla de los productos cruzados permite comprobar la igualdad para cualesquiera signos: multiplicamos por el producto de los denominadores y podemos deshacer ese paso porque

ambos son distintos de cero. Al multiplicar numerador y denominador por el mismo entero no nulo conservamos el número.

La condición $q \neq 0$ tiene una razón: dividir p por q debe producir el único número x tal que $qx = p$. Si $q = 0$ y $p \neq 0$, no existe tal x; si ambos son cero, cualquier x sirve y se pierde la unicidad. Ninguno de los dos casos define una división. En cambio $0/q = 0$ cuando $q \neq 0$.

Los racionales se suman y multiplican por

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps + rq}{qs}, \qquad \frac{p}{q}\frac{r}{s} = \frac{pr}{qs}, \quad q, s \neq 0.$$

Para sumar, necesitamos contar partes del mismo tamaño: por eso expresamos ambas fracciones con denominador qs. Al multiplicar, tomar p/q de una cantidad y después r/s de ella equivale a tomar $pr/(qs)$ de la cantidad inicial. Para dividir por r/s multiplicamos por s/r, lo que exige también $r \neq 0$. El capítulo siguiente desarrollará el significado de estas operaciones, las razones y los porcentajes; aquí necesitamos comprender cómo encajan en los sistemas numéricos.

Cada natural se identifica con un entero, y cada entero n con el racional $n/1$. Escribimos $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q}$: el símbolo indica inclusiones propias, pues -1 es entero y no natural, y $1/2$ es racional y no entero. Cada natural pertenece también a los racionales. Cuando se pide clasificar un número, conviene aclarar si se solicita el menor de estos conjuntos que lo contiene o todas sus pertenencias.

Problema 1. Clasificar sin excluir

Enunciado. Clasifica 0, -7, $6/3$ y $-5/2$ entre naturales, enteros y racionales.

Solución. Con nuestra convención, 0 pertenece a los tres conjuntos. El número -7 es entero y racional, pues $-7 = -7/1$, pero no natural. Antes de clasificar $6/3$ calculamos su valor: es 2, de modo que pertenece a los tres. Finalmente $-5/2$ es racional; no es entero porque ningún entero multiplicado por dos da -5. Por ello tampoco es natural. La forma de la escritura no decide por sí sola el conjunto más pequeño al que pertenece su valor.

Problema 2. Lo que significa cerrar una operación

Enunciado. ¿Puede efectuarse siempre la resta en $\mathbb{N}$? ¿Y la división en $\mathbb{Z}$? Explica qué ampliación resuelve cada dificultad.

Solución. Para que una operación esté cerrada en un conjunto, el resultado debe permanecer en él para cualesquiera entradas admitidas. La resta $2 - 5 = -3$ muestra que $\mathbb{N}$ no es cerrado para la resta; $\mathbb{Z}$ sí lo es. La división $1/2$ muestra que los enteros no son cerrados para dividir incluso por un divisor no nulo. En $\mathbb{Q}$ toda división por un racional distinto de cero vuelve a ser racional. La ampliación conserva las operaciones anteriores y permite resultados antes ausentes; no convierte en legítima la división por cero.

Problema 3. Un signo menos delante de otro

Enunciado. Un saldo inicial de -8 unidades aumenta en 5 y después se elimina una deuda de 4 unidades. Modela el nuevo saldo.

Solución. El primer aumento produce $-8 + 5 = -3$. Una deuda de cuatro se representa por -4; eliminarla significa restar -4. Así el nuevo saldo es $-3 - (-4) = -3 + 4 = 1$. La identidad $-(-4) = 4$ se debe a que el opuesto del opuesto devuelve el número inicial: $-4 + 4 = 0$. La

respuesta es un saldo favorable de una unidad. Sumar -4 habría representado contraer otra deuda, una situación diferente.

Operaciones con representaciones racionales

En las filas de fracciones, los numeradores y denominadores son enteros y todos los denominadores escritos deben ser no nulos. La división por cero sigue excluida al ampliar el sistema numérico.

Propiedad	**Fórmula y condiciones de uso**
Restar y tomar opuestos	$a-b=a+(-b)$ y $-(-b)=b$.
Igualdad de fracciones	$p/q=r/s \iff ps=rq$, con $q,s\neq 0$.
Cambiar representante	$p/q=(kp)/(kq)$, con $q,k\neq 0$.
Suma	$p/q+r/s=(ps+rq)/(qs)$, con $q,s\neq 0$.
Producto	$(p/q)(r/s)=pr/(qs)$, con $q,s\neq 0$.
Cociente	$(p/q):(r/s)=ps/(qr)$, con $q,r,s\neq 0$.
Numerador nulo	$0/q=0$, con $q\neq 0$.

Pruebas. Apéndice: «Opuestos, inversos y productos nulos», «Fracciones: representantes y operaciones».

Un orden compatible con las operaciones

Para situar números elegimos un punto llamado origen, una dirección positiva y una unidad. El punto 2 queda a dos unidades a la derecha del origen; -2 queda a dos a la izquierda. Diremos que $a<b$ cuando $b-a$ es positivo. Esta definición coincide con que a esté a la izquierda de b. En particular, $-5<-2$ porque $(-2)-(-5)=3>0$. Un número negativo de mayor valor absoluto está más a la izquierda.

El orden tiene una propiedad decisiva: sumar la misma cantidad a dos números conserva su comparación, pues $(b+c)-(a+c)=b-a$. También multiplicar por $c>0$ conserva el orden: si $b-a>0$, entonces $c(b-a)>0$. Multiplicar por $c<0$ lo invierte, ya que el producto de un negativo y un positivo es negativo. Si $c=0$, ambos productos son iguales y se pierde la desigualdad estricta.

Las reglas de signos pueden justificarse con las leyes de las operaciones. De $b+(-b)=0$, la distributividad da $ab+a(-b)=0$ y por tanto $a(-b)=-(ab)$. Aplicándola otra vez obtenemos $(-a)(-b)=ab$. Exigimos que la extensión de los números mantenga la distributividad; estas reglas son consecuencias de esa exigencia.

Cuando se combinan operaciones, los paréntesis expresan la agrupación. En su ausencia, potencias y raíces se calculan antes que productos y cocientes, y estos antes que sumas y restas. Las sumas y restas encadenadas se efectúan de izquierda a derecha; lo mismo vale para productos y cocientes de igual prioridad. En potencias encadenadas, los paréntesis o la disposición de los exponentes precisan la agrupación. Así $12:3\cdot 2=8$, mientras que $12:(3\cdot 2)=2$. La raya de fracción agrupa todo el numerador y todo el denominador. El exponente afecta a su base: $-3^2=-(3^2)=-9$, mientras que $(-3)^2=9$.

Problema 4. Comparar negativos racionales

Enunciado. Ordena $-3/4$, $-2/3$ y $-5/6$ sin decimales.

Solución. Un denominador positivo común es 12. Los números son $-9/12$, $-8/12$ y $-10/12$. Cada fracción cuenta unidades del mismo tamaño, por lo que basta ordenar los numeradores: $-10 < -9 < -8$. Concluimos $-5/6 < -3/4 < -2/3$. El de mayor magnitud negativa queda primero. La reducción a denominador común es reversible porque multiplicamos numerador y denominador por factores positivos no nulos.

Problema 5. Una fracción agrupa

Enunciado. Calcula $\dfrac{3-2(1-4)}{5-2}$ y explica la prioridad de cada paso.

Solución. El denominador es $3 \neq 0$, de modo que la expresión está definida. En el numerador comenzamos por el paréntesis: $1-4=-3$. El producto es $2(-3)=-6$, y restarlo da $3-(-6)=9$. Finalmente $9/3=3$. La raya de fracción obliga a completar ambos bloques antes de dividir. Si hubiéramos dividido solo el último término del numerador, habríamos cambiado la expresión.

Problema 6. Racionales y operaciones sucesivas

Enunciado. Calcula $\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{4}:\dfrac{3}{2}$.

Solución. El divisor $3/2$ no es cero. Primero efectuamos la división, multiplicando por su inverso: $(3/4)(2/3)=6/12=1/2$. Después restamos: $1/2-1/2=0$. Si se quisiera dividir toda la diferencia, habría que escribir $(1/2-3/4):(3/2)$, cuyo valor sería $(-1/4)(2/3)=-1/6$. Los paréntesis cambian qué operación se aplica a qué números.

Problema 7. Por qué se invierte el orden

Enunciado. Partiendo de $-2<3$, compara los resultados al multiplicar por 4, por -4 y por 0.

Solución. Multiplicar por $4>0$ da $-8<12$. Multiplicar por $-4<0$ da $8>-12$: la diferencia que era positiva cambia a negativa. Con 0 obtenemos $0=0$ y ya no una desigualdad estricta. Estos tres casos explican por qué no podemos multiplicar una desigualdad por un factor de signo desconocido y conservar automáticamente el mismo símbolo.

Problema 8. Comparar recíprocos con hipótesis

Enunciado. Prueba que si $0<a<b$, entonces $1/b<1/a$. Examina qué ocurre con $a=-1$, $b=2$.

Solución. Bajo la hipótesis positiva, $ab>0$ y

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}>0.$$

Esta positividad equivale a $1/b<1/a$. Si $a=-1$ y $b=2$, sigue cumpliéndose $a<b$, pero $1/b=1/2$ es mayor que $1/a=-1$. El cálculo localiza la hipótesis decisiva: necesitamos que el

producto ab sea positivo para el argumento dado. En particular, no alcanza con exigir que ambos números sean no nulos.

Reglas de signos y de orden

Las letras representan reales. Las reglas de comparación se escriben con desigualdad estricta; también valen con desigualdades no estrictas cuando el factor conserva el signo exigido.

Propiedad	**Fórmula y condiciones de uso**
Un factor negativo	$a(-b) = -(ab)$ y $(-a)b = -(ab)$.
Dos factores negativos	$(-a)(-b) = ab$.
Sumar la misma cantidad	$a < b \iff a + c < b + c$.
Factor positivo	$a < b \iff ac < bc$, con $c > 0$. Dividir por $c > 0$ también conserva el orden.
Factor negativo	$a < b \iff ac > bc$, con $c < 0$. Dividir por $c < 0$ también invierte el orden.
Factor cero	$a \cdot 0 = b \cdot 0 = 0$. La desigualdad estricta se pierde.
Recíprocos positivos	$0 < a < b \Longrightarrow 1/b < 1/a$. Ser distintos de cero, sin controlar el signo, no basta.

Pruebas. Apéndice: «Opuestos, inversos y productos nulos», «Signos y compatibilidad del orden».

Distancias e intervalos

El valor absoluto de un real es su distancia al origen:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

En el segundo caso tomamos el opuesto de un número negativo y obtenemos uno positivo: si $x = -5$, entonces $-x = 5$. Por definición $|x| \geq 0$, y solo vale cero cuando $x = 0$. La distancia entre a y b es $|a - b| = |b - a|$. Cambiar el sentido de un recorrido cambia el signo del desplazamiento, pero conserva su longitud.

Si $r > 0$, estar a distancia menor que r de a significa quedar entre $a - r$ y $a + r$:

$$|x - a| < r \quad \iff \quad a - r < x < a + r.$$

Para comprobarlo, ponemos $u = x - a$. Si $u \geq 0$, $|u| < r$ significa $u < r$ y ya sabemos que $u > -r$. Si $u < 0$, significa $-u < r$, es decir $u > -r$, y ya sabemos que $u < r$. Los mismos casos permiten invertir el argumento. Reemplazar los símbolos estrictos por $\leq$ incluye los extremos.

Un intervalo reúne todos los reales entre sus extremos. Escribimos (a, b) si excluimos ambos, $[a, b]$ si incluimos ambos, y $[a, b)$ o $(a, b]$ si incluimos solo uno. También usamos (a, ∞) y $(-\infty, b]$ para conjuntos sin cota en una dirección. Los signos de infinito no son números reales ni extremos que podamos incluir. La intersección $A \cap B$ pide cumplir ambas condiciones; la unión $A \cup B$ pide cumplir al menos una.

Problema 9. Distancia y desplazamiento

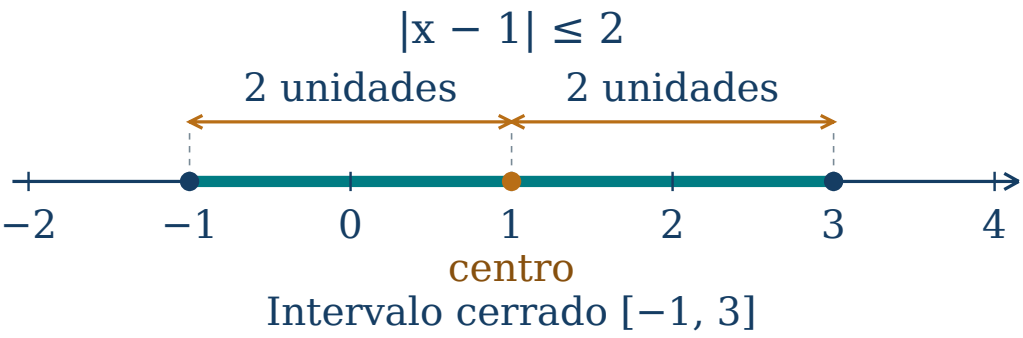
Enunciado. Un punto pasa de $-7/2$ a $1/2$ en una recta con unidad de un metro. Halla su desplazamiento y la distancia entre las posiciones.

Solución. Restamos posición final menos inicial: $1/2 - (-7/2) = 8/2 = 4$. El desplazamiento es $+4$ metros y la distancia es $|4| = 4$ metros. En el recorrido inverso el desplazamiento sería -4 metros y la distancia seguiría siendo cuatro. Con estos datos conocemos la separación de las posiciones; si hubo idas y vueltas, la longitud total recorrida podría ser mayor.

Problema 10. Dentro de una distancia

Enunciado. Describe los reales que satisfacen $|x-1| \leq 2$ y representa el conjunto mediante un intervalo.

Solución. La condición pide distancia a 1 a lo sumo dos. Se traduce en $-2 \leq x-1 \leq 2$. Sumando uno en los tres miembros obtenemos $-1 \leq x \leq 3$, es decir $[-1, 3]$. Los extremos verifican la igualdad $|x-1| = 2$ y pertenecen al conjunto; todos los puntos interiores tienen distancia menor. En el dibujo, el centro está marcado en 1 y las dos flechas miden dos unidades, una hacia cada lado. Los puntos rellenos indican que -1 y 3 están incluidos. El segmento reúne todas las posiciones que cumplen la desigualdad.



Problema 11. Fuera de una distancia

Enunciado. Describe $|x+2| > 3$ para $x \in \mathbb{R}$.

Solución. El centro es -2, pues $x + 2 = x - (-2)$. Estar a distancia mayor que tres significa quedar a la izquierda de -5 o a la derecha de 1. Por tanto el conjunto es $(-\infty, -5) \cup (1, \infty)$. Comprobamos un punto de cada rama: $|-6+2| = 4 > 3$ y $|2+2| = 4 > 3$. Los extremos dan tres y se excluyen. El punto central da cero, por lo que la respuesta no puede ser el intervalo entre los extremos.

Problema 12. Dos restricciones simultáneas

Enunciado. Se exige $x \in [-2, 4)$ y también $x > 1$. ¿Qué valores quedan? ¿Cuál sería el resultado si bastara una de las dos condiciones?

Solución. Cumplir ambas es tomar $[-2, 4) \cap (1, \infty) = (1, 4)$. El uno queda fuera porque la segunda condición es estricta; el cuatro queda fuera por la primera. Si bastara una, tomaríamos la unión: $[-2, 4) \cup (1, \infty) = [-2, \infty)$. Entre uno y cuatro los conjuntos se superponen, así que no dejan huecos. La palabra «y» o «o» cambia el conjunto buscado.

Problema 13. Una desigualdad elemental

Enunciado. Resuelve $3 - 2x \leq 7$ en los reales y escribe la respuesta en intervalos.

Solución. Restamos tres, operación reversible: $-2x \leq 4$. Al dividir por -2 invertimos el orden y resulta $x \geq -2$. Así $S = [-2, \infty)$. En el extremo, $3 - 2(-2) = 7$; para $x = 0$ se obtiene $3 \leq 7$; para $x = -3$ se obtiene $9 \leq 7$, falso. Estas comprobaciones detectan un eventual error de signo, mientras que la equivalencia de los pasos demuestra la respuesta completa. El estudio sistemático de inecuaciones aparecerá en el capítulo dedicado a ecuaciones, inecuaciones y valor absoluto.

Distancias y conjuntos solución

En las condiciones con centro y radio se supone $r > 0$. Las barras se aplican al valor de toda la expresión que contienen.

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Valor absoluto	$\lvert x\rvert = x$ si $x \geq 0$ y $\lvert x\rvert = -x$ si $x < 0$.
No negatividad	$\lvert x\rvert \geq 0$ y $\lvert x\rvert = 0 \iff x = 0$.
Simetría de la distancia	$\lvert a - b\rvert = \lvert b - a\rvert$.
Interior	$\lvert x - a\rvert < r \iff a - r < x < a + r$. Con $\leq$ se incluyen ambos extremos.
Exterior	$\lvert x - a\rvert > r \iff x < a - r$ o $x > a + r$. Con $\geq$ se incluyen ambos extremos.
Condiciones simultáneas o alternativas	Cumplir A y B corresponde a $A \cap B$; cumplir al menos una corresponde a $A \cup B$.

Pruebas. Apéndice: «Valor absoluto, distancia e intervalos».

Entre dos números

Entre los enteros 2 y 3 no hay otro entero. Entre los racionales 2 y 3 sí hay un racional: 5/2. Y entre 2 y 5/2 hay otro: 9/4. ¿Termina alguna vez esta posibilidad?

Si $a < b$ son racionales, su promedio $m = (a + b)/2$ es racional y cumple $a < m < b$. En efecto, $m - a = (b - a)/2 > 0$ y $b - m = (b - a)/2 > 0$. Por tanto ningún racional tiene un racional inmediatamente siguiente: cualquier candidato $b > a$ deja espacio para su promedio con a.

Decimos que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ si entre cualesquiera reales distintos hay un racional. La prueba del promedio solo resuelve el caso en que ambos extremos son racionales; si uno es irracional, el promedio podría serlo también. Para el caso general utilizaremos una propiedad de los reales, la **propiedad arquimediana**: dado un real M, existe un natural mayor que M. Equivale a poder elegir unidades $1/n$ tan pequeñas como se necesite.

Sean ahora $a < b$ reales. Elegimos $n \in \mathbb{N}_{>0}$ tal que $n > 1/(b - a)$, de modo que $n(b - a) > 1$. Buscamos un entero k con $na < k \leq na + 1$, porque la separación entre los extremos escalados supera una unidad. Para construirlo, elegimos un natural m tal que $na + m \geq 0$, usando la propiedad arquimediana. Entre los naturales mayores que $na + m$ existe un menor elemento j: el conjunto es no vacío por la misma propiedad arquimediana. Como $j \geq 1$, su predecesor es natural, y la minimalidad de j da $j - 1 \leq na + m < j$. Al restar m y poner $k = j - m$ obtenemos precisamente $na < k \leq na + 1$. La traslación permite usar el menor natural aun cuando el punto inicial na sea negativo. Entonces

$$na < k \leq na + 1 < nb,$$

y al dividir por $n > 0$ obtenemos $a < k/n < b$. Hemos construido un racional dentro del intervalo a partir de su anchura: elegimos una escala en la que esa anchura supera la unidad y localizamos después un entero entre los extremos escalados. La propiedad arquimediana permite escoger la escala y el principio del menor natural permite localizar el entero; el argumento funciona también cuando los extremos dados son irracionales.

Problema 14. Fabricar números intermedios

Enunciado. Encuentra tres racionales distintos entre $2/5$ y $3/5$ y explica por qué hay infinitos.

Solución. El promedio es $1/2$. Promediando $2/5$ con $1/2$ obtenemos $9/20$; promediando $1/2$ con $3/5$ obtenemos $11/20$. Así $2/5 < 9/20 < 1/2 < 11/20 < 3/5$. Para demostrar infinitud repetimos el promedio entre el extremo izquierdo y el último punto elegido. En cada paso sale un racional estrictamente entre ambos, diferente de todos los anteriores porque queda más cerca del extremo izquierdo. No existe una última fracción disponible.

Problema 15. Un racional entre extremos irracionales

Enunciado. Encuentra un racional entre $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ sin usar aproximaciones de calculadora.

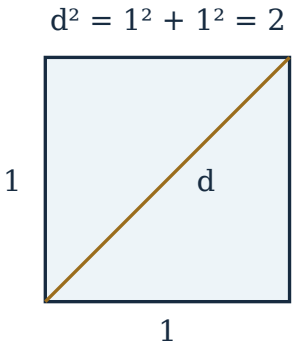
Solución. Probemos $3/2$. Como los tres números son positivos, podemos comparar cuadrados: $2 < 9/4 < 3$, pues $8 < 9 < 12$ al multiplicar por cuatro. Para positivos el cuadrado conserva estrictamente el orden, de modo que $\sqrt{2} < 3/2 < \sqrt{3}$. El promedio de los extremos no era necesario; una fracción candidata y dos comparaciones exactas resolvieron el problema.

Problema 16. No hay siguiente racional

Enunciado. Una persona propone que 0,5001 es el racional inmediatamente posterior a $1/2$. Refuta la propuesta y prueba que ninguna otra puede funcionar.

Solución. El racional 0,50005 está estrictamente entre 0,5 y 0,5001, así que la propuesta falla. En general, si se propone cualquier racional $r > 1/2$, el promedio $m = (r + 1/2)/2$ cumple $1/2 < m < r$. Por tanto siempre encontramos un racional antes del candidato, y no existe sucesor racional. El primer decimal refuta la propuesta particular; el promedio demuestra la imposibilidad general.

Una longitud que las fracciones no alcanzan



La densidad podría sugerir que las fracciones bastan para medir todas las longitudes. Un cuadrado de lado uno muestra la dificultad. Por el teorema de Pitágoras, su diagonal $d > 0$ satisface $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. La geometría motiva el problema; la demostración siguiente solo necesita aritmética de enteros.

Supongamos que $d = p/q$ con p, q enteros positivos sin factores comunes y $q > 0$. Al elevar al cuadrado y multiplicar por $q^2 \neq 0$ obtenemos $p^2 = 2q^2$. Así p^2 es par. Si p fuera impar, $p = 2k + 1$ y $p^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ sería impar. Por tanto p es par y podemos escribir $p = 2r$. Sustituimos: $4r^2 = 2q^2$, de donde $q^2 = 2r^2$. El mismo argumento obliga a que q sea par. Esto contradice que p/q estuviera reducida, porque ambos tendrían el factor dos. Concluimos que ningún racional tiene cuadrado dos.

Los reales incluyen los racionales y los irracionales. Un **irracional** es un real cuya distancia a cada número racional es estrictamente positiva; $\sqrt{2}$ es un ejemplo. La propiedad del valor absoluto permite reconocer esta condición: la distancia entre dos reales vale cero exactamente cuando ambos coinciden. Cada racional se compara por separado con el número dado; la densidad permite obtener distancias positivas tan pequeñas como se desee. Escribimos $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$. Esta notación organiza lo conocido, pero no construye por sí sola $\mathbb{R}$. Adoptamos el sistema real con sus operaciones y su orden, y explicitaremos una propiedad adicional que distingue su continuidad de la densidad de las fracciones.

Problema 17. Una contradicción que exige fracción reducida

Enunciado. ¿Por qué la prueba de irracionalidad de $\sqrt{2}$ empieza con una fracción reducida? ¿Bastaría descubrir que numerador y denominador son pares?

Solución. Una fracción arbitraria puede tener ambos términos pares: $2/4$ representa sin dificultad un racional. Por eso la paridad de ambos términos no sería una contradicción por sí sola. Todo racional positivo admite una representación reducida al dividir numerador y denominador por su máximo común divisor. La hipótesis de racionalidad nos permite elegir esa representación desde el comienzo. Deducir después que ambos términos son pares contradice exactamente esa elección, y así queda descartada la hipótesis. Es esencial identificar qué dos afirmaciones resultan incompatibles.

Problema 18. Una traslación conserva la irracionalidad

Enunciado. Prueba que $1 + \sqrt{2}$ es irracional.

Solución. Si $1 + \sqrt{2} = r$ fuera racional, restar el racional uno daría $\sqrt{2} = r - 1$. La diferencia de racionales es racional, contradiciendo el resultado anterior. Por tanto $1 + \sqrt{2}$ es irracional. El argumento se generaliza: para cualquier racional q e irracional α, $q + \alpha$ es irracional. No se extiende automáticamente a sumar dos irracionales: $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$ es racional.

Problema 19. El cuadrado creciente

Enunciado. Justifica que para $0 \leq a < b$ se cumple $a^2 < b^2$. ¿Se puede omitir la restricción de signo?

Solución. Factorizamos la diferencia: $b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$. El primer factor es positivo y el segundo también, pues $b > a \geq 0$ implica $b > 0$. La diferencia es positiva, como queríamos. Sin la restricción, $-3 < -2$ pero $9 > 4$, por lo que el orden se invierte en ese ejemplo. Esta prueba respalda las comparaciones de raíces usadas antes: entre números no negativos, comparar cuadrados es equivalente a comparar los propios números.

Lo que una expansión decimal afirma

Un decimal finito representa una fracción cuyo denominador es una potencia de diez: $0{,}375 = 375/1000 = 3/8$. Para producir decimales de una fracción usamos la división: cada resto determina la cifra siguiente. Si el resto llega a cero, el decimal termina. Si no llega a cero, solo hay finitos restos posibles para un denominador fijo; al repetirse un resto se repite desde allí la sucesión de cifras. Por eso todo racional tiene expansión decimal finita o finalmente periódica. Aquí «finalmente» permite una parte inicial que no se repite.

La recíproca también vale. Si un decimal tiene k cifras iniciales y un bloque de m cifras que se repite, multiplicar su valor por 10^{k+m} y por 10^k alinea las colas periódicas. Al restar, estas coinciden y dejan un entero. El número original queda expresado como un entero dividido por $10^k(10^m - 1)$, que no es cero. Para que este argumento sea legítimo hay que explicar qué valor tiene una expansión infinita.

Para un decimal no negativo, sus truncaciones t_n son los números que conservan las primeras n cifras tras la coma. Forman una sucesión no decreciente y acotada por la parte entera más uno. Definimos el valor del decimal como el **supremo** de estas truncaciones: el menor real que es mayor o igual que todas ellas. La existencia de ese supremo utiliza la completitud de $\mathbb{R}$, que precisaremos enseguida. Las truncaciones satisfacen

$$t_n \leq x \leq t_n + 10^{-n}.$$

Ninguna cifra posterior puede agregar más de una unidad del último lugar conservado. Se puede comprobar primero para cualquier cola finita sumando la serie finita de nueves y después tomar la menor cota superior. Estas cotas muestran que el decimal queda determinado: si dos reales distintos cumplieran todas, su distancia positiva sería a lo sumo 10^{-n} para todo n, imposible por la propiedad arquimediana. Para negativos definimos el valor como el opuesto de la expansión de su magnitud.

Así podemos operar con decimales periódicos por medio de sus truncaciones y cotas, sin imaginar una última cifra infinita. Multiplicar por una potencia de diez desplaza la coma porque lo hace en cada truncación y el error restante puede hacerse menor que cualquier cantidad positiva. El mismo control legitima restar las colas alineadas.

En particular, $0{,}999\ldots = 1$. La truncación con n nueves vale $1 - 10^{-n}$. El número uno es cota superior, y cualquier $y < 1$ deja una diferencia $1 - y > 0$. Elegimos n con $10^{-n} < 1 - y$ y entonces $1 - 10^{-n} > y$, de modo que y no es cota superior. Por tanto uno es el supremo. No queda una distancia positiva «infinitamente pequeña» entre ambos números reales.

Un mismo número puede tener dos escrituras decimales: $0{,}5000\ldots = 0{,}4999\ldots$. Usaremos como escritura habitual la que no acaba en una cola de nueves. Cuando hablamos de expansión no periódica para caracterizar irracionales, entendemos que no es finalmente periódica; la eventual duplicidad de los decimales finitos no crea números nuevos.

Problema 20. Un período puro

Enunciado. Expresa $x = 0{,}\overline{27}$ como fracción y comprueba su reducción.

Solución. El bloque tiene dos cifras. Multiplicamos por cien: $100x = 27{,}\overline{27}$. Al restar x las colas son idénticas y resulta $99x = 27$. Dividir por $99 \neq 0$ da $x = 27/99 = 3/11$. El procedimiento usa valores reales de las expansiones, justificados por las cotas de las truncaciones, y no una cancelación de cadenas sin significado. La división de tres entre once devuelve sucesivamente las cifras dos y siete y el mismo resto, comprobando el período.

Problema 21. Un período después de una cifra inicial

Enunciado. Convierte $x = 0{,}1\overline{6}$ en fracción.

Solución. La primera cifra no forma parte del período. Tenemos $10x = 1{,}\overline{6}$ y $100x = 16{,}\overline{6}$. Restamos estas dos igualdades: $90x = 15$, por lo que $x = 1/6$. Restar $10x - x$ no habría cancelado colas iguales desde la misma posición. La alineación indica qué potencias de diez conviene elegir y explica el denominador noventa.

Problema 22. Un decimal irracional construido

Enunciado. Prueba que $0{,}101001000100001\ldots$, con uno, dos, tres, cuatro y sucesivamente más ceros entre unos consecutivos, es irracional.

Solución. Hay infinitos unos y bloques de ceros de longitudes sin cota. Si las cifras fueran periódicas a partir de cierto lugar con período p, el bloque periódico debería contener un uno, pues siguen apareciendo infinitos unos. En una cola así, cualquier bloque de p cifras consecutivas contendría un uno: recorre todas las posiciones de un período. Pero nuestra cola contiene bloques de más de p ceros, una contradicción. El decimal no es finalmente periódico y por el teorema de expansión de racionales no puede ser racional. Decir solo «no se ve un patrón» no habría demostrado nada: aquí hay un patrón claro, pero no periódico.

Qué falta entre los racionales

El conjunto $S = \{q \in \mathbb{Q} : q \geq 0,\ q^2 < 2\}$ es no vacío, porque contiene cero, y tiene cota superior, por ejemplo dos. Dentro de los reales su menor cota superior es $\sqrt{2}$: todo elemento de S está por debajo de ella, y si $u < \sqrt{2}$, la densidad racional proporciona un racional entre $\max(0, u)$ y $\sqrt{2}$, cuyo cuadrado es menor que dos. Por tanto u no puede ser cota superior. Como $\sqrt{2}$ no es racional, S no tiene supremo racional.

La **completitud de los reales** afirma que todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ que esté acotado superiormente tiene supremo en $\mathbb{R}$. Una cota superior es un número mayor o igual que cada elemento del conjunto; el supremo es la menor de esas cotas. No exige pertenecer al conjunto, ni es lo mismo que un máximo. Esta propiedad es más fuerte que la densidad: $\mathbb{Q}$ tiene puntos entre sus propios puntos y aun así carece de la menor cota racional de S.

Trabajaremos con un sistema real completo y arquimediano provisto de las operaciones y el orden descritos. La recta ofrece una representación de ese sistema, y la completitud expresa la propiedad que permite asignar un valor real a las expansiones decimales y una longitud a la diagonal del cuadrado. Construir formalmente el sistema mediante cortes o sucesiones requiere

desarrollar otras herramientas; aquí la existencia del sistema completo forma parte de nuestras bases de trabajo.

Problema 23. Supremo y máximo

Enunciado. Halla, en $\mathbb{R}$, el supremo y el máximo, si existen, de $A = (0, 1)$ y $B = (0, 1]$.

Solución. Uno es cota superior de ambos. Si $u < 1$ y $u \leq 0$, el número $1/2$ pertenece a ambos y es mayor que u. Si $0 < u < 1$, el promedio $(u + 1)/2$ pertenece a ambos y es mayor que u. Ningún número menor que uno es cota superior; por tanto el supremo de ambos es uno. En B, uno pertenece al conjunto y es su máximo. En A no pertenece, y cualquier $a \in A$ puede superarse con $(a + 1)/2 \in A$, por lo que no hay máximo.

Problema 24. Una clasificación completa

Enunciado. Clasifica $\sqrt{2}$, $0{,}\overline{9}$, $-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$, indicando el menor conjunto de la cadena usual que contiene cada uno. Decide qué prueba cada caso sobre las operaciones con irracionales.

Solución. $\sqrt{2}$ es real irracional por la prueba de paridad. Su opuesto también es irracional: si $-\sqrt{2}$ fuera racional, su opuesto sería racional. $0{,}\overline{9} = 1$ es natural con nuestra convención. El producto $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ también es natural, por definición de raíz positiva. Así el producto de dos irracionales puede ser racional. Estos ejemplos no prueban que siempre lo sea: el producto de $\sqrt{2}$ y $1+\sqrt{2}$ vale $2+\sqrt{2}$, irracional por la prueba de traslación. Los irracionales no forman un sistema cerrado para el producto ni para la suma.

Ejercicios para trabajar sin profesor

En todos los ejercicios se usa la convención $0 \in \mathbb{N}$. Los ejercicios 1–15 consolidan herramientas básicas; 16–21 piden encadenar argumentos; 22–24 examinan las fronteras conceptuales del capítulo. Los resultados se justifican en el apartado siguiente.

1. Clasifica $-12/4$, $0/7$, $7/2$ y $8/2$ en el menor conjunto de la cadena $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ que los contiene.

2. Explica por qué $5/0$ y $0/0$ no definen números racionales, mientras que $0/5$ sí.

3. Calcula $-3 - (-8) + (-2)$ e interpreta el resultado mediante movimientos en la recta.

4. Ordena $-7/10$, $-2/3$ y $-3/5$ mediante un denominador positivo común.

5. Calcula $-2^2 + (-2)^2 + 3(4 - 6)$.

6. Calcula $(2/3 - 1/6) : (3/4)$ justificando la división.

7. A partir de $a < b$, con a, b reales, compara $5 - 3a$ y $5 - 3b$.

8. Halla $|-7|$, $|-2-3|$ y la distancia entre -2 y 3. Explica la diferencia entre $|a-b|$ y $|a|-|b|$ en este caso.

9. Escribe en intervalos los reales que cumplen $-3 \leq x < 2$. ¿Pertenecen -3 y 2?

10. Resuelve $|x + 1| < 4$ como condición de distancia.

11. Resuelve $|x - 2| \geq 1$ e indica sus extremos incluidos.

12. Halla $[-1, 3] \cap (2, 5)$ y $[-1, 3] \cup (2, 5)$.

13. Resuelve $5 - 3x < 11$ y comprueba el extremo y un punto interior.

14. Encuentra dos racionales diferentes entre $-1/3$ y 0, y demuestra que el primero que elijas no es el inmediatamente siguiente a $-1/3$.

15. Encuentra una fracción entre $\sqrt{3}$ y 2 y justifícala sin calculadora.

16. Prueba que entre dos racionales distintos hay un irracional. Puedes usar $\sqrt{2}$ y las propiedades de orden ya demostradas.

17. Demuestra que $3\sqrt{2}$ es irracional y explica por qué la afirmación «todo múltiplo racional de un irracional es irracional» necesita una excepción.

18. Escribe $0{,}125$ y $0{,}\overline{18}$ como fracciones reducidas.

19. Convierte $0{,}2\overline{7}$ en fracción alineando las colas.

20. Justifica $0{,}24999\ldots = 0{,}25$ mediante la cota de la diferencia con las truncaciones.

21. Explica por qué la división de 1 entre 7 debe terminar o volverse periódica aun antes de efectuarla. ¿Puede terminar?

22. Prueba que $A = \{q \in \mathbb{Q} : q < 1\}$ no tiene máximo, pero tiene supremo real. Indica si ese supremo pertenece a A.

23. Si $a < b$ son reales y un natural positivo n cumple $n(b-a) > 1$, explica por qué el primer entero $k > na$ produce un racional k/n estrictamente entre los extremos. ¿Qué fallaría usando solo $k \geq na$?

24. Un estudiante dice: «Como entre dos racionales siempre hay otro racional, todas las longitudes son racionales». Refuta el argumento y distingue densidad de completitud.

Soluciones desarrolladas

Ejercicio 1. El valor antes que su escritura

$-12/4 = -3$, entero no natural, de modo que su menor conjunto es $\mathbb{Z}$. $0/7 = 0$ es natural porque siete no es cero. $7/2$ es racional no entero: si fuera un entero k, tendríamos $2k = 7$, imposible porque el miembro izquierdo es par. Finalmente $8/2 = 4$ es natural. Todos son además racionales y reales por las inclusiones; pedir el menor conjunto no niega esas pertenencias.

Ejercicio 2. Existencia y unicidad de un cociente

Definir $5/0$ exigiría un x tal que $0x = 5$, imposible porque $0x = 0$ para todo real. Definir $0/0$ exigiría seleccionar un único x con $0x = 0$, pero todos sirven. En cambio $5x = 0$ tiene la solución única $x = 0$, pues cinco es no nulo y podemos dividir por él. Así $0/5 = 0$. Las dos primeras escrituras no son valores especiales de la división.

Ejercicio 3. Restar el negativo

Restar -8 es sumar su opuesto ocho: $-3 + 8 - 2 = 5 - 2 = 3$. Desde -3 nos movemos ocho unidades hacia la derecha y después dos hacia la izquierda. El desplazamiento total desde el origen termina en 3. Conservar el signo de -8 al quitar el paréntesis habría cambiado el sentido del primer movimiento.

Ejercicio 4. Unidades iguales

El denominador común treinta da $-21/30$, $-20/30$ y $-18/30$. Como $-21 < -20 < -18$, concluimos $-7/10 < -2/3 < -3/5$. Todos los denominadores empleados son positivos, así que

no aparece inversión de orden al comparar numeradores. La fracción más negativa queda a la izquierda.

Ejercicio 5. Base y exponente

La primera potencia es $-2^2 = -4$, porque el exponente afecta al dos antes del signo exterior. La segunda es $(-2)^2 = 4$. El paréntesis restante da $4-6 = -2$ y el producto $3(-2) = -6$. Sumando obtenemos $-4+4-6 = -6$. El par de potencias se cancela; ambas no tienen el mismo valor.

Ejercicio 6. Primero el bloque agrupado

En el paréntesis, $2/3 - 1/6 = 4/6 - 1/6 = 3/6 = 1/2$. El divisor $3/4$ es no nulo, de modo que multiplicamos por $4/3$: $(1/2)(4/3) = 4/6 = 2/3$. Como comprobación, $(2/3)(3/4) = 1/2$, el dividendo original. Esta verificación respalda tanto el orden como la inversión del divisor.

Ejercicio 7. Comparación sin valores particulares

Multiplicar $a < b$ por -3 invierte la desigualdad: $-3a > -3b$. Sumar cinco conserva ese orden y resulta $5-3a > 5-3b$. También podemos restar: $(5-3a)-(5-3b) = 3(b-a) > 0$. Esta segunda prueba muestra directamente que la diferencia es positiva para todos los $a < b$.

Ejercicio 8. Las barras no distribuyen la resta

Por definición $|-7| = 7$ y $|-2-3| = |-5| = 5$. La distancia entre -2 y 3 también es $|-2-3| = 5$. Sin embargo $|-2| - |3| = 2 - 3 = -1$, que ni siquiera es no negativo. Por tanto no podemos sustituir $|a-b|$ por $|a|-|b|$. Las barras se aplican al valor de toda la expresión que contienen.

Ejercicio 9. Un extremo sí y otro no

El conjunto es $[-3, 2)$. El corchete izquierdo indica que -3 pertenece, pues satisface la igualdad permitida en $-3 \le x$. El paréntesis derecho indica que 2 no pertenece, pues no cumple $x < 2$. Todos los reales intermedios sí satisfacen ambas desigualdades.

Ejercicio 10. El centro es negativo

$|x+1| = |x-(-1)|$ es la distancia a -1. Pedimos que sea menor que cuatro: $-4 < x+1 < 4$. Restamos uno en los tres miembros y obtenemos $-5 < x < 3$, conjunto $(-5, 3)$. En ambos extremos la distancia vale cuatro y se excluyen; en el centro vale cero y se incluye.

Ejercicio 11. Dos ramas cerradas

Estar a distancia al menos uno de dos significa $x-2 \le -1$ o $x-2 \ge 1$. Sumando dos obtenemos $x \le 1$ o $x \ge 3$. El conjunto es $(-\infty, 1] \cup [3, \infty)$. Uno y tres se incluyen porque dan distancia uno; dos se excluye porque da cero. Los infinitos llevan paréntesis por no ser puntos de la recta real.

Ejercicio 12. Coincidencia y reunión

En la intersección debemos estar por encima de dos y a lo sumo en tres, así que obtenemos $(2, 3]$. El dos no cumple la segunda condición; el tres cumple ambas. En la unión basta una y los intervalos se superponen, de modo que obtenemos $[-1, 5)$. El cinco no pertenece a ninguno, mientras que todos los puntos desde menos uno hasta antes de cinco pertenecen a alguno.

Ejercicio 13. Dividir cambia el sentido

Restamos cinco: $-3x < 6$. Dividimos por -3 e invertimos el signo: $x > -2$. Por equivalencia de los pasos el conjunto es $(-2, \infty)$. En $x = -2$ la expresión inicial vale 11 y la desigualdad estricta falla. El punto interior $x = 0$ da $5 < 11$. La respuesta incluye el lado correcto del extremo y lo excluye a él.

Ejercicio 14. Un punto antes del elegido

Podemos elegir $-1/6$ y $-1/12$, pues $-1/3 < -1/6 < -1/12 < 0$. El promedio de $-1/3$ y $-1/6$ es $-1/4$. Se verifica $-1/3 < -1/4 < -1/6$ al comparar con denominador doce: $-4 < -3 < -2$. Así el primer elegido no es un sucesor inmediato. El mismo promedio refutaría cualquier supuesto sucesor racional.

Ejercicio 15. Cuadrados exactos

La fracción $7/4$ es positiva, al igual que los extremos. Como $3 < 49/16 < 4$, obtenemos $\sqrt{3} < 7/4 < 2$. Para verificar la primera comparación basta $48 < 49$; para la segunda, $49 < 64$. La propiedad creciente del cuadrado en los no negativos convierte estas comparaciones exactas en las de las longitudes.

Ejercicio 16. Un irracional entre racionales

Sean $a < b$ racionales. El número $\alpha = a + (b-a)/\sqrt{2}$ está entre ambos, porque $1 < \sqrt{2} < 2$ implica $0 < 1/\sqrt{2} < 1$. Si α fuera racional, entonces $\alpha - a$ sería racional no nulo y $\sqrt{2} = (b-a)/(\alpha - a)$ sería racional, contradicción. Así α es irracional y pertenece a (a, b). No hemos necesitado afirmar todavía densidad de los irracionales entre cualesquiera extremos reales.

Ejercicio 17. El factor cero

Si $3\sqrt{2} = r \in \mathbb{Q}$, dividir por tres daría $\sqrt{2} = r/3 \in \mathbb{Q}$, imposible. En general funciona para un racional $q \neq 0$: de $q\alpha \in \mathbb{Q}$ se deduciría $\alpha = (q\alpha)/q \in \mathbb{Q}$. El cero es la excepción, pues $0\alpha = 0$ siempre es racional. La hipótesis de factor no nulo hace posible la división que sostiene el argumento.

Ejercicio 18. Finito y periódico

$0{,}125 = 125/1000 = 1/8$ al dividir ambos términos por 125. Para $x = 0{,}\overline{18}$, desplazamos dos lugares: $100x = 18{,}\overline{18}$. Al restar x obtenemos $99x = 18$ y por tanto $x = 18/99 = 2/11$. En ambos casos los denominadores son no nulos; la primera expansión termina y la segunda repite un bloque.

Ejercicio 19. Alinear antes de restar

Sea $x = 0{,}2\overline{7}$. Entonces $10x = 2{,}\overline{7}$ y $100x = 27{,}\overline{7}$. Restar produce $90x = 25$, de donde $x = 25/90 = 5/18$. La cifra inicial dos no se repite, por eso necesitamos desplazar primero una posición y luego una más. Las colas que cancelamos tienen exactamente las mismas cifras en las mismas posiciones decimales.

Ejercicio 20. No queda una diferencia positiva

La truncación con $n \geq 3$ cifras del decimal dado es $t_n = 0{,}25 - 10^{-n}$. Su valor x satisface $t_n \leq x \leq 0{,}25$. Así $0 \leq 0{,}25 - x \leq 10^{-n}$ para todos esos n. Si la diferencia fuera positiva, elegiríamos n tan grande que 10^{-n} fuera menor que ella, contradicción. La diferencia es cero y $x = 0{,}25$. Esta prueba no presupone una última cifra nueve.

Ejercicio 21. Los restos son estados de la división

Al dividir por siete, los restos posibles son $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Si aparece cero la expansión termina; si nunca aparece, algún resto entre uno y seis se repite y desde entonces repite cifras. Para decidir qué ocurre con $1/7$, seguimos sus restos desde el resto inicial 1: al multiplicar cada resto por diez y dividir entre siete, obtenemos sucesivamente $3, 2, 6, 4, 5, 1$. Ninguno es cero y el último devuelve el estado inicial. Desde allí se repiten los mismos pasos y cifras. Por tanto la expansión es periódica. No hemos necesitado calcular el bloque para probar su existencia.

Ejercicio 22. Una cota alcanzable por fuera

Uno es cota superior de A, aunque no es elemento. Si $u < 1$ es real, la densidad racional entre u y uno proporciona un q con $u < q < 1$; ese q pertenece a A, así que u no es cota superior. Por tanto el supremo real es uno. Si $q \in A$, el racional $(q + 1)/2$ también pertenece y es mayor que q, lo que descarta un máximo. El supremo puede ser racional y aun así quedar fuera del conjunto.

Ejercicio 23. La desigualdad estricta importa

El primer entero estrictamente mayor que na cumple $na < k \leq na + 1$. Como $n(b - a) > 1$, tenemos $na + 1 < nb$. Uniendo ambas obtenemos $na < k < nb$, y al dividir por $n > 0$ resulta $a < k/n < b$. Si usáramos solo $k \geq na$, en el caso de que na fuera entero podríamos elegir $k = na$ y obtener $k/n = a$, fuera del intervalo abierto. La elección estricta evita ese caso límite.

Ejercicio 24. Densidad no basta para todas las longitudes

La propiedad de tener un racional entre dos racionales no afirma que todo punto o toda longitud sea racional. La diagonal del cuadrado unitario es positiva y su cuadrado vale dos; la prueba de paridad demuestra que su longitud no es racional. La completitud pide que cada conjunto real no vacío y acotado superiormente posea una menor cota superior real. El conjunto de racionales no negativos con cuadrado menor que dos tiene esa cota en $\mathbb{R}$, pero no en $\mathbb{Q}$. Así la densidad permite intercalar puntos sin garantizar que estén presentes todas las cotas necesarias.

Diagnóstico de salida

Sin mirar las soluciones, explica por qué $-4 < -1$ aunque $|-4| > |-1|$; construye un racional entre dos racionales dados; reconstruye el paso de la prueba de irracionalidad que obliga a que el denominador sea par; y justifica por qué $0{,}\overline{9}$ no deja una distancia positiva hasta uno. Una respuesta satisfactoria distingue orden de magnitud, usa el promedio con desigualdades estrictas, parte de una fracción reducida y utiliza las cotas 10^{-n}. Si el último argumento todavía resulta difícil, vuelve al problema 23 para distinguir cota y supremo, y después al ejercicio 20 para reconocer cómo las cotas decimales fuerzan una igualdad.

En el reparto inicial, admitir partes de una ficha hizo posible expresar con exactitud cuánto recibía cada persona. El tamaño de esas partes puede cambiar: una mitad se convierte en dos cuartos y sigue siendo la misma cantidad. Esta libertad de representación, junto con las reglas de orden y las restricciones de cada operación, permite calcular con fracciones y comprobar si el resultado responde al reparto planteado.

CAPÍTULO 2

Fracciones, razones, proporciones y porcentajes

Una receta mezcla tres vasos de jugo concentrado con dos de agua. Para preparar el doble podemos usar seis y cuatro; si usamos cuatro y tres, en cambio, la bebida cambia. Añadir un vaso a cada ingrediente conserva la diferencia entre las cantidades, pero altera la mezcla. Lo que necesitamos conservar es la relación entre ellas.

La misma dificultad aparece al comparar precios, repartir un trabajo o interpretar un descuento. Antes de hacer una cuenta conviene reconocer qué representa cada cantidad y qué estamos tomando como unidad. «Tres cuartos» puede describir una longitud, un reparto o una operación sobre otra cantidad. La escritura se mantiene; el significado nace del problema.

Sumar $1/2+1/3$ exige expresar ambas cantidades en partes del mismo tamaño; así obtendremos $5/6$. Tomar $3/4$ de doce exige reconocer cuál es el todo sobre el que actúa la fracción y da nueve. Para recuperar un valor que aumentó un 10% y llegó a 110, tendremos que deshacer el factor del aumento: el inicio era cien. En cada caso, identificar la unidad o la base permite escoger la operación y comprobar su resultado.

Elegir la unidad

Cortamos una cinta de un metro en cuatro partes iguales y tomamos tres. Cada parte mide $1/4$ de metro; juntas miden $3/4$ de metro. La igualdad de las partes es esencial: elegir tres de cuatro trozos de longitudes distintas no garantiza haber elegido tres cuartos de la cinta.

También podemos repartir tres metros entre cuatro personas. Cada una recibe $3/4$ de metro, porque cuatro veces esa longitud reconstruye los tres metros. La fracción aparece aquí como cociente. Si pedimos tres cuartos de una cinta de doce metros, aparece como operador: dividimos los doce metros en cuatro partes iguales y tomamos tres. El resultado es $12(3/4) = 9$ metros. Siempre debemos poder identificar el todo, la unidad y el tamaño de una parte.

Estas interpretaciones permiten entender fracciones mayores que uno. Cinco cuartos de metro son una unidad completa y otro cuarto. Para una cantidad negativa, como un saldo, la fracción puede llevar signo: $-3/4$ de unidad es el opuesto de $3/4$. El modelo de trozos sirve para cantidades no negativas; las leyes de los racionales extienden las operaciones a los signos.

Problema 1. Una fracción, tres situaciones

Enunciado. Da significado a $3/4$ como parte de una unidad, como cociente y como operador. Calcula tres cuartos de veinte metros.

Solución. Podemos tomar tres de las cuatro partes iguales de un metro; repartir tres metros por igual entre cuatro personas; o aplicar a una longitud la operación de dividirla por cuatro y multiplicarla por tres. En las dos primeras situaciones obtenemos $3/4$ de metro. En la tercera, la cantidad inicial puede ser cualquiera: para veinte metros, cada cuarto mide cinco y tres cuartos

miden quince. La respuesta es 15 metros. La fracción $3/4$ sola es un número; la longitud que produce depende de la unidad o cantidad sobre la que actúe.

Dividir cada cuarto en tres partes iguales convierte los cuartos en doceavos. Los tres cuartos ocupan nueve de las nuevas partes: $3/4 = 9/12$. En general, para enteros a, b, k con $b \neq 0$ y $k \neq 0$,

$$\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}.$$

Podemos comprobarlo sin depender del dibujo: las dos fracciones son iguales porque sus productos cruzados, $a(kb)$ y $b(ka)$, coinciden. Simplificar consiste en recorrer esta igualdad en sentido inverso. Solo se pueden cancelar factores comunes de todo el numerador y todo el denominador. En $(2 + 3)/2$ el dos no es factor de la suma completa; cancelar ese sumando cambiaría $5/2$ por $1 + 3 = 4$.

Todo racional puede escribirse con denominador positivo. Si numerador y denominador son enteros, dividir ambos por su máximo común divisor da una fracción reducida. Para los no nulos este divisor existe porque el conjunto de divisores positivos comunes es finito y contiene al uno. Para el cero usamos $0 = 0/1$.

Problema 2. Reducir también exige cuidar el signo

Enunciado. Reduce $84/(-126)$ a una fracción con denominador positivo y sin factores comunes.

Solución. Pasamos el signo al numerador: $84/(-126) = -84/126$. Los números 84 y 126 son $2 \cdot 42$ y $3 \cdot 42$, de modo que dividimos ambos términos por 42 y obtenemos $-2/3$. Los enteros dos y tres no comparten ningún divisor mayor que uno; la fracción está reducida. Comprobamos la equivalencia: $(-84) \cdot 3 = 126 \cdot (-2) = -252$. El valor negativo no desaparece al simplificar.

Operar con partes del mismo tamaño

Para sumar medio metro y un tercio de metro debemos contar partes comparables. Un sexto de metro sirve: el medio contiene tres sextos y el tercio contiene dos. Por tanto $1/2 + 1/3 = 5/6$. La suma $2/5$ surgiría de contar piezas de distinto tamaño como si fueran iguales.

Para denominadores no nulos b, d, multiplicamos las dos fracciones por formas adecuadas de uno:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

La resta se obtiene del mismo modo cambiando la suma del numerador por una resta. El producto bd siempre sirve de denominador común; un múltiplo común menor puede ahorrar cuentas. Los signos se manejan con las reglas del capítulo anterior.

Problema 3. Restar sin cambiar de unidad

Enunciado. Calcula $5/6 - 3/8$ y explica la elección del denominador.

Solución. El número 24 es múltiplo de seis y de ocho. Cada sexto contiene cuatro veinticuatroavos y cada octavo contiene tres; así $5/6 = 20/24$ y $3/8 = 9/24$. Al restar obtenemos $11/24$. La fracción

está reducida porque once no divide veinticuatro. Como $5/6 > 3/4$ y $3/8 < 1/2$, la diferencia debe ser positiva; el resultado respeta esa comparación.

Tomar dos tercios de tres cuartos permite descubrir la multiplicación. Dividimos la unidad en cuatro columnas iguales y cada columna en tres filas iguales. Hay doce celdas del mismo tamaño. Tres columnas ocupan $3/4$ de la unidad; dos de sus tres filas ocupan seis celdas. Por eso $(2/3)(3/4) = 6/12 = 1/2$.



La doble partición explica, para fracciones no negativas de denominadores positivos, por qué se multiplican numeradores y denominadores: cada celda ocupa $1/(bd)$ de la unidad y se eligen ac celdas. Si alguna fracción supera uno, repetimos las unidades necesarias; el tamaño de cada celda y el número de celdas elegidas siguen la misma regla. Se obtiene $(a/b)(c/d) = ac/(bd)$. La distributividad y las reglas de signos extienden la identidad a todos los racionales con denominadores no nulos. Una fracción que actúa sobre otra toma esa segunda cantidad como su todo inmediato; el resultado se expresa respecto de la unidad inicial.

Problema 4. Una parte de lo que queda

Enunciado. Una reserva contiene $3/4$ de su capacidad. Se consume $2/3$ del contenido que tiene. ¿Qué fracción de la capacidad se consume y cuál queda?

Solución. La base del consumo es el contenido actual, $3/4$ de la capacidad. Se consume $(2/3)(3/4) = 1/2$ de la capacidad. Para hallar lo que queda restamos a lo que había: $3/4 - 1/2 = 1/4$. También podemos tomar el tercio que no se consumió: $(1/3)(3/4) = 1/4$. Ambos caminos coinciden. Restar $2/3$ directamente a $3/4$ habría confundido una fracción del contenido con una fracción de la capacidad.

Dividir responde a una pregunta distinta. Si tenemos $3/4$ de metro y cada pieza mide $1/8$ de metro, caben seis piezas. La igualdad $(1/8) \cdot 6 = 3/4$ comprueba la respuesta. En general, dividir a/b por un racional no nulo c/d consiste en hallar el número x que cumple $(c/d)x = a/b$. Multiplicar ambos lados por d/c da

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b}\frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}, \qquad b, c, d \neq 0.$$

El inverso aparece porque deshace la multiplicación por el divisor. La condición de divisor distinto de cero asegura que ese inverso existe y que la ecuación determina un único cociente, como vimos al estudiar la división en el capítulo anterior. El cociente puede ser mayor que el dividendo: al medir una longitud con unidades pequeñas, obtenemos un número grande de esas unidades.

Problema 5. Medir cuántas veces cabe

Enunciado. ¿Cuántas porciones de $7/15$ de litro representa una cantidad de $7/10$ de litro? Admite una fracción de porción.

Solución. Buscamos x tal que $(7/15)x = 7/10$. Como $7/15 \neq 0$, multiplicamos por $15/7$ y obtenemos $x = (7/10)(15/7) = 3/2$. Hay una porción y media. La comprobación es $(3/2)(7/15) = 21/30 = 7/10$. Si solo se admitieran porciones completas, podríamos servir una y sobrarían $7/10 - 7/15 = 7/30$ de litro; esa sería otra pregunta.

Problema 6. La barra agrupa una suma

Enunciado. Calcula $\dfrac{1}{1/2+1/3}$ y compara con $\dfrac{1}{1/2}+\dfrac{1}{1/3}$.

Solución. En la primera expresión sumamos el denominador: $1/2+1/3=5/6\neq 0$. Su inverso es $6/5$. En la segunda invertimos por separado y sumamos: $2+3=5$. Los resultados son distintos porque las operaciones solicitadas son distintas. La primera respuesta se comprueba con $(5/6)(6/5)=1$. La inversión de una suma no se distribuye entre sus términos.

Operaciones con fracciones

Estas identidades valen para racionales y, leídas como cocientes, también para expresiones reales definidas. Las condiciones que acompañan a cada fila son parte de la regla.

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Fracciones equivalentes	$a/b=(ka)/(kb)$, con $b,k\neq 0$. Se cancelan factores completos, no sumandos.
Igualdad	$a/b=c/d \iff ad=bc$, con $b,d\neq 0$.
Suma	$a/b+c/d=(ad+bc)/(bd)$, con $b,d\neq 0$.
Resta	$a/b-c/d=(ad-bc)/(bd)$, con $b,d\neq 0$.
Producto	$(a/b)(c/d)=ac/(bd)$, con $b,d\neq 0$.
Cociente	$(a/b):(c/d)=ad/(bc)$, con $b,c,d\neq 0$. La fracción divisora debe ser no nula.

Pruebas. Apéndice: «Fracciones: representantes y operaciones».

Comparar mediante una razón

En la receta inicial, por cada tres vasos de concentrado se usan dos de agua. La razón concentrado/agua es $3/2$; la razón concentrado/bebida es $3/5$, si los volúmenes se suman. Son comparaciones diferentes. La escritura $3:2$ conserva el orden de las cantidades; invertirlo da $2:3$.

Una razón entre cantidades de la misma magnitud se vuelve un número sin unidad al expresarlas en la misma unidad: $150\,\text{cm}/(2\,\text{m})=150/200=3/4$. Entre magnitudes distintas puede quedar una unidad compuesta: litros por minuto, kilómetros por hora o pesos por kilogramo. A estas razones usadas para describir un cambio o un rendimiento las llamaremos tasas. Su interpretación exige conservar las unidades.

Dos razones forman una proporción cuando son iguales. Para $b,d\neq 0$, la equivalencia

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad\Longleftrightarrow\quad ad=bc$$

se demuestra multiplicando por bd o dividiendo por él. El producto cruzado verifica una igualdad de razones ya planteada con sentido; no decide por sí mismo si las magnitudes de un problema son proporcionales.

Problema 7. Del cociente entre grupos a la parte del total

Enunciado. En un grupo, la razón entre chicos y chicas es $3 : 5$. Hay 25 chicas. ¿Cuántos chicos hay y qué fracción del total representan?

Solución. Las cinco partes de chicas corresponden a veinticinco personas, de modo que cada parte contiene cinco. Las tres partes de chicos contienen quince. El total es cuarenta y la fracción de chicos es $15/40 = 3/8$. La razón chicos/chicas es $15/25 = 3/5$, mientras que chicos/total es $3/8$. No se pueden intercambiar los denominadores: cada uno nombra una base distinta.

Problema 8. Repartir conservando una receta

Enunciado. Se preparan 750 mililitros de bebida con concentrado y agua en razón $3 : 2$. Supón que los volúmenes se suman. ¿Cuánto se usa de cada ingrediente?

Solución. La bebida contiene cinco partes iguales de volumen. Cada parte mide $750/5 = 150$ mililitros. El concentrado ocupa tres partes, 450 mililitros, y el agua dos, 300. Sumamos para comprobar el total: $450 + 300 = 750$; dividimos para comprobar la receta: $450/300 = 3/2$. La hipótesis sobre la suma de volúmenes permite pasar de las partes al volumen final.

Cuando una razón permanece constante

Si cada cuaderno cuesta lo mismo y no hay cargos adicionales, el precio total es el número de cuadernos multiplicado por ese precio unitario. Diremos que dos cantidades guardan proporcionalidad directa cuando existe una constante k tal que $y = kx$ en todo el dominio considerado. Para $x \neq 0$, equivale a que $y/x = k$. En contextos de cantidades positivas tomamos $k > 0$; el caso $k = 0$ describe una cantidad siempre nula y suele excluirse al hablar de proporción entre cantidades positivas.

La constancia del precio unitario permite pasar de una compra a cualquier otra dentro del dominio del modelo: duplicar x duplica y porque ambas cantidades siguen ligadas por el mismo factor. Para justificar el modelo necesitamos esa condición general, que puede proceder del enunciado o adoptarse expresamente como hipótesis; comprobar una duplicación aislada solo aporta un caso. La gráfica representa cada par (x, y) con x en el eje horizontal e y en el vertical. Los puntos de $y = kx$ quedan sobre una recta que pasa por el origen, si este pertenece al dominio. Cuando contamos cuadernos, seleccionamos de esa recta los puntos de abscisa entera; la recta completa corresponde a extender la relación a otras entradas.

Problema 9. Recuperar el valor de una unidad

Enunciado. Tres cuadernos iguales cuestan 4 200 pesos en una venta sin descuentos ni cargos adicionales. ¿Cuánto cuestan cinco?

Solución. Cada cuaderno cuesta $4\,200/3 = 1\,400$ pesos. Cinco cuestan $5 \cdot 1\,400 = 7\,000$. La razón precio/cantidad es la misma: $4\,200/3 = 7\,000/5$. La proporcionalidad se apoya en que cada cuaderno aporta el mismo precio y no existe un cargo fijo. Multiplicar 4 200 por $5/3$ expresa el mismo razonamiento de una sola vez.

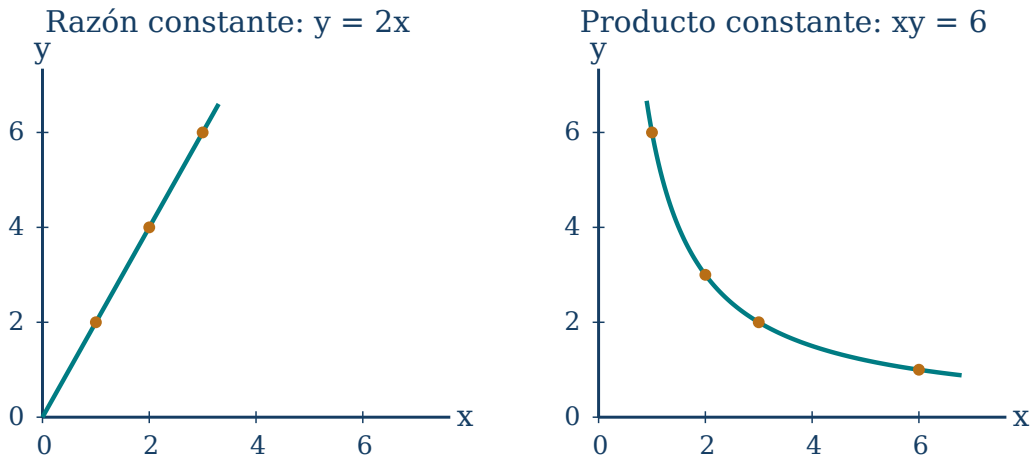
Problema 10. Una diferencia constante no basta

Enunciado. Un servicio cobra 1 000 pesos de cargo fijo y 500 por cada unidad usada. Dos unidades cuestan 2 000 y cuatro cuestan 3 000. ¿Hay proporcionalidad directa? ¿Cuánto cuestan seis unidades?

Solución. Las razones son $2\,000/2 = 1\,000$ y $3\,000/4 = 750$ pesos por unidad; no coinciden. El modelo es $y = 1\,000 + 500x$, porque al cargo fijo se suma el uso. Seis unidades cuestan $1\,000 + 500 \cdot 6 = 4\,000$ pesos. Usar una regla de tres con el dato de dos unidades daría 6 000, que contaría el cargo fijo tres veces. La regularidad del incremento describe una relación afín; su estudio general vendrá más adelante.

Si cuatro personas se reparten por igual una tarea de sesenta horas de trabajo individual, cada una realiza quince horas. Con seis personas serían diez horas cada una. El producto número de personas por tiempo permanece en sesenta. Es un modelo ideal: supone igual rendimiento, trabajo divisible y posibilidad de realizarlo en paralelo.

Para cantidades positivas, hay proporcionalidad inversa cuando $xy = K$ con $K > 0$, o equivalentemente $y = K/x$. Multiplicar x por $c > 0$ divide y por c. La gráfica ya no es una recta: sus puntos se acercan al eje horizontal al aumentar x, sin tocarlo para ningún x finito. Una dependencia decreciente no tiene por qué ser inversamente proporcional; también debe conservar el producto.



Problema 11. Más personas, bajo hipótesis precisas

Enunciado. Cuatro personas completan una tarea en quince horas. ¿Cuánto tardarían seis, si todas rinden igual, la tarea se puede dividir y no hay pérdidas al coordinarse?

Solución. El trabajo requerido equivale a $4 \cdot 15 = 60$ horas de una persona. Con seis trabajando simultáneamente, el tiempo es $60/6 = 10$ horas. El producto $6 \cdot 10$ recupera las sesenta horas de trabajo. No estamos afirmando que toda tarea real se acelere así: si una etapa debe esperar a otra, o si el rendimiento cambia, el producto podría dejar de ser constante.

Problema 12. Leer dos invariantes en una tabla

Enunciado. Para $x = 1, 2, 4$, las cantidades de una primera tabla son $y = 2, 4, 8$; las de una segunda, $y = 12, 6, 3$. Identifica la relación en cada tabla y explica qué se puede afirmar fuera de los datos.

Solución. En la primera tabla los cocientes y/x valen dos; sus datos son compatibles con $y = 2x$. En la segunda los productos xy valen doce; son compatibles con $y = 12/x$. Las tablas verifican la regla en sus tres entradas. Para usarla en otro valor debemos asumir ese modelo o justificarlo con las condiciones del fenómeno. Ningún número finito de entradas determina por sí solo una ley sobre todos los positivos.

Problema 13. Dos factores que actúan a la vez

Enunciado. Cuatro máquinas producen 1 200 piezas en seis horas. ¿Cuántas producirán seis máquinas en cinco horas, si el rendimiento de cada una es constante e idéntico y sus producciones se suman?

Solución. Las cuatro máquinas acumularon $4 \cdot 6 = 24$ horas de máquina. Su rendimiento fue $1\,200/24 = 50$ piezas por hora de máquina. Las seis máquinas durante cinco horas acumulan treinta horas de máquina; producirán $50 \cdot 30 = 1\,500$ piezas. También se obtiene $1\,200(6/4)(5/6) = 1\,500$. Un factor aumenta la cantidad de máquinas y el otro reduce el tiempo; las hipótesis permiten multiplicarlos.

Problema 14. La escala de un área

Enunciado. Un plano usa escala $1 : 25\,000$. Una longitud mide 3,6 centímetros y una región tiene área de 9 centímetros cuadrados en el plano. Obtén la longitud y el área correspondientes, suponiendo una reducción geométrica uniforme.

Solución. Un centímetro representa 25 000 centímetros, es decir, 250 metros. La longitud buscada es $3{,}6 \cdot 250 = 900$ metros. Para el área hay dos dimensiones que cambian: un cuadrado de un centímetro de lado representa un cuadrado de 250 metros de lado, con área 62 500 metros cuadrados. Nueve centímetros cuadrados representan $9 \cdot 62\,500 = 562\,500$ metros cuadrados. Multiplicar el área solo por 250 confundiría una longitud con una superficie; el factor de área es 250^2 cuando comparamos estas unidades.

Problema 15. Una tasa conserva sus unidades

Enunciado. Una máquina llena botellas de 3/4 de litro con un caudal constante de tres litros por minuto. ¿Cuánto tarda en llenar veinte botellas, sin tiempos de cambio ni pérdidas?

Solución. El volumen total es $20(3/4) = 15$ litros. Si el tiempo es t minutos, la máquina entrega $3t$ litros; por tanto $t = 15/3 = 5$ minutos. Las unidades también lo muestran: litros divididos por litros por minuto dan minutos. Dividir veinte por tres mezclaría un número de botellas con un caudal medido en litros por minuto.

Relaciones proporcionales

La fórmula se usa cuando la constancia ha sido justificada o adoptada como hipótesis del modelo. Una coincidencia aislada no demuestra proporcionalidad.

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Proporción	$a/b = c/d \iff ad = bc$, con $b, d \neq 0$ y las razones planteadas con unidades compatibles.
Proporcionalidad directa	$y = kx$ en todo el dominio. Para $x \neq 0$, equivale a $y/x = k$. En cantidades positivas se toma $k > 0$.
Proporcionalidad inversa	$xy = K \iff y = K/x$, con $x, y > 0$ y $K > 0$.
Cambio de escala	En el modelo directo, sustituir x por cx multiplica y por c; en el inverso, divide y por c. Se supone $c > 0$ y entradas admitidas por el dominio.

Pruebas. Apéndice: «Razones y proporcionalidad».

Un porcentaje necesita una base

Decir $p\%$ de una cantidad B significa multiplicarla por $p/100$. Así 18% de 250 es $(18/100)250 = 45$. Si una parte es A y el todo de referencia es $B \neq 0$, su porcentaje respecto de esa base es $100A/B$. En los problemas de partes de un todo, la base será positiva y la parte estará entre cero y la base; en otras comparaciones un porcentaje puede superar cien.

Pasar de una fracción a un porcentaje consiste en expresar la misma razón con cien como referencia. Por ejemplo, $3/8 = 0{,}375 = 37{,}5\%$. El símbolo de porcentaje ya incluye una división por cien: 0,375% es 0,00375, no 0,375.

Problema 16. Hallar una parte y comprobarla

Enunciado. En un conjunto de 250 piezas, el 18% necesita revisión. ¿Cuántas piezas son y cuántas no la necesitan?

Solución. Una centésima parte del conjunto son $250/100 = 2{,}5$ piezas como unidad de cálculo. Dieciocho centésimas son $18 \cdot 2{,}5 = 45$ piezas, un número entero como exige el recuento final. Quedan $250 - 45 = 205$. Comprobamos $45/250 = 0{,}18$. Si los datos hubieran dado una cantidad no entera de piezas, no podríamos redondearla sin aclarar que el porcentaje era aproximado.

Un aumento del $p\%$ sobre una cantidad inicial positiva B produce

$$B + \frac{p}{100}B = B\left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Un descuento del $p\%$, con $0 \leq p \leq 100$, produce $B(1 - p/100)$. Los factores se obtienen separando la cantidad inicial y su cambio. Para recuperar el inicio dividimos el resultado por el factor, siempre que no sea cero. Un descuento del cien por ciento anula toda cantidad inicial y borra la información necesaria para recuperarla.

Problema 17. El precio antes del descuento

Enunciado. Después de un descuento del 20%, un precio queda en 480 unidades monetarias. ¿Cuál era el precio original?

Solución. Después del descuento se conserva el 80% del precio inicial B. La ecuación es $0{,}8B = 480$, y como $0{,}8 \neq 0$, obtenemos $B = 480/0{,}8 = 600$. Comprobamos: el descuento es 120 y $600 - 120 = 480$. Sumar el 20% de 480 daría 576, porque usaría como base el precio ya rebajado.

La variación relativa entre un valor inicial positivo B y uno final F es $(F-B)/B$; en porcentaje es $100(F-B)/B$. Se divide por el valor inicial porque se pregunta qué fracción de aquel valor representa el cambio. Si el inicial es cero, esta variación relativa no está definida; podemos informar la diferencia absoluta. Con bases negativas hay convenciones específicas según el contexto, por lo que aquí trabajaremos con bases positivas.

Problema 18. El regreso usa otra base

Enunciado. Una cantidad pasa de 120 a 150 y luego vuelve a 120. Calcula el porcentaje de aumento y el de disminución.

Solución. El aumento es treinta sobre una base de ciento veinte: $30/120 = 1/4 = 25\%$. El regreso reduce treinta sobre una base de ciento cincuenta: $30/150 = 1/5 = 20\%$. La diferencia absoluta es la misma, pero las bases no. Los factores se comprueban con $120(1{,}25) = 150$ y $150(0{,}8) = 120$.

Cambios que se encadenan

Para aplicar dos cambios seguidos, cada uno actúa sobre el resultado del anterior. Si los cambios relativos son r y s —escritos como números, no como porcentajes enteros—, el factor final es $(1 + r)(1 + s)$. Al desarrollar obtenemos $1 + r + s + rs$. El término rs recoge el cambio que el segundo factor aplica al incremento o a la disminución producida por el primero. El resultado incluye esa contribución además de la suma de los dos cambios relativos. El modelo admite disminuciones mediante valores negativos, siempre que los factores respeten las restricciones de la cantidad estudiada.

Problema 19. Subir y bajar lo mismo

Enunciado. Un valor inicial positivo aumenta un 20% y después disminuye un 20%. Obtén su variación neta sin elegir un valor inicial particular.

Solución. Si el valor inicial es $B > 0$, el final es $B(1{,}2)(0{,}8) = 0{,}96B$. Se conserva el 96% del inicio: la disminución neta es del 4%. La segunda reducción se calcula sobre una cantidad ya aumentada. El argumento vale para todo $B > 0$ porque el cociente final/inicial es siempre 0,96.

Problema 20. Dos descuentos y su equivalente

Enunciado. Un precio recibe un descuento del 15% y luego otro del 10%. ¿Qué descuento único produce el mismo resultado? ¿Importa el orden bajo estas condiciones?

Solución. Los factores son 0,85 y 0,90. Su producto es 0,765, así que se conserva el 76,5% y el descuento equivalente es del 23,5%. El orden no cambia el producto, por conmutatividad. Esto

supone que ambos descuentos se aplican sucesivamente a todo el precio vigente y que no hay redondeos intermedios, topes o cargos adicionales. Sumar quince y diez habría dado un descuento distinto, del 25%.

Si una tasa pasa del 8% al 10%, su diferencia es de dos **puntos porcentuales**. El cambio relativo de la tasa, en cambio, es $(10-8)/8 = 25\%$. Es conveniente escribir las dos comparaciones completas antes de abreviarlas. El aumento de dos puntos no dice que una cantidad medida por esa tasa haya aumentado en dos por ciento.

Problema 21. Dos maneras de comparar tasas

Enunciado. La fracción de participantes que elige una opción pasa del 8% al 10% en dos grupos del mismo tamaño. Expresa la diferencia en puntos porcentuales y el aumento relativo de esa fracción.

Solución. La diferencia es $10 - 8 = 2$ puntos porcentuales. La tasa final dividida por la inicial es $10/8 = 1{,}25$, de modo que el aumento relativo es del 25%. Con grupos de cien personas, los recuentos pasarían de ocho a diez: dos personas más, equivalentes a un cuarto de las ocho iniciales. Si los grupos tuvieran tamaños distintos, las tasas seguirían admitiendo esta comparación, pero los recuentos no se deducirían de ella sin conocer las bases.

Reunir cantidades con bases diferentes

Para reunir los porcentajes de dos grupos necesitamos recuperar cuántos elementos aporta cada uno. Pensemos en sus tamaños como las bases de las que se tomó cada proporción: multiplicar el tamaño por la proporción devuelve el recuento que queremos sumar. Tomaremos grupos disjuntos, con las bases expresadas en una unidad común, para que cada elemento cuente una sola vez en el conjunto final. Si las bases positivas son B_1, B_2 y las proporciones son r_1, r_2, las partes valen $r_1 B_1$ y $r_2 B_2$; al reunirlas y dividir por la suma de los tamaños obtenemos la proporción conjunta

$$r = \frac{r_1 B_1 + r_2 B_2}{B_1 + B_2}.$$

Los coeficientes $B_1/(B_1 + B_2)$ y $B_2/(B_1 + B_2)$ suman uno; indican cuánto pesa cada grupo en el conjunto. Para decidir cuándo basta la media simple, restamos ambas expresiones y agrupamos los términos según la proporción que multiplican:

$$\frac{r_1 B_1 + r_2 B_2}{B_1 + B_2} - \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{(B_1 - B_2)(r_1 - r_2)}{2(B_1 + B_2)}.$$

El denominador es positivo. Las medias coinciden exactamente cuando el producto del numerador vale cero, es decir, cuando las bases son iguales o cuando las proporciones son iguales. Esta identidad permite comprobar qué se perdería al asignar el mismo peso a grupos de tamaños distintos.

Problema 22. El promedio de dos porcentajes

Enunciado. En un grupo de treinta personas participa el 20%; en otro de setenta participa el 50%. ¿Qué porcentaje participa al reunir los grupos, que no comparten personas?

Solución. En el primero participan $0{,}2 \cdot 30 = 6$ personas; en el segundo, $0{,}5 \cdot 70 = 35$. En conjunto participan cuarenta y una de cien: el 41%. El promedio simple de veinte y cincuenta es treinta y cinco, pero asignaría el mismo peso a grupos de tamaños distintos. El 41% queda entre ambas tasas y más cerca del 50%, cuyo grupo pesa más.

Problema 23. Reunir dos mezclas

Enunciado. Se mezclan diez litros de una solución al 20% en volumen con quince litros de otra al 40% del mismo componente. Supón que los volúmenes totales y los del componente se suman. Obtén la proporción final.

Solución. La primera aporta dos litros del componente y la segunda seis. El total del componente es ocho litros, repartidos en veinticinco litros de mezcla. La proporción final es $8/25 = 0{,}32$, es decir, 32%. La concentración queda entre el 20% y el 40%. Las hipótesis de aditividad son parte del modelo; sin ellas no podríamos asegurar que el volumen final fuese veinticinco litros.

Problema 24. Deshacer un cambio en general

Enunciado. Una cantidad positiva aumenta en una fracción $r \geq 0$ de su valor. Deduce la fracción del nuevo valor que habría que descontar para volver al inicio. Aplícala a un aumento del 25%.

Solución. Si el inicio es $B > 0$, el nuevo valor es $B(1 + r)$. Para recuperar B el factor necesario es $1/(1 + r)$, que está definido porque $1 + r > 0$. La fracción que se debe descontar es $1 - 1/(1 + r) = r/(1 + r)$. Para $r = 1/4$, resulta $(1/4)/(5/4) = 1/5 = 20\%$. La comprobación general es $(1 + r)(1 - r/(1 + r)) = 1$. El descuento pertenece a $[0, 1)$ para todo $r \geq 0$, como exige volver desde un valor no menor al inicial.

Porcentajes y cambios sucesivos

Las cantidades iniciales y las bases de comparación se suponen positivas. Las tasas relativas r, s se escriben como números: un diez por ciento corresponde a 0,10.

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Parte y porcentaje	$A = (p/100)B$; para recuperar el porcentaje, $p = 100A/B$, con $B > 0$.
Aumento	$F = B(1 + p/100)$, con $B > 0$ y $p \geq 0$.
Descuento	$F = B(1 - p/100)$, con $B > 0$ y $0 \leq p \leq 100$.
Recuperar el inicio	Si $F = Bf$, entonces $B = F/f$ cuando $f \neq 0$. El descuento del cien por ciento tiene factor cero y no permite recuperar B.
Variación relativa	$r = (F - B)/B$ y $p = 100r$, con $B > 0$.
Cambios encadenados	$F = B(1 + r)(1 + s)$ y $r_{\text{total}} = r + s + rs$. Los factores deben ser compatibles con la cantidad modelada.
Puntos porcentuales	Entre tasas escritas como $p_1\%$ y $p_2\%$, la diferencia es $p_2 - p_1$ puntos porcentuales. La variación relativa de la tasa es $(p_2 - p_1)/p_1$, con $p_1 > 0$.

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Proporción conjunta	$r = (r_1B_1 + r_2B_2)/(B_1 + B_2)$, con $B_1, B_2 > 0$. Las bases son los pesos; el resultado se multiplica por cien si se pide porcentaje. La media simple coincide exactamente si las bases son iguales o las proporciones son iguales.

Pruebas. Apéndice: «Porcentajes y bases de comparación».

Ejercicios para trabajar sin profesor

1. Construye dos cintas de longitudes distintas para que 2/3 de la primera mida más que 3/4 de la segunda. Explica la comparación.

2. Reduce $-105/165$ y comprueba la equivalencia con productos cruzados.

3. Calcula $7/12 + 5/18$ justificando el denominador común.

4. Calcula $(3/5 - 1/4) : (7/10)$ y comprueba el cociente.

5. Se consume 3/5 del contenido de un depósito que estaba lleno hasta 5/6 de su capacidad. ¿Qué fracción de la capacidad queda?

6. Una cinta de 9/4 de metro se corta en piezas de 3/8 de metro. ¿Cuántas piezas completas se obtienen?

7. Decide si $\dfrac{6+9}{3}$ puede simplificarse cancelando solo el seis con el denominador. Explica un procedimiento correcto.

8. En una mezcla, la razón entre dos ingredientes es $2 : 7$. Se usan 450 gramos en total. Halla ambas cantidades y la fracción del primero en el total.

9. Una razón compara 75 centímetros con 1,5 metros. Escríbela sin unidades y explica la conversión.

10. Cinco metros de una tela uniforme cuestan 18 000 pesos. Sin cargos adicionales, ¿cuánto cuestan ocho metros?

11. Una tabla tiene $(x, y) = (1, 3), (2, 6), (4, 12)$. Otra tiene $(1, 8), (2, 4), (4, 2)$. Identifica los invariantes y distingue datos de modelo.

12. Ocho personas tardan nueve horas en un trabajo divisible con igual rendimiento constante. Bajo el modelo ideal, ¿cuánto tardan doce?

13. Un servicio cobra 800 unidades fijas y 200 por unidad de uso. ¿Cuánto cuestan cinco unidades? Explica por qué duplicar el uso no duplica el costo total.

14. Tres máquinas iguales producen 900 piezas en cinco horas. Bajo rendimiento constante y aditivo, ¿cuántas producen cuatro máquinas en seis horas?

15. En un plano a escala $1 : 500$, un segmento mide cuatro centímetros y una superficie mide doce centímetros cuadrados. Obtén la longitud real en metros y el área real en metros cuadrados.

16. Un móvil recorre sesenta kilómetros en cuarenta y cinco minutos a rapidez constante. Expresa su rapidez en kilómetros por hora y explica qué significa la tasa.

17. Calcula el 12,5% de 360 y expresa la razón porcentual como fracción reducida.

18. Un precio aumenta un 15% y queda en 920 unidades. Recupera el inicial y comprueba el cambio.

19. Una cantidad pasa de ochenta a sesenta y ocho. ¿Cuál es la variación relativa? ¿Qué aumento porcentual la devolvería a ochenta?

20. Un valor positivo baja un 30% y después aumenta un 40%. Obtén la variación neta y el aumento necesario para recuperar el inicio después de la primera bajada.

21. Una tasa pasa del 12% al 9%. Expresa la disminución en puntos porcentuales y en porcentaje relativo.

22. En dos grupos sin personas comunes, de veinte y ochenta integrantes, participan respectivamente el 50% y el 25%. Obtén el porcentaje conjunto.

23. Un móvil recorre dos tramos de igual longitud, uno a sesenta kilómetros por hora y otro a noventa. Calcula la rapidez media del recorrido completo. Puedes elegir la longitud de cada tramo y después justificar que el resultado no depende de ella.

24. Una cantidad positiva recibe dos cambios relativos $r, s > -1$. Demuestra que el cambio relativo neto es $r + s + rs$. Determina cuándo es exactamente $r + s$ y explica por qué no basta con que los cambios sean pequeños para que la igualdad sea exacta.

Soluciones desarrolladas

Ejercicio 1. Cambiar de todo cambia la comparación

Tomemos $2/3$ de una cinta de tres metros: son dos metros. Tomemos $3/4$ de otra cinta de dos metros: son $3/2$ de metro. La primera longitud es mayor, aunque como números se cumple $2/3 < 3/4$. No estamos comparando los mismos todos. Si ambas fracciones actuasen sobre una misma longitud positiva, el orden de los resultados sí coincidiría con el de las fracciones, porque multiplicar por una cantidad positiva conserva el orden.

Ejercicio 2. Un divisor común y el signo

Los números 105 y 165 son $7 \cdot 15$ y $11 \cdot 15$. Dividiendo ambos términos por quince se obtiene $-7/11$, que está reducida porque siete y once son primos distintos. La comprobación es $(-105) \cdot 11 = 165 \cdot (-7) = -1\,155$. La simplificación conserva el signo negativo y el valor del cociente.

Ejercicio 3. Un denominador común de treinta y seis

El denominador 36 es múltiplo de doce y de dieciocho. Así $7/12 = 21/36$ y $5/18 = 10/36$. Sumamos las cantidades de partes iguales: $(21 + 10)/36 = 31/36$. La respuesta es menor que uno, pues falta $5/36$ para completarlo; no se suman los denominadores porque ellos indican el tamaño de cada parte.

Ejercicio 4. Primero la diferencia, después el cociente

La diferencia agrupada es $3/5 - 1/4 = 12/20 - 5/20 = 7/20$. Dividimos por $7/10 \neq 0$: $(7/20)(10/7) = 1/2$. Para comprobarlo multiplicamos el resultado por el divisor: $(1/2)(7/10) = 7/20$, que recupera la diferencia inicial. El inverso se aplica al divisor completo.

Ejercicio 5. La parte no consumida

Quedan $2/5$ del contenido inicial, porque $1 - 3/5 = 2/5$. Como ese contenido era $5/6$ de la capacidad, queda $(2/5)(5/6) = 1/3$ de la capacidad. Por otra vía, se consumió $(3/5)(5/6) = 1/2$ y queda $5/6 - 1/2 = 1/3$. La coincidencia comprueba que las dos fracciones se han referido a la base correcta.

Ejercicio 6. Elegir una unidad menor

El número de piezas es $(9/4) : (3/8) = (9/4)(8/3) = 6$. Como el cociente es entero, se obtienen seis piezas completas sin sobrante. Al reconstruir la longitud, $6(3/8) = 18/8 = 9/4$ de metro. El resultado depende de suponer cortes sin pérdida de material.

Ejercicio 7. Cancelar factores de toda la expresión

El valor es $(6 + 9)/3 = 15/3 = 5$. Cancelar solo el seis y conservar el nueve daría $2 + 9 = 11$, que es distinto. Podemos distribuir correctamente la división: $6/3 + 9/3 = 2 + 3 = 5$. También podemos factorizar el numerador: $(3 \cdot 2 + 3 \cdot 3)/3 = 3(2 + 3)/3 = 5$. En ambos procedimientos la operación afecta a los dos sumandos.

Ejercicio 8. Nueve partes de mezcla

La razón $2 : 7$ reparte el total en nueve partes iguales. Cada parte pesa $450/9 = 50$ gramos. El primer ingrediente pesa cien gramos y el segundo trescientos cincuenta. La fracción del primero es $100/450 = 2/9$; su razón respecto del segundo es $100/350 = 2/7$. Sumamos los pesos para recuperar 450 y comprobamos la razón original.

Ejercicio 9. Una razón entre longitudes

El denominador equivale a 150 centímetros. Por ello la razón es $75/150 = 1/2$, sin unidad. Si dividiéramos setenta y cinco por uno y medio sin convertir, obtendríamos cincuenta, que mezcla centímetros con metros. Se pueden comparar unidades distintas, pero antes hay que incorporar su factor de conversión.

Ejercicio 10. El precio por metro

Cada metro cuesta $18\,000/5 = 3\,600$ pesos. Ocho metros cuestan $8 \cdot 3\,600 = 28\,800$ pesos. La constancia de este precio unitario justifica la proporcionalidad directa. La razón entre la nueva y la antigua longitud es $8/5$; al multiplicar 18 000 por ella se obtiene el mismo total.

Ejercicio 11. Lo que una tabla permite afirmar

En la primera tabla $y/x = 3$ para cada entrada: los datos son compatibles con $y = 3x$. En la segunda $xy = 8$: son compatibles con $y = 8/x$. La palabra «compatibles» importa: las tres filas no prueban una ley para todos los valores. Bajo el supuesto de esos modelos, podemos predecir otros pares; sin ese supuesto hacen falta condiciones adicionales.

Ejercicio 12. Conservar el trabajo total

La tarea requiere $8 \cdot 9 = 72$ horas de una persona bajo las hipótesis dadas. Con doce personas, el tiempo es $72/12 = 6$ horas. El producto vuelve a ser setenta y dos. Si la tarea tuviese fases que no pudieran ejecutarse simultáneamente, esta cuenta no bastaría para predecir el tiempo; el enunciado adopta expresamente el modelo ideal.

Ejercicio 13. El cargo que no se duplica

Cinco unidades cuestan $800 + 200 \cdot 5 = 1\,800$. Diez unidades cuestan $800 + 200 \cdot 10 = 2\,800$, no 3 600. Al duplicar el uso solo se duplica su aporte variable; el cargo fijo se cobra una vez. En

general, para uso x, $800 + 400x$ difiere de $2(800 + 200x)$ en ochocientas unidades monetarias. El modelo no es de proporcionalidad directa.

Ejercicio 14. Horas de máquina

El rendimiento es $900/(3 \cdot 5) = 60$ piezas por hora de máquina. Cuatro máquinas durante seis horas suman veinticuatro horas de máquina, y producen $60 \cdot 24 = 1\,440$ piezas. El cambio global también es $(4/3)(6/5) = 8/5$ respecto de la producción inicial. La multiplicación de factores se justifica por la constancia y aditividad declaradas.

Ejercicio 15. Dos dimensiones en el área

Un centímetro del plano equivale a quinientos centímetros reales, o cinco metros. La longitud es entonces $4 \cdot 5 = 20$ metros. Un centímetro cuadrado representa un cuadrado de cinco metros de lado, con veinticinco metros cuadrados de área. La superficie pedida es $12 \cdot 25 = 300$ metros cuadrados. El factor numérico de área depende del cuadrado del factor lineal cuando se usan las unidades correspondientes.

Ejercicio 16. Convertir el tiempo antes de dividir

Cuarenta y cinco minutos son $45/60 = 3/4$ de hora. La rapidez es $60 : (3/4) = 80$ kilómetros por hora. Bajo rapidez constante, significa que en una hora se recorrerían ochenta kilómetros; no afirma que el viaje haya durado una hora. La comprobación es $80(3/4) = 60$ kilómetros.

Ejercicio 17. Una octava parte

La razón porcentual es $12{,}5/100 = 125/1\,000 = 1/8$. Por tanto el 12,5% de 360 es $360/8 = 45$. Podemos comprobar $45/360 = 1/8$. El número 12,5 expresa cuántas partes hay por cien; no es el factor por el que se multiplica directamente la base.

Ejercicio 18. Invertir el factor de aumento

El valor inicial B satisface $1{,}15B = 920$. Como $1{,}15 = 23/20 \neq 0$, dividimos y obtenemos $B = 920(20/23) = 800$. El aumento fue $0{,}15 \cdot 800 = 120$ y $800 + 120 = 920$. Restar el 15% de 920 emplearía una base distinta y no invertiría el aumento.

Ejercicio 19. Una disminución y su regreso

La diferencia es $68 - 80 = -12$. Dividimos por ochenta: $-12/80 = -3/20 = -15\%$. Para regresar, el aumento se mide respecto de sesenta y ocho: $12/68 = 3/17$, que como porcentaje exacto es $(300/17)\%$. Es aproximadamente 17,647%; la forma fraccionaria evita atribuir exactitud a una expansión truncada. Multiplicar 68 por $1 + 3/17 = 20/17$ devuelve ochenta.

Ejercicio 20. Dos factores y un inverso

El factor combinado es $(1 - 0{,}30)(1 + 0{,}40) = 0{,}7 \cdot 1{,}4 = 0{,}98$. La variación neta es una disminución del 2%. Para deshacer solo la primera bajada habría que pasar del 70% al 100% del valor inicial: el aumento relativo necesario es $30/70 = 3/7$, es decir, $(300/7)\%$. El aumento del 40% propuesto era menor y por eso no recupera el inicio.

Ejercicio 21. Puntos frente a cambio relativo

La tasa disminuye $12-9=3$ puntos porcentuales. La variación relativa es $(9-12)/12=-1/4=-25\%$, una disminución del 25% de la tasa inicial. Podemos ver la relación escribiendo $9=12\cdot 3/4$. Informar solo «bajó tres por ciento» no distinguiría las dos bases posibles.

Ejercicio 22. Sumar participantes y bases

Participan diez personas del primer grupo y veinte del segundo: $0{,}5\cdot 20=10$ y $0{,}25\cdot 80=20$. En total son treinta de cien, de modo que participa el 30%. La media simple 37,5% no es pertinente, porque daría a cada grupo el mismo peso. El resultado conjunto queda más cerca del 25%, correspondiente al grupo mayor.

Ejercicio 23. Una media que compara distancia con tiempo

Podemos tomar ciento ochenta kilómetros por tramo. El primero tarda $180/60=3$ horas y el segundo $180/90=2$ horas. La distancia total es 360 kilómetros y el tiempo total cinco horas; la rapidez media es $360/5=72$ kilómetros por hora. Para una longitud cualquiera $L>0$ por tramo, se obtiene $2L/(L/60+L/90)=2/(1/60+1/90)=72$. La cancelación de L justifica la elección inicial. La media aritmética de sesenta y noventa no corresponde al recorrido, pues se pasa más tiempo en el tramo lento.

Ejercicio 24. El término que recoge el encadenamiento

Si el inicio es $B>0$, el final es $B(1+r)(1+s)$. Su cambio relativo es $[B(1+r)(1+s)-B]/B=(1+r)(1+s)-1=r+s+rs$. Coincide exactamente con $r+s$ si y solo si $rs=0$, lo que sobre los reales equivale a $r=0$ o $s=0$. La pequeñez de ambos cambios puede hacer pequeño el error rs, pero no lo vuelve cero. Las hipótesis $r,s>-1$ mantienen positivos los valores intermedios; el cálculo algebraico distingue una aproximación de una identidad.

Diagnóstico de salida

Una persona sostiene que dos descuentos del 10% equivalen a uno del 20%, que una mezcla $2:3$ contiene $2/3$ de su primer ingrediente y que cualquier tabla decreciente representa proporcionalidad inversa. Corrige cada afirmación con una razón y una comprobación. Después explica qué datos necesitarías para calcular un porcentaje conjunto de dos grupos.

Una respuesta completa obtiene un descuento del 19% mediante $0{,}9^2=0{,}81$; distingue $2/3$ respecto del segundo ingrediente de $2/5$ respecto del total; exige producto constante para la proporcionalidad inversa; y pide los tamaños de los grupos además de sus porcentajes. En todos los casos la cuenta empieza por reconocer las cantidades que se comparan.

CAPÍTULO 3

Potencias, raíces y notación científica

Una hoja se dobla por la mitad y vuelve a doblarse de la misma manera. Si cada doblez duplicara el espesor, diez dobleces producirían mil veinticuatro capas. Diez repeticiones de una operación muy sencilla bastan para que el resultado se vuelva difícil de imaginar. En una hoja real intervienen el tamaño, la resistencia y la geometría del pliegue; el cálculo de las capas describe un modelo ideal. Precisamente por eso podemos examinar con claridad qué hace la duplicación.

El problema inverso aparece al construir un cuadrado de área dos: conocemos el producto de dos lados iguales y buscamos el lado. Entre ambas preguntas nace un lenguaje que permite contar multiplicaciones, deshacerlas y comparar cantidades que quedan lejos de nuestra experiencia cotidiana. Una potencia conserva la historia de un producto; una raíz recupera una medida a partir de él.

El producto $2^3 \cdot 2^4$ reúne siete factores iguales a dos y vale 128. Encontrar los números cuyo cuadrado es nueve exige, en cambio, recuperar dos signos posibles. Para comparar $6 \cdot 10^{-4}$ con $2 \cdot 10^{-3}$ debemos atender a la escala: son seis diezmilésimas y dos milésimas, de modo que la segunda cantidad es mayor. La lectura de la base, del exponente y de la operación permite distinguir estas preguntas.

Contar factores

Si partimos de una capa, después de un doblez ideal tenemos dos; después de otro, $2 \cdot 2$; después del tercero, $2 \cdot 2 \cdot 2$. Escribimos estos productos como 2^1, 2^2 y 2^3. Para un número real a y un entero positivo n, la potencia a^n es el producto de n factores iguales a a. El número a es la base y n es el exponente. En particular, $a^1 = a$. La definición puede expresarse paso a paso mediante $a^{n+1} = a^n a$.

La base dice qué factor se repite; el exponente, cuántas veces aparece. Por eso $3^4 = 3{\cdot}3{\cdot}3{\cdot}3 = 81$, mientras que $4^3 = 64$. El producto $3 \cdot 4 = 12$ responde a otra operación. Para $n > 0$, $0^n = 0$: todos sus factores son cero.

Problema 1. Diez dobleces ideales

Enunciado. Una hoja tiene un espesor inicial de 0,1 milímetros. Suponiendo que cada doblez duplica el número de capas y que estas conservan su espesor, calcula el espesor tras diez dobleces y el factor de aumento desde el séptimo hasta el décimo.

Solución. El espesor inicial corresponde a una capa. Cada doblez multiplica por dos, de modo que diez dobleces dan $2^{10} = 1024$ capas. El espesor del modelo es $0{,}1 \cdot 1024 = 102{,}4$ milímetros. Entre el séptimo doblez y el décimo hay tres duplicaciones: el factor es $2^3 = 8$. Se comprueba dividiendo 1024 capas por las $2^7 = 128$ que había antes. Estos resultados dependen de los supuestos: no aseguran que una hoja concreta pueda doblarse diez veces ni que las capas queden sin espacios.

Cuando la base es negativa, cada pareja de factores negativos tiene producto positivo. Un número par de factores queda enteramente agrupado en parejas; un número impar deja un factor negativo. Así, para $a > 0$, $(-a)^{2k} = a^{2k}$ y $(-a)^{2k+1} = -a^{2k+1}$, con los exponentes positivos que correspondan. La posición de los paréntesis determina si el signo pertenece a la base.

Problema 2. El signo que queda fuera

Enunciado. Calcula $(-3)^4$, -3^4 y $(-3)^3$. Explica por qué las dos primeras expresiones no tienen el mismo valor.

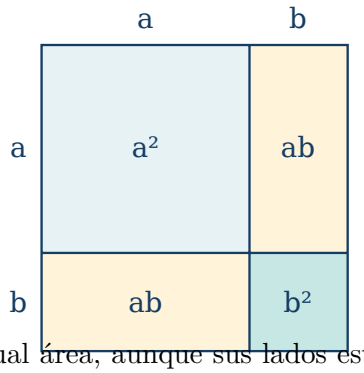
Solución. En $(-3)^4$, la base completa es -3: cuatro factores negativos producen 81. En -3^4 se calcula primero la potencia de base tres y luego se toma su opuesto; el resultado es -81. Finalmente, $(-3)^3 = (-3)(-3)(-3) = -27$. Para leer una potencia conviene delimitar su base antes de calcular. La expresión -3^4 podría escribirse $-(3^4)$ sin cambiar su significado.

Las leyes nacen del producto

Multiplicar a^m por a^n, con m, n enteros positivos, reúne $m + n$ factores iguales. Elevar a^m a la potencia n reúne n grupos de m factores. Obtenemos

$$a^m a^n = a^{m+n}, \qquad (a^m)^n = a^{mn}.$$

La primera igualdad suma exponentes porque reúne factores; la segunda los multiplica porque cuenta grupos. También $(ab)^n = a^n b^n$: al multiplicar n veces ab podemos reagrupar los n factores a y los n factores b. La conmutatividad de la multiplicación de números reales permite esa reagrupación. Para $b \neq 0$, el mismo argumento da $(a/b)^n = a^n/b^n$.



Podemos examinar qué ocurre con una suma dibujando un cuadrado de lado $a+b$, con $a, b > 0$. Al dividir cada lado en las longitudes a y b, su área queda repartida entre dos cuadrados, de áreas a^2 y b^2, y dos rectángulos de área ab. El área total es por ello $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$. Los productos cruzados aparecen al multiplicar cada sumando de un factor por cada sumando del otro; desarrollar $(a + b)(a + b)$ mediante distributividad prueba la misma identidad para cualesquiera reales a, b. En el dibujo, las marcas de los bordes permiten reconocer esos cuatro productos y comprobar que los dos rectángulos tienen igual área, aunque sus lados estén intercambiados.

Problema 3. Reunir sin desarrollar todo

Enunciado. Calcula $\dfrac{2^5 \cdot 2^3}{2^6}$ y justifica cada transformación.

Solución. El numerador contiene ocho factores iguales a dos, así que es 2^8. Dividir por 2^6 cancela seis factores no nulos; quedan dos y obtenemos $2^2 = 4$. Podemos comprobarlo con los valores enteros: $32 \cdot 8/64 = 256/64 = 4$. La cancelación utiliza que dos es distinto de cero; el argumento no justificaría dividir potencias de base cero.

Problema 4. Dos maneras de agrupar

Enunciado. Compara $(2^3)^2$, 2^{3^2} y $(2\cdot 3)^2$. ¿Es cierta la igualdad $(2+3)^2 = 2^2+3^2$?

Solución. La primera potencia contiene dos grupos de tres doses: $(2^3)^2 = 2^6 = 64$. En la segunda, el exponente completo es $3^2 = 9$, por lo que $2^{3^2} = 2^9 = 512$. La tercera tiene base seis y vale 36; también $2^2\cdot 3^2 = 4\cdot 9 = 36$. Para la suma, $(2+3)^2 = 25$, mientras que $2^2+3^2 = 13$. Faltan los dos productos cruzados $2\cdot 2\cdot 3 = 12$. Los paréntesis y el tipo de operación explican las cuatro respuestas.

Dividir para extender los exponentes

Con $a \neq 0$ y $m > n > 0$, cancelar n factores en a^m/a^n deja a^{m-n}. Si los exponentes son iguales, la división vale uno. Conservar la misma regla cuando $m = n$ nos lleva a definir

$$a^0 = 1 \qquad (a \neq 0).$$

Para $m < n$, después de cancelar quedan factores en el denominador. La regla sugiere definir, para n entero positivo,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad (a \neq 0).$$

El signo negativo del exponente indica un recíproco. Por ejemplo, $2^{-3} = 1/8$ y $(1/2)^{-3} = 8$. El signo del valor depende de la base y de la paridad del exponente, no del hecho de que este sea negativo.

Con estas definiciones, las leyes del producto, del cociente y de la potencia de una potencia valen para todos los exponentes enteros cuando las bases son no nulas. Se puede verificar el caso mixto escribiendo $a^m a^{-n} = a^m/a^n$ y cancelando; si ambos exponentes son negativos se multiplican recíprocos. En particular, $a^m/a^n = a^{m-n}$ para $a \neq 0$. Las leyes de productos y cocientes con exponente entero negativo exigen igualmente que todas las bases que deban invertirse sean distintas de cero.

La base cero queda fuera de esta extensión. 0^{-n} exigiría dividir por cero. Tampoco asignaremos valor a 0^0 en este capítulo: la deducción anterior parte de un cociente a^n/a^n con $a \neq 0$. En otros contextos se adoptan convenciones específicas para 0^0; ninguna autoriza a usar aquí una división por cero.

Problema 5. Retroceder tres pasos

Enunciado. Una cantidad se multiplica por tres en cada paso. En el paso cero vale 18. Halla sus valores en los pasos -1 y -3, suponiendo que el mismo modelo se extiende hacia atrás.

Solución. Para retroceder un paso debemos deshacer una multiplicación por tres: dividimos 18 por tres y obtenemos seis. Tres retrocesos dan $18/3^3 = 18/27 = 2/3$. La fórmula $18\cdot 3^k$ recoge ambos casos: con $k=-1$ da seis y con $k=-3$ da $2/3$. Al avanzar desde $2/3$ tres pasos obtenemos 2, 6 y 18, lo que verifica el resultado. Los índices negativos sitúan pasos anteriores; los valores de este modelo siguen siendo positivos.

Problema 6. Un exponente negativo sobre una fracción

Enunciado. Calcula $\dfrac{(2/3)^{-2}}{(2/3)^{0}}$ y decide cuáles de 0^5, 5^0, 0^{-5} y 0^0 están definidos con nuestras convenciones.

Solución. Como $2/3 \neq 0$, su potencia cero vale uno. Su potencia -2 es el recíproco de $4/9$, es decir, $9/4$. El cociente pedido vale por tanto $9/4$. Entre las otras expresiones, $0^5 = 0$ por producto repetido y $5^0 = 1$. La expresión 0^{-5} no existe como número real porque exigiría $1/0^5 = 1/0$; 0^0 queda sin definir en este tratamiento. Escribir un exponente no garantiza que se hayan cumplido las condiciones de su definición.

Problema 7. Las restricciones sobreviven a la simplificación

Enunciado. Simplifica $\dfrac{x^{-2}y^{3}}{xy^{-1}}$ e indica para qué reales x, y tiene sentido la expresión inicial.

Solución. x^{-2} exige $x \neq 0$ y y^{-1} exige $y \neq 0$. Con estas condiciones, el denominador $xy^{-1} = x/y$ tampoco es cero. Reunimos las potencias de cada base: el exponente de x queda $-2-1=-3$ y el de y queda $3-(-1)=4$. El resultado es $x^{-3}y^{4} = y^4/x^3$, siempre con $x \neq 0$ e $y \neq 0$. La última fórmula aislada admitiría $y = 0$, pero ese valor no pertenecía al dominio original. Para comprobar los signos de los exponentes también podemos escribir la expresión como $(y^3/x^2)/(x/y)$ y multiplicar por y/x.

Potencias con exponentes enteros

Para exponentes enteros positivos se admite cualquier base real. Al incluir exponentes cero o negativos se exige base no nula; las filas indican dónde interviene esa restricción.

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Definición y recurrencia	$a^1 = a$ y $a^{n+1} = a^n a$, con $n \geq 1$ entero.
Producto de igual base	$a^m a^n = a^{m+n}$. Para $m, n \in \mathbb{Z}$, se exige $a \neq 0$; con ambos positivos también se admite $a = 0$.
Cociente de igual base	$a^m/a^n = a^{m-n}$, con $a \neq 0$ y $m, n \in \mathbb{Z}$.
Potencia de una potencia	$(a^m)^n = a^{mn}$. Para exponentes enteros cualesquiera, $a \neq 0$; con ambos positivos también se admite cero.
Potencia de un producto	$(ab)^n = a^n b^n$. Si $n \geq 1$ es entero, a, b son cualesquiera; si $n \leq 0$, se exige $a, b \neq 0$.
Potencia de un cociente	$(a/b)^n = a^n/b^n$, con $b \neq 0$. Para $n \leq 0$ se exige además $a \neq 0$.
Exponente cero y negativo	$a^0 = 1$ y $a^{-n} = 1/a^n$, con $a \neq 0$ y $n \geq 1$ entero.
Base cero y signos	$0^n = 0$ si $n \geq 1$. Para $a > 0$, $(-a)^n = a^n$ si n es par y $(-a)^n = -a^n$ si es impar. Aquí no se define 0^0 ni una potencia negativa de cero.
Cuadrado de una suma	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, para reales a, b. Elevar una suma no equivale a sumar las potencias.

Pruebas. Apéndice: «Potencias enteras y conteo de factores», «Productos de binomios, cuadrados y cubos».

Recuperar una medida

Un cuadrado de área nueve tiene lado tres. La ecuación $x^2 = 9$, en cambio, admite $x = 3$ y $x = -3$. La geometría del lado exige una longitud no negativa; la ecuación numérica admite ambos signos. La notación de raíz cuadrada conserva esa elección: para $a \geq 0$, $\sqrt{a}$ es el único real no negativo cuyo cuadrado es a.

La unicidad tiene una explicación breve. Si $0 \leq u < v$, entonces $v^2 - u^2 = (v-u)(v+u) > 0$, de modo que $u^2 < v^2$. Dos números no negativos distintos no pueden tener el mismo cuadrado. La existencia para cualquier $a \geq 0$, incluso cuando el lado no es racional, usa la propiedad de completitud de la recta real que presentamos en el capítulo uno. Podemos verla de cerca.

Para $a > 0$, reunamos los números $t \geq 0$ tales que $t^2 \leq a$. El cero pertenece al conjunto y $a + 1$ es una cota superior, por lo que la completitud proporciona su menor cota superior s. Queremos probar que $s^2 = a$. La elección de un supremo nos da dos formas de llegar a una contradicción: si su cuadrado queda por debajo de a, intentaremos avanzar un poco más y seguir dentro del conjunto; si queda por encima, intentaremos retroceder un poco y obtener todavía una cota superior.

Supongamos primero que $s^2 < a$. Al avanzar de s a $s + h$, el cuadrado aumenta en $2sh + h^2$. Elegir $h < 1$ permite acotar ese aumento por $(2s+1)h$; para que quepa en la diferencia disponible, escogemos además $h < (a - s^2)/(2s+1)$. Ambos límites son positivos, así que existe un h que los cumple. Entonces $(s+h)^2 = s^2 + 2sh + h^2 \leq s^2 + (2s+1)h < a$. El número $s + h$ pertenecería al conjunto y superaría su cota superior s, lo que es imposible.

Si $s^2 > a$, tenemos $s > 0$ y podemos elegir $0 < h < \min\{s, (s^2 - a)/(2s)\}$. La primera restricción mantiene $s - h$ positivo y la segunda asegura $(s-h)^2 > s^2 - 2sh > a$. Como el cuadrado crece entre los no negativos, todos los elementos del conjunto quedan por debajo de $s - h$. Habríamos obtenido una cota superior menor que s, en contra de su elección como la menor. Las dos alternativas quedan descartadas y por tanto $s^2 = a$. Para $a = 0$, la raíz es cero. La completitud ha permitido obtener el número exacto que las aproximaciones decimales van situando entre cotas cada vez más próximas.

Problema 8. Un lado y dos soluciones

Enunciado. Un cuadrado tiene área 18 centímetros cuadrados. Determina exactamente su lado. Después resuelve $x^2 = 18$ en los reales y compara ambas respuestas.

Solución. El lado es $\sqrt{18}$ centímetros, porque es una longitud no negativa cuyo cuadrado debe valer 18. Como $(3\sqrt{2})^2 = 9 \cdot 2 = 18$ y $3\sqrt{2} > 0$, la unicidad de la raíz da $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. Para la ecuación numérica también sirve el opuesto: $x = \pm 3\sqrt{2}$. No hay más soluciones: si x es no negativo, la unicidad obliga a tomar la raíz principal; si es negativo, $-x$ es no negativo y tiene el mismo cuadrado. La raíz $\sqrt{18}$ tiene un solo valor; el signo doble aparece al resolver la ecuación.

La misma idea define la raíz enésima. Para un entero $n \geq 2$ par, $\sqrt[n]{a}$ existe en los reales si $a \geq 0$ y designa la raíz no negativa. Para n impar existe para cualquier real a y tiene el mismo signo que él. La función $t \mapsto t^n$ es estrictamente creciente en los no negativos: si $0 \leq u < v$, entonces $u^n < v^n$, como se ve comparando los factores o usando

$$v^n - u^n = (v-u)(v^{n-1} + v^{n-2}u + \cdots + u^{n-1}) > 0.$$

Para exponentes impares también crece en los negativos, porque $(-t)^n = -t^n$, y los valores de distinto signo conservan su orden. De ahí la unicidad. La existencia en los no negativos sigue el

argumento de completitud anterior: para $0 \le t \le M$ y $0 < h \le 1$, el aumento $(t+h)^n - t^n$ no supera $nh(M+1)^{n-1}$, por la identidad de diferencia de potencias. Esa cota permite los mismos pequeños desplazamientos de la menor cota superior. Para radicandos negativos e índice impar tomamos el opuesto de la raíz del valor positivo correspondiente.

Problema 9. El índice decide el dominio

Enunciado. Calcula en los reales $\sqrt[3]{-125}$ y $\sqrt[4]{81}$. Decide qué ocurre con $\sqrt[4]{-81}$ y resuelve $x^4 = 81$.

Solución. Como $(-5)^3 = -125$, la raíz cúbica es -5. Como $3^4 = 81$ y tres es no negativo, $\sqrt[4]{81} = 3$. Ninguna cuarta potencia real es negativa, de modo que $\sqrt[4]{-81}$ no tiene valor real. La ecuación $x^4 = 81$ admite tres y menos tres; son las únicas soluciones porque $|x|^4 = 81$ obliga a $|x| = 3$ por la unicidad en los no negativos. El índice par restringe el radicando, pero no elimina la posibilidad de soluciones negativas en una ecuación de potencia.

Problema 10. El cuadrado borra un signo

Enunciado. Simplifica $\sqrt{(x-2)^2}$. Evalúa el resultado para $x = -1$ y determina cuándo se puede escribir simplemente $x - 2$.

Solución. El número $|x-2|$ es no negativo y su cuadrado vale $(x-2)^2$. Por la definición de raíz principal, $\sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$. Para $x = -1$, el valor es $|-3| = 3$, no -3. La expresión coincide con $x - 2$ cuando $x - 2 \ge 0$, es decir, cuando $x \ge 2$; para $x < 2$ coincide con $2 - x$. En general, $\sqrt{u^2} = |u|$ para todo real u.

Operar con radicales sin perder el dominio

Para $a, b \ge 0$, el producto $\sqrt{a}\sqrt{b}$ es no negativo y su cuadrado vale ab. La unicidad prueba

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}.$$

Si además $b > 0$, el mismo razonamiento con un cociente da $\sqrt{a/b} = \sqrt{a}/\sqrt{b}$. Para raíces de índice par se mantiene la exigencia de radicandos no negativos, con denominador positivo en un cociente. Para índice impar estas identidades admiten radicandos de cualquier signo y denominador no nulo: el producto o cociente de las raíces tiene la potencia requerida y la raíz impar es única.

Extraer un factor cuadrado usa la primera identidad. Por ejemplo, $\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}$. Con variables hay que conservar el valor absoluto: $\sqrt{x^2 y} = |x|\sqrt{y}$ si $y \ge 0$. Esta afirmación da una condición suficiente para separar los factores; no pretende describir todos los casos en que el producto aislado $x^2 y$ es no negativo.

Una suma requiere otro examen. $\sqrt{9+16} = 5$, mientras que $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$. Los radicales no se distribuyen sobre sumas. Podemos sumar $2\sqrt{3}$ y $5\sqrt{3}$ porque son dos y cinco veces el mismo número; $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ no comparte ese factor inmediato y puede quedarse como suma exacta.

Problema 11. Encontrar el factor común

Enunciado. Reduce $\sqrt{72}-\sqrt{8}+\sqrt{50}$ a un múltiplo de un solo radical.

Solución. Buscamos cuadrados dentro de los radicandos: $72=36\cdot 2$, $8=4\cdot 2$ y $50=25\cdot 2$. Las raíces son $6\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$ y $5\sqrt{2}$. Por distributividad, la expresión vale $(6-2+5)\sqrt{2}=9\sqrt{2}$. La resta afecta al término completo $2\sqrt{2}$. El radicando común permite reunir coeficientes; sumar o restar los radicandos habría cambiado la operación.

Problema 12. Dos raíces que se compensan

Enunciado. Calcula $\sqrt{3/5}\sqrt{15}$ y $\sqrt{49/9}$. Explica por qué no se puede justificar $\sqrt{(-4)(-9)}=\sqrt{-4}\sqrt{-9}$ en los reales.

Solución. Los radicandos del primer producto son positivos, así que reunimos las raíces: $\sqrt{(3/5)15}=\sqrt{9}=3$. El segundo cociente tiene denominador positivo y vale $\sqrt{49}/\sqrt{9}=7/3$. En la última escritura, el miembro izquierdo es $\sqrt{36}=6$, pero las dos raíces del miembro derecho no existen en los reales. Que el producto de los radicandos sea positivo no basta para separar raíces pares: cada factor debe admitir su propia raíz real.

Problema 13. Quitar una raíz del denominador

Enunciado. Escribe $\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$ sin radicales en el denominador y comprueba el resultado.

Solución. El denominador no es cero: $\sqrt{5}>2$ porque $5>4$. Multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{5}+2$, que tampoco es cero. Los términos cruzados se cancelan al desarrollar el producto: $(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)=5-4=1$. Por tanto

$$\frac{1}{\sqrt{5}-2}=\frac{\sqrt{5}+2}{1}=\sqrt{5}+2.$$

La comprobación consiste en multiplicar $\sqrt{5}+2$ por el denominador original: el resultado es uno. Esta transformación, llamada racionalización, conserva el número porque multiplica la fracción por uno. Resulta útil para comparar o calcular; la expresión inicial ya era una respuesta exacta.

Raíces reales y operaciones permitidas

En las filas de índice general, $n\geq 2$ es entero. Las condiciones deben permitir cada raíz que aparece a ambos lados de la igualdad.

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Raíz de índice par	Para n par y $a\geq 0$, $\sqrt[n]{a}$ es no negativa y $(\sqrt[n]{a})^n=a$.
Raíz de índice impar	Para n impar y cualquier real a, la raíz es única, tiene el signo de a y $(\sqrt[n]{a})^n=a$.
Raíz del cuadrado	$\sqrt{u^2}=\lvert u\rvert$, para todo real u.
Producto, índice par	$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$, con n par y $a,b\geq 0$.
Cociente, índice par	$\sqrt[n]{a/b}=\sqrt[n]{a}/\sqrt[n]{b}$, con n par, $a\geq 0$ y $b>0$.
Producto y cociente, índice impar	Las dos identidades anteriores valen para $a,b\in\mathbb{R}$ si n es impar; en el cociente se exige $b\neq 0$.

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Extraer un cuadrado	$\sqrt{x^2y} = \lvert x\rvert\sqrt{y}$, con $y \geq 0$. Esta es una condición suficiente para separar los factores.
Radicales semejantes	$u\sqrt{a} + v\sqrt{a} = (u+v)\sqrt{a}$, con $a \geq 0$. Se reúnen coeficientes de un mismo radical.
Conjugados	$(\sqrt{a}-b)(\sqrt{a}+b) = a - b^2$, con $a \geq 0$. Para usarlos al racionalizar se comprueba que el denominador original y el factor por el que se amplifica sean no nulos.

Pruebas. Apéndice: «Existencia y unicidad de las raíces reales», «Productos, cocientes y sumas de radicales».

Exponentes que expresan raíces

Busquemos una extensión de las potencias que haga válida $(a^{1/n})^n = a$. Para $a > 0$, la raíz positiva es la elección compatible con las potencias enteras positivas. Definimos, para un entero m y un entero positivo n,

$$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m \qquad (a > 0).$$

La raíz de índice uno de cualquier real se toma igual a ese real: $\sqrt[1]{a} = a$; así la definición recupera las potencias de exponente entero.

Si $m < 0$, la raíz es positiva y admite recíproco. Esta definición debe dar el mismo número cuando una fracción se escribe de dos maneras. Si $m/n = p/q$, entonces $mq = pn$. Los números positivos $(\sqrt[n]{a})^m$ y $(\sqrt[q]{a})^p$, elevados a nq, dan respectivamente a^{mq} y a^{pn}; son iguales. La unicidad de la raíz positiva de índice nq obliga a que los números iniciales coincidan. Así, el valor depende del racional, no de la fracción que lo representa.

Las leyes de exponentes se conservan para bases positivas y exponentes racionales. Para comprobar $a^r a^s = a^{r+s}$, escribimos $r = M/N$, $s = P/N$ con un denominador común positivo. Si $u = \sqrt[N]{a}$, el miembro izquierdo es $u^M u^P = u^{M+P}$, que es el derecho. Para $(a^r)^s = a^{rs}$, con $r = m/n$ y $s = p/q$, elevamos ambos miembros positivos a nq: los dos dan a^{mp}. La unicidad vuelve a probar la igualdad. El mismo recurso justifica $(ab)^r = a^r b^r$ para $a, b > 0$.

Se puede añadir $0^r = 0$ cuando r es racional positivo; los exponentes cero o negativos siguen excluidos para esa base. Para una base negativa, reducimos primero el exponente racional a una fracción m/n con denominador positivo. Si n es impar, definimos $a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m$; si n es par, no le asignamos valor real. Por ejemplo, $(-8)^{2/3} = (\sqrt[3]{-8})^2 = 4$. Reducir la fracción es esencial: $2/6 = 1/3$, así que $(-8)^{2/6}$ se interpreta mediante la raíz cúbica y vale -2, aunque $\sqrt[6]{-8}$ no exista en los reales. Esta convención define valores, pero no extiende sin restricciones todas las leyes demostradas para bases positivas. La raíz principal que aparece al encadenar operaciones puede alterar un signo.

Problema 14. Una fracción en el exponente

Enunciado. Calcula $16^{3/4}$ y $27^{-2/3}$ explicando el orden de las operaciones.

Solución. La raíz cuarta positiva de dieciséis es dos, por lo que $16^{3/4} = 2^3 = 8$. Para la otra potencia, la raíz cúbica positiva de veintisiete es tres. El exponente -2 sobre ese resultado indica un recíproco: $27^{-2/3} = 3^{-2} = 1/9$. Podemos comprobar la primera respuesta elevándola a la cuarta: $8^4 = 16^3 = 4096$. Para la segunda, la potencia positiva $27^{2/3} = 9$ multiplicada por $1/9$ da uno. Ambas bases son positivas y satisfacen las condiciones de la definición.

Problema 15. Una ley con una hipótesis necesaria

Enunciado. Se propone aplicar $(a^r)^s = a^{rs}$ a $a = -8$, $r = 2$ y $s = 1/2$. Compara la raíz principal de $(-8)^2$ con $(-8)^1$ y explica el resultado.

Solución. La primera expresión, leída como raíz cuadrada principal, es $\sqrt{(-8)^2} = \sqrt{64} = 8$. La segunda es -8. La igualdad propuesta falla. El producto de exponentes sugeriría $2(1/2) = 1$, pero la ley demostrada suponía $a > 0$. La raíz principal recupera el valor absoluto de la base al deshacer un cuadrado. La raíz cúbica $\sqrt[3]{-8} = -2$ sí tiene sentido real; su existencia no extiende automáticamente todas las leyes de exponentes racionales a bases negativas.

Problema 16. Resolver conservando el signo permitido

Enunciado. Resuelve $x^{2/3} = 4$ en los reales con la convención de fracción reducida. Explica qué cambia si el problema exige además $x \geq 0$.

Solución. El exponente $2/3$ está reducido y su denominador es impar, así que admite bases negativas; el cero también está definido porque el exponente es positivo. Para cualquier real x, la ecuación significa $(\sqrt[3]{x})^2 = 4$. Ponemos $u = \sqrt[3]{x}$ y obtenemos $u = 2$ o $u = -2$. Al elevar al cubo recuperamos $x = 8$ o $x = -8$. Ambos sirven: las raíces cúbicas son dos y menos dos, cuyos cuadrados valen cuatro. Si además se exige $x \geq 0$, solo queda ocho. La restricción debe proceder del enunciado o del dominio de una operación; imponerla por costumbre habría perdido una solución.

Exponentes racionales

Las leyes generales siguientes se han justificado para bases positivas. La convención para bases negativas define ciertos valores, pero no extiende automáticamente todas esas leyes.

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Definición	$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m$, con $a > 0$, $m \in \mathbb{Z}$ y $n \geq 1$ entero. Para índice uno se toma la propia base.
Mismo racional, mismo valor	Si $m/n = p/q$, con denominadores positivos, entonces $a^{m/n} = a^{p/q}$ para $a > 0$.
Producto y cociente	$a^r a^s = a^{r+s}$ y $a^r/a^s = a^{r-s}$, con $a > 0$ y $r, s \in \mathbb{Q}$.
Potencia de una potencia	$(a^r)^s = a^{rs}$, con $a > 0$ y $r, s \in \mathbb{Q}$.
Potencia de un producto	$(ab)^r = a^r b^r$, con $a, b > 0$ y $r \in \mathbb{Q}$.
Base cero	$0^r = 0$ cuando $r \in \mathbb{Q}$ y $r > 0$. No se incluyen exponentes cero o negativos.

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Base negativa	Para $a < 0$ se reduce m/n con $n > 0$. Si n es impar, $a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m$; si n es par, no se define un valor real.

Pruebas. Apéndice: «Exponentes racionales sin ambigüedad».

Comparar antes de aproximar

Para $0 \leq u < v$, las potencias naturales conservan el orden. En consecuencia, las raíces de índice fijo conservan el orden de los radicandos donde las hemos definido. Así, $\sqrt{7} < \sqrt{8}$ sin calcular decimales. Para comparar $\sqrt{7}$ con $8/3$, ambos positivos, podemos comparar sus cuadrados: $7 < 64/9$ porque $63 < 64$. La comparación es reversible precisamente porque restringimos la comparación de cuadrados a números no negativos.

Al variar el exponente racional sobre una base fija, importa si la base supera uno. Si $a > 1$ y $r < s$, entonces $a^s/a^r = a^{s-r} > 1$, de modo que $a^r < a^s$. Para justificar la última desigualdad, escribimos $s - r = m/n > 0$: la raíz $a^{1/n}$ supera uno, pues su potencia n es mayor que uno, y su potencia m también. Si $0 < a < 1$, el recíproco $1/a$ supera uno y se obtiene la desigualdad inversa: $a^r > a^s$. Para $a = 1$ todos los valores son uno.

Problema 17. Ordenar sin calculadora

Enunciado. Ordena $\sqrt{7}$, $8/3$ y $\sqrt{8}$. Después compara $(1/3)^{-2}$ con $(1/3)^{-1}$.

Solución. Los tres primeros números son positivos, por lo que sus cuadrados permiten compararlos. Expresados en novenos, esos cuadrados son $63/9$, $64/9$ y $72/9$. Resulta $\sqrt{7} < 8/3 < \sqrt{8}$. En la segunda comparación, los recíprocos dan $(1/3)^{-2} = 9$ y $(1/3)^{-1} = 3$. El exponente -2 es menor que -1, pero produce el valor mayor porque la base está entre cero y uno. La cuenta confirma la regla de orden para esa clase de bases.

Problema 18. Una raíz entre dos decimales

Enunciado. Demuestra que $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$ sin usar una aproximación ya calculada de $\sqrt{2}$.

Solución. Elevamos los dos extremos positivos al cuadrado. Tenemos $1{,}41^2 = 1{,}9881 < 2$ y $1{,}42^2 = 2{,}0164 > 2$. Como el cuadrado crece en los no negativos, la raíz positiva de dos queda entre esos extremos. La afirmación es una cota, no una igualdad decimal. En particular, usar $1{,}41$ como aproximación por defecto deja una diferencia positiva menor que $0{,}01$. El capítulo siguiente desarrollará cómo expresar y controlar estos errores.

Comparaciones de potencias y raíces

Las condiciones sobre base, exponente y radicando determinan qué comparación se conserva.

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Potencias naturales	$0 \le u < v \Longrightarrow u^n < v^n$, con $n \ge 1$ entero. Las raíces de índice fijo conservan el orden en su dominio real.
Base mayor que uno	Si $a > 1$ y $r < s$ son racionales, entonces $a^r < a^s$.
Base entre cero y uno	Si $0 < a < 1$ y $r < s$ son racionales, entonces $a^r > a^s$. Para $a = 1$, todas las potencias racionales valen uno.

Pruebas. Apéndice: «Comparar potencias naturales», «Orden al cambiar el exponente».

Escribir cantidades a otra escala

La escritura 0,0000064 hace trabajar a la vista para contar ceros. La igualdad $0{,}0000064 = 6{,}4 \cdot 10^{-6}$ separa dos datos: un coeficiente de tamaño ordinario y una escala decimal. Un número real no nulo está en notación científica normalizada cuando se escribe

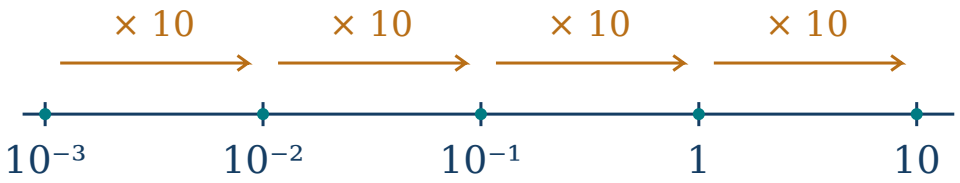
$$c \cdot 10^k, \qquad 1 \le |c| < 10, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Para cantidades positivas basta $1 \le c < 10$. El cero se escribe cero y no tiene un exponente normalizado único. La coma decimal que usamos en el texto tiene el mismo significado que el punto decimal de algunas calculadoras; no separa millares.

La normalización es única: si dos exponentes fueran distintos, pongamos $k < \ell$, la igualdad $c10^k = d10^\ell$ obligaría a $|c| = |d|10^{\ell-k} \ge 10$, contradiciendo $|c| < 10$. Intercambiar las dos escrituras descarta el otro orden de los exponentes; una vez que coinciden, dividir por esa misma potencia de diez determina un único coeficiente. La existencia se apoya en que las potencias de diez crecen sin cota y sus recíprocos se acercan cuanto se quiera a cero: entre dos potencias consecutivas queda cualquier número positivo. En efecto, $10^n \ge n + 1$ para todo entero $n \ge 0$, como se comprueba empezando en $n = 0$ y multiplicando por diez en cada paso; la propiedad arquimediana de los reales permite superar cualquier cota. Aplicada al recíproco de una cantidad positiva, da también una potencia de diez menor que ella.

Para un real $x \neq 0$, podemos elegir un natural N con $10^{-N} \le |x| < 10^N$. Entre los enteros desde $-N$ hasta N hay un mayor k que cumple $10^k \le |x|$: la lista es finita y contiene al menos a $-N$. Como $10^N > |x|$, el elegido cumple $k < N$, y su maximalidad da $|x| < 10^{k+1}$. Al tomar $c = x/10^k$ obtenemos el coeficiente normalizado. Esta elección localiza el exponente mediante dos potencias consecutivas. Para un decimal finito basta localizar su primera cifra no nula.

En una escala lineal, distancias iguales representan diferencias iguales. Para representar muchas escalas a la vez podemos dar el mismo espacio a cada multiplicación por diez. Los puntos 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 1 y 10 quedan igualmente separados en el siguiente dibujo. Sus diferencias numéricas no son iguales. Esta es la idea de una escala logarítmica decimal; estudiaremos su construcción y los valores intermedios en el capítulo de logaritmos.



Problema 19. Normalizar sin cambiar el valor

Enunciado. Escribe en notación científica 0,0000064, 73 000 000 y −0,0032. Explica cómo verificar los exponentes.

Solución. La primera cantidad es $6{,}4 \cdot 10^{-6}$: multiplicar 6,4 por una millonésima sitúa su seis en la sexta posición decimal. La segunda es $7{,}3 \cdot 10^{7}$, porque 7,3 veces diez millones da setenta y tres millones. La tercera es $-3{,}2 \cdot 10^{-3}$. El signo pertenece al coeficiente; su valor absoluto es 3,2, dentro del intervalo requerido. En cada caso podemos reconstruir la escritura inicial multiplicando o dividiendo por la potencia de diez, en vez de confiar solo en contar desplazamientos de la coma.

Para multiplicar cantidades en notación científica multiplicamos coeficientes y sumamos exponentes; para dividirlas dividimos coeficientes y restamos exponentes. Después normalizamos si hace falta. Al sumar, en cambio, debemos expresar ambas cantidades con la misma potencia de diez, del mismo modo que elegíamos una unidad común al sumar fracciones.

Problema 20. Una división entre cantidades pequeñas

Enunciado. Calcula $\dfrac{6 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 10^{-10}}$ y expresa la respuesta normalizada. Interpreta el resultado como razón.

Solución. El divisor es no nulo. Dividimos los coeficientes y restamos exponentes:

$$(6/2)10^{-7-(-10)} = 3 \cdot 10^{3} = 3000.$$

La primera cantidad es tres mil veces la segunda. Que ambas sean menores que uno no exige que su cociente también lo sea. Al comprobar, $(3 \cdot 10^{3})(2 \cdot 10^{-10}) = 6 \cdot 10^{-7}$, que recupera el dividendo.

Problema 21. Sumar exige una escala común

Enunciado. Suma $3{,}2 \cdot 10^{5}$ y $4{,}7 \cdot 10^{4}$. Calcula también $(8 \cdot 10^{7})(5 \cdot 10^{-3})$ y normaliza ambos resultados.

Solución. En la suma escribimos $4{,}7 \cdot 10^{4} = 0{,}47 \cdot 10^{5}$. Queda $(3{,}2 + 0{,}47)10^{5} = 3{,}67 \cdot 10^{5}$, equivalente a $320\,000 + 47\,000 = 367\,000$. En el producto obtenemos $40 \cdot 10^{4}$; como cuarenta no

está entre uno y diez, lo escribimos $4 \cdot 10^5$. Sumar exponentes en la suma inicial habría ignorado que se están reuniendo cantidades, no multiplicando factores.

Las unidades también se elevan

Los prefijos decimales permiten elegir unidades de un tamaño conveniente. En los ejemplos usaremos kilo, símbolo k, para 10^3; mega, M, para 10^6; giga, G, para 10^9; mili, m, para 10^{-3}; micro, µ, para 10^{-6}; y nano, n, para 10^{-9}. Los símbolos distinguen mayúsculas y minúsculas: Mm significa megámetro y mm significa milímetro. El prefijo va unido al símbolo de la unidad.

Al pasar de centímetros a metros, cada longitud se multiplica por 10^{-2}. Un centímetro cuadrado contiene dos factores de longitud; por tanto $1\,\mathrm{cm}^2 = (10^{-2}\,\mathrm{m})^2 = 10^{-4}\,\mathrm{m}^2$. Para un centímetro cúbico aparecen tres factores y la conversión es $10^{-6}\,\mathrm{m}^3$. El exponente afecta a la unidad completa, incluido su prefijo. El análisis de unidades permite descubrir errores aunque la cuenta con los coeficientes parezca correcta.

Problema 22. El prefijo dentro del cuadrado

Enunciado. Expresa $0{,}25\,\mathrm{mm}^2$ en metros cuadrados y $3\,\mathrm{cm}^3$ en metros cúbicos. Convierte además $450\,\mathrm{nm}$ a micrómetros.

Solución. Como un milímetro equivale a 10^{-3} metros, un milímetro cuadrado equivale a 10^{-6} metros cuadrados. Así, $0{,}25\,\mathrm{mm}^2 = 0{,}25 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^2 = 2{,}5 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}^2$. Para el volumen, $1\,\mathrm{cm}^3 = (10^{-2}\,\mathrm{m})^3 = 10^{-6}\,\mathrm{m}^3$, de modo que la respuesta es $3 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^3$. Finalmente, $450\,\mathrm{nm} = 450 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m} = 0{,}45 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m} = 0{,}45\,\mu\mathrm{m}$. La última cantidad es menor que un micrómetro, coherente con que un micrómetro contiene mil nanómetros.

Problema 23. Cuántas escalas separan dos longitudes

Enunciado. En un modelo se comparan una longitud de $2\,\mathrm{km}$ y otra de $5\,\mu\mathrm{m}$. ¿Cuántas veces mayor es la primera? Indica cuántos pasos decimales separan sus potencias normalizadas y qué información adicional aporta el cociente exacto.

Solución. Usamos metros en ambas longitudes: $2 \cdot 10^3$ y $5 \cdot 10^{-6}$. Su razón es $(2/5)10^9 = 4 \cdot 10^8$, un número sin unidad. Las potencias normalizadas 10^3 y 10^{-6} están separadas por nueve pasos de multiplicación por diez. Los coeficientes dos y cinco ajustan la razón: el factor exacto es cuatrocientos millones, no mil millones. Cuando hablemos de orden de magnitud indicaremos la convención: aquí usamos el exponente de la notación científica normalizada. Otra convención aproxima a la potencia de diez más cercana y puede dar una etiqueta distinta cerca de un umbral; la razón calculada no depende de esa elección.

Operar con escalas decimales

Los exponentes k, ℓ son enteros. Después de operar se normaliza el coeficiente si el resultado se quiere en notación científica.

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Normalización	$x = c10^k$, con $x \neq 0$ y $1 \leq \lvert c\rvert < 10$. El cero no tiene exponente normalizado único.
Producto	$(c10^k)(d10^\ell) = cd\,10^{k+\ell}$.
Cociente	$(c10^k)/(d10^\ell) = (c/d)10^{k-\ell}$, con $d \neq 0$.
Suma a escala común	$c10^k + d10^k = (c+d)10^k$. Si las escalas difieren, primero se expresan con el mismo exponente.
Unidades elevadas	Si $1\,U = 10^k\,V$, entonces $(1\,U)^n = 10^{kn}\,V^n$, para n entero positivo. El factor de conversión también se eleva.

Pruebas. Apéndice: «Escalas decimales y unidades».

Hasta dónde llega la definición

Ya tiene significado $2^{3/2}$, porque $3/2$ es racional. La escritura $2^{\sqrt{2}}$ plantea una pregunta nueva: cómo asignarle un valor compatible con las potencias racionales y con su orden. Calcular potencias de base dos para exponentes racionales próximos a la raíz de dos sugiere una vía de aproximación. Para que esa vía determine un número necesitamos demostrar su existencia, su unicidad y la compatibilidad de las aproximaciones elegidas.

Una construcción posible, para $a > 1$ y un real x, es definir a^x como la menor cota superior de los valores a^r con r racional y $r \leq x$. Se debe probar que el conjunto no es vacío, que está acotado, que recupera las potencias racionales y que conserva las leyes. La completitud resuelve la existencia de la cota; las otras afirmaciones exigen argumentos adicionales. Para $0 < a < 1$ se puede trabajar con el recíproco, y para $a = 1$ el valor será uno. Dejaremos esa construcción y su relación con los límites para el estudio de las funciones exponenciales. Las operaciones de este capítulo han usado exponentes enteros y racionales, con dominios justificados.

Problema 24. Lo que unas cotas permiten afirmar

Enunciado. A partir de $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$, un estudiante dice que ya ha definido $2^{\sqrt{2}}$ por producto repetido. Explica qué falla y qué cotas corresponderán al valor cuando se construya la extensión creciente de las potencias de base dos.

Solución. El producto repetido define exponentes enteros positivos; no indica qué significaría repetir un factor $\sqrt{2}$ veces. Los extremos $2^{1{,}41} = 2^{141/100}$ y $2^{1{,}42} = 2^{71/50}$ sí están definidos mediante raíces y potencias enteras. Una extensión estrictamente creciente deberá satisfacer $2^{141/100} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{71/50}$. Esta es una condición necesaria sobre el valor futuro; dar un intervalo no construye por sí solo un número único ni demuestra la existencia de la extensión. La diferencia entre una operación ya definida y una extensión por justificar forma parte del razonamiento.

Ejercicios para trabajar sin profesor

1. Un cultivo ideal comienza con cinco células y duplica su población en cada etapa. ¿Cuántas hay después de ocho etapas? ¿Cuál es el factor entre las etapas dos y ocho?

2. Calcula $(-2)^6$, -2^6 y $(-2)^5$. Identifica la base en cada caso.

3. Calcula $3^4 \cdot 3^2/3^3$ sin desarrollar primero las potencias.

4. Compara $(3^2)^3$ y 3^{2^3}. Comprueba con números que $(3+1)^3$ no es 3^3+1^3.

5. Calcula 4^{-2} y $(1/4)^{-2}$. Explica la diferencia de tamaño.

6. Decide cuáles están definidos y calcula los que lo estén: 0^7, $(-5)^0$, 0^{-2} y 0^0.

7. Simplifica $(a^{-3}b^2)/(a^{-1}b^{-2})$ y conserva todas las restricciones iniciales.

8. Un cuadrado tiene área $50\,\mathrm{cm}^2$. Halla su lado y resuelve por separado $x^2 = 50$.

9. Calcula $\sqrt[3]{-216}$ y $\sqrt[4]{16}$. Resuelve $x^4 = 16$ y decide si $\sqrt{-16}$ es real.

10. Simplifica $\sqrt{(2x+1)^2}$. Evalúa para $x = -2$ y determina cuándo el valor es $2x+1$.

11. Reduce $\sqrt{75} + \sqrt{12} - \sqrt{27}$ a un múltiplo de un solo radical.

12. Calcula $\sqrt{8/3}\sqrt{6}$. Explica por qué $\sqrt{(-2)(-8)}$ no se puede separar en dos raíces cuadradas reales.

13. Racionaliza $1/(\sqrt{3}-1)$ y verifica el resultado multiplicando por el denominador original.

14. Calcula $81^{3/4}$ y $32^{-2/5}$ a partir de raíces positivas.

15. Compara $\sqrt{(-5)^2}$ y $(-5)^1$. Explica qué hipótesis impide aplicar la ley de potencia de una potencia con exponentes racionales.

16. Resuelve $x^{3/2} = 27$ en los reales e indica el dominio usado.

17. Ordena $\sqrt{5}$, $9/4$ y $\sqrt{6}$ sin decimales. Compara también $(1/2)^3$ con $(1/2)^5$.

18. Demuestra que $2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24$ y da una cota para el error de aproximar por $2{,}23$.

19. Normaliza $0{,}00000072$, $508\,000\,000$ y $-0{,}045$.

20. Calcula $(9 \cdot 10^{-5})/(3 \cdot 10^{-8})$ y comprueba el cociente mediante una multiplicación.

21. Calcula $7{,}8 \cdot 10^{-4} + 6 \cdot 10^{-5}$ y $(2{,}5 \cdot 10^6)(8 \cdot 10^{-2})$. Normaliza.

22. Convierte $2{,}4\,\mathrm{cm}^2$ a metros cuadrados y $0{,}008\,\mathrm{mm}^3$ a metros cúbicos. Expresa también $2500\,\mathrm{nm}$ en micrómetros.

23. Compara una longitud de $3\,\mathrm{Mm}$ con otra de $6\,\mathrm{mm}$: calcula la razón, la diferencia de exponentes normalizados y la diferencia entre esas dos informaciones.

24. Si $1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$, ¿qué cotas tendrá $3^{\sqrt{3}}$ cuando se construya la extensión creciente? Explica por qué tomar cada vez más cifras decimales no constituye todavía una demostración de su existencia.

Soluciones desarrolladas

Ejercicio 1. Una población inicial distinta de uno

Cada etapa multiplica por dos toda la población anterior. Tras ocho etapas hay $5 \cdot 2^8 = 5 \cdot 256 = 1280$ células en el modelo. De la etapa dos a la ocho transcurren seis etapas y el factor es $2^6 = 64$. En efecto, la etapa dos tenía $5 \cdot 2^2 = 20$ células y $1280/20 = 64$. La potencia cuenta las etapas de duplicación; el cinco registra la población inicial y no forma parte de la base repetida.

Ejercicio 2. La base incluye lo que encierran los paréntesis

En $(-2)^6$ la base es -2 y hay seis factores; el resultado es 64. En -2^6, la potencia tiene base dos y el signo exterior toma el opuesto: obtenemos -64. En $(-2)^5$ queda un factor negativo sin pareja y el valor es -32. Reemplazar las tres escrituras por una única regla sobre «el signo menos» ocultaría el alcance de los paréntesis.

Ejercicio 3. Contar los factores que quedan

El numerador reúne $4 + 2 = 6$ factores iguales a tres. El denominador cancela tres de ellos y deja $3^{6-3} = 3^3 = 27$. Todas las cancelaciones son válidas porque la base es no nula. Como comprobación independiente, $81 \cdot 9/27 = 729/27 = 27$.

Ejercicio 4. Dos exponentes agrupados de manera distinta

La potencia $(3^2)^3$ reúne tres grupos de dos treses: es $3^6 = 729$. En 3^{2^3}, primero se calcula el exponente $2^3 = 8$, por lo que el resultado es $3^8 = 6561$. Para la suma, $(3 + 1)^3 = 4^3 = 64$ y $3^3 + 1^3 = 28$. El contraejemplo basta para refutar la regla propuesta: elevar una suma al cubo produce además términos mixtos.

Ejercicio 5. El recíproco cambia el tamaño

Tenemos $4^{-2} = 1/4^2 = 1/16$. En cambio, $(1/4)^{-2} = 1/(1/4)^2 = 1/(1/16) = 16$. El primer recíproco invierte un número mayor que uno; el segundo invierte una fracción positiva menor que uno. Ninguna de las dos respuestas es negativa: el exponente negativo exige invertir, no cambiar el signo.

Ejercicio 6. Comprobar primero si hay definición

$0^7 = 0$ porque el producto contiene factores nulos. $(-5)^0 = 1$ porque la base es distinta de cero. 0^{-2} no está definido: exigiría el recíproco de cero. Tampoco hemos definido 0^0. La identidad $a^0 = 1$ se obtuvo bajo la hipótesis $a \neq 0$ y no resuelve ese último caso.

Ejercicio 7. Cancelar no amplía el dominio original

La presencia de a^{-3} y de a^{-1} exige $a \neq 0$; b^{-2} exige $b \neq 0$. Bajo estas condiciones, el denominador es no nulo. Restamos exponentes de igual base: $a^{-3-(-1)}b^{2-(-2)} = a^{-2}b^4 = b^4/a^2$. Conservamos $a \neq 0$ y $b \neq 0$ aunque la fórmula final, considerada aisladamente, permita sustituir $b = 0$. Como control, reescribir el cociente como $(b^2/a^3)/(1/(ab^2))$ lleva al mismo resultado multiplicando por ab^2.

Ejercicio 8. Recuperar la longitud positiva

El lado mide $\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$ centímetros. Su cuadrado es $25 \cdot 2 = 50$ centímetros cuadrados y su signo es positivo, como exige una longitud. La ecuación numérica tiene las soluciones $x = 5\sqrt{2}$ y $x = -5\sqrt{2}$. No hay otras porque el valor absoluto de cualquier solución debe ser la raíz principal de cincuenta.

Ejercicio 9. Raíces pares e impares

La raíz cúbica es -6 porque $(-6)^3 = -216$. La raíz cuarta principal de dieciséis es dos, porque $2^4 = 16$ y dos es no negativo. La ecuación $x^4 = 16$ admite $x = 2$ y $x = -2$, las únicas posibilidades para un valor absoluto igual a dos. $\sqrt{-16}$ no tiene valor real: el cuadrado de todo número real es no negativo.

Ejercicio 10. Una distancia al cero

La raíz principal del cuadrado es $|2x+1|$. Para $x = -2$ obtenemos $|-4+1| = |-3| = 3$. Coincide con $2x+1$ cuando $2x+1 \geq 0$, es decir, cuando $x \geq -1/2$. Para $x < -1/2$ vale $-(2x+1) = -2x-1$. El valor absoluto conserva la exigencia de que la raíz cuadrada sea no negativa.

Ejercicio 11. Reunir múltiplos de una misma raíz

Extraemos los cuadrados: $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$, $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ y $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$. La expresión se transforma en $(5 + 2 - 3)\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$. Cada extracción usa radicandos positivos y puede verificarse elevando al cuadrado la raíz obtenida. La resta se aplica después de identificar el término completo que se sustrae.

Ejercicio 12. Un producto permitido y una separación imposible

Como $8/3$ y seis son positivos, el producto de raíces es $\sqrt{(8/3)6} = \sqrt{16} = 4$. Por otra parte, $\sqrt{(-2)(-8)} = \sqrt{16} = 4$ tiene sentido real, pero ni $\sqrt{-2}$ ni $\sqrt{-8}$ lo tienen. La igualdad que separa una raíz cuadrada de un producto requiere que ambos factores sean no negativos. Aquí falla esa condición aunque el producto sea positivo.

Ejercicio 13. Multiplicar por el conjugado

La desigualdad $\sqrt{3} > 1$ garantiza que el denominador inicial no es cero. Multiplicamos por $(\sqrt{3}+1)/(\sqrt{3}+1)$ y obtenemos $(\sqrt{3}+1)/(3-1) = (\sqrt{3}+1)/2$. Para comprobar, multiplicamos por $\sqrt{3}-1$: el resultado es $(3-1)/2 = 1$. El dos permanece en el denominador; omitirlo produciría un valor dos veces mayor.

Ejercicio 14. Raíz primero, potencia después

La raíz cuarta de ochenta y uno es tres; así $81^{3/4} = 3^3 = 27$. La raíz quinta positiva de treinta y dos es dos y $32^{-2/5} = 2^{-2} = 1/4$. Ambas bases son positivas. Para comprobar la segunda respuesta, $32^{2/5} = 4$ y su producto por $1/4$ vale uno, como exige el exponente opuesto.

Ejercicio 15. Un cuadrado no conserva el signo

$\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$, mientras que $(-5)^1 = -5$. La ley $(a^r)^s = a^{rs}$ para exponentes racionales se demostró con base $a > 0$. Aquí la base inicial es negativa. La operación explícita de elevar al cuadrado y tomar la raíz principal devuelve $|-5|$, por lo que usar la ley fuera de su dominio cambia el valor.

Ejercicio 16. Una sustitución con dominio

El exponente $3/2$ está reducido y su denominador es par, de modo que las bases negativas no tienen valor real. El cero se admite porque el exponente es positivo. Por tanto $x \geq 0$. Ponemos

$u = \sqrt{x}$, con $u \geq 0$. La ecuación se convierte en $u^3 = 27$ y tiene la única solución $u = 3$. Por tanto $x = u^2 = 9$. La sustitución conserva la información del signo: no hay una segunda solución negativa para u. Finalmente, $9^{3/2} = (\sqrt{9})^3 = 3^3 = 27$ verifica $x = 9$.

Ejercicio 17. Comparar cuadrados y recíprocos

Los cuadrados de los tres números positivos son $5 = 80/16$, $81/16$ y $6 = 96/16$. Su orden da $\sqrt{5} < 9/4 < \sqrt{6}$. Además, $(1/2)^3 = 1/8$ y $(1/2)^5 = 1/32$, de modo que la primera potencia es mayor. Aumentar el exponente de una base entre cero y uno disminuye su valor; aquí se puede ver también que dos multiplicaciones adicionales por un medio dividen por cuatro.

Ejercicio 18. Una cota obtenida por cuadrados

$2{,}23^2 = 4{,}9729 < 5$ y $2{,}24^2 = 5{,}0176 > 5$. Los extremos son positivos y el cuadrado conserva su orden, así que $2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24$. La aproximación por 2,23 es por defecto y su error absoluto es $\sqrt{5} - 2{,}23$, positivo y menor que 0,01. No hemos afirmado que 2,23 sea el redondeo a centésimas, pues esa pregunta exige localizar la raíz respecto del punto medio 2,235.

Ejercicio 19. Localizar la primera cifra no nula

Las escrituras normalizadas son $7{,}2 \cdot 10^{-7}$, $5{,}08 \cdot 10^{8}$ y $-4{,}5 \cdot 10^{-2}$. Los valores absolutos de sus coeficientes están entre uno inclusive y diez exclusive. Para verificar, multiplicar 7,2 por una diezmillonésima da 0,00000072; multiplicar 5,08 por cien millones da 508 000 000; dividir $-4{,}5$ por cien da $-0{,}045$.

Ejercicio 20. Restar un exponente negativo

El cociente de coeficientes es tres y el exponente es $-5 - (-8) = 3$. Obtenemos $3 \cdot 10^3 = 3000$. Como comprobación, $(3 \cdot 10^3)(3 \cdot 10^{-8}) = 9 \cdot 10^{-5}$. Esta vuelta al dividendo permite detectar el error de escribir $-5 - 8 = -13$, que habría producido una cantidad diminuta en vez de una razón de tres mil.

Ejercicio 21. Unidades comunes para sumar

Reescribimos $6 \cdot 10^{-5} = 0{,}6 \cdot 10^{-4}$ y sumamos: $(7{,}8 + 0{,}6)10^{-4} = 8{,}4 \cdot 10^{-4}$. En el producto, los coeficientes dan veinte y los exponentes suman $6 + (-2) = 4$. Queda $20 \cdot 10^4 = 2 \cdot 10^5$. Cada respuesta está normalizada. La suma también puede comprobarse como $0{,}00078 + 0{,}00006 = 0{,}00084$.

Ejercicio 22. Elevar el factor de conversión

Como $1\,\text{cm} = 10^{-2}\,\text{m}$, el área es $2{,}4 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2$. Para el volumen, $1\,\text{mm}^3 = (10^{-3}\,\text{m})^3 = 10^{-9}\,\text{m}^3$; multiplicando por $0{,}008 = 8 \cdot 10^{-3}$ obtenemos $8 \cdot 10^{-12}\,\text{m}^3$. Finalmente, $2500\,\text{nm} = 2500 \cdot 10^{-9}\,\text{m} = 2{,}5 \cdot 10^{-6}\,\text{m} = 2{,}5\,\mu\text{m}$. Son dos micrómetros y medio, coherentes con mil nanómetros por micrómetro.

Ejercicio 23. Los coeficientes también comparan

Tres megámetros son $3 \cdot 10^6$ metros y seis milímetros son $6 \cdot 10^{-3}$ metros. La razón es $(3/6)10^{6-(-3)} = 0{,}5 \cdot 10^9 = 5 \cdot 10^8$. Las potencias normalizadas están separadas por nueve pasos decimales; el cociente exacto es quinientos millones porque también incorpora la razón 3/6. Las unidades se

cancelan al dividir longitudes expresadas en metros. Restar exponentes sin comparar coeficientes solo da parte de la información.

Ejercicio 24. Aproximar presupone una construcción

La extensión creciente de base tres deberá cumplir $3^{173/100} < 3^{\sqrt{3}} < 3^{87/50}$. Los extremos tienen sentido por la definición de exponente racional. Podríamos estrechar las cotas de $\sqrt{3}$ y producir nuevos extremos; para concluir que determinan un valor único hace falta justificar la existencia y coincidencia de sus límites o una construcción equivalente por completitud. Una lista de valores de calculadora puede orientar la exploración, pero no demuestra esas propiedades. El objeto a construir es una potencia de exponente real, no una nueva manera de contar factores enteros.

Diagnóstico de salida

Antes de continuar, explica por qué un exponente negativo puede dar un resultado mayor que uno; por qué $\sqrt{x^2}$ necesita valor absoluto; y por qué las potencias de diez se combinan de manera distinta en una suma y en un producto. Intenta hacerlo con un ejemplo propio y después con las condiciones generales. Si puedes indicar dónde intervienen una base no nula, un radicando no negativo o una unidad común, ya estás controlando los pasos decisivos.

El espesor del modelo de dobleces tiene un valor exacto, igual que el lado del cuadrado de área dos. El primero admite una escritura decimal finita; el segundo puede encerrarse entre decimales cuyos cuadrados sabemos comparar. Elegir uno de esos decimales como aproximación exige conservar también la cota que lo separa del valor buscado.

CAPÍTULO 4

Estimación, aproximación y control del error

Una mesa mide 1,20 metros de largo y 0,80 de ancho. Multiplicar las dos lecturas da 0,96 metros cuadrados. Si la regla solo distingue centímetros, las medidas podrían haber sido algo mayores o menores: la cuenta es exacta para los números escritos, pero el área de la mesa no queda determinada con esa misma exactitud. Una calculadora que mostrara doce decimales no habría medido mejor la mesa.

También aparece la aproximación cuando los datos son exactos. El lado de un cuadrado de área dos es $\sqrt{2}$; al sustituirlo por 1,41 introducimos una diferencia que no estaba en el problema geométrico. Podemos necesitar un decimal para cortar una pieza, comparar precios o decidir si algo cabe. La pregunta matemática consiste entonces en saber cuánto puede cambiar la respuesta y si ese cambio afecta a la decisión.

Hay situaciones en que basta una estimación de tamaño: cuánta agua consume una casa durante un año, cuántas hojas requiere una tirada. Otras exigen una garantía: si un cable alcanzará, si dos medidas permiten afirmar cuál es mayor. En este capítulo conservaremos esa diferencia. Una estimación depende de supuestos que debemos poder revisar; una cota afirma que el valor buscado permanece dentro de unos límites justificados.

Lo exacto y lo que decidimos conservar

El número $3/8$ tiene una escritura decimal finita, 0,375, y ambas expresiones son exactamente iguales. El número $\sqrt{2}$ también está dado exactamente, aunque no podamos escribir todas sus cifras decimales. Una representación exacta identifica el número mediante una expresión igual a él.

Escribimos $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ para señalar una aproximación. El símbolo por sí solo no especifica cuánto difieren ambos números. Si añadimos $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$, sabemos que la diferencia respecto de 1,41 es positiva y menor que 0,01. Esa información puede ser más útil que muchas cifras sin una garantía.

Problema 1. Un decimal puede ser exacto

Enunciado. Clasifica $1/8 = 0{,}125$ y $\sqrt{2} \approx 1{,}4$. Si usamos 1,4 como lado de un cuadrado que debía tener área dos, ¿qué área obtenemos y cuánto falta?

Solución. La primera igualdad es exacta: multiplicar 0,125 por ocho da uno. La segunda reemplaza la raíz por un número distinto, pues $1{,}4^2 = 1{,}96 \neq 2$. El cuadrado construido con ese lado tiene área 1,96 y le faltan $2 - 1{,}96 = 0{,}04$ unidades cuadradas respecto del área prevista. La diferencia en el área no es igual a la diferencia en el lado. El procedimiento de elevar al cuadrado transforma también la aproximación y exige su propio control.

Para truncar un decimal a una posición elegida conservamos las cifras hasta esa posición y suprimimos las posteriores. En números negativos esto se hace sobre el valor absoluto y después se restituye el signo; truncar acerca el número al cero. Si la posición elegida representa unidades de tamaño u, la distancia entre el número y su truncación es menor que u. Por ejemplo, a centésimas usamos $u = 0{,}01$.

Redondear consiste en elegir un múltiplo de u cuya distancia al número sea mínima. Si un número cae exactamente a mitad de camino, hay dos candidatos igual de cercanos. En este libro elegiremos en ese empate el que se aleja del cero. Así, a centésimas, 2,345 se redondea a 2,35 y $-2{,}345$ a $-2{,}35$. Otras convenciones resuelven el empate de otro modo; lo decisivo es declarar cuál se usa y mantenerla.

Problema 2. Truncar un número negativo

Enunciado. Trunca y redondea $-2{,}71828$ a centésimas. Calcula la distancia exacta entre el número original y cada resultado.

Solución. La truncación conserva el signo y las dos primeras cifras decimales: obtenemos $-2{,}71$. Su distancia al original es $|-2{,}71828-(-2{,}71)| = 0{,}00828$. Los múltiplos vecinos de una centésima son $-2{,}72$ y $-2{,}71$; el primero está a distancia $0{,}00172$ y es el más cercano. El redondeo es por tanto $-2{,}72$. En ambos casos la distancia es positiva; lo que cambia de signo es la diferencia orientada. La truncación queda por encima del número negativo, mientras que el redondeo elegido queda por debajo.

La garantía del redondeo se deduce de la separación entre múltiplos consecutivos de u. Un número situado entre dos de ellos está, como máximo, a mitad de esa separación del más cercano. Si r es el resultado de redondear x,

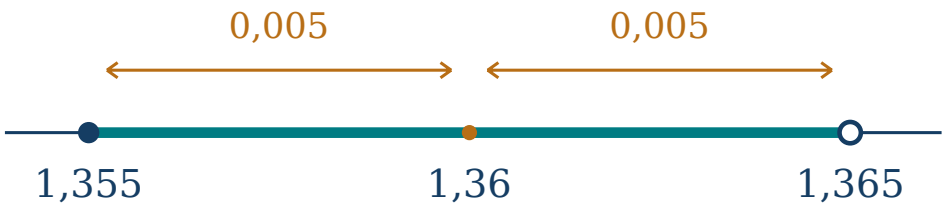
$$|x - r| \leq \frac{u}{2}.$$

La igualdad puede ocurrir en un empate. Esta cota describe la operación de redondear un número conocido. Para aplicarla a una lectura de instrumento debemos suponer además que el instrumento redondea correctamente y que no intervienen otros errores de calibración, resolución o uso. Una pantalla con dos decimales no proporciona por sí sola esa garantía física.

Problema 3. La frontera entre dos redondeos

Enunciado. Un número positivo, al redondearse a centésimas, da 1,36. Describe todos los valores posibles del número antes de redondear y explica los extremos.

Solución. Los puntos medios con los vecinos 1,35 y 1,37 son 1,355 y 1,365. Desde 1,355 inclusive se elige 1,36: en el empate inferior, ese es el candidato más alejado del cero. En 1,365 se elige ya 1,37. Los valores posibles forman $[1{,}355, 1{,}365)$. Todos distan de 1,36 a lo sumo 0,005, pero la cota simétrica cerrada incluye también el extremo superior que nuestra regla de desempate excluye. Para una garantía de error puede servir esa cota algo más amplia; para describir exactamente la preimagen del redondeo hay que cuidar los extremos.



Problema 4. Redondear dos veces puede cambiar la respuesta

Enunciado. Redondea 9,949 directamente a décimas. Compara con redondear primero a centésimas y luego a décimas.

Solución. Para la decisión directa, el punto medio entre 9,9 y 10,0 es 9,95. Como $9{,}949 < 9{,}95$, el resultado es 9,9. Si primero redondeamos a centésimas obtenemos 9,95. Ese valor cae exactamente en el empate de las décimas y se redondea a 10,0. La primera operación ha desplazado el número hasta una frontera que antes no alcanzaba. Por eso conviene conservar las cifras de trabajo y efectuar el redondeo solicitado al final, usando el valor original o una aproximación suficientemente controlada.

Qué dicen las cifras significativas

En 0,004760, los ceros iniciales sitúan la escala y las cuatro cifras 4, 7, 6, 0 expresan la precisión de la escritura. El cero final ocupa una posición que hemos decidido mostrar. En cambio, una escritura como 4500 puede resultar ambigua en un informe de medidas: quizá se contaron exactamente cuatro mil quinientos objetos, quizá se redondeó a centenas, quizá a decenas. La notación científica permite aclarar la intención: $4{,}5 \cdot 10^3$ muestra dos cifras significativas y $4{,}50 \cdot 10^3$ muestra tres.

Para redondear a s cifras significativas un número no nulo, localizamos la primera cifra no nula y contamos desde ella. Si $10^k \le |x| < 10^{k+1}$, la posición de la cifra s corresponde al tamaño $u = 10^{k-s+1}$. Redondeamos a esa posición. Puede producirse un acarreo que cambie la potencia normalizada; la cantidad de cifras que deseamos comunicar debe quedar clara en la escritura final.

Las cifras significativas comunican las posiciones que se conservan en la escritura de un número. Para vincularlas con una cota de error se necesita especificar cómo se obtuvo esa escritura. Las reglas prácticas que conservan cierta cantidad de cifras en productos o sumas ayudan a evitar resultados extravagantes, pero una cota explícita resulta preferible cuando la decisión necesita una

garantía. Los números contados exactamente y los factores de conversión definidos exactamente tampoco adquieren incertidumbre por tener pocas cifras escritas.

Problema 5. Tres escrituras y una información ausente

Enunciado. Indica las cifras significativas que muestran 0,004760, $4{,}50 \cdot 10^3$ y 4500. Redondea el primer número a tres cifras significativas. ¿Permite alguna de estas escrituras conocer por sí sola el error de un instrumento?

Solución. La primera escritura muestra cuatro cifras significativas, incluida la última posición cero; a tres cifras queda $0{,}00476 = 4{,}76 \cdot 10^{-3}$. El valor numérico no cambia en este caso, pero dejamos de mostrar una posición. $4{,}50 \cdot 10^3$ muestra tres cifras significativas. La escritura 4500 aislada no aclara la intención de sus ceros ni si procede de una cuenta exacta. Ninguna de ellas especifica por sí sola los errores de un instrumento. Si sabemos adicionalmente que 4500 es el redondeo correcto a centenas de una cantidad positiva, podremos usar la cota cincuenta; esa información procede del procedimiento declarado.

Garantías de truncación y redondeo

Estas cotas describen operaciones sobre un número. Para atribuirlas a una medición hacen falta hipótesis adicionales sobre el instrumento y su uso.

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Truncación hacia cero	$\lvert x - t\rvert < u$, donde t es la truncación a una posición de tamaño $u > 0$.
Redondeo al más cercano	$\lvert x - r\rvert \leq u/2$, con $u > 0$. En los empates se elige aquí el múltiplo que se aleja del cero.
Cifras significativas	Para $x \neq 0$, si $10^k \leq \lvert x\rvert < 10^{k+1}$ y se conservan $s \geq 1$ cifras, se redondea en la posición $u = 10^{k-s+1}$.

Pruebas. Apéndice: «Truncación, redondeo y cifras significativas».

Construir un intervalo que responda la pregunta

Una cota debe poder justificarse sin conocer previamente la respuesta con muchos decimales. Para acotar una raíz positiva basta buscar números cuyos cuadrados queden a ambos lados del radicando. La monotonía del cuadrado en los no negativos convierte esas comparaciones en cotas de la raíz. Podemos estrechar el intervalo cuanto haga falta, sin sustituir una desigualdad por una igualdad decimal.

Problema 6. Saber de qué lado del punto medio está una raíz

Enunciado. Acota $\sqrt{7}$ entre dos centésimas consecutivas y determina su redondeo a centésimas con una justificación exacta.

Solución. Calculamos $2{,}64^2 = 6{,}9696 < 7$ y $2{,}65^2 = 7{,}0225 > 7$. Resulta $2{,}64 < \sqrt{7} < 2{,}65$. Ese intervalo por sí solo no decide cuál de las dos centésimas es más cercana. Examinamos el punto medio: $2{,}645^2 = 6{,}996025 < 7$, así que $\sqrt{7} > 2{,}645$. La raíz está en la mitad superior del intervalo y se redondea a 2,65. El razonamiento usa únicamente cuadrados de decimales finitos, que son racionales exactos.

Problema 7. Una lectura truncada informa algo distinto

Enunciado. Una pantalla muestra $-1{,}36$. Describe los valores originales posibles si sabemos que trunca a centésimas y compáralos con los posibles si redondea a centésimas según nuestra convención.

Solución. Truncar hacia el cero produce $-1{,}36$ para $-1{,}37 < x \leq -1{,}36$: el extremo $-1{,}37$ ya conservaría sus propias centésimas. El intervalo es $(-1{,}37, -1{,}36]$. Si redondea, las fronteras son $-1{,}365$ y $-1{,}355$. En la inferior el empate se aleja del cero hasta $-1{,}37$, por lo que se excluye; en la superior se aleja hasta $-1{,}36$, por lo que se incluye. El intervalo es $(-1{,}365, -1{,}355]$. La misma lectura visible puede corresponder a conjuntos distintos cuando cambia el procedimiento.

Medir el tamaño de la diferencia

Si x es el valor exacto y a la aproximación, el **error absoluto** es $|a - x|$. Tiene las mismas unidades que la cantidad aproximada. Cuando $x \neq 0$, el **error relativo** es $|a - x|/|x|$; al dividir cantidades de la misma unidad obtenemos un número sin unidad. Multiplicar por cien lo expresa como porcentaje. El denominador es el tamaño del valor exacto, no el de la aproximación, salvo que se anuncie expresamente otra comparación.

Problema 8. El menor error absoluto puede pesar más

Enunciado. Se aproxima una longitud exacta de 1000 metros por 998 metros y otra de cuatro metros por 3,8 metros. Compara sus errores absolutos y relativos. ¿Qué ocurre con el error relativo si el valor exacto es cero?

Solución. En la primera longitud el error absoluto es dos metros y el relativo es $2/1000 = 0{,}002 = 0{,}2\%$. En la segunda, el error absoluto es 0,2 metros y el relativo $0{,}2/4 = 0{,}05 = 5\%$. Aunque el segundo error absoluto es diez veces menor, representa una fracción mayor de lo que se mide. Si el valor exacto es cero, la fórmula relativa exige dividir por cero y no está definida, incluso cuando la aproximación también sea cero. El error absoluto sigue teniendo sentido.

Frecuentemente ignoramos x, pero sabemos que $|x - a| \leq \delta$. Esta escritura equivale a $a - \delta \leq x \leq a + \delta$, con $\delta \geq 0$. El símbolo $a \pm \delta$ abrevia aquí ese intervalo de valores admisibles. No introduce una distribución de probabilidades ni un nivel de confianza. Puede representar una tolerancia garantizada o una cota derivada de otras cuentas, según los supuestos del problema.

Si además $|a| > \delta$, la desigualdad triangular da $|x| \geq |a| - \delta > 0$. Por tanto tenemos la garantía

$$\frac{|x-a|}{|x|} \le \frac{\delta}{|a|-\delta}.$$

Usar $\delta/|a|$ puede ser una aproximación conveniente cuando δ es pequeña respecto de $|a|$, pero no ofrece automáticamente la misma cota superior. Cerca del cero, la diferencia entre ambos denominadores se vuelve decisiva.

Problema 9. Acotar un error relativo sin conocer el valor exacto

Enunciado. Se sabe que $|x-50| \le 0{,}5$. ¿Garantiza la aproximación cincuenta un error relativo de a lo sumo 1%? Obtén una cota segura.

Solución. El valor exacto pertenece a $[49{,}5, 50{,}5]$. Su tamaño puede ser menor que cincuenta; por eso $0{,}5/50 = 1\%$ no basta como garantía. Usando el menor denominador admisible obtenemos $|x-50|/|x| \le 0{,}5/49{,}5 = 1/99$, aproximadamente 1,0101%. El extremo $x = 49{,}5$ alcanza esa razón y demuestra que la garantía del uno por ciento sería falsa. La fracción $1/99$ es la cota exacta; el porcentaje decimal escrito después es una aproximación descriptiva.

Errores y sus denominadores

El número x es el valor exacto y a su aproximación. Una cota de error no presupone una distribución de probabilidades.

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Error absoluto	$E_{\text{abs}} = \lvert a-x\rvert$. Conserva las unidades de la cantidad.
Error relativo	$E_{\text{rel}} = \lvert a-x\rvert/\lvert x\rvert$, con $x \neq 0$. Como porcentaje es $100E_{\text{rel}}$.
Cota como intervalo	$\lvert x-a\rvert \le \delta \iff a-\delta \le x \le a+\delta$, con $\delta \ge 0$.
Cota relativa segura	Si $\lvert x-a\rvert \le \delta < \lvert a\rvert$, entonces $E_{\text{rel}} \le \delta/(\lvert a\rvert-\delta)$. El denominador es una cota inferior positiva para $\lvert x\rvert$.

Pruebas. Apéndice: «Errores y cotas relativas seguras».

Llevar las cotas a través de las operaciones

Supongamos que $x \in [a,b]$ e $y \in [c,d]$. Sumar conserva el orden, de modo que $x+y \in [a+c, b+d]$. Para restar, el valor más pequeño de $x-y$ se obtiene combinando el menor x con el mayor y; por tanto $x-y \in [a-d, b-c]$. También podemos justificarlo escribiendo $-y \in [-d,-c]$ y sumando intervalos.

Si expresamos las cotas alrededor de valores centrales, $|x-a| \le \alpha$ e $|y-b| \le \beta$, la desigualdad triangular muestra que tanto el error de $a+b$ como el de $a-b$ está acotado por $\alpha+\beta$. En efecto, $(x+y)-(a+b) = (x-a)+(y-b)$; el valor absoluto de una suma no supera la suma de los valores absolutos. Para la resta aparece un signo distinto, pero la misma desigualdad. No necesitamos suponer independencia estadística para estas cotas deterministas.

Problema 10. Una suma y una diferencia

Enunciado. Dos longitudes satisfacen $x = 20 \pm 0{,}2$ metros e $y = 19 \pm 0{,}2$ metros. Obtén intervalos seguros para la suma y la diferencia.

Solución. Las longitudes pertenecen a $[19{,}8, 20{,}2]$ y $[18{,}8, 19{,}2]$. La suma está entre 38,6 y 39,4 metros, lo que podemos escribir $39 \pm 0{,}4$. La diferencia está entre $19{,}8 - 19{,}2 = 0{,}6$ y $20{,}2 - 18{,}8 = 1{,}4$ metros: es $1 \pm 0{,}4$. La misma cota absoluta pesa mucho más en la diferencia pequeña. Ambos intervalos son alcanzables si no se impone ninguna relación adicional entre las longitudes.

Para multiplicar intervalos positivos basta multiplicar los extremos inferiores entre sí y los superiores entre sí. Si hay signos distintos, esa receta puede fallar. En general, el producto queda entre el menor y el mayor de ac, ad, bc, bd. Para justificarlo, fijamos primero y: la expresión xy es lineal en x y alcanza sus extremos en a o b. Al variar después y, cada uno de los productos ay y by alcanza sus extremos en c o d. Así bastan las cuatro combinaciones, cualesquiera que sean los signos.

Problema 11. Los signos cambian qué extremos hay que combinar

Enunciado. Si $x \in [-2, 3]$ e $y \in [4, 5]$, encuentra el menor intervalo que contiene todos los productos xy permitidos sin otras restricciones.

Solución. Las cuatro combinaciones de extremos son $-2 \cdot 4 = -8$, $-2 \cdot 5 = -10$, $3 \cdot 4 = 12$ y $3 \cdot 5 = 15$. El mínimo es -10 y el máximo quince, de modo que $xy \in [-10, 15]$. Ambos extremos se alcanzan y ningún intervalo menor puede contener todos los productos. Multiplicar simplemente los dos extremos inferiores habría dado -8, perdiendo productos válidos como $(-2)5 = -10$.

Una forma útil de seguir el error del producto consiste en escribir $x = a + e$, $y = b + f$, con $|e| \le \alpha$, $|f| \le \beta$. Al desarrollar,

$$xy - ab = af + be + ef.$$

La desigualdad triangular proporciona entonces

$$|xy - ab| \le |a|\beta + |b|\alpha + \alpha\beta.$$

El último término recoge el producto de las dos perturbaciones. Aunque a veces sea pequeño, descartarlo sin justificación convierte una garantía en una regla aproximada. Si $ab \neq 0$, dividir por $|ab|$ da una cota relativa respecto del producto central: $\alpha/|a| + \beta/|b| + \alpha\beta/|ab|$. Ese denominador central debe distinguirse del valor exacto $|xy|$ que define el error relativo de la respuesta.

Problema 12. El área que los datos permiten

Enunciado. Los lados de una pieza rectangular están en $4{,}8 \pm 0{,}05$ centímetros y $3{,}2 \pm 0{,}05$ centímetros. Calcula el intervalo de áreas y una cota simétrica alrededor del producto central.

Solución. Los lados son positivos y están en $[4{,}75, 4{,}85]$ y $[3{,}15, 3{,}25]$. El área pertenece a $[4{,}75 \cdot 3{,}15, 4{,}85 \cdot 3{,}25] = [14{,}9625, 15{,}7625]$ centímetros cuadrados. El producto central es $4{,}8 \cdot 3{,}2 = 15{,}36$. La distancia al extremo inferior es $0{,}3975$ y al superior es $0{,}4025$, así que una cota simétrica segura es $15{,}36 \pm 0{,}4025$ centímetros cuadrados. La fórmula general da la misma cota: $4{,}8(0{,}05) + 3{,}2(0{,}05) + 0{,}05^2 = 0{,}4025$. Los decimales de los extremos son resultados exactos de las cotas estipuladas; no representan nuevas mediciones de la pieza.

Dividir exige alejarse del cero

Para $0 < c \le y \le d$, invertir cambia el orden: $1/d \le 1/y \le 1/c$. Con un numerador positivo $a \le x \le b$, obtenemos $a/d \le x/y \le b/c$. La menor razón combina el menor numerador con el mayor denominador, y la mayor combina los otros extremos. Si intervienen signos distintos, podemos construir primero el intervalo recíproco del denominador, siempre que no contenga cero, y usar la regla general del producto.

Problema 13. Una rapidez y un redondeo hacia afuera

Enunciado. Una distancia está entre 99 y 101 metros y un tiempo entre 19,8 y 20,2 segundos. Calcula un intervalo exacto para la rapidez media y otro seguro cuyos extremos tengan dos decimales.

Solución. Distancia y tiempo son positivos. La rapidez está entre $99/20{,}2 = 495/101$ y $101/19{,}8 = 505/99$ metros por segundo. Son aproximadamente $4{,}90099$ y $5{,}10101$. Para conservar una garantía con dos decimales debemos bajar el extremo inferior y subir el superior: $[4{,}90, 5{,}11]$ metros por segundo sirve. Redondear ambos al más cercano habría dado $[4{,}90, 5{,}10]$, que pierde valores admitidos por el extremo superior exacto. El intervalo también queda contenido en $5{,}00 \pm 0{,}11$ metros por segundo. Toda esta información depende de que las cotas iniciales sean válidas.

Problema 14. Cuando no existe una cota finita

Enunciado. Se sabe únicamente que $x \in [-0{,}1, 0{,}1]$. ¿Podemos asegurar que $1/x$ está dentro de algún intervalo finito? Examina también el caso en que se añade $x \neq 0$.

Solución. El intervalo incluye cero, donde el recíproco no está definido. Añadir $x \neq 0$ evita esa falta de definición, pero permite valores no nulos tan próximos al cero como queramos. Para cualquier entero $N \ge 10$, el valor $x = 1/N$ está permitido y su recíproco es N, que no tiene cota superior finita al variar N. Con $x = -1/N$ se obtienen recíprocos negativos sin cota inferior finita. Por tanto tampoco la condición adicional produce un intervalo finito seguro. La dificultad procede de la información disponible sobre el denominador; escribir más decimales en una aproximación central no la resuelve.

Llevar intervalos y errores a través de las cuentas

En las tres primeras filas se supone $x \in [a, b]$, $y \in [c, d]$, con $a \le b$ y $c \le d$. Son envolventes seguras; una dependencia entre las cantidades puede permitir cotas más estrechas.

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Suma de intervalos	$a + c \le x + y \le b + d$.
Resta de intervalos	$a - d \le x - y \le b - c$.
Producto de intervalos	El menor y el mayor de ac, ad, bc, bd acotan xy. Se examinan las cuatro esquinas, cualquiera que sea el signo.
Recíproco separado de cero	Si $0 < c \le y \le d$, entonces $1/d \le 1/y \le 1/c$. Para un intervalo negativo que no contenga cero se invierten también los extremos; no se usa esta regla si el intervalo contiene cero.
Cociente positivo	Si $0 < a \le x \le b$ y $0 < c \le y \le d$, entonces $a/d \le x/y \le b/c$. Para otros signos se usa el producto con el intervalo recíproco, si existe.
Error de suma o resta	Si $\lvert x - a\rvert \le \alpha$ y $\lvert y - b\rvert \le \beta$, entonces el error absoluto de aproximar $x \pm y$ por $a \pm b$ no supera $\alpha + \beta$, con $\alpha, \beta \ge 0$.
Error del producto	Bajo las mismas cotas, $\lvert xy - ab\rvert \le \lvert a\rvert\beta + \lvert b\rvert\alpha + \alpha\beta$. El término de segundo orden se conserva.
Relativo al producto central	Si además $ab \neq 0$, la cota para $\lvert xy - ab\rvert/\lvert ab\rvert$ es $\alpha/\lvert a\rvert + \beta/\lvert b\rvert + \alpha\beta/\lvert ab\rvert$. Su denominador es el producto central, no el producto exacto.

Pruebas. Apéndice: «Intervalos bajo las operaciones», «Propagación determinista de errores».

Reconocer cuándo se repite la misma cantidad

Cuando una cantidad aparece dos veces en una expresión, sus dos apariciones conservan el mismo valor. Por ejemplo, si $x \in [1, 2]$, la diferencia $x - x$ vale cero para cualquier elección de x; aplicar la regla general de resta a dos intervalos $[1, 2]$ produce en cambio $[-1, 1]$, porque esa regla admite que se elija un valor distinto en cada intervalo. La envolvente sigue conteniendo todos los resultados posibles, pero aprovechar la relación entre las apariciones permite estrecharla. Al trasladar las cotas a una cuenta tendremos que reconocer qué cantidades pueden variar por separado y cuáles están ligadas.

Problema 15. Dos apariciones, un solo valor

Enunciado. Si $x \in [-1, 1]$, determina los valores posibles de $x - x$ y de x^2. Compara con restar o multiplicar dos intervalos $[-1, 1]$ sin registrar que se trata del mismo x.

Solución. Para cualquier x, la diferencia $x - x$ es exactamente cero; su conjunto de valores es $\{0\}$. Restar dos valores elegidos separadamente en $[-1, 1]$ daría el intervalo $[-2, 2]$, que contiene cero pero incluye diferencias ajenas a nuestra expresión. Para el cuadrado, $0 \le x^2 \le 1$ y todos los valores de $[0, 1]$ se obtienen tomando $x = \sqrt{t}$. Multiplicar dos intervalos libremente daría $[-1, 1]$ e incluiría productos negativos. La identidad de las dos apariciones permite mejorar ambas cotas sin adquirir datos nuevos.

No hay que confundir esta dependencia algebraica con una correlación estadística. Hemos usado que las dos letras designan exactamente el mismo número en la misma expresión. Tampoco una eventual independencia estadística permitiría sustituir sin más una cota máxima de error por

una combinación menor: las afirmaciones probabilísticas requieren su propio modelo. Hasta aquí hemos trabajado con conjuntos de valores admisibles.

Estimar lo que todavía no se ha medido

Para estimar un consumo anual de agua podemos comenzar con una cantidad por persona y día, multiplicarla por el número de personas y después por los días considerados. Cada factor corresponde a un supuesto que podremos revisar: una variación del consumo diario o de la cantidad de personas cambia el producto de una manera visible. Los números cómodos permiten explorar primero el tamaño del resultado; si disponemos de intervalos para esos factores, sus productos proporcionan una envolvente que conserva la incertidumbre de partida. Así podremos explicar de dónde procede la estimación y qué dato convendría precisar para mejorarla.

Problema 16. El agua de un año

Enunciado. Para planificar una reserva de agua de bebida en un hogar hipotético de cuatro personas, se supone un consumo medio diario de dos litros por persona durante 365 días. Obtén una estimación anual. ¿Qué intervalo correspondería si el consumo medio por persona estuviera entre 1,5 y 2,5 litros diarios?

Solución. El modelo central da $4 \cdot 2 \cdot 365 = 2920$ litros, del orden de tres mil litros. Las unidades lo comprueban: personas por litros por persona y día por días deja litros. Con los supuestos extremos obtenemos $4 \cdot 1{,}5 \cdot 365 = 2190$ y $4 \cdot 2{,}5 \cdot 365 = 3650$ litros. El intervalo $[2190, 3650]$ es consecuencia del modelo, no una medición ni una recomendación de consumo. Un año de duración distinta, cambios de ocupantes o una definición diferente del consumo requieren modificar los factores correspondientes. La precisión del producto central no elimina esa dependencia de los supuestos.

Problema 17. ¿Alcanza el tiempo disponible?

Enunciado. En un modelo de viaje sin detenciones, la distancia está en $[118, 122]$ kilómetros y la rapidez media efectiva en $[58, 62]$ kilómetros por hora. ¿Garantizan estos datos llegar en dos horas? ¿Y en dos horas y diez minutos?

Solución. El tiempo es distancia dividida por rapidez. Sus extremos son $118/62 = 59/31$ y $122/58 = 61/29$ horas. El máximo $61/29$ supera dos porque $61 > 58$, así que dos horas no ofrecen garantía. Dos horas y diez minutos son $2 + 10/60 = 13/6$ horas. Comparamos exactamente: $61/29 < 13/6$ porque $366 < 377$. Ese plazo sí basta dentro del modelo. La garantía no incorpora detenciones ni cambios que invaliden la cota de rapidez; se refiere al problema definido por los datos.

Problema 18. Redondear una compra puede dejarla corta

Enunciado. Debemos cubrir una longitud $L \in [11{,}99, 12{,}03]$ metros con piezas de medio metro. Se permite cortar la última y suponemos que no hay pérdidas de corte ni de unión. ¿Cuántas piezas garantizan cubrir la longitud? ¿Es seguro redondear primero L a doce metros y comprar veinticuatro?

Solución. Veinticuatro piezas cubren exactamente $24 \cdot 0{,}5 = 12$ metros y no bastan cuando $L = 12{,}03$. Para cubrir el mayor valor admisible necesitamos un entero n tal que $0{,}5n \geq 12{,}03$, es decir, $n \geq 24{,}06$. El menor entero que cumple esto es veinticinco, cuya longitud total es 12,5 metros. Si la longitud verdadera fuera menor o igual a doce, veinticuatro alcanzarían; los datos permiten también longitudes mayores. La dirección del redondeo depende aquí de garantizar una cobertura, no de escoger el número más cercano.

Un problema sensible y un cálculo que pierde información

Una pregunta es sensible a las variaciones de los datos cuando cambios pequeños en ellos pueden provocar cambios importantes en la respuesta. Eso puede ser propio de la relación matemática, aunque calculemos sin errores. En cambio, un procedimiento de cálculo puede perder precisión al operar con aproximaciones, aun cuando exista otra forma equivalente que aproveche mejor los datos. Para estudiar la estabilidad de un procedimiento examinamos cuánto error introducen sus operaciones con la precisión de trabajo elegida y el criterio de error declarado.

Para ver la sensibilidad cerca de una división por cero, comparemos los recíprocos de dos números próximos. Con denominadores no nulos,

$$\left|\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right| = \frac{|h|}{|x+h|\,|x|}.$$

La identidad sale de llevar las fracciones al denominador común y tomar valores absolutos. Si los denominadores son pequeños, una perturbación h puede amplificarse. No hace falta derivar una función para reconocer el mecanismo.

Problema 19. La misma incertidumbre de entrada, efectos distintos

Enunciado. Para $f(x) = 1/(x-1)$, compara los intervalos de salida cuando $x \in [1{,}99, 2{,}01]$ y cuando $x \in [1{,}09, 1{,}11]$. Ambos intervalos tienen semianchura 0,01. ¿Se debe la diferencia a un error de calculadora?

Solución. En el primer caso el denominador está en $[0{,}99, 1{,}01]$ y la salida en $[100/101, 100/99]$, aproximadamente $[0{,}990099, 1{,}010101]$. Respecto del valor central uno, la desviación máxima es $1/99$. En el segundo, el denominador queda en $[0{,}09, 0{,}11]$ y la salida en $[100/11, 100/9]$, aproximadamente $[9{,}090909, 11{,}111111]$. Respecto del valor central diez, la desviación máxima es $10/9$. La misma semianchura de entrada produce una desviación absoluta mucho mayor al acercarse el denominador al cero. Los intervalos se obtuvieron con fracciones exactas: el efecto pertenece al problema y persistiría con una calculadora perfecta.

Una resta de números muy próximos plantea otra dificultad. Si cada uno ya fue redondeado, sus errores pueden ocupar una parte grande de la diferencia que buscamos. A veces una identidad permite evitar esa resta. Conservamos el valor exacto de la expresión, pero cambiamos el camino numérico para llegar a él.

Problema 20. Una diferencia pequeña que desaparece

Enunciado. Queremos calcular $d = \sqrt{1\,000\,001} - 1000$. Un procedimiento redondea primero la raíz a tres decimales y luego resta. Otro transforma la expresión antes de aproximar. Examina ambos y da cotas para d.

Solución. La raíz es mayor que mil y menor que 1000,0005, pues $(1000{,}0005)^2 = 1\,000\,001{,}00000025 > 1\,000\,001$. Por tanto se redondea a 1000,000 y la resta calculada vale cero, aunque $d > 0$. Multiplicando por el conjugado obtenemos, en cambio,

$$d = \frac{1}{\sqrt{1\,000\,001} + 1000}.$$

El denominador es positivo, así que esta identidad conserva el valor sin introducir restricciones nuevas. Como $1000 < \sqrt{1\,000\,001} < 1000{,}001$, tenemos

$$\frac{1}{2000{,}001} < d < \frac{1}{2000} = 0{,}0005.$$

Usar la raíz redondeada en la nueva fórmula produce 0,0005, próximo a todo el intervalo permitido. La diferencia entre ese valor y d es menor que $1/2000 - 1/2000{,}001$, que es menor que 0,00000000025. Hemos justificado la mejora con una cota, sin apelar al número de cifras de una pantalla. La cancelación de las partes grandes perjudicaba el primer procedimiento; la expresión equivalente evita esa pérdida.

Problema 21. Los redondeos intermedios también se acumulan

Enunciado. Una cuenta suma diez términos iguales a 0,144, todos exactos. Compara redondear cada término a décimas antes de sumar con sumar primero y redondear al final. Acota el error de la primera estrategia.

Solución. Cada término se redondea a 0,1; sumarlos da 1,0. La suma exacta es $10 \cdot 0{,}144 = 1{,}44$, cuyo redondeo a décimas es 1,4. La primera estrategia ha introducido un error absoluto de 0,44 antes de cualquier redondeo final. La cota general de cada término es 0,05, así que la suma de diez errores no supera 0,5. En este caso todos los errores apuntan en la misma dirección y no se compensan. Conservar los términos exactos hasta el final deja un error de 0,04, dentro de la cota 0,05 del único redondeo final.

Demostrar la calidad de una aproximación

Una buena aproximación puede surgir de una identidad. Para $t \geq 0$, el número $1 + t/2$ se parece a $\sqrt{1+t}$ cuando t es pequeño. Si ponemos $z = \sqrt{1+t}$, tenemos $z^2 = 1 + t$ y podemos calcular exactamente la diferencia:

$$1 + \frac{t}{2} - z = \frac{z^2 + 1 - 2z}{2} = \frac{(z-1)^2}{2}.$$

Es no negativa. Además, $(z-1)(z+1) = t$, con $z + 1 > 0$, de modo que

$$0 \leq 1 + \frac{t}{2} - \sqrt{1+t} = \frac{t^2}{2(\sqrt{1+t}+1)^2} \leq \frac{t^2}{8}.$$

La última desigualdad usa $\sqrt{1+t} \geq 1$, por lo que el denominador es al menos ocho. Hemos demostrado una cota válida para todo $t \geq 0$; su utilidad como aproximación mejora cuando $t^2/8$ es pequeño. La prueba también identifica el sentido del error: $1 + t/2$ queda por encima de la raíz.

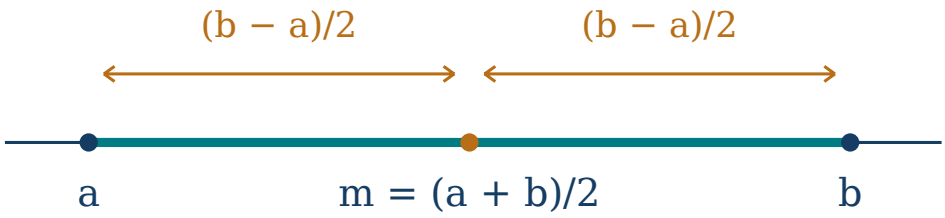
Problema 22. Una fórmula sencilla con error garantizado

Enunciado. Aproxima $\sqrt{1{,}04}$ mediante $1 + 0{,}04/2$ y da un intervalo seguro sin calcular la raíz con una calculadora.

Solución. Tomamos $t = 0{,}04$ en la desigualdad demostrada. La aproximación es 1,02 y su exceso sobre la raíz está entre cero y $0{,}04^2/8 = 0{,}0002$. Por tanto $1{,}0198 \leq \sqrt{1{,}04} \leq 1{,}02$. Como el valor de t es positivo, el exceso es de hecho positivo. El intervalo cerrado conserva una garantía cómoda. La cuenta $1{,}02^2 = 1{,}0404$ confirma que la aproximación está por encima; la prueba general explica además cuánto puede excederla.

Detener un cálculo cuando ya basta

Si sabemos que $x \in [a, b]$, el punto medio $m = (a+b)/2$ está a distancia de a lo sumo $(b-a)/2$ de cualquier valor del intervalo. La garantía se ve en la recta: ambos extremos quedan a esa distancia y los demás puntos quedan entre ellos. Para obtener error absoluto de a lo sumo ε basta construir un intervalo de ancho no mayor que 2ε.



Para una raíz positiva podemos partir de dos cotas no negativas y examinar su punto medio. En ese intervalo, el cuadrado crece con el número. Si el cuadrado del punto medio es menor que el radicando, conservamos la mitad superior; si es mayor, conservamos la inferior; si es igual, hemos encontrado la raíz exacta y podemos detenernos con error cero. Este procedimiento se llama bisección. Cada paso que continúa conserva la raíz y divide por dos el ancho. Tras n divisiones efectivas, un ancho inicial w se convierte en $w/2^n$, y el error del punto medio final no supera $w/2^{n+1}$.

Problema 23. Cuántos pasos necesita una garantía

Enunciado. Partimos de $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$ y aplicamos bisección. ¿Cuántos pasos bastan para que el punto medio final tenga error menor que 0,001? Muestra los dos primeros pasos.

Solución. El ancho inicial es 0,1. Tras n pasos, la cota de error del punto medio será $0{,}1/2^{n+1}$. Con cinco pasos vale 0,0015625, que todavía supera el objetivo; con seis vale $0{,}00078125 < 0{,}001$. Seis pasos bastan y son el menor número que asegura el objetivo mediante esta cota de ancho. En el primero, el punto medio es 1,75 y su cuadrado 3,0625; conservamos $[1{,}7, 1{,}75]$. En el segundo, $1{,}725^2 = 2{,}975625 < 3$, por lo que queda $[1{,}725, 1{,}75]$. Las cuentas siguientes repiten la misma decisión, sin requerir una lista previa de los decimales de la raíz.

Problema 24. Una diferencia que los datos no deciden

Enunciado. Dos longitudes están dadas por $A = 20 \pm 0{,}1$ centímetros y $B = 20{,}15 \pm 0{,}1$ centímetros. ¿Garantizan las lecturas que $B > A$? ¿Qué tendría que cumplir la diferencia de los valores centrales para ofrecer esa garantía con las mismas cotas?

Solución. Los intervalos son $[19{,}9, 20{,}1]$ y $[20{,}05, 20{,}25]$. La diferencia $B - A$ pertenece a $[20{,}05 - 20{,}1, 20{,}25 - 19{,}9] = [-0{,}05, 0{,}35]$. Puede ser positiva, nula o negativa. Por ejemplo, $B = 20{,}05$ y $A = 20{,}1$ respetan los datos y dan $B < A$. Si la diferencia entre centros fuera d, su cota inferior sería $d - 0{,}2$. Para garantizar desigualdad estricta necesitamos $d > 0{,}2$ centímetros; con igualdad solo garantizaríamos $B \geq A$. Los datos actuales no permiten resolver la comparación estricta. Informar esa limitación es una conclusión matemática completa.

Identidades y criterios para controlar la aproximación

Las identidades se conservan exactamente; las desigualdades proporcionan garantías bajo las hipótesis indicadas.

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Variación de un recíproco	$\lvert 1/(x+h) - 1/x \rvert = \lvert h \rvert / (\lvert x+h \rvert \lvert x \rvert)$, con $x \neq 0$ y $x + h \neq 0$.
Aproximación de una raíz	$0 \leq 1 + t/2 - \sqrt{1+t} \leq t^2/8$, con $t \geq 0$. La cota se hace útil cuando $t^2/8$ es suficientemente pequeño.
Punto medio	Si $x \in [a, b]$ y $m = (a+b)/2$, entonces $\lvert x - m \rvert \leq (b-a)/2$. Un ancho de a lo sumo 2ε basta para garantizar error de a lo sumo $\varepsilon > 0$.
Bisección	Partiendo de cotas no negativas para una raíz cuadrada, tras $n \geq 0$ divisiones efectivas que conservan la raíz, el ancho inicial w pasa a $w/2^n$ y el error del punto medio no supera $w/2^{n+1}$. Si se encuentra la raíz exacta, se puede detener el cálculo con error cero.

Pruebas. Apéndice: «Recíprocos y una aproximación radical», «Punto medio y bisección».

Ejercicios para trabajar sin profesor

1. Clasifica $3/8 = 0{,}375$, $\sqrt{3} \approx 1{,}73$ y $10\pi \approx 31{,}4$ como igualdades exactas o aproximaciones. Comprueba que 1,73 no es exactamente la raíz de tres.

2. Trunca y redondea $-4{,}56789$ a centésimas. Calcula los dos errores absolutos.

3. Redondea $1{,}235$ y $-1{,}235$ a centésimas con la convención del capítulo. Describe los números positivos que se redondean a $3{,}24$.

4. Compara el redondeo directo de $6{,}249$ a décimas con el que pasa primero por centésimas. Explica qué frontera cambia la decisión.

5. ¿Cuántas cifras significativas muestran $0{,}006030$ y $1{,}20 \cdot 10^3$? Explica qué información falta para interpretar los ceros de 1200 como resultado de una medición.

6. Acota $\sqrt{11}$ entre centésimas consecutivas y decide su redondeo a centésimas examinando el punto medio.

7. Una lectura muestra $-2{,}47$. Describe el intervalo de valores originales si trunca a centésimas y si redondea a centésimas.

8. Compara los errores absolutos y relativos de aproximar 250 por 249 y $0{,}5$ por $0{,}49$. Todos los números iniciales se consideran exactos.

9. Si $|x-20| \le 0{,}2$, da una cota segura para el error relativo de aproximar x por veinte. ¿Basta afirmar que no supera 1%?

10. Con $x = 7 \pm 0{,}05$ e $y = 3 \pm 0{,}02$, encuentra intervalos para $x + y$ y $x - y$ sin suponer relaciones adicionales.

11. Si $x \in [-3, 2]$ e $y \in [-2, 4]$, obtén los extremos posibles de xy y explica por qué multiplicar solo extremos inferiores no sirve.

12. Los lados de un rectángulo están en $2 \pm 0{,}01$ metros y $5 \pm 0{,}02$ metros. Calcula el intervalo de áreas y la menor cota simétrica alrededor del producto central que contenga ese intervalo.

13. Una distancia está en $60 \pm 0{,}5$ metros y un tiempo en $12 \pm 0{,}1$ segundos. Da el intervalo exacto de rapidez media y otro seguro con extremos de dos decimales.

14. Si $x \in [-0{,}02, 0{,}03]$ y $x \neq 0$, ¿existe una cota finita para todos los recíprocos $1/x$? Justifica mediante valores permitidos.

15. Si $x \in [2, 3]$, compara el conjunto exacto de valores de x/x con el intervalo que se obtiene dividiendo dos cantidades elegidas libremente en $[2, 3]$.

16. Un taller hipotético estima cincuenta trabajos de impresión al año y treinta páginas por trabajo. Calcula el consumo estimado. Si los trabajos están entre cuarenta y sesenta y el promedio de páginas por trabajo entre veinte y cuarenta, da el intervalo anual del modelo.

17. Para un viaje ideal sin paradas, la distancia está en $[178, 182]$ kilómetros y la rapidez media en $[88, 92]$ kilómetros por hora. ¿Bastan con garantía dos horas? ¿Y dos horas y cinco minutos?

18. Se necesita una longitud en $[9{,}94, 10{,}02]$ metros y se dispone de piezas de dos metros, con corte final permitido y sin pérdidas. ¿Cuántas piezas ofrecen garantía? Explica por qué cinco podrían ser insuficientes.

19. Para $g(x) = 1/(x - 2)$, compara las salidas correspondientes a $x \in [2{,}99, 3{,}01]$ y a $x \in [2{,}09, 2{,}11]$. Identifica la causa de la diferencia de sensibilidad.

20. Analiza $\sqrt{10\,001} - 100$ si primero se redondea la raíz a centésimas. Obtén una fórmula equivalente sin esa resta y un intervalo usando $100 < \sqrt{10\,001} < 100{,}01$.

21. Suma ocho términos exactos de valor $0{,}126$. Compara redondear cada término a centésimas antes de sumar con redondear la suma exacta al final. Da los errores respecto de la suma exacta y una cota para la primera estrategia.

22. Aplica la cota demostrada para aproximar $\sqrt{1{,}02}$ mediante $1{,}01$. Da un intervalo garantizado y el sentido del error.

23. Parte de $2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$. ¿Cuántas bisecciones aseguran que el punto medio final tenga error de a lo sumo 0,0005? Muestra el primer paso.

24. Con $A = 5 \pm 0{,}03$ y $B = 5{,}04 \pm 0{,}03$, decide si se garantiza $B > A$. Da un contraejemplo permitido y la separación entre centros que bastaría para garantizarlo con esas mismas cotas.

Soluciones desarrolladas

Ejercicio 1. Comprobar qué número se ha escrito

$3/8 = 0{,}375$ es una igualdad exacta, porque ocho veces 0,375 vale tres. Las otras escrituras están señaladas como aproximaciones: reemplazan números dados mediante una raíz o mediante π por decimales finitos. En particular, $1{,}73^2 = 2{,}9929 \neq 3$ demuestra que ese decimal no es $\sqrt{3}$. La escritura exacta de la circunferencia correspondiente puede conservar 10π sin necesidad de desarrollar sus cifras. La forma simbólica no es menos exacta por no ser decimal.

Ejercicio 2. La distancia no lleva el signo del número

Truncar a centésimas da $-4{,}56$, a distancia 0,00789 del original. Redondear da $-4{,}57$, cuya distancia es 0,00211. En efecto, $-4{,}56789$ está más cerca de $-4{,}57$ que de $-4{,}56$. Ambos errores absolutos son no negativos. La truncación queda hacia el cero, y la cota 0,01 para su error se cumple; el redondeo satisface la cota más pequeña 0,005.

Ejercicio 3. Los empates y los extremos del intervalo

Los dos números están exactamente a mitad entre centésimas vecinas. Nuestra convención elige 1,24 y $-1{,}24$, los candidatos más alejados del cero. Para la lectura positiva 3,24, los puntos medios vecinos son 3,235 y 3,245. El primero se incluye porque se redondea a 3,24; el segundo se excluye porque se redondea a 3,25. El intervalo buscado es $[3{,}235, 3{,}245)$.

Ejercicio 4. Una aproximación que cae en el empate

El redondeo directo es 6,2, pues 6,249 es menor que el punto medio 6,25. Al redondear primero a centésimas obtenemos 6,25; al pasar después a décimas, el empate se resuelve hacia 6,3. La primera aproximación cruzó la frontera de decisión al situarse exactamente sobre ella. Las dos operaciones sucesivas no equivalen, en general, al redondeo directo.

Ejercicio 5. Ceros que sitúan y ceros que se muestran

En 0,006030 hay cuatro cifras significativas: 6, 0, 3, 0. Los ceros anteriores al seis solo localizan la primera cifra no nula. $1{,}20 \cdot 10^3$ muestra tres cifras significativas. Para interpretar 1200 necesitamos saber si es un conteo exacto o una lectura aproximada y, en este último caso, qué procedimiento y posición de redondeo se usaron. Para conocer un error de medida también harían falta las condiciones pertinentes del instrumento. Los ceros aislados no aportan esos datos.

Ejercicio 6. Las dos centésimas no bastan para decidir

$3{,}31^2 = 10{,}9561 < 11$ y $3{,}32^2 = 11{,}0224 > 11$ dan $3{,}31 < \sqrt{11} < 3{,}32$. El punto medio es 3,315 y su cuadrado vale $10{,}989225 < 11$. Por tanto la raíz está por encima de ese punto y se redondea a 3,32. Todas las comparaciones se hicieron entre racionales exactos y luego se trasladaron a números no negativos mediante la monotonía del cuadrado.

Ejercicio 7. El procedimiento determina los extremos

Si se trunca hacia el cero, los valores que dan $-2{,}47$ están en $(-2{,}48, -2{,}47]$. El extremo inferior conservaría sus propias centésimas y no sirve. Si se redondea, el intervalo es $(-2{,}475, -2{,}465]$. El empate $-2{,}475$ se va a $-2{,}48$ y queda excluido; el empate $-2{,}465$ se va a $-2{,}47$ y queda incluido. Invertir sin cuidado la regla de los extremos positivos habría producido una descripción incorrecta.

Ejercicio 8. Comparar respecto del valor exacto

En el primer caso, el error absoluto es $|249 - 250| = 1$ y el relativo $1/250 = 0{,}004 = 0{,}4\%$. En el segundo, el error absoluto es $|0{,}49 - 0{,}5| = 0{,}01$ y el relativo $0{,}01/0{,}5 = 0{,}02 = 2\%$. El segundo error absoluto es cien veces menor, pero su error relativo es cinco veces mayor. Los denominadores son los valores exactos 250 y 0,5, respectivamente.

Ejercicio 9. El denominador más pequeño admisible

El valor exacto pertenece a $[19{,}8, 20{,}2]$, un intervalo positivo. La cota relativa segura es $0{,}2/19{,}8 = 1/99$, aproximadamente $1{,}0101\%$. No podemos garantizar el uno por ciento, porque el valor permitido $x = 19{,}8$ alcanza precisamente $1/99 > 1/100$. Dividir la cota absoluta por el centro veinte habría dado una referencia aproximada, pero no el máximo que exigen los datos.

Ejercicio 10. Sumar las semianchuras

Los intervalos iniciales son $[6{,}95, 7{,}05]$ y $[2{,}98, 3{,}02]$. La suma está en $[9{,}93, 10{,}07]$, o $10 \pm 0{,}07$. La resta está en $[6{,}95 - 3{,}02, 7{,}05 - 2{,}98] = [3{,}93, 4{,}07]$, o $4 \pm 0{,}07$. La semianchura $0{,}07$ es $0{,}05 + 0{,}02$. Estas son cotas máximas deterministas; no hemos supuesto compensación de errores.

Ejercicio 11. Examinar las cuatro esquinas

Los productos de extremos son $(-3)(-2) = 6$, $(-3)4 = -12$, $2(-2) = -4$ y $2 \cdot 4 = 8$. El intervalo es $[-12, 8]$, con ambos extremos alcanzables. El producto de los extremos inferiores es seis, que ni siquiera es el mínimo. Al haber signos distintos, aumentar uno de los factores puede hacer el producto menor; la regla de cuatro combinaciones contempla esa posibilidad.

Ejercicio 12. El intervalo no es simétrico respecto del producto central

Los lados positivos están entre 1,99 y 2,01 metros, y entre 4,98 y 5,02 metros. Las áreas extremas son $1{,}99 \cdot 4{,}98 = 9{,}9102$ y $2{,}01 \cdot 5{,}02 = 10{,}0902$ metros cuadrados. El centro elegido, producto de los valores centrales, es diez. Sus distancias a los extremos son 0,0898 y 0,0902, así que la menor cota simétrica alrededor de diez es $10 \pm 0{,}0902$ metros cuadrados. Coincide con $2(0{,}02) + 5(0{,}01) + 0{,}01(0{,}02) = 0{,}0902$. Quitar el último término habría perdido una parte del exceso superior.

Ejercicio 13. El intervalo se redondea hacia afuera

La rapidez pertenece a $[59{,}5/12{,}1, 60{,}5/11{,}9] = [595/121, 605/119]$ metros por segundo. Sus extremos son aproximadamente 4,917355 y 5,084034. Un intervalo seguro con dos decimales es $[4{,}91, 5{,}09]$. El límite inferior se baja y el superior se sube; así se conserva la inclusión. El intervalo de extremos más cercanos, $[4{,}92, 5{,}08]$, excluiría valores posibles por ambos lados.

Ejercicio 14. Excluir el cero no aleja los datos de él

Para cualquier entero $N \geq 50$, los valores $x = 1/N$ y $x = -1/N$ son no nulos y están dentro de $[-0{,}02, 0{,}03]$. Sus recíprocos son N y $-N$. Al aumentar N superamos cualquier cota finita propuesta, tanto positiva como negativa. Por eso no existe un intervalo finito que contenga todos los recíprocos. Haría falta una distancia positiva garantizada entre el denominador y cero.

Ejercicio 15. Una identidad reduce la incertidumbre de la expresión

Como $x \geq 2 > 0$, el cociente x/x está definido y vale uno para todos los valores permitidos; su conjunto de valores es $\{1\}$. Si elegimos separadamente numerador y denominador en $[2, 3]$, el intervalo de cocientes será $[2/3, 3/2]$. Ese intervalo es seguro pero mucho más amplio para la expresión original. La simplificación usa que se trata del mismo valor no nulo, no de dos mediciones sin relación.

Ejercicio 16. Una cifra anual ligada a sus supuestos

El modelo central da $50 \cdot 30 = 1500$ páginas por año. Con los límites propuestos, el mínimo es $40 \cdot 20 = 800$ y el máximo $60 \cdot 40 = 2400$ páginas. Si el número de trabajos y el promedio de páginas por trabajo cumplen los intervalos, el total pertenece a $[800, 2400]$. No hemos observado esa tirada anual ni asignado probabilidades a los valores del intervalo. La estimación central permite planificar una primera escala y los límites muestran qué cambios de los supuestos pueden importar.

Ejercicio 17. Comparar plazos mediante fracciones

El tiempo de viaje está entre $178/92 = 89/46$ y $182/88 = 91/44$ horas. El máximo supera dos horas porque $91 > 88$, por lo que ese plazo no basta como garantía. Dos horas y cinco minutos son $2 + 5/60 = 25/12$ horas. El máximo es menor que ese plazo, pues $91 \cdot 12 = 1092 < 1100 = 25 \cdot 44$. Así, dos horas y cinco minutos bastan bajo los supuestos del modelo sin detenciones y con la rapidez media indicada.

Ejercicio 18. Comprar para el extremo que exige más

Cinco piezas tienen longitud total diez metros. No cubren el valor admisible 10,02, aunque podrían cubrir otras longitudes del intervalo. La garantía exige $2n \geq 10{,}02$, de donde $n \geq 5{,}01$. El menor entero permitido es seis, con doce metros en total y corte del sobrante. El resultado no es el entero más cercano al cociente: es el menor entero que satisface la desigualdad de cobertura.

Ejercicio 19. Cambiar el nombre del punto no cambia el mecanismo

En el primer intervalo, $x - 2 \in [0{,}99, 1{,}01]$, así que $g(x) \in [100/101, 100/99]$. En el segundo, $x - 2 \in [0{,}09, 0{,}11]$ y $g(x) \in [100/11, 100/9]$. Los valores centrales son uno y diez, con desviaciones máximas $1/99$ y $10/9$. La segunda entrada se acerca más al punto dos, donde el denominador se anula. Esa proximidad amplifica la perturbación antes de que intervenga cualquier redondeo de cálculo.

Ejercicio 20. Conservar la pequeña diferencia por otro camino

$100^2 < 10\,001$ y $100{,}005^2 = 10\,001{,}000025 > 10\,001$ muestran que la raíz se redondea a 100,00 a centésimas. La resta con cien produciría cero. El conjugado da la identidad $\sqrt{10\,001} - 100 =$

$1/(\sqrt{10\,001}+100)$, cuyo denominador es positivo. Las cotas estipuladas conducen a $1/200{,}01 < d < 1/200 = 0{,}005$. Usar la raíz redondeada en esta fórmula produce 0,005, una aproximación por exceso próxima al intervalo. La identidad mantiene la diferencia pequeña que el primer redondeo había borrado.

Ejercicio 21. Cuándo se introduce cada error

La suma exacta es $8 \cdot 0{,}126 = 1{,}008$. Cada término redondeado a centésimas vale 0,13, de modo que sumar después da 1,04, con error absoluto 0,032. La cota general es ocho veces 0,005, es decir, 0,04, y el error calculado la respeta. Redondear la suma exacta al final da 1,01, con error 0,002. Este último cumple la cota 0,005 correspondiente a un único redondeo a centésimas. La comparación se refiere siempre a la suma exacta, no a la diferencia entre los dos resultados aproximados.

Ejercicio 22. Una cota que conserva el sentido del error

Con $t = 0{,}02$, la fórmula aproximada es $1 + t/2 = 1{,}01$. Su exceso respecto de la raíz está entre cero y $t^2/8 = 0{,}00005$. Por tanto $1{,}00995 \le \sqrt{1{,}02} \le 1{,}01$. La aproximación es por exceso, y el error absoluto no supera cinco cienmilésimas. La cota procede de una identidad válida para todo $t \ge 0$; sustituir el valor concreto solo especializa la garantía ya demostrada.

Ejercicio 23. Elegir el número de bisecciones antes de calcular

El ancho inicial es 0,1 y la cota del error del punto medio tras n bisecciones es $0{,}1/2^{n+1}$. Necesitamos que no supere 0,0005, lo que equivale a $2^n \ge 100$. Como $2^6 = 64 < 100$ y $2^7 = 128 \ge 100$, bastan siete pasos; la cota será 0,000390625. En el primero probamos el punto medio 2,25. Su cuadrado es $5{,}0625 > 5$, por lo que conservamos $[2{,}2, 2{,}25]$. El criterio de parada se decidió mediante el ancho, sin conocer todavía la aproximación final.

Ejercicio 24. Saber cuándo falta información

Los intervalos son $[4{,}97, 5{,}03]$ y $[5{,}01, 5{,}07]$. La diferencia $B - A$ está en $[-0{,}02, 0{,}10]$ y no garantiza un signo positivo. Los valores $A = 5{,}03$ y $B = 5{,}01$ respetan los datos y dan $B < A$. Las dos semianchuras suman 0,06; para garantizar $B > A$, la diferencia de los centros tendría que ser estrictamente mayor que 0,06. Con una separación igual solo se garantizaría una diferencia no negativa. Obtener una comparación estricta requeriría medidas más ajustadas o centros más separados.

Diagnóstico de salida

Explica qué información adicional aporta una cota a la escritura $\sqrt{7} \approx 2{,}65$. Después construye un ejemplo en que un intervalo de denominadores se acerque al cero y otro en que una identidad permita calcular mejor una diferencia pequeña. En el primero debes poder señalar la información insuficiente; en el segundo, el paso del procedimiento que perdía precisión.

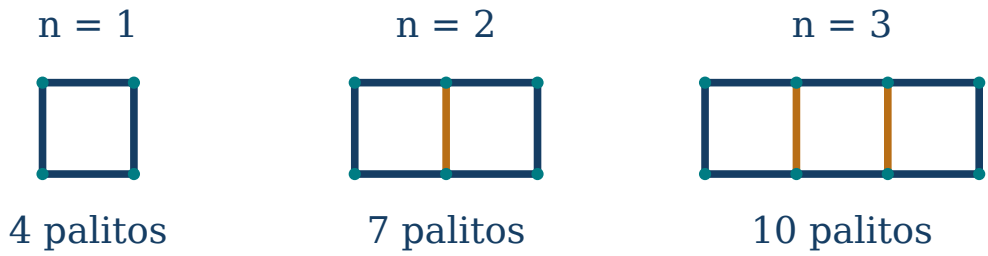
Al resolver un problema de medida, conserva junto a la respuesta los supuestos y las unidades que la sostienen. Si la incertidumbre permite decisiones opuestas, una cifra central no basta para elegir entre ellas. El álgebra que estudiaremos a continuación ofrecerá más maneras de transformar expresiones y reconocer identidades; cada transformación podrá examinarse tanto por su valor exacto como por su comportamiento al calcular con aproximaciones.

CAPÍTULO 5

El lenguaje del álgebra: expresiones e identidades

Construimos una hilera de cuadrados con palitos iguales. El primer cuadrado necesita cuatro; para agregar otro podemos aprovechar un lado ya construido y añadir tres palitos. Las hileras de uno, dos y tres cuadrados necesitan cuatro, siete y diez palitos. Dibujar cien cuadrados sería una manera trabajosa de contestar una pregunta cuya estructura ya tenemos delante.

Podemos contar los palitos de otra forma. Una hilera de n cuadrados tiene n palitos arriba y n abajo, además de $n+1$ segmentos verticales. El total es $2n+(n+1)=3n+1$. Si contáramos cuatro lados por cada cuadrado, los $n-1$ lados compartidos aparecerían dos veces; al corregir ese exceso obtendríamos $4n-(n-1)$. Las dos expresiones describen el mismo recuento desde perspectivas distintas. El álgebra permitirá explicar por qué coinciden para cualquier longitud de la hilera.



Problema 1. Contar sin prolongar el dibujo

Enunciado. ¿Cuántos palitos necesita una hilera de veinticinco cuadrados como la descrita? Justifica una fórmula para cualquier entero $n \geq 1$ y explica qué ocurriría al sustituir $n=0$.

Solución. El primer cuadrado usa cuatro palitos y cada uno de los $n-1$ restantes agrega tres. El total es $4+3(n-1)=3n+1$. Para veinticinco cuadrados obtenemos $3\cdot 25+1=76$. El recuento horizontal y vertical también da $2\cdot 25+26=76$. La fórmula está justificada para una hilera no vacía, $n\geq 1$. Sustituir cero produciría uno, mientras que una hilera sin cuadrados usa cero palitos. La expresión algebraica admite esa sustitución como operación numérica, pero el modelo que la originó no la incluye. Un dominio forma parte de lo que afirmamos con una fórmula.

Una letra conserva una relación

La letra n nos permitió hablar de muchas hileras a la vez. En cada hilera concreta tiene un solo valor, y todas sus apariciones deben referirse a él. Si en $3n+1$ elegimos $n=25$, la misma elección se mantiene en $4n-(n-1)$ al comparar las expresiones. Cambiar de valor una de las apariciones alteraría la pregunta.

Una letra puede designar una cantidad que varía, un dato que mantenemos fijo durante una investigación o un valor desconocido que buscamos. En una fórmula de costo, la distancia puede variar mientras que la tarifa permanece fija; cuando se conoce el costo y se pregunta la distancia, esa misma letra pasa a ser la incógnita. La diferencia está en el uso que hacemos de la relación. Conviene declarar qué representa cada letra, en qué unidad se mide y qué valores admite.

Problema 2. Las unidades ayudan a leer una fórmula

Enunciado. Un servicio hipotético cobra tres unidades monetarias por iniciar un traslado y 1,2 por cada kilómetro recorrido, sin otros cargos. Escribe el costo para una distancia d y calcula el de 7,5 kilómetros. ¿Qué significa el valor de la fórmula cuando $d = 0$?

Solución. Si d es el número de kilómetros, el costo es $C = 3 + 1{,}2d$, en unidades monetarias, para $d \geq 0$. Para $d = 7{,}5$ resulta $C = 3 + 9 = 12$. El producto de una tarifa por kilómetro y una distancia en kilómetros deja unidades monetarias, que pueden sumarse al cargo inicial. Con $d = 0$ el modelo da tres: interpreta un traslado iniciado sin distancia recorrida. No describe el costo de no contratar el servicio. La fórmula distingue el cargo fijo de la parte que depende de la distancia.

Una **expresión algebraica** combina números, letras y operaciones. Puede representar un número cuando damos valores admisibles a sus letras. Una igualdad entre dos expresiones añade una afirmación que puede ser verdadera o falsa. Si es verdadera para todos los valores del dominio declarado, la llamamos **identidad** en ese dominio. Si preguntamos para qué valores se cumple, la tratamos como una ecuación y buscamos sus soluciones.

Problema 3. Una expresión y dos preguntas diferentes

Enunciado. Distingue el papel de $2(x + 3)$, de $2(x + 3) = 2x + 6$ y de $2(x + 3) = 14$. Usa el dominio de los números reales.

Solución. $2(x + 3)$ es una expresión que representa el doble de la suma de un real x con tres. La igualdad $2(x + 3) = 2x + 6$ es una identidad, porque la distributividad la justifica para todo real x. La igualdad con catorce se cumple cuando $x + 3 = 7$, es decir, cuando $x = 4$, y no para cualquier real. Por ejemplo, al sustituir cero la primera identidad conserva $6 = 6$, mientras que la ecuación daría $6 = 14$, que es falso. La escritura con signo igual necesita interpretarse junto con el alcance de la afirmación que hacemos.

Sustituir exige conservar la estructura

La sustitución reemplaza todas las apariciones de una letra por el mismo valor. Si ese valor es negativo o es otra expresión, los paréntesis conservan su papel dentro de cada operación. Por ejemplo, sustituir $x = -2$ en x^2 produce $(-2)^2$, no -2^2. La diferencia ya apareció al estudiar potencias; con varias letras se vuelve especialmente fácil perderla de vista.

La notación ab designa el producto de a y b; $a \cdot b$ expresa la misma operación. En $a(b + c)$, el paréntesis completo constituye un factor. Las barras de fracción también agrupan: primero se interpreta el numerador completo y el denominador completo, y luego su cociente.

Problema 4. Sustituir dos valores con signos

Enunciado. Calcula el valor de $2x^2 - 3xy + y^2$ cuando $x = -2$ e $y = 3$. Explica el signo del término central.

Solución. Sustituimos conservando los paréntesis: $2(-2)^2 - 3(-2)(3) + 3^2$. El primer término vale ocho; el producto $(-2)3$ es -6, así que el término central es $-3(-6) = 18$. El último término vale nueve. La suma es $8 + 18 + 9 = 35$. El signo negativo escrito delante de $3xy$ no obliga a que el término resulte negativo: también interviene el signo de xy. Todos los valores reales de x, y son admisibles en esta expresión polinómica.

Problema 5. Un valor que la expresión no admite

Enunciado. Evalúa $\dfrac{2x+1}{x-3}$ para $x = 2$ y describe su dominio real. ¿Qué respuesta corresponde a $x = 3$?

Solución. Para $x = 2$, el numerador es cinco y el denominador es menos uno, de modo que el cociente vale -5. Para que la expresión tenga sentido debemos exigir $x - 3 \neq 0$, es decir, $x \neq 3$. Su dominio es $\mathbb{R} \setminus \{3\}$. En tres no hay un valor real que calcular: el numerador sería siete y el denominador cero. La falta de definición no equivale a obtener cero ni un número muy grande; significa que la división solicitada no existe en los reales.

Qué términos podemos reunir

En $3x^2 - 2x + 5$, los sumandos $3x^2$, $-2x$ y 5 son los términos. El número que multiplica a la parte literal es su coeficiente: tres en $3x^2$ y menos dos en $-2x$. El coeficiente de x es uno aunque no lo escribamos; el de $-x$ es menos uno. Conviene mantener el signo con el término al descomponer una suma.

Un monomio en las letras elegidas es un coeficiente multiplicado por potencias de esas letras con exponentes enteros no negativos. Las letras con exponente cero se omiten del producto y un monomio constante se evalúa directamente como su coeficiente. Una suma finita de monomios es un polinomio; por ejemplo, $3x^2 - 2x + 5$ reúne los monomios $3x^2$, $-2x$ y 5. Podemos reunir en él los términos de una misma potencia y ordenar después las potencias para comparar expresiones. Los cocientes como $1/x$ y los radicales como $\sqrt{x}$ exigirán conservar además las condiciones de sus operaciones, que estudiaremos en sus propios capítulos.

Dos términos son semejantes si tienen la misma parte literal con los mismos exponentes. Reunir $3x$ y $5x$ usa la distributividad en sentido inverso: $3x + 5x = (3 + 5)x = 8x$. En cambio, $3x + 5x^2$ reúne potencias distintas y en general no puede sustituirse por $8x^2$ ni por $8x$. La coincidencia de algunas letras no basta.

El grado de un monomio no nulo es la suma de los exponentes de sus letras. Por ejemplo, $2x^2y$ tiene grado tres. El grado de un polinomio no nulo es el mayor grado que queda después de reunir sus términos semejantes. Una constante no nula tiene grado cero. Dejaremos sin asignar grado al polinomio cero; esa excepción evita confundir la desaparición de todos los términos con la presencia de uno constante no nulo.

Problema 6. Restar un polinomio completo

Enunciado. Reduce $3x^2 - 2x + 5 - (x^2 + 4x - 7)$ y determina el grado del resultado.

Solución. Restar el paréntesis cambia el signo de cada término que contiene: obtenemos $3x^2 - 2x + 5 - x^2 - 4x + 7$. Reunimos las partes semejantes y queda $2x^2 - 6x + 12$. El coeficiente de x^2 es dos y no desaparece, por lo que el grado es dos. Al sustituir $x = 1$, la expresión original vale $3 - 2 + 5 - (1 + 4 - 7) = 8$ y la reducida vale $2 - 6 + 12 = 8$. Esta comprobación puede detectar un error de signos; la distributividad y la reunión de términos justifican la identidad para todos los reales.

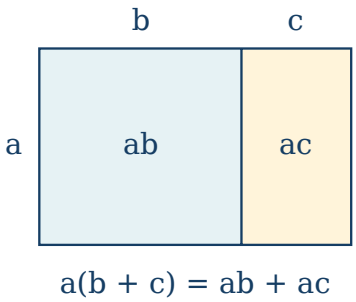
Problema 7. Las mismas letras en partes distintas

Enunciado. Reduce $2xy + 3x - xy + 4y - x$ y explica por qué no se puede reunir todo en un solo monomio.

Solución. Los términos con parte literal xy suman $2xy - xy = xy$. Los que tienen solo x dan $3x - x = 2x$, y queda además $4y$. El resultado es $xy + 2x + 4y$. Son tres partes literales diferentes. Para ver el peligro de reunir coeficientes sin respetarlas, basta observar que xy cambia como un producto de dos valores, mientras que x e y aparecen por separado. La identidad obtenida vale para todos los reales x, y; cualquier simplificación adicional tendría que apoyarse en una relación nueva entre ellos.

Abrir un paréntesis sin cambiar el valor

La distributividad $a(b + c) = ab + ac$ permite interpretar una cantidad que multiplica a una suma. Si a, b, c son longitudes positivas, un rectángulo de altura a y base $b + c$ se divide en dos rectángulos de áreas ab y ac. La igualdad de áreas ofrece una imagen de la regla. La propiedad algebraica de los reales se aplica también cuando intervienen cero o números negativos, donde esa interpretación directa por longitudes deja de servir.



Multiplicar por menos uno da $-(b+c) = -b-c$. Si el segundo término ya lleva signo negativo, $-(b - c) = -b + c$. Podemos comprobar la última identidad escribiendo $b - c = b + (-c)$ y aplicando dos veces la regla de signos. Al retirar un paréntesis precedido por una resta estamos multiplicando todo su contenido por menos uno.

Problema 8. Comenzar por el paréntesis interior

Enunciado. Reduce $5 - 2[3x - (2 - x)]$ sin perder los signos de las restas.

Solución. Dentro del corchete, $3x - (2 - x) = 3x - 2 + x = 4x - 2$. La expresión completa queda $5 - 2(4x - 2)$. El término que resta el paréntesis es $-2(4x - 2) = -8x + 4$, así que obtenemos $9 - 8x$. Para comprobar un signo delicado usamos $x = 0$: la expresión original es $5 - 2[0 - 2] = 9$, como la final. Abrir todos los paréntesis de una vez es posible, pero resolver primero el interior permite reconocer qué suma está multiplicando cada factor.

Problema 9. Los coeficientes pueden ser fracciones

Enunciado. Reduce $\frac{2}{3}(3x - 6) - \frac{1}{2}(4x + 2)$ y decide si el resultado depende de x.

Solución. El primer producto es $2x - 4$. El segundo, antes de aplicar el signo exterior, es $2x + 1$. Al restarlo queda $2x - 4 - 2x - 1 = -5$. Los términos con x se cancelan para todos sus valores reales, no solo para una elección particular. Podemos verificarlo con $x = 0$: los dos productos aportan menos cuatro y menos uno a la expresión completa. Las únicas divisiones son por los números fijos dos y tres, ambos no nulos, así que no aparece una restricción sobre x.

Multiplicar dos sumas aplica la misma regla más de una vez. Cada término de una debe multiplicar a cada término de la otra. Para dos binomios,

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

El desarrollo se entiende mejor como una lista de productos necesarios que como una distribución de letras sobre el papel. Omitir uno de los cuatro productos cambia el valor; repetir uno también. Después de obtenerlos podemos reunir los que sean semejantes.

Problema 10. Cuatro productos antes de reunir

Enunciado. Desarrolla $(x + 2)(x - 5)$ y comprueba el resultado para un valor que haga cero uno de los factores.

Solución. Multiplicamos x por los dos términos del segundo factor y hacemos lo mismo con dos. Queda $x^2 - 5x + 2x - 10 = x^2 - 3x - 10$. Para $x = 5$, el producto inicial vale cero porque su segundo factor es cero. El desarrollado da $25 - 15 - 10 = 0$, como corresponde. La forma producto hace visible ese valor nulo; la forma desarrollada reúne la información por potencias de x. Ambas representan el mismo número para cualquier real x.

Productos que conviene reconocer

El cuadrado de una suma es un producto de la suma consigo misma. La regla anterior da $(a+b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2$, y como $ab = ba$, obtenemos

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Sustituir b por $-b$ produce $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. El término cruzado cambia de signo, mientras que el cuadrado final es mayor o igual que cero. Son identidades para todos los reales

a, b; el dibujo de áreas del capítulo de potencias ayudaba a reconocer el término cruzado cuando las longitudes eran positivas, y la distributividad proporciona el alcance general.

Problema 11. Un cuadrado cercano a otro conocido

Enunciado. Calcula 103^2 usando $100 + 3$ y explica por qué no basta sumar los dos cuadrados.

Solución. Aplicamos la identidad: $(100+3)^2 = 100^2 + 2\cdot 100\cdot 3 + 3^2 = 10\,000 + 600 + 9 = 10\,609$. Sumar solo $100^2 + 3^2$ omitiría el término cruzado seiscientos. Este aparece dos veces al desarrollar $(100+3)(100+3)$: una al multiplicar cien por tres y otra al multiplicar tres por cien. La cercanía a cien facilita el cálculo porque conserva esos productos sencillos, no porque permita borrar los productos mixtos.

Otro desarrollo tiene una cancelación diferente:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2.$$

La igualdad permite pasar de un producto a una diferencia de cuadrados y también recorrer el camino inverso. La suma de cuadrados a^2+b^2 no recibe la misma regla: al desarrollar $(a+b)(a-b)$ el último producto tiene signo negativo.

Problema 12. Dos factores a igual distancia del centro

Enunciado. Desarrolla $(2x + 3)(2x - 3)$ y utiliza una estructura semejante para calcular $49 \cdot 51$.

Solución. Los factores tienen un término común $2x$ y términos opuestos de valor tres. El producto es $(2x)^2 - 3^2 = 4x^2 - 9$. Para los números, $49 = 50-1$ y $51 = 50+1$; por tanto $49\cdot 51 = 50^2 - 1^2 = 2499$. El centro común y la separación simétrica permiten reconocer el producto. En ambos casos se puede comprobar la identidad desarrollando sus cuatro términos y viendo cómo se cancelan los dos términos cruzados.

Problema 13. Construir un cubo a partir de un cuadrado

Enunciado. Desarrolla $(x+1)^3$ sin suponer memorizada una fórmula para el cubo de una suma.

Solución. Escribimos $(x + 1)^3 = (x + 1)^2(x + 1) = (x^2 + 2x + 1)(x + 1)$. Multiplicar por x da $x^3 + 2x^2 + x$ y multiplicar por uno da $x^2 + 2x + 1$. Al sumar obtenemos $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$. Los coeficientes tres proceden de reunir productos distintos que tienen la misma potencia de x. La igualdad vale para todos los reales; por ejemplo, con $x = 2$ ambas formas dan veintisiete. La sustitución comprueba un caso, mientras que el desarrollo explica el resultado general.

Reconocer un producto dentro de una suma

Factorizar una expresión consiste en escribirla como un producto. En la hilera de cuadrados, el recuento que aprovecha los lados compartidos y el recuento horizontal y vertical condujeron a escrituras del mismo número; al factorizar haremos un cambio de perspectiva semejante. La distributividad leída en sentido inverso da $ab + ac = a(b + c)$: la suma queda agrupada por el factor que comparten sus términos. La forma desarrollada facilita reunir potencias y coeficientes,

mientras que el producto muestra factores cuyos signos o ceros podemos estudiar por separado. Escogeremos la escritura según la información que estemos buscando.

Para extraer un monomio común podemos buscar un divisor común de los coeficientes enteros y las menores potencias de las letras presentes en todos los términos. Cada sumando debe reconstruirse al multiplicar el factor extraído por su término correspondiente dentro del paréntesis. Esa comprobación evita extraer una letra de un sumando que no la contiene.

Problema 14. Un factor que también puede valer cero

Enunciado. Factoriza $6x^3 - 9x^2$ extrayendo un monomio común. ¿Sigue siendo válida la igualdad obtenida cuando $x = 0$?

Solución. Los coeficientes seis y nueve tienen divisor común tres; las potencias x^3 y x^2 contienen ambas el factor x^2. Escribimos $6x^3 - 9x^2 = 3x^2(2x - 3)$. Al distribuir el producto recuperamos cada sumando, así que la identidad vale para todo real x, incluido cero: ambos lados valen cero allí. No hemos dividido una igualdad numérica por x^2; hemos reconocido un producto cuyo desarrollo coincide con el polinomio. La posible anulación del factor común no invalida la factorización.

El factor común puede ser una expresión completa. En $u(v + w) + z(v + w)$, la cantidad $v + w$ aparece multiplicando tanto a u como a z, y podemos escribir $(u + z)(v + w)$. Mantener agrupada esa expresión ahorra un desarrollo que después tendríamos que deshacer.

Problema 15. El paréntesis es un factor

Enunciado. Factoriza $3x(x - 2) - 4(x - 2)$ y verifica la igualdad sin escoger un valor particular de x.

Solución. Ambos sumandos contienen $x - 2$ como factor. La distributividad en sentido inverso da $(x - 2)(3x - 4)$. Para verificarlo de forma general, desarrollamos esta última expresión: $(x - 2)3x - (x - 2)4 = 3x(x - 2) - 4(x - 2)$, que es la original. Si preferimos comparar polinomios, ambos desarrollos dan $3x^2 - 10x + 8$. Las dos verificaciones usan identidades válidas para cualquier real. Si $x = 2$, el factor común se anula y ambas expresiones siguen valiendo cero.

Problema 16. Reconstruir los dos factores

Enunciado. Factoriza $x^2 + 7x + 12$ como producto de dos binomios de la forma $x + p$ y $x + q$, con p, q enteros.

Solución. Al desarrollar $(x + p)(x + q)$ obtenemos $x^2 + (p + q)x + pq$. Para reconstruir el polinomio buscamos $p + q = 7$ y $pq = 12$. Tres y cuatro satisfacen ambas condiciones, de modo que $x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$. El producto verifica la respuesta: sus términos cruzados suman $4x + 3x = 7x$ y el término constante es doce. Encontrar dos números cuyo producto sea doce no bastaría; también deben dar el coeficiente lineal correcto. Esta búsqueda de enteros puede fallar en otros polinomios aunque admitan una factorización con coeficientes reales.

La diferencia de cuadrados ya proporciona otra factorización: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Para los cubos, desarrollar un producto algo mayor permite encontrar

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3.$$

En efecto, los seis productos son $a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3$, y los términos mixtos se cancelan por parejas. Sustituir b por $-b$ en la identidad da también

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Estas fórmulas se sostienen en el desarrollo; recordarlas resulta útil cuando reconocemos sus términos, pero el cálculo permite recuperarlas si olvidamos un signo.

Problema 17. La diferencia y la suma de dos cubos

Enunciado. Factoriza $x^3 - 8$ y $x^3 + 8$. Explica de dónde sale el coeficiente dos que aparece en el término mixto.

Solución. Escribimos ocho como 2^3. La diferencia da $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$ y la suma da $x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$. El término $2x$ procede del producto de las dos bases, $x \cdot 2$; el cuatro es el cuadrado de dos. Al desarrollar el primer producto obtenemos $x^3 + 2x^2 + 4x - 2x^2 - 4x - 8 = x^3 - 8$. En el segundo, $x^3 - 2x^2 + 4x + 2x^2 - 4x + 8 = x^3 + 8$. Las cancelaciones justifican ambas identidades para todo real x.

Problema 18. Importa qué coeficientes permitimos

Enunciado. Compara la posibilidad de factorizar $x^2 - 2$ y $x^2 + 1$ en dos factores lineales reales no constantes. Explica por qué buscar solo enteros puede ocultar la primera factorización.

Solución. Como dos es el cuadrado de $\sqrt{2}$, tenemos $x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$. Los factores son lineales reales, aunque sus términos constantes sean irracionales; una búsqueda restringida a binomios $x + p$, $x + q$ con p, q enteros no los encontraría. Para $x^2 + 1$, todo valor real produce un número al menos igual a uno. Si tuviera un factor lineal real no constante $ax + b$, con $a \neq 0$, al sustituir $x = -b/a$ el producto se anularía, contradiciendo esa positividad. Por tanto no admite esa clase de factorización. Afirmar que una expresión «no se puede factorizar» necesita precisar qué factores y coeficientes estamos permitiendo.

Completar lo que falta para reconocer un cuadrado

La expresión $x^2 + 6x$ contiene los dos primeros términos de $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$. Si agregamos nueve aparece el cuadrado; para conservar el valor original debemos retirar el mismo nueve. Así,

$$x^2 + 6x = (x + 3)^2 - 9.$$

Esta transformación se llama **completar el cuadrado**. El número tres se obtiene dividiendo entre dos el coeficiente de x, porque el término cruzado de $(x + h)^2$ es $2hx$. Después debemos añadir y restar h^2. La explicación determina tanto el número que entra en el paréntesis como el que se compensa fuera de él.

Problema 19. Una forma que muestra el menor valor

Enunciado. Completa el cuadrado en x^2+6x+5 y determina su menor valor real y dónde se alcanza.

Solución. Añadimos y restamos nueve: $x^2+6x+5=(x^2+6x+9)-9+5=(x+3)^2-4$. Un cuadrado real es no negativo, así que la expresión es al menos menos cuatro. Ese valor se alcanza cuando $x+3=0$, es decir, cuando $x=-3$. La comprobación en la forma original da $9-18+5=-4$. Además, los valores $x=-3+t$ y $x=-3-t$ producen el mismo resultado t^2-4, lo que muestra la simetría que la primera forma no hacía tan inmediata.

Para una expresión general ax^2+bx+c, el procedimiento empieza extrayendo a de los dos primeros términos. Si $a\neq 0$, podemos escribir

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c.$$

La mitad del coeficiente interior de x es $b/(2a)$. Añadir y restar su cuadrado dentro del paréntesis produce

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}.$$

La compensación exterior es $a\,[b/(2a)]^2=b^2/(4a)$; multiplicar ese término por a es un paso esencial. Si $a>0$, el cuadrado multiplicado por a es no negativo y la constante exterior es el mínimo. Si $a<0$, es no positivo y la constante es el máximo. En ambos casos se alcanza cuando $x=-b/(2a)$. Si $a=0$, la expresión es lineal o constante y esta fórmula con divisiones por a no se aplica.

Problema 20. El coeficiente exterior también participa

Enunciado. Completa el cuadrado en $2x^2-12x+11$ y halla su menor valor. Explica qué cambia en una expresión de la forma $-2(x+1)^2+3$ y por qué hay que separar el caso $a=0$ en la fórmula general.

Solución. Extraemos dos: $2(x^2-6x)+11$. Dentro aparece $(x-3)^2-9$, así que obtenemos $2(x-3)^2-18+11=2(x-3)^2-7$. El mínimo es menos siete, alcanzado en $x=3$; en la expresión original, $18-36+11=-7$. En $-2(x+1)^2+3$, el cuadrado está multiplicado por un número negativo, por lo que el valor es a lo sumo tres y ese máximo se alcanza en $x=-1$. Si $a=0$, no podemos formar $b/(2a)$; debemos volver a la expresión inicial $bx+c$ en lugar de sustituir en una fórmula fuera de su dominio.

Una identidad necesita una razón general

Comprobar una igualdad para algunos valores puede ayudarnos a descubrir un patrón o detectar un error. Para demostrar que es una identidad necesitamos justificarla en todo el dominio afirmado. Una cadena de igualdades basada en las propiedades de las operaciones conserva cada valor admisible sin tener que escogerlo. También podemos llevar los dos miembros a una misma forma y compararlos allí.

Problema 21. Demostrar sin sustituir números

Enunciado. Demuestra que $(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$ para todos los reales x, y.

Solución. Desarrollamos cada cuadrado con su término cruzado. La diferencia queda $x^2+2xy+y^2-(x^2-2xy+y^2)$. Al retirar el segundo paréntesis se transforma en $x^2+2xy+y^2-x^2+2xy-y^2$. Se cancelan los cuadrados y quedan cuatro veces xy. Cada paso usa una identidad de los reales, sin divisiones ni raíces que restrinjan el dominio. También podríamos reconocer una diferencia de cuadrados: con $A=x+y$ y $B=x-y$, el producto $(A-B)(A+B)$ se convierte en $(2y)(2x)=4xy$.

Problema 22. Tres comprobaciones no bastan

Enunciado. Las expresiones $x(x-1)(x-2)$ y cero coinciden para $x=0,1,2$. ¿Son idénticas en los reales? Explica cómo podrían construirse ejemplos semejantes para cualquier lista finita de valores de prueba.

Solución. No son idénticas: para $x=3$, el producto vale $3\cdot 2\cdot 1=6$, mientras que cero permanece cero. Para una lista finita $a_1,\dots,a_k$, con al menos un valor, el producto $(x-a_1)\cdots(x-a_k)$ se anula en todos los valores de la lista. Si escogemos un real distinto de cada uno de ellos, ningún factor se anula y el producto es no nulo. Siempre podemos elegir uno fuera de una lista finita. Así, una batería finita de sustituciones, sin hipótesis adicionales sobre las expresiones, no garantiza una identidad. Un solo contraejemplo válido sí basta para refutarla.

Conservar los valores y conservar el dominio

Una transformación que introduce una división requiere comprobar que el divisor es distinto de cero. Por ejemplo, $uv/u=v$ está justificado para $u\neq 0$. Para $u=0$, el miembro izquierdo no está definido, aunque el derecho pueda tener un valor. La igualdad en el dominio común no permite atribuir al cociente valores que su escritura original excluye.

Podemos pensar una fórmula como una regla que asigna un valor a cada entrada de su dominio. Si consideramos las reglas con el mismo conjunto de llegada, definen la misma función cuando tienen el mismo dominio y asignan el mismo valor a cada entrada. Para comparar una fracción con su fórmula simplificada tendremos que conservar esos datos, además de comprobar sus valores donde existen ambas. Más adelante llamaremos codominio al conjunto de llegada y estudiaremos las funciones sistemáticamente; esta primera comparación permite controlar qué conserva una simplificación.

Problema 23. Una simplificación que rellena un hueco

Enunciado. Simplifica $\dfrac{x^2-9}{x-3}$. Compara el dominio de la expresión original con el de $x+3$ e interpreta qué ocurre en $x=3$.

Solución. El denominador exige $x\neq 3$. Factorizamos el numerador: $x^2-9=(x-3)(x+3)$. En el dominio original, $x-3$ no es cero y podemos cancelar ese factor; el cociente vale $x+3$. El polinomio $x+3$, considerado por sí solo, admite todos los reales y vale seis en tres. El cociente original no tiene allí valor: produciría $0/0$, que no está definido. Ambas reglas son iguales si restringimos también $x+3$ a $\mathbb{R}\setminus\{3\}$. Si lo dejamos definido en todos los reales, hemos construido una extensión que rellena un hueco, no demostrado que el cociente ya tuviera ese valor.

Problema 24. El paso que hace fallar una supuesta demostración

Enunciado. Se parte de $a = b \neq 0$, se escribe $a^2 = ab$ y se resta b^2 para obtener $(a - b)(a + b) = b(a - b)$. Después se cancela $a - b$, se obtiene $a + b = b$ y se concluye $2 = 1$. Identifica el primer paso inválido.

Solución. Multiplicar $a = b$ por a, restar b^2 y factorizar ambos miembros son operaciones válidas. Pero la hipótesis inicial da $a - b = 0$. Cancelar ese factor equivale a dividir por cero; ese es el primer paso inválido. Antes de él solo teníamos una igualdad $0 = 0$, compatible con cualquier elección no nula de $a = b$. La condición $b \neq 0$ permitiría dividir por b al final, pero no repara la división anterior por $a - b$. Revisar cada divisor en el momento en que aparece permite localizar el error sin desconfiar de las identidades de factorización que sí eran correctas.

Las propiedades a la vista

Las igualdades de esta tabla reúnen las herramientas utilizadas en el capítulo y las reglas de los reales que las sostienen. Pueden leerse en ambos sentidos: desarrollar un producto y reconocer sus factores son recorridos de una misma identidad. Todas las letras representan números reales; cuando una letra representa una expresión, esta debe estar definida. Las restricciones indicadas forman parte de la regla.

Propiedad	Identidad y condiciones de uso
Conmutatividad	$a + b = b + a$ y $ab = ba$. Permite cambiar el orden de sumandos o factores.
Asociatividad	$(a + b) + c = a + (b + c)$ y $(ab)c = a(bc)$. Permite reagrupar sin alterar el orden.
Elementos neutros	$a + 0 = a$ y $a \cdot 1 = a$.
Opuesto e inverso	$a + (-a) = 0$; $a \cdot (1/a) = 1$ si $a \neq 0$. El opuesto existe también para cero; el inverso multiplicativo, no.
Producto por cero	$a \cdot 0 = 0$.
Distributividad	$a(b + c) = ab + ac$ y $a(b - c) = ab - ac$.
Factor común	$ab + ac = a(b + c)$. La identidad vale aunque el factor común sea cero.
Opuesto de una suma	$-(a + b) = -a - b$.
Opuesto de una diferencia	$-(a - b) = -a + b$.
Términos semejantes	$au + bu = (a + b)u$. La parte literal completa u debe ser la misma en ambos términos.
Producto de dos sumas	$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$. Cada término de un factor multiplica a cada término del otro.
Cuadrado de una suma	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
Cuadrado de una diferencia	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
Diferencia de cuadrados	$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.
Cubo de una suma	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Se obtiene multiplicando el cuadrado por $a + b$.
Cubo de una diferencia	$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$. Se obtiene sustituyendo b por $-b$ en la fila anterior.
Diferencia de cubos	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.
Suma de cubos	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

Propiedad	Identidad y condiciones de uso
Factor común binomial	$u(v+w)+z(v+w)=(u+z)(v+w)$. El factor compartido puede ser una expresión completa.
Trinomio mónico	$x^2+(p+q)x+pq=(x+p)(x+q)$. Para reconstruir los factores deben coincidir tanto la suma como el producto de p, q.
Completar un cuadrado	$x^2+bx+c=(x+b/2)^2+c-b^2/4$.
Cuadrático general	$ax^2+bx+c=a(x+b/(2a))^2+c-b^2/(4a)$, con $a\neq 0$. El término constante exterior es mínimo si $a>0$ y máximo si $a<0$; se alcanza en $x=-b/(2a)$.
Cancelación de un factor	$ab/(ac)=b/c$, con $a\neq 0$ y $c\neq 0$. Se conservan las restricciones de la expresión original, aunque la fórmula final admita otros valores.

Las fórmulas de productos y factores no garantizan que cualquier polinomio admita una factorización del tipo que buscamos. También importa el conjunto de coeficientes permitido: en los reales podemos escribir $x^2-2=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$, mientras que x^2+1 carece de factores lineales reales no constantes. Esa elección debe acompañar a la pregunta de factorización.

Demostraciones. Los apartados del apéndice desde «Distributividad, signos y términos semejantes» hasta «Cancelación y dominio de una expresión» desarrollan estas identidades. «Qué adoptamos y qué demostramos» distingue sus axiomas de partida.

Ejercicios para trabajar sin profesor

1. Una hilera de cuarenta cuadrados comparte los lados como en el problema inicial. Cuenta sus palitos de dos maneras y explica por qué la fórmula no describe la hilera vacía.

2. Un servicio hipotético cobra cinco unidades monetarias fijas y 0,8 por kilómetro. Escribe su costo en función del número de kilómetros y calcula el de 12,5 kilómetros, con dominio declarado.

3. Distingue $3(y-2)$, $3(y-2)=3y-6$ y $3(y-2)=9$ como expresión, identidad o condición que debe resolverse. Comprueba la solución de la última.

4. Evalúa $x^2-2xy+3y^2$ para $x=-1$ e $y=-2$, conservando los signos.

5. Evalúa $(3t-2)/(t+1)$ para $t=-2$ y determina todos los valores reales excluidos de su dominio.

6. Reduce $4t^2-3t+2-(t^2-5t+6)$ y da el grado del polinomio resultante.

7. Reduce $5ab-2a+3b-2ab+a$. Explica qué términos son semejantes.

8. Reduce $7-3[2t-(1-t)]$ y comprueba la identidad para $t=0$.

9. Reduce $\dfrac{3}{4}(4t-8)-\dfrac{1}{3}(9t+6)$ y decide si depende de t.

10. Desarrolla $(t-4)(t+3)$ y verifica el resultado para $t=4$.

11. Calcula 98^2 mediante el cuadrado de una diferencia. Identifica el término cruzado.

12. Desarrolla $(3t+2)(3t-2)$ y calcula $79\cdot 81$ con una estructura semejante.

13. Desarrolla $(t-1)^3$ a partir de $(t-1)^2(t-1)$, sin citar una fórmula de memoria.

14. Extrae un monomio común de $8t^3+12t^2$ y comprueba si la identidad admite $t=0$.

15. Factoriza $2t(t+1)+5(t+1)$ sin desarrollar primero el paréntesis común.

16. Factoriza t^2-5t+6 como $(t+p)(t+q)$ con p, q enteros. Justifica las dos condiciones que deben cumplir.

17. Factoriza t^3-27 y t^3+27 y comprueba ambos productos por desarrollo.

18. Factoriza $t^2 - 3$ en dos factores lineales reales. Demuestra que $t^2 + 4$ no admite una factorización de esa clase.

19. Completa el cuadrado en $t^2 - 8t + 11$ y encuentra su menor valor y dónde se alcanza.

20. Completa el cuadrado en $-3t^2 + 18t - 20$ y decide si la constante exterior representa un mínimo o un máximo.

21. Demuestra $(u + v)^2 + (u - v)^2 = 2u^2 + 2v^2$ para todos los reales u, v.

22. Las expresiones $t(t + 1)(t - 1)$ y cero coinciden para $t = -1, 0, 1$. ¿Constituye eso una identidad? Da un contraejemplo y explica el alcance de la comprobación.

23. Simplifica $(t^2 - 4)/(t - 2)$ conservando su dominio original. Compara con la regla $t + 2$ definida para todo real.

24. Para resolver $x^2 = 4x$, alguien divide por x y obtiene solo $x = 4$. Encuentra el valor que perdió, localiza la restricción de ese paso y explica cómo factorizar conserva las dos posibilidades.

Soluciones desarrolladas

Ejercicio 1. Dos recuentos de una misma hilera

El primer cuadrado requiere cuatro palitos y los treinta y nueve siguientes agregan tres cada uno. El total es $4 + 3 \cdot 39 = 121$. Contando por orientación, hay ochenta palitos horizontales y cuarenta y uno verticales, otra vez ciento veintiuno. Para $n \geq 1$, ambos recuentos dan $3n + 1$. Con $n = 0$, esa expresión vale uno y no representa los cero palitos de una hilera vacía. El dominio del modelo sigue siendo parte de la respuesta.

Ejercicio 2. Un cargo fijo y una distancia variable

Si d es el número de kilómetros recorridos, el costo es $C = 5 + 0{,}8d$ unidades monetarias, con $d \geq 0$. Para $d = 12{,}5$, el producto $0{,}8 \cdot 12{,}5$ vale diez y el costo es quince. La parte variable tiene las mismas unidades que el cargo fijo y puede sumarse a él. La fórmula corresponde al modelo de servicio iniciado y sin otros cargos; una distancia negativa no tiene interpretación en él.

Ejercicio 3. El alcance de un signo igual

$3(y - 2)$ es una expresión, a la que podemos asignar un valor cuando conocemos y. La igualdad $3(y - 2) = 3y - 6$ es una identidad en los reales por distributividad. La condición $3(y - 2) = 9$ exige $y - 2 = 3$, de donde $y = 5$. Al sustituir cinco obtenemos $3(5 - 2) = 9$. La condición no vale para todos los reales: por ejemplo, con $y = 2$ su miembro izquierdo es cero. La identidad anterior sí sigue siendo válida con ese valor.

Ejercicio 4. Un producto de dos negativos dentro de una resta

Sustituimos y obtenemos $(-1)^2 - 2(-1)(-2) + 3(-2)^2$. El primer término es uno; el producto xy es dos y el término central vale menos cuatro; el último es doce. La suma es $1 - 4 + 12 = 9$. El cuadrado de menos dos es cuatro porque el signo pertenece a la base completa. Ninguna operación introduce restricciones en estos valores reales.

Ejercicio 5. La evaluación y el dominio se revisan por separado

Para $t=-2$, el numerador vale $-6-2=-8$ y el denominador $-2+1=-1$. El cociente es ocho. Para cualquier sustitución debe cumplirse $t+1\neq 0$, así que el único valor excluido es $t=-1$. El dominio real es $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Obtener una respuesta válida en menos dos no elimina la necesidad de declarar la restricción general.

Ejercicio 6. Cambiar todos los signos del paréntesis restado

La expresión se convierte en $4t^2-3t+2-t^2+5t-6$. Reunimos términos y obtenemos $3t^2+2t-4$, de grado dos porque el coeficiente de t^2 es tres. Para comprobar los signos constantes, con $t=0$ la expresión original da $2-6=-4$, igual que la reducida. La igualdad general se justifica al aplicar la distributividad del signo menos a los tres términos del paréntesis.

Ejercicio 7. Coeficientes de partes literales iguales

Los términos $5ab$ y $-2ab$ suman $3ab$; los términos $-2a$ y a suman $-a$. Permanece además $3b$. El resultado es $3ab-a+3b$. Las partes literales ab, a y b son diferentes, aunque compartan algunas letras. No se pueden reunir sus coeficientes como si multiplicaran un mismo número para todas las elecciones de a, b.

Ejercicio 8. Restar una diferencia

Primero, $2t-(1-t)=2t-1+t=3t-1$. Después, $7-3(3t-1)=7-9t+3=10-9t$. Para $t=0$, la expresión original es $7-3[0-1]=10$ y la final también vale diez. El signo positivo de tres proviene del producto de menos tres por menos uno, no de un cambio arbitrario al retirar el corchete.

Ejercicio 9. Una expresión que pierde su parte variable

El primer producto es $3t-6$ y el segundo es $3t+2$. Restando el segundo completo obtenemos $3t-6-3t-2=-8$. El resultado no depende de t: los términos variables se anulan idénticamente. Los denominadores son los números fijos cuatro y tres, distintos de cero; la identidad vale para todo real t.

Ejercicio 10. Verificar un cero visible en la forma producto

Al distribuir, $(t-4)(t+3)=t^2+3t-4t-12=t^2-t-12$. Para $t=4$, el producto tiene un factor cero y por tanto vale cero. El polinomio desarrollado da $16-4-12=0$. Esta coincidencia verifica el valor pedido; los cuatro productos y su reunión demuestran la identidad general.

Ejercicio 11. El cuadrado de una diferencia

$98^2=(100-2)^2=100^2-2\cdot 100\cdot 2+2^2=10\,000-400+4=9604$. El término cruzado es menos cuatrocientos: aparece porque hay dos productos entre cien y menos dos. El cuadrado del segundo término es positivo. Si se omitiera el término cruzado, se obtendría un número mayor que diez mil, incompatible con que noventa y ocho sea menor que cien y ambos sean positivos.

Ejercicio 12. Conjugados algebraicos y numéricos

El producto de los binomios es $(3t)^2 - 2^2 = 9t^2 - 4$. Para el cálculo numérico usamos el centro ochenta: $79 \cdot 81 = (80-1)(80+1) = 80^2 - 1 = 6399$. En ambos productos, los términos cruzados tienen signos opuestos y se cancelan. El signo menos del último cuadrado se conserva al pasar a la forma desarrollada.

Ejercicio 13. Recuperar los coeficientes del cubo

Tenemos $(t-1)^2 = t^2 - 2t + 1$. Multiplicamos por $t - 1$: el producto por t da $t^3 - 2t^2 + t$, y el producto por menos uno da $-t^2 + 2t - 1$. Al sumar queda $t^3 - 3t^2 + 3t - 1$. Para $t = 1$, tanto el cubo original como este polinomio valen cero. Los coeficientes y sus signos proceden de los productos y la reunión de términos.

Ejercicio 14. Un factor común no es un divisor impuesto al dominio

Los coeficientes ocho y doce comparten el factor cuatro y ambas potencias de t contienen t^2. La factorización es $8t^3 + 12t^2 = 4t^2(2t + 3)$. Al distribuir recuperamos los dos términos originales, incluso si $t = 0$, donde ambos lados valen cero. La extracción de un factor de un polinomio establece una identidad; no exige que el valor de ese factor sea no nulo.

Ejercicio 15. Mantener visible el factor repetido

El paréntesis $t+1$ multiplica a $2t$ y a cinco. Extraerlo da $(t+1)(2t+5)$. La comprobación general es distribuir: $(t + 1)2t + (t + 1)5 = 2t(t + 1) + 5(t + 1)$. En $t = -1$ los dos miembros valen cero, así que esa posible anulación tampoco restringe la identidad.

Ejercicio 16. Suma y producto de los términos constantes

Desarrollar $(t+p)(t+q)$ produce $t^2 + (p+q)t + pq$. Necesitamos $p+q = -5$ y $pq = 6$. Los valores menos dos y menos tres cumplen ambas condiciones, de modo que $t^2 - 5t + 6 = (t-2)(t-3)$. El producto se comprueba como $t^2 - 3t - 2t + 6$. Elegir dos y tres habría conservado el producto seis, pero dado signo positivo al coeficiente lineal.

Ejercicio 17. Reconocer veintisiete como cubo

Como $27 = 3^3$, la diferencia es $(t-3)(t^2 + 3t + 9)$ y la suma es $(t+3)(t^2 - 3t + 9)$. El primer desarrollo da $t^3+3t^2+9t-3t^2-9t-27 = t^3-27$. El segundo da $t^3-3t^2+9t+3t^2-9t+27 = t^3+27$. Las igualdades son válidas para todos los reales t, con independencia de que algún factor se anule.

Ejercicio 18. Factores reales y positividad

La diferencia se factoriza como $t^2 - 3 = (t - \sqrt{3})(t + \sqrt{3})$. En cambio, $t^2 + 4 \geq 4 > 0$ para todo real. Si tuviera un factor lineal real no constante $at + b$, ese factor se anularía en el real $-b/a$ y haría cero el producto, lo cual es imposible. La conclusión se refiere a dos factores lineales reales no constantes; no excluye escribir un producto trivial con un factor constante.

Ejercicio 19. La mitad del coeficiente y su cuadrado

La mitad de menos ocho es menos cuatro y su cuadrado es dieciséis. Añadimos y restamos dieciséis: $t^2 - 8t + 11 = (t-4)^2 - 16 + 11 = (t-4)^2 - 5$. El menor valor es menos cinco, alcanzado en $t = 4$.

En la forma original obtenemos $16 - 32 + 11 = -5$. Cualquier otro valor de t deja un cuadrado positivo y da un resultado mayor.

Ejercicio 20. Un coeficiente exterior negativo

Extraemos menos tres de los dos primeros términos: $-3(t^2-6t)-20$. Dentro, $t^2-6t = (t-3)^2-9$. Al sustituir obtenemos $-3(t-3)^2 + 27 - 20 = -3(t-3)^2 + 7$. El término del cuadrado es no positivo, por lo que siete es el máximo, alcanzado en $t = 3$. La expresión puede bajar sin cota inferior al hacer grande $|t-3|$; no tiene mínimo real. Al desarrollar la forma obtenida recuperamos $-3t^2 + 18t - 20$.

Ejercicio 21. Los términos cruzados se compensan en una suma

Los cuadrados desarrollados son $u^2+2uv+v^2$ y $u^2-2uv+v^2$. Al sumarlos se cancelan los términos cruzados y quedan $2u^2 + 2v^2$. La deducción usa identidades válidas para cualquier par de reales y no requiere dividir por ninguno de ellos. En particular, los valores cero o los pares de signos opuestos están incluidos.

Ejercicio 22. Un contraejemplo fuera de la lista

En $t = -1, 0, 1$ se anula respectivamente uno de los factores, así que los tres resultados son cero. Para $t = 2$, el producto vale $2 \cdot 3 \cdot 1 = 6$, que no coincide con cero. La igualdad no es una identidad en los reales. Las tres sustituciones solo demostraban coincidencia en tres entradas; al salir de esa lista encontramos una diferencia. Sin una hipótesis adicional que limite la clase de expresiones, no puede ampliarse el alcance de esas comprobaciones.

Ejercicio 23. El dominio que debe acompañar a la respuesta

El cociente exige $t \neq 2$. En ese dominio, $t^2 - 4 = (t-2)(t+2)$ permite cancelar el factor no nulo $t - 2$ y obtener $t + 2$. La respuesta completa es esa fórmula con dominio $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. La regla $t + 2$ definida en todo $\mathbb{R}$ también asigna cuatro a la entrada dos, donde el cociente original no existe. Coinciden en el dominio original y son la misma función si restringimos la segunda regla a él; con dominios distintos, la segunda es una extensión.

Ejercicio 24. Una división que pierde una posibilidad

El valor $x = 0$ satisface $x^2 = 4x$, pero no puede pasar por la división entre x. Ese paso solo es válido bajo la condición $x \neq 0$ y encuentra la solución cuatro dentro de ese caso. Podemos conservar ambos casos escribiendo $x^2 - 4x = x(x-4)$ y planteando $x(x-4) = 0$. En los reales, un producto nulo tiene algún factor nulo: si el primero fuera no nulo, su inverso obligaría a que el segundo fuera cero. Obtenemos $x = 0$ o $x = 4$ y ambos verifican la ecuación inicial. El estudio de ecuaciones del capítulo siguiente desarrollará este control de equivalencia de manera sistemática.

Diagnóstico de salida

Escoge una expresión que puedas escribir desarrollada, factorizada y mediante un cuadrado completo. Explica qué pregunta permite contestar con más facilidad cada forma. Después revisa una simplificación con cociente: señala el dominio original y el valor que se perdería de vista si entregaras solo la fórmula final.

Las identidades ofrecen caminos para transformar una expresión sin cambiar sus valores admisibles. Al resolver una ecuación tendremos que cuidar, además, el conjunto de valores que satisfacen una condición. Una división puede excluir una solución y otras operaciones pueden introducir candidatos que después habrá que comprobar. Esa será la pregunta que organice el próximo capítulo.

CAPÍTULO 6

Ecuaciones, inecuaciones y valor absoluto

Al elegir cómo pagar nuestros viajes durante un mes, necesitamos anticipar cuántas veces usaremos el transporte. Un abono puede cobrar una cantidad fija y reducir el precio de cada trayecto, mientras que otra modalidad cobra lo mismo por cada viaje. Con pocos viajes, el cargo inicial pesa mucho; a medida que aumenta la cantidad de trayectos, el ahorro por viaje puede compensarlo. La decisión depende de localizar el punto en que ambos gastos coinciden y comparar lo que sucede a cada lado.

Las expresiones algebraicas permiten seguir esa comparación sin hacer una cuenta independiente para cada mes posible. Una igualdad señalará los valores en que los costos se encuentran; una desigualdad describirá las cantidades para las que conviene una opción. Trabajaremos sobre ambas conservando el significado de la incógnita, porque una respuesta que represente viajes tendrá que ajustarse a un número entero no negativo. Más adelante, las condiciones expresadas mediante distancias nos llevarán al valor absoluto y a los intervalos.

La incógnita tiene que responder una pregunta

Llamaremos **solución** a cada valor del dominio que hace verdadera la condición planteada. El dominio reúne los valores que tiene sentido considerar: puede ser todo $\mathbb{R}$, los enteros no negativos, las longitudes positivas o los reales que no anulan ciertos denominadores. Antes de despejar conviene escribir qué representa la incógnita y dónde puede vivir. Al terminar, volveremos a esa primera decisión.

Problema 1. Dos maneras de pagar los viajes

Enunciado. Un abono mensual cuesta 8400 pesos y permite pagar 300 pesos por viaje. Sin abono, cada viaje cuesta 1000 pesos. ¿Para cuántos viajes mensuales los costos son iguales?

Solución. Sea n el número de viajes del mes. Es un entero no negativo. El abono produce un costo de $8400 + 300n$ pesos y la otra opción cuesta $1000n$ pesos. La igualdad buscada es

$$8400 + 300n = 1000n.$$

Restamos $300n$ a ambos miembros: $8400 = 700n$. Dividimos por 700 y obtenemos $n = 12$. Es admisible porque pertenece al dominio. Comprobamos el significado económico: $8400 + 300 \cdot 12 = 12000$ y $1000 \cdot 12 = 12000$. Los costos coinciden al hacer doce viajes. Aún falta comparar qué plan conviene para otras cantidades; lo haremos al estudiar inecuaciones.

El signo igual expresa una condición entre dos cantidades. Al sustituir $n = 12$ se cumple; al sustituir $n = 10$ no se cumple. Resolver consiste en describir **todos** los valores para los que se cumple, y justificar que no hemos ganado ni perdido ninguno.

Problema 2. Comprobar antes de confiar

Enunciado. Se proponen $x = 2$ y $x = 3$ como soluciones de $3(x - 1) = x + 3$. Decide cuáles sirven y resuelve la ecuación.

Solución. Para $x = 2$, los miembros valen 3 y 5: falla. Para $x = 3$, ambos valen 6: funciona. Para asegurar que no existen más soluciones desarrollamos $3x - 3 = x + 3$, restamos x y sumamos 3 a ambos lados. Queda $2x = 6$, de donde $x = 3$. Cada operación se puede deshacer, por lo que hemos encontrado el conjunto completo: $\{3\}$. Una comprobación confirma un candidato; una cadena reversible justifica además que no falta otro.

Transformaciones equivalentes

Dos ecuaciones son **equivalentes en un dominio** cuando tienen exactamente las mismas soluciones dentro de él. Sumar la misma expresión, definida en ese dominio, a ambos miembros conserva la igualdad y permite regresar restándola. Multiplicar por un número distinto de cero también es reversible: basta dividir por ese número. El conocido «pasa al otro lado» comprime estas operaciones; entenderlas permite decidir si el paso es legítimo.

Problema 3. Paréntesis y fracciones

Enunciado. Resuelve $\dfrac{x-2}{3} - \dfrac{x+1}{2} = 1$.

Solución. El dominio es $\mathbb{R}$: los denominadores son constantes no nulas. Multiplicamos ambos miembros completos por 6:

$$2(x - 2) - 3(x + 1) = 6.$$

El signo menos afecta a todo el segundo numerador. Al distribuir resulta $2x - 4 - 3x - 3 = 6$, es decir, $-x - 7 = 6$. Sumando 7 obtenemos $-x = 13$ y, finalmente, $x = -13$. En la expresión original los cocientes son -5 y -6; su diferencia es 1. Multiplicar por 6 fue reversible y el conjunto solución es $\{-13\}$.

Problema 4. Cuando las letras desaparecen

Enunciado. Resuelve por separado $4(x - 2) = 4x - 8$ y $4(x - 2) = 4x - 7$.

Solución. En la primera obtenemos $4x - 8 = 4x - 8$. Al restar el miembro derecho queda $0 = 0$, verdadera para todo real. Su conjunto solución es $\mathbb{R}$. En la segunda, el desarrollo y la resta conducen a $-8 = -7$, falsa para cualquier valor de x. Su conjunto solución es $\emptyset$. Que desaparezca la incógnita es información: la condición final puede ser siempre verdadera o siempre falsa.

Toda ecuación que se reduzca, mediante pasos equivalentes, a $ax = b$ queda clasificada por sus coeficientes. Si $a \neq 0$, tiene la única solución b/a. Si $a = 0$, debemos examinar b antes de dividir. La clasificación se refiere al dominio $\mathbb{R}$; en un problema contextual todavía hay que intersectar con sus valores admisibles.

Propiedades para transformar ecuaciones

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Sumar o restar	$F = G \iff F + H = G + H$, cuando las tres expresiones están definidas en el dominio considerado.
Multiplicar o dividir	$F = G \iff HF = HG$, si H está definido y nunca vale cero en ese dominio.
Una solución lineal	Si $a \neq 0$, $ax = b \iff x = b/a$.
Identidad lineal	Si $a = 0$ y $b = 0$, todo real satisface $ax = b$.
Incompatibilidad lineal	Si $a = 0$ y $b \neq 0$, ningún real satisface $ax = b$.
Restricción del contexto	El conjunto admisible es la intersección de las soluciones algebraicas con el dominio del problema.

Pruebas. Véanse «Transformaciones que conservan una ecuación» y «Ecuaciones lineales y restricciones del dominio» en el apéndice.

Del relato a una condición verificable

En la comparación de tarifas elegimos como incógnita el número de viajes porque con él podíamos expresar ambos costos. Al construir una ecuación en otro contexto, buscaremos una cantidad que permita hacer lo mismo con los datos del relato. Una vez escrita, podremos leer cada término con su unidad y comprobar qué parte del problema representa: los términos que se suman deben medir una misma magnitud y ambos miembros deben expresar cantidades comparables. Esa lectura da una primera comprobación del modelo antes de resolver la ecuación.

Problema 5. Una mezcla que se completa con agua

Enunciado. Hay 8 litros de una disolución con 30 % de concentrado. ¿Cuánta agua debe añadirse para obtener una disolución al 20 %? Supón que los volúmenes se suman.

Solución. Los 8 litros contienen $0{,}30 \cdot 8 = 2{,}4$ litros de concentrado. Al añadir w litros de agua, esa cantidad se conserva y el volumen total pasa a $8 + w$. Por ello,

$$\frac{2{,}4}{8 + w} = 0{,}20, \qquad w \geq 0.$$

En este dominio $8 + w$ es positivo. Podemos multiplicar por él y obtener $2{,}4 = 1{,}6 + 0{,}20w$. Restando 1,6 y dividiendo por 0,20 resulta $w = 4$. La mezcla final tiene 12 litros y $2{,}4/12 = 0{,}20$. Se necesitan cuatro litros de agua. La hipótesis sobre los volúmenes forma parte del modelo.

Problema 6. Un rectángulo con una condición adicional

Enunciado. Un rectángulo tiene perímetro de 46 cm. El largo supera al ancho en 5 cm. Encuentra sus dimensiones.

Solución. Sea $a > 0$ el ancho en centímetros. El largo es $a + 5$. Como el perímetro suma dos veces cada dimensión,

$$2a + 2(a + 5) = 46.$$

Distribuimos: $4a + 10 = 46$. Restando 10 y dividiendo por 4 encontramos $a = 9$. El largo vale 14. Ambos son positivos, difieren en 5 y $2 \cdot 9 + 2 \cdot 14 = 46$. Las dimensiones son 9 cm y 14 cm. La comprobación usa las dos condiciones del enunciado.

Problema 7. Una solución algebraica imposible en el relato

Enunciado. Un taller cobra 3500 pesos por preparar una máquina y 800 pesos por pieza. ¿Es posible que el cobro por un pedido sea 2700 pesos?

Solución. Si p es la cantidad de piezas, necesitamos un entero $p \geq 0$ y la condición $3500 + 800p = 2700$. Al resolver obtenemos $800p = -800$, luego $p = -1$. Ese número satisface la igualdad algebraica, pero no describe un pedido. El conjunto admisible es vacío. También podíamos advertirlo desde el comienzo: para $p \geq 0$, el cobro es al menos 3500 pesos. Resolver y estimar proporcionan aquí controles complementarios.

Los denominadores conservan su historia

Una cancelación válida puede simplificar una fórmula y dejar una restricción pendiente. La igualdad $(x^2 - 1)/(x - 1) = x + 1$ vale para $x \neq 1$. La expresión de la derecha existe también en 1; ese valor adicional no pertenecía al dominio de la izquierda. Escribiremos las exclusiones antes de cancelar.

Problema 8. Un candidato fuera del dominio

Enunciado. Resuelve $\dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

Solución. El dominio excluye $x = 1$. Para los valores restantes, factorizamos $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ y cancelamos el factor no nulo. La ecuación equivale, en ese dominio, a $x + 1 = 2$. El único candidato es $x = 1$, que estaba excluido. Por tanto, no hay solución. Sustituirlo en la ecuación original produciría un denominador cero; la simplificación no autoriza a rehabilitarlo.

Problema 9. Una ecuación racional con solución

Enunciado. Resuelve $\dfrac{2}{x-1} = \dfrac{3}{x+2}$.

Solución. Excluimos $x = 1$ y $x = -2$. En el resto del dominio el producto $(x-1)(x+2)$ nunca se anula. Multiplicar por él es reversible y produce $2(x+2) = 3(x-1)$. Entonces $2x+4 = 3x-3$, de donde $x = 7$. Es admisible y los dos cocientes originales valen $1/3$. El conjunto solución es $\{7\}$. Para una igualdad no importa que el producto usado sea positivo o negativo: importa que sea distinto de cero.

Problema 10. Dividir por la incógnita puede borrar una solución

Enunciado. Un estudiante resuelve $x(x-3) = 0$ dividiendo por x y obtiene $x = 3$. Revisa el procedimiento.

Solución. Dividir por x exige suponer $x \neq 0$. Bajo esa condición, queda $x - 3 = 0$ y obtenemos $x = 3$. Falta examinar el caso apartado: $x = 0$ satisface la ecuación inicial. Como un producto de reales es cero precisamente cuando alguno de sus factores es cero, las soluciones son 0 y 3. La separación de casos justifica ambos valores y asegura que no hay más. La división era válida únicamente en la rama donde $x \neq 0$.

Desigualdades: resolver una región

Una inecuación plantea una desigualdad entre expresiones; sus soluciones son los valores del dominio que la hacen verdadera. Si $u < v$, sumar la misma cantidad a ambos mantiene el orden. Multiplicar por $c > 0$ también lo mantiene; multiplicar por $c < 0$ lo invierte. Para comprender esta última regla, observemos que $v-u > 0$: al multiplicar por un negativo obtenemos $c(v-u) < 0$, equivalente a $cv < cu$.

Problema 11. Qué abono conviene

Enunciado. Con las tarifas del primer problema, ¿para cuántos viajes el abono resulta estrictamente más barato?

Solución. Planteamos $8400 + 300n < 1000n$, con n entero no negativo. Al restar $300n$ y dividir por el positivo 700, resulta $12 < n$. Los viajes posibles son $13, 14, 15, \ldots$. Para doce viajes hay empate, por lo que doce no entra en la respuesta. Para diez, el abono cuesta 11400 pesos y la otra opción 10000; para trece, cuesta 12300 frente a 13000. Estas comprobaciones confirman la orientación de la desigualdad.

Problema 12. Un coeficiente negativo

Enunciado. Resuelve $5-3(2x-1) \leq 2x+12$ y representa la solución mediante un intervalo.

Solución. Distribuimos: $8 - 6x \leq 2x + 12$. Restamos $2x$ y 8 a ambos lados y queda $-8x \leq 4$. Al dividir por -8 debemos invertir el sentido: $x \geq -1/2$. El intervalo solución es $[-1/2, \infty)$. El extremo se incluye porque la desigualdad admite igualdad: en $x = -1/2$ ambos miembros valen 11. En $x = 0$ obtenemos $8 \leq 12$, como corresponde al intervalo encontrado.

La palabra **y** exige satisfacer simultáneamente dos condiciones: usamos la intersección de sus conjuntos solución. La palabra **o**, en su sentido inclusivo, admite cumplir cualquiera de ellas: usamos la unión. Los extremos incluidos se marcan con corchetes; el infinito siempre lleva paréntesis porque no es un número real que podamos alcanzar.

Problema 13. Una banda de temperatura

Enunciado. Una lectura corregida vale $T = 2r - 3$, en grados Celsius. Debe cumplir $-1 < T \leq 7$. ¿Qué valores de la lectura r se aceptan?

Solución. Sustituimos la fórmula y conservamos simultáneamente las dos condiciones:

$$-1 < 2r - 3 \leq 7.$$

Sumamos 3 a los tres miembros: $2 < 2r \leq 10$. Dividimos por 2: $1 < r \leq 5$. Se acepta $r \in (1, 5]$. El extremo 1 produciría $T = -1$ y queda fuera; el extremo 5 produce $T = 7$ y entra. El dibujo distingue esa diferencia mediante un punto vacío y otro lleno.



Problema 14. Dos formas de combinar condiciones

Enunciado. Compara las soluciones de «$2x - 1 \geq 3$ y $x + 4 < 5$» con las de «$2x - 1 \geq 3$ o $x + 4 < 5$».

Solución. La primera condición equivale a $x \geq 2$ y la segunda a $x < 1$. Ningún real satisface ambas a la vez: la intersección es vacía. Cuando se pide una u otra, aceptamos todos los valores menores que 1 y todos los mayores o iguales que 2. La unión es $(-\infty, 1) \cup [2, \infty)$. Los valores de $[1, 2)$ no cumplen ninguna. La operación entre conjuntos depende de la conexión lógica del enunciado.

Propiedades para resolver inecuaciones

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Traslación del orden	$F < G \iff F + H < G + H$, con expresiones reales definidas. También vale para $\leq$.
Factor positivo	Si $H > 0$ en el dominio, $F < G \iff HF < HG$. También vale para $\leq$.
Factor negativo	Si $H < 0$ en el dominio, $F < G \iff HF > HG$. Con $\leq$ se obtiene $\geq$.
Dos condiciones simultáneas	La solución de «P y Q» es $S_P \cap S_Q$.
Condiciones alternativas	La solución de «P o Q» es $S_P \cup S_Q$.
Cero en un producto o cociente	Al comparar con cero mediante una desigualdad no estricta, se admiten los valores del dominio que anulan el producto o el numerador del cociente. En una desigualdad estricta se excluyen; los ceros del denominador siempre quedan fuera del dominio.

Pruebas. Véanse «Signos y compatibilidad del orden» e «Inecuaciones, conjuntos y análisis por casos» en el apéndice.

Si el signo depende de la incógnita

Multiplicar una desigualdad por $x - 2$ exige saber de qué lado de 2 estamos. Podemos separar dominios o estudiar directamente los signos del cociente. Los valores que anulan un factor dividen la recta en intervalos; dentro de cada uno los factores lineales conservan su signo. Hay que revisar los puntos de separación por separado.

Problema 15. Un cociente frente a cero

Enunciado. Resuelve $\dfrac{x+1}{x-2} \geq 0$.

Solución. El dominio excluye 2 y el numerador se anula en -1. Si $x < -1$, ambos factores son negativos y el cociente es positivo. Si $-1 < x < 2$, el numerador es positivo y el denominador negativo: el cociente es negativo. Si $x > 2$, ambos son positivos. En $x = -1$ el cociente vale cero y se admite; en 2 no existe. La solución es $(-\infty, -1] \cup (2, \infty)$. Multiplicar directamente por $x - 2$ sin discutir su signo habría mezclado dos reglas distintas.

Problema 16. Comparar un cociente con uno

Enunciado. Resuelve $\dfrac{3}{x-1} \leq 1$.

Solución. Excluimos 1. Restamos 1 y usamos un denominador común:

$$\frac{3}{x-1} - 1 = \frac{4-x}{x-1} \leq 0.$$

Los puntos de separación son 1 y 4. Para $x < 1$ el numerador es positivo y el denominador negativo, por lo que sirve todo ese intervalo. Para $1 < x < 4$ ambos son positivos y no sirve. Para $x > 4$ el numerador es negativo y el denominador positivo, y vuelve a servir. El 4 se incluye porque da igualdad; el 1 está prohibido. Obtenemos $(-\infty, 1) \cup [4, \infty)$. Por ejemplo, $x = 0$ da $-3 \leq 1$ y $x = 2$ da $3 \leq 1$, falsa.

El valor absoluto describe distancias

La expresión $|x-a|$ mide la distancia entre x y a en la recta real. Para localizar los puntos cuya distancia es $r>0$, podemos partir de a y recorrer r unidades en cada sentido: obtenemos un punto a su izquierda y otro a su derecha. Al pedir una distancia menor que r, quedan los puntos situados entre esas dos posiciones; al pedir una distancia mayor, quedan las dos regiones exteriores. Esa construcción permite decidir si necesitamos dos alternativas o un intervalo de condiciones simultáneas antes de retirar las barras en el cálculo.

Problema 17. A una distancia fijada

Enunciado. Resuelve $|2x-3|=5$.

Solución. Un número tiene valor absoluto 5 precisamente cuando es 5 o -5. Por ello, $2x-3=5$ o $2x-3=-5$. Las dos ecuaciones dan $x=4$ y $x=-1$. Al sustituir obtenemos $|8-3|=5$ y $|-2-3|=5$. También podemos escribir $|2x-3|=2|x-3/2|$: los puntos buscados están a $5/2$ de $3/2$. La descripción por dos casos comprende todas las posibilidades.

Problema 18. Una tolerancia de fabricación

Enunciado. Una pieza debe medir 20,0 mm con una tolerancia máxima de 0,15 mm. Escribe y resuelve la condición sobre su longitud L.

Solución. La desviación respecto del objetivo es $L-20{,}0$, que puede ser positiva o negativa. Su tamaño es $|L-20{,}0|$. La tolerancia máxima incluye sus extremos:

$$|L-20{,}0|\le 0{,}15.$$

Esto equivale a $-0{,}15\le L-20{,}0\le 0{,}15$. Al sumar 20,0 obtenemos $19{,}85\le L\le 20{,}15$. Se aceptan longitudes del intervalo $[19{,}85,\,20{,}15]$ mm. Ambas longitudes extremas se apartan exactamente 0,15 mm del objetivo.

Problema 19. Fuera de una zona central

Enunciado. Resuelve $|3x+2|>4$.

Solución. Estar a distancia mayor que 4 del cero significa quedar a la izquierda de -4 o a la derecha de 4. Así, $3x+2<-4$ o $3x+2>4$. La primera da $x<-2$; la segunda, $x>2/3$. La unión es $(-\infty,-2)\cup(2/3,\infty)$. Los extremos no se incluyen porque allí el valor absoluto vale exactamente 4. El punto $x=0$ queda en la zona intermedia y produce 2, por lo que correctamente se rechaza.

Problema 20. Un radio que también depende de la incógnita

Enunciado. Resuelve $|x-2| \le x$.

Solución. El miembro izquierdo es no negativo; por tanto, hace falta $x \ge 0$. En ese dominio la condición equivale a $-x \le x-2 \le x$. La desigualdad izquierda da $2 \le 2x$, es decir, $x \ge 1$. La derecha se reduce a $-2 \le 0$, siempre verdadera. Intersectando las condiciones obtenemos $[1, \infty)$. En $x = 1$ los miembros valen 1; para $x > 2$, el izquierdo es $x-2$ y nunca supera a x. Si el supuesto radio fuese negativo, ninguna distancia podría ser menor o igual que él.

Propiedades del valor absoluto como condición

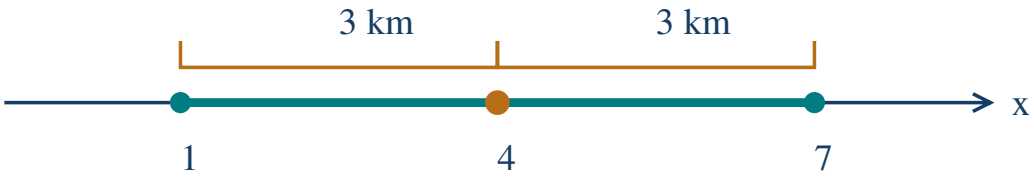
Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Distancia exacta positiva	Si $r > 0$, $\lvert u\rvert = r \iff u = r$ o $u = -r$.
Radio cero o negativo	$\lvert u\rvert = 0 \iff u = 0$. Si $r < 0$, $\lvert u\rvert = r$ y $\lvert u\rvert \le r$ no tienen solución real.
Banda cerrada	Para $r \ge 0$, $\lvert u\rvert \le r \iff -r \le u \le r$.
Banda abierta	Para $r > 0$, $\lvert u\rvert < r \iff -r < u < r$. Si $r \le 0$, no hay solución.
Exterior abierto	Para $r \ge 0$, $\lvert u\rvert > r \iff u < -r$ o $u > r$. Si $r < 0$, se cumple para todo u real.
Exterior cerrado	Para $r \ge 0$, $\lvert u\rvert \ge r \iff u \le -r$ o $u \ge r$. Si $r < 0$, se cumple para todo u real.
Centro y escala	Si $a \neq 0$, $\lvert ax+b\rvert = \lvert a\rvert\,\lvert x + b/a\rvert$.
Dos distancias	$\lvert u\rvert = \lvert v\rvert \iff u = v$ o $u = -v$, para u, v reales.

Pruebas. Véanse «Valor absoluto, distancia e intervalos» y «Distancias y condiciones con valor absoluto» en el apéndice.

Problema 21. Igual distancia a dos señales

Enunciado. Dos señales están en las posiciones 1 y 7 de una carretera recta, medidas en kilómetros desde un origen. ¿En qué posición se cumple $|x-1| = |x-7|$?

Solución. La igualdad de valores absolutos permite $x-1 = x-7$ o $x-1 = -(x-7)$. La primera produciría $-1 = -7$ y es imposible. La segunda da $x-1 = -x+7$, luego $2x = 8$ y $x = 4$. Está a tres kilómetros de cada señal. Fuera del segmento que une ambas señales, las distancias difieren en seis kilómetros; dentro del segmento se igualan en su punto medio.



Casos, candidatos y parámetros

Una transformación puede conservar solo una de las dos implicaciones. Si $F = G$, entonces $F^2 = G^2$. El regreso exige más información: 3 y -3 tienen el mismo cuadrado. Después de un paso de este tipo obtenemos candidatos que debemos comprobar en la condición original. La justificación de que la respuesta es completa exige obtener todos los candidatos de la condición transformada y comprobar cuáles satisfacen la original. Llevar un registro de las hipótesis permite recuperar una equivalencia.

Problema 22. El cuadrado introduce un candidato

Enunciado. Resuelve $\sqrt{x+2} = x$.

Solución. Para que exista la raíz necesitamos $x \geq -2$. Además, la raíz principal es no negativa, así que cualquier solución debe cumplir $x \geq 0$. Elevando al cuadrado obtenemos $x+2 = x^2$, equivalente a $(x-2)(x+1) = 0$. Los candidatos son 2 y -1. El segundo incumple $x \geq 0$: en la ecuación original daría $1 = -1$. El primero produce $\sqrt{4} = 2$ y sirve. El conjunto solución es $\{2\}$. La factorización pertenece al álgebra ya estudiada; aquí importa controlar el sentido lógico del paso al cuadrado.

Problema 23. Una familia con un valor excepcional

Enunciado. Según el valor real de k, resuelve $(k-2)x = k^2 - 4$.

Solución. Factorizamos $k^2 - 4 = (k-2)(k+2)$. Si $k \neq 2$, podemos dividir por $k-2$ y resulta la única solución $x = k+2$. Si $k = 2$, la ecuación original es $0x = 0$ y todo real es solución. En particular, para $k = -2$ el coeficiente es -4 y la solución es 0: ese valor no constituye una excepción. El análisis se decide por el coeficiente de x, antes de efectuar la división.

Problema 24. El parámetro cambia el sentido

Enunciado. Clasifica las soluciones de $(k-1)x \le 2$ para todo parámetro real k.

Solución. Si $k > 1$, el coeficiente es positivo y dividir mantiene el sentido: $x \le 2/(k-1)$. Si $k < 1$, es negativo y el sentido se invierte: $x \ge 2/(k-1)$. Si $k = 1$, queda $0 \le 2$, verdadera para todo $x \in \mathbb{R}$. Estas tres ramas agotan los parámetros reales. Por ejemplo, $k = 0$ da $-x \le 2$, o $x \ge -2$; $k = 2$ da $x \le 2$. La expresión $2/(k-1)$ solo aparece en las ramas donde existe.

Propiedades para controlar casos excepcionales

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Producto nulo	Para reales u, v, $uv = 0 \iff u = 0$ o $v = 0$.
Paso al cuadrado	$u = v \Rightarrow u^2 = v^2$. El regreso equivale a $u = v$ o $u = -v$.
Raíz principal	$\sqrt{F} = G \iff F = G^2$ y $G \ge 0$, en los puntos donde F, G son reales. La igualdad $F = G^2$ garantiza $F \ge 0$.
Parámetro lineal	En $a(k)x = b(k)$ se aplica la clasificación de $ax = b$ para cada k donde los coeficientes existen.
Parámetro en una inecuación	En $a(k)x \le b(k)$, dividir conserva el sentido si $a(k) > 0$ y lo invierte si $a(k) < 0$. Si $a(k) = 0$, se comprueba $0 \le b(k)$.

Pruebas. Véanse «Opuestos, inversos y productos nulos», «Ecuaciones lineales y restricciones del dominio», «Inecuaciones, conjuntos y análisis por casos» y «Transformaciones y candidatos espurios» en el apéndice.

Ejercicios para trabajar sin profesor

Antes de resolver cada condición, declara su dominio. Al terminar, escribe el conjunto solución y comprueba los valores excepcionales. En los modelos, la respuesta debe conservar las unidades y las restricciones del relato.

1. Una entrada de socio cuesta 2500 pesos al mes más 700 por visita; una entrada sin socio cuesta 1200 por visita. ¿Con cuántas visitas los costos coinciden?

2. Resuelve $5(x-2) = 2x + 8$ y verifica el resultado.

3. Resuelve $(2x+1)/4 - (x-3)/6 = 2$.

4. Resuelve por separado $3(2x-1) = 6x - 3$ y $3(2x-1) = 6x + 1$.

5. Se tienen 6 litros de disolución al 40 %. ¿Cuánta agua hay que añadir para bajar al 25 %, suponiendo volúmenes aditivos?

6. Un rectángulo tiene perímetro de 64 cm y el largo excede al ancho en 8 cm. Encuentra las dimensiones.

7. Una caja vacía pesa 1,8 kg y cada objeto que se coloca dentro pesa 0,4 kg. ¿Puede pesar 1,4 kg con algún número no negativo de objetos?

8. Resuelve $(x^2 - 4)/(x-2) = 4$.

9. Resuelve $3/(x-2) = 2/(x+1)$.

10. Resuelve $(x+2)(x-5) = 0$ y explica por qué no conviene cancelar de entrada ninguno de los factores.

11. Con las tarifas del ejercicio 1, ¿cuándo resulta estrictamente más barata la opción de socio?

12. Resuelve $7 - 2(3x + 1) > x - 9$.

13. Resuelve $-4 \leq 3x + 2 < 11$.

14. Resuelve «$x + 2 < 0$ o $2x \geq 6$». Después cambia «o» por «y» y compara.

15. Resuelve $(x - 3)/(x + 2) \leq 0$.

16. Resuelve $2/(x + 1) > 1$.

17. Resuelve $|3x + 1| = 7$.

18. Una resistencia debe valer 100 ohmios con tolerancia máxima de 2 ohmios. Expresa la condición con valor absoluto y como intervalo.

19. Resuelve $|2x - 1| \geq 5$.

20. Resuelve $|x + 1| \leq 2x - 1$.

21. Encuentra la posición equidistante de los puntos -2 y 6 mediante una ecuación de valor absoluto.

22. Resuelve $\sqrt{x + 6} = x$ y descarta explícitamente los candidatos que fallen.

23. Clasifica las soluciones de $(k + 1)x = k^2 - 1$ según el parámetro real k.

24. Clasifica las soluciones de $(k + 2)x > 3$ según el parámetro real k.

Soluciones desarrolladas

Ejercicio 1. Costos iguales

Sea $n \in \{0, 1, 2, ...\}$ el número de visitas. Los costos son $2500 + 700n$ y $1200n$ pesos. Al igualarlos, restar $700n$ y dividir por 500 obtenemos $n = 5$. Es admisible y ambas tarifas producen 6000 pesos. La igualdad ocurre con cinco visitas.

Ejercicio 2. Distribuir y reunir

El dominio es $\mathbb{R}$. Distribuimos: $5x - 10 = 2x + 8$. Restando $2x$ y sumando 10 obtenemos $3x = 18$, de donde $x = 6$. La comprobación da $5(6 - 2) = 20$ y $2 \cdot 6 + 8 = 20$. Los pasos son reversibles y la solución es única.

Ejercicio 3. Un múltiplo común

Los denominadores constantes permiten todo real. Multiplicamos por 12: $3(2x+1)-2(x-3) = 24$. Al distribuir queda $6x + 3 - 2x + 6 = 24$, luego $4x = 15$. La solución es $x = 15/4$. Sus cocientes son $17/8$ y $1/8$; su diferencia vale 2. El signo delante del segundo paréntesis es esencial.

Ejercicio 4. Todos o ninguno

En la primera ecuación, desarrollar produce $6x - 3 = 6x - 3$. Es una identidad y el conjunto solución es $\mathbb{R}$. En la segunda obtenemos $6x - 3 = 6x + 1$; al restar $6x$ queda $-3 = 1$. Ningún real puede satisfacerla y el conjunto es $\emptyset$.

Ejercicio 5. Conservar el concentrado

Hay $6 \cdot 0{,}40 = 2{,}4$ litros de concentrado. Si se añaden $w \geq 0$ litros de agua, necesitamos $2{,}4/(6 + w) = 0{,}25$. El denominador es positivo y podemos multiplicar: $2{,}4 = 1{,}5 + 0{,}25w$. Entonces $0{,}9 = 0{,}25w$ y $w = 3{,}6$. El volumen final es 9,6 litros y $2{,}4/9{,}6 = 0{,}25$. Se añaden 3,6 litros de agua.

Ejercicio 6. Dos dimensiones positivas

Sea $a > 0$ el ancho en centímetros. El largo es $a + 8$. El perímetro exige $2a + 2(a + 8) = 64$, o $4a + 16 = 64$. De aquí $a = 12$ y el largo es 20. Ambas dimensiones son positivas; su diferencia vale 8 y su perímetro es $24 + 40 = 64$ cm.

Ejercicio 7. Una masa imposible

Sea n un entero no negativo. El modelo es $1{,}8 + 0{,}4n = 1{,}4$, con masas en kilogramos. Restar 1,8 y dividir por 0,4 conduce a $n = -1$, fuera del dominio. No existe tal cantidad de objetos. Para cualquier $n \geq 0$, la masa total es al menos 1,8 kg, lo que confirma la imposibilidad.

Ejercicio 8. Una exclusión que permanece

Excluimos $x = 2$. Como $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$, para $x \neq 2$ la ecuación equivale a $x + 2 = 4$. Su único candidato es 2 y no pertenece al dominio original. Por tanto, el conjunto solución es vacío. No se puede verificar ese candidato en una fracción cuyo denominador se anula.

Ejercicio 9. Denominadores distintos de cero

El dominio excluye 2 y -1. Multiplicando por el producto no nulo de los denominadores obtenemos $3(x + 1) = 2(x - 2)$. Desarrollamos: $3x + 3 = 2x - 4$, luego $x = -7$. Es admisible. Los cocientes originales valen $-1/3$ en ambos miembros, así que el conjunto solución es $\{-7\}$.

Ejercicio 10. Dos factores, dos posibilidades

El producto se anula cuando $x + 2 = 0$ o $x - 5 = 0$. Obtenemos $x = -2$ o $x = 5$. Cada uno hace cero un factor y, por ello, el producto. Cancelar $x + 2$ exigiría $x \neq -2$ y borraría la primera solución; cancelar $x - 5$ exigiría $x \neq 5$ y borraría la segunda. La propiedad del producto nulo comprende ambos casos.

Ejercicio 11. Una comparación estricta

Para un entero $n \geq 0$ planteamos $2500 + 700n < 1200n$. Restamos $700n$ y dividimos por 500: $5 < n$. Conviene ser socio a partir de seis visitas mensuales. Cinco produce empate y se excluye. Con seis visitas se pagan 6700 pesos como socio y 7200 sin serlo.

Ejercicio 12. Dividir por un negativo

Distribuimos y reunimos: $5 - 6x > x - 9$, luego $14 > 7x$. Dividiendo por 7 obtenemos $x < 2$. También podía escribirse $-7x > -14$ y dividir por -7, invirtiendo el sentido. La solución es $(-\infty, 2)$. En $x = 2$ ambos miembros valen -7, de modo que el extremo no satisface la desigualdad estricta.

Ejercicio 13. Dos extremos diferentes

Restamos 2 a los tres miembros: $-6 \le 3x < 9$. Dividiendo por el positivo 3 queda $-2 \le x < 3$. El intervalo es $[-2, 3)$. El extremo -2 produce -4, admitido; el extremo 3 produce 11, excluido. Se exige cumplir las dos desigualdades a la vez.

Ejercicio 14. Unión e intersección

La primera condición equivale a $x < -2$ y la segunda a $x \ge 3$. Con «o» la solución es $(-\infty, -2) \cup [3, \infty)$. Con «y» debemos intersectar: ningún real puede ser menor que -2 y mayor o igual que 3 simultáneamente. La solución de esa segunda pregunta es $\emptyset$.

Ejercicio 15. Un cociente no positivo

Excluimos $x = -2$ y el numerador se anula en 3. Si $x < -2$, ambos factores son negativos y el cociente es positivo. Si $-2 < x < 3$, los signos son negativo y positivo, y el cociente es negativo. Si $x > 3$, ambos son positivos. Admitimos el tramo central y el cero del numerador: $(-2, 3]$. El cero del denominador siempre queda fuera.

Ejercicio 16. Llevar la comparación a cero

El dominio excluye -1. Restando 1 obtenemos $(1 - x)/(x + 1) > 0$. Para $x < -1$, el cociente es negativo; para $-1 < x < 1$, es positivo; para $x > 1$, es negativo. El punto 1 produce cero y no se admite, mientras que -1 está fuera del dominio. La solución es $(-1, 1)$. En $x = 0$ la condición original es $2 > 1$.

Ejercicio 17. Dos ramas lineales

La igualdad equivale a $3x + 1 = 7$ o $3x + 1 = -7$. La primera da $x = 2$ y la segunda $x = -8/3$. Sustituyendo, las expresiones dentro de las barras valen 7 y -7, respectivamente. Sus valores absolutos son 7 y el conjunto solución es $\{-8/3, 2\}$.

Ejercicio 18. Una banda cerrada

Si R es el valor de la resistencia en ohmios, la condición es $|R - 100| \le 2$. Equivale a $-2 \le R - 100 \le 2$. Sumando 100 resulta $98 \le R \le 102$. Se acepta el intervalo $[98, 102]$ ohmios; ambos extremos alcanzan la tolerancia máxima y están incluidos.

Ejercicio 19. Dos regiones exteriores

Como el umbral 5 es positivo, necesitamos $2x - 1 \le -5$ o $2x - 1 \ge 5$. La primera rama da $x \le -2$ y la segunda $x \ge 3$. El conjunto solución es $(-\infty, -2] \cup [3, \infty)$. Los dos extremos producen valor absoluto 5 y se incluyen porque aparece $\ge$.

Ejercicio 20. Un umbral variable

Primero exigimos $2x - 1 \ge 0$, es decir, $x \ge 1/2$. Después resolvemos $-(2x - 1) \le x + 1 \le 2x - 1$. La primera desigualdad equivale a $-2x + 1 \le x + 1$, o $x \ge 0$. La segunda da $x \ge 2$. La intersección de las tres restricciones es $[2, \infty)$. Para esos valores $x + 1$ es positivo y la condición original se reduce a $x + 1 \le 2x - 1$, confirmando el resultado.

Ejercicio 21. El punto medio

La ecuación es $|x+2| = |x-6|$. Sus ramas son $x+2 = x-6$, imposible, y $x+2 = -(x-6)$. Esta última da $2x = 4$, luego $x = 2$. Las distancias son $|2+2| = 4$ y $|2-6| = 4$. El punto se encuentra en el centro del segmento que une -2 con 6.

Ejercicio 22. Candidatos al cuadrado

La raíz exige $x \geq -6$ y la igualdad exige además $x \geq 0$. Al cuadrar obtenemos $x + 6 = x^2$, luego $(x-3)(x+2) = 0$. Los candidatos son 3 y -2. El segundo falla: $\sqrt{4} = 2 \neq -2$. El primero cumple $\sqrt{9} = 3$. El conjunto solución es $\{3\}$. La condición de signo identifica exactamente el candidato espurio.

Ejercicio 23. Un coeficiente que puede anularse

Factorizamos el segundo miembro: $(k+1)x = (k+1)(k-1)$. Si $k \neq -1$, dividir por $k+1$ produce la única solución $x = k-1$. Si $k = -1$, queda $0x = 0$ y todo real sirve. Para $k = 1$ no se anula el coeficiente de x y la única solución es 0. Se ha revisado cada posible excepción antes de dividir.

Ejercicio 24. Tres ramas de un parámetro

Si $k > -2$, el coeficiente $k+2$ es positivo y obtenemos $x > 3/(k+2)$. Si $k < -2$, es negativo y queda $x < 3/(k+2)$. Si $k = -2$, la condición es $0 > 3$, falsa: no hay solución. Estas tres ramas cubren todos los parámetros reales y ninguna usa una división por cero.

Diagnóstico de salida

Para resolver una condición de manera autónoma debes poder explicar por qué cada transformación es reversible, dónde una división exige separar casos y cómo la respuesta respeta el dominio. Comprueba también que distingues la unión de la intersección, que justificas el cambio de sentido al dividir por un negativo y que interpretas las barras como una distancia. Si un cálculo produce una respuesta extraña, vuelve a la condición inicial: allí se decide qué valores son soluciones.

CAPÍTULO 7

Sistemas de ecuaciones y relaciones lineales

Una boletería registra el número de personas que asistieron a una función y la recaudación de esa noche. Entre las entradas vendidas hay dos precios, de adulto e infantil, y queremos reconstruir cuántas correspondieron a cada clase. Podemos ensayar repartos que conserven el total de asistentes, pero algunos producirán demasiado dinero y otros demasiado poco. La respuesta tendrá que cumplir los dos registros al mismo tiempo.

En el capítulo anterior buscábamos valores sujetos a una condición. La boletería nos pide coordinar varias incógnitas y varias condiciones, y ofrece también una estrategia para empezar: imaginar que todas las entradas tuvieron el precio menor y estudiar qué cambia al sustituir una por una de adulto. Ese razonamiento anticipa la eliminación de una incógnita. Lo compararemos con la sustitución y con la interpretación geométrica de las ecuaciones para comprender cuándo los datos determinan una respuesta y cuándo dejan posibilidades abiertas o resultan incompatibles.

Dos condiciones para una misma situación

Problema 1. Lo que sabe la boletería

Enunciado. Se vendieron 20 entradas. Las de adulto costaban 5000 pesos y las infantiles, 3000 pesos. La recaudación fue de 84000 pesos. ¿Cuántas entradas de cada clase se vendieron?

Solución. Llamemos a a las entradas de adulto e i a las infantiles. Ambas cantidades deben ser enteras no negativas. El número de entradas y la recaudación producen

$$\begin{cases} a + i = 20, \\ 5000a + 3000i = 84000. \end{cases}$$

Podemos comenzar imaginando que todas fueron infantiles. En ese caso se habrían recaudado $20 \cdot 3000 = 60000$ pesos. Cada entrada de adulto agrega 2000 pesos respecto de esa base. Faltan $84000 - 60000 = 24000$ pesos, por lo que hubo $24000/2000 = 12$ entradas de adulto y ocho infantiles. Comprobamos las dos condiciones: $12 + 8 = 20$ y $5000 \cdot 12 + 3000 \cdot 8 = 84000$. El razonamiento ya contiene un método de eliminación: restar 3000 veces la primera ecuación de la segunda deja $2000a = 24000$.

Una **solución de un sistema de dos incógnitas** es un par ordenado (x, y) que satisface todas sus ecuaciones. El orden importa: la primera coordenada corresponde a la primera incógnita. El dominio puede ser $\mathbb{R}^2$, el conjunto de pares reales, o una parte de él impuesta por el problema. En la boletería trabajamos con pares de enteros no negativos.

Problema 2. Cumplir una ecuación no basta

Enunciado. Decide cuáles de los pares $(2, 1)$ y $(1, 2)$ resuelven el sistema $x + y = 3$, $2x - y = 3$.

Solución. Ambos pares cumplen $x + y = 3$. En la segunda ecuación, $(2, 1)$ da $2 \cdot 2 - 1 = 3$ y sirve; $(1, 2)$ da $2 \cdot 1 - 2 = 0$ y falla. La primera condición describe muchos pares, entre ellos $(0, 3)$ y $(3, 0)$. La segunda selecciona, entre los que sobreviven a la primera, los que también la cumplen. Más adelante justificaremos que $(2, 1)$ es la única solución de este sistema.

Una ecuación lineal de dos incógnitas tiene la forma $ax+by = c$, con coeficientes reales conocidos. Cada término con incógnita consta de un coeficiente conocido multiplicado por esa incógnita. Una condición como $xy = 6$ o $x^2 + y = 4$ requiere otros métodos. En un sistema lineal exigimos que todas las ecuaciones tengan aquella forma; admitiremos también los casos degenerados en que los coeficientes de las incógnitas se anulan.

Sustituir una relación dentro de otra

Si conocemos y en términos de x, podemos usar esa información en la otra ecuación. La expresión usada para reemplazar a y procede de una condición que toda solución debe satisfacer. Después de resolver la ecuación resultante, reconstruimos la coordenada que habíamos expresado en función de la otra.

Problema 3. Una incógnita escrita con la otra

Enunciado. Resuelve $y = 2x - 1$, $x + y = 8$.

Solución. La primera ecuación obliga a que y sea $2x-1$. Sustituimos esa expresión en la segunda: $x + (2x - 1) = 8$. Reunir términos da $3x = 9$, de donde $x = 3$. Regresamos a la primera relación y obtenemos $y = 2 \cdot 3 - 1 = 5$. El par $(3, 5)$ cumple ambas ecuaciones. Además, cualquier solución tendría que producir $x = 3$ en la ecuación sustituida y, después, $y = 5$; por eso no falta ningún otro par.

Problema 4. Fracciones en una de las condiciones

Enunciado. Resuelve $x/2 + y/3 = 3$, $x - y = 1$.

Solución. Los denominadores son constantes no nulas, así que admitimos todo par real. De la segunda ecuación obtenemos $x = y + 1$. Sustituimos en la primera y multiplicamos por 6:

$$3(y + 1) + 2y = 18.$$

Entonces $5y + 3 = 18$, luego $y = 3$ y $x = 4$. En la ecuación inicial $4/2 + 3/3 = 2 + 1 = 3$; en la otra, $4 - 3 = 1$. El conjunto solución es $\{(4, 3)\}$. Multiplicar por 6 no añade restricciones ni candidatos porque 6 nunca se anula.

La sustitución es especialmente cómoda cuando una incógnita aparece con coeficiente 1 o -1. Si para despejar tuviéramos que dividir por un parámetro, antes habría que revisar cuándo ese coeficiente puede valer cero. La elección del método depende de la escritura concreta del sistema.

Eliminar sin perder una condición

En la boletería restamos del ingreso total el que habrían producido las entradas al precio menor; la diferencia dejó visible la contribución de las entradas de adulto. Esa operación combinaba dos ecuaciones para eliminar una incógnita. En un sistema general buscaremos multiplicadores que hagan iguales u opuestos sus coeficientes y después restaremos o sumaremos las ecuaciones. Conservaremos una de las condiciones originales para reconstruir la incógnita eliminada y regresar al sistema, porque la suma aislada también puede cumplirse en pares que incumplen los datos iniciales.

Problema 5. Coeficientes opuestos

Enunciado. Resuelve $x + y = 7$, $3x - y = 5$.

Solución. Sumamos las ecuaciones y resulta $4x = 12$, así que $x = 3$. Conservamos la primera ecuación: $3 + y = 7$, de donde $y = 4$. El par $(3, 4)$ satisface también $3 \cdot 3 - 4 = 5$. La transformación completa fue reemplazar la segunda ecuación por la suma, manteniendo la primera. Desde el sistema transformado recuperamos la segunda original restando la primera a la suma; el paso es reversible.

Problema 6. Preparar los coeficientes

Enunciado. Resuelve $2x + 3y = 19$, $5x - 2y = 0$.

Solución. Para eliminar y, multiplicamos la primera ecuación completa por 2 y la segunda completa por 3:

$$4x + 6y = 38, \qquad 15x - 6y = 0.$$

La suma da $19x = 38$, luego $x = 2$. Sustituir en $5x - 2y = 0$ produce $10 - 2y = 0$, de donde $y = 5$. Comprobamos $2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 = 19$ y $5 \cdot 2 - 2 \cdot 5 = 0$. Los multiplicadores 2 y 3 son no nulos, y la recuperación de una ecuación desde la suma y la otra garantiza que el método conserva todas las soluciones.

Problema 7. Una suma con demasiadas soluciones

Enunciado. Al sumar $x + y = 6$ y $x - y = 2$ se obtiene $2x = 8$. ¿Es correcto reemplazar el sistema por esa única ecuación?

Solución. La suma obliga a $x = 4$, pero no dice nada sobre y. Por ejemplo, $(4, 100)$ cumple $2x = 8$ y falla en las dos condiciones originales. Debemos conservar una de ellas: con $x + y = 6$ obtenemos $y = 2$. El par $(4, 2)$ cumple también $x - y = 2$. La ecuación sumada es una consecuencia necesaria del sistema; junto con una ecuación conservada forma un sistema equivalente. Esa diferencia explica por qué eliminar una incógnita no autoriza a borrar información sin control.

Transformaciones que conservan un sistema

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Cambiar el orden	Intercambiar dos ecuaciones conserva el conjunto solución.
Escalar una ecuación	Multiplicar todos sus términos por $c \neq 0$ conserva las soluciones. El coeficiente puede depender de un parámetro solo en la rama donde no se anula.
Reemplazar por una combinación	Conservar E_1 y reemplazar E_2 por $E_2 + cE_1$ es reversible para todo real c.
Sustituir una incógnita	Si una ecuación equivale a $y = f(x)$, el sistema equivale a conservar esa igualdad y reemplazar y por $f(x)$ en las otras.
Restringir el dominio	Las soluciones admisibles son las soluciones algebraicas intersectadas con el dominio del modelo.

Pruebas. Véase «Equivalencia de sistemas y operaciones de filas» en el apéndice.

Cada ecuación dibuja un lugar

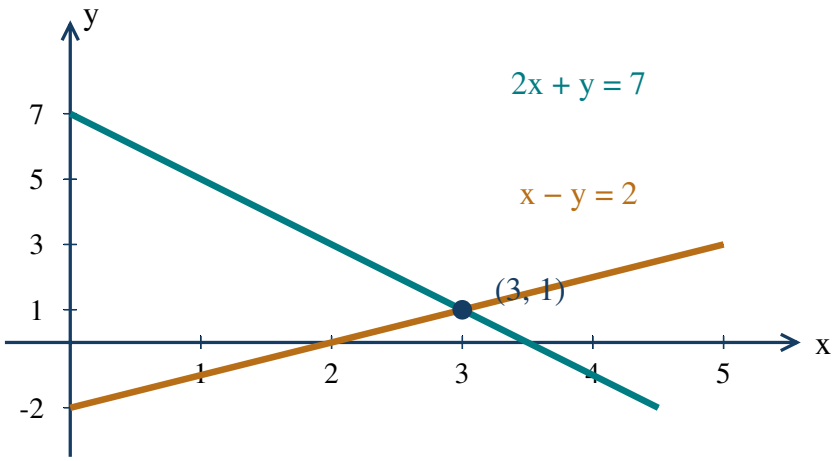
Un par real puede representarse como un punto del plano: x indica su posición horizontal e y, su posición vertical. Al fijar la ecuación $ax + by = c$, con al menos uno de a, b distinto de cero, los puntos que la satisfacen forman una recta. Si $b \neq 0$, despejar da $y = -(a/b)x + c/b$; si $b = 0$, necesariamente $a \neq 0$ y obtenemos la recta vertical $x = c/a$.

La solución del sistema debe estar en las dos rectas. Por eso la buscamos en su intersección. El dibujo nos ayuda a comprender cuántas soluciones cabe esperar; los cálculos exactos permiten decidir cuáles son sus coordenadas.

Problema 8. Una intersección que podemos verificar

Enunciado. Resuelve e interpreta gráficamente $2x + y = 7$, $x - y = 2$.

Solución. Las rectas son $y = 7 - 2x$ e $y = x - 2$. Para dibujar la primera podemos usar $(0, 7)$ y $(3, 1)$; para la segunda, $(0, -2)$ y $(3, 1)$. La intersección sugerida es $(3, 1)$. La calculamos sin depender de la escala del dibujo: al sumar las ecuaciones resulta $3x = 9$, luego $x = 3$ e $y = 1$. El par cumple $2 \cdot 3 + 1 = 7$ y $3 - 1 = 2$. Cualquier solución debe tener ese valor de x y ese valor de y.



Problema 9. Una recta vertical también es una condición lineal

Enunciado. Resuelve $x = 2$, $3x + 2y = 10$.

Solución. La primera condición describe todos los puntos de la recta vertical que pasa por $x = 2$. Sustituyendo en la segunda encontramos $6 + 2y = 10$, por lo que $y = 2$. La única intersección es $(2, 2)$. No necesitamos escribir la primera recta como $y = mx + b$: una recta vertical no admite esa forma porque contiene muchos valores de y para el mismo x.

Una, ninguna o infinitas soluciones

Dos rectas pueden cortarse en un punto, ser paralelas distintas o coincidir. En el cálculo, estas posibilidades aparecen como una ecuación que determina la incógnita, una igualdad imposible o una identidad que deja una cantidad libre. También debemos contemplar las ecuaciones que tienen ambos coeficientes nulos: $0x + 0y = c$ puede describir todo el plano o ningún punto.

Problema 10. Dos condiciones incompatibles

Enunciado. Resuelve $2x - y = 1$, $4x - 2y = 6$.

Solución. El miembro izquierdo de la segunda ecuación es el doble del primero. Si la primera se cumple, ese miembro debe valer 2, pero la segunda exige que valga 6. Restar dos veces la primera a la segunda produce $0 = 4$, imposible. No hay solución. En forma despejada las rectas son $y = 2x - 1$ e $y = 2x - 3$: tienen la misma inclinación y distintas posiciones.

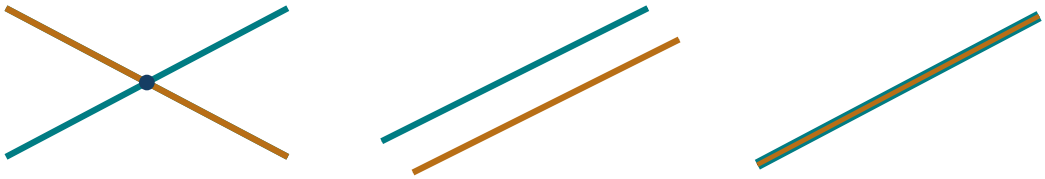
Problema 11. Dos escrituras de la misma condición

Enunciado. Resuelve $2x - y = 1$, $4x - 2y = 2$.

Solución. La segunda ecuación es exactamente el doble de la primera. Al restar ese doble queda $0 = 0$, que no impone una condición adicional. Elegimos libremente $x = t$, con $t \in \mathbb{R}$. La primera ecuación obliga a $y = 2t - 1$. Todas las soluciones, y solo ellas, son

$$\{(t, 2t - 1) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Sustituir cualquier t da $2t - (2t - 1) = 1$ y el doble de esa igualdad. El parámetro describe la recta completa; escoger un par particular no habría resuelto el sistema entero.



Un punto Ninguno Una recta

Problema 12. Una ecuación que no restringe nada

Enunciado. Resuelve $0x + 0y = 0$, $x - y = 3$.

Solución. La primera igualdad es verdadera para todo par real. Sobrevive únicamente la segunda condición. Podemos elegir $y = t$ y obtener $x = t + 3$, con $t \in \mathbb{R}$. El conjunto solución es $\{(t + 3, t) : t \in \mathbb{R}\}$. La igualdad $0 = 0$ no es una recta: en el plano, su conjunto de soluciones es todo $\mathbb{R}^2$. La intersección de ese plano completo con $x - y = 3$ es la recta de la segunda ecuación.

Un criterio general y sus excepciones

Consideremos

$$\begin{cases} ax + by = e, \\ cx + dy = f. \end{cases}$$

Para eliminar y, sus coeficientes b y d deben producir el mismo término: multiplicamos la primera ecuación por d y la segunda por b, y restamos. El término bdy desaparece y queda $(ad - bc)x = ed - bf$. Otra combinación elimina x y da $(ad - bc)y = af - ec$. Hemos obtenido estas condiciones sin dividir por ningún coeficiente. El mismo número, $D = ad - bc$, multiplica a ambas incógnitas; lo llamamos **determinante** del sistema.

Si $D \neq 0$, cualquier solución tiene necesariamente

$$x = \frac{ed - bf}{D}, \qquad y = \frac{af - ec}{D}.$$

Al sustituir estas expresiones en las dos ecuaciones se comprueba que las cumplen. Tenemos existencia y unicidad. Si $D = 0$, estas divisiones no existen y debemos estudiar la compatibilidad de las condiciones. El determinante cero, por sí solo, no distingue un sistema imposible de uno con infinitas soluciones.

Problema 13. Usar el criterio después de comprenderlo

Enunciado. Resuelve $3x + 2y = 7$, $2x - y = 0$ mediante el determinante.

Solución. Los coeficientes son $a = 3$, $b = 2$, $c = 2$, $d = -1$, $e = 7$, $f = 0$. El determinante es $3(-1) - 2 \cdot 2 = -7$, no nulo. Por tanto,

$$x = \frac{7(-1) - 2 \cdot 0}{-7} = 1, \qquad y = \frac{3 \cdot 0 - 7 \cdot 2}{-7} = 2.$$

El par $(1, 2)$ cumple $3 + 4 = 7$ y $2 - 2 = 0$. La fórmula resume las combinaciones de ecuaciones; no reemplaza la revisión de que el denominador sea distinto de cero.

Problema 14. Tres ceros que no garantizan compatibilidad

Enunciado. En el sistema $0x + 0y = 1$, $0x + 0y = 0$, calcula $ad - bc$, $ed - bf$ y $af - ec$. ¿Permiten concluir que hay infinitas soluciones?

Solución. Los seis coeficientes, salvo $e = 1$, son cero. Las tres expresiones pedidas valen cero. Sin embargo, la primera condición es $0 = 1$, imposible. El sistema no tiene solución. En los casos degenerados hay que leer las ecuaciones originales. Si todos los coeficientes de las incógnitas son cero, las constantes deciden: todas nulas dejan el plano completo; alguna no nula hace el sistema incompatible.

Para completar la clasificación cuando $D = 0$, supongamos que existe una ecuación con algún coeficiente de incógnita no nulo. Podemos tomarla como primera. La otra fila de coeficientes es proporcional a ella. Si la constante guarda el mismo factor de proporcionalidad, queda una sola recta; si no lo guarda, las condiciones son incompatibles. La palabra «proporcional» significa aquí que existe un número multiplicador común, incluso cero. Así evitamos cocientes como c/a cuando $a = 0$.

Clasificación de los sistemas lineales de dos incógnitas

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Solución única	Si $D = ad - bc \neq 0$, $x = (ed - bf)/D$ e $y = (af - ec)/D$.
Determinante nulo con fila no nula	Si $D = 0$ y $(a, b) \neq (0, 0)$, existe λ con $(c, d) = \lambda(a, b)$. Hay una recta de soluciones si $f = \lambda e$; en otro caso no hay solución. Se pueden intercambiar las filas para disponer de una primera fila no nula.
Todas las filas nulas	Si $a = b = c = d = 0$ y $e = f = 0$, la solución es $\mathbb{R}^2$. Si alguna de e, f es no nula, es $\emptyset$.
Interpretación geométrica	Cuando ambas ecuaciones representan rectas, su intersección es un punto, una recta completa o el conjunto vacío.

Pruebas. Véase «Determinante, existencia y clasificación de sistemas» en el apéndice.

Un parámetro obliga a revisar la frontera

Un modelo puede cambiar con una tarifa, una capacidad o un coeficiente. Resolver una familia significa describir las soluciones para todos los valores admisibles del parámetro. Los valores que anulan el determinante merecen una rama propia.

Problema 15. Un valor del parámetro vuelve imposible el sistema

Enunciado. Clasifica y resuelve $x + y = 2$, $x + ky = 3$, según el parámetro real k.

Solución. Restando la primera ecuación a la segunda obtenemos $(k-1)y = 1$. Si $k \neq 1$, resulta $y = 1/(k-1)$ y $x = 2-y = (2k-3)/(k-1)$. Al sustituir, la suma es 2 y $x+ky = 2+(k-1)y = 3$. Si $k = 1$, las ecuaciones exigirían simultáneamente $x + y = 2$ y $x + y = 3$: no hay solución. La división por $k-1$ solo se empleó en la rama donde ese número es no nulo.

Problema 16. Una familia que siempre deja una recta

Enunciado. Clasifica $x + y = 2$, $kx + ky = 2k$ para todo $k \in \mathbb{R}$.

Solución. La segunda ecuación es k veces la primera. Para $k \neq 0$ aporta la misma condición; para $k = 0$ se convierte en $0 = 0$ y tampoco agrega restricciones. Para todo parámetro hay infinitas soluciones: $\{(t, 2-t) : t \in \mathbb{R}\}$. No necesitamos dividir la segunda ecuación por k; conservar la primera permite tratar todos los casos con un solo argumento.

Lo que un modelo permite aceptar

La solución algebraica pertenece a un dominio amplio. El relato puede exigir cantidades positivas, números enteros o límites de capacidad. Estas condiciones forman parte del problema y se comprueban sobre el par completo. Las unidades también orientan la construcción: sumar litros con litros es legítimo; sumar litros con porcentajes sin convertirlos en cantidades de sustancia no lo es.

Problema 17. Preparar una mezcla con dos disoluciones

Enunciado. Se necesitan 12 litros de una disolución al 15 %, mezclando disoluciones al 30 % y al 10 %. ¿Cuántos litros de cada una se usan? Supón volúmenes aditivos y conservación del concentrado.

Solución. Sean $x, y \geq 0$ los litros de las disoluciones al 30 % y al 10 %, respectivamente. El volumen total exige $x + y = 12$. Los litros de concentrado exigen $0{,}30x + 0{,}10y = 0{,}15 \cdot 12 = 1{,}8$. Multiplicando la segunda ecuación por 10 resulta $3x + y = 18$. Restar la primera da $2x = 6$, de donde $x = 3$ e $y = 9$. Las cantidades son no negativas, suman 12 litros y contienen $0{,}9 + 0{,}9 = 1{,}8$ litros de concentrado. Se usan tres litros de la primera disolución y nueve de la segunda.

Problema 18. Contar patas y animales

Enunciado. En un recinto hay gallinas y vacas: 18 animales y 50 patas en total. ¿Cuántos hay de cada especie?

Solución. Sean g, v sus cantidades, enteras no negativas. Tenemos $g + v = 18$ y $2g + 4v = 50$. Restamos dos veces la primera ecuación de la segunda: $2v = 14$. Entonces $v = 7$ y $g = 11$. Son enteros admisibles; $11 + 7 = 18$ y $2 \cdot 11 + 4 \cdot 7 = 50$. La eliminación tiene una interpretación directa: asignar primero dos patas a cada animal y contar las catorce patas restantes como dos adicionales por cada vaca.

Problema 19. Un par exacto que no describe un pedido

Enunciado. Un pedido contiene ocho objetos de dos tipos, cuyos precios son 100 y 200 pesos por unidad. ¿Puede costar 600 pesos?

Solución. Si x, y son las cantidades, el modelo sería $x + y = 8$, $100x + 200y = 600$. Dividimos la segunda por 100 y restamos la primera: $y = -2$, de donde $x = 10$. El sistema tiene una única solución real, $(10, -2)$, pero ninguna solución con cantidades no negativas. Además, ocho objetos cuestan al menos $8 \cdot 100 = 800$ pesos. Esa cota confirma que el pedido descrito es imposible.

Problema 20. Qué presupuestos admiten un reparto

Enunciado. Se compran diez paquetes de dos tipos. Un tipo cuesta 2000 pesos y el otro, 4000. Escribe el presupuesto como B miles de pesos y determina cuáles presupuestos permiten una compra exacta.

Solución. Si x, y son las cantidades de cada tipo, $x + y = 10$ y $2x + 4y = B$. Restar dos veces la primera da $2y = B - 20$. Por tanto,

$$y = \frac{B - 20}{2}, \qquad x = \frac{40 - B}{2}.$$

La no negatividad exige $20 \le B \le 40$. Pero los paquetes también deben contarse mediante enteros: como y puede ser $0, 1, \dots, 10$, los únicos presupuestos exactos, en miles de pesos, son $20, 22, 24, \dots, 40$. Cada uno produce un par admisible y su sustitución reconstruye la compra. El intervalo continuo describe un modelo relajado; la lista discreta responde a la pregunta sobre paquetes.

Reconstruir una relación a partir de dos datos

Una relación de la forma $y = mx + b$ tiene un cambio constante: al aumentar x en h, la cantidad y aumenta en mh. Si $m > 0$, crece; si $m < 0$, decrece; si $m = 0$, permanece constante. El coeficiente m es la pendiente; b coincide con el valor de y en $x = 0$ cuando esa entrada pertenece al dominio.

Llamaremos **afín** a la relación $y = mx + b$ y reservaremos **proporcionalidad directa** para $y = mx$. En sentido algebraico estricto, esta última es una función lineal; en algunos cursos escolares se usa «lineal» para toda relación cuya gráfica es una recta no vertical. La distinción permite reconocer cuándo hay un costo fijo y cuándo la razón y/x es constante.

Problema 21. Recuperar una tarifa

Enunciado. Un servicio cobra una tarifa fija más una cantidad constante por visita. Cuatro visitas cuestan 6200 pesos y diez cuestan 11000. Encuentra la regla del cobro.

Solución. Escribimos $C = mn + b$, donde n cuenta visitas, m se mide en pesos por visita y b en pesos. Los datos producen $4m + b = 6200$ y $10m + b = 11000$. Al restar obtenemos $6m = 4800$, así que $m = 800$. Entonces $b = 6200 - 4 \cdot 800 = 3000$. La regla es $C = 800n + 3000$, para n entero no negativo. Verifica ambos datos y predice que cero visitas tienen un cobro fijo de 3000 pesos, según la hipótesis del enunciado. Entre las cantidades positivas de visitas, el cociente C/n varía: el costo fijo se reparte entre más visitas.

Problema 22. Calibrar una lectura

Enunciado. Se adopta un modelo afín $T = mr + b$ entre una lectura r y una temperatura T. Se sabe que $r = 2$ corresponde a $T = 5$ grados y $r = 8$ a $T = 23$ grados. Determina la relación y la lectura correspondiente a 14 grados.

Solución. Las dos correspondencias dan $2m + b = 5$ y $8m + b = 23$. Restando resulta $6m = 18$, luego $m = 3$ y $b = -1$. El modelo es $T = 3r - 1$. Para $T = 14$ resolvemos $14 = 3r - 1$ y obtenemos $r = 5$. Los datos de calibración se comprueban: $3 \cdot 2 - 1 = 5$ y $3 \cdot 8 - 1 = 23$. Dos datos determinan la regla dentro de la familia afín adoptada; por sí solos no prueban que un instrumento físico siga esa regla fuera del rango de observación.

Propiedades de las relaciones afines

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Cambio constante	Si $y = mx + b$, entonces $y(x + h) - y(x) = mh$, para argumentos del dominio.
Pendiente entre dos datos	Si $x_1 \neq x_2$, $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$ y $b = y_1 - mx_1$ determinan la única relación afín que pasa por ambos puntos.
Crecimiento y decrecimiento	Para $x_1 < x_2$, la diferencia $y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$ tiene el signo de m.
Cortes con los ejes	En el dominio real completo, el corte con el eje vertical es $(0, b)$. Si $m \neq 0$, el corte con el horizontal es $(-b/m, 0)$.
Relación inversa	Si $m \neq 0$, $y = mx + b \iff x = (y - b)/m$. En un dominio restringido se conserva la restricción original.
Proporcionalidad directa	Si el dominio contiene cero, una relación afín pasa por $(0, 0)$ exactamente cuando $b = 0$. En ese caso $y/x = m$ para $x \neq 0$ del dominio.

Pruebas. Véase «Rectas, pendientes y relaciones afines» en el apéndice.

Guardar los coeficientes sin cambiar las ideas

Al eliminar, repetimos operaciones sobre ecuaciones enteras. Una tabla de coeficientes puede abreviar la escritura. En una **matriz ampliada**, cada fila guarda los coeficientes de las incógnitas y, tras una separación, el término independiente. Debemos fijar primero el orden de las incógnitas y mantenerlo en todas las filas.

Problema 23. Las mismas operaciones en una matriz

Enunciado. Resuelve $2x + 3y = 13$, $4x + 7y = 29$, registrando operaciones de filas.

Solución. Con el orden x, y, escribimos

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 13 \\ 4 & 7 & 29 \end{array}\right].$$

Restamos dos veces la primera fila a la segunda y obtenemos

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 13 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

La segunda fila dice $y = 3$. Restamos tres veces esa fila a la primera y dividimos la primera por 2. Resulta

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Ahora leemos $x = 2$, $y = 3$. En las ecuaciones originales, $4+9 = 13$ y $8+21 = 29$. Cada operación actúa sobre la fila completa, incluida la constante. La matriz registra transformaciones reversibles; no supone que toda tabla de coeficientes posea una inversa ni que todo sistema tenga solución única.

Problema 24. Rectas que casi coinciden

Enunciado. Estudia $x + y = 2$, $2x + (2 + \varepsilon)y = 4 + \delta$, según los parámetros reales ε, δ. Compara los casos $(\varepsilon, \delta) = (0{,}001, 0{,}001)$ y $(0{,}001, 0{,}002)$.

Solución. Restamos dos veces la primera ecuación de la segunda: $\varepsilon y = \delta$. Si $\varepsilon \neq 0$, hay una única solución,

$$y = \frac{\delta}{\varepsilon}, \qquad x = 2 - \frac{\delta}{\varepsilon}.$$

Si $\varepsilon = 0$ y $\delta = 0$, la segunda condición es el doble de la primera y queda la recta $\{(t, 2-t) : t \in \mathbb{R}\}$. Si $\varepsilon = 0$ y $\delta \neq 0$, resulta una contradicción y no hay solución. En los dos casos numéricos solicitados obtenemos $(1, 1)$ y $(0, 2)$. Cambiar la constante de la segunda ecuación en solo 0,001 desplazó cada coordenada en una unidad. Aquí la eliminación explica la sensibilidad: el cambio de y es el cambio de δ dividido por ε. Un dibujo aproximado o coeficientes redondeados pueden ocultar esa diferencia.

Parámetros y sensibilidad de una familia

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Rama no singular	En $x + y = s$, $2x + (2 + \varepsilon)y = 2s + \delta$, si $\varepsilon \neq 0$, la solución única es $(s - \delta/\varepsilon, \delta/\varepsilon)$.
Rama singular	Si $\varepsilon = 0$, hay una recta de soluciones cuando $\delta = 0$ y ninguna solución cuando $\delta \neq 0$.
Cambio de la constante	Para s, ε fijos con $\varepsilon \neq 0$, un cambio $\Delta\delta$ produce $\Delta y = \Delta\delta/\varepsilon$ y $\Delta x = -\Delta\delta/\varepsilon$.

Pruebas. Véase «Parámetros y sensibilidad de un sistema» en el apéndice.

Ejercicios para trabajar sin profesor

En cada sistema escribe el par o el conjunto completo de soluciones. Comprueba ambas ecuaciones y conserva las restricciones del contexto. En los casos con parámetros, separa las ramas antes de efectuar una división que pueda dejar de existir.

1. Se venden 15 entradas de adulto e infantiles, a 6000 y 4000 pesos respectivamente. La recaudación es de 74000 pesos. Determina el reparto.

2. Decide cuáles de los pares $(1,2)$ y $(2,1)$ resuelven $x+y=3$, $2x+y=4$.

3. Resuelve por sustitución $y=3x+1$, $x+y=9$.

4. Resuelve $x/3+y/2=4$, $x-y=-3$.

5. Resuelve por eliminación $x+y=9$, $2x-y=3$.

6. Resuelve $3x+2y=16$, $2x-3y=-11$.

7. Al sumar $x+y=8$, $x-y=4$ queda $2x=12$. Encuentra el par solución y un par que cumpla la suma pero no el sistema.

8. Resuelve $2x+y=8$, $x-y=1$ y explica su significado gráfico.

9. Resuelve $x=-1$, $2x+3y=7$.

10. Clasifica $x+2y=3$, $2x+4y=8$.

11. Describe todas las soluciones de $x+2y=3$, $3x+6y=9$.

12. Resuelve $0x+0y=0$, $x+2y=5$.

13. Resuelve mediante el determinante $2x+3y=13$, $3x-y=3$.

14. Clasifica $0x+0y=0$, $0x+0y=5$. Explica por qué no basta que $ad-bc=ed-bf=af-ec=0$.

15. Clasifica y resuelve $x+y=4$, $x+ky=6$, según $k\in\mathbb{R}$.

16. Clasifica $kx+ky=3k$, $x+y=3$, según $k\in\mathbb{R}$.

17. Se preparan 10 litros al 8 % mezclando disoluciones al 20 % y al 5 %. Encuentra sus volúmenes, bajo las hipótesis de aditividad y conservación del concentrado.

18. Hay gallinas y vacas: 22 animales y 64 patas. Determina sus cantidades.

19. ¿Es posible comprar diez objetos, de precios 3000 y 5000 pesos, pagando en total 20000 pesos? Plantea y resuelve el sistema antes de interpretar.

20. Se compran doce paquetes que cuestan 3000 o 5000 pesos cada uno. Expresa en miles de pesos todos los presupuestos exactos posibles y las cantidades correspondientes.

21. Un servicio con cobro fijo más un precio constante por visita cuesta 3700 pesos para dos visitas y 8200 para siete. Encuentra su tarifa.

22. En un modelo afín $T=mr+b$, las lecturas $r=1$ y $r=5$ corresponden a 6 y 14 grados. Encuentra la regla y la lectura correspondiente a 20 grados.

23. Resuelve $3x+y=11$, $6x+3y=27$ usando una matriz ampliada y operaciones reversibles de filas.

24. Clasifica $x+y=3$, $2x+(2+\varepsilon)y=6+\delta$. Compara $(\varepsilon,\delta)=(0{,}01,0{,}01)$ y $(0{,}01,0{,}02)$.

Soluciones desarrolladas

Ejercicio 1. Repartir las entradas

Sean a, i enteros no negativos. Las condiciones son $a + i = 15$ y $6000a + 4000i = 74000$. Restar 4000 veces la primera a la segunda da $2000a = 14000$, luego $a = 7$ e $i = 8$. Ambos son admisibles: suman 15 y producen $42000 + 32000 = 74000$ pesos. Se vendieron siete entradas de adulto y ocho infantiles.

Ejercicio 2. Revisar las dos condiciones

Los dos pares cumplen $x + y = 3$. Para $(1, 2)$, la segunda ecuación da $2 + 2 = 4$; para $(2, 1)$ da $4 + 1 = 5$, que falla. Solo $(1, 2)$ resuelve el sistema entre los candidatos ofrecidos. Restar la primera ecuación de la segunda da $x = 1$ y después $y = 2$, lo que demuestra además que es la única solución real.

Ejercicio 3. Reconstruir la coordenada

Sustituimos $y = 3x + 1$ en $x + y = 9$: $4x + 1 = 9$. Entonces $x = 2$ y $y = 7$. En las originales, $7 = 3 \cdot 2 + 1$ y $2 + 7 = 9$. La sustitución fue equivalente conservando la relación de y, por lo que el conjunto solución es $\{(2, 7)\}$.

Ejercicio 4. Despejar sin perder el signo

De $x - y = -3$ obtenemos $x = y - 3$. Sustituimos en la primera ecuación y multiplicamos por 6: $2(y - 3) + 3y = 24$. Queda $5y = 30$, luego $y = 6$ e $x = 3$. Verificamos $3/3 + 6/2 = 4$ y $3 - 6 = -3$. El par es $(3, 6)$.

Ejercicio 5. Sumar y conservar

La suma de las ecuaciones es $3x = 12$, por lo que $x = 4$. Conservando $x + y = 9$ obtenemos $y = 5$. La segunda original da $2 \cdot 4 - 5 = 3$. El sistema transformado conserva una ecuación y la suma, de modo que se puede recuperar la otra por resta. La solución única es $(4, 5)$.

Ejercicio 6. Una eliminación preparada

Multiplicamos la primera ecuación por 3 y la segunda por 2: $9x + 6y = 48$, $4x - 6y = -22$. Sumando obtenemos $13x = 26$, luego $x = 2$. La primera original da $6 + 2y = 16$, así que $y = 5$. En la segunda, $4 - 15 = -11$. El par $(2, 5)$ cumple las dos condiciones y los pasos reversibles aseguran su unicidad.

Ejercicio 7. La suma deja libre una coordenada

De $2x = 12$ sale $x = 6$. La primera ecuación obliga entonces a $y = 2$, y el par $(6, 2)$ cumple también $6 - 2 = 4$. En cambio, $(6, 0)$ cumple la suma y falla en ambas originales. Por eso la suma sola no es un sistema equivalente; se debe conservar una de las condiciones para reconstruir el par.

Ejercicio 8. Un punto compartido

Sumando las ecuaciones obtenemos $3x = 9$, luego $x = 3$. De $x - y = 1$ resulta $y = 2$. La primera se comprueba con $2 \cdot 3 + 2 = 8$. Las rectas son $y = 8 - 2x$ e $y = x - 1$ y se cortan únicamente en $(3, 2)$. La eliminación proporciona las coordenadas exactas que el gráfico puede sugerir.

Ejercicio 9. Una coordenada fija

La primera condición fija la recta vertical $x = -1$. Sustituyendo en la segunda resulta $-2+3y = 7$, de donde $y = 3$. La intersección es $(-1, 3)$ y satisface $2(-1)+3\cdot 3 = 7$. No hace falta una pendiente para representar la primera recta.

Ejercicio 10. Una contradicción constante

Restamos dos veces la primera ecuación de la segunda: el miembro izquierdo se anula y el derecho vale $8-6 = 2$. Queda $0 = 2$, imposible. Las rectas son paralelas distintas y el conjunto solución es $\emptyset$. No es lícito interpretar la desaparición de ambas incógnitas como prueba de infinitas soluciones sin leer la constante restante.

Ejercicio 11. Un parámetro recorre todas las soluciones

La segunda ecuación es tres veces la primera y no agrega una condición. Elegimos $y = t$, con $t \in \mathbb{R}$, y obtenemos $x = 3-2t$. El conjunto solución es $\{(3-2t, t) : t \in \mathbb{R}\}$. La sustitución produce $3 - 2t + 2t = 3$ en la primera y su triple en la segunda. Ambas describen la misma recta.

Ejercicio 12. Intersectar con todo el plano

La primera igualdad, $0 = 0$, admite todo par real. Solo queda $x + 2y = 5$. Al tomar $y = t$ obtenemos $x = 5-2t$. Las soluciones son $\{(5-2t, t) : t \in \mathbb{R}\}$. La parametrización cubre todos los valores posibles de y y determina para cada uno el único x que exige la condición restante.

Ejercicio 13. Un denominador no nulo

El determinante es $2(-1) - 3 \cdot 3 = -11$. Entonces $x = [13(-1) - 3 \cdot 3]/(-11) = 2$ e $y = [2 \cdot 3 - 13 \cdot 3]/(-11) = 3$. Comprobamos $4 + 9 = 13$ y $6 - 3 = 3$. Como el determinante es no nulo, la solución $(2, 3)$ existe y es única.

Ejercicio 14. Leer la fila completa

Aunque las tres expresiones de coeficientes indicadas se anulan, la segunda ecuación es $0 = 5$ y hace imposible el sistema. El conjunto solución es vacío. Cuando todos los coeficientes de las incógnitas son cero, las constantes deciden entre todo el plano y ningún punto. Los tres ceros del criterio no pueden reemplazar ese examen.

Ejercicio 15. Un caso singular

Restamos la primera ecuación de la segunda: $(k-1)y = 2$. Si $k \neq 1$, obtenemos $y = 2/(k-1)$ y $x = 4 - y = (4k-6)/(k-1)$. Su suma es 4 y $x + ky = 4 + (k-1)y = 6$. Si $k = 1$, las ecuaciones exigen que la misma suma valga 4 y 6, lo que es imposible. No hay solución en esa rama.

Ejercicio 16. Una fila redundante, incluso cuando se anula

La primera ecuación es k veces la segunda. Para todo k, cualquier par que cumpla $x + y = 3$ cumple la primera. Recíprocamente, el sistema conserva esa segunda ecuación, así que ninguna otra pareja puede servir. Las soluciones son $\{(t, 3 - t) : t \in \mathbb{R}\}$ para todo parámetro, incluido $k = 0$.

Ejercicio 17. Litros de disolución y de concentrado

Sean $x, y \geq 0$ los litros al 20 % y al 5 %. Tenemos $x + y = 10$ y $0{,}20x + 0{,}05y = 0{,}8$. Multiplicar la segunda por 20 da $4x + y = 16$. Al restar la primera resulta $3x = 6$, luego $x = 2$ e $y = 8$. Suman diez litros y contienen $0{,}4 + 0{,}4 = 0{,}8$ litros de concentrado, el 8 % de diez. Los volúmenes respetan el dominio.

Ejercicio 18. Las patas adicionales

Con cantidades enteras no negativas, $g + v = 22$ y $2g + 4v = 64$. Restamos dos veces la primera: $2v = 20$, luego $v = 10$ y $g = 12$. La comprobación da $12 + 10 = 22$ y $24 + 40 = 64$. Hay doce gallinas y diez vacas.

Ejercicio 19. Un modelo sin compra admisible

Las condiciones son $x + y = 10$ y $3x + 5y = 20$, con el precio expresado en miles de pesos y x, y enteros no negativos. Restar tres veces la primera da $2y = -10$, luego $y = -5$ e $x = 15$. Ese par real no describe una compra. El menor costo de diez objetos es de 30000 pesos, superior a los 20000 propuestos. No existe una compra admisible.

Ejercicio 20. Presupuestos discretos

Escribimos $x + y = 12$ y $3x + 5y = B$, con B en miles de pesos. Restar tres veces la primera da $2y = B - 36$. Así, $y = (B - 36)/2$ y $x = (60 - B)/2$. La no negatividad exige $36 \leq B \leq 60$; las cantidades enteras exigen además $B = 36 + 2j$, con $j \in \{0, 1, \dots, 12\}$. Los presupuestos son $36, 38, \dots, 60$ miles de pesos y el reparto correspondiente es $(x, y) = (12 - j, j)$. Sustituirlo produce exactamente el presupuesto indicado.

Ejercicio 21. Precio por visita y cargo fijo

Sea $C = mn + b$. Los datos dan $2m + b = 3700$ y $7m + b = 8200$. Al restar obtenemos $5m = 4500$, luego $m = 900$ pesos por visita. Entonces $b = 3700 - 1800 = 1900$ pesos. La regla es $C = 900n + 1900$, para n entero no negativo. Verifica $C(2) = 3700$ y $C(7) = 8200$. Es afín y tiene un cargo fijo, por lo que no es proporcionalidad directa.

Ejercicio 22. Una calibración afín

Las correspondencias producen $m + b = 6$ y $5m + b = 14$. Su diferencia es $4m = 8$, así que $m = 2$ y $b = 4$. La regla es $T = 2r + 4$. Para $T = 20$, $20 = 2r + 4$ da $r = 8$. La regla reproduce los datos: $T(1) = 6$, $T(5) = 14$. La lectura 8 está fuera del tramo observado de 1 a 5; su cálculo usa la prolongación del modelo afín y no constituye una validación experimental de ella.

Ejercicio 23. Registrar una reducción de filas

Con el orden x, y empezamos con

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 11 \\ 6 & 3 & 27 \end{array}\right].$$

Restar dos veces la primera fila de la segunda produce la fila $(0, 1, 5)$, que significa $y = 5$. Restar esa fila a la primera produce $(3, 0, 6)$. Dividir la primera por 3 deja $(1, 0, 2)$, de modo que $x = 2$. El par $(2, 5)$ verifica $6 + 5 = 11$ y $12 + 15 = 27$. Se operó siempre sobre la constante junto con los demás coeficientes.

Ejercicio 24. Separar singularidad y sensibilidad

Al restar dos veces la primera ecuación de la segunda queda $\varepsilon y = \delta$. Si $\varepsilon \neq 0$, la solución única es $(3 - \delta/\varepsilon, \delta/\varepsilon)$. Si $\varepsilon = 0 = \delta$, queda toda la recta $\{(t, 3 - t) : t \in \mathbb{R}\}$. Si $\varepsilon = 0$ y $\delta \neq 0$, no hay solución. Para los datos numéricos obtenemos $(2, 1)$ y $(1, 2)$. Un cambio de 0,01 en la constante de la segunda ecuación modifica las coordenadas en una unidad, porque la diferencia se divide por $\varepsilon = 0{,}01$.

Diagnóstico de salida

La solución de un sistema debe satisfacer cada condición del problema. Para justificar un procedimiento, explica cómo recuperar las ecuaciones iniciales desde las transformadas. Ante un parámetro, identifica qué divisiones podrían dejar de existir y examina esos valores en el sistema original. Al interpretar un modelo, revisa el par completo: sus unidades, su signo y, cuando corresponde, su carácter entero. La comprobación algebraica y la interpretación del relato deben conducir a la misma respuesta.

CAPÍTULO 8

Ecuaciones cuadráticas y polinomios elementales

Volvamos al problema de reconstruir un rectángulo, esta vez con dos datos: conocemos su área y sabemos cuánto supera el largo al ancho. Elegir el ancho fija el largo, de modo que la condición del área se convierte en un producto de dos expresiones que contienen la misma incógnita. Al desarrollar ese producto aparece un cuadrado. Las operaciones usadas para una ecuación lineal necesitarán una herramienta adicional que permita recuperar los valores escondidos en él.

La factorización será una primera manera de encontrarlos: convertir una expresión en un producto permite aprovechar lo que sabemos de los factores cuando ese producto vale cero. Habrá ecuaciones cuya factorización resulte difícil de reconocer, y completar un cuadrado ofrecerá otro camino, del que obtendremos una fórmula general. En todos los casos regresaremos a las condiciones originales, porque una raíz algebraica puede quedar fuera de las longitudes admisibles del rectángulo. El número de soluciones también será parte de lo que debemos justificar.

Una longitud que aparece multiplicada por otra

Problema 1. Reconstruir un rectángulo desde su área

Enunciado. Un rectángulo tiene área de 84 metros cuadrados y su largo supera al ancho en cinco metros. Encuentra sus dimensiones.

Solución. Sea $x > 0$ el ancho medido en metros. El largo es $x + 5$ y el área exige $x(x + 5) = 84$. Al desarrollar y llevar todo a un miembro obtenemos $x^2 + 5x - 84 = 0$. Buscamos dos números cuyo producto sea -84 y cuya suma sea 5: son 12 y -7. Por ello,

$$x^2 + 5x - 84 = (x + 12)(x - 7).$$

Un producto de reales es cero exactamente cuando alguno de sus factores es cero. Así, $x = -12$ o $x = 7$. La primera posibilidad queda fuera del dominio de longitudes. El ancho es de siete metros y el largo, de doce. Se comprueban la diferencia $12 - 7 = 5$ y el área $7 \cdot 12 = 84$. La factorización describe todas las soluciones de la ecuación; la restricción geométrica selecciona la admisible.

Una ecuación **cuadrática** tiene la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde los coeficientes son reales y $a \neq 0$. El exponente máximo de la incógnita es 2. La condición sobre a importa: si se anula, desaparece el término cuadrático y debemos volver a una ecuación lineal o constante. A lo largo del capítulo resolveremos primero en los reales; al final estudiaremos una ampliación opcional del sistema numérico.

Problema 2. La raíz que una división puede borrar

Enunciado. Resuelve $x^2 = 5x$ y revisa el procedimiento de dividir directamente por x.

Solución. Restamos $5x$ y extraemos factor común: $x^2 - 5x = x(x-5) = 0$. El producto nulo da $x = 0$ o $x = 5$. Ambos verifican la ecuación inicial. Dividir por x solo es lícito bajo la hipótesis $x \neq 0$ y encontraría únicamente la raíz 5. El caso $x = 0$ debe examinarse aparte. Factorizar permite mantener juntas las dos posibilidades sin efectuar esa división.

Problema 3. Factores con coeficientes distintos de uno

Enunciado. Resuelve $2x^2 - x - 3 = 0$.

Solución. Reconocemos $2x^2 - x - 3 = (2x-3)(x+1)$, pues al multiplicar obtenemos $2x^2 + 2x - 3x - 3$. La ecuación equivale a $2x - 3 = 0$ o $x + 1 = 0$. Sus raíces son $3/2$ y -1. Sustituir $3/2$ da $9/2 - 3/2 - 3 = 0$; sustituir -1 da $2 + 1 - 3 = 0$. La equivalencia con un producto nulo justifica que no hay más soluciones reales.

Problema 4. Recuperar las dos ramas de un cuadrado

Enunciado. Resuelve $x^2 = 12$ en los reales.

Solución. La raíz principal $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ es positiva. Un número y su opuesto tienen el mismo cuadrado, por lo que aparecen $x = 2\sqrt{3}$ y $x = -2\sqrt{3}$. Para justificar que son todos, escribimos $x^2 - 12 = (x - 2\sqrt{3})(x + 2\sqrt{3})$. El producto nulo da exactamente esas dos ramas. La igualdad $x = \sqrt{12}$ habría conservado solo la positiva. Ambas raíces verifican $x^2 = 4 \cdot 3 = 12$.

Propiedades para resolver mediante factores

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Producto nulo	Para reales u, v, $uv = 0$ equivale a $u = 0$ o $v = 0$. Se aplica sucesivamente a un producto finito.
Factores y raíces	Si $P(x) = A(x)B(x)$ es una identidad, sus ceros son los valores que anulan al menos un factor, dentro del dominio original.
Ecuación de un cuadrado	Si $r > 0$, $u^2 = r$ equivale a $u = \sqrt{r}$ o $u = -\sqrt{r}$. Si $r = 0$, solo $u = 0$; si $r < 0$, no hay solución real.
Condición del contexto	Las raíces admisibles son las raíces algebraicas que pertenecen al dominio del problema.

Pruebas. Véase «Factorización y ecuaciones de un cuadrado» en el apéndice.

Convertir una expresión en un cuadrado

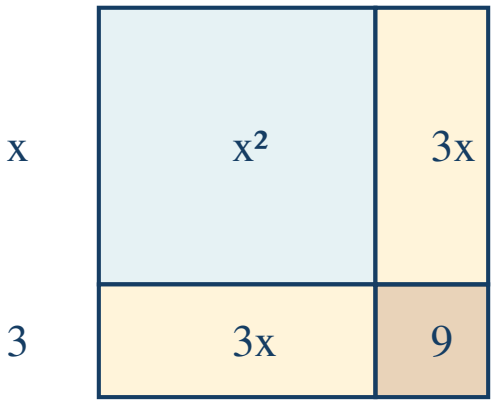
La factorización con enteros resulta cómoda cuando los factores se reconocen. Podemos construir otro camino que funcione aunque no los veamos. En x^2+6x falta el término 9 para obtener $(x+3)^2$. Ese 9 se decide por el término central del cuadrado: $2 \cdot 3x = 6x$. Añadirlo exige compensarlo para conservar la expresión.

Problema 5. Completar y compensar

Enunciado. Resuelve $x^2 + 6x + 5 = 0$ completando un cuadrado.

Solución. Escribimos $x^2 + 6x + 5 = (x + 3)^2 - 9 + 5 = (x + 3)^2 - 4$. La ecuación equivale a $(x + 3)^2 = 4$. Por tanto, $x + 3 = 2$ o $x + 3 = -2$, y obtenemos $x = -1$ o $x = -5$. Al sustituir, $1 - 6 + 5 = 0$ y $25 - 30 + 5 = 0$. Cada paso conserva las soluciones y las dos ramas del cuadrado se han considerado.

Para longitudes positivas, un dibujo puede mostrar por qué aparece la corrección 9: al cuadrado de lado x se añaden dos bandas de ancho 3; falta un cuadrado pequeño de lado 3 para completar el cuadrado de lado $x + 3$. La identidad algebraica sigue siendo válida para todo real x, aunque ese dibujo de longitudes deje de representar sus signos.



$$(x + 3)^2$$

$$x^2 + 6x + 9$$

Problema 6. Un coeficiente principal negativo

Enunciado. Resuelve $-2x^2 + 8x - 3 = 0$ completando cuadrados.

Solución. Extraemos -2 de los términos que contienen x:

$$-2(x^2 - 4x) - 3 = -2((x - 2)^2 - 4) - 3 = -2(x - 2)^2 + 5.$$

La condición se transforma en $(x-2)^2 = 5/2$. Obtenemos $x = 2 \pm \sqrt{5/2} = 2 \pm \sqrt{10}/2$. La notación $\pm$ reúne dos valores, uno con cada signo. Para comprobarlos llamamos $s = \sqrt{10}/2$, de modo que $s^2 = 5/2$. En ambos casos la expresión original, escrita como $5 - 2(x - 2)^2$, vale $5 - 2s^2 = 0$. El coeficiente negativo no cambia el significado de una igualdad, pues solo dividimos por un número no nulo.

Una fórmula que conserva la razón de sus pasos

Tomemos $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$. Para reconocer un cuadrado queremos que los términos que contienen x se parezcan a los de $(2ax + b)^2$: al desarrollar aparecen $4a^2x^2 + 4abx + b^2$. Multiplicar la ecuación por $4a$ produce los dos primeros; después podemos completar el cuadrado añadiendo b^2 a ambos miembros y trasladando $4ac$. Así obtenemos

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Llamamos **discriminante** al número $\Delta = b^2 - 4ac$, porque su signo decide qué posibilidades tiene el cuadrado. Cuando $\Delta \geq 0$, tomamos las dos raíces con signo y despejamos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Para $\Delta > 0$ obtenemos dos valores distintos; con $\Delta = 0$ ambas ramas coinciden. Si $\Delta < 0$, la igualdad exige que un cuadrado real sea negativo y por tanto carece de solución real. La multiplicación inicial fue por un número no nulo y los despejes conservan ambos sentidos, de modo que las raíces obtenidas forman el conjunto completo.

Problema 7. Raíces que no son racionales

Enunciado. Resuelve $3x^2 - 2x - 2 = 0$.

Solución. Tenemos $a = 3$, $b = -2$, $c = -2$. Por ello, $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 28 > 0$. La fórmula da $x = (2 \pm \sqrt{28})/6 = (1 \pm \sqrt{7})/3$. Para comprobar sin redondear, la ecuación equivale a $(3x-1)^2 = 7$. Cada valor encontrado produce $3x - 1 = \pm\sqrt{7}$ y satisface esa igualdad. El conjunto solución tiene exactamente esos dos números.

Problema 8. Dos signos que entregan el mismo valor

Enunciado. Resuelve $4x^2 + 12x + 9 = 0$ y explica cuántas raíces distintas tiene.

Solución. La expresión es $(2x+3)^2$. Se anula únicamente cuando $2x+3 = 0$, es decir, $x = -3/2$. El discriminante confirma $12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 0$. La fórmula con los dos signos entrega el mismo valor. Hay una raíz distinta, llamada raíz doble porque el factor lineal aparece dos veces: $(2x+3)^2 = 4(x+3/2)^2$. La multiplicidad registra cuántas veces aparece el factor asociado a una raíz.

Problema 9. Una ecuación sin raíces reales

Enunciado. Resuelve $x^2 - 4x + 6 = 0$ en $\mathbb{R}$.

Solución. Completamos: $x^2 - 4x + 6 = (x-2)^2 + 2$. Para todo real x esta cantidad es al menos 2 y, por tanto, nunca vale cero. El conjunto solución real es vacío. El discriminante es $16 - 24 = -8$, que expresa la misma imposibilidad. La frase «no hay solución» debe acompañarse del dominio: más adelante veremos cómo cambia esta pregunta al ampliar los números.

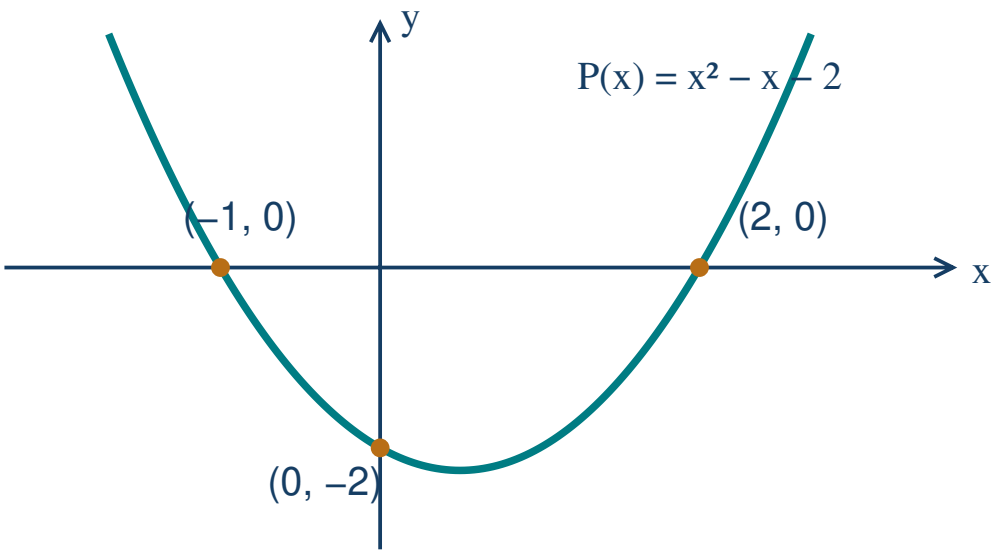
Ceros del polinomio y puntos sobre el eje horizontal

Escribir $P(x) = x^2 - x - 2$ asigna a cada real una ordenada. Un **cero** de P es un valor r para el cual $P(r) = 0$. En el plano corresponde al punto $(r, 0)$. El corte con el eje vertical se obtiene, en cambio, poniendo $x = 0$: es $(0, P(0))$. Distinguir la abscisa de una raíz de la ordenada en el origen evita confundir dos preguntas diferentes.

Problema 10. Dos ceros y una ordenada inicial

Enunciado. Encuentra los ceros de $P(x) = x^2 - x - 2$ y sus cortes con ambos ejes.

Solución. Factorizamos $P(x) = (x-2)(x+1)$. Sus ceros son $x = 2$ y $x = -1$, de modo que corta el eje horizontal en $(2, 0)$ y $(-1, 0)$. Para el eje vertical calculamos $P(0) = -2$: el corte es $(0, -2)$, que no es una raíz. El gráfico muestra esos tres puntos; sus coordenadas se obtuvieron exactamente mediante sustitución y factorización.



Problema 11. Lo que los coeficientes dicen de las raíces

Enunciado. Para $2x^2 - 7x + 3 = 0$, encuentra la suma y el producto de las raíces sin calcularlas primero. Después determínalas y comprueba esas relaciones.

Solución. Si las raíces son r, s, la factorización $2(x-r)(x-s)$ se desarrolla como $2x^2 - 2(r+s)x + 2rs$. Comparar coeficientes da $r + s = 7/2$ y $rs = 3/2$. Para encontrarlas reconocemos $(2x-1)(x-3) = 0$, de donde $r = 1/2$ y $s = 3$. Su suma es $7/2$ y su producto, $3/2$. Las relaciones de suma y producto sirven como control, pero deben cumplirse juntas: conocer solo una no determina ambas raíces.

Propiedades de una ecuación cuadrática

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Cuadrado completo	Para $a \neq 0$, $ax^2 + bx + c = a(x + b/(2a))^2 - \Delta/(4a)$, con $\Delta = b^2 - 4ac$.
Fórmula de las raíces reales	Si $a \neq 0$ y $\Delta \geq 0$, las raíces son $(-b + \sqrt{\Delta})/(2a)$ y $(-b - \sqrt{\Delta})/(2a)$.
Discriminante positivo	Si $a \neq 0$ y $\Delta > 0$, hay dos raíces reales distintas.
Discriminante cero	Si $a \neq 0$ y $\Delta = 0$, hay una raíz real doble: $-b/(2a)$.
Discriminante negativo	Si $a \neq 0$ y $\Delta < 0$, no hay raíces reales.
Suma y producto	Para $a \neq 0$, si r, s son las raíces reales, contadas con multiplicidad, $r + s = -b/a$ y $rs = c/a$; además $ax^2 + bx + c = a(x - r)(x - s)$.
Cambio de grado	Si $a = 0$, se resuelve $bx + c = 0$: raíz única $-c/b$ cuando $b \neq 0$; todos los reales si $b = c = 0$; ninguno si $b = 0$, $c \neq 0$.

Pruebas. Véanse «Fórmula cuadrática y relaciones entre raíces» y «Parámetros y cambios de grado» en el apéndice.

Problema 12. La misma altura en dos instantes

Enunciado. Se adopta el modelo $h(t) = -5t^2 + 20t + 1$ para una altura en metros, con el tiempo $t \geq 0$ medido en segundos. ¿Cuándo se alcanza una altura de 16 metros?

Solución. Imponemos $h(t) = 16$: $-5t^2 + 20t - 15 = 0$. Dividir por -5 da $t^2 - 4t + 3 = 0$, que se factoriza como $(t - 1)(t - 3) = 0$. Los candidatos son 1 y 3 segundos, ambos admisibles. Comprobamos $h(1) = -5 + 20 + 1 = 16$ y $h(3) = -45 + 60 + 1 = 16$. El modelo alcanza su altura máxima de 21 metros en $t = 2$, pues $h(t) = 21 - 5(t - 2)^2$. Por ello, los dos instantes encontrados corresponden al ascenso y al descenso. La interpretación usa el modelo adoptado, cuya validez física debe verificarse por otros medios.

Los polinomios conservan una estructura finita

Un **polinomio real en** x es una suma finita $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, con exponentes enteros no negativos y coeficientes reales. Si $a_n \neq 0$, su **grado** es n. Ordenar los términos por potencias permite localizar ese coeficiente principal y reconocer qué grado queda después de reunir términos semejantes. El polinomio cero tiene todos sus coeficientes nulos; mantendremos para él la convención de dejar su grado ordinario sin asignar.

Problema 13. Leer los coeficientes y evaluar

Enunciado. Para $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$, indica el grado y el coeficiente de x. Calcula $P(2)$ y decide si -1 es un cero.

Solución. El grado es 3 porque el coeficiente de x^3 es 2. El término en x no está escrito: su coeficiente es cero. Evaluamos $P(2) = 2 \cdot 8 - 3 \cdot 4 + 5 = 9$. Para $x = -1$ obtenemos $-2 - 3 + 5 = 0$, de modo que -1 es un cero. Escribir $2x^3 - 3x^2 + 0x + 5$ resulta útil al dividir, porque conserva visibles los lugares de todos los coeficientes.

Dividir un polinomio y conservar el resto

La división de números enteros distingue cociente y resto. Para polinomios buscamos una identidad $P = DQ + R$, donde el divisor D no sea el polinomio cero y el resto tenga grado menor que el divisor, o sea cero. La identidad es válida para todo x. La fracción $P(x)/D(x)$ solo existe donde $D(x) \neq 0$; esa restricción sigue siendo necesaria aunque conozcamos el cociente.

Problema 14. Cancelar el término de mayor grado

Enunciado. Divide $2x^3 - 3x^2 + 5$ por $x + 1$ y encuentra todos sus ceros reales.

Solución. Para cancelar $2x^3$ necesitamos $2x^2$ en el cociente. Restamos $(x + 1)2x^2 = 2x^3 + 2x^2$ y queda $-5x^2 + 0x + 5$. Para cancelar $-5x^2$ agregamos $-5x$ al cociente. Restar $(x + 1)(-5x) = -5x^2 - 5x$ deja $5x + 5$. Finalmente agregamos 5 y el resto es cero. Hemos obtenido

$$2x^3 - 3x^2 + 5 = (x + 1)(2x^2 - 5x + 5).$$

Multiplicar confirma la identidad, incluido el coeficiente cero de x. El segundo factor tiene discriminante $25 - 40 = -15$ y no se anula en los reales. Por el producto nulo, el único cero real es -1. La división encontró un factor; la cuadrática restante permitió demostrar que no faltaban ceros reales.

Problema 15. El resto se puede conocer sin dividir

Enunciado. Encuentra el resto de dividir $P(x) = x^3 - 4x + 1$ por $x - 2$ y verifica una identidad de división.

Solución. Al dividir por un polinomio de grado 1, el resto es una constante r. Si $P(x) = (x - 2)Q(x) + r$, sustituir $x = 2$ produce $P(2) = r$. Calculamos $8 - 8 + 1 = 1$. En este caso el cociente es $x^2 + 2x$, y la comprobación completa es

$$x^3 - 4x + 1 = (x - 2)(x^2 + 2x) + 1.$$

El resto es 1. Por tanto, 2 no es un cero y $x - 2$ no es un factor de P.

Problema 16. Elegir un coeficiente para obtener un factor

Enunciado. Determina k para que $P(x) = x^3 - 3x^2 + k$ sea divisible por $x - 1$.

Solución. La divisibilidad exige resto cero. Ese resto es $P(1) = 1 - 3 + k = k - 2$, así que necesariamente $k = 2$. Con ese valor,

$$x^3 - 3x^2 + 2 = (x - 1)(x^2 - 2x - 2).$$

Multiplicar da $x^3 - 3x^2 + 0x + 2$, lo que confirma también la suficiencia: el valor encontrado produce efectivamente el factor pedido. La condición sobre k no se dedujo de una división por $x - 1$ en un punto prohibido; se usó una identidad polinómica válida incluso en $x = 1$.

Reconocer factores en grados superiores

La propiedad del producto nulo sigue siendo útil cuando aumenta el grado: si conseguimos escribir un polinomio como producto de factores conocidos, sus ceros se buscan en cada uno de ellos. La dificultad se traslada entonces a reconocer la factorización. En los ejemplos siguientes ensayaremos agrupaciones y sustituciones que hacen aparecer expresiones ya estudiadas; después justificaremos que los factores considerados abarcan todos los ceros. El conjunto de procedimientos se aplica a las estructuras que podamos reconocer en cada expresión.

Problema 17. Agrupar para encontrar tres factores

Enunciado. Resuelve $x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0$.

Solución. Agrupamos $x^2(x - 4) - (x - 4) = (x - 4)(x^2 - 1)$. La diferencia de cuadrados entrega $(x-4)(x-1)(x+1) = 0$. Las soluciones son 4, 1 y -1. Cada una anula un factor; recíprocamente, un producto de tres reales solo puede anularse si alguno de ellos es cero. Por eso la lista es completa. Al multiplicar los factores recuperamos exactamente el polinomio inicial.

Problema 18. Una cuadrática escondida en las potencias pares

Enunciado. Resuelve $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ en los reales.

Solución. Introducimos $u = x^2$, por lo que $u \geq 0$. La condición se convierte en $u^2 - 5u + 4 = (u - 1)(u - 4) = 0$. Ambos valores, $u = 1$ y $u = 4$, son admisibles. Regresamos a x: de $x^2 = 1$ salen $x = \pm 1$; de $x^2 = 4$, $x = \pm 2$. Las cuatro raíces verifican la ecuación original y agotan las posibilidades de u. La sustitución abrevia la escritura, pero todavía exige recuperar cada valor posible de x.

Problema 19. Dos raíces distintas, cinco factores

Enunciado. Encuentra las raíces de $(x-2)^2(x+1)^3=0$ e indica sus multiplicidades.

Solución. La raíz 2 aparece en el factor $(x-2)^2$ y tiene multiplicidad 2, porque el otro factor vale $3^3\neq 0$ en ese punto. La raíz -1 tiene multiplicidad 3, porque $(x-2)^2$ vale 9 allí. Hay dos raíces distintas. Las multiplicidades suman 5, que es el grado del producto, pero esa suma no convierte la lista en cinco valores diferentes.

Problema 20. Una ecuación racional no recupera los puntos excluidos

Enunciado. Resuelve $(x^2-9)/(x-3)=0$.

Solución. El dominio exige $x\neq 3$. En él, el cociente se anula exactamente cuando $x^2-9=0$. Sus candidatos son 3 y -3, pero solo el segundo pertenece al dominio. La solución es $x=-3$: el numerador vale cero y el denominador vale -6. Cancelar el factor $x-3$ también conduce a $x+3=0$ dentro del dominio original. La identidad de factorización no elimina la exclusión que ya tenía la fracción.

Propiedades de los polinomios que hemos utilizado

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Grado de un producto	Para polinomios no nulos A, B, $\deg(AB)=\deg A+\deg B$.
División con resto	Si D no es el polinomio cero, existen únicos Q, R con $P=DQ+R$ y $R=0$ o $\deg R<\deg D$. Los coeficientes son reales.
Resto de un divisor lineal	El resto al dividir $P(x)$ por $x-r$ es $P(r)$.
Teorema del factor	$P(r)=0$ equivale a que exista un polinomio Q con $P(x)=(x-r)Q(x)$.
Cantidad de ceros	Un polinomio no nulo de grado n tiene a lo sumo n ceros reales distintos. El polinomio cero queda excluido.
Multiplicidad	Una raíz r tiene multiplicidad m si $P(x)=(x-r)^mQ(x)$, con $m\geq 1$ entero y $Q(r)\neq 0$.
Sustitución por un cuadrado	Para resolver $A(x^2)=0$ en los reales, se resuelve $A(u)=0$ con $u\geq 0$ y después cada ecuación $x^2=u$.

Pruebas. Véanse «División de polinomios, restos y multiplicidad» y «Factorización y ecuaciones de un cuadrado» en el apéndice.

El grado también puede depender de un parámetro

El discriminante clasifica una cuadrática cuando su coeficiente principal es no nulo. Si ese coeficiente depende de un parámetro, su anulación debe estudiarse antes de aplicar la fórmula. Los casos restantes pueden clasificarse por el signo del discriminante.

Problema 21. La cuadrática se vuelve lineal

Enunciado. Clasifica y resuelve $kx^2 - 2x + 1 = 0$ para todo $k \in \mathbb{R}$.

Solución. Para $k = 0$ queda $-2x + 1 = 0$, cuya raíz es $1/2$. Si $k \neq 0$, el discriminante es $4 - 4k = 4(1 - k)$. Cuando $k < 1$, con $k \neq 0$, hay dos raíces distintas:

$$x = \frac{1 + \sqrt{1 - k}}{k}, \qquad x = \frac{1 - \sqrt{1 - k}}{k}.$$

Para $k = 1$ la ecuación es $(x - 1)^2 = 0$ y hay una raíz doble, 1. Para $k > 1$ no hay raíces reales. Estas ramas cubren todos los parámetros y la fórmula con denominador k nunca se utiliza en $k = 0$. En la rama regular la comprobación puede hacerse mediante la igualdad equivalente $(kx - 1)^2 = 1 - k$.

Problema 22. Raíces que cambian de signo y de cantidad

Enunciado. Clasifica las raíces reales de $x^2 - 2kx + 1 = 0$ y determina sus signos cuando son distintas.

Solución. El coeficiente principal es siempre 1. El discriminante vale $4(k^2 - 1)$. Si $k > 1$ o $k < -1$, hay dos raíces distintas, $k \pm \sqrt{k^2 - 1}$. Su producto es 1, así que tienen el mismo signo; su suma es $2k$, por lo que ambas son positivas cuando $k > 1$ y negativas cuando $k < -1$. Si $k = 1$, hay una raíz doble igual a 1; si $k = -1$, una raíz doble igual a -1. Para $-1 < k < 1$ no hay raíces reales. El estudio separa la existencia de las raíces de la información adicional sobre su signo.

Ampliación opcional: números que representan pares

La ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene raíz real porque un cuadrado real nunca es negativo. Podemos preguntar qué estructura numérica permitiría resolverla sin alterar las operaciones sobre los reales. Un **número complejo** es un par de reales (a, b), escrito $a + bi$. La letra i representa el par $(0, 1)$; los reales se identifican con los pares $(a, 0)$.

Definimos la suma y el producto por

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Con estas reglas $i^2 = -1$. Las leyes de cuerpo se conservan, como se comprueba con la aritmética de las coordenadas; el apéndice desarrolla esa comprobación y la existencia de inversos. La igualdad de complejos exige igualdad de sus dos coordenadas. El sistema ampliado no admite un orden de cuerpo compatible con el de los reales: tal orden exigiría que el cuadrado de i, un número no nulo, fuese positivo, aunque ese cuadrado es -1.

Problema 23. Operar en la ampliación y resolver la primera ecuación

Enunciado. Sean $z = 1 + i$ y $w = 2 - i$. Calcula $z + w$ y zw. Resuelve también $x^2 + 1 = 0$ en los complejos.

Solución. Sumamos las coordenadas: $z + w = 3 + 0i = 3$. Al multiplicar, $(1 + i)(2 - i) = 2 - i + 2i - i^2 = 3 + i$. Para la ecuación, i y $-i$ tienen cuadrado -1 y ambos sirven. La identidad $x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$ y la ausencia de divisores de cero en este cuerpo demuestran que son todas las raíces complejas. En los reales el conjunto solución sigue siendo vacío; hemos cambiado el dominio de la pregunta.

Problema 24. La misma forma de completar el cuadrado

Enunciado. Resuelve $x^2 - 2x + 5 = 0$ en los reales y en los complejos.

Solución. La ecuación equivale a $(x-1)^2 = -4$. No hay solución real. En los complejos, $(2i)^2 = -4$ y la diferencia de cuadrados da $(x - 1 - 2i)(x - 1 + 2i) = 0$. Por el producto nulo obtenemos $x = 1 + 2i$ o $x = 1 - 2i$. Para comprobar, cada uno hace que $(x - 1)^2 + 4$ valga $-4 + 4 = 0$. Son dos raíces complejas distintas; ninguna es real porque su segunda coordenada es no nula.

Reglas de la ampliación compleja

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Igualdad de pares	$a + bi = c + di$ equivale a $a = c$ y $b = d$, con las cuatro coordenadas reales.
Suma	$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.
Producto	$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$; en particular, $i^2 = -1$.
Inverso no nulo	Si $(a, b) \neq (0, 0)$, $(a + bi)^{-1} = (a - bi)/(a^2 + b^2)$.
Producto nulo complejo	Para complejos z, w, $zw = 0$ equivale a $z = 0$ o $w = 0$.
Ausencia de orden compatible	No existe un orden total que haga de los complejos un cuerpo ordenado y prolongue el orden usual de los reales.

Pruebas. Véase «Los complejos como pares y las leyes de cuerpo» en el apéndice. La igualdad, la suma y el producto anteriores forman parte de su definición; sus consecuencias se demuestran desde las coordenadas reales.

Ejercicios para trabajar sin profesor

Declara primero el dominio. En los casos reales, justifica que la lista de raíces es completa; en los modelos, revisa además longitudes, tiempos o restricciones originales. Los dos últimos ejercicios corresponden a la ampliación opcional a los complejos.

1. Un rectángulo tiene área de 60 metros cuadrados y el largo supera al ancho en cuatro metros. Determina sus dimensiones.

2. Resuelve $x^2 + 4x = 0$ y explica qué raíz se perdería al dividir por x.

3. Resuelve $3x^2 - 13x - 10 = 0$ mediante factores.

4. Resuelve $x^2 = 20$ en los reales.

5. Resuelve $x^2 - 8x + 7 = 0$ completando cuadrados.

6. Resuelve $-3x^2 + 12x - 6 = 0$ completando cuadrados.

7. Resuelve $2x^2 + 2x - 3 = 0$ mediante la fórmula general.

8. Resuelve $9x^2 - 6x + 1 = 0$ y distingue raíz doble de dos raíces distintas.

9. Resuelve $x^2 + 2x + 4 = 0$ en los reales.

10. Encuentra los ceros y los cortes con ambos ejes de $P(x) = (x - 3)(x + 2)$.

11. Encuentra primero la suma y el producto de las raíces de $3x^2 - 10x + 3 = 0$; después calcula las raíces y comprueba esas relaciones.

12. Para el modelo $h(t) = -5t^2 + 30t + 2$, con altura en metros y $t \geq 0$ en segundos, encuentra los instantes en que $h = 27$ metros.

13. Indica grado y coeficiente de x en $P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 5x + 1$. Calcula $P(1)$ y $P(0)$.

14. Divide $x^3 + 2x^2 - x - 2$ por $x + 2$ y encuentra todos sus ceros reales.

15. Encuentra el resto y el cociente de dividir $x^3 - 2x + 4$ por $x - 1$.

16. Determina k para que $x^3 + kx - 6$ sea divisible por $x - 2$ y verifica la factorización obtenida.

17. Resuelve $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$.

18. Resuelve $x^4 + x^2 - 6 = 0$ en los reales, conservando la condición de la sustitución $u = x^2$.

19. Encuentra raíces distintas y multiplicidades de $(x + 3)^4(x - 1)^2 = 0$.

20. Resuelve $(x^2 - 4)/(x - 2) = 0$.

21. Clasifica y resuelve $kx^2 + 2x + 1 = 0$, según el parámetro real k.

22. Clasifica las raíces reales de $x^2 - 2kx + 4 = 0$ y sus signos cuando son distintas.

23. Para $z = 2 + i$, $w = 1 - 2i$, calcula $z + w$ y zw. Resuelve $x^2 + 4 = 0$ en los complejos.

24. Resuelve $x^2 + 4x + 13 = 0$ en los reales y en los complejos.

Soluciones desarrolladas

Ejercicio 1. Un área y una diferencia

Con ancho $x > 0$ y largo $x + 4$, el área da $x^2 + 4x - 60 = 0$. Factorizamos $(x + 10)(x - 6) = 0$. Los candidatos son -10 y 6, pero solo 6 es una longitud admisible. El rectángulo mide seis por diez metros: la diferencia es cuatro y el producto es 60. Los factores justifican que no falta otra raíz algebraica.

Ejercicio 2. Conservar el cero

Escribimos $x^2 + 4x = x(x + 4)$. El producto se anula si $x = 0$ o $x = -4$. Ambos valores verifican la ecuación inicial. Dividir por x solo es válido para $x \neq 0$ y encontraría -4; el valor cero quedaría fuera de esa rama y debe comprobarse aparte.

Ejercicio 3. Reconocer y verificar los factores

La identidad es $3x^2 - 13x - 10 = (3x + 2)(x - 5)$, pues los términos centrales son $-15x + 2x = -13x$. Por ello, $3x + 2 = 0$ o $x - 5 = 0$, de donde $x = -2/3$ o $x = 5$. Cada valor anula un factor y el producto nulo garantiza que son todas las soluciones reales.

Ejercicio 4. Las dos ramas del cuadrado

La raíz principal de 20 es $2\sqrt{5}$. Factorizar $x^2 - 20 = (x - 2\sqrt{5})(x + 2\sqrt{5})$ entrega las soluciones $\pm 2\sqrt{5}$. Ambas tienen cuadrado $4 \cdot 5 = 20$. La ecuación pide todos los números con ese cuadrado; el símbolo de raíz principal por sí solo designa únicamente el no negativo.

Ejercicio 5. Una compensación de dieciséis

Completamos $x^2 - 8x + 7 = (x - 4)^2 - 16 + 7 = (x - 4)^2 - 9$. Por tanto, $x - 4 = 3$ o $x - 4 = -3$, y las raíces son 7 y 1. Al sustituir obtenemos $49 - 56 + 7 = 0$ y $1 - 8 + 7 = 0$. La compensación de 16 conservó la expresión en cada paso.

Ejercicio 6. Extraer el coeficiente principal

Escribimos $-3x^2 + 12x - 6 = -3(x^2 - 4x) - 6 = -3(x - 2)^2 + 6$. La ecuación equivale a $(x-2)^2 = 2$, de donde $x = 2 \pm \sqrt{2}$. En ambos casos la expresión transformada vale $-3 \cdot 2 + 6 = 0$. Como la transformación fue equivalente, esas son todas las raíces reales.

Ejercicio 7. Simplificar un radical exacto

Con $a = 2$, $b = 2$, $c = -3$, obtenemos $\Delta = 4 + 24 = 28$. La fórmula da $x = (-2 \pm \sqrt{28})/4 = (-1 \pm \sqrt{7})/2$. Para verificar, la ecuación original equivale a $(2x + 1)^2 = 7$; las dos expresiones encontradas cumplen esa igualdad. No se necesita redondear para decidir que ambas son raíces exactas.

Ejercicio 8. Una raíz repetida

La expresión es $(3x - 1)^2$. Solo se anula en $x = 1/3$. El discriminante vale $36 - 36 = 0$, y la factorización $9(x - 1/3)^2$ muestra multiplicidad 2. Hay un solo valor distinto en el conjunto solución, $\{1/3\}$.

Ejercicio 9. Una cota que impide el cero

Completamos $x^2 + 2x + 4 = (x + 1)^2 + 3 \geq 3$. Ningún real anula esa expresión. El discriminante es $4 - 16 = -12$, que confirma la ausencia de raíces reales. El conjunto solución en $\mathbb{R}$ es vacío.

Ejercicio 10. Cortes diferentes

Los factores se anulan en 3 y -2, por lo que los cortes con el eje horizontal son $(3, 0)$ y $(-2, 0)$. Para el vertical calculamos $P(0) = (-3)2 = -6$: el corte es $(0, -6)$. El número -6 es una ordenada, no una raíz. Multiplicar los factores da $x^2 - x - 6$, compatible con ese valor inicial.

Ejercicio 11. Dos controles simultáneos

La suma de las raíces es $10/3$ y el producto es $3/3 = 1$. Al factorizar, $3x^2 - 10x + 3 = (3x - 1)(x - 3)$, obtenemos $1/3$ y 3. Su suma es $10/3$ y su producto es 1. Ambos valores anulan un factor y la identidad prueba la completitud de la lista.

Ejercicio 12. Dos instantes admisibles

La condición es $-5t^2 + 30t + 2 = 27$. Dividir la ecuación reorganizada por -5 da $t^2 - 6t + 5 = (t-1)(t-5) = 0$. Los tiempos son 1 y 5 segundos, ambos no negativos. Se comprueban $h(1) = -5 + 30 + 2 = 27$ y $h(5) = -125 + 150 + 2 = 27$. La forma $h(t) = 47 - 5(t-3)^2$ explica que los dos instantes estén a igual distancia del máximo en $t = 3$.

Ejercicio 13. Evaluar conservando los signos

El grado es 3 y el coeficiente de x es -5. Sustituir $x = 1$ produce $3 + 2 - 5 + 1 = 1$. Sustituir $x = 0$ deja solo el término independiente, así que $P(0) = 1$. En particular, ninguno de esos dos argumentos es un cero del polinomio.

Ejercicio 14. Un cociente que se vuelve a factorizar

El primer término del cociente es x^2; restar $(x+2)x^2$ deja $-x - 2$. Agregamos -1 al cociente y el resto se anula. La identidad es $x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x+2)(x^2-1) = (x+2)(x-1)(x+1)$. Por tanto, los ceros son -2, 1 y -1. Multiplicar recupera el polinomio y el producto nulo demuestra que no hay otros ceros reales.

Ejercicio 15. Cociente y resto

El resto es $P(1) = 1 - 2 + 4 = 3$. La división por términos principales da el cociente $x^2 + x - 1$. Comprobamos la identidad completa:

$$x^3 - 2x + 4 = (x-1)(x^2 + x - 1) + 3.$$

El resto tiene grado cero, menor que el grado uno del divisor. Como no es cero, $x - 1$ no es un factor del polinomio.

Ejercicio 16. Un coeficiente determinado por el resto

El resto al dividir por $x - 2$ es $P(2) = 8 + 2k - 6 = 2 + 2k$. Se anula exactamente cuando $k = -1$. Con ese valor, $x^3 - x - 6 = (x-2)(x^2 + 2x + 3)$. Al multiplicar aparecen $x^3 + 0x^2 - x - 6$, de modo que la condición es suficiente además de necesaria. El factor cuadrático tiene discriminante $4 - 12 = -8$ y no agrega ceros reales.

Ejercicio 17. Factor común entre grupos

Agrupamos $x^2(x+2) - 9(x+2) = (x+2)(x^2-9)$. La diferencia de cuadrados entrega $(x+2)(x-3)(x+3) = 0$. Los ceros son -2, 3 y -3. Cada uno anula un factor y las tres posibilidades del producto nulo agotan las raíces reales.

Ejercicio 18. Rechazar un valor imposible de la sustitución

Sea $u = x^2 \geq 0$. La ecuación queda $u^2 + u - 6 = (u+3)(u-2) = 0$. Los candidatos de u son -3 y 2. El primero es imposible porque un cuadrado real es no negativo. Del segundo obtenemos $x = \pm\sqrt{2}$. Ambos cumplen $x^4 + x^2 - 6 = 4 + 2 - 6 = 0$. La lista es completa tras examinar cada rama de u.

Ejercicio 19. Contar valores y repeticiones

Las raíces distintas son -3 y 1. La primera tiene multiplicidad 4 porque el factor restante $(x-1)^2$ vale 16 en $x=-3$. La segunda tiene multiplicidad 2 porque $(x+3)^4$ vale $4^4 \neq 0$ en $x=1$. El grado del producto es 6; hay dos valores distintos, con seis repeticiones en total al contar sus multiplicidades.

Ejercicio 20. El dominio sigue presente

Excluimos $x=2$. Dentro del dominio, el cociente vale cero si y solo si $x^2-4=0$. Los candidatos son 2 y -2, pero el primero está prohibido. Solo sirve $x=-2$, que produce numerador cero y denominador -4. La solución es $\{-2\}$.

Ejercicio 21. Separar el caso lineal

Si $k=0$, obtenemos $2x+1=0$ y la raíz $-1/2$. Para $k\neq 0$ el discriminante es $4(1-k)$. Si $k<1$ y $k\neq 0$, hay dos raíces distintas $(-1\pm\sqrt{1-k})/k$. Si $k=1$, la ecuación es $(x+1)^2=0$ y tiene raíz doble -1. Si $k>1$, no hay raíces reales. En la rama regular se comprueba mediante $(kx+1)^2=1-k$; la división por k no se extiende a la rama lineal.

Ejercicio 22. El producto positivo fija un signo común

El discriminante es $4(k^2-4)$. Para $k>2$ o $k<-2$, las raíces son $k\pm\sqrt{k^2-4}$. Su producto es 4 y su suma es $2k$, de modo que son ambas positivas si $k>2$ y ambas negativas si $k<-2$. Para $k=2$ hay raíz doble 2; para $k=-2$, raíz doble -2. Para $-2<k<2$ no hay raíces reales. Los cinco casos cubren todos los parámetros.

Ejercicio 23. Coordenadas reales y operaciones complejas

La suma es $(2+1)+(1-2)i=3-i$. El producto es $(2+i)(1-2i)=2-4i+i-2i^2=4-3i$. Para $x^2+4=0$, factorizamos $x^2+4=(x-2i)(x+2i)$. El producto nulo complejo entrega $x=\pm 2i$, cuyos cuadrados son -4. En los reales no existe solución de esa ecuación.

Ejercicio 24. Un centro real y dos raíces no reales

Completamos $x^2 + 4x + 13 = (x + 2)^2 + 9$. No puede anularse para ningún real. En los complejos equivale a $(x + 2)^2 = -9 = (3i)^2$, y la diferencia de cuadrados da las raíces $-2 + 3i$ y $-2 - 3i$. Cada una produce $(x + 2)^2 + 9 = -9 + 9 = 0$. La factorización y el producto nulo prueban que son todas las raíces complejas.

Diagnóstico de salida

Al resolver, debes poder justificar por qué no se pierde una raíz al factorizar, por qué un cuadrado exige dos ramas y cuándo el discriminante deja de ser aplicable por un cambio de grado. En una división polinómica, comprueba siempre la identidad con su resto. Al regresar a un modelo, conserva el dominio original. La multiplicidad, la cantidad de valores distintos y el sistema numérico en que se buscan las raíces responden a preguntas diferentes y deben aparecer claramente en la solución.

CAPÍTULO 9

Expresiones racionales, factorización y restricciones

Compartamos entre varias personas el arriendo de un autobús. Si el precio total está fijado, cada nuevo participante reduce la cantidad que paga cada uno, y el reparto se expresa dividiendo el costo por el número de viajeros. Esa letra situada en el denominador obliga a conservar información sobre los valores permitidos: el modelo requiere una cantidad entera positiva de participantes y la división exige un denominador distinto de cero.

Al trabajar con cocientes de polinomios encontraremos restricciones semejantes dentro del propio cálculo. Una factorización podrá hacer más breve una fracción, aunque los valores excluidos por su denominador original seguirán acompañándola. Estudiaremos qué conservan esas simplificaciones y cómo usar los signos de los factores para comparar un cociente con cero. El problema del autobús dará una primera ocasión de reunir el dominio de un modelo con las condiciones de una operación algebraica.

Compartir un costo fijo

Problema 1. Repartir un costo fijo

Enunciado. Un grupo reparte por igual un arriendo de 120 000 pesos. Escribe el pago por persona en función del número de participantes. ¿Cuántos deben participar, como mínimo, para que cada uno pague a lo sumo 8 000 pesos?

Solución. Si hay n participantes, cada uno paga $120\,000/n$ pesos. El dominio del modelo son los enteros positivos: cero dejaría una división sin sentido y una cantidad fraccionaria no contaría personas. Con doce participantes el pago sería de 10 000 pesos; con quince, de 8 000. Para justificar el mínimo resolvemos $120\,000/n \leq 8\,000$. Como $n > 0$, multiplicar por n conserva el sentido: $120\,000 \leq 8\,000n$, de donde $n \geq 15$. Al intersectar con los enteros positivos, el menor valor es quince. La fórmula admite otros argumentos reales en un estudio algebraico, pero el modelo de pasajeros conserva su dominio propio.

Una **expresión racional** es un cociente $P(x)/Q(x)$ de polinomios, con Q no idénticamente nulo. Su dominio natural real está formado por los valores que no anulan Q. Puede haber otras restricciones cuando la expresión forma parte de un modelo o de una operación más amplia. El numerador puede valer cero; el denominador no. Esta diferencia determina tanto el dominio como los ceros del cociente.

Problema 2. Encontrar las exclusiones antes de simplificar

Enunciado. Determina el dominio real de $(2x+1)/(x^2-x-6)$ y encuentra sus ceros.

Solución. Factorizamos el denominador: $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$. Se anula en 3 y -2, así que el dominio es $\mathbb{R}\setminus\{-2,3\}$. Un cociente definido vale cero exactamente cuando su numerador es cero. De $2x+1=0$ sale $x=-1/2$, que no es ninguna de las exclusiones. Es el único cero. El valor 3 no es un cero del cociente: allí no hay cociente definido que pueda compararse con cero.

Una cancelación cambia la escritura

Al cancelar un factor común aprovechamos que dividirlo por sí mismo da uno en los argumentos donde su valor es distinto de cero. Esa condición explica qué parte del dominio debemos conservar junto a la fórmula abreviada. La nueva escritura puede admitir un argumento excluido por la original, y podremos estudiarla allí como una extensión; para representar el cociente del que partimos seguiremos usando sus restricciones. Compararemos ambas posibilidades en una fracción que, después de factorizar, toma la forma de una recta.

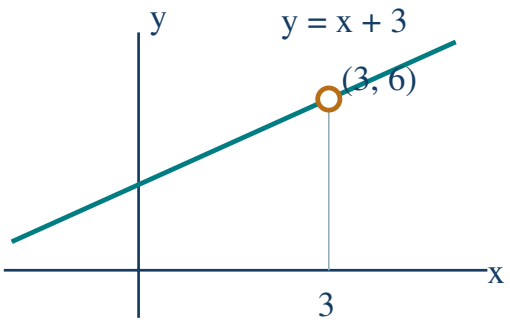
Problema 3. Una recta con un punto ausente

Enunciado. Simplifica $(x^2-9)/(x-3)$ e interpreta su gráfica sobre el dominio natural.

Solución. La expresión original exige $x\neq 3$. En ese dominio,

$$\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=x+3.$$

Por tanto, su gráfica es la recta $y=x+3$ con el punto de abscisa 3 omitido. Su posición sobre la recta sería $(3,6)$ y se representa con un círculo abierto. Por ejemplo, en $x=2$ ambas escrituras dan 5, y en $x=4$ dan 7. Esas igualdades son comprobaciones dentro del dominio; no permiten asignar el valor 6 a la fracción original en $x=3$.



Problema 4. Los sumandos no son factores

Enunciado. Un estudiante afirma que $(x+2)/x=2$ porque «se cancela la equis». Examina esa afirmación y escribe una transformación válida.

Solución. El dominio exige $x\neq 0$. Dividir la suma término a término da $(x+2)/x=x/x+2/x=1+2/x$. El valor depende de x: para $x=2$ vale 2, pero para $x=1$ vale 3. Una coincidencia en un argumento no prueba una identidad. La cancelación válida requeriría que todo el numerador tuviese un factor x, por ejemplo $x(x+2)/x=x+2$, siempre con $x\neq 0$. En $x+2$, la letra es un sumando y no un factor de la suma completa.

Problema 5. Un factor desaparece y dos exclusiones permanecen

Enunciado. Simplifica $(x^2 - 4x + 4)/(x^2 - 4)$ e indica su dominio y sus ceros.

Solución. El denominador se anula en ± 2. Factorizamos el numerador como $(x-2)^2$ y el denominador como $(x-2)(x+2)$. En el dominio original la fracción equivale a $(x-2)/(x+2)$, con $x \neq -2$ y $x \neq 2$. El numerador reducido solo se anula en 2, pero ese argumento está excluido. Por tanto, la expresión original no tiene ceros. La fórmula reducida considerada por separado sí tendría un cero en 2: es precisamente la diferencia que obliga a conservar el dominio al escribir la simplificación.

Propiedades del dominio y de la cancelación

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Dominio natural	Para P/Q, el dominio real es $\{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$. Las restricciones del contexto se intersectan con él.
Ceros de un cociente	En el dominio, $P(x)/Q(x) = 0$ equivale a $P(x) = 0$. Se exige $Q(x) \neq 0$.
Cancelación de factores	$A(x)C(x)/(B(x)C(x)) = A(x)/B(x)$ donde $B(x) \neq 0$ y $C(x) \neq 0$. La fórmula reducida conserva esas restricciones si representa la expresión original.
Separación de una suma	$(A+B)/C = A/C + B/C$ donde $C \neq 0$. No autoriza cancelar un sumando del numerador con el denominador.

Pruebas. Véase «Fracciones algebraicas y operaciones en su dominio» en el apéndice. La regla del dominio fija dónde se define el cociente.

Operar sin perder las condiciones originales

Las fracciones algebraicas obedecen las reglas de las fracciones numéricas en cada argumento en que existen. Al sumar se necesita un denominador común; al dividir hay una condición adicional: la fracción divisora debe estar definida y ser distinta de cero. Conviene registrar esas condiciones antes de transformar la escritura, porque después pueden quedar ocultas.

Problema 6. Un producto que siempre vale uno donde existe

Enunciado. Simplifica $\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2} \cdot \dfrac{x+2}{x-1}$, conservando el dominio.

Solución. Los denominadores se factorizan como $(x+1)(x+2)$ y $x-1$. Excluimos -1, -2 y 1. El numerador $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ permite escribir el producto como

$$\frac{(x-1)(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x-1)} = 1.$$

Cada cancelación es lícita en el dominio registrado. El resultado es la constante 1 sobre $\mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1\}$; no es una fórmula que asigne valor a los tres argumentos excluidos.

Problema 7. Dividir exige revisar también el cero del divisor

Enunciado. Simplifica $\dfrac{x^2-1}{x-2} \div \dfrac{x+1}{x-3}$.

Solución. La primera fracción exige $x \neq 2$ y la segunda, $x \neq 3$. Además, el divisor no puede valer cero: $x+1 \neq 0$, de modo que $x \neq -1$. Con las tres exclusiones fijadas, multiplicamos por el recíproco:

$$\frac{(x-1)(x+1)}{x-2} \cdot \frac{x-3}{x+1} = \frac{(x-1)(x-3)}{x-2}.$$

La fórmula final mantiene $x \notin \{-1, 2, 3\}$. En particular, que su numerador se anule en 3 no vuelve admisible ese argumento: allí la fracción divisora original no existe. El único cero del cociente compuesto es 1, que sí pertenece al dominio.

Problema 8. Construir un denominador común

Enunciado. Suma $1/(x-1) + 1/(x+1)$ y encuentra los ceros del resultado sobre su dominio.

Solución. Excluimos $x = \pm 1$. Multiplicamos la primera fracción por $(x+1)/(x+1)$ y la segunda por $(x-1)/(x-1)$. Esos factores valen uno en el dominio. La suma queda

$$\frac{x+1+x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x}{x^2-1}.$$

El único cero es $x = 0$, admisible. En efecto, la suma inicial vale $-1+1 = 0$. Sumar denominadores habría cambiado la operación: el denominador común se obtiene de fracciones equivalentes antes de sumar sus numeradores.

Problema 9. Restar la totalidad del segundo numerador

Enunciado. Simplifica $3/x - 2/(x+1)$.

Solución. El dominio excluye 0 y -1. Con denominador $x(x+1)$ obtenemos $[3(x+1)-2x]/[x(x+1)] = (x+3)/[x(x+1)]$. La resta afecta al segundo numerador completo. Una comprobación en $x = 1$ da $3 - 1 = 2$ en la expresión inicial y $4/2 = 2$ en la final. La justificación general está en el uso de un denominador común no nulo, no en esa comprobación aislada.

Problema 10. Una fracción dentro de otra

Enunciado. Simplifica $(1 + 1/x)/(1 - 1/x)$.

Solución. Las fracciones interiores exigen $x \neq 0$. El denominador exterior no puede anularse: $1 - 1/x = 0$ daría $x = 1$, también excluido. Multiplicar numerador y denominador exteriores por x es lícito en ese dominio y produce $(x+1)/(x-1)$. La respuesta conserva $x \neq 0, 1$. Aunque la fórmula reducida tenga valor -1 en cero, la expresión inicial no tiene allí ninguna de sus dos fracciones interiores definidas.

Reglas para operar fracciones algebraicas

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Suma y resta	$A/B \pm C/D = (AD \pm BC)/(BD)$, con $B, D \neq 0$ en cada argumento.
Producto	$(A/B)(C/D) = AC/(BD)$, con $B, D \neq 0$. Las cancelaciones posteriores conservan el dominio original.
División	$(A/B) \div (C/D) = AD/(BC)$, con $B, D, C \neq 0$: el divisor debe existir y no valer cero.
Amplificación	$A/B = AH/(BH)$ donde $B, H \neq 0$. Multiplicar numerador y denominador de una fracción compleja por H requiere además que sus expresiones originales existan.

Pruebas. Véase «Fracciones algebraicas y operaciones en su dominio» en el apéndice.

Resolver dentro de un dominio que ya conocemos

Una ecuación racional pregunta por los argumentos de un dominio en los que dos valores coinciden. Si multiplicamos por todos los denominadores, el factor utilizado es no nulo dentro de ese dominio y el paso es reversible allí. La ecuación polinómica resultante puede tener raíces fuera de él. Esas raíces no son soluciones de la pregunta original.

Problema 11. Eliminar denominadores por una operación reversible

Enunciado. Resuelve $2/(x-1) = 3/(x+1)$.

Solución. Excluimos $x = \pm 1$. Multiplicar por $(x-1)(x+1)$ da $2(x+1) = 3(x-1)$, de donde $2x + 2 = 3x - 3$ y $x = 5$. Es admisible; la comprobación entrega $2/4 = 3/6 = 1/2$. La ecuación lineal tiene una sola raíz y el procedimiento es equivalente en el dominio, así que no quedan otras soluciones.

Problema 12. Una ecuación transformada cuyo candidato está prohibido

Enunciado. Resuelve $(x^2 - 1)/(x - 1) = 2$.

Solución. El dominio exige $x \neq 1$. Factorizar y cancelar dentro de él da $x + 1 = 2$, cuyo único candidato es 1. Como está excluido, el conjunto solución es vacío. Si se hubiese multiplicado por $x - 1$ sin anotar el dominio, aparecería $(x-1)^2 = 0$ y el mismo candidato prohibido. La comprobación en la expresión original no produce una igualdad falsa: produce una división que no está definida, suficiente para descartarlo.

Problema 13. Dos soluciones irracionales y ningún denominador nulo

Enunciado. Resuelve $1/(x-1)+1/(x+1)=1$.

Solución. Sobre $x \neq \pm 1$ la suma del problema 8 permite escribir $2x/(x^2-1)=1$. Multiplicar por el denominador no nulo da $x^2-2x-1=0$, equivalente a $(x-1)^2=2$. Los candidatos son $1\pm\sqrt{2}$. Ninguno es 1 ni -1: el primero exigiría $\sqrt{2}=0$ y el segundo que $\sqrt{2}=2$ o -2, imposibles al cuadrar. Para verificar, cada candidato cumple $x^2-1=2x\neq 0$, por lo que la suma original vale $2x/(x^2-1)=1$. Las equivalencias y las dos ramas del cuadrado prueban que la lista es completa.

Problema 14. Un numerador que decide la igualdad

Enunciado. Resuelve $1/x+1/(x-2)=0$.

Solución. El dominio excluye 0 y 2. La suma es $(2x-2)/[x(x-2)]$. En él, el cociente se anula exactamente cuando $2x-2=0$, así que $x=1$. Sustituir en la suma inicial da $1-1=0$. La raíz es admisible y única.

Propiedades de las ecuaciones racionales

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Eliminación de denominadores	En un dominio D donde $H(x)\neq 0$, $F(x)=G(x)$ equivale a $H(x)F(x)=H(x)G(x)$. Un producto de denominadores originales sirve en su dominio común.
Selección de candidatos	Si la ecuación transformada tiene conjunto solución S, el original es $S\cap D$ cuando la transformación fue equivalente en D.
Identidad o contradicción	Una igualdad verdadera para todo $x\in D$ tiene solución D; una igualdad imposible allí tiene solución vacía. La simplificación no añade argumentos ajenos a D.

Pruebas. Véase «Ecuaciones y signos de expresiones racionales» en el apéndice.

Un denominador puede cambiar el sentido de una desigualdad

Al eliminar denominadores en una igualdad aprovechábamos que el factor era no nulo en el dominio; en una desigualdad necesitamos conocer además su signo para decidir si se conserva o se invierte el sentido. Un factor como $x-r$ es negativo a la izquierda de r y positivo a su derecha. Por eso la factorización permite organizar el cálculo en intervalos: sus ceros marcan las posiciones donde debemos revisar un signo o una exclusión, y dentro de cada intervalo los factores reales lineales mantienen su signo. El cociente se estudia combinando esos signos antes de seleccionar los intervalos que cumplen la condición.

Problema 15. Separar un cero de un punto prohibido

Enunciado. Resuelve $(x-2)/(x+1) \geq 0$.

Solución. El valor -1 está excluido; el valor 2 anula el numerador y es admisible. Son los puntos que separan los intervalos de signos. A la izquierda de -1, ambos factores son negativos y el cociente es positivo. Entre -1 y 2, el numerador es negativo y el denominador positivo. A la derecha de 2, ambos son positivos.

Intervalo	Signos de numerador, denominador y cociente
$x < -1$	Negativo entre negativo: positivo.
$-1 < x < 2$	Negativo entre positivo: negativo.
$x > 2$	Positivo entre positivo: positivo.

Incluimos 2 porque se permite la igualdad; excluimos -1 porque no pertenece al dominio. El conjunto solución es $(-\infty, -1) \cup [2, \infty)$. La tabla describe intervalos completos: los signos se deducen de las desigualdades que definen cada intervalo.

Problema 16. Un cero de multiplicidad par

Enunciado. Resuelve $(x-1)^2/(x+2) \leq 0$.

Solución. Excluimos -2. El numerador es positivo salvo en 1, donde vale cero. Para $x < -2$, el denominador es negativo y el cociente, negativo. Para $x > -2$, el cociente es positivo salvo en $x = 1$, donde vale cero. Por tanto, la solución es $(-\infty, -2) \cup \{1\}$. El signo no cambia al atravesar 1 porque el factor está elevado al cuadrado. El cero aislado debe examinarse aunque los intervalos a ambos lados no satisfagan la desigualdad.

Problema 17. Comparar una fracción con una constante

Enunciado. Resuelve $1/(x-1) > 2$.

Solución. Excluimos 1 y reunimos todo en un miembro:

$$\frac{1}{x-1} - 2 = \frac{3-2x}{x-1} > 0.$$

Los puntos críticos son 1 y $3/2$. Para $x < 1$, el numerador es positivo y el denominador negativo. Para $1 < x < 3/2$, ambos son positivos. Para $x > 3/2$, el numerador es negativo y el denominador positivo. Solo sirve $(1, 3/2)$. El extremo 1 está prohibido; el extremo $3/2$ entrega igualdad y se excluye porque la desigualdad es estricta. Multiplicar directamente por $x-1$ conservando siempre el sentido habría ignorado la mitad del dominio donde ese factor es negativo.

Problema 18. Una exclusión que interrumpe un intervalo

Enunciado. Resuelve $(x^2-1)/(x-1) \geq 0$.

Solución. Conservamos $x \neq 1$. En ese dominio la expresión es $x+1$, así que necesitamos $x \geq -1$. Al intersectar ambas condiciones obtenemos $[-1,1) \cup (1,\infty)$. El valor -1 se incluye porque anula el numerador sin anular el denominador. El valor 1 sigue excluido aunque la fórmula reducida fuese positiva allí. La solución se escribe en dos intervalos para mostrar esa ausencia.

Propiedades para estudiar signos

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Puntos que separan el estudio	En un cociente factorizado en factores reales lineales, sus ceros y los de sus denominadores separan los intervalos. Los puntos excluidos permanecen fuera de la solución.
Paridad de un factor	Para $m \geq 1$ entero y $x \neq r$, $(x-r)^m$ conserva el signo de $x-r$ si m es impar; es positivo si m es par.
Signo de un cociente	Con denominador no nulo y numerador no nulo, el cociente es positivo si tienen el mismo signo y negativo si tienen signos opuestos.
Inclusión de extremos	Al comparar con cero, los ceros admisibles se incluyen para $\leq$ o $\geq$ y se excluyen para $<$ o $>$. Ningún cero del denominador original se incluye.

Pruebas. Véase «Ecuaciones y signos de expresiones racionales» en el apéndice. Las cuadráticas sin raíces reales, si aparecen como factores, se estudian por su cuadrado completo antes de combinar signos.

Un punto ausente y una rama que se aleja sin cota

La anulación de un denominador no decide por sí sola la forma de la gráfica cerca de ese argumento. En el problema 3, la cancelación dejó una recta con un único punto ausente. En una fracción como $1/(x-3)$ no hay un factor del numerador que pueda cancelarse. Al acercar x a 3, el valor absoluto del recíproco crece sin cota. Estas situaciones exigen interpretaciones distintas.

Problema 19. Distinguir un hueco de una asíntota vertical

Enunciado. Compara, cerca de $x=1$, las expresiones $f(x)=(x^2-1)/(x-1)$ y $g(x)=1/(x-1)$.

Solución. Ambas excluyen 1. Para $x \neq 1$, $f(x)=x+1$. Si x se acerca a 1, la diferencia entre $f(x)$ y 2 es exactamente $x-1$, de modo que podemos hacerla tan pequeña como queramos. Falta el punto $(1,2)$ y asignarle el valor 2 completaría la recta. Esta ausencia se llama **discontinuidad removible** o hueco, en el sentido elemental que acabamos de describir.

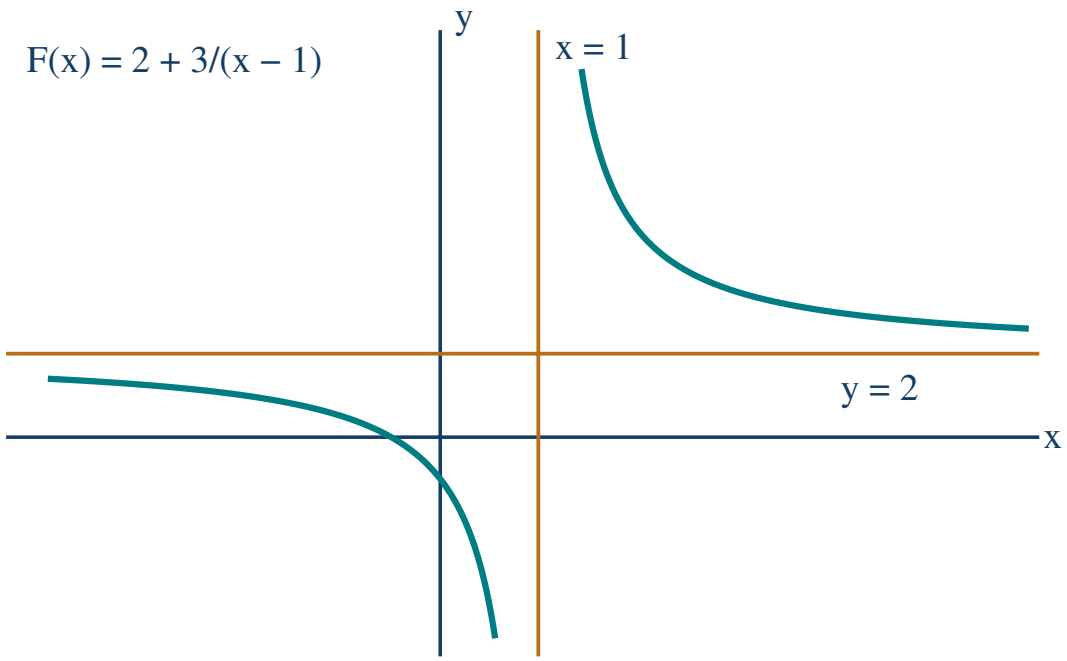
Para g, los argumentos $1+1/10$ y $1+1/100$ dan 10 y 100; por la izquierda, $1-1/10$ y $1-1/100$ dan -10 y -100. La explicación general es $|g(x)| = 1/|x-1|$: para superar cualquier cota positiva M, basta $0 < |x-1| < 1/M$. La recta $x=1$ es una **asíntota vertical**. No hay una altura finita que pueda rellenar ese comportamiento con un solo punto. Los valores de ejemplo ilustran la diferencia; la desigualdad demuestra que no existe una cota de tamaño al acercarnos al argumento excluido.

Problema 20. Leer dos asíntotas desde una división

Enunciado. Describe el comportamiento de $F(x) = (2x + 1)/(x - 1)$ cerca de 1 y para argumentos de gran valor absoluto.

Solución. La división da $F(x) = 2+3/(x-1)$, con $x \neq 1$. Cerca de 1, el término recíproco puede superar cualquier cota en valor absoluto: por la derecha es positivo y por la izquierda negativo. Por ejemplo, $F(1{,}01) = 302$ y $F(0{,}99) = -298$. La asíntota vertical es $x = 1$.

Para argumentos alejados, $|F(x) - 2| = 3/|x - 1|$. Si queremos que la diferencia sea menor que una tolerancia $\varepsilon > 0$, basta exigir $|x - 1| > 3/\varepsilon$. La recta $y = 2$ es una **asíntota horizontal**: describe una aproximación cuando el argumento se aleja indefinidamente. Aquí la gráfica nunca la alcanza, pues $3/(x - 1)$ nunca vale cero. El concepto de asíntota horizontal, por sí solo, no prohíbe que otras funciones la corten.



Propiedades de las representaciones racionales

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Hueco con extensión finita	Si $f(x) = h(x)$ para $x \neq r$ cerca de r y $h(x)$ se aproxima a un número finito L, el punto ausente puede completarse asignando $f(r) = L$. Esto define una extensión; no altera el dominio inicial.
Polo recíproco	Para $B \neq 0$, $A + B/(x - r)$ crece sin cota en valor absoluto cuando x se acerca a r sin igualarlo; $x = r$ es una asíntota vertical.
Aproximación horizontal	Para $A + B/(x - r)$, la diferencia respecto de A tiene valor absoluto $\lvert B\rvert/\lvert x - r\rvert$. Tiende a cero al alejarse el argumento: $y = A$ es asíntota horizontal.
Igualdad de funciones	Con el mismo conjunto de llegada, dos funciones son iguales si tienen el mismo dominio y el mismo valor en cada argumento de ese dominio. Una igualdad de fórmulas en el dominio común no basta si sus dominios son distintos.

Pruebas. Véanse «Huecos y aproximaciones de una fracción» y «Dominio, igualdad de funciones y parámetros» en el apéndice. Las nociones de hueco y asíntota se emplean con el significado de aproximación explicitado en el texto; el estudio formal de límites se desarrollará en cálculo.

Las fracciones también describen ritmos

Con ritmos constantes y aportes aditivos, la parte de tarea realizada en una hora por varias máquinas es la suma de las partes que realiza cada una en ese tiempo. De modo semejante, una concentración compara una cantidad de sustancia con un volumen y un tiempo de viaje compara distancia con rapidez. La ecuación depende del significado del cociente.

Problema 21. Dos máquinas que comparten una tarea

Enunciado. Una máquina completa una tarea en seis horas y otra en tres. Si mantienen ritmos constantes y sus aportes se suman sin interferencia, ¿cuánto tardan trabajando juntas?

Solución. La primera realiza $1/6$ de la tarea por hora y la segunda $1/3$. Juntas realizan $1/6 + 1/3 = 1/2$ de la tarea por hora. Si el tiempo es $t > 0$, la tarea completa exige $t/2 = 1$, así que $t = 2$ horas. La comprobación es $2/6 + 2/3 = 1$. Sumar seis y tres habría sumado tiempos de ejecuciones separadas, sin describir el trabajo simultáneo. El resultado depende de que los ritmos se mantengan y los aportes realmente puedan sumarse.

Problema 22. Dos viajes de igual distancia

Enunciado. Dos vehículos recorren 120 kilómetros a rapidez constante. El segundo viaja 20 kilómetros por hora más rápido y tarda una hora menos. Encuentra las dos rapideces.

Solución. Sea $v > 0$ la rapidez del primero en kilómetros por hora. Sus tiempos, en horas, son $120/v$ y $120/(v+20)$. La condición es

$$\frac{120}{v} - \frac{120}{v+20} = 1.$$

Los denominadores son positivos en el dominio físico. Multiplicar por $v(v+20)$ produce $2400 = v(v+20)$, es decir, $(v+60)(v-40) = 0$. Los candidatos algebraicos son -60 y 40; solo el segundo pertenece a $v > 0$. Las rapideces son 40 y 60 kilómetros por hora. Los tiempos resultan tres y dos horas, cuya diferencia es una. Las unidades y el dominio se fijaron antes de eliminar denominadores.

Problema 23. Diluir sin cambiar la cantidad de sustancia

Enunciado. Se tienen veinte litros de una mezcla que contiene un 30 % de cierta sustancia por volumen. ¿Cuánta agua debe añadirse para obtener una concentración del 20 %? Supón volúmenes aditivos y agua sin esa sustancia.

Solución. La cantidad de sustancia es $0{,}30 \cdot 20 = 6$ litros y permanece fija. Si añadimos $x \geq 0$ litros de agua, el volumen total es $20 + x$ y la concentración exige $6/(20+x) = 0{,}20$. El denominador es positivo en el dominio. De $6 = 0{,}20(20+x)$ obtenemos $x = 10$. Se comprueba $6/30 = 0{,}20$. El porcentaje final tiene como base los treinta litros resultantes, no los veinte iniciales. La aditividad de volúmenes es una hipótesis del modelo y no una regla universal de mezclas.

Una misma fórmula parcial puede responder preguntas diferentes

La simplificación del problema 3 conservaba todos los valores ya definidos y dejaba un punto sin asignar. Si decidimos añadir ese punto, construimos otra función. La comparación exige declarar el dominio de cada una. Esta distinción se vuelve especialmente visible cuando una ecuación contiene un parámetro: un candidato puede coincidir con la exclusión solo para un valor del parámetro.

Problema 24. Un parámetro que coloca la solución en el hueco

Enunciado. Resuelve $(x^2-1)/(x-1) = k$ para todo parámetro real k. Compara además la función de la izquierda, en su dominio natural, con $g(x) = x + 1$ definida en todos los reales.

Solución. El dominio de la ecuación siempre excluye $x = 1$. En él la condición equivale a $x+1 = k$, cuyo único candidato es $x = k - 1$. Si $k \neq 2$, ese candidato es distinto de 1 y sirve: el cociente original vale $x + 1 = k$. Si $k = 2$, el candidato es el punto prohibido y no hay solución. La clasificación es exhaustiva porque la ecuación lineal transformada tiene un solo candidato para cada k.

La función original tiene dominio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$; g tiene dominio $\mathbb{R}$. Sus valores coinciden donde ambas existen, pero no son la misma función con esos dominios. Restringir g a $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ sí produce la

función original. Extender esta última mediante el valor 2 en 1 produce g. Cada operación declara expresamente qué hace con el dominio.

Ejercicios para trabajar sin profesor

Anota primero las exclusiones y las restricciones del contexto. Conserva el dominio al simplificar. En ecuaciones, comprueba todos los candidatos; en desigualdades, justifica los signos sobre intervalos completos y examina sus extremos.

1. Un grupo reparte 180 000 pesos de arriendo. Escribe el pago por persona y determina el mínimo de participantes para pagar a lo sumo 9 000 pesos cada uno.

2. Encuentra dominio y ceros de $(x-1)/(x^2+x-12)$.

3. Simplifica $(x^2-16)/(x-4)$ y describe el punto ausente de su gráfica.

4. Examina la afirmación $(x+3)/x = 2$ y escribe una transformación válida.

5. Simplifica $(x^2+6x+9)/(x^2-9)$; conserva el dominio y encuentra sus ceros.

6. Simplifica $\dfrac{x^2-4}{x^2+5x+6} \cdot \dfrac{x+3}{x-2}$.

7. Simplifica $\dfrac{x^2-4}{x-1} \div \dfrac{x+2}{x-4}$, registrando todas las exclusiones.

8. Suma $1/(x-2) + 1/(x+2)$ y encuentra sus ceros.

9. Simplifica $4/x - 3/(x+2)$.

10. Simplifica $(1+2/x)/(1-2/x)$.

11. Resuelve $3/(x-2) = 4/(x+2)$.

12. Resuelve $(x^2-4)/(x-2) = 4$.

13. Resuelve $1/(x-2) + 1/(x+2) = 1$.

14. Resuelve $1/x + 1/(x-4) = 0$.

15. Resuelve $(x+1)/(x-3) \geq 0$.

16. Resuelve $(x+2)^2/(x-1) \geq 0$.

17. Resuelve $1/(x-2) > 3$.

18. Resuelve $(x^2-4)/(x-2) \geq 0$.

19. Compara, cerca de 2, $(x^2-4)/(x-2)$ y $1/(x-2)$: distingue hueco de asíntota vertical y justifica el comportamiento.

20. Estudia $(3x+2)/(x+1)$ cerca de -1 y para argumentos de gran valor absoluto. Encuentra sus asíntotas y una condición que garantice una diferencia menor que $\varepsilon > 0$ respecto de la horizontal.

21. Dos máquinas completan una tarea por separado en ocho y doce horas. Con ritmos constantes y aportes aditivos, ¿cuánto tardan juntas?

22. Dos vehículos recorren 180 kilómetros. El segundo viaja treinta kilómetros por hora más rápido y tarda una hora menos. Encuentra sus rapideces constantes.

23. Treinta litros de una mezcla contienen un 40 % de sustancia por volumen. ¿Cuánta agua debe añadirse para obtener un 30 %, suponiendo volúmenes aditivos?

24. Resuelve $(x^2-4)/(x-2) = k$ según $k \in \mathbb{R}$. Compara la función de la izquierda con $x+2$ definida sobre todos los reales.

Soluciones desarrolladas

Ejercicio 1. Un mínimo entero

Con n participantes, cada uno paga $180\,000/n$ pesos y n debe ser entero positivo. La condición $180\,000/n \leq 9\,000$ equivale, al multiplicar por $n > 0$, a $n \geq 20$. El menor entero admisible es veinte. Cada uno paga entonces 9 000 pesos; con diecinueve el pago es mayor porque el mismo costo se divide entre menos personas. El dominio del modelo impide aceptar cero o fracciones de participante.

Ejercicio 2. El denominador decide el dominio

Factorizamos $x^2 + x - 12 = (x + 4)(x - 3)$. El dominio excluye -4 y 3. El numerador se anula en 1, que es admisible, de modo que ese es el único cero. En 1 el denominador vale $-10 \neq 0$; en las exclusiones no existe valor de la fracción.

Ejercicio 3. Una recta incompleta

El dominio exige $x \neq 4$. En él, $(x^2 - 16)/(x - 4) = (x - 4)(x + 4)/(x - 4) = x + 4$. Su gráfica es la recta de esa ecuación sin el punto $(4, 8)$. La fórmula reducida conserva la exclusión si representa la fracción original; asignar el valor 8 en 4 sería construir su extensión.

Ejercicio 4. Dividir cada sumando

Para $x \neq 0$, $(x + 3)/x = 1 + 3/x$. En $x = 3$ vale 2, pero en $x = 1$ vale 4. El segundo caso refuta la identidad propuesta. Cancelar requiere un factor de todo el numerador; la suma $x + 3$ no lo exhibe. La separación válida usa la distributividad de la división por un número no nulo.

Ejercicio 5. Un cero excluido

El dominio excluye ± 3. Factorizamos $(x + 3)^2/[(x - 3)(x + 3)]$ y obtenemos $(x + 3)/(x - 3)$ sobre ese dominio. El único candidato a cero es -3, que está prohibido. Por tanto, la expresión original no tiene ceros. El dominio reducido no se amplía después de cancelar el factor.

Ejercicio 6. Tres cancelaciones válidas

Los denominadores originales excluyen -2, -3 y 2. Escribimos el producto como $(x-2)(x+2)(x+3)/[(x + 2)(x + 3)(x - 2)]$. Cada factor cancelado es no nulo en el dominio. El producto vale 1 para todo $x \notin \{-3, -2, 2\}$ y no tiene valor en los tres puntos excluidos.

Ejercicio 7. Una exclusión aportada por el divisor

Las fracciones exigen $x \neq 1, 4$. El divisor no puede valer cero, así que también $x \neq -2$. Multiplicar por su recíproco da $(x - 2)(x + 2)(x - 4)/[(x - 1)(x + 2)] = (x - 2)(x - 4)/(x - 1)$. Se conservan las tres exclusiones. Su único cero admisible es 2; el candidato 4 de la fórmula reducida sigue prohibido.

Ejercicio 8. Una suma con cancelación de constantes

Sobre $x \neq \pm 2$, usamos el denominador $(x - 2)(x + 2)$. El numerador es $(x + 2) + (x - 2) = 2x$ y la suma vale $2x/(x^2 - 4)$. Su único cero es 0, admisible: en la suma inicial produce $-1/2 + 1/2 = 0$.

Ejercicio 9. Restar después de amplificar

Excluimos 0 y -2. Con denominador $x(x+2)$ obtenemos $[4(x+2)-3x]/[x(x+2)] = (x+8)/[x(x+2)]$. Cada amplificación utiliza factores no nulos en el dominio. En $x = 2$, la expresión inicial vale $2 - 3/4 = 5/4$ y la final, $10/8 = 5/4$.

Ejercicio 10. Dos niveles de denominadores

Primero $x \neq 0$. El denominador exterior $1 - 2/x$ se anula en 2, también excluido. Multiplicar arriba y abajo por $x \neq 0$ da $(x + 2)/(x - 2)$, con $x \neq 0, 2$. El cero de esta expresión es -2, admisible, pero el argumento cero no se recupera aunque la fórmula final esté definida allí.

Ejercicio 11. Un candidato admisible

El dominio excluye ± 2. Multiplicar por $(x-2)(x+2)$ da $3(x+2) = 4(x-2)$, de donde $3x+6 = 4x-8$ y $x = 14$. La comprobación produce $3/12 = 4/16 = 1/4$. La transformación fue equivalente en el dominio y la ecuación lineal tiene una sola raíz; la solución es $\{14\}$.

Ejercicio 12. El único candidato no sirve

Excluimos 2. En el dominio, la fracción es $x + 2$. La ecuación transformada exige $x + 2 = 4$, cuyo único candidato es 2, prohibido. El conjunto solución es vacío. Multiplicar directamente por $x-2$ daría $(x - 2)^2 = 0$, que no añade una solución admisible.

Ejercicio 13. Dos raíces exactas

El dominio excluye ± 2. La suma es $2x/(x^2 - 4)$ y la ecuación equivale allí a $x^2 - 2x - 4 = 0$. Completamos $(x-1)^2 = 5$, de donde $x = 1 \pm \sqrt{5}$. Ninguna raíz es 2 ni -2: esos valores no anulan el polinomio transformado, que en ellos vale -4 y 4. Para cada raíz, $x^2 - 4 = 2x \neq 0$ y la suma inicial vale uno. Las dos ramas agotan las soluciones.

Ejercicio 14. Un cero de la suma

Excluimos 0 y 4. La suma queda $(2x-4)/[x(x-4)]$, que se anula en el dominio exactamente para $x = 2$. Es admisible y produce $1/2 - 1/2 = 0$. No hay otros candidatos del numerador lineal.

Ejercicio 15. Tres intervalos y dos extremos distintos

El denominador excluye 3 y el numerador se anula en -1. Para $x < -1$, ambos factores son negativos y el cociente positivo. Para $-1 < x < 3$, los signos son positivo y negativo. Para $x > 3$, ambos son positivos. Se incluye -1 por la igualdad y se excluye 3 por el dominio. La solución es $(-\infty, -1] \cup (3, \infty)$.

Ejercicio 16. Un cero aislado en el lado negativo

Excluimos 1. El numerador es positivo salvo en -2, donde vale cero. A la izquierda de 1 el denominador es negativo; el cociente solo satisface ≥ 0 en $x = -2$. A la derecha de 1 el denominador es positivo y el numerador también, por lo que todos esos argumentos sirven. La solución es $\{-2\} \cup (1, \infty)$. El cero de multiplicidad par no cambia el signo a sus lados.

Ejercicio 17. Reunir en un miembro

Sobre $x \neq 2$, la condición equivale a $(7-3x)/(x-2) > 0$. Los puntos críticos son 2 y $7/3$. Antes de 2 los signos son positivo y negativo; entre ambos, positivo y positivo; después de $7/3$, negativo y positivo. Solo sirve $(2, 7/3)$. Se excluye 2 por el dominio y $7/3$ porque produce igualdad.

Ejercicio 18. Intersectar con el dominio conservado

La fracción inicial excluye 2 y en ese dominio vale $x+2$. Necesitamos $x \geq -2$, conservando $x \neq 2$. La solución es $[-2, 2) \cup (2, \infty)$. El extremo -2 produce numerador cero y denominador -4, de modo que se incluye; el punto 2 nunca se incluye.

Ejercicio 19. Dos clases de ausencia

Para $x \neq 2$, la primera fracción vale $x+2$. Su diferencia respecto de 4 es $x-2$, que se hace arbitrariamente pequeña al acercarse a 2. Falta el punto $(2, 4)$; asignarle el valor 4 completaría la recta y constituye una extensión. Para el recíproco, $|1/(x-2)| = 1/|x-2|$. Ante cualquier $M > 0$, elegir $0 < |x-2| < 1/M$ fuerza un valor absoluto mayor que M. Por eso tiene asíntota vertical $x = 2$ y no un hueco de altura finita.

Ejercicio 20. Una división que revela las aproximaciones

Sobre $x \neq -1$, dividimos $3x+2 = 3(x+1)-1$, así que la expresión es $3 - 1/(x+1)$. Su asíntota vertical es $x = -1$: el término recíproco se hace arbitrariamente grande en valor absoluto cerca de ese argumento. Por la izquierda la expresión crece sin cota positiva; por la derecha decrece sin cota negativa. La asíntota horizontal es $y = 3$, pues la diferencia absoluta es $1/|x+1|$. Para hacerla menor que $\varepsilon > 0$ basta $|x+1| > 1/\varepsilon$. Esta condición se satisface para argumentos suficientemente alejados en cualquiera de las dos direcciones.

Ejercicio 21. Sumar partes de tarea por hora

Los ritmos son $1/8$ y $1/12$ de tarea por hora. Su suma es $3/24 + 2/24 = 5/24$. El tiempo $t > 0$ satisface $(5/24)t = 1$, de donde $t = 24/5$ horas, es decir, cuatro horas y cuarenta y ocho minutos. Comprobamos $t/8 + t/12 = 3/5 + 2/5 = 1$. Se utilizan las hipótesis de ritmos constantes y aportes que se suman sin interferencia.

Ejercicio 22. Filtrar una rapidez negativa

Con $v > 0$ en kilómetros por hora, la condición es $180/v - 180/(v+30) = 1$. Multiplicar por el denominador positivo produce $5400 = v(v+30)$, equivalente a $(v+90)(v-60) = 0$. Solo sirve $v = 60$; la raíz -90 queda fuera del dominio físico. Las rapideces son 60 y 90 kilómetros por hora, con tiempos de tres y dos horas. La diferencia pedida se cumple exactamente.

Ejercicio 23. Conservar el numerador físico

Hay $0{,}40 \cdot 30 = 12$ litros de sustancia. Añadir $x \geq 0$ litros de agua mantiene esa cantidad y eleva el volumen total a $30+x$. La ecuación $12/(30+x) = 0{,}30$ da $12 = 9 + 0{,}30x$, así que $x = 10$. El resultado produce cuarenta litros de mezcla y concentración $12/40 = 0{,}30$. El denominador es positivo y la solución cumple la restricción de añadir agua.

Ejercicio 24. El parámetro que toca la exclusión

El dominio exige $x \neq 2$. En él, la ecuación equivale a $x + 2 = k$, con candidato único $x = k - 2$. Si $k \neq 4$, ese argumento es admisible y la sustitución da k. Si $k = 4$, coincide con 2 y el conjunto solución es vacío. La función de la izquierda tiene dominio $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ y coincide allí con la restricción de $x + 2$. La función $x + 2$ definida sobre todos los reales tiene un dominio mayor; se obtiene extendiendo la anterior con el punto $(2, 4)$.

Diagnóstico de salida

Una solución completa conserva la pregunta original mientras cambia su escritura. Debes poder justificar qué se cancela, qué argumentos permanecen excluidos y por qué una multiplicación conserva una igualdad o modifica el sentido de una desigualdad. En un modelo, el cociente debe representar una cantidad reconocible y las raíces deben regresar a ese significado. Una fórmula simplificada permite ver mejor la estructura, pero la estructura incluye también el dominio sobre el que se está trabajando.

CAPÍTULO 10

Sucesiones, progresiones y matemática financiera

Para preparar un auditorio necesitamos saber cuántas sillas habrá en cada fila y cuántas cabrán en total. Si la primera fila tiene doce y cada nueva fila agrega tres, podemos continuar el recuento: quince, dieciocho, veintiuna. La disposición permite anticipar cualquier fila sin construir todas las anteriores; basta reconocer cuántos aumentos separan su posición de la primera. Sumar las cantidades de todas las filas requerirá otra observación sobre la misma organización.

En otros procesos se repite una multiplicación. Un saldo que recibe intereses proporcionales a su valor cambia de manera distinta de uno al que se añade siempre una cantidad fija, porque el aumento siguiente depende de lo que ya se acumuló. Las sucesiones permitirán describir ambos procesos por etapas y distinguir el término que ocupa una posición del total de los términos. Al aplicar sus sumas a cuotas y depósitos, tendremos que fijar además cuándo se efectúa cada pago: un período de diferencia cambia el tiempo durante el que actúan los intereses.

Una fila más en el auditorio

Problema 1. La posición de una fila y su cantidad de sillas

Enunciado. La primera fila tiene doce sillas y cada fila siguiente tiene tres más que la anterior. Escribe una regla para la cantidad de la fila n y encuentra la cantidad de la décima fila.

Solución. Numeramos las filas desde $n = 1$. Las primeras cantidades son 12, 15, 18 y 21. Para llegar a la fila n desde la primera se realizan $n-1$ aumentos de tres, por lo que $a_n = 12+3(n-1)$. La décima tiene $12 + 3 \cdot 9 = 39$ sillas. El índice 10 identifica la posición; el término $a_{10} = 39$ expresa la cantidad que le corresponde. Contar diez aumentos habría situado el resultado en la fila siguiente.

Una **sucesión real** asigna un número real a cada índice de un conjunto ordenado de enteros consecutivos. Aquí trabajaremos principalmente con índices $1, 2, 3, \ldots$, y en los modelos de evolución usaremos también $0, 1, 2, \ldots$ para incluir el estado inicial. Escribimos a_n para el término de índice n. Una regla explícita lo obtiene directamente del índice; una recurrencia indica cómo calcularlo a partir de términos anteriores y necesita suficientes condiciones iniciales.

Problema 2. Cuatro datos permiten más de una continuación

Enunciado. Los primeros cuatro términos son 2, 5, 8 y 11. Propón dos reglas que los produzcan y decide si esos datos determinan el quinto término.

Solución. La regla $a_n = 3n - 1$ produce los cuatro valores y da $a_5 = 14$. Consideremos también

$$b_n = 3n - 1 + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4).$$

Para $n = 1, 2, 3, 4$, uno de los factores del producto es cero, de modo que $b_n = a_n$. Para $n = 5$, el producto vale 24 y $b_5 = 38$. Ambas reglas cumplen los datos. Para elegir una continuación necesitamos otra condición; por ejemplo, exigir que cada incremento sea tres selecciona la primera. Una lista finita aporta información, y la regla adoptada determina cómo se prolonga.

Añadir siempre la misma cantidad

La condición $a_{n+1} = a_n + d$ define una **progresión aritmética** de diferencia d. Repetirla da $a_n = a_1 + (n-1)d$. La fórmula se justifica por inducción: vale para $n = 1$; si vale para n, añadir d produce $a_{n+1} = a_1 + nd$, que es la expresión del índice siguiente. El argumento incluye diferencias positivas, cero y negativas.

Problema 3. Reconstruir la diferencia desde dos posiciones

Enunciado. En una progresión aritmética, $a_4 = 17$ y $a_9 = 37$. Encuentra d, a_1 y a_{12}.

Solución. Entre los índices 4 y 9 hay cinco incrementos, por lo que $37 - 17 = 5d$ y $d = 4$. Desde el primer término al cuarto hay tres incrementos: $a_1 = 17 - 3 \cdot 4 = 5$. La regla es $a_n = 5 + 4(n-1)$, y $a_{12} = 49$. Se comprueban $a_4 = 5 + 12 = 17$ y $a_9 = 5 + 32 = 37$. Las dos condiciones determinan una diferencia única y después un primer término único.

Problema 4. El primer índice que alcanza una meta

Enunciado. Una sucesión comienza en 7 y aumenta cinco en cada paso. ¿Cuál es el primer índice $n \geq 1$ cuyo término es al menos 52?

Solución. La regla es $a_n = 7 + 5(n-1)$. La condición exige $7 + 5(n-1) \geq 52$, equivalente a $n \geq 10$. El menor índice entero admisible es 10: $a_{10} = 52$ y $a_9 = 47$. Como la diferencia es positiva, los términos anteriores son menores. El examen de índices enteros permite convertir la desigualdad en una primera posición concreta.

Sumar un recorrido entero

Problema 5. Emparejar los extremos de una suma

Enunciado. Calcula $1 + 2 + \cdots + 100$ y justifica el procedimiento.

Solución. Llamemos S a la suma. Escrita en orden inverso es $100 + 99 + \cdots + 1$. Al sumar ambas escrituras, cada una de las cien posiciones aporta 101. Así, $2S = 100 \cdot 101$ y $S = 5050$. El razonamiento cuenta cien sumandos en cada escritura; el factor dos aparece porque hemos sumado dos copias de la misma cantidad.

Para una progresión aritmética finita de n términos, emparejar las dos escrituras del mismo modo produce siempre $a_1 + a_n$ en cada posición. Por tanto,

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d).$$

Esta derivación también sirve cuando n es impar: estamos sumando dos copias completas y después dividiendo por dos.

Problema 6. La capacidad del auditorio

Enunciado. El auditorio del problema 1 tiene veinte filas. ¿Cuántas sillas contiene?

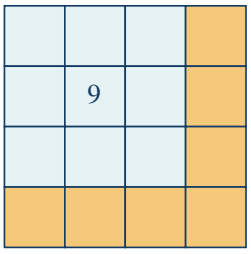
Solución. El último término es $a_{20} = 12+3\cdot19 = 69$. La suma de las veinte filas es $20(12+69)/2 = 810$. Podemos comprobar la estructura separando las doce sillas de cada fila y los aumentos: $20 \cdot 12 + 3(0 + 1 + \cdots + 19) = 240 + 3 \cdot 190 = 810$. El índice 20 cuenta filas; 69 cuenta las sillas de la última fila; 810 cuenta el total.

Problema 7. Un cuadrado construido con números impares

Enunciado. Encuentra la suma de los primeros n impares positivos y explica su relación con un cuadrado.

Solución.

Los impares forman la progresión $1, 3, 5, \ldots, 2n-1$. La fórmula aritmética da $S_n = n[1 + (2n-1)]/2 = n^2$. También podemos construir cuadrados: pasar de lado $n-1$ a lado n añade una fila de n casillas y una columna de $n-1$, en total $2n-1$. La identidad $n^2 - (n-1)^2 = 2n-1$ justifica cada ampliación. Partiendo de una casilla, los aumentos impares forman el cuadrado de n^2 casillas.



9 + 7 = 16

Propiedades de una progresión aritmética

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Diferencia constante	$a_{n+1} = a_n + d$, con d real y primer término fijado. Esta es la condición definitoria.
Término explícito	Para índices $n \geq 1$, $a_n = a_1 + (n-1)d$.
Diferencia entre posiciones	$a_n - a_m = (n-m)d$, para índices admisibles m, n.
Suma finita	Para $n \geq 1$, $S_n = n(a_1 + a_n)/2 = n[2a_1 + (n-1)d]/2$.

Pruebas. Véase «Diferencias constantes y sumas aritméticas» en el apéndice.

Multiplicar siempre por el mismo factor

Una **progresión geométrica** satisface $a_{n+1} = ra_n$, con razón real r y primer término fijado. Si $r \neq 0$, repetir la relación produce $a_n = a_1 r^{n-1}$ para $n \geq 1$. Para $r = 0$, la recurrencia entrega $a_1, 0, 0, \ldots$; escribir aparte el primer término evita introducir 0^0. La recurrencia conserva su sentido incluso si el primer término es cero.

Problema 8. Una cantidad que se duplica

Enunciado. Una progresión geométrica empieza en 3 y tiene razón 2. Encuentra su sexto término.

Solución. La regla es $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$. El sexto término es $3 \cdot 2^5 = 96$. El recorrido $3, 6, 12, 24, 48, 96$ lo comprueba. Se realizan cinco multiplicaciones desde el primer término al sexto. La diferencia entre términos sucesivos va cambiando; lo que permanece constante es el factor dos.

Problema 9. Un recorrido de divisiones

Enunciado. La sucesión $81, 27, 9, 3, \ldots$ se obtiene dividiendo cada término por tres. Encuentra su regla y el quinto término.

Solución. Dividir por tres equivale a multiplicar por $r = 1/3$. Así, $a_n = 81(1/3)^{n-1}$ y $a_5 = 81/81 = 1$. Todos los términos son positivos y cada paso reduce su valor, porque se multiplica por un número positivo menor que uno. La razón se comprueba con $27/81 = 9/27 = 3/9 = 1/3$; esas divisiones existen porque los términos usados son no nulos.

Problema 10. Un factor negativo cambia los signos

Enunciado. Una progresión comienza en 5 y tiene razón -2. Encuentra sus cinco primeros términos y estudia si es creciente.

Solución. Los términos son $5, -10, 20, -40, 80$. La fórmula $a_n = 5(-2)^{n-1}$ explica la alternancia de signos. Sus valores absolutos se duplican, pero la sucesión completa alterna descensos y ascensos: pasa de 5 a -10 y después a 20. Por tanto, carece de monotonía en todo su recorrido. El crecimiento del valor absoluto describe una propiedad diferente del crecimiento de los términos reales.

Problema 11. Una recurrencia porcentual con estado inicial

Enunciado. Una cantidad vale 200 al inicio y aumenta un 10 % en cada periodo. Escribe su recurrencia y calcula el valor al terminar tres periodos.

Solución. El estado inicial lleva índice cero: $u_0 = 200$. Cada periodo multiplica por $1{+}0{,}10 = 1{,}10$, así que $u_{n+1} = 1{,}10u_n$. Los valores son $u_1 = 220$, $u_2 = 242$ y $u_3 = 266{,}2$. La forma explícita es $u_n = 200(1{,}10)^n$. Hay tres factores porque el índice cuenta periodos transcurridos desde el estado cero. El segundo incremento es 22 y el tercero 24,2: el porcentaje se aplica al valor que existe al comenzar cada periodo.

Problema 12. Alcanzar un umbral en pasos enteros

Enunciado. Una cantidad comienza en 100 y se duplica al finalizar cada periodo. ¿Cuántos periodos deben transcurrir para alcanzar por primera vez al menos 1600?

Solución. Con $u_0 = 100$, la regla es $u_n = 100{\cdot}2^n$. Los primeros estados son $100, 200, 400, 800, 1600$. Se alcanza el umbral al terminar cuatro periodos. La sucesión es estrictamente creciente porque cada término positivo se duplica; todos los anteriores al cuarto están por debajo de 1600. Para este umbral basta la comparación exacta de potencias, sin aproximar el índice.

Propiedades de una progresión geométrica

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Razón constante	$a_{n+1} = ra_n$, con r real y primer término fijado. Para $r = 0$, la sucesión es $a_1, 0, 0, \ldots$.
Término explícito	Si $r \neq 0$, $a_n = a_1 r^{n-1}$ para $n \geq 1$. Con índice inicial cero, $u_n = u_0 r^n$ para $n \geq 0$.
Recuperación de la razón	$r = a_{n+1}/a_n$ en cualquier posición con $a_n \neq 0$. Una sucesión nula satisface la recurrencia para cualquier razón.
Signos y crecimiento	Con $a_1 > 0$, $r > 1$ da crecimiento y $0 < r < 1$ da decrecimiento; una razón negativa alterna signos si $a_1 \neq 0$.

Pruebas. Véase «Productos repetidos y sumas geométricas» en el apéndice.

Una suma que se cancela al desplazarla

Problema 13. Sumar diez potencias consecutivas

Enunciado. Calcula $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^9$ sin sumar cada término por separado.

Solución. Llamamos S a la suma. Multiplicar por dos produce $2S = 2 + 2^2 + \cdots + 2^{10}$. Al restar S de $2S$, todos los términos interiores se cancelan: $S = 2^{10} - 1 = 1023$. Hay diez sumandos, desde el exponente cero hasta el nueve. El último término vale 512, mientras que la suma incluye todos los anteriores.

En general, al multiplicar $S_n = a + ar + \cdots + ar^{n-1}$ por r, cada término pasa a ocupar la posición del siguiente. Las dos sumas comparten así todos los términos intermedios; al restarlas quedan el primero de la suma original y el último de la desplazada: $S_n - rS_n = a - ar^n$. Si $r \neq 1$, dividir por $1 - r$ permite despejar

$$S_n = a\frac{1 - r^n}{1 - r}.$$

La cancelación depende de la posición de los términos y funciona también cuando la razón es negativa. Para $r = 1$ todos los sumandos valen a, por lo que los contamos directamente y obtenemos na.

Problema 14. La razón que exige una rama propia

Enunciado. Una progresión geométrica tiene primer término 5 y razón 1. Encuentra la suma de sus doce primeros términos.

Solución. Todos los términos valen 5. La suma es $12 \cdot 5 = 60$. La fórmula con denominador $1 - r$ produciría $0/0$ al sustituir $r = 1$ y debe reservarse a su dominio. La recurrencia y la suma original sí determinan el resultado en esta rama.

Problema 15. Sumar términos de signos alternados

Enunciado. Calcula $3 - 6 + 12 - 24 + 48$ mediante una suma geométrica.

Solución. Hay cinco términos, con $a = 3$ y $r = -2$. La fórmula da $S_5 = 3[1 - (-2)^5]/[1 - (-2)] = 3 \cdot 33/3 = 33$. La suma directa $3 - 6 + 12 - 24 + 48 = 33$ confirma el valor. El exponente 5 cuenta sumandos; el último término usa exponente 4 en $3(-2)^4$.

Problema 16. Aportar una misma cantidad sin interés

Enunciado. Se depositan cincuenta unidades monetarias al final de cada mes, durante seis meses, en una cuenta sin intereses ni cargos. ¿Cuánto hay inmediatamente después del sexto depósito?

Solución. Cada depósito aporta 50 y ninguno cambia de valor. El saldo es $6 \cdot 50 = 300$. Si S_n es el saldo después del depósito n, la recurrencia es $S_0 = 0$, $S_{n+1} = S_n + 50$. Al haber fijado el momento de observación, contamos exactamente seis aportes. Cuando incorporemos intereses, la fecha de cada aporte determinará cuántos periodos puede crecer.

Propiedades de las sumas geométricas finitas

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Razón distinta de uno	Para $n \geq 1$ y $r \neq 1$, $a + ar + \cdots + ar^{n-1} = a(1-r^n)/(1-r)$. El término inicial se escribe a también si $r = 0$.
Razón uno	Para $r = 1$, la suma de n términos iguales a a es na.
Conteo desde exponente cero	Para $r \neq 0$, la suma de r^0 hasta r^m contiene $m+1$ términos. En razón uno vale $m+1$; en las otras razones se aplica la fórmula con $n = m+1$.

Pruebas. Véase «Productos repetidos y sumas geométricas» en el apéndice.

El tiempo forma parte de una tasa

En los modelos siguientes, las tasas y cantidades son hipotéticas. Trabajaremos con periodos iguales, tasas constantes y ausencia de comisiones, impuestos y otros cargos. Cada cálculo describe el modelo declarado. La información de una operación real debe precisar además las fechas y todos sus costos.

Un capital inicial C a **interés simple** recibe en cada periodo un interés Ci calculado sobre el capital inicial. Después de n periodos vale $C(1+ni)$. A **interés compuesto**, el interés de cada periodo se calcula sobre el saldo al comenzar ese periodo: $C_{n+1} = (1+i)C_n$, de donde $C_n = C(1+i)^n$. La tasa i se escribe en forma decimal y corresponde a un periodo concreto.

Problema 17. Dos bases para calcular el interés

Enunciado. Compara un capital de 1000 unidades monetarias durante tres periodos, al 10 % por periodo, con interés simple y compuesto.

Solución. En el modelo simple, cada periodo añade $1000 \cdot 0{,}10 = 100$; los saldos son 1100, 1200 y 1300. En el compuesto, los saldos son $1000 \cdot 1{,}10 = 1100$, después 1210 y finalmente 1331. Los intereses del segundo y tercer periodo son 110 y 121 porque su base es el saldo actualizado. La diferencia final es 31. Ambos modelos coinciden al terminar el primer periodo y después siguen las reglas de acumulación que acabamos de definir.

Problema 18. Una tasa mensual y su efecto anual

Enunciado. Una tasa efectiva mensual del 1 % se aplica durante doce meses con capitalización mensual. Encuentra la tasa efectiva de esos doce meses y compárala con el 12 % que resulta de sumar las tasas mensuales.

Solución. Cada mes multiplica el saldo por 1,01. Los doce meses lo multiplican por $(1{,}01)^{12}$. La tasa efectiva del conjunto es $(1{,}01)^{12} - 1$, aproximadamente 0,126825, es decir, 12,6825%. El 12 % corresponde al incremento de un modelo simple con doce aplicaciones sobre la misma base inicial. La capitalización mensual del enunciado fija otra base en cada paso. El periodo y la regla de capitalización permiten interpretar correctamente la tasa.

Problema 19. Recuperar una tasa equivalente

Enunciado. Una tasa efectiva anual del 21 % se desea expresar mediante dos semestres de igual tasa efectiva j. Encuentra j bajo capitalización semestral.

Solución. El factor anual debe ser 1,21. Los dos semestres requieren $(1+j)^2 = 1{,}21$, con $1+j>0$. La raíz positiva es 1,10, así que $j = 0{,}10$: un 10 % semestral. La comprobación es $(1{,}10)^2 = 1{,}21$. La raíz negativa daría un factor semestral negativo y queda fuera del modelo. La equivalencia se refiere al mismo horizonte de un año y a las hipótesis de capitalización fijadas.

Problema 20. Comparar dinero y poder de compra

Enunciado. En un año, un saldo aumenta un 8 % y el precio de una canasta de referencia aumenta un 5 %. ¿En qué porcentaje cambia la cantidad de esas canastas que permite comprar el saldo?

Solución. Si el saldo inicial es $C>0$ y la canasta cuesta $P>0$, inicialmente se compran C/P canastas. Al final se compran $1{,}08C/(1{,}05P)$. El factor de cambio de la capacidad de compra es $1{,}08/1{,}05 = 36/35$. La variación relativa es $1/35$, aproximadamente 2,8571%. Restar ocho y cinco ofrece una aproximación de tres puntos porcentuales; el cociente de factores entrega el resultado exacto porque compara el saldo con el nuevo precio de la canasta.

Propiedades de los modelos de tasas

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Interés simple	Con capital inicial C y tasa i por periodo, $C_n = C(1+ni)$ para $n \geq 0$ entero, bajo acumulación simple y sin movimientos adicionales.
Interés compuesto	Con factor $1+i>0$, $C_n = C(1+i)^n$ para $n \geq 0$ entero, tasa constante y sin aportes, retiros ni cargos adicionales.
Tasa equivalente de varios periodos	Si cada periodo tiene tasa efectiva $i>-1$, la de $m \geq 1$ periodos es $j = (1+i)^m - 1$. Para recuperar i, se usa la raíz positiva de $1+j$.
Variación real respecto de precios	Para saldo inicial y precio positivos, tasa de crecimiento del saldo $i>-1$ y variación de precios $\pi>-1$, la variación de capacidad de compra es $(1+i)/(1+\pi)-1$.

Pruebas. Véase «Capitalización y comparación de tasas» en el apéndice.

Cada pago tiene una fecha

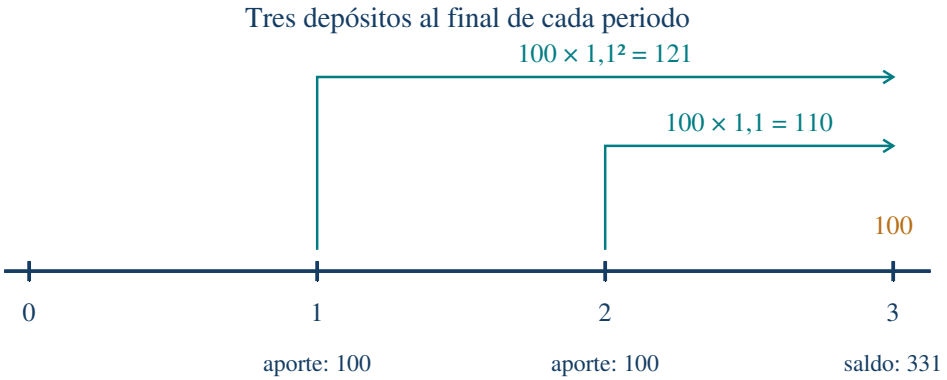
Para reunir varios depósitos podemos seguir el tiempo de cada uno desde su fecha de ingreso hasta la fecha en que observamos el saldo. El que entra al terminar un periodo empieza a generar intereses en el siguiente; si lo adelantamos al comienzo, recibe un periodo adicional de capitalización. Dibujar una línea de fechas permite contar los factores que corresponden a cada aporte antes de sumarlos. En una deuda seguiremos el mismo cuidado temporal: el modelo calculará primero el interés del periodo y descontará después el pago efectuado a su final.

Problema 21. Tres depósitos con intereses diferentes

Enunciado. Se depositan 100 unidades monetarias al final de cada uno de tres periodos. La cuenta acredita un 10 % por periodo antes del depósito correspondiente. Encuentra el saldo después del tercer depósito y compáralo con tres depósitos realizados al comienzo de esos periodos, observados al terminar el tercero.

Solución. En los depósitos finales, el primero crece durante dos periodos, el segundo durante uno y el tercero durante ninguno. El saldo es $100(1{,}10)^2 + 100(1{,}10) + 100 = 121 + 110 + 100 = 331$. La recurrencia $S_0 = 0$, $S_{n+1} = 1{,}10S_n + 100$ produce 100, 210 y 331, y comprueba las fechas.

Si cada depósito se adelanta al comienzo de su periodo, cada uno gana un factor adicional 1,10. El saldo final es $1{,}10 \cdot 331 = 364{,}1$. El monto aportado es 300 en ambos casos. La diferencia procede del tiempo durante el que cada aporte permanece en la cuenta.



Problema 22. El interés se calcula sobre el saldo restante

Enunciado. Una deuda inicial de 1000 unidades monetarias genera un 10 % por periodo. Se pagan 400 al final de los dos primeros periodos. ¿Qué pago al final del tercero cancela exactamente la deuda?

Solución. Tras el primer interés, la deuda es 1100; descontar 400 deja 700. En el segundo periodo el interés es 70, por lo que el nuevo saldo tras pagar 400 es $770 - 400 = 370$. En el tercero, el interés es 37 y la liquidación exacta exige $370 + 37 = 407$. Si se pagaran solo 400, quedarían siete unidades en esa misma fecha. El total de pagos que cancela la deuda es $400 + 400 + 407 = 1207$, igual al capital inicial más los intereses $100 + 70 + 37 = 207$. Cada interés se calculó sobre el saldo del periodo correspondiente.

Problema 23. Elegir una cuota constante

Enunciado. Bajo el mismo modelo de tasa del 10 % por periodo, encuentra la cuota constante que cancela una deuda de 1000 en tres pagos finales. Trabaja con valores exactos antes de redondear.

Solución. Escribimos $q = 1{,}10$ y llamamos A a la cuota. La recurrencia es $D_{n+1} = qD_n - A$, con $D_0 = 1000$. Al desarrollarla obtenemos $D_1 = 1000q - A$, $D_2 = 1000q^2 - A(q+1)$ y $D_3 = 1000q^3 - A(q^2+q+1)$. Exigir saldo cero da

$$A = \frac{1000q^3}{q^2+q+1} = \frac{133100}{331} \approx 402{,}1148.$$

El denominador es positivo y la cuota queda determinada de manera única. Sustituir esa fracción exacta en la expresión de D_3 da cero. Para n pagos y tasa $i > 0$, la misma suma geométrica lleva a $A = Ci(1+i)^n/[(1+i)^n - 1]$. Con tasa cero, los pagos deben sumar C y la cuota es C/n. En una aplicación con cuotas redondeadas se recalcula el saldo y se ajusta el pago final a la precisión de la unidad monetaria.

Propiedades de aportes y pagos periódicos

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Depósitos finales iguales	Con $S_0 = 0$, $S_{n+1} = qS_n + A$ y $q = 1 + i \geq 1$, el saldo es $A(1 + q + \cdots + q^{n-1})$ para $n \geq 1$. Si $i = 0$, vale nA.
Depósitos iniciales	Con igual tasa, cantidad de aportes y fecha final de observación, adelantar cada aporte un periodo multiplica por q el saldo de depósitos finales.
Saldo de una deuda	Con $D_0 = C \geq 0$, interés $i \geq 0$ y pago final A, $D_n = Cq^n - A(1 + q + \cdots + q^{n-1})$. Se aplica hasta la cancelación; el pago final se ajusta si corresponde.
Cuota que cancela	Para $C > 0$, $n \geq 1$ e $i > 0$, $A = Ciq^n/(q^n - 1)$. Para $i = 0$, $A = C/n$. El modelo supone cuotas finales, tasa fija y ausencia de otros cargos.
Cambio de saldo en un periodo	$D_{n+1} - D_n = iD_n - A$. El saldo baja, se mantiene o sube según A sea mayor, igual o menor que el interés iD_n, mientras la deuda esté vigente.

Pruebas. Véase «Recurrencias de depósitos y deudas» en el apéndice.

Una suma infinita y su error

Problema 24. Una suma finita que se aproxima a dos

Enunciado. Para $S_N = 1 + 1/2 + \cdots + (1/2)^{N-1}$, encuentra el número al que se aproximan las sumas y el menor N que deja una diferencia menor que $1/100$.

Solución. La suma geométrica finita da $S_N = 2(1-2^{-N})$. Por tanto, $2-S_N = 2^{1-N}$, una cantidad positiva que puede hacerse arbitrariamente pequeña. Las sumas se aproximan a 2; llamamos a ese número la suma de la serie geométrica infinita, definida mediante sus sumas parciales. Para obtener error menor que $1/100$ necesitamos $2^{N-1} > 100$. Con $N = 7$ el denominador es 64 y con $N = 8$ es 128. El menor índice es 8, y el error es $1/128 < 1/100$.

En general, si $|r| < 1$, las potencias r^N se aproximan a cero y $S_N = a(1 - r^N)/(1 - r)$ se aproxima a $a/(1-r)$. El apéndice demuestra la desaparición de esas potencias mediante una cota. La suma infinita se interpreta como el límite de sumas finitas cuyo error podemos controlar.

Propiedades de una serie geométrica

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Suma por aproximación	Si $\|r\| < 1$, las sumas parciales de $a + ar + ar^2 + \cdots$ se aproximan a $S = a/(1 - r)$. Para $r = 0$, los términos son $a, 0, 0, \ldots$.
Error exacto	Para $\|r\| < 1$, $\|S - S_N\| = \|a\|\,\|r\|^N/\|1 - r\|$; en $r = 0$ y $N \geq 1$, el error es cero.
Razones fuera del intervalo	Si $a \neq 0$ y $\|r\| \geq 1$, las sumas parciales carecen de límite finito. Si $a = 0$, todos los términos y sumas son cero para cualquier razón.

Pruebas. Véase «Aproximación de sumas geométricas infinitas» en el apéndice.

Ejercicios para trabajar sin profesor

Fija el índice inicial y cuenta los pasos o sumandos. En los modelos financieros, declara la duración del periodo, la tasa y las fechas de aportes y pagos. Conserva los valores exactos hasta el redondeo final.

1. La primera fila de un auditorio tiene ocho sillas y cada siguiente tiene cuatro más. Encuentra a_n y a_{12}.

2. Los términos iniciales son 1, 4, 7 y 10. Construye dos reglas que coincidan allí y difieran en el quinto término.

3. En una progresión aritmética, $a_3 = 14$ y $a_8 = 39$. Encuentra d, a_1 y a_{10}.

4. Una sucesión empieza en 9 y aumenta cuatro en cada paso. Encuentra el primer índice $n \geq 1$ con $a_n \geq 49$.

5. Calcula $1 + 2 + \cdots + 80$ justificando el emparejamiento.

6. El auditorio del ejercicio 1 tiene veinte filas. Encuentra el total de sillas.

7. Calcula la suma de los primeros doce impares positivos y explica el conteo de casillas correspondiente.

8. Una progresión geométrica comienza en 2 y tiene razón 3. Encuentra su quinto término.

9. Una sucesión comienza en 64 y cada término siguiente es la mitad del anterior. Encuentra la regla y el séptimo término.

10. Una progresión comienza en 3 y tiene razón -2. Encuentra sus seis primeros términos y describe sus signos.

11. Una cantidad vale 500 en el estado cero y aumenta un 20 % por periodo. Escribe la recurrencia y calcula el estado tres.

12. Una cantidad comienza en 50 y se duplica por periodo. Encuentra cuántos periodos necesita para alcanzar por primera vez al menos 800.

13. Calcula $1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^5$ mediante cancelación de sumas desplazadas.

14. Una progresión tiene primer término 7 y razón 1. Encuentra la suma de sus nueve primeros términos.

15. Calcula $2 - 4 + 8 - 16 + 32$ mediante la fórmula geométrica.

16. Se depositan ochenta unidades monetarias al final de cada uno de cinco meses, sin intereses ni cargos. Encuentra el saldo después del quinto depósito y su recurrencia.

17. Compara 2000 unidades monetarias durante tres periodos al 5 % por periodo, con interés simple y compuesto.

18. Una tasa efectiva trimestral del 2 % se capitaliza durante cuatro trimestres. Encuentra la tasa efectiva anual y compárala con el 8 % simple.

19. Encuentra la tasa efectiva semestral que, capitalizada durante dos semestres, equivale a un 44 % efectivo anual, con factores positivos.

20. Un saldo aumenta un 10 % y la canasta de referencia un 4 %. Encuentra la variación exacta y aproximada de la capacidad de compra.

21. Se depositan 200 unidades monetarias al final de tres periodos a una tasa del 5 % por periodo. Encuentra el saldo final. Compara con tres depósitos al comienzo, observados al terminar el tercer periodo.

22. Una deuda inicial de 1200 genera un 10 % por periodo. Tras dos pagos finales de 500, encuentra el pago que la cancela al finalizar el tercer periodo.

23. Encuentra la cuota constante que cancela 2100 unidades monetarias en dos pagos finales, a un 10 % por periodo, sin otros cargos. Comprueba los dos saldos.

24. Estudia las sumas parciales de $3 + 1 + 1/3 + \cdots$. Encuentra su suma por aproximación y el menor número de términos para que la diferencia sea menor que $1/100$.

Soluciones desarrolladas

Ejercicio 1. Contar once incrementos

Con índices desde uno, $a_n = 8 + 4(n-1)$. Para la fila doce hay once incrementos, de modo que $a_{12} = 8 + 44 = 52$. El primer término se recupera al poner $n = 1$ y cada paso añade cuatro, tal como exige el enunciado.

Ejercicio 2. Una continuación necesita una regla

Tomamos $a_n = 3n - 2$ y $b_n = 3n - 2 + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$. En los cuatro primeros índices el producto adicional se anula. En el quinto, $a_5 = 13$ y $b_5 = 37$. Los datos se cumplen en ambas reglas; exigir diferencia constante tres seleccionaría la primera.

Ejercicio 3. Separar distancia de índices y diferencia de valores

Entre los índices 3 y 8 hay cinco incrementos. Así, $39 - 14 = 5d$ y $d = 5$. El primer término es $a_1 = 14 - 2 \cdot 5 = 4$. La regla $a_n = 4 + 5(n-1)$ da $a_{10} = 49$, y reproduce $a_3 = 14$ y $a_8 = 39$.

Ejercicio 4. Un índice entero mínimo

La condición es $9+4(n-1) \geq 49$, equivalente a $n \geq 11$. El menor índice es 11: $a_{11} = 49$ y $a_{10} = 45$. La diferencia positiva cuatro garantiza que todos los términos anteriores están por debajo de la meta.

Ejercicio 5. Dos copias de ochenta términos

Al sumar la escritura directa e inversa, cada una de las ochenta posiciones aporta 81. Por tanto, $2S = 80 \cdot 81$ y $S = 3240$. El factor dos cuenta las dos copias, y el número ochenta cuenta los términos de cada una.

Ejercicio 6. El total de veinte filas

La última fila tiene $a_{20} = 8 + 4 \cdot 19 = 84$ sillas. La suma aritmética es $20(8+84)/2 = 920$. Separar ocho por fila y los incrementos da también $160 + 4(0 + 1 + \cdots + 19) = 160 + 760 = 920$.

Ejercicio 7. Un cuadrado de doce por doce

El último impar es $2 \cdot 12 - 1 = 23$. La suma vale $12(1+23)/2 = 144 = 12^2$. Al ampliar el cuadrado de lado once al de lado doce se añaden $12 + 11 = 23$ casillas. Repetir esa construcción desde una casilla justifica la suma de todos los impares anteriores.

Ejercicio 8. Cuatro multiplicaciones

La regla es $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$. El quinto término es $2 \cdot 3^4 = 162$. El recorrido $2, 6, 18, 54, 162$ confirma tanto la razón tres como el conteo de cuatro pasos.

Ejercicio 9. Mitades sucesivas

La razón es $1/2$ y la regla $a_n = 64(1/2)^{n-1}$. El séptimo término es $64/2^6 = 1$. Todos son positivos y disminuyen porque cada paso multiplica por un número positivo menor que uno.

Ejercicio 10. Alternancia y tamaño

La regla $a_n = 3(-2)^{n-1}$ produce $3, -6, 12, -24, 48, -96$. Los signos alternan y los valores absolutos se duplican. La sucesión completa alterna descensos y ascensos, de modo que el crecimiento de sus valores absolutos debe distinguirse de la monotonía de los términos.

Ejercicio 11. Tres periodos desde el índice cero

La recurrencia es $u_0 = 500$, $u_{n+1} = 1{,}20u_n$. Los estados son 600, 720 y 864. La fórmula $u_n = 500(1{,}20)^n$ da $u_3 = 864$. Cada aumento se calcula sobre el estado inmediatamente anterior, por lo que los incrementos son 100, 120 y 144.

Ejercicio 12. El primer cruce del umbral

Con $u_n = 50 \cdot 2^n$, los estados desde cero son $50, 100, 200, 400, 800$. El primer cruce ocurre tras cuatro periodos. Cada término positivo se duplica; el tercero vale 400 y todos los anteriores son menores.

Ejercicio 13. Seis sumandos

La suma $S = 1+3+\cdots+3^5$ tiene seis términos. Multiplicar por tres y restar S da $2S = 3^6-1 = 728$, así que $S = 364$. La fórmula $S = (1-3^6)/(1-3)$ produce el mismo valor y conserva el conteo desde exponente cero.

Ejercicio 14. Una razón que mantiene cada término

Con razón uno, los nueve términos valen 7. La suma es 63. La rama $r = 1$ se calcula desde la suma original; la fórmula que divide por $1-r$ requiere otra razón.

Ejercicio 15. Una suma alternada de cinco términos

Usamos $a = 2$, $r = -2$ y $n = 5$: $S_5 = 2[1-(-2)^5]/3 = 22$. La suma directa $2-4+8-16+32 = 22$ lo comprueba. El término final es $2(-2)^4 = 32$.

Ejercicio 16. Cinco aportes iguales

La recurrencia es $S_0 = 0$, $S_{n+1} = S_n + 80$. Después de cinco depósitos, $S_5 = 5 \cdot 80 = 400$. Cada depósito se incluye una vez y la fecha de observación está inmediatamente después del quinto.

Ejercicio 17. Interés sobre dos bases diferentes

El interés simple añade $2000 \cdot 0{,}05 = 100$ por periodo y llega a $2000(1 + 3 \cdot 0{,}05) = 2300$. El compuesto multiplica por 1,05 en cada periodo: 2100, 2205 y 2315,25. Su diferencia final con el simple es 15,25. Los intereses compuestos son 100, 105 y 110,25, calculados sobre los saldos sucesivos.

Ejercicio 18. Cuatro capitalizaciones trimestrales

El factor anual es $(1{,}02)^4 = 1{,}08243216$. La tasa efectiva es 0,08243216, equivalente al 8,243216%. El 8 % corresponde al modelo simple de cuatro incrementos sobre la misma base; el compuesto incorpora los cambios de base trimestrales.

Ejercicio 19. Elegir el factor positivo

La equivalencia exige $(1 + j)^2 = 1{,}44$ y $1 + j > 0$. La raíz positiva es 1,20, por lo que $j = 0{,}20$: un 20 % semestral. Se comprueba $(1{,}20)^2 = 1{,}44$. El signo positivo del factor pertenece al modelo declarado.

Ejercicio 20. Dividir los factores de cambio

La capacidad de compra se multiplica por $1{,}10/1{,}04 = 55/52$. Su variación es $3/52$, aproximadamente 5,7692%. El cálculo utiliza saldo y precio iniciales positivos; ambos se cancelan al comparar capacidades final e inicial. La diferencia de las tasas, seis puntos porcentuales, aproxima esa variación.

Ejercicio 21. Contar el tiempo de cada aporte

Los depósitos finales generan $200(1{,}05)^2 + 200(1{,}05) + 200 = 220{,}5 + 210 + 200 = 630{,}5$. La recurrencia $S_{n+1} = 1{,}05S_n + 200$, con $S_0 = 0$, produce 200, 410 y 630,5. Adelantar cada depósito un periodo añade un factor 1,05, por lo que el saldo de depósitos iniciales es 662,025. Ambas cantidades se observan al terminar el tercer periodo, bajo el modelo ideal sin redondeos intermedios.

Ejercicio 22. Ajustar el pago de liquidación

El primer saldo después del pago es $1200 \cdot 1{,}10 - 500 = 820$. El segundo es $820 \cdot 1{,}10 - 500 = 402$. Al finalizar el tercero se deben $402 \cdot 1{,}10 = 442{,}2$, que es el pago de liquidación. Los intereses son 120, 82 y 40,2; su suma 242,2 coincide con el exceso del total pagado, 1442,2, sobre el capital inicial.

Ejercicio 23. Una cuota exacta en dos pagos

Con $q = 1{,}10$, la condición final es $0 = 2100q^2 - A(q+1)$. Por tanto, $A = 2541/2{,}1 = 1210$. Tras el primer pago queda $2100 \cdot 1{,}10 - 1210 = 1100$; tras el segundo, $1100 \cdot 1{,}10 - 1210 = 0$. La cuota es única porque el coeficiente $q + 1$ es positivo.

Ejercicio 24. Una tolerancia para la suma infinita

La progresión tiene $a = 3$ y $r = 1/3$. Las sumas parciales son $S_N = (9/2)(1-3^{-N})$ y se aproximan a $9/2$. Su diferencia es $(9/2)3^{-N}$. Para $N = 5$ vale $1/54 > 1/100$; para $N = 6$ vale $1/162 < 1/100$. Como esa diferencia disminuye en cada paso, el menor número de términos es seis. La suma parcial correspondiente es $S_6 = 364/81$, y $9/2 - 364/81 = 1/162$ lo comprueba exactamente.

Diagnóstico de salida

El índice inicial permite contar correctamente pasos y sumandos. La regla de evolución decide si se añaden cantidades o se multiplican factores. En las sumas, conviene reconstruir la cancelación que sostiene la fórmula y revisar sus casos excepcionales. En un saldo financiero, cada aporte y cada pago ocupa una fecha: conservar ese orden permite explicar la recurrencia y comprobar el resultado. Las aproximaciones infinitas añaden otra exigencia, la de controlar cuánto falta en cada suma finita.

CAPÍTULO 11

Geometría plana: construcciones y argumentos

Dibujemos tres puntos sobre una recta y supongamos que conocemos la distancia desde el primero hasta los otros dos. Para obtener la distancia que falta necesitamos saber en qué orden quedaron situados: unas posiciones llevan a sumar y otras a restar. El dibujo puede sugerir un orden, pero será la condición escrita en el problema la que nos permita usarlo en un argumento.

En geometría aprenderemos a hacer explícita esa información mientras construimos y estudiamos figuras. Una marca de ángulo recto, una igualdad de longitudes o una condición de paralelismo se convertirán en recursos para deducir medidas nuevas. Trabajaremos en el plano euclidiano, declarando las propiedades básicas que adoptamos y desarrollando sus consecuencias. Al comenzar con segmentos y ángulos podremos seguir de cerca cómo un dato del enunciado autoriza cada paso, antes de reunirlos en argumentos sobre triángulos y otras figuras.

Lo que sabemos de una figura

Problema 1. Tres puntos sobre una recta

Enunciado. Los puntos A, B, C están alineados, con B entre A y C. Se sabe que $AC = 17$ cm y $AB = 5$ cm. Encuentra BC y compara las semirrectas de origen B que pasan por A y por C.

Solución. La condición «entre» permite sumar longitudes: $AB + BC = AC$. Así, $BC = 17 - 5 = 12$ cm. Las dos semirrectas tienen origen común y sentidos opuestos. Si solo se hubieran dado las dos longitudes, habría que examinar otras posiciones de los puntos; el orden declarado es el que justifica esta resta.

Un **punto** señala una posición. Una **recta** se prolonga indefinidamente en sus dos sentidos. El **segmento** AB contiene sus extremos y los puntos entre ellos; su longitud AB es un número no negativo expresado en una unidad. La **semirrecta** de origen A que pasa por B empieza en A y continúa más allá de B. Dos puntos distintos determinan una recta; una tercera posición exige información adicional.

Trabajaremos en el **plano euclidiano**. Adoptamos sus reglas básicas de incidencia y orden, la suma de longitudes de segmentos consecutivos y la medida aditiva de ángulos. Por un punto exterior a una recta pasa una única paralela a ella. Usaremos también las reglas de superposición: los movimientos rígidos conservan longitudes y ángulos, y dos triángulos pueden superponerse si coinciden sus tres lados correspondientes, o dos lados y el ángulo comprendido. Estos últimos son los criterios LLL y LAL. Aquí sirven de base explícita para justificar construcciones; el capítulo siguiente estudiará sistemáticamente la congruencia. La geometría de este capítulo depende de esas reglas euclidianas.

Medir un giro y justificar una igualdad

Un ángulo está determinado por dos semirrectas de origen común. Indicamos su vértice con la letra central: $\angle ABC$ tiene vértice B. Nos ocuparemos de ángulos interiores entre 0° y 180°, además del giro completo de 360°. Un ángulo recto mide 90°; uno llano, 180°. Dos rectas perpendiculares forman ángulos rectos. Una bisectriz divide un ángulo en dos de igual medida.

Problema 2. Dos ángulos que completan una línea

Enunciado. Dos ángulos adyacentes forman un ángulo llano y miden $x + 20^\circ$ y $2x + 10^\circ$. Encuentra sus medidas, tomando x en grados.

Solución. Sus interiores están separados y sus lados exteriores son semirrectas opuestas. La adición de medidas da $(x + 20) + (2x + 10) = 180$. Por tanto, $3x = 150$ y $x = 50$. Los ángulos miden 70° y 110°; ambos son positivos y suman 180°. Se llaman suplementarios. Dos ángulos que suman 90° se llaman complementarios; estas palabras indican una relación entre medidas y por sí solas no fijan una posición en el dibujo.

Problema 3. Una igualdad en el cruce de dos rectas

Enunciado. Dos ángulos opuestos por el vértice miden $3x + 5^\circ$ y $5x - 35^\circ$. Encuentra las cuatro medidas del cruce.

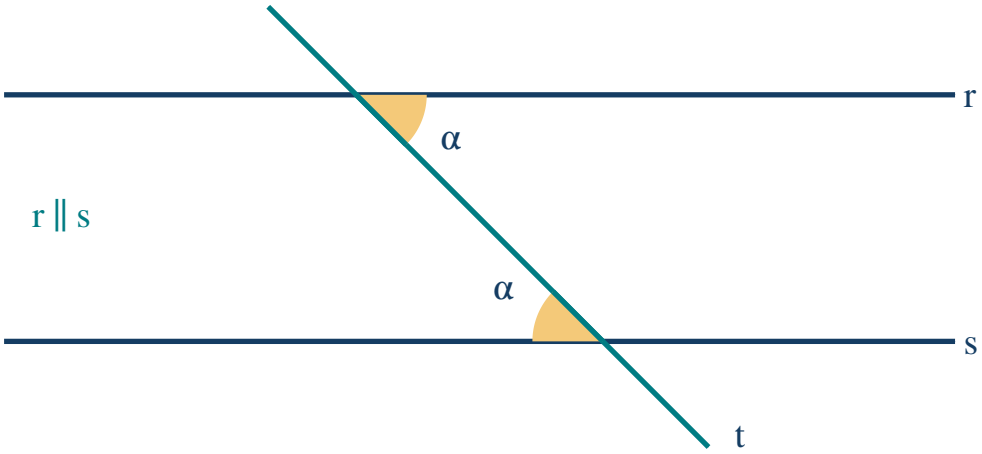
Solución. Cada uno de esos ángulos completa un ángulo llano con el mismo ángulo vecino. Si sus medidas son α, β y la del vecino es γ, entonces $\alpha + \gamma = 180^\circ$ y $\beta + \gamma = 180^\circ$. Restar da $\alpha = \beta$. Así, $3x + 5 = 5x - 35$, de donde $x = 20$. Los opuestos dados miden 65° y sus dos vecinos miden 115°. La vuelta completa suma $65 + 115 + 65 + 115 = 360$ grados.

Problema 4. Lo que permite afirmar el paralelismo

Enunciado. Una transversal corta dos rectas paralelas. En una intersección, un ángulo agudo mide 68°. Encuentra las medidas de los ocho ángulos formados.

Solución. En la primera intersección, el opuesto también mide 68° y los dos adyacentes miden 112°. El paralelismo permite transportar la medida a la posición correspondiente de la segunda intersección; los cuatro ángulos de esta repiten las medidas anteriores. Hay cuatro de 68° y cuatro de 112°. Los ángulos alternos internos son iguales y los interiores del mismo lado de la transversal suman 180°. Para utilizar esas relaciones necesitamos el dato de que las rectas son paralelas.

La relación de ángulos correspondientes es una forma de expresar el postulado euclidiano de las paralelas. Al trazar por un punto una recta con el mismo ángulo respecto de la transversal, obtenemos la dirección paralela. La unicidad de esa paralela permitirá recorrer el razonamiento en sentido inverso.



Problema 5. Reconocer paralelas a partir de ángulos

Enunciado. Dos rectas cortadas por una transversal forman un par de ángulos alternos internos de 75° cada uno. Justifica que las rectas son paralelas.

Solución. Por la segunda intersección trazamos la paralela a la primera recta. Esta nueva recta debe formar un ángulo alterno interno de 75°. En el semiplano indicado, una semirrecta queda determinada por su origen y por ese ángulo con la transversal. Por tanto, coincide con la segunda recta del enunciado. Hemos usado la existencia de una paralela y la determinación de una dirección por un ángulo; así queda justificado el criterio recíproco. Comparar dos ángulos sin identificar sus posiciones no habría permitido esta conclusión.

Propiedades de los ángulos y las paralelas

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Adición de ángulos	Las medidas se suman cuando los interiores no se solapan y los ángulos componen el ángulo considerado. Es una regla básica de medida.
Ángulos suplementarios	Si dos ángulos adyacentes componen uno llano, sus medidas suman 180°.
Opuestos por el vértice	Son iguales cuando proceden del cruce de dos rectas.
Paralelas y transversal	Los correspondientes y los alternos internos son iguales; los interiores del mismo lado suman 180°. Se presupone paralelismo.
Criterio recíproco	La igualdad de un par de correspondientes o de alternos internos determina paralelismo, con las posiciones correspondientes identificadas.

Pruebas. Véase «Medida angular y paralelismo euclidiano» en el apéndice; allí se distingue la regla adoptada de sus consecuencias.

Una recta auxiliar organiza los ángulos

Un triángulo tiene tres vértices no alineados y los tres segmentos que los unen. La condición de no alineación impide que el interior desaparezca. Si por uno de sus vértices trazamos una paralela

al lado opuesto, los ángulos de los otros dos vértices aparecen junto al primero, como alternos internos. Los tres componen un ángulo llano. Así obtenemos

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

La recta auxiliar convierte tres medidas situadas en lugares diferentes en partes de una misma medida. El paralelismo es el paso que permite reunirlas.

Problema 6. Tres expresiones para un triángulo

Enunciado. Los ángulos interiores de un triángulo miden $2x$, $x + 30$ y $3x - 30$ grados. Encuentra las medidas.

Solución. La suma exige $2x+(x+30)+(3x-30) = 180$. Entonces $6x = 180$ y $x = 30$. Cada ángulo mide 60°. Los tres son positivos y su suma es llana, de modo que las medidas son compatibles con un triángulo euclidiano. La ecuación procede de una propiedad demostrada mediante la paralela auxiliar.

Problema 7. Un ángulo exterior reúne dos interiores

Enunciado. Al prolongar un lado de un triángulo, el ángulo exterior en un vértice mide 128°. Uno de los interiores de los otros dos vértices mide 53°. Encuentra los dos ángulos interiores restantes.

Solución. El interior adyacente al exterior mide $180 - 128 = 52$ grados. El tercero mide $180 - 52 - 53 = 75$ grados. También podemos escribir directamente $128 = 53 + 75$: el exterior equivale a la suma de los dos interiores no adyacentes, porque tanto esa suma como el exterior completan 180° con el interior del mismo vértice. Esta identidad vale para el ángulo exterior formado al prolongar un lado.

Problema 8. Cuatro vértices y una diagonal

Enunciado. Un cuadrilátero convexo tiene ángulos interiores de $3x$, $2x$, $x + 20$ y 100 grados. Encuentra sus medidas.

Solución. Una diagonal interior lo divide en dos triángulos. Sus sumas angulares reúnen exactamente los cuatro ángulos del cuadrilátero, de modo que suman 360°. Obtenemos $3x + 2x + x + 20 + 100 = 360$, luego $x = 40$. Las medidas son 120°, 80°, 60° y 100°; suman 360 y cada una es menor que 180, como exige la convexidad.

Un **polígono simple** tiene una frontera cerrada formada por segmentos que solo se encuentran en extremos consecutivos. Consideraremos polígonos con interior y sin tres vértices consecutivos alineados. Es **convexo** si el segmento que une dos puntos cualesquiera de su región permanece en ella. En un polígono convexo de $n \geq 3$ lados, las diagonales desde un vértice lo dividen en $n - 2$ triángulos sin solapar interiores. Por tanto, su suma angular es $(n - 2)180^\circ$. Un polígono regular tiene todos sus lados y todos sus ángulos iguales.

Problema 9. Reconstruir el número de lados

Enunciado. Cada ángulo interior de un polígono convexo regular mide 150°. Encuentra su número de lados.

Solución. Si tiene n lados, la suma de sus ángulos es $150n$ y también $180(n-2)$. Igualarlas da $30n = 360$, de donde $n = 12$. El resultado es un entero al menos tres. Cada ángulo exterior mide $180 - 150 = 30$ grados; doce giros de esa medida completan 360°.

Problema 10. Una vuelta completa con giros desiguales

Enunciado. Un pentágono convexo tiene ángulos exteriores, tomados todos con el mismo sentido de recorrido, de 50°, 70°, 80°, 60° y 100°. Comprueba la suma y decide si es regular.

Solución. Los exteriores suman 360°. Sus interiores respectivos son 130°, 110°, 100°, 120° y 80°; suman $540^\circ = 3 \cdot 180^\circ$. La desigualdad de sus ángulos basta para descartar regularidad. La suma exterior de una vuelta se cumple en cualquier polígono convexo recorrido con giros del mismo sentido; por sí sola deja abiertas las medidas de cada giro y las longitudes de los lados.

Propiedades angulares de triángulos y polígonos

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Triángulo euclidiano	Los tres ángulos interiores suman 180°; los vértices son no alineados.
Ángulo exterior de un triángulo	Es igual a la suma de los dos interiores no adyacentes, al prolongar un lado.
Polígono convexo	Para $n \geq 3$ lados, la suma interior es $(n-2)180^\circ$.
Vuelta exterior	En un polígono convexo, un exterior por vértice y todos con el mismo sentido suman 360°.
Polígono regular convexo	Cada interior mide $(n-2)180^\circ/n$ y cada exterior $360^\circ/n$.

Pruebas. Véase «Triángulos, diagonales y sumas angulares» en el apéndice.

Longitudes que pueden cerrar una figura

Problema 11. Elegir el tercer lado

Enunciado. Dos lados de un triángulo miden 4 cm y 7 cm. ¿Qué valores puede tener el tercero, x? ¿Cuántos son enteros en centímetros?

Solución. Cualquier lado debe ser menor que la suma de los otros dos. De $x < 4 + 7$ obtenemos $x < 11$; de $7 < 4 + x$, $x > 3$. La tercera condición, $4 < 7 + x$, ya se cumple en ese intervalo. Por tanto, $3 < x < 11$. Los valores enteros son 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10: siete posibilidades. En los extremos 3 y 11 los segmentos se alinean y el triángulo pierde su interior. La construcción por intersección de circunferencias permite formar el triángulo para cada valor estrictamente intermedio.

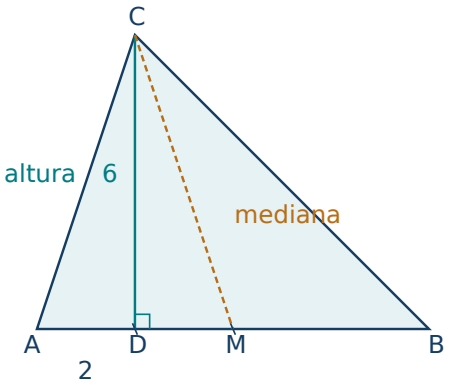
Esta **desigualdad triangular estricta** expresa que un camino quebrado entre dos puntos, con un vértice fuera de la recta, es más largo que el segmento directo. Adoptamos esta propiedad de la distancia euclidiana. La igualdad corresponde a puntos alineados con el intermedio en el segmento. Para tres longitudes positivas a, b, c, las tres desigualdades se reúnen en $|a-b| < c < a+b$; estas

son también las condiciones para que dos circunferencias de radios a, b, cuyos centros distan c, se corten en dos puntos.

Problema 12. El punto medio y el pie de una perpendicular

Enunciado. Un triángulo tiene base $AB = 8$ cm. El pie D de la perpendicular desde C está en la base, a 2 cm de A, y $CD = 6$ cm. Si M es el punto medio de AB, distingue la mediana CM y la altura CD, y calcula el área.

Solución. El punto medio cumple $AM = MB = 4$ cm, mientras que $AD = 2$ cm. Por tanto, D y M son puntos distintos. La mediana une el vértice con el punto medio del lado opuesto; la altura es perpendicular a la recta de ese lado. En esta figura son segmentos distintos. El área utiliza la altura correspondiente a la base: $8 \cdot 6/2 = 24$ cm². La longitud de la mediana no interviene en esa fórmula. La derivación por duplicación que sigue explicará el factor un medio.



Medir una frontera y medir una región

El **perímetro** suma las longitudes de la frontera y se expresa en unidades de longitud. El **área** mide la región y se expresa en unidades cuadradas. Adoptamos que áreas de regiones con interiores separados se suman, que un movimiento rígido conserva el área y que un rectángulo de lados $b, h > 0$ tiene área bh. La última regla parte del conteo de cuadrados y se extiende a longitudes reales por aproximación. Es nuestra normalización de medida; las fórmulas de otras figuras se deducen de ella mediante recortes y duplicaciones.

Problema 13. Dos comparaciones entre área y perímetro

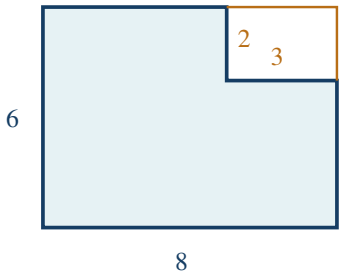
Enunciado. Compara un rectángulo de 6 por 4 cm con un cuadrado de lado 5 cm. Después compara el primer rectángulo con otro de 3 por 8 cm. ¿Qué información determina el perímetro sobre el área?

Solución. El primer rectángulo tiene perímetro $2(6 + 4) = 20$ cm y área 24 cm². El cuadrado tiene perímetro $4 \cdot 5 = 20$ cm y área 25 cm². Así, un mismo perímetro admite áreas distintas. El rectángulo de 3 por 8 tiene área 24 cm² y perímetro 22 cm, de modo que una misma área también admite perímetros distintos. Cada medida responde a un aspecto de la figura y debe calcularse con sus propios datos.

Problema 14. Recortar una esquina

Enunciado. De un rectángulo de 8 por 6 cm se recorta, en la esquina superior derecha, un rectángulo de 3 por 2 cm con lados paralelos a los originales. Encuentra el área y el perímetro de la región restante.

Solución. El área restante es $8 \cdot 6 - 3 \cdot 2 = 42$ cm². Recorremos su frontera: 8 cm abajo, 4 a la derecha, 3 hacia la izquierda en el entrante, 2 hacia arriba, 5 arriba y 6 a la izquierda. La suma es 28 cm. Coincide con el perímetro del rectángulo original: los tramos exteriores retirados, de 3 y 2 cm, se sustituyen por otros de las mismas longitudes en el entrante. Esa coincidencia depende de este recorte de esquina; abrir un entrante en medio de un lado produciría otra frontera.



Un triángulo rectángulo ocupa la mitad del rectángulo construido sobre sus dos lados perpendiculares: una media vuelta produce la otra mitad. En un triángulo cualquiera, trazar la altura permite sumar dos triángulos rectángulos si el pie está dentro de la base, o restar uno de otro si queda fuera. En ambos casos resulta $bh/2$. Una diagonal divide un paralelogramo en dos triángulos de igual base y altura, de modo que su área es bh. Estas descomposiciones justifican las fórmulas también cuando la figura está muy inclinada.

Problema 15. La altura pertenece a una base concreta

Enunciado. Un triángulo tiene una base de 10 cm, altura correspondiente de 6 cm y uno de sus lados oblicuos de 8 cm. Calcula el área y justifica por qué utilizas esas dos medidas.

Solución. Una copia del triángulo girada media vuelta y colocada junto a él forma un paralelogramo de base 10 y altura 6. El área total de ese paralelogramo es $10 \cdot 6 = 60$ cm²; cada copia ocupa la mitad, 30 cm². La altura mide una distancia perpendicular a la recta de la base. El lado oblicuo de 8 cm tiene otra dirección, por lo que el producto $10 \cdot 8/2$ no representa esta área. Para usar ese lado como base haría falta su propia altura perpendicular.

Problema 16. Deslizar un triángulo en un paralelogramo

Enunciado. Un paralelogramo tiene base 9 cm, lado contiguo 5 cm y altura respecto de esa base de 4 cm. Encuentra área y perímetro.

Solución. Un paralelogramo es un cuadrilátero con ambos pares de lados opuestos paralelos. Sus lados opuestos tienen la misma longitud, como se prueba al dividirlo por una diagonal y superponer los triángulos. El perímetro es $2(9 + 5) = 28$ cm. El recorte del extremo triangular y su traslado al otro extremo forman un rectángulo de base 9 y altura 4; el área es 36 cm². Si el desplazamiento lateral excede la base, podemos efectuar cortes adicionales; la aditividad conserva el mismo producto. La altura da la separación perpendicular entre las rectas paralelas que contienen las bases.

Problema 17. Dos trapecios componen un paralelogramo

Enunciado. Un trapecio convexo tiene bases paralelas de 6 cm y 10 cm, separadas por 4 cm. Encuentra el área.

Solución. Juntamos una copia girada media vuelta por uno de los lados no paralelos. Las dos piezas forman un paralelogramo de base $6 + 10 = 16$ cm y altura 4 cm. Su área es 64 cm²; el trapecio ocupa la mitad, 32 cm². El cálculo se resume en $(6+10)4/2$. La separación perpendicular es común a ambas bases. Usaremos «trapecio» para un cuadrilátero con al menos un par de lados opuestos paralelos; con esta convención los paralelogramos constituyen un caso particular y la fórmula sigue siendo válida.

Propiedades de longitudes y áreas

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Desigualdad triangular	Para un triángulo no degenerado, $\lvert a-b\rvert < c < a+b$. Distancias euclidianas positivas; los extremos corresponden a alineación.
Perímetro de un polígono	Es la suma de las longitudes de todos los lados de la frontera. Es una definición.
Rectángulo y cuadrado	Área bh; para lado l, área l^2 y perímetro $4l$. La medida rectangular es la normalización adoptada.
Paralelogramo	Área bh y perímetro $2(a+b)$, con lados contiguos a, b y altura h perpendicular a la base b.
Triángulo	Área $bh/2$, con altura perpendicular a la recta de la base, aunque su pie quede fuera del lado.
Trapecio	Área $(B+b)h/2$ con bases paralelas B, b y separación perpendicular h.
Descomposición	Áreas de piezas con interiores separados se suman; un recorte contenido se resta. Hay que conservar las unidades cuadradas.

Pruebas. Véase «Longitudes, superposición y medida de áreas» en el apéndice; se identifican los principios de distancia y medida adoptados.

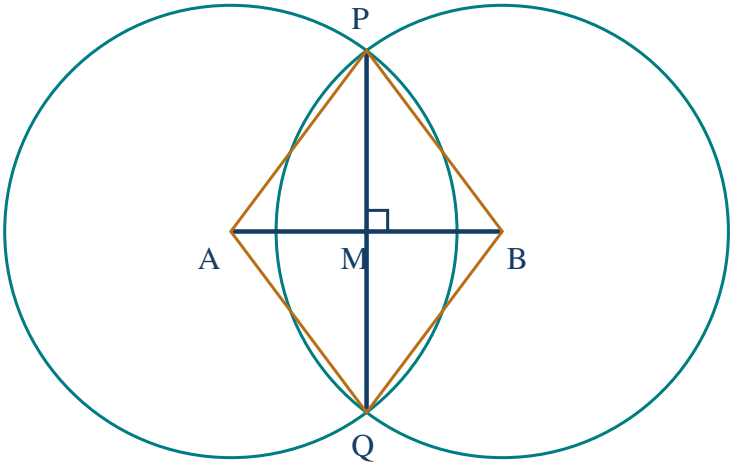
Construir deja una razón para cada trazo

Con una regla sin graduar podemos trazar la recta por dos puntos, y con el compás una circunferencia de centro y radio dados. Para construir una perpendicular tendremos que combinar esas operaciones de manera que las igualdades de distancias obliguen al ángulo recto buscado. El compás permitirá conservar y trasladar las distancias; las propiedades de superposición justificarán lo que produzcan sus intersecciones. En cada construcción seguiremos los trazos y después explicaremos por qué determinan la figura solicitada.

Problema 18. Una perpendicular que pasa por el punto medio

Enunciado. Construye la mediatriz de un segmento AB de 6 cm usando regla y compás. Justifica que la recta obtenida es perpendicular a AB y pasa por su punto medio.

Solución. Con centros A y B trazamos circunferencias del mismo radio, por ejemplo 5 cm. Como $0 < 6 < 10$, se cortan en dos puntos P, Q, uno a cada lado de AB. Trazamos la recta PQ. Las igualdades $AP = BP$, $AQ = BQ$ y el lado común PQ permiten superponer los triángulos APQ y BPQ por LLL. Por ello, PQ divide en dos el ángulo APB. Si $M = PQ \cap AB$, los triángulos APM y BPM tienen dos lados iguales y el ángulo comprendido igual; por LAL, $AM = BM$ y sus ángulos en M son iguales. Al ser adyacentes sobre AB, cada uno mide 90°. Así, $AM = BM = 3$ cm y PQ es la mediatriz. Las circunferencias de igual radio han producido las igualdades que sostienen la prueba.



AB = 6; radios = 5

Problema 19. Dividir un ángulo en dos partes iguales

Enunciado. Dado un ángulo de 70°, construye su bisectriz con regla y compás y determina las medidas resultantes.

Solución. Desde el vértice O, una circunferencia corta los dos lados en D, E, por lo que $OD = OE$. Con centros D, E trazamos arcos del mismo radio OD; además de O, se encuentran en un punto P interior al ángulo. Trazamos la semirrecta OP. Los triángulos ODP y OEP tienen $OD = OE$, $DP = EP$ y el lado común OP. Por LLL se superponen y sus ángulos en O son iguales. Como juntos componen el ángulo dado, cada uno mide 35°. La construcción parte de un ángulo ya dado; no necesita fabricar previamente setenta grados con regla y compás.

Problema 20. Construir desde tres longitudes

Enunciado. Construye un triángulo con lados 5, 6 y 8 cm. Explica cuántas posiciones puede tener el tercer vértice si fijas el lado de 8 cm.

Solución. Trazamos $AB = 8$ cm. Una circunferencia de centro A y radio 5 y otra de centro B y radio 6 determinan el vértice C. Se cortan porque $|6 - 5| < 8 < 6 + 5$. Hay dos intersecciones, una a cada lado de AB. Ambas producen las tres longitudes pedidas y son reflejos respecto de AB. Por LLL representan la misma forma y tamaño; la posición cambia con el semiplano elegido. Si fijamos además que C esté en uno de esos semiplanos, queda una sola posición.

Problema 21. Cuando los trazos no pueden cerrar

Enunciado. Se proponen triángulos de lados 2, 3 y 5 cm, y de lados 2, 3 y 6 cm. Decide qué ocurre al intentar construirlos.

Solución. Para el primero, $2 + 3 = 5$: las circunferencias con centros separados 5 cm y radios 2 y 3 se tocan en un punto del segmento entre los centros. Los tres vértices quedan alineados y el área es cero. Para el segundo, $2 + 3 < 6$: los radios juntos no alcanzan a salvar la distancia entre los centros y las circunferencias no se cortan. Ninguno produce un triángulo no degenerado. Las desigualdades permiten anticipar el resultado antes de ejecutar los trazos.

Propiedades de las construcciones

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Mediatriz	Dos circunferencias de igual radio $r > AB/2$, con $A \neq B$, determinan dos intersecciones; la recta por ellas es perpendicular a AB en su punto medio.
Bisectriz interior	Para $0^\circ < \theta < 180^\circ$, la construcción por arcos iguales produce una semirrecta que divide el ángulo en dos medidas $\theta/2$.
Tres lados	Para $a, b, c > 0$ con $\lvert a-b\rvert < c < a+b$, hay dos posiciones del tercer vértice, reflejadas respecto de la base fijada de longitud c.
Tangencia y separación	Si $c = a+b$ o $c = \lvert a-b\rvert > 0$, las circunferencias son tangentes y la figura es degenerada. Fuera del intervalo cerrado no se cortan. Centros coincidentes requieren examen aparte.

Pruebas. Véase «Mediatrices, bisectrices y construcción de triángulos» en el apéndice.

Qué conserva un movimiento

Podemos mover una figura sobre la página de distintas maneras. Una traslación desplaza todos sus puntos la misma distancia y dirección; un giro los hace rotar alrededor de un centro un ángulo fijo; una reflexión los sitúa al otro lado de un eje, a igual distancia perpendicular. Estos movimientos conservan distancias y ángulos y reciben el nombre de **isometrías**. Si realizamos varios sucesivamente, cada uno conserva las medidas que recibió del anterior, por lo que también las conserva la composición. Esa posibilidad de transportar una figura permitirá comparar sus partes con las de otra mediante superposición.

Problema 22. Reflejar una figura en una cuadrícula

Enunciado. En una cuadrícula, un triángulo tiene vértices $A = (1, 1)$, $B = (4, 1)$ y $C = (1, 3)$. Refleja la figura respecto del eje vertical de primera coordenada cero y encuentra área y perímetro en comparación con los originales.

Solución. Cada punto queda a la misma altura y pasa a la distancia horizontal opuesta del eje. Los vértices son $A' = (-1, 1)$, $B' = (-4, 1)$ y $C' = (-1, 3)$. Los lados horizontal y vertical miden 3 y 2 unidades; el área es $3 \cdot 2/2 = 3$ unidades cuadradas en ambas figuras. El tercer lado también conserva su longitud, por la reflexión, y por tanto los perímetros son iguales. Podemos concluir esa igualdad sin calcular la longitud del lado oblicuo. Las coordenadas aquí sirven para localizar puntos en la cuadrícula; su estudio métrico se desarrollará más adelante.

Problema 23. Dos reflexiones producen un desplazamiento

Enunciado. Reflejamos primero respecto de un eje vertical de primera coordenada cero y después respecto del eje vertical de primera coordenada tres. Describe el movimiento compuesto.

Solución. Un punto de coordenadas (x, y) pasa primero a $(-x, y)$. La reflexión respecto del segundo eje debe conservar el punto medio de las primeras coordenadas en 3: la nueva coordenada es $6 - (-x) = x + 6$. El resultado es $(x + 6, y)$, una traslación de seis unidades hacia la derecha. La separación entre ejes es tres; la composición desplaza el doble en la dirección que va del

primer eje al segundo. Cada paso conserva distancias y ángulos, y su composición conserva ambas propiedades. Invertir el orden daría el desplazamiento opuesto.

Problema 24. Una conjetura sobre diagonales

Enunciado. Se afirma que todo cuadrilátero cuyas diagonales se cortan en sus puntos medios es un rectángulo. Examina la afirmación mediante los vértices consecutivos $(0,0)$, $(4,0)$, $(5,2)$ y $(1,2)$.

Solución. En una cuadrícula podemos localizar el punto medio promediando cada coordenada. Las diagonales unen $(0,0)$ con $(5,2)$ y $(4,0)$ con $(1,2)$; ambas tienen punto medio $(5/2,1)$. Se cumple la hipótesis. Sin embargo, el lado que va de $(0,0)$ a $(1,2)$ es oblicuo respecto del lado horizontal inferior; una perpendicular al horizontal sería vertical. El ángulo de ese vértice no es recto. Tenemos un paralelogramo que refuta la afirmación. Un rectángulo sí tiene diagonales que se bisecan, pero su recíproco necesita condiciones adicionales. La prueba o el contraejemplo debe referirse a la propiedad que se afirma para todos los casos.

Propiedades de movimientos y cuadriláteros

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Movimientos rígidos	Traslaciones, giros y reflexiones conservan longitudes, ángulos y áreas, según las reglas euclidianas de superposición y medida adoptadas.
Composición	Si cada movimiento conserva una medida, su composición conserva esa medida.
Reflexiones en ejes paralelos	Dos reflexiones en ejes separados por $d > 0$ producen una traslación de longitud $2d$, del primer eje hacia el segundo.
Paralelogramo	Sus lados opuestos son iguales y sus diagonales se bisecan. Se presupone que ambos pares de lados opuestos son paralelos.
Rectángulo y cuadrado	Un rectángulo tiene cuatro ángulos rectos; un cuadrado es un rectángulo con los cuatro lados iguales. Son definiciones; ser paralelogramo por sí solo no impone ángulos rectos.

Pruebas. Véase «Movimientos rígidos y argumentos sobre cuadriláteros» en el apéndice.

Ejercicios para trabajar sin profesor

Describe primero las condiciones de la figura. En las cuentas angulares, identifica el teorema que permite escribir cada igualdad. En las áreas, empareja cada base con su altura; en una construcción, explica por qué el trazo tiene la propiedad buscada.

1. A, B, C están alineados con B entre los otros dos; $AC = 23$ cm y $AB = 9$ cm. Encuentra BC y describe las semirrectas de origen B.

2. Dos ángulos adyacentes componen uno llano y miden $x + 10$ y $3x + 10$ grados. Encuentra sus medidas.

3. Dos opuestos por el vértice miden $2x + 15$ y $4x - 25$ grados. Encuentra las cuatro medidas del cruce.

4. Una transversal corta dos paralelas y forma un ángulo agudo de 74°. Encuentra las ocho medidas.

5. Dos rectas y una transversal forman alternos internos de 82° cada uno. Justifica el paralelismo.

6. Los ángulos de un triángulo miden x, $2x$ y $x+20$ grados. Encuentra las medidas y recuerda dónde interviene el postulado de las paralelas.

7. Un ángulo exterior de un triángulo mide 137° y uno de los interiores no adyacentes mide 61°. Encuentra los otros interiores.

8. Un cuadrilátero convexo tiene ángulos x, $2x$, $x+40$ y 80 grados. Encuentra sus medidas.

9. Cada interior de un polígono regular convexo mide 156°. Encuentra su número de lados.

10. Los exteriores de un pentágono convexo, recorridos con el mismo sentido, miden 40, 60, 80, 90 y 90 grados. Comprueba las sumas y examina su regularidad.

11. Dos lados de un triángulo miden 5 y 8 cm. Encuentra el intervalo del tercero y cuenta los valores enteros en centímetros.

12. Una base triangular mide 10 cm, su altura 4 cm y el pie está a 3 cm del extremo izquierdo, dentro de la base. Localiza el punto medio, distingue mediana y altura y calcula el área.

13. Compara un rectángulo de 8 por 2 cm y un cuadrado de lado 5 cm. Después compara ese rectángulo con un cuadrado de lado 4 cm. Examina qué igualdades de perímetro o área se cumplen.

14. De un rectángulo de 10 por 7 cm se recorta la esquina superior derecha de 4 por 3 cm, con lados paralelos a los iniciales. Encuentra área y perímetro restantes.

15. Un triángulo tiene base 12 cm, altura correspondiente 5 cm y un lado oblicuo de 7 cm. Calcula el área y explica qué papel cumple la perpendicularidad.

16. Un paralelogramo tiene base 8 cm, lado contiguo 4 cm y altura correspondiente 3 cm. Encuentra área y perímetro.

17. Un trapecio tiene bases paralelas de 5 y 11 cm y altura 6 cm. Justifica su área por duplicación.

18. Construye la mediatriz de un segmento de 8 cm usando circunferencias de radio 5 cm. Justifica el punto medio y la perpendicularidad.

19. Construye la bisectriz de un ángulo dado de 80° y justifica las medidas obtenidas.

20. Construye un triángulo de lados 4, 7 y 9 cm, fijando la base de 9. Describe las posiciones posibles del tercer vértice.

21. Examina las propuestas de lados 3, 4 y 7 cm, y de lados 3, 4 y 8 cm. Explica el resultado de cada construcción.

22. Refleja respecto del eje vertical de primera coordenada cero el triángulo $(2,1)$, $(6,1)$, $(2,4)$. Compara área y perímetro.

23. Refleja primero respecto del eje vertical de primera coordenada 1 y después respecto del de primera coordenada 5. Encuentra la transformación compuesta y el desplazamiento.

24. Examina la conjetura «si las diagonales se bisecan, el cuadrilátero es rectángulo» con los vértices consecutivos $(0,0)$, $(6,0)$, $(8,3)$ y $(2,3)$.

Soluciones desarrolladas

Ejercicio 1. Usar el orden de los puntos

Como B está entre A y C, $AB + BC = AC$. Así, $BC = 23 - 9 = 14$ cm. Las semirrectas desde B hacia A y hacia C son opuestas. La resta utiliza el orden declarado, que también permite reconstruir la posición relativa.

Ejercicio 2. Completar ciento ochenta grados

La suma es $(x + 10) + (3x + 10) = 180$, de donde $4x = 160$ y $x = 40$. Las medidas son 50° y 130°, positivas y suplementarias. Los lados exteriores opuestos son los que hacen llano el ángulo total.

Ejercicio 3. Restar un mismo suplemento

Los opuestos por el vértice son iguales porque completan un ángulo llano con un mismo vecino. Entonces $2x + 15 = 4x - 25$, luego $x = 20$ y los dos dados miden 55°. Los vecinos miden 125°. Las cuatro medidas suman 360°.

Ejercicio 4. Transportar una medida a la otra intersección

Los opuestos al ángulo dado miden 74° y sus adyacentes, 106°. La igualdad de correspondientes en paralelas transporta estas medidas a la otra intersección. En total hay cuatro ángulos de 74° y cuatro de 106°; cada pareja de interiores del mismo lado suma 180 grados.

Ejercicio 5. Una paralela auxiliar prueba el recíproco

Por la segunda intersección trazamos la paralela a la primera recta. Su alterno interno debe medir 82°. En el semiplano indicado, la semirrecta que forma esa medida con la transversal es única. Por tanto, coincide con la segunda recta dada. Queda probado el paralelismo mediante una dirección identificada, con las posiciones angulares fijadas.

Ejercicio 6. Una suma apoyada en paralelas

La suma interior es $x + 2x + x + 20 = 180$. Así, $x = 40$ y los ángulos miden 40°, 80° y 60°. Son positivos y suman 180. El teorema de la suma se obtiene trazando por un vértice una paralela al lado opuesto y reuniendo tres ángulos mediante alternos internos. Ahí interviene la hipótesis euclidiana.

Ejercicio 7. Separar el interior adyacente y los remotos

El interior junto al exterior mide $180 - 137 = 43$ grados. El otro remoto mide $137 - 61 = 76$ grados, por el teorema del ángulo exterior. Se comprueba $43 + 61 + 76 = 180$. El exterior se ha formado prolongando un lado del triángulo.

Ejercicio 8. Dividir por una diagonal

La diagonal interior produce dos triángulos, así que la suma es 360 grados. Tenemos $x + 2x + x + 40 + 80 = 360$, de donde $x = 60$. Las medidas son 60°, 120°, 100° y 80°, todas menores que 180 y con la suma requerida.

Ejercicio 9. Contar los giros de una vuelta

Cada exterior mide $180 - 156 = 24$ grados. Como el polígono es regular convexo, todos esos giros son iguales y suman 360. Por tanto, $n = 360/24 = 15$. La suma interior verifica $15 \cdot 156 = 2340 = 13 \cdot 180$ grados.

Ejercicio 10. Una suma común a figuras distintas

Los exteriores suman $40 + 60 + 80 + 90 + 90 = 360$ grados. Los interiores son 140, 120, 100, 90 y 90 grados y suman 540. Los ángulos desiguales impiden que sea regular. Cumplir la suma de una vuelta conserva una relación global y deja diferentes formas posibles.

Ejercicio 11. Un intervalo abierto de longitudes

Las condiciones son $x < 5 + 8 = 13$ y $x > 8 - 5 = 3$. Así, $3 < x < 13$ cm. Los enteros son del 4 al 12, ambos incluidos: nueve valores. En los extremos las circunferencias serían tangentes y los puntos quedarían alineados; por eso el intervalo es abierto.

Ejercicio 12. Dos puntos distintos de la base

El punto medio está a 5 cm de cada extremo, mientras que el pie de la altura está a 3 cm del izquierdo. La mediana y la altura llegan a puntos distintos. El área utiliza la distancia perpendicular: $10 \cdot 4/2 = 20$ cm². Conocer el punto medio basta para trazar la mediana, pero su longitud no es la altura que figura en este producto.

Ejercicio 13. Dos medidas independientes

El rectángulo de 8 por 2 tiene perímetro 20 cm y área 16 cm². El cuadrado de lado 5 tiene perímetro 20 cm y área 25 cm². Comparten perímetro y difieren en área. El cuadrado de lado 4 tiene área 16 cm² y perímetro 16 cm: comparte área con el rectángulo y difiere en perímetro. Los ejemplos refutan ambas determinaciones automáticas.

Ejercicio 14. Seguir la frontera del recorte

El área es $10 \cdot 7 - 4 \cdot 3 = 58$ cm². Los seis lados de la frontera miden 10, 4, 4, 3, 6 y 7 cm; su suma es 34 cm. Retirar una esquina paralela a los lados sustituye dos tramos exteriores por dos interiores de iguales longitudes. El área disminuye y, en este recorte concreto, el perímetro permanece igual al inicial.

Ejercicio 15. Emparejar base y altura

El área es $12 \cdot 5/2 = 30$ cm². Una copia girada forma con el triángulo un paralelogramo de doble área, base 12 y altura 5. La distancia perpendicular permite aplicar esa duplicación; el lado oblicuo de 7 cm no es la altura correspondiente a la base elegida.

Ejercicio 16. El lado y la separación entre bases

El perímetro suma los lados: $2(8 + 4) = 24$ cm. El área utiliza base y altura: $8 \cdot 3 = 24$ cm², por el recorte y traslado que producen un rectángulo. Los valores numéricos coinciden, pero expresan magnitudes distintas y llevan unidades distintas.

Ejercicio 17. El área de dos copias

Dos trapecios iguales, con uno girado media vuelta, forman un paralelogramo de base $5+11=16$ cm y altura 6 cm. Su área es 96 cm^2. Cada trapecio ocupa la mitad, 48 cm^2. Las dos bases iniciales son paralelas y la altura mide su separación perpendicular.

Ejercicio 18. Igualdades que produce el compás

Las circunferencias de centros A, B, distantes 8 cm, y radio 5 se cortan en dos puntos P, Q, porque $0 < 8 < 10$. La recta PQ encuentra a AB en M. Por LLL, los triángulos APQ y BPQ se superponen y dan iguales ángulos en P. Entonces APM y BPM se superponen por LAL: $AM = BM = 4$ cm y los ángulos adyacentes en M son iguales. Como suman 180 grados, cada uno mide 90. Esta es la mediatriz buscada.

Ejercicio 19. Dos mitades de un ángulo dado

Una circunferencia de centro en el vértice O corta los lados en D, E con $OD = OE$. Los arcos de centros D, E y radio común OD se encuentran, además de O, en el punto interior P. Los triángulos ODP, OEP tienen sus tres lados correspondientes iguales y se superponen por LLL. Por ello, OP divide los 80 grados en dos ángulos de 40 grados. El argumento justifica la construcción a partir del ángulo dado.

Ejercicio 20. Dos posiciones reflejadas

Fijamos $AB = 9$ cm y trazamos circunferencias de centros A, B y radios 4 y 7. Como $|7-4| < 9 < 7+4$, hay dos intersecciones. Cada una satisface las tres distancias. Son imágenes por reflexión respecto de AB; fijar un semiplano selecciona una sola. LLL garantiza el mismo tamaño y forma de ambos triángulos.

Ejercicio 21. Tangencia y ausencia de intersección

Para 3, 4 y 7, la igualdad $3+4=7$ produce tangencia exterior: los tres puntos están alineados y el área es cero. Para 3, 4 y 8, la desigualdad $3+4<8$ deja las circunferencias separadas. Ninguna propuesta satisface la desigualdad triangular estricta, así que ninguna construye un triángulo con interior.

Ejercicio 22. Un reflejo conserva las medidas

Los vértices se convierten en $(-2,1)$, $(-6,1)$ y $(-2,4)$. Se conservan los catetos horizontal y vertical, de 4 y 3 unidades, y el área vale $4 \cdot 3/2 = 6$ unidades cuadradas en ambas figuras. La reflexión conserva también el lado oblicuo; por eso los perímetros son iguales. Este último razonamiento utiliza la isometría y no necesita calcular ese lado.

Ejercicio 23. Dos ejes separados cuatro unidades

Reflejar (x, y) respecto del eje de primera coordenada 1 da $(2-x, y)$. Reflejar después respecto del de primera coordenada 5 da $(10-(2-x), y) = (x+8, y)$. El resultado es una traslación de ocho unidades hacia la derecha, el doble de la separación entre ejes. La composición conserva longitudes y ángulos porque cada uno de los dos pasos los conserva.

Ejercicio 24. Un contraejemplo con punto medio común

Los puntos medios de las diagonales son $((0+8)/2, (0+3)/2) = (4, 3/2)$ y $((6+2)/2, (0+3)/2) = (4, 3/2)$. La hipótesis se cumple. El lado desde $(0, 0)$ hasta $(2, 3)$ es oblicuo, mientras que la base es horizontal; por ello no forman un ángulo recto. El cuadrilátero es un paralelogramo y no es rectángulo. Un caso que cumple la hipótesis y falla la conclusión basta para refutar la afirmación universal.

Diagnóstico de salida

Una figura puede sugerir una relación; los datos y las propiedades permiten sostenerla. En una cuenta angular, la recta auxiliar reúne ángulos que antes estaban separados. En un área, el recorte explica el producto que calculamos. En una construcción, las igualdades creadas por el compás justifican el trazo. Aprender a reconocer esas razones permite reconstruir un argumento cuando cambia la posición o el aspecto del dibujo.

CAPÍTULO 12

Congruencia, semejanza, Pitágoras y escalas

Un carpintero necesita reproducir un refuerzo triangular que encaje en la misma esquina. Medir una base deja libres muchas piezas posibles; añadir otra longitud puede seguir permitiendo que el ángulo entre ambas cambie. Queremos saber qué datos bastan para que la nueva pieza tenga el mismo tamaño y la misma forma. El problema se transforma si lo que necesitamos es dibujar un plano reducido de la pieza: las longitudes cambiarán, pero habrá relaciones que debemos conservar para recuperar sus medidas.

Los movimientos rígidos del capítulo anterior permitirán precisar la primera comparación mediante la congruencia. Para la segunda necesitaremos estudiar figuras semejantes y el factor que relaciona sus longitudes. Seguir ese factor en triángulos rectángulos hará posible comparar alturas inaccesibles, interpretar escalas y justificar relaciones entre lados, entre ellas el teorema de Pitágoras. Empezaremos por examinar los datos de dos piezas y establecer una correspondencia que indique qué vértices y qué lados se están comparando.

Una figura que puede volver a construirse

Podemos ensayar esa distinción con papel. Recortar un triángulo y moverlo sobre la mesa conserva todas sus longitudes. Ampliar su dibujo al doble conserva los ángulos y duplica las longitudes. La primera operación permite superponer las figuras; la segunda exige reconocer una misma forma en tamaños distintos. Estas dos maneras de comparar figuras conducen a la congruencia y a la semejanza.

Trabajaremos en el plano euclidiano del capítulo anterior. Las longitudes serán positivas cuando se refieran a lados de un triángulo, y los triángulos tendrán vértices no alineados. Conservaremos las reglas de superposición por tres lados y por dos lados con el ángulo comprendido. Conviene reconocer esas bases: los argumentos que siguen desarrollan sus consecuencias.

Problema 1. Tres medidas y una correspondencia

Enunciado. Un refuerzo tiene $AB = 5$ cm, $BC = 7$ cm y $CA = 8$ cm. Otro tiene $DE = 7$ cm, $EF = 8$ cm y $FD = 5$ cm. ¿Son congruentes? Escribe la correspondencia entre sus vértices.

Solución. Los dos lados que concurren en A miden 5 y 8; en el segundo triángulo concurren en F. Por tanto, A corresponde a F. El lado AB, de 5 cm, corresponde a FD, de modo que B corresponde a D; queda C con E. Las tres igualdades quedan ordenadas como $AB = FD$, $BC = DE$ y $CA = EF$. Por el criterio lado–lado–lado, los triángulos son congruentes y podemos escribir $ABC \cong FDE$. El orden registra qué partes se comparan. La desigualdad $5 + 7 > 8$, junto con las otras dos, confirma que las medidas permiten construir un triángulo.

Dos figuras son **congruentes** cuando un movimiento rígido, o una composición de ellos, lleva una a la otra. Se permite dar vuelta una pieza, operación representada por una reflexión. Bajo la

correspondencia resultante coinciden lados y ángulos. En triángulos, ciertas colecciones pequeñas de datos bastan para asegurar esa superposición. Decimos que constituyen un criterio porque permiten concluir la congruencia antes de comparar todas las medidas.

Problema 2. El ángulo que sujeta dos lados

Enunciado. Dos triángulos tienen sendos lados de 6 y 9 cm y el ángulo comprendido entre ellos mide 50°. Justifica su congruencia. Explica por qué importa la palabra «comprendido».

Solución. Colocamos juntos los vértices de esos ángulos y hacemos coincidir una de sus semirrectas. La igualdad angular hace coincidir la otra; las longitudes de 6 y 9 cm sitúan los otros dos vértices sobre esas semirrectas. El criterio lado–ángulo–lado asegura la superposición de los triángulos. El ángulo indicado une precisamente los dos lados medidos. Si se especifica un ángulo situado en otro vértice, ese argumento deja de fijar la abertura entre ellos. Al final del capítulo construiremos dos triángulos distintos con dos lados y un ángulo no comprendido iguales.

Problema 3. Reproducir una base y dos direcciones

Enunciado. En un terreno triangular se ha medido una base de 24 m y sus ángulos adyacentes, de 48° y 67°. ¿Determinan esos datos un único tamaño y forma de triángulo?

Solución. Fijada la base, trazamos desde sus extremos, en un mismo semiplano, las semirrectas que forman los ángulos prescritos. Su intersección determina el tercer vértice. La suma $48^\circ + 67^\circ = 115^\circ < 180^\circ$ permite un tercer ángulo positivo de 65°. Cualquier triángulo con esos datos puede colocar su base sobre la primera y hacer coincidir las dos direcciones; resulta congruente con él por ángulo–lado–ángulo. Elegir el otro semiplano produce la figura reflejada, que también es congruente. La unicidad se refiere al tamaño y a la forma, permitiendo movimientos rígidos.

Si conocemos dos ángulos y un lado que no está entre ellos, la suma angular determina el tercero y permite usar el criterio anterior. Tres ángulos, en cambio, dejan libre el tamaño: todos los triángulos equiláteros tienen ángulos de 60°, aunque sus lados puedan medir 2 cm o 20 cm.

Problema 4. La mediana de un isósceles

Enunciado. En el triángulo ABC se cumple $AB = AC$. El punto M es el punto medio de BC. Demuestra que AM es perpendicular a BC y biseca el ángulo en A.

Solución. Los triángulos ABM y ACM tienen $AB = AC$, $BM = CM$ y el lado AM común. Son congruentes por tres lados. Sus ángulos en A son iguales, así que AM biseca el ángulo original. También son iguales los ángulos BMA y AMC. Como B, M, C están alineados y M está entre los extremos, estos últimos son adyacentes y suman 180°. Cada uno mide 90°. La mediana es, por tanto, una altura. La igualdad de los lados fue el dato que permitió reunir esas dos funciones del segmento.

Criterios de congruencia que hemos utilizado

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Lado–lado–lado	Tres lados correspondientes iguales determinan congruencia; triángulos no degenerados.
Lado–ángulo–lado	Dos lados correspondientes y el ángulo comprendido iguales determinan congruencia.
Ángulo–lado–ángulo	Un lado y sus dos ángulos adyacentes correspondientes iguales determinan congruencia.
Dos ángulos y un lado	Se obtiene el tercer ángulo por la suma de 180° y se reduce al criterio anterior.
Isósceles y mediana	Si $AB = AC$ y $BM = CM$, la mediana AM es altura y bisectriz.

Pruebas. Véase «Congruencia, datos suficientes y simetría del isósceles» en el apéndice; se distinguen las reglas de superposición adoptadas de sus consecuencias.

La proporción que producen las paralelas

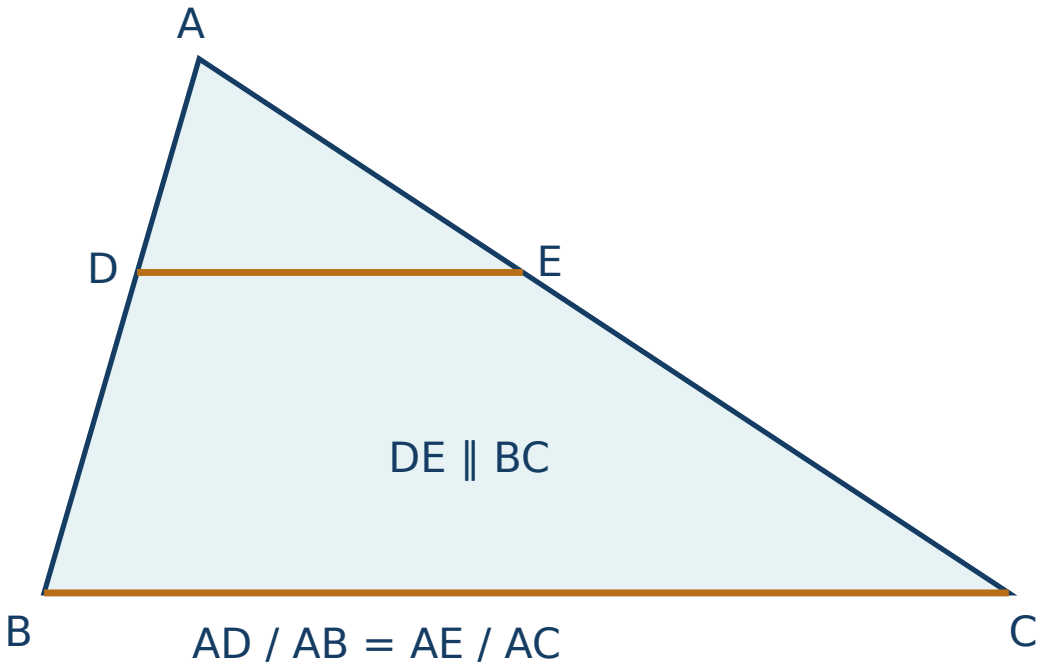
Dentro de un triángulo ABC, marquemos D en el interior de AB y tracemos por él la paralela a BC. Cortará AC en un punto interior E. Al acercar la paralela a A, ambas partes del triángulo disminuyen coordinadamente. Podemos probar la proporción sin medir ángulos ni suponer semejanza de antemano.

Denotemos por $[XYZ]$ el área del triángulo XYZ. Para comparar los tramos que corta la paralela, buscaremos triángulos cuyas áreas tengan relaciones fáciles de calcular. Los triángulos BDE y CDE comparten la base DE, y sus vértices B, C están en una paralela a ella: tienen la misma altura y por tanto la misma área.

Comparemos ahora cada uno con ADE. Las bases AD, DB están sobre una misma recta y la altura desde E es común, por lo que el cociente de las áreas de ADE y BDE es AD/DB. Del mismo modo, las bases AE, EC dan el cociente AE/EC entre las áreas de ADE y CDE. Las dos comparaciones tienen la misma área en el numerador y áreas iguales en el denominador, así que

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}.$$

Sumar una unidad a ambos miembros y tomar los recíprocos da también $AD/AB = AE/AC$. Hemos obtenido la configuración triangular del **teorema de Tales** que usaremos: una paralela corta proporcionalmente los dos lados.



Problema 5. Comparar partes con partes

Enunciado. En la configuración anterior, $AD = 4$ cm, $DB = 6$ cm y $AC = 15$ cm. Encuentra AE y EC.

Solución. El lado completo AB mide $4 + 6 = 10$ cm. Como DE es paralelo a BC, $AE/AC = AD/AB = 4/10$. Por tanto, $AE = 15 \cdot 4/10 = 6$ cm y $EC = 15 - 6 = 9$ cm. Podemos comprobarlo con la otra proporción: $AD/DB = 4/6 = 2/3$ y $AE/EC = 6/9 = 2/3$. Usar $4/6$ como cociente entre una parte y el lado completo habría cambiado las cantidades comparadas.

Problema 6. Reconocer una paralela a partir de razones

Enunciado. Los puntos D, E son interiores a AB, AC. Se sabe que $AD = 3$, $DB = 2$, $AE = 6$ y $EC = 4$, en centímetros. ¿Podemos asegurar que DE es paralelo a BC?

Solución. Las razones son $AD/DB = 3/2$ y $AE/EC = 6/4 = 3/2$. Para justificar el sentido inverso, tracemos por D la paralela a BC y llamemos E_0 a su corte con AC. Tales da $AE_0/AC = AD/AB = 3/5$. Los datos también dan $AE/AC = 6/10 = 3/5$. Sobre el segmento AC hay un único punto a esa fracción de su longitud desde A, luego $E_0 = E$. La recta DE coincide con la paralela construida. Las posiciones interiores y el orden de los puntos forman parte de las hipótesis.

Problema 7. Dividir una longitud sin graduar la regla

Enunciado. Describe una construcción que divida un segmento de 17,5 cm en partes en razón $3 : 2$. Calcula las longitudes resultantes.

Solución. Desde un extremo A trazamos una semirrecta auxiliar distinta de la recta del segmento. Con el compás señalamos cinco tramos iguales consecutivos, hasta un punto U_5. Unimos U_5 con el otro extremo B y trazamos por U_3 la paralela a U_5B; su intersección con AB es D. Tales

asegura $AD/AB = AU_3/AU_5 = 3/5$. Por ello, $AD = 17{,}5 \cdot 3/5 = 10{,}5$ cm y $DB = 7$ cm. El cociente $10{,}5/7 = 3/2$ comprueba el reparto. El tamaño de los cinco pasos auxiliares puede elegirse libremente; la razón queda fijada por cuántos pasos tomamos.

Propiedades de las secciones paralelas

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Tales, partes consecutivas	$AD/DB = AE/EC$ si D, E son interiores a AB, AC y DE es paralelo a BC.
Tales, parte y lado completo	Bajo las mismas hipótesis, $AD/AB = AE/AC$.
Recíproco interior	Si $AD/AB = AE/AC$ y ambos puntos son interiores, entonces DE es paralelo a BC.
División proporcional	Una división en razón $m : n$, con $m, n > 0$, sitúa el primer tramo a la fracción $m/(m+n)$ del total.

Pruebas. Véase «Tales por comparación de áreas y su recíproco» en el apéndice.

Conservar la forma al cambiar el tamaño

Las paralelas permiten separar forma y tamaño. Dos triángulos son **semejantes** si existe una correspondencia que iguala sus ángulos y hace proporcionales sus lados con una razón común $k > 0$. La razón se lee siempre desde una figura hacia la otra: si $ABC \sim A'B'C'$, escribimos

$$k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}.$$

Volver de la segunda figura a la primera utiliza $1/k$. Cuando $k = 1$, las figuras son congruentes.

En triángulos basta conocer dos ángulos correspondientes iguales. Para ver por qué, supongamos que el segundo triángulo tiene un lado menor o igual que el correspondiente del primero; podemos intercambiar sus papeles para conseguirlo. Sobre ese lado del primero marcamos la longitud del segundo y trazamos la paralela al lado opuesto. Tales fija la proporción de las dos distancias desde el vértice. El triángulo recortado tiene el lado y los ángulos adyacentes del segundo, por lo que es congruente con él. Quedan iguales los ángulos y proporcionales los lados. En el apéndice se detalla también cómo obtener la razón del tercer lado. Este criterio se llama **ángulo–ángulo**, o AA.

Problema 8. Una razón para los tres lados

Enunciado. Dos triángulos tienen lados de 6, 8 y 10 cm, y de 9, 12 y 15 cm. Establece si son semejantes y determina la razón del primero al segundo.

Solución. Ordenamos los lados correspondientes de menor a mayor y calculamos $9/6 = 12/8 = 15/10 = 3/2$. La coincidencia de las tres razones permite usar el criterio de semejanza por tres lados proporcionales. El factor es $k = 3/2$: cada longitud del segundo es una vez y media la del primero. Las medidas verifican las desigualdades triangulares. La prueba del criterio consiste en recortar del mayor, mediante una paralela, un triángulo con las longitudes del menor y aplicar congruencia por tres lados; así también se justifican las igualdades angulares.

Problema 9. Emparejar ángulos antes de dividir

Enunciado. En ABC, los ángulos en A, B miden $37°, 63°$. En DEF, los ángulos en D, E miden $37°, 80°$. Si $AB = 8$ cm, $DF = 12$ cm y $BC = 5$ cm, calcula FE.

Solución. El tercer ángulo de ABC es $80°$, y el de DEF es $63°$. Las parejas son $A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow F$ y $C \leftrightarrow E$. Por AA, $ABC \sim DFE$. El lado AB corresponde a DF, luego la razón del primero al segundo es $12/8 = 3/2$. Por ello, $FE = (3/2)BC = 7,5$ cm. La escritura $ABC \sim DEF$ habría asociado ángulos diferentes y dirigido las razones hacia lados equivocados.

Problema 10. Medir un árbol por su sombra

Enunciado. Una vara vertical de 1,6 m proyecta una sombra de 1,2 m. Al mismo tiempo, un árbol vertical proyecta una sombra de 9 m sobre el mismo terreno horizontal. Suponiendo rayos solares paralelos, estima la altura del árbol.

Solución. Cada altura y su sombra forman los catetos de un triángulo rectángulo. Los rayos paralelos forman con el suelo el mismo ángulo, de modo que los triángulos son semejantes por AA. La correspondencia enfrenta alturas con alturas y sombras con sombras: $h/1,6 = 9/1,2$. Se obtiene $h = 12$ m. La relación altura/sombra vale $4/3$ en ambos casos. El resultado depende del modelo: verticalidad, suelo horizontal, simultaneidad y rayos paralelos. Una sombra medida en una pendiente exigiría revisar esa configuración.

Problema 11. La altura de una copia triangular

Enunciado. Una pieza triangular tiene base 4 cm, altura correspondiente 3 cm y uno de sus otros lados mide 5 cm. Una copia semejante tiene base correspondiente de 12 cm. Encuentra su altura, el lado correspondiente al de 5 cm y su área.

Solución. La razón es $12/4 = 3$. Al trazar la altura en cada triángulo, se forman triángulos rectángulos con iguales ángulos correspondientes; por AA, las alturas guardan la misma razón que las bases. La nueva altura mide $3 \cdot 3 = 9$ cm y el lado indicado, $3 \cdot 5 = 15$ cm. El área original es $4 \cdot 3/2 = 6$ cm^2 y la nueva es $12 \cdot 9/2 = 54$ cm^2. Multiplicar dos longitudes por 3 multiplicó su producto por 9. Esta observación explica el cambio de área.

Problema 12. Una ampliación que deforma

Enunciado. Se transforma un rectángulo de 4 por 6 cm en otro de 6 por 8 cm. ¿Conservar cuatro ángulos rectos basta para que ambos sean semejantes?

Solución. Las razones entre lados cortos y entre lados largos son $6/4 = 3/2$ y $8/6 = 4/3$, que difieren. Intercambiar lados tampoco ayuda: $8/4 = 2$ y $6/6 = 1$. No existe una razón común para todos los lados correspondientes, por lo que los rectángulos no son semejantes. La igualdad de todos los ángulos basta en triángulos gracias a su rigidez; para un cuadrilátero permite todavía variar las proporciones de sus lados. Una ampliación uniforme del primer rectángulo hasta un lado corto de 6 cm habría producido un lado largo de 9 cm.

Criterios de semejanza de triángulos

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Definición	Ángulos correspondientes iguales y lados correspondientes en una razón común $k > 0$.
Ángulo–ángulo	Dos ángulos correspondientes iguales bastan; el tercero se obtiene por la suma angular.
Tres lados proporcionales	$a'/a = b'/b = c'/c = k > 0$ determina semejanza.
Dos lados y ángulo comprendido	$a'/a = b'/b = k > 0$ y el ángulo comprendido igual determinan semejanza.
Razón inversa	La razón de regreso es $1/k$; con $k = 1$ se obtiene congruencia.

Pruebas. Véase «Criterios de semejanza a partir de Tales y congruencia» en el apéndice.

Longitudes, superficies y modelos a escala

Un plano a escala $1 : n$, con $n > 0$, representa una longitud real mediante su cociente por n, usando la misma unidad en ambos lados de la comparación. La escala describe una semejanza uniforme. Si una impresora cambia el ancho y el alto por factores distintos, el plano deja de tener una única escala de longitudes.

Problema 13. Del plano a la obra

Enunciado. En un plano a escala $1 : 250$, una pared mide 7,2 cm. ¿Cuál será su longitud real en metros?

Solución. Un centímetro del dibujo corresponde a 250 cm reales. La longitud es $7,2 \cdot 250 = 1800$ cm, equivalentes a 18 m. Multiplicamos por 250 antes de convertir centímetros en metros, de modo que cada operación conserva su significado. Comprobamos en sentido inverso: 18 m son 1800 cm y $1800/250 = 7,2$ cm de plano.

Problema 14. La escala después de imprimir

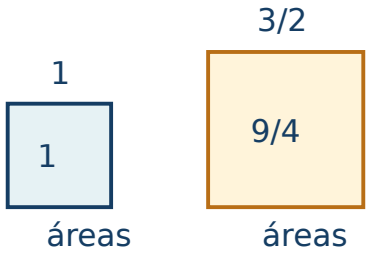
Enunciado. Un plano a escala $1 : 500$ se imprime al 80 % de sus dimensiones lineales. ¿Cuál es la escala de la copia?

Solución. Un tramo que medía 1 cm en el plano original mide 0,8 cm en la copia y sigue representando 500 cm reales. Por cada centímetro nuevo hay, entonces, $500/0,8 = 625$ cm reales: la escala es $1 : 625$. Reducir el dibujo aumentó el denominador de la escala. La relación se comprueba con un tramo de 1000 cm reales: antes medía 2 cm y después 1,6 cm, y $1,6 \cdot 625 = 1000$.

Problema 15. El aumento del borde y el de la región

Enunciado. Una figura poligonal de perímetro 30 cm y área 36 cm^2 se amplía uniformemente con razón $3/2$. Encuentra el nuevo perímetro y la nueva área.

Solución. Cada lado se multiplica por $3/2$; sumar los lados multiplica el perímetro por ese mismo número. El nuevo perímetro es 45 cm. Para el área podemos dividir el polígono en triángulos: bases y alturas correspondientes se multiplican por $3/2$, así que cada área se multiplica por $(3/2)^2 = 9/4$. La suma de las piezas conserva ese factor y produce $36 \cdot 9/4 = 81$ cm². Los aumentos relativos son distintos: 50 % en longitudes y 125 % en área. Esta última pasa a ser el 225 % de la original.



Para comprender el volumen basta comenzar con una caja rectangular. Su volumen es el producto de largo, ancho y alto, medidos en una misma unidad. Puede obtenerse contando cubos unidad cuando las dimensiones son enteras y por subdivisión cuando son racionales; para longitudes reales adoptamos la extensión continua de esa medida. Multiplicar las tres dimensiones por k cambia el producto por k^3. La misma conclusión se extiende a cuerpos que se descomponen en piezas con esa ley de escala; el tratamiento general de volúmenes se desarrollará al estudiar los cuerpos geométricos.

Problema 16. De una maqueta a otra

Enunciado. Dos cajas rectangulares semejantes tienen volúmenes de 8 y 27 dm³. La altura de la primera es 2 dm. Determina la razón de semejanza hacia la segunda y su altura.

Solución. Si $k > 0$ es la razón lineal, entonces $k^3 = 27/8$. La raíz cúbica positiva da $k = 3/2$. Por tanto, la segunda altura mide $(3/2) \cdot 2 = 3$ dm. Una comprobación posible usa cubos de lados 2 y 3 dm: sus volúmenes son precisamente 8 y 27 dm³. Esa pareja ilustra el resultado; la deducción vale para cualquier par de cajas rectangulares semejantes porque sus tres dimensiones guardan la misma razón.

Factores de cambio de las medidas

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Longitudes	$L' = kL$ para una semejanza de razón lineal $k > 0$.
Perímetro poligonal	$P' = kP$, pues todos los lados tienen el mismo factor.
Área poligonal	$A' = k^2A$; se escalan tanto la base como la altura de cada triángulo de una descomposición.
Volumen de cajas semejantes	$V' = k^3V$; las tres dimensiones se multiplican por k.
Recuperar la razón	$k = \sqrt{A'/A}$ para áreas positivas; $k = \sqrt[3]{V'/V}$ para cajas de volumen positivo.
Cambio de impresión	Una escala $1 : n$ impresa con factor lineal $r > 0$ se convierte en $1 : (n/r)$.

Pruebas. Véase «Escalas de longitudes, áreas y cajas» en el apéndice.

Ampliar desde un centro

Podemos describir una ampliación indicando dónde permanece fija la figura. Elegimos un punto O y enviamos cada punto P a otro P' alineado con él y con O. Si la razón es 2, la distancia

al centro se duplica en la misma semirrecta. Si es -2, se duplica en la semirrecta opuesta. Esa transformación es una **homotecia** de centro O y razón $k \neq 0$.

El signo describe el lado del centro en que queda la imagen. Las distancias entre imágenes se multiplican por $|k|$, siempre positivo. En el plano, una razón negativa puede realizarse mediante un giro de 180° alrededor del centro seguido de una ampliación positiva; conviene distinguir ese giro de una reflexión en una recta.

Para calcular con coordenadas necesitamos el desplazamiento desde el centro. Si $O = (u, v)$ y $P = (x, y)$, ese desplazamiento es el par $(x - u, y - v)$. Multiplicarlo por k y regresar al centro da

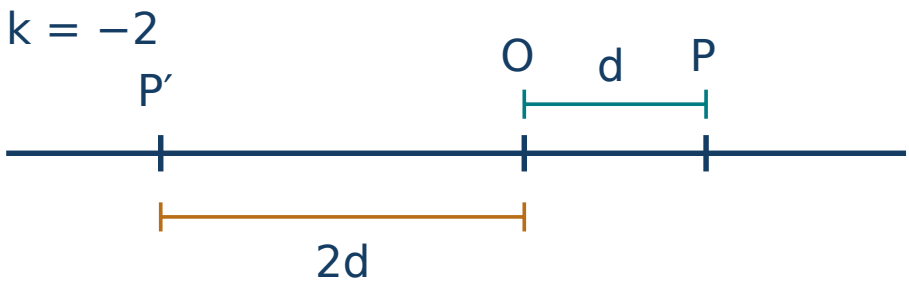
$$P' = (u + k(x - u),\ v + k(y - v)).$$

La notación vectorial $\overrightarrow{OP'} = k\overrightarrow{OP}$ expresa la misma operación sobre las dos componentes. Un vector de desplazamiento registra cuánto se avanza horizontal y verticalmente; su longitud geométrica es la del segmento que une origen y extremo. Esta interpretación basta para los cálculos del capítulo.

Problema 17. El signo y el punto de partida

Enunciado. Aplica al punto $P = (4, 2)$ una homotecia de centro $O = (1, -2)$ y razón $k = -2$.

Solución. El desplazamiento desde el centro es $P - O = (3, 4)$. Multiplicarlo por -2 produce $(-6, -8)$ y sumarlo a O da $P' = (-5, -10)$. Para comprobar la posición, $P' - O = (-6, -8) = -2(3, 4)$: ambas componentes han cambiado de sentido y duplicado su magnitud. Multiplicar directamente las coordenadas de P habría utilizado el origen $(0, 0)$ como centro y resuelto una transformación diferente.



Problema 18. Recuperar el centro

Enunciado. Una homotecia de razón 3 lleva $P = (2, 1)$ a $P' = (8, 7)$. Encuentra su centro.

Solución. La ecuación $P' = O + 3(P - O)$ se simplifica a $P' = 3P - 2O$. Por tanto, $O = (3P - P')/2$. Las componentes dan $O = ((6 - 8)/2, (3 - 7)/2) = (-1, -2)$. La comprobación reconstruye el desplazamiento: desde O hasta P hay $(3, 3)$; al triplicarlo y añadir el centro obtenemos $(-1, -2) + (9, 9) = (8, 7)$. El despeje es posible porque $k \neq 1$. Con razón 1, cada punto permanece fijo y una pareja $P = P'$ no determina un centro único.

Problema 19. Dos cambios desde el mismo centro

Enunciado. Con centro en el origen se aplica primero una homotecia de razón -2 y después otra de razón $1/4$. Encuentra la transformación conjunta de $P = (2, 6)$ y una homotecia que la deshaga.

Solución. La primera imagen es $(-4, -12)$ y la segunda, $(-1, -3)$. Algebraicamente, el desplazamiento final es $(1/4)(-2)P = -P/2$. La composición es la homotecia de razón $-1/2$. Para volver al punto inicial hay que multiplicar por su recíproco, -2; efectivamente, $-2(-1, -3) = (2, 6)$. Multiplicar razones funciona aquí porque ambas homotecias usan el mismo centro. Cambiar los centros exige conservar también sus términos de desplazamiento.

Problema 20. Lo que sucede con un vector

Enunciado. El desplazamiento de $A = (1, 2)$ a $B = (4, -2)$ se transforma mediante una homotecia de centro $O = (2, 1)$ y razón -2. Calcula las imágenes y el nuevo desplazamiento.

Solución. Desde O hasta A el vector es $(-1, 1)$, así que $A' = (2, 1) - 2(-1, 1) = (4, -1)$. Desde O hasta B es $(2, -3)$, de donde $B' = (-2, 7)$. El vector original $\overrightarrow{AB} = B - A = (3, -4)$ pasa a $\overrightarrow{A'B'} = B' - A' = (-6, 8) = -2\overrightarrow{AB}$. Al restar las fórmulas de las dos imágenes, el centro desaparece. La dirección de la recta de soporte se conserva y el sentido del vector se invierte; la longitud se duplica.

Propiedades de las homotecias

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Imagen con centro O	$P' = O + k(P - O)$, con $k \neq 0$; en coordenadas se opera componente a componente.
Posición respecto del centro	$k > 0$ mantiene la semirrecta; $k < 0$ utiliza la opuesta, para $P \neq O$. El centro queda fijo.
Distancias y vectores	$A'B' = \lvert k\rvert AB$ y $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$.
Composición con centro común	Las razones se multiplican: $h_{O,l} \circ h_{O,k} = h_{O,lk}$.
Inversa	$h_{O,k}^{-1} = h_{O,1/k}$; la razón 1 es la identidad.
Centro recuperable	Si $k \neq 1$, $O = (kP - P')/(k - 1)$.

Pruebas. Véase «Homotecias, vectores y razones con signo» en el apéndice. Con $k = 0$ la fórmula colapsa todos los puntos en el centro y queda fuera de las homotecias invertibles.

Un cuadrado que reúne cuatro triángulos

Una diagonal de un rectángulo puede medirse comparando áreas. Tomemos un triángulo rectángulo con catetos $a, b > 0$ e hipotenusa c, el lado opuesto al ángulo recto. Coloquemos cuatro copias, una en cada esquina de un cuadrado de lado $a + b$, de modo que cada borde quede dividido en un tramo a y otro b. Las hipotenusas delimitan el cuadrilátero central.

Sus cuatro lados miden c. En cada vértice interior concurren los dos ángulos agudos de las copias y el ángulo del cuadrilátero. Los dos primeros suman $90°$, porque proceden de un triángulo rectángulo; el ángulo restante mide $180° - 90° = 90°$. El cuadrilátero central es, por tanto, un

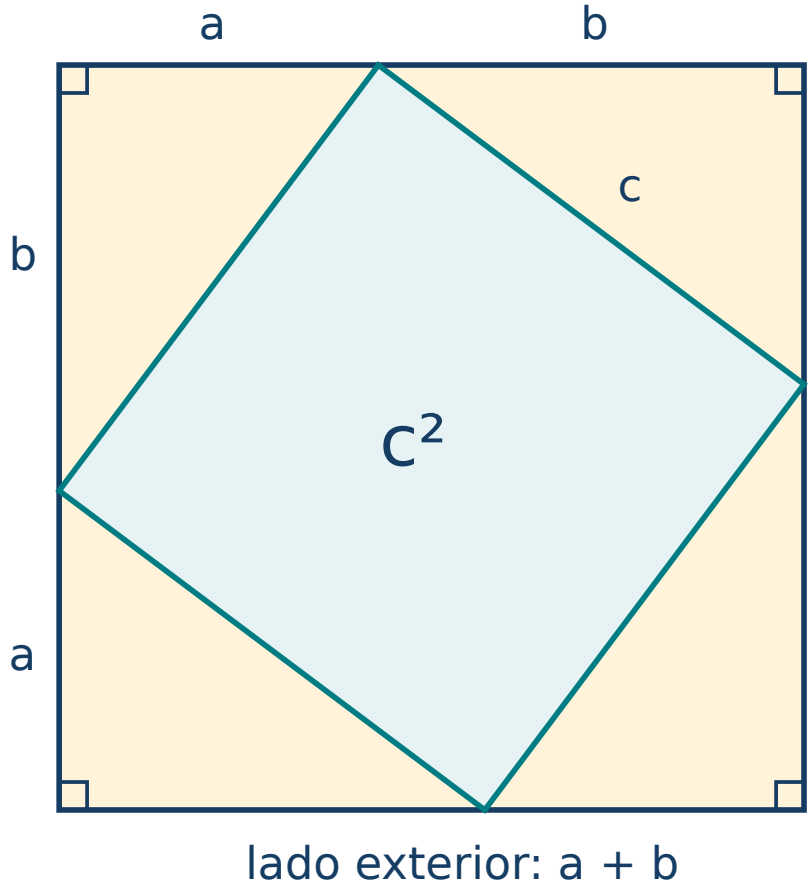
cuadrado de lado c. La figura exterior se descompone sin solapar interiores en ese cuadrado y los cuatro triángulos. La aditividad del área da

$$(a+b)^2 = c^2 + 4\frac{ab}{2}.$$

Desarrollar el cuadrado del primer miembro y cancelar $2ab$ deja

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Hemos demostrado el **teorema de Pitágoras** a partir de congruencia, suma angular y área, sin utilizar semejanza ni una fórmula previa de distancia.



Problema 21. Reconstruir la prueba con medidas concretas

Enunciado. Usa cuatro triángulos rectángulos de catetos 3 y 4 cm para justificar que su hipotenusa mide 5 cm. Identifica qué parte del argumento sirve para cualquier par de catetos positivos.

Solución. El cuadrado exterior tiene lado $3+4=7$ cm y área 49 cm². Cada triángulo tiene área $3\cdot 4/2 = 6$ cm²; las cuatro piezas ocupan 24 cm². El cuadrado central ocupa $49-24=25$ cm². Como su lado es la hipotenusa, $c^2 = 25$ y, por tratarse de una longitud positiva, $c = 5$ cm. La prueba general conserva exactamente la disposición de las piezas y el argumento angular que hace recto cada vértice central. Sustituir 3 y 4 por $a, b > 0$ da la identidad anterior; una sola comprobación numérica no bastaría para establecerla para todos los triángulos rectángulos.

Problema 22. Una escalera y dos posiciones

Enunciado. Una escalera rígida de 13 m apoya sus extremos en un suelo horizontal y una pared vertical. Su pie está a 5 m de la pared. ¿A qué altura llega? Si el pie se aleja otros 3 m, ¿cuál será la nueva altura?

Solución. Suelo y pared forman el ángulo recto; la escalera es la hipotenusa. La altura inicial $h > 0$ satisface $h^2 + 5^2 = 13^2$, luego $h^2 = 144$ y $h = 12$ m. En la segunda posición la distancia horizontal es $5 + 3 = 8$ m. La nueva altura es $\sqrt{13^2 - 8^2} = \sqrt{105}$ m, aproximadamente 10,25 m. La longitud exacta comprueba la ecuación: $105 + 64 = 169$. La caída vertical es $12 - \sqrt{105}$ m, aproximadamente 1,75 m; el mismo cambio horizontal no produce un cambio vertical igual.

Problema 23. Comprobar el ángulo recto

Enunciado. ¿Son rectángulos los triángulos de lados 7, 24 y 25 cm, y de lados 7, 24 y 26 cm? Justifica el criterio utilizado.

Solución. Ambos cumplen la desigualdad triangular. En el primero, el lado mayor es 25 y $7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625 = 25^2$. Para justificar el recíproco, construimos un triángulo rectángulo de catetos 7 y 24; el teorema ya probado da hipotenusa 25. Sus tres lados coinciden con los del triángulo propuesto, que es congruente con él y tiene el ángulo recto correspondiente. En el segundo, $26^2 = 676 \neq 625$. Si fuese rectángulo, su hipotenusa tendría que ser el lado mayor, pero incumpliría Pitágoras. Por tanto, no es rectángulo.

Problema 24. Medir sin recorrer los dos desplazamientos

Enunciado. En una cuadrícula cartesiana, cada unidad equivale a un metro. Encuentra la distancia recta entre $A = (-2, 1)$ y $B = (4, 9)$ y compárala con el recorrido horizontal y vertical entre esos puntos.

Solución. El cambio horizontal es $4 - (-2) = 6$ m y el vertical es $9 - 1 = 8$ m. Forman los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es AB. Su longitud es $\sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$ m. Recorrer primero horizontal y después verticalmente requiere $6 + 8 = 14$ m. Para puntos generales, las longitudes de los catetos son los valores absolutos de los cambios de coordenada; al elevarlas al cuadrado se obtiene $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$. Si uno de los cambios es cero, la distancia se reduce directamente al valor absoluto del otro; si ambos son cero, los puntos coinciden.

La fórmula de distancia permite precisar la cautela sobre los datos de congruencia. Fijemos $B = (0, 0)$ y $A = (3, 4)$, y tomemos $C = (2, 0)$ o $C = (4, 0)$. En ambos triángulos, $AB = 5$ y $AC = \sqrt{17}$. El ángulo en B es el mismo porque las dos posiciones de C pertenecen a la misma semirrecta horizontal desde B. Sin embargo, BC mide 2 en el primer caso y 4 en el segundo: los triángulos no son congruentes. Dos lados y un ángulo que no está comprendido entre ellos pueden admitir dos figuras distintas.

Propiedades de los triángulos rectángulos y la distancia

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Pitágoras	$a^2+b^2=c^2$ si a, b son los catetos y c la hipotenusa de un triángulo rectángulo.
Recuperar una longitud	$c=\sqrt{a^2+b^2}$; $a=\sqrt{c^2-b^2}$ si $c>b>0$. Se elige la raíz positiva.
Recíproco	Un triángulo con lados positivos a, b, c y $c^2=a^2+b^2$ es rectángulo, con ángulo recto opuesto a c.
Distancia cartesiana	$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$ en ejes perpendiculares con la misma unidad.
Diagonal rectangular	$d=\sqrt{u^2+v^2}$ para un rectángulo de lados $u, v>0$.

Pruebas. Véase «Pitágoras por áreas, recíproco y distancia cartesiana» en el apéndice.

Ejercicios para trabajar sin profesor

Escribe primero la correspondencia o la configuración que autoriza cada cálculo. Conserva las unidades y explica qué dato asegura la congruencia, la semejanza o el ángulo recto.

1. Los lados AB, BC, CA miden 4, 6 y 7 cm; los lados DE, EF, FD miden 7, 4 y 6 cm. Decide la congruencia y ordena los vértices correspondientes.

2. Dos piezas triangulares tienen lados correspondientes de 5 y 8 cm y ángulo comprendido de 72°. Justifica qué permite afirmar ese dato. ¿Bastaría especificar solo esos lados?

3. Se conoce una base de 18 cm y sus ángulos adyacentes, de 55° y 70°. Encuentra el tercer ángulo y justifica la unicidad de forma y tamaño.

4. En un triángulo isósceles $AB=AC$, la bisectriz interior desde A corta BC en D. Demuestra que D es punto medio y que AD es perpendicular a BC.

5. En ABC, DE es paralelo a BC, con D, E interiores a AB, AC. Si $AD=5$, $DB=7$ y $AC=18$ cm, encuentra AE, EC.

6. En esa configuración interior, $AD=4$, $DB=6$, $AE=6$ y $EC=10$ cm. Decide si DE es paralelo a BC y justifica la respuesta.

7. Divide un segmento de 28 cm en razón $2:5$ mediante una construcción de paralelas. Calcula sus dos partes.

8. Compara los triángulos de lados 5, 12, 13 cm y 10, 24, 26 cm. Encuentra su razón de semejanza de primero a segundo y de segundo a primero.

9. En ABC los ángulos en A, B son $42^\circ, 58^\circ$; en DEF, los de D, E son $80^\circ, 42^\circ$. Si $AB=9$, $EF=12$ y $BC=15$ cm, encuentra FD.

10. Una vara vertical de 1,5 m tiene sombra de 2 m; un poste vertical tiene sombra simultánea de 6,4 m en el mismo suelo horizontal. Estima la altura del poste y precisa el modelo.

11. Un triángulo de base 6 cm, altura 4 cm y otro lado de 5 cm se copia con base correspondiente de 9 cm. Encuentra su altura, el lado correspondiente al de 5 cm y su área.

12. ¿Son semejantes los rectángulos de 3 por 5 cm y de 6 por 9 cm? ¿Qué segundo lado debería tener la copia si su primer lado mide 6 cm?

13. Un camino mide 8,4 cm en un plano a escala $1:1250$. Encuentra la longitud real en metros.

14. Un plano $1:200$ se imprime al 125 % de sus longitudes. Encuentra la escala de la copia.

15. Una figura poligonal de perímetro 42 cm y área 72 cm² se reduce con razón 2/3. Encuentra perímetro y área nuevos, y el porcentaje en que disminuye cada uno.

16. Dos cajas rectangulares semejantes tienen volúmenes de 64 y 125 cm³. La primera tiene una arista de 8 cm. Encuentra la razón de semejanza hacia la segunda y la arista correspondiente.

17. Aplica a $P = (5, 2)$ una homotecia de centro $O = (-1, 3)$ y razón $-1/2$.

18. Una homotecia de razón -2 lleva $P = (1, 4)$ a $P' = (7, -2)$. Encuentra y comprueba su centro.

19. Con centro en $O = (1, 1)$ se aplican razones 3 y $-1/2$ sucesivamente al punto $P = (3, -1)$. Encuentra la imagen final, la razón conjunta y la razón inversa.

20. En una homotecia de centro $O = (1, 0)$ y razón $3/2$, encuentra las imágenes de $A = (0, 1)$ y $B = (4, 3)$. Comprueba el efecto sobre el vector $B - A$.

21. Reconstruye la prueba por cuatro triángulos para catetos de 5 y 12 cm. Calcula el área central y la hipotenusa, explicando por qué la región central es cuadrada.

22. Una escalera de 10 m tiene el pie a 6 m de una pared vertical. Calcula su altura. Si se aleja hasta 8 m de la pared, calcula la nueva altura y el descenso.

23. Decide, con prueba, si los triángulos de lados 9, 12, 15 cm y 9, 12, 16 cm son rectángulos.

24. En una cuadrícula de unidad 1 cm, mide la distancia entre $A = (-3, 2)$ y $B = (5, -4)$. Compárala con el recorrido horizontal y vertical y explica cómo intervienen los signos de las coordenadas.

Soluciones desarrolladas

Ejercicio 1. Registrar las tres parejas

En A concurren los lados de 4 y 7 cm; en la segunda pieza lo hacen en E. De $AB = EF = 4$ se deduce $B \leftrightarrow F$ y queda $C \leftrightarrow D$. Así, $AB = EF$, $BC = FD$ y $CA = DE$, y $ABC \cong EFD$ por tres lados. Las medidas forman triángulos porque $4 + 6 > 7$ y las otras dos desigualdades también se cumplen. La posición de las piezas sobre el papel puede cambiar sin alterar esa conclusión.

Ejercicio 2. Fijar una abertura

Los dos lados y el ángulo comprendido cumplen lado–ángulo–lado; las piezas son congruentes. Si solo se dan 5 y 8 cm, podemos abrir o cerrar el ángulo entre ellos y cambiar la longitud del tercer lado. Por ejemplo, un ángulo recto y otro de 72° producen triángulos no congruentes: el ángulo comprendido sería distinto bajo la correspondencia fijada. Los dos lados por sí solos dejan una libertad que el ángulo elimina.

Ejercicio 3. Una base con dos direcciones

El tercer ángulo mide $180^\circ - 55^\circ - 70^\circ = 55^\circ$. Fijada la base de 18 cm y elegido un semiplano, las direcciones desde sus extremos quedan determinadas por los dos ángulos adyacentes. Su intersección fija el vértice restante. Cualquier otra realización es congruente por ángulo–lado–ángulo; escoger el semiplano opuesto da una reflexión congruente. El ángulo positivo restante comprueba la compatibilidad de los datos.

Ejercicio 4. Partir desde la bisectriz

Los triángulos ABD y ACD tienen $AB = AC$, el lado AD común y los ángulos comprendidos BAD, DAC iguales por la bisectriz. Por lado–ángulo–lado son congruentes. Se obtiene $BD = DC$, así que D es punto medio. Sus ángulos adyacentes en D son iguales y suman 180°, pues B, D, C están alineados; cada uno es recto. Esto prueba a la vez que la bisectriz es mediana y altura en esta configuración.

Ejercicio 5. El lado completo en el denominador

Tenemos $AB = 5 + 7 = 12$ cm. Tales da $AE/18 = 5/12$, de donde $AE = 7,5$ cm y $EC = 18 - 7,5 = 10,5$ cm. La comprobación con partes consecutivas es $7,5/10,5 = 5/7 = AD/DB$. Cada cociente ha comparado tramos en posiciones correspondientes; mezclar AD/DB con AE/AC habría asociado una parte con un total diferente.

Ejercicio 6. Una condición que falla

Si DE fuese paralelo a BC, Tales exigiría $AD/DB = AE/EC$. Sin embargo, $4/6 = 2/3$ y $6/10 = 3/5$ son distintos: los productos cruzados son 40 y 36. Como ambos puntos son interiores y las longitudes son positivas, se aplica la necesidad de esa proporción. La recta propuesta no es paralela a BC.

Ejercicio 7. Siete pasos auxiliares

Desde el primer extremo del segmento trazamos una semirrecta auxiliar y marcamos siete tramos iguales. Unimos su séptimo punto con el segundo extremo del segmento original. Por el segundo punto auxiliar trazamos la paralela a esa unión. Tales sitúa el corte a la fracción $2/7$ del segmento: la primera parte es $28 \cdot 2/7 = 8$ cm y la segunda, 20 cm. Su razón $8/20 = 2/5$ verifica la construcción.

Ejercicio 8. Cambiar el sentido de la comparación

Las tres razones de lados correspondientes son $10/5 = 24/12 = 26/13 = 2$. Ambos conjuntos cumplen la desigualdad triangular, así que el criterio de tres lados proporcionales asegura semejanza. Del primero al segundo la razón es 2; en el regreso se invierten los cocientes y se obtiene $1/2$. El tamaño cambia, mientras que los ángulos correspondientes permanecen iguales.

Ejercicio 9. Encontrar el lado homólogo

El ángulo en C mide 80° y el de F, 58°. Por AA, las parejas son $A \leftrightarrow E$, $B \leftrightarrow F$, $C \leftrightarrow D$, es decir, $ABC \sim EFD$. Como AB corresponde a EF, la razón hacia el segundo es $12/9 = 4/3$. El lado BC corresponde a FD, por lo que $FD = 15 \cdot 4/3 = 20$ cm. La correspondencia ordenada justifica el cociente empleado.

Ejercicio 10. Dos sombras simultáneas

La verticalidad y el suelo horizontal proporcionan dos ángulos rectos. Suponiendo rayos solares paralelos en el instante de medición, los ángulos con el suelo también son iguales. Por AA, $h/1,5 = 6,4/2$. Se obtiene $h = 4,8$ m. En ambos triángulos, altura/sombra es $3/4$. La inclinación del poste o del suelo, o mediciones tomadas con distinta dirección solar, modificarían el modelo y exigirían otros datos.

Ejercicio 11. Escalar también la altura

La razón es $9/6 = 3/2$. Las alturas correspondientes tienen ese mismo factor por la semejanza de los triángulos rectángulos que forman con los lados: la nueva altura mide 6 cm. El lado indicado mide $5 \cdot 3/2 = 7,5$ cm. El área pasa de $6 \cdot 4/2 = 12$ a $9 \cdot 6/2 = 27$ cm², lo que coincide con $12(3/2)^2$. La altura siempre se toma respecto de la base comparada.

Ejercicio 12. Comprobar las dos dimensiones

Si el lado de 3 cm corresponde al de 6 cm, el factor sería 2, mientras que $9/5 = 1,8$. No hay un factor común. La correspondencia intercambiada tampoco funciona, porque $9/3 = 3$ y $6/5 = 1,2$. Para conservar la forma con primer lado de 6 cm, el segundo debería medir $2 \cdot 5 = 10$ cm. Los cuatro ángulos rectos no fijan la proporción entre largo y ancho.

Ejercicio 13. Conservar la unidad al aplicar la escala

La longitud real es $8,4 \cdot 1250 = 10500$ cm. Al dividir por 100 obtenemos 105 m. Como comprobación, 105 m son 10500 cm y su representación a escala es $10500/1250 = 8,4$ cm. El denominador compara centímetros reales con centímetros del plano; la conversión a metros es una operación posterior.

Ejercicio 14. Una ampliación del papel

El factor de impresión es $r = 1,25$. Un centímetro original, que representaba 200 cm reales, se convierte en 1,25 cm de copia. Cada centímetro nuevo representa $200/1,25 = 160$ cm: la escala es $1 : 160$. Un tramo real de 400 cm pasa de 2 a 2,5 cm dibujados y sigue cumpliendo $2,5 \cdot 160 = 400$ cm.

Ejercicio 15. Dos disminuciones diferentes

El perímetro se multiplica por $2/3$ y queda en $42 \cdot 2/3 = 28$ cm. El área se multiplica por $4/9$ y queda en $72 \cdot 4/9 = 32$ cm². El perímetro pierde $1/3$ de su valor, es decir, $33\frac{1}{3}$ %. El área pierde $1 - 4/9 = 5/9$, es decir, $55\frac{5}{9}$ %. Los factores positivos y sus unidades distinguen el cambio lineal del superficial.

Ejercicio 16. Recuperar una razón lineal de volúmenes

Para las cajas semejantes, $k^3 = 125/64$. Como $k > 0$, $k = 5/4$. La arista correspondiente mide $8 \cdot 5/4 = 10$ cm. La comprobación cúbica es $(5/4)^3 = 125/64$. No hemos supuesto que las cajas sean cubos: basta que todas sus dimensiones guarden la misma razón y que el volumen sea su producto.

Ejercicio 17. Desplazarse desde el centro correcto

El vector desde O hasta P es $(5 - (-1), 2 - 3) = (6, -1)$. Multiplicarlo por $-1/2$ da $(-3, 1/2)$; añadir el centro produce $P' = (-4, 7/2)$. Se verifica $P' - O = (-3, 1/2) = -(6, -1)/2$. La imagen queda al otro lado del centro y a la mitad de su distancia, pues la razón es negativa y su valor absoluto es $1/2$.

Ejercicio 18. Comprobar un centro hallado por despeje

Con $k = -2$, la ecuación $P' = O - 2(P - O) = 3O - 2P$ da $O = (P' + 2P)/3$. Se obtiene $O = ((7 + 2)/3, (-2 + 8)/3) = (3, 2)$. El desplazamiento hasta P es $(-2, 2)$; al multiplicarlo por

-2 y regresar al centro resulta $(3,2)+(4,-4)=(7,-2)$. Esto comprueba las dos componentes y el signo.

Ejercicio 19. Componer desde un mismo punto fijo

Desde $O=(1,1)$ hasta $P=(3,-1)$ hay $(2,-2)$. La primera razón produce el punto $(1,1)+(6,-6)=(7,-5)$. La segunda actúa sobre su desplazamiento desde el mismo centro: $(1,1)-(6,-6)/2=(-2,4)$. La razón conjunta es $3(-1/2)=-3/2$ y su inversa, $-2/3$. Aplicar esta última al desplazamiento final $(-3,3)$ devuelve $(2,-2)$ y, al añadir O, recupera P.

Ejercicio 20. Restar elimina el centro

Para A, el desplazamiento desde O es $(-1,1)$ y su imagen es $A'=(-1/2,3/2)$. Para B, el desplazamiento es $(3,3)$ y resulta $B'=(11/2,9/2)$. Por tanto, $B'-A'=(6,3)$. El vector original es $B-A=(4,2)$ y $(3/2)(4,2)=(6,3)$, como exige la homotecia. La coincidencia comprueba las imágenes sin confundir el centro con el origen de coordenadas.

Ejercicio 21. El área que queda entre las cuatro copias

El cuadrado exterior tiene lado $5+12=17$ cm y área 289 cm². Los cuatro triángulos ocupan $4(5\cdot 12/2)=120$ cm². La región central tiene área 169 cm². Sus cuatro lados son hipotenusas de copias congruentes; cada ángulo interior completa hasta 180° dos ángulos agudos cuya suma es 90°. Tiene, por tanto, cuatro ángulos rectos y es un cuadrado. Su lado positivo es $\sqrt{169}=13$ cm. Tanto la justificación angular como la descomposición son necesarias para interpretar la resta de áreas.

Ejercicio 22. Dos triángulos con la misma hipotenusa

Inicialmente la altura positiva es $\sqrt{10^2-6^2}=\sqrt{64}=8$ m. Después, la distancia horizontal es 8 m y la altura es $\sqrt{100-64}=6$ m. El descenso es $8-6=2$ m. Las ecuaciones $6^2+8^2=100$ y $8^2+6^2=100$ comprueban ambas posiciones; el ángulo recto procede de la perpendicularidad entre suelo y pared.

Ejercicio 23. Usar cada sentido de la afirmación

Para el primer triángulo, $9^2+12^2=81+144=225=15^2$. Construimos uno rectángulo de catetos 9 y 12; Pitágoras da hipotenusa 15 y la congruencia por tres lados transfiere su ángulo recto al triángulo propuesto. Para el segundo, el lado mayor es 16 y $16^2=256\neq 225$; si fuese rectángulo, incumpliría el teorema. No lo es. Ambos conjuntos satisfacen las desigualdades triangulares, de modo que estamos comparando triángulos existentes.

Ejercicio 24. Restar coordenadas antes de medir

Los desplazamientos son $5-(-3)=8$ cm y $-4-2=-6$ cm. El signo negativo del segundo indica descenso; su longitud es 6 cm. La distancia recta vale $\sqrt{8^2+(-6)^2}=\sqrt{100}=10$ cm. El recorrido por los dos ejes mide $|8|+|-6|=14$ cm. Los cuadrados de la fórmula eliminan los signos porque operan sobre longitudes de catetos; sumar directamente $8+(-6)$ calcularía un número distinto de la longitud de ese recorrido.

Diagnóstico de salida

Una comparación geométrica comienza por elegir qué corresponde con qué. Los criterios de congruencia fijan una figura hasta movimientos rígidos; Tales y la semejanza permiten transportar razones; la escala exige conservar unidades y aplicar la potencia adecuada a cada medida. La homotecia añade un centro y un signo a ese cambio de tamaño. Pitágoras relaciona longitudes cuando hay un ángulo recto, y su recíproco permite justificarlo desde medidas. Para decidir qué herramienta utilizar, la tarea esencial es reconocer qué datos autorizan cada paso.

CAPÍTULO 13

Circunferencia, círculo y geometría del espacio

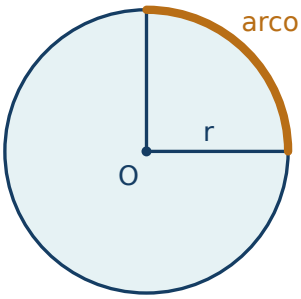
Una comunidad quiere cercar una zona circular y sembrar su interior. El alambre se compra por metros; las semillas, según los metros cuadrados de terreno. El mismo radio gobierna ambos presupuestos, pero duplicarlo produce efectos distintos. Esta diferencia entre borde e interior acompañará todo el capítulo. Al pasar al espacio aparecerá una tercera medida: cuánto cabe dentro de un recipiente.

Trabajaremos con figuras ideales. Un cable tendrá espesor despreciable; un depósito tendrá paredes sin grosor, salvo indicación contraria. Antes de calcular conviene decidir qué objeto mide la fórmula, cuáles son sus unidades y qué datos pertenecen al modelo. Mantendremos π en los resultados exactos y aproximaremos al final cuando la pregunta lo requiera.

Del borde a la región

Fijemos un punto O y una distancia $r > 0$. La **circunferencia** reúne los puntos del plano cuya distancia a O es exactamente r. El **círculo** incluye además los puntos interiores: su distancia a O es menor o igual que r. Un radio une el centro con un punto de la circunferencia; una cuerda une dos puntos de ella. El diámetro es una cuerda que pasa por el centro y mide $2r$.

El arco es una porción de circunferencia. Dos extremos distintos determinan dos arcos; nombrar sus extremos puede resultar insuficiente para elegir uno. Un **sector** está limitado por dos radios y uno de esos arcos. Un **segmento circular** queda entre una cuerda y un arco. Estas regiones tienen áreas, mientras que los arcos tienen longitudes.



En circunferencias semejantes, el cociente entre longitud y diámetro permanece constante. Ese número es π: si L es la longitud, $\pi = L/(2r)$ y, por definición, $L = 2\pi r$. Su existencia como longitud curva se apoya en el principio usual de aproximación por polígonos: los perímetros inscritos y circunscritos se acercan a un mismo valor. Adoptaremos esa base de medida continua; la semejanza explica por qué el cociente no depende del tamaño.

Para obtener el área podemos volver a los triángulos: un polígono regular inscrito se divide desde el centro en triángulos cuya altura común es la apotema a. Si su perímetro es p, sumar las áreas de esas piezas da $pa/2$. Al aumentar el número de lados, el perímetro se aproxima a $2\pi r$ y la apotema a r; los polígonos circunscritos proporcionan cotas por fuera que se acercan al mismo valor. La región circular queda encerrada entre ambas aproximaciones y su área es por ello πr^2. El principio de medida continua adoptado permite identificar el área mediante esas cotas; el apéndice desarrolla el argumento.

Propiedades del círculo y su borde

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Circunferencia y círculo	Distancias al centro iguales a r, o menores o iguales que r, respectivamente; $r > 0$.
Diámetro	$d = 2r$; la cuerda pasa por el centro.
Longitud del borde	$L = 2\pi r = \pi d$.
Área del círculo	$A = \pi r^2$.
Corona circular	$A = \pi(R^2 - r^2)$, con círculos concéntricos y $0 \le r < R$.

Pruebas. Véase «Medida del círculo y aproximación poligonal» en el apéndice; allí se distinguen definiciones y principios de medida adoptados.

Problema 1. Dos compras distintas

Enunciado. Un jardín tiene radio 6 m. ¿Cuánto mide su borde y cuál es su área?

Solución. Para cercarlo seguimos una línea cerrada: $L = 2\pi\cdot 6 = 12\pi$ m. Para sembrarlo cubrimos una región: $A = \pi\cdot 6^2 = 36\pi$ m^2. Aproximadamente son 37,70 m y 113,10 m^2. El número de metros de alambre no puede sustituirse por el de metros cuadrados de terreno; cada presupuesto necesita su propia medida.

Problema 2. Recuperar el radio

Enunciado. Una circunferencia mide 18π cm. Calcula el área de su círculo.

Solución. La longitud dada determina el radio mediante $2\pi r = 18\pi$. Dividimos por $2\pi > 0$ y obtenemos $r = 9$ cm. Ahora sí usamos la fórmula de área: $A = \pi\cdot 9^2 = 81\pi$ cm^2. La unidad también permite controlar el procedimiento: dividir una longitud por un número deja una longitud; elevar después el radio al cuadrado produce un área.

Problema 3. El sendero exterior

Enunciado. Un estanque de radio 5 m está rodeado por un sendero de anchura uniforme 2 m. Halla el área del sendero.

Solución. La anchura se añade al radio, de modo que el borde exterior tiene radio 7 m. La región transitable es la diferencia entre los dos círculos: $A = \pi(7^2 - 5^2) = 24\pi$ m^2. Usar $\pi \cdot 2^2$ daría el área de un círculo de radio igual a la anchura, que no representa el sendero. Como comprobación, la diferencia de cuadrados da $(7-5)(7+5) = 2\cdot 12 = 24$.

Problema 4. Duplicar la superficie

Enunciado. Se amplía un disco de radio 4 cm hasta duplicar su área. ¿Cuál es el nuevo radio y cómo cambia el perímetro?

Solución. Si R es el radio nuevo, $\pi R^2 = 2\pi\cdot 4^2$, así que $R^2 = 32$. El radio es positivo: $R = 4\sqrt{2}$ cm. El cociente de perímetros es $2\pi R/(2\pi\cdot 4) = \sqrt{2}$. Por tanto, el área se duplica y el borde aumenta en un factor $\sqrt{2}$, aproximadamente un 41,4%. El resultado concuerda con los factores de semejanza del capítulo anterior.

Medir un giro recorriendo un arco

Una rueda puede girar un cuarto de vuelta cualquiera que sea su radio. La longitud recorrida por un punto del borde sí depende de ese radio. Para separar ambos efectos definimos la **medida en radianes** de un ángulo central: $\theta = s/r$, donde s es la longitud del arco recorrido en el sentido elegido. En este capítulo las longitudes de arcos se toman positivas y los giros entre cero y una vuelta completa. Una vuelta tiene 2π radianes porque su arco mide $2\pi r$.

Así, $360^\circ = 2\pi$ radianes y $180^\circ = \pi$ radianes. Un radián es el ángulo que abarca un arco de longitud igual al radio. El cociente s/r es adimensional, aunque escribir «rad» evita confundirlo con un valor en grados. De la definición se obtiene $s = r\theta$. Si el dato está en grados, primero se convierte o se usa directamente la fracción $\alpha/360^\circ$ de la vuelta.

El área de un sector ocupa la misma fracción del área del círculo que su ángulo ocupa del giro completo. Para fracciones racionales se demuestra partiendo el círculo en sectores congruentes; para las demás, la aproximación entre ángulos racionales y la monotonía del área permiten pasar al límite. Por ello $A_s = \theta r^2/2 = rs/2$ cuando θ se expresa en radianes. El perímetro del sector incluye sus dos radios: es $s + 2r$ para un sector propio de ángulo entre cero y una vuelta. Un círculo completo tiene únicamente su borde circular: los radios de una partición no forman parte del contorno exterior.

Propiedades de arcos y sectores

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Conversión angular	$\theta = \alpha\pi/180$ si α es el valor numérico en grados.
Longitud de arco	$s = r\theta$ en radianes; $s = 2\pi r\alpha/360$ en grados.
Área de sector	$A_s = r^2\theta/2 = rs/2$, con $0 \le \theta \le 2\pi$.
Contorno de sector propio	$P = s + 2r$, con $0 < \theta < 2\pi$.
Segmento menor	Área del sector menos área del triángulo de sus radios; ángulo central entre 0° y 180°.

Pruebas. Véase «Radianes, sectores y segmentos» en el apéndice.

Problema 5. Una pieza de abanico

Enunciado. Un sector de radio 12 cm abarca 75°. Calcula arco, área y perímetro.

Solución. El giro representa $75/360 = 5/24$ de una vuelta. Por tanto, $s = (5/24)\cdot 24\pi = 5\pi$ cm y $A_s = (5/24)\cdot 144\pi = 30\pi\,\text{cm}^2$. El borde de la pieza incluye dos segmentos rectos de 12 cm, de modo que $P = 24 + 5\pi$ cm. También podemos convertir 75° en $5\pi/12$ radianes y verificar que $12(5\pi/12) = 5\pi$.

Problema 6. Un giro expresado por el arco

Enunciado. En una circunferencia de radio 8 cm se recorre un arco de 10 cm. Halla el ángulo en radianes y el área del sector.

Solución. La definición da $\theta = s/r = 10/8 = 5/4$ radianes. No hace falta transformar ese valor a grados: $A_s = rs/2 = 8\cdot 10/2 = 40\,\text{cm}^2$. Para comprobar que se trata de un sector propio

observamos que $5/4 < 2\pi$. Introducir $5/4$ como si fueran grados reduciría indebidamente tanto el arco como el área.

Problema 7. La huella de una rueda

Enunciado. Una rueda de radio 0,35 m da 20 vueltas completas sin deslizar. ¿Qué distancia recorre?

Solución. La condición sin deslizamiento identifica el avance por vuelta con la longitud de la circunferencia. Así, $D = 20(2\pi \cdot 0{,}35) = 14\pi$ m, aproximadamente 43,98 m. En radianes el giro acumulado es 40π y se obtiene lo mismo con $D = r\theta$. Si hubiera deslizamiento, contar vueltas no bastaría para determinar la distancia real.

Problema 8. Una ventana entre cuerda y arco

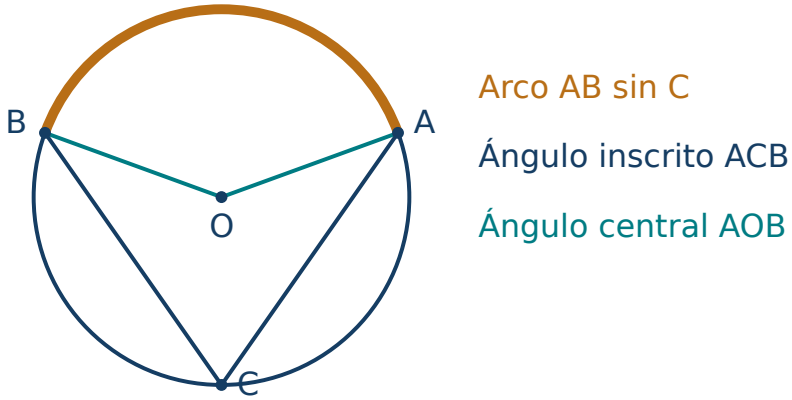
Enunciado. Una cuerda abarca un ángulo central de 90° en un círculo de radio 6 cm. Calcula el área del segmento menor.

Solución. El sector ocupa un cuarto del círculo: su área es $9\pi\,\text{cm}^2$. Los dos radios son perpendiculares y forman un triángulo rectángulo de catetos 6 y 6, de área $18\,\text{cm}^2$. La región entre cuerda y arco resulta al retirarlo: $A = 9\pi - 18\,\text{cm}^2$, aproximadamente $10{,}27\,\text{cm}^2$. Es positivo y menor que el área del sector, dos controles geométricos útiles.

Ángulos que miran el mismo arco

El **ángulo inscrito** tiene el vértice en la circunferencia y sus lados siguen dos cuerdas. Intercepta el arco entre los otros extremos que no contiene el vértice. Su medida es la mitad de la de ese arco, expresada por el ángulo central correspondiente. Para entender la mitad, unamos el vértice al centro: aparecen triángulos isósceles, porque sus radios son iguales. Sus ángulos de base son iguales; al usar la suma de ángulos de cada triángulo se obtiene el doble en el centro. Cuando el centro queda fuera del ángulo, la misma relación se obtiene restando dos de estos casos. El apéndice desarrolla los tres emplazamientos sin depender del aspecto del dibujo.

Por tanto, todos los ángulos inscritos que miran el mismo arco tienen igual medida. Si miran un diámetro, el arco interceptado mide 180° y el ángulo es recto. Una tangente toca la circunferencia en un punto y es perpendicular al radio trazado allí: cualquier otro punto de esa perpendicular está a distancia mayor que r, por Pitágoras. Recíprocamente, una recta tangente no puede quedar a distancia menor que r del centro, pues entonces cortaría la circunferencia en dos puntos.



La semejanza permite comparar también las longitudes que quedan al cortar dos cuerdas. Los triángulos formados por sus extremos y el punto de intersección tienen pares de ángulos inscritos iguales, de modo que sus lados correspondientes producen proporciones. Al multiplicar en cruz aparecen productos de segmentos. Desde un punto exterior haremos una construcción semejante con dos secantes: cada producto relacionará el tramo exterior con la secante completa; para una tangente, aparecerá el cuadrado de su longitud. Estas relaciones se conocen como **potencia de un punto**, y para aplicarlas tendremos que identificar los extremos de cada segmento siguiendo la correspondencia entre los triángulos.

Si dos cuerdas se cortan dentro, el ángulo mide la semisuma de los arcos que interceptan él y su opuesto por el vértice. Si dos secantes se cortan fuera, el ángulo mide la semidiferencia entre el arco lejano y el cercano. Las fórmulas se obtienen aplicando la suma de ángulos de un triángulo a los puntos de intersección con la circunferencia; la diferencia exterior debe ser no negativa para el ángulo elegido.

Propiedades de ángulos, cuerdas y tangentes

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Ángulo inscrito	Mitad del arco interceptado que no contiene el vértice.
Diámetro y ángulo recto	Todo ángulo inscrito que intercepta una semicircunferencia mide 90°.
Radio y tangente	Son perpendiculares en el punto de contacto.
Cuerdas interiores	$PA \cdot PB = PC \cdot PD$ si A, P, B y C, P, D están alineados.
Secantes exteriores	$PA \cdot PB = PC \cdot PD$, con órdenes P, A, B y P, C, D.
Tangente y secante	$PT^2 = PA \cdot PB$, con T punto de contacto y orden P, A, B.
Ángulo interior	Semisuma de los arcos interceptados por el ángulo y su opuesto.
Ángulo exterior	Semidiferencia del arco lejano y el cercano para dos secantes.

Pruebas. Véase «Ángulos y potencia de un punto» en el apéndice.

Problema 9. Elegir el arco correcto

Enunciado. Los puntos A, B, C pertenecen a una circunferencia. El arco de A a B que no contiene a C mide 124°. Halla $\angle ACB$.

Solución. El vértice está en la circunferencia y los lados pasan por A y B: es un ángulo inscrito. El enunciado ya elige el arco que intercepta, por lo que $\angle ACB = 124^\circ/2 = 62^\circ$. El otro arco mide 236° y contiene a C; utilizarlo respondería a un ángulo con el vértice en la otra porción del borde.

Problema 10. Una cuerda dividida

Enunciado. Dos cuerdas AB y CD se cortan en P interior. Se sabe que $PA = 3$, $PB = 8$ y $PC = 4$, en centímetros. Halla PD.

Solución. Los cuatro segmentos se miden desde el punto interior hasta los extremos de sus respectivas cuerdas. La igualdad de productos da $3 \cdot 8 = 4 \cdot PD$; como $PC = 4 > 0$, dividimos y obtenemos $PD = 6\,\text{cm}$. El producto común es $24\,\text{cm}^2$. No representa el área de un rectángulo situado necesariamente en la figura: es una magnitud invariante derivada de la semejanza.

Problema 11. La longitud completa importa

Enunciado. Desde P exterior sale una secante con tramo exterior $4\,\text{cm}$ y tramo interior $5\,\text{cm}$. Halla la longitud de una tangente desde P.

Solución. La secante completa mide $4 + 5 = 9\,\text{cm}$. Si t es el segmento desde P hasta el contacto, entonces $t^2 = 4 \cdot 9 = 36\,\text{cm}^2$. Tomamos la raíz positiva: $t = 6\,\text{cm}$. El producto $4 \cdot 5$ usaría solo el tramo interior como segundo factor y no corresponde al teorema. Una longitud negativa tampoco sería admisible.

Problema 12. Dos emplazamientos del vértice

Enunciado. En una figura dos cuerdas se cortan dentro e interceptan arcos opuestos de 100° y 40°. En otra, dos secantes exteriores interceptan arcos lejano y cercano de esas mismas medidas. Halla cada ángulo.

Solución. En el primer caso el ángulo interior es $(100^\circ + 40^\circ)/2 = 70^\circ$. En el segundo, el ángulo exterior es $(100^\circ - 40^\circ)/2 = 30^\circ$. Son figuras distintas: desplazar el vértice fuera cambia la relación angular. Para decidir entre suma y diferencia debemos ubicar el vértice e identificar los arcos, antes de operar con sus números.

Volumen, altura y secciones paralelas

Un prisma se obtiene al trasladar un polígono a lo largo de un segmento que no pertenece a su plano, rellenando los segmentos entre puntos correspondientes. Sus dos bases son congruentes y paralelas. La **altura** es la distancia perpendicular entre sus planos; en un prisma oblicuo no coincide con una arista lateral. Un cilindro circular se construye de manera análoga desde un círculo. Reservaremos las fórmulas sencillas de superficie lateral al prisma recto y al cilindro recto.

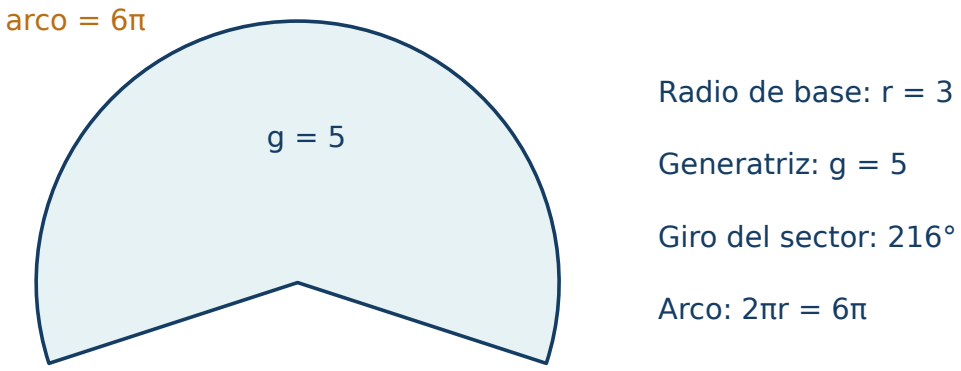
Medimos volumen en cubos unidad. Adoptamos aditividad para partes sin interior común, monotonía y continuidad al aproximar cuerpos por regiones cada vez más finas. También

adoptamos el **principio de Cavalieri**: dos sólidos de igual altura, cuyas secciones por planos a cada misma distancia de la base tienen igual área, poseen igual volumen. Es una base de medida que aquí se utiliza explícitamente; una ilustración con tres cortes no demuestra la igualdad en todas las alturas.

Un prisma de base poligonal se divide en prismas triangulares. La fórmula $V = A_b h$ se obtiene desde cajas y la aditividad; Cavalieri extiende el resultado a prismas oblicuos. En un cilindro, cada corte paralelo a la base tiene área πr^2, por lo que su volumen es $\pi r^2 h$. En un cilindro recto, abrir la superficie lateral produce un rectángulo de lados $2\pi r$ y h: su área es $2\pi r h$. Para una superficie total cerrada se añaden las dos bases.

Una pirámide o un cono tiene una base y un vértice fuera de su plano. Sus cortes paralelos a la base, a altura z desde ella, son semejantes a la base con factor $1 - z/h$. Así sus áreas son $A_b(1 - z/h)^2$. Dos pirámides de igual altura e igual área de base tienen iguales áreas de corte; Cavalieri da volúmenes iguales aunque sus bases tengan formas distintas. Un prisma triangular se puede dividir en tres tetraedros de igual volumen: el apéndice justifica esa igualdad sin suponer la fórmula buscada. De ahí $V = A_b h/3$ para pirámides; la aproximación de bases poligonales o Cavalieri lleva al cono. La fórmula del cono, por tanto, exige una explicación volumétrica además de reconocer un triángulo en su perfil.

En un cono circular recto, la generatriz g une el vértice con el borde y cumple $g^2 = h^2 + r^2$. Al abrir su superficie lateral obtenemos un sector de radio g, cuyo arco tiene longitud $2\pi r$. Su área es $g(2\pi r)/2 = \pi r g$; una sola base completa la superficie total. En recipientes abiertos se cuenta únicamente la superficie realmente presente.



Propiedades de prismas, cilindros y conos

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Cavalieri	Igual altura e igual área de sección en cada nivel implican igual volumen. Principio adoptado.
Prisma y cilindro	$V = A_b h$; altura perpendicular. En cilindro circular, $A_b = \pi r^2$.
Superficie de prisma recto	$A_L = P_b h$ y $A_T = P_b h + 2A_b$.
Superficie de cilindro recto	$A_L = 2\pi r h$ y $A_T = 2\pi r h + 2\pi r^2$.
Pirámide y cono	$V = A_b h/3$; en cono circular $V = \pi r^2 h/3$.
Cono circular recto	$g^2 = h^2 + r^2$, $A_L = \pi r g$ y $A_T = \pi r g + \pi r^2$.

Pruebas. Véase «Prismas, conos y Cavalieri» en el apéndice.

Problema 13. Un envase sin tapa

Enunciado. Un prisma recto de base rectangular 8 cm por 5 cm tiene altura 12 cm. Halla su capacidad y el área de material sin tapa.

Solución. El área de base es $8 \cdot 5 = 40\,\text{cm}^2$ y el volumen $40 \cdot 12 = 480\,\text{cm}^3$. Los cuatro lados del envase forman un rectángulo desplegado de altura 12 y longitud $2(8+5) = 26$, con área $312\,\text{cm}^2$. Como solo hay una base de material, el total es $312 + 40 = 352\,\text{cm}^2$. Se ha supuesto espesor despreciable y ausencia de pestañas o solapamientos.

Problema 14. Cuánta agua cabe

Enunciado. Un depósito cilíndrico recto de radio interior 3 dm y altura 8 dm está cerrado. Halla su capacidad en litros y su superficie total ideal.

Solución. El volumen interior es $\pi \cdot 3^2 \cdot 8 = 72\pi\,\text{dm}^3 = 72\pi$ litros, pues $1\,\text{dm}^3 = 1$ litro. La superficie lateral vale $2\pi \cdot 3 \cdot 8 = 48\pi\,\text{dm}^2$ y las dos bases suman $18\pi\,\text{dm}^2$. Total: $66\pi\,\text{dm}^2$. Si el depósito estuviera abierto, la capacidad no cambiaría, pero habría que retirar una base del área de material.

Problema 15. Fabricar un cono

Enunciado. Un cono circular recto tiene radio 3 cm y altura 4 cm. Halla volumen, superficie lateral y total.

Solución. En el triángulo de la sección axial, el radio y la altura son catetos: $g = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\,\text{cm}$. El volumen es $\pi \cdot 3^2 \cdot 4/3 = 12\pi\,\text{cm}^3$. Para cubrir el costado se necesita $\pi r g = 15\pi\,\text{cm}^2$ y para cerrarlo se añade la base $9\pi\,\text{cm}^2$: $A_T = 24\pi\,\text{cm}^2$. La altura interviene en la capacidad y la generatriz en el desarrollo lateral.

Problema 16. El mismo llenado en cada nivel

Enunciado. Un cilindro y un prisma oblicuo tienen altura 10 cm y área de base $18\,\text{cm}^2$. Justifica que sus volúmenes son iguales. ¿Bastaría conocer solo una sección de área 18?

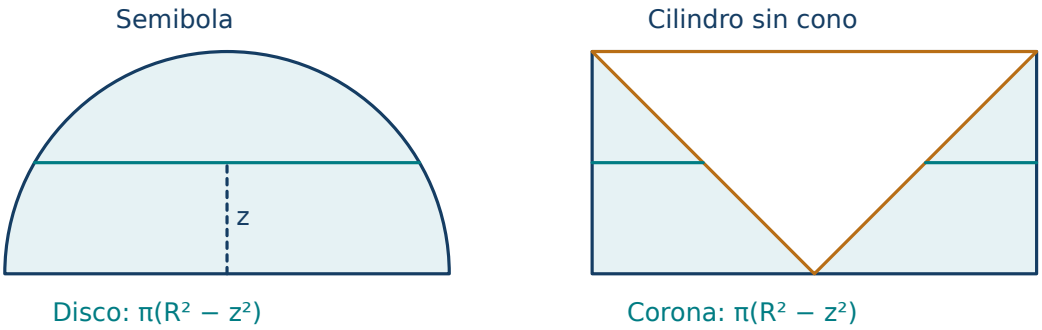
Solución. En ambos cuerpos, cada plano paralelo a las bases produce una sección congruente a su respectiva base; todas tienen área $18\,\text{cm}^2$. Coinciden así las áreas en cada uno de los niveles de la misma altura, y Cavalieri da $V = 18 \cdot 10 = 180\,\text{cm}^3$ para los dos. Una única sección no bastaría: un cono puede tener una sección de esa área y estrecharse en los niveles restantes. También es indispensable comparar alturas iguales.

La esfera por dentro y por fuera

La esfera de radio R es la superficie de puntos del espacio situados a distancia R del centro; la bola incluye su interior. En el uso habitual se habla de «volumen de la esfera» para referirse al volumen de esa bola. Un plano a distancia $d < R$ del centro corta la bola en un círculo. Pitágoras da $\rho^2 = R^2 - d^2$ para su radio ρ. Si $d = R$, el corte es un único punto y su área es cero; si $d > R$,

el plano queda fuera de la bola. Para situar los cortes a uno y otro lado del centro usaremos una altura con signo z, de modo que $d = |z|$.

Comparemos ahora la semibola superior con un cilindro de radio y altura R al que se retira un cono de esa misma base y altura, con vértice en el centro de la base inferior del cilindro. A altura z el cono retirado tiene radio z, de modo que la corona restante tiene área $\pi R^2 - \pi z^2$. Es exactamente la del corte de la semibola. Por Cavalieri, el volumen de la semibola es $\pi R^3 - \pi R^3/3 = 2\pi R^3/3$; al duplicar obtenemos $4\pi R^3/3$.



Ya conocemos el volumen de la bola y podemos usarlo para buscar su superficie. La relación que nos ayudará es la del volumen de una pirámide con el área de su base y su altura. Aproximemos la esfera mediante un poliedro circunscrito de muchas caras planas pequeñas, tangentes a ella. Al unir cada cara con el centro obtenemos pirámides que comparten la altura R, porque la distancia del centro a cada plano tangente es el radio. Sumar sus volúmenes produce $RA_n/3$, donde A_n es el área de la superficie del poliedro.

Adoptamos la definición usual del área esférica como el límite de áreas de aproximaciones regulares de este tipo, cuyo tamaño máximo de caras tiende a cero. Por continuidad del volumen, los volúmenes de los poliedros se acercan al de la bola; al mismo tiempo, $RA_n/3$ se acerca a $RA/3$. Así, $A = 3V/R = 4\pi R^2$. La aproximación regular y los principios de medida declarados sostienen el paso al límite que vincula superficie y volumen.

Bajo una semejanza de factor lineal positivo k, las superficies se multiplican por k^2 y los volúmenes por k^3. Los resultados para círculo y esfera permiten comprobarlo directamente. La comparación presupone cuerpos semejantes: dos recipientes de igual volumen pueden tener formas y superficies muy distintas.

Propiedades de la esfera y la semejanza espacial

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Sección de una bola	$\rho^2 = R^2 - z^2$, con $\lvert z\rvert \le R$ y $\rho \ge 0$.
Volumen de bola	$V = 4\pi R^3/3$, con $R > 0$.
Superficie esférica	$A = 4\pi R^2$; fundamentación por aproximación regular de poliedros.
Superficie de semibola cerrada	$A_T = 3\pi R^2$; incluye el disco de la base.
Escalas espaciales	$A' = k^2 A$, $V' = k^3 V$ para cuerpos semejantes y $k > 0$.

Pruebas. Véase «Volumen y superficie de la esfera» en el apéndice.

Problema 17. Una esfera y su envase

Enunciado. Una bola de radio 3 cm cabe ajustadamente en un cilindro recto. Calcula la fracción del volumen cilíndrico que ocupa.

Solución. El cilindro tiene radio 3 y altura igual al diámetro, 6 cm. Su volumen es $54\pi\,\text{cm}^3$; la bola ocupa $4\pi\cdot 3^3/3 = 36\pi\,\text{cm}^3$. La fracción es $36\pi/(54\pi) = 2/3$. Como queda dentro de su envase, es razonable que sea menor que uno. El espacio libre es $18\pi\,\text{cm}^3$, un tercio del volumen del cilindro.

Problema 18. Pintar una cúpula

Enunciado. Una cúpula esférica es exactamente media esfera de radio 5 m. ¿Qué área curva se pinta? ¿Qué superficie total tendría la semibola cerrada?

Solución. La parte curva corresponde a la mitad de $4\pi\cdot 5^2$, es decir, $50\pi\,\text{m}^2$. La base plana tiene área $25\pi\,\text{m}^2$; si el objeto se considera cerrado, su superficie total es $75\pi\,\text{m}^2$. Para pintar solo la cúpula no añadimos el disco. La palabra «superficie» necesita precisar si se incluye una cara de cierre.

Problema 19. Fundir y volver a moldear

Enunciado. Una bola maciza de radio 6 cm se funde para fabricar bolas de radio 2 cm, sin pérdida de material. ¿Cuántas se obtienen?

Solución. La conservación del material se traduce aquí en conservación del volumen; suponemos la misma densidad y ningún hueco. El cociente es $(4\pi\cdot 6^3/3)/(4\pi\cdot 2^3/3) = (6/2)^3 = 27$. Se obtienen 27 bolas. Aunque el volumen total se conserva, la suma de superficies se triplica: las pequeñas suman $27\cdot 16\pi = 432\pi$, frente a $144\pi\,\text{cm}^2$ de la grande.

Problema 20. Una esfera hueca ideal

Enunciado. Una pieza esférica tiene radio exterior 5 cm e interior 4 cm. Halla el volumen de material y el área conjunta de sus dos superficies.

Solución. El material ocupa la diferencia entre bolas concéntricas: $V = \frac{4\pi}{3}(5^3 - 4^3) = 244\pi/3\,\text{cm}^3$. Sus dos fronteras son superficies esféricas completas, así que $A = 4\pi(5^2 + 4^2) = 164\pi\,\text{cm}^2$. En el volumen restamos lo retirado; en la superficie sumamos las dos caras que quedan expuestas. La anchura 1 cm de la pared no es el radio de una bola equivalente.

Ver un corte sin dejarse engañar por la perspectiva

Un dibujo espacial comprime tres dimensiones en una hoja. Una elipse puede representar una circunferencia; dos trazos que se cruzan en la página pueden estar separados en el espacio. Para resolver una pregunta de longitudes debemos construir un triángulo en un plano adecuado y justificar sus ángulos rectos.

En una caja rectangular de aristas $a, b, c > 0$, una diagonal de la base mide $\sqrt{a^2 + b^2}$. Esa diagonal y la arista vertical pertenecen a un plano y son perpendiculares. Aplicando Pitágoras otra vez, la diagonal espacial mide $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. La proyección perpendicular sobre la base

conserva las dos componentes horizontales y elimina la vertical; una fotografía oblicua no tiene por qué representar esa proyección.

En un cono recto, el corte por un plano paralelo a la base es un círculo. Si el plano está a distancia x del vértice, la sección axial da triángulos semejantes: $\rho/r = x/h$. En la bola, en cambio, el radio del corte cumple una relación cuadrática. Comparar ambas expresiones ayuda a reconocer el papel de cada modelo. Los cortes de Cavalieri se comparan a igual altura y con igual área; no tienen que compartir forma ni perímetro.

Propiedades de secciones y diagonales

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Diagonal de caja rectangular	$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$, con aristas mutuamente perpendiculares.
Proyección perpendicular	La diagonal de base mide $q = \sqrt{a^2 + b^2}$ y $d^2 = q^2 + c^2$.
Sección paralela de cono recto	$\rho/r = x/h$ y $A_x/A_b = (x/h)^2$, con $0 \le x \le h$ medido desde el vértice.

Pruebas. Véase «Secciones y distancias en el espacio» en el apéndice.

Problema 21. La varilla dentro de la caja

Enunciado. Una caja rectangular mide 3, 4 y 12 cm. Halla su diagonal espacial y la longitud de su proyección sobre la base de lados 3 y 4.

Solución. La proyección une vértices opuestos de la base: $q = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\,\text{cm}$. La diagonal espacial, q y la altura forman un triángulo rectángulo, pues la altura es perpendicular al plano de la base. Así, $d = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13\,\text{cm}$. La varilla diagonal puede medir más que cualquiera de las aristas; su proyección es más corta porque se ha eliminado la componente vertical.

Problema 22. Un corte fuera del ecuador

Enunciado. Un plano corta una bola de radio 13 cm y está a 5 cm del centro. Calcula el radio y el área de la sección.

Solución. La perpendicular desde el centro al plano pasa por el centro del círculo de corte. Con un radio de la bola se forma un triángulo rectángulo: $\rho^2 + 5^2 = 13^2$. Por tanto, $\rho^2 = 144$, $\rho = 12\,\text{cm}$ y $A = 144\pi\,\text{cm}^2$. La sección es menor que el círculo máximo, de área 169π, como corresponde a un plano que no pasa por el centro.

Problema 23. Un corte paralelo en un cono

Enunciado. Un cono recto tiene radio 6 cm y altura 12 cm. Se corta por un plano paralelo a la base a 4 cm del vértice. Halla el área del corte y el volumen del cono pequeño superior.

Solución. La razón lineal es $k = 4/12 = 1/3$, por semejanza en la sección axial. El radio del corte es $6/3 = 2\,\text{cm}$ y el área $4\pi\,\text{cm}^2$. El cono pequeño tiene altura 4 y volumen $\pi \cdot 2^2 \cdot 4/3 = 16\pi/3\,\text{cm}^3$. El corte está a un tercio de la altura desde el vértice; medir desde la base sin convertir la distancia cambiaría la razón. El volumen es $1/27$ del original, 144π.

Problema 24. Un molde con un vacío cónico

Enunciado. De un cilindro de radio 4 cm y altura 4 cm se retira un cono de igual base y altura, cuyo vértice está en el centro de la base inferior. Compara el volumen restante con una semibola de radio 4.

Solución. A altura z desde la base inferior, entre 0 y 4, el radio del cono es z. El área que queda es $\pi(16 - z^2)$, igual a la sección de la semibola superior a esa altura sobre su plano ecuatorial. Ambos sólidos tienen altura 4, de modo que Cavalieri prueba la igualdad. El volumen restante es $64\pi - 64\pi/3 = 128\pi/3\,\text{cm}^3$, exactamente la mitad de $4\pi \cdot 4^3/3$. La coincidencia se ha demostrado para todo z, no solo para los cortes dibujados.

Ejercicios para trabajar sin profesor

1. Un círculo tiene radio 7 m. Calcula longitud del borde y área.

2. Una circunferencia mide 30π cm. Halla radio y área del círculo.

3. Una corona concéntrica tiene radios 8 y 5 cm. Calcula su área.

4. El área de un disco se triplica. Si su radio inicial es 2 cm, halla el nuevo radio y el factor del perímetro.

5. Un sector de radio 9 cm abarca 120°. Halla arco, área y contorno.

6. En un círculo de radio 5 cm, un arco mide 7 cm. Halla el ángulo en radianes y el área del sector.

7. Una rueda de radio 0,4 m gira 15 vueltas sin deslizar. Halla la distancia.

8. En un círculo de radio 4 cm, una cuerda abarca 90° en el centro. Halla el segmento menor.

9. El arco interceptado por un ángulo inscrito mide 146°. Halla el ángulo y el arco restante.

10. Dos cuerdas se cruzan en P interior; $PA = 5$, $PB = 6$ y $PC = 3$ cm. Halla PD.

11. Una secante desde un punto exterior tiene tramo exterior 3 e interior 9 cm. Halla la tangente desde ese punto.

12. Dos arcos opuestos de 150° y 50° determinan un ángulo interior entre cuerdas. En otra figura esos son los arcos lejano y cercano de dos secantes exteriores. Halla ambos ángulos.

13. Un prisma recto de base 6 por 4 cm tiene altura 10 cm. Calcula capacidad y área sin tapa.

14. Un cilindro recto tiene radio 2 dm y altura 7 dm. Halla capacidad en litros y superficie total.

15. Un cono circular recto tiene radio 5 cm y altura 12 cm. Halla generatriz, volumen y superficies lateral y total.

16. Dos sólidos tienen altura 9 cm. El primero es un prisma con base de área 20 cm^2. Cada sección paralela a la base del segundo tiene también área 20. Halla sus volúmenes y explica si deben ser congruentes.

17. Una bola de radio 2 cm está en el cilindro recto más pequeño que la contiene ajustadamente. Halla ambos volúmenes y el espacio libre.

18. Una semibola de radio 3 cm tiene una base plana. Halla superficie curva y superficie total.

19. Una bola de radio 9 cm se transforma sin pérdida en bolas de radio 3 cm. Halla su número y el factor entre la suma de sus áreas y el área inicial.

20. Una pieza esférica hueca tiene radios exterior 4 e interior 3 cm. Halla volumen de material y suma de superficies.

21. Una caja rectangular tiene aristas 2, 3 y 6 cm. Halla diagonal espacial y proyección sobre la base de lados 2 y 3.

22. Un plano dista 12 cm del centro de una bola de radio 13 cm. Halla el radio y área del corte.

23. Un cono recto tiene radio 8 y altura 15 cm. Un corte paralelo a 6 cm del vértice determina un cono pequeño. Halla radio, área del corte y volumen pequeño.

24. Un cilindro de radio y altura 5 cm pierde el cono coaxial de igual radio y altura, con vértice en el centro de la base inferior. Demuestra la igualdad con una semibola de radio 5 y calcula el volumen.

Soluciones desarrolladas

Ejercicio 1. Cercar y cubrir

El borde mide $2\pi \cdot 7 = 14\pi$ m y el área es $\pi \cdot 7^2 = 49\pi\,\mathrm{m}^2$. La primera magnitud se compra como longitud; la segunda describe una superficie. Mantener π evita redondear antes de terminar.

Ejercicio 2. Del borde al interior

De $2\pi r = 30\pi$ se obtiene $r = 15$ cm al dividir por 2π. Entonces $A = \pi \cdot 15^2 = 225\pi\,\mathrm{cm}^2$. El diámetro es 30, pero elevarlo al cuadrado en la fórmula del radio cuadruplicaría el resultado.

Ejercicio 3. Una corona

El círculo exterior contiene al interior. La aditividad del área permite restar: $A = \pi(8^2 - 5^2) = 39\pi\,\mathrm{cm}^2$. La anchura es 3, pero la corona no es un círculo de radio 3. También se verifica $(8-5)(8+5) = 39$.

Ejercicio 4. Triplicar el área

La ecuación es $\pi R^2 = 3\pi \cdot 2^2$, por lo que $R = 2\sqrt{3}$ cm, tomando la raíz positiva. El cociente de perímetros es $R/2 = \sqrt{3}$. El área responde al cuadrado del factor lineal.

Ejercicio 5. Sector de ciento veinte grados

El sector ocupa $120/360 = 1/3$ de la vuelta. Su arco mide 6π cm y su área $27\pi\,\mathrm{cm}^2$. Como es un sector propio, se suman los dos radios al arco: $P = 18 + 6\pi$ cm. En radianes el ángulo es $2\pi/3$.

Ejercicio 6. Del arco al giro

El ángulo es $\theta = 7/5$ radianes, porque se divide arco por radio. El área puede calcularse sin conversión: $A_s = rs/2 = 5 \cdot 7/2 = 35/2\,\mathrm{cm}^2$. El valor $7/5$ está entre 0 y 2π, por lo que el sector existe con menos de una vuelta.

Ejercicio 7. Vueltas de una rueda

Por vuelta avanza $2\pi \cdot 0{,}4 = 0{,}8\pi$ m. En 15 vueltas recorre 12π m. El giro acumulado también es 30π radianes y $r\theta = 0{,}4 \cdot 30\pi$ confirma el resultado. La ausencia de deslizamiento es parte del modelo.

Ejercicio 8. Segmento de un cuarto de círculo

El sector vale $\pi \cdot 4^2/4 = 4\pi\,\text{cm}^2$. El triángulo de radios es rectángulo de área $4 \cdot 4/2 = 8\,\text{cm}^2$. Al retirarlo queda $4\pi - 8\,\text{cm}^2$. Se resta una región incluida dentro del sector.

Ejercicio 9. Ángulo inscrito

La mitad del arco interceptado es 73°, medida del ángulo. El arco restante mide $360^\circ - 146^\circ = 214^\circ$. Debe estar claro que el vértice no pertenece al arco de 146°; de lo contrario se habría identificado otro arco.

Ejercicio 10. Producto de segmentos

Los productos de segmentos de cada cuerda coinciden: $5 \cdot 6 = 3 \cdot PD$. Dividiendo por 3 resulta $PD = 10\,\text{cm}$. No se multiplican cuerdas completas, sino las dos partes que determina P en cada una.

Ejercicio 11. Una tangente exterior

La secante completa mide $3 + 9 = 12\,\text{cm}$. Si t es la tangente, $t^2 = 3 \cdot 12 = 36$. Su longitud es 6 cm, raíz positiva. El dato interior debe sumarse al exterior antes de formar el producto.

Ejercicio 12. Suma y diferencia de arcos

El interior es $(150 + 50)/2 = 100^\circ$; su adyacente mide 80°. El exterior de la segunda figura es $(150 - 50)/2 = 50^\circ$. La posición del vértice determina qué relación usar. Los arcos restantes suman 160°, compatible con el ángulo adyacente de la primera figura.

Ejercicio 13. Caja abierta

La base mide $24\,\text{cm}^2$ y el volumen es $24 \cdot 10 = 240\,\text{cm}^3$. El perímetro de base es 20, así que los costados suman $200\,\text{cm}^2$. Se añade un solo fondo: $224\,\text{cm}^2$. No se incluyen pestañas de unión.

Ejercicio 14. Cilindro cerrado

El volumen es $\pi \cdot 2^2 \cdot 7 = 28\pi\,\text{dm}^3$, equivalentes a 28π litros. El lateral mide $2\pi \cdot 2 \cdot 7 = 28\pi\,\text{dm}^2$ y las dos bases $8\pi\,\text{dm}^2$. El área total es $36\pi\,\text{dm}^2$. Volumen y superficie pueden tener coeficientes iguales por casualidad, pero sus unidades siguen siendo distintas.

Ejercicio 15. Cono de cinco, doce y trece

La generatriz es $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13\,\text{cm}$. El volumen vale $\pi \cdot 25 \cdot 12/3 = 100\pi\,\text{cm}^3$. El lateral es $\pi \cdot 5 \cdot 13 = 65\pi\,\text{cm}^2$ y, al añadir la base de 25π, el total es $90\pi\,\text{cm}^2$. La rectitud del cono justifica el triángulo de radio y altura.

Ejercicio 16. Cuándo sirve Cavalieri

En ambos sólidos las secciones a cada misma altura tienen igual área; Cavalieri da igual volumen, $20 \cdot 9 = 180\,\text{cm}^3$. No es necesario que sean congruentes: un prisma recto y uno oblicuo con bases congruentes pueden cumplir esas condiciones. Igual área en cada corte no fija la posición ni la forma de las secciones.

Ejercicio 17. Bola ajustada

El cilindro tiene radio 2 y altura 4: $V_c = 16\pi\,\text{cm}^3$. La bola tiene $V_b = 4\pi \cdot 8/3 = 32\pi/3\,\text{cm}^3$. Al restar queda $16\pi/3\,\text{cm}^3$. La bola ocupa dos tercios y el hueco un tercio del cilindro, como en el problema análogo.

Ejercicio 18. Media esfera

La superficie curva es la mitad de $4\pi \cdot 9$, esto es, $18\pi\,\text{cm}^2$. La base circular tiene $9\pi\,\text{cm}^2$. La superficie total cerrada es $27\pi\,\text{cm}^2$. La base debe añadirse una vez, pues la semibola tiene un único plano de corte.

Ejercicio 19. Repartir el material

El número se obtiene por volúmenes: $(9/3)^3 = 27$. Cada bola pequeña tiene un noveno del área de la grande; las 27 suman $27/9 = 3$ veces esa área. Se conserva volumen bajo las hipótesis de igual material y densidad, pero no superficie.

Ejercicio 20. Cascarón esférico

El material ocupa $\frac{4\pi}{3}(4^3 - 3^3) = 148\pi/3\,\text{cm}^3$. La suma de superficies vale $4\pi(4^2 + 3^2) = 100\pi\,\text{cm}^2$. La cavidad quita volumen y añade una frontera interna; por eso una operación es resta y la otra suma.

Ejercicio 21. Diagonal espacial

La proyección mide $\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}\,\text{cm}$. Al incorporar la altura perpendicular, $d^2 = 13 + 6^2 = 49$, por lo que $d = 7\,\text{cm}$. Sumar las aristas daría un recorrido quebrado, no la distancia recta entre vértices opuestos.

Ejercicio 22. Una sección de bola

Como $12 < 13$, existe un círculo de corte no degenerado. Su radio cumple $\rho^2 = 13^2 - 12^2 = 25$, así que $\rho = 5\,\text{cm}$. El área es $25\pi\,\text{cm}^2$. Si la distancia superara el radio, el plano no cortaría la bola.

Ejercicio 23. Cono semejante superior

El factor lineal desde el vértice es $k = 6/15 = 2/5$. El radio es $8(2/5) = 16/5\,\text{cm}$ y el área $\pi(16/5)^2 = 256\pi/25\,\text{cm}^2$. El volumen pequeño es $(256\pi/25) \cdot 6/3 = 512\pi/25\,\text{cm}^3$. También es $(2/5)^3$ del volumen original, 320π.

Ejercicio 24. Comparar en todo nivel

A altura z desde esa base, $0 \le z \le 5$, el radio retirado es z y el área restante $\pi(25 - z^2)$. La semibola superior tiene a esa altura un círculo de radio $\sqrt{25 - z^2}$, con la misma área. Cavalieri es aplicable porque coinciden áreas en todos los niveles y ambas alturas son 5. El volumen es $125\pi - 125\pi/3 = 250\pi/3\,\text{cm}^3$.

Diagnóstico de salida

Antes de continuar, intenta explicar por qué el área de un sector puede calcularse con $rs/2$, por qué una secante exterior se mide completa en uno de los factores y qué significa la altura de un sólido oblicuo. Después reconstruye la comparación de la semibola sin mirar la fórmula de su volumen.

CAPÍTULO 14

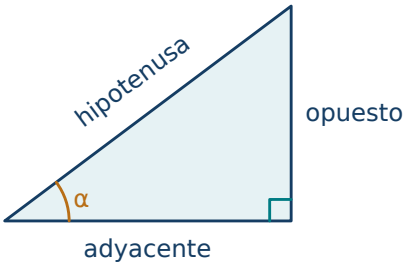
Razones trigonométricas, radianes e identidades

Para conocer la altura de una torre podemos medir una distancia en el suelo y el ángulo con que vemos su extremo. La semejanza permite anticipar algo decisivo: si conservamos ese ángulo y duplicamos la distancia horizontal, también se duplica la altura sobre nuestros ojos. Hay una proporción que depende de la inclinación. La trigonometría comienza al darle un nombre y aprender a recuperarla a partir de un ángulo.

El paso siguiente ampliará la pregunta. Un radio puede girar más allá de un ángulo recto, dar una vuelta o avanzar en sentido contrario. Sus coordenadas describirán entonces las mismas relaciones mediante signos y periodicidad. Esa ampliación permitirá resolver ecuaciones y representar posiciones sobre una circunferencia.

Una inclinación, muchas longitudes

Consideremos un triángulo rectángulo y fijemos uno de sus ángulos agudos, α. La hipotenusa está enfrente del ángulo recto. Entre los otros dos lados, el **cateto opuesto** queda enfrente de α y el **cateto adyacente** forma parte de él. Si elegimos el otro ángulo agudo, estos dos catetos intercambian su papel. La hipotenusa conserva el suyo.



Dos triángulos rectángulos con un mismo ángulo agudo son semejantes por el criterio AA. Sus lados correspondientes se multiplican por un mismo factor positivo y, al formar cocientes, ese factor se cancela. Por eso podemos definir el **seno**, el **coseno** y la **tangente** de α sin elegir un tamaño de triángulo:

$$\sin\alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}},$$
$$\cos\alpha = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}},$$
$$\tan\alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}.$$

Las tres razones son positivas para ángulos agudos. Seno y coseno son menores que uno, pues cada cateto es menor que la hipotenusa. La tangente puede superar uno: una pendiente pronunciada tiene mayor subida que avance horizontal. Estos cocientes son adimensionales si los lados se expresan en una misma unidad. Una pendiente del 25% significa una subida de 25 por cada 100 unidades horizontales; su tangente es 0,25 y su ángulo no es 25°.

Al dividir el seno por el coseno se obtiene la tangente, ya que se cancela la hipotenusa. Los dos ángulos agudos suman 90°; al intercambiar los catetos vemos también que el seno de uno es el coseno de su complementario.

Hay valores que podemos construir exactamente. En un triángulo rectángulo isósceles de catetos 1, Pitágoras da hipotenusa $\sqrt{2}$: seno y coseno de 45° valen $1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$. Al dividir un triángulo equilátero de lado 2 por una altura aparecen una hipotenusa 2, un cateto 1 y otro $\sqrt{3}$. Los ángulos son 30° y 60°, lo que determina sus tres razones. Para otros valores usamos una calculadora en el modo angular correspondiente, conservando suficientes cifras hasta el final.

Propiedades de las razones en un triángulo rectángulo

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Seno y coseno	$\sin\alpha = o/h$, $\cos\alpha = a/h$, con $0 < \alpha < \pi/2$.
Tangente	$\tan\alpha = o/a = \sin\alpha/\cos\alpha$; en un triángulo no degenerado $a > 0$.
Invariancia	Las razones no cambian bajo semejanza del triángulo.
Complementarios	$\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos\alpha$ y $\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin\alpha$.
Ángulos especiales	Para $30°, 45°, 60°$, los senos son $1/2, \sqrt{2}/2, \sqrt{3}/2$ y los cosenos se leen en orden inverso; la tangente es su cociente.

Pruebas. Véase «Razones trigonométricas y semejanza» en el apéndice.

Podemos invertir la pregunta sobre los lados y buscar el ángulo a partir de una razón. En un triángulo rectángulo sabemos que el ángulo buscado es agudo; esa información selecciona una única inclinación para cada valor positivo de la tangente, que crece desde cero sin cota superior en ese intervalo. Escribimos $\alpha = \arctan t$ para recuperar la inclinación de tangente t. De modo análogo, $\arcsin s$ y $\arccos c$ recuperan un ángulo agudo cuando $0 < s, c < 1$. La elección del intervalo será indispensable cuando ampliemos los giros y una misma razón reaparezca en varias posiciones. En algunas calculadoras, la tecla $\sin^{-1}$ realiza esa inversión; el recíproco se calcula mediante $1/\sin$.

Problema 1. La inclinación del techo

Enunciado. Un techo sube 3 m en un avance horizontal de 4 m. Halla las tres razones de su ángulo de inclinación y la longitud inclinada.

Solución. El avance y la subida son catetos perpendiculares. La longitud inclinada es $h = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ m. Para el ángulo con la horizontal, el opuesto es 3 y el adyacente 4: $\sin\alpha = 3/5$, $\cos\alpha = 4/5$ y $\tan\alpha = 3/4$. Si se ampliara el techo manteniendo la inclinación, las tres longitudes cambiarían por el mismo factor y las razones seguirían siendo estas. La subida representa una pendiente del 75%.

Problema 2. Medir una torre desde los ojos

Enunciado. A 10 m de la base de una torre, sobre suelo horizontal, se observa su extremo con elevación de 30°. Los ojos están a 1,6 m del suelo. Halla la altura.

Solución. Trazamos la horizontal desde los ojos hasta la torre. El triángulo rectángulo tiene avance 10 y subida $H - 1{,}6$. Así, $\tan 30° = (H - 1{,}6)/10 = 1/\sqrt{3}$. Al despejar, $H = 1{,}6 + 10/\sqrt{3}$ m, aproximadamente 7,37 m. La altura de los ojos se añade porque el ángulo se midió desde ese nivel. La horizontalidad del terreno y la verticalidad de la torre forman parte del modelo.

Problema 3. Una escalera inclinada

Enunciado. Una escalera de 10 m forma 60° con el suelo horizontal. ¿A qué altura llega y a qué distancia queda su pie de la pared vertical?

Solución. La escalera es la hipotenusa. La altura es el cateto opuesto: $y = 10 \sin 60^\circ = 5\sqrt{3}\,\text{m}$. La separación es el adyacente: $x = 10 \cos 60^\circ = 5\,\text{m}$. Como control, $x^2 + y^2 = 25 + 75 = 100$, el cuadrado de la longitud de la escalera. Las respuestas describen longitudes positivas y el punto de apoyo queda por debajo de los 10 m.

Problema 4. De la razón al ángulo

Enunciado. Un triángulo rectángulo tiene catetos 3 y 4 cm. Halla el ángulo opuesto al cateto de 3 y explica la elección de la función inversa.

Solución. Para ese ángulo conocemos directamente opuesto y adyacente, así que $\tan \alpha = 3/4$. Buscamos la única solución aguda: $\alpha = \arctan(3/4) \approx 36{,}87^\circ$, usando el modo grados. También sería $\arcsin(3/5)$ después de obtener la hipotenusa. El otro ángulo agudo es $90^\circ - \alpha \approx 53{,}13^\circ$. La suma comprueba que se ha identificado el ángulo pedido.

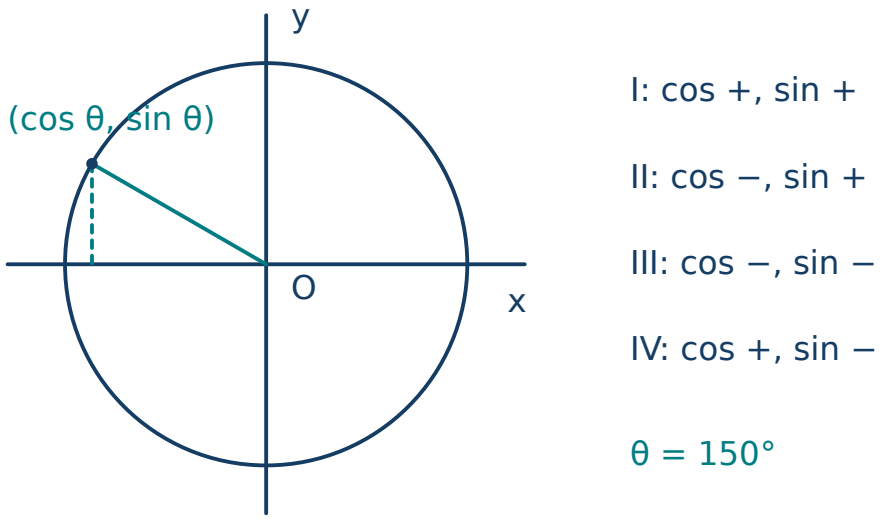
Un ángulo puede seguir girando

En el capítulo anterior el radián apareció como cociente entre arco y radio: $\theta = s/r$. Una vuelta equivale a 2π radianes y a 360°. Para expresar giros orientados fijamos un sentido positivo, el contrario al de las agujas del reloj; el sentido opuesto recibe signo negativo. Un ángulo de $-\pi/3$ describe un giro de 60° en sentido horario. La longitud recorrida es positiva y se calcula con el valor absoluto del giro cuando se sigue ese arco sin invertir el movimiento.

Situemos una circunferencia de radio 1 en un sistema de ejes perpendiculares. Partimos del punto $(1, 0)$ y giramos un radio un ángulo θ. Si su extremo es (x, y), definimos

$$\cos \theta = x, \qquad \sin \theta = y.$$

En el primer cuadrante la perpendicular al eje horizontal forma un triángulo de hipotenusa 1; las definiciones coinciden con las razones anteriores. En los demás cuadrantes las coordenadas aportan los signos. Sobre los ejes obtenemos directamente, sin triángulos degenerados, $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$, $\sin(\pi/2) = 1$ y $\cos(\pi/2) = 0$.



Una vuelta completa deja el extremo en el mismo lugar: seno y coseno tienen período 2π. La tangente se define como $\sin\theta/\cos\theta$ donde el denominador sea distinto de cero. Queda sin definir en $\theta = \pi/2 + k\pi$, con k entero. Tras media vuelta las dos coordenadas cambian de signo y su cociente se conserva, por lo que la tangente tiene período π.

Las simetrías permiten reconstruir valores sin nuevas tablas. Reflejar respecto del eje horizontal cambia θ por $-\theta$ y cambia solo el seno de signo. Reflejar respecto del eje vertical lleva θ a $\pi - \theta$: conserva el seno y cambia el coseno de signo. Para un radio situado dentro de un cuadrante, el ángulo de referencia es el ángulo agudo que forma con el eje horizontal; determina las magnitudes de las coordenadas y el cuadrante determina sus signos.

Propiedades de radianes, signos y periodicidad

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Conversión	$\theta = \alpha\pi/180$ para valor numérico α en grados.
Recorrido de arco	$\ell = r\lvert\theta\rvert$ para giro sin cambio de sentido; θ en radianes.
Círculo unitario	$(\cos\theta, \sin\theta)$ es el extremo del radio, para todo $\theta \in \mathbb{R}$.
Vuelta y media vuelta	Seno y coseno se repiten al sumar $2k\pi$; al sumar π ambos cambian de signo.
Reflexiones	$\sin(-\theta) = -\sin\theta$, $\cos(-\theta) = \cos\theta$; $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$, $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$.
Dominio y período de tangente	$\theta \neq \pi/2 + k\pi$; $\tan(\theta + k\pi) = \tan\theta$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Pruebas. Véase «Giros, coordenadas y periodicidad» en el apéndice.

Problema 5. Un giro de doscientos veinticinco grados

Enunciado. Convierte 225° a radianes y calcula el arco recorrido en una circunferencia de radio $8\,\text{cm}$.

Solución. La conversión da $225\pi/180 = 5\pi/4$. Como el giro es positivo y menor que una vuelta, el arco recorrido mide $\ell = 8(5\pi/4) = 10\pi\,\text{cm}$. El resultado supera media circunferencia, que mide 8π, y es menor que la vuelta completa, de 16π. Multiplicar el radio por 225 sin convertir los grados produciría una longitud incorrecta.

Problema 6. Un giro horario

Enunciado. Para $\theta = -\pi/3$, encuentra un representante en $[0, 2\pi)$ y las coordenadas del punto unitario.

Solución. Sumamos una vuelta: $-\pi/3+2\pi = 5\pi/3$. Ambos giros terminan en el cuarto cuadrante. La reflexión del punto de $\pi/3$ respecto del eje horizontal da $(\cos\theta, \sin\theta) = (1/2, -\sqrt{3}/2)$. El coseno es positivo porque el punto está a la derecha del origen; el seno es negativo porque está debajo. Los giros difieren en su recorrido, aunque comparten extremo.

Problema 7. Recuperar el signo que falta

Enunciado. Se sabe que $\sin\theta = 5/13$ y que el punto unitario está en el segundo cuadrante. Halla coseno y tangente.

Solución. El círculo unitario satisface $x^2 + y^2 = 1$, de modo que $x^2 = 1 - 25/169 = 144/169$. Las raíces posibles son $x = \pm 12/13$. En el segundo cuadrante $x < 0$, así que $\cos\theta = -12/13$. Por el cociente, $\tan\theta = (5/13)/(-12/13) = -5/12$. El dato del cuadrante resuelve la alternativa que queda al extraer la raíz.

Problema 8. Dos ángulos con el mismo seno

Enunciado. Calcula seno, coseno y tangente de 150°. Explica por qué recuperar el ángulo solo desde el seno exige información adicional.

Solución. El ángulo es $180^\circ - 30^\circ$, así que su seno vale $1/2$ y su coseno $-\sqrt{3}/2$. La tangente es $-1/\sqrt{3} = -\sqrt{3}/3$. También 30° tiene seno $1/2$, pero su coseno es positivo. Por ello la operación inversa debe elegir un intervalo: la calculadora devuelve $\arcsin(1/2) = 30^\circ$ como valor principal, mientras el segundo cuadrante exige 150°.

Identidades nacidas del círculo

Las coordenadas de un punto unitario cumplen $x^2+y^2 = 1$. Sustituir sus nombres trigonométricos da la identidad fundamental

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1.$$

La notación $\sin^2\theta$ significa $(\sin\theta)^2$. La igualdad vale para todo ángulo real. Si dividimos por $\cos^2\theta$, debemos excluir sus ceros y obtenemos $1 + \tan^2\theta = 1/\cos^2\theta$. La nueva igualdad tiene un dominio más pequeño porque se ha realizado una división.

Para componer dos giros, observemos qué ocurre con las direcciones horizontal y vertical. Un giro de α lleva la primera a $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ y la segunda a $(-\sin\alpha, \cos\alpha)$: permanecen perpendiculares. Un punto (x, y) puede construirse como la suma de sus desplazamientos horizontal y vertical. Al girarlos y recomponerlos, sus nuevas coordenadas son

$$(x\cos\alpha - y\sin\alpha, \quad x\sin\alpha + y\cos\alpha).$$

El apéndice justifica esa recomposición mediante paralelogramos y proyecciones. Para $x = \cos\beta$, $y = \sin\beta$, el punto final corresponde al giro $\alpha + \beta$. Comparar las dos coordenadas prueba las

fórmulas de adición. Reemplazar β por $-\beta$ da las de diferencia; hacer $\beta = \alpha$ da las de ángulo doble. Esta cadena explica por qué aparecen productos cruzados y por qué el seno de una suma no es, en general, la suma de los senos.

Una **identidad** afirma igualdad en todo su dominio común; una **ecuación** pregunta para qué valores se cumple una igualdad. Para comprobar una identidad, podemos transformar un miembro hasta llegar al otro, anotando los puntos donde dividimos. Verificar varios ángulos puede descubrir un error, pero la afirmación para todos los ángulos necesita un argumento general.

Propiedades de las identidades trigonométricas

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Pitagórica	$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, para todo real θ.
Con tangente	$1 + \tan^2\theta = 1/\cos^2\theta$, si $\cos\theta \neq 0$.
Seno de suma	$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.
Coseno de suma	$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.
Diferencias	Sustituir β por $-\beta$ da $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ y $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.
Ángulo doble	$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$; $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$.

Pruebas. Véase «Identidades por coordenadas y composición de giros» en el apéndice. Las fórmulas de suma, diferencia y ángulo doble valen para todos los ángulos reales.

Problema 9. Simplificar conservando el dominio

Enunciado. Justifica $\dfrac{1-\cos^2 x}{\sin x} = \sin x$ y determina dónde es válida.

Solución. El miembro izquierdo exige $\sin x \neq 0$, es decir, $x \neq k\pi$. En ese dominio, la identidad fundamental transforma el numerador en $\sin^2 x$ y la división da $\sin^2 x/\sin x = \sin x$. Es una identidad en el dominio indicado. La expresión final está definida también en los múltiplos de π, pero el cociente original no lo está; simplificar no agrega esos puntos a su dominio.

Problema 10. Doblar un ángulo del segundo cuadrante

Enunciado. Si $\sin\alpha = 3/5$ y α pertenece al segundo cuadrante, halla $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ y $\tan 2\alpha$.

Solución. La identidad fundamental y el signo del segundo cuadrante dan $\cos\alpha = -4/5$. Entonces $\sin 2\alpha = 2(3/5)(-4/5) = -24/25$ y $\cos 2\alpha = 16/25 - 9/25 = 7/25$. Como este último no es cero, $\tan 2\alpha = -24/7$. El punto de 2α está en el cuarto cuadrante por los signos hallados.

Problema 11. Un valor exacto de setenta y cinco grados

Enunciado. Calcula $\cos 75^\circ$ sin aproximar las razones de los ángulos especiales.

Solución. Descomponemos $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$. La fórmula del coseno de suma da $(\sqrt{2}/2)(\sqrt{3}/2) - (\sqrt{2}/2)(1/2) = (\sqrt{6}-\sqrt{2})/4$. Es positivo, como corresponde al primer cuadrante, y menor que $\cos 60^\circ = 1/2$. Numéricamente vale aproximadamente 0,2588, pero la expresión radical conserva el valor exacto.

Problema 12. Una identidad con tangente

Enunciado. Un ángulo del tercer cuadrante tiene $\cos\theta = -3/5$. Halla su seno y tangente y comprueba la identidad que las relaciona con el coseno.

Solución. El seno tiene cuadrado $1 - 9/25 = 16/25$ y es negativo en el tercer cuadrante: $\sin\theta = -4/5$. Por tanto $\tan\theta = 4/3$. Calculamos $1 + \tan^2\theta = 1 + 16/9 = 25/9$ y $1/\cos^2\theta = 1/(9/25) = 25/9$. El denominador es no nulo. Esta comprobación ilustra la identidad; su prueba general se obtiene dividiendo la igualdad del círculo por $\cos^2\theta$.

Todas las soluciones, con sus extremos

Para interpretar los resultados de la calculadora fijamos tres intervalos principales. $\arcsin u$ pertenece a $[-\pi/2, \pi/2]$, $\arccos u$ a $[0, \pi]$, ambos para $-1 \le u \le 1$; $\arctan u$ pertenece a $(-\pi/2, \pi/2)$ para cualquier real u. En esos intervalos cada razón toma el valor dado una única vez. La unicidad se ve en el círculo: las coordenadas varían monótonamente en las semicircunferencias elegidas, y la pendiente aumenta en el semiplano derecho.

Una recta horizontal corta el círculo en dos puntos, salvo cuando es tangente arriba o abajo. Por eso una ecuación de seno suele tener dos soluciones en una vuelta. Una recta vertical hace lo mismo para el coseno. Para tangente, una recta por el origen determina dos extremos opuestos y una solución por cada media vuelta. Las simetrías y la repetición describen las familias completas.

Al resolver en un intervalo, primero obtenemos las familias y después seleccionamos sus representantes. Los corchetes incluyen extremos; los paréntesis los excluyen. Un intervalo de una vuelta cerrado en ambos extremos contiene dos valores distintos del ángulo que representan el mismo punto; ambos pueden ser soluciones de la ecuación.

Factorizar conserva mejor las alternativas que dividir por una razón que podría anularse. Si aparece un denominador trigonométrico, anotamos sus restricciones antes de multiplicar. La comprobación en la expresión original decide si una raíz candidata pertenece realmente al problema.

Propiedades de las ecuaciones elementales

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Ecuación de seno	Si $a = \arcsin u$ y $-1 \le u \le 1$, $\sin x = u$ equivale a $x = a + 2k\pi$ o $x = \pi - a + 2k\pi$.
Ecuación de coseno	Si $b = \arccos u$ y $-1 \le u \le 1$, $\cos x = u$ equivale a $x = \pm b + 2k\pi$.
Ecuación de tangente	$\tan x = u$ equivale a $x = \arctan u + k\pi$, con su dominio respetado.
Selección y restricciones	$k \in \mathbb{Z}$; filtrar por el intervalo y por el dominio original. Las familias pueden repetir soluciones en casos extremos.

Pruebas. Véase «Inversas y soluciones trigonométricas» en el apéndice.

Problema 13. Una altura en el círculo

Enunciado. Resuelve $\sin x = 1/2$ en $[0, 2\pi)$ y escribe todas sus soluciones reales.

Solución. El valor principal es $a = \pi/6$. El otro punto del círculo con la misma altura corresponde a $\pi - a = 5\pi/6$. Ambos están en el intervalo; al añadir o restar una vuelta salen de él. Las soluciones reales son $x = \pi/6 + 2k\pi$ o $x = 5\pi/6 + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Una sola respuesta de la función inversa habría perdido el segundo punto.

Problema 14. El argumento gira al doble

Enunciado. Resuelve $\cos 2x = 0$ en $[0, 2\pi)$.

Solución. El coseno se anula cuando su argumento es $\pi/2 + k\pi$. Así $2x = \pi/2 + k\pi$ y $x = \pi/4 + k\pi/2$. El intervalo exige $0 \le \pi/4 + k\pi/2 < 2\pi$, de donde $k = 0, 1, 2, 3$. Resultan $\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$. El doble giro del argumento produce cuatro soluciones durante una vuelta de x.

Problema 15. Una factorización que guarda el cero

Enunciado. Resuelve $\sin^2 x = \sin x$ en $[-\pi, \pi]$.

Solución. Pasamos todo a un miembro: $\sin x(\sin x - 1) = 0$. Por el producto nulo, $\sin x = 0$ o $\sin x = 1$. La primera ecuación aporta $-\pi, 0, \pi$ en el intervalo; la segunda aporta $\pi/2$. La solución es $\{-\pi, 0, \pi/2, \pi\}$. Dividir inicialmente por $\sin x$ habría eliminado las tres raíces de la primera rama. Los extremos se incluyen por los corchetes.

Problema 16. Una raíz que el cociente excluye

Enunciado. Resuelve $\dfrac{1 - \cos x}{\sin x} = 0$ en $[0, 2\pi)$.

Solución. El dominio excluye 0 y π, donde se anula el denominador. Un cociente definido vale cero cuando su numerador es cero: necesitaríamos $\cos x = 1$. En el intervalo esto solo ocurre en $x = 0$, ya excluido. Por tanto no hay soluciones. Multiplicar por el denominador y conservar después la raíz cero sin comprobarla cambiaría la ecuación original.

Triángulos que no tienen un ángulo recto

Una altura divide muchos triángulos en dos rectángulos. Sean a, b, c los lados opuestos a los ángulos A, B, C de un triángulo no degenerado. Su área puede escribirse $bc \sin A/2$, pues la altura respecto de c es $b \sin A$. Si A es obtuso, la altura cae sobre una prolongación y se utiliza $\sin(\pi - A) = \sin A$; la fórmula se conserva. Al expresar el área desde los otros vértices y dividir por lados positivos obtenemos la **ley de senos**:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Aquí todos los ángulos pertenecen a $(0, \pi)$ y sus senos son positivos. La relación permite hallar un lado cuando conocemos dos ángulos y un lado. Para recuperar un ángulo desde un seno aparece la alternativa entre un ángulo y su suplementario. La suma $A + B + C = \pi$ decide cuáles alternativas son compatibles.

Cuando conocemos dos lados y el ángulo comprendido, la **ley de cosenos** determina el lado opuesto:

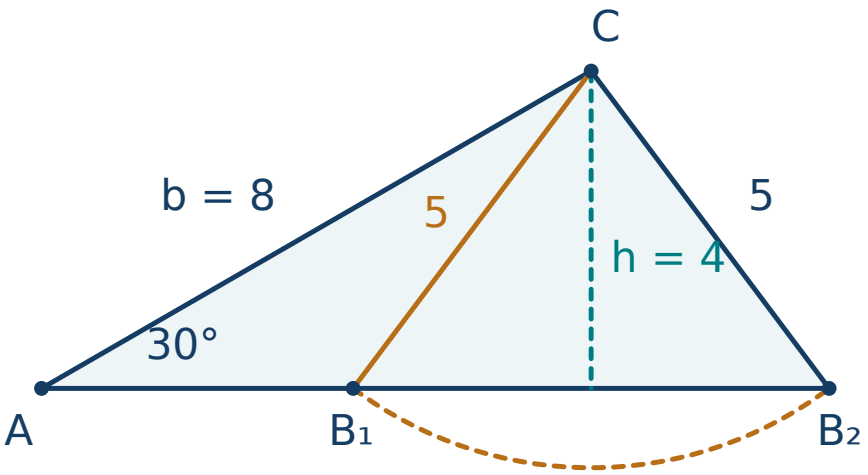
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

Para probarla podemos situar un lado de longitud c sobre el eje horizontal, con uno de sus extremos en el origen. El otro lado adyacente al ángulo A tiene longitud b y termina en $(b\cos A, b\sin A)$. La distancia desde ese punto al extremo $(c, 0)$ es el lado a. Pitágoras en coordenadas da

$$a^2 = (b\cos A - c)^2 + (b\sin A)^2 = b^2(\cos^2 A + \sin^2 A) + c^2 - 2bc\cos A.$$

La identidad del círculo sustituye el paréntesis por uno y obtenemos la fórmula. Si $A = 90°$, el coseno es cero y recuperamos Pitágoras; si A es obtuso, el término $-2bc\cos A$ es positivo y el lado opuesto resulta mayor que en el caso recto con los mismos lados adyacentes.

Con dos lados y un ángulo no comprendido puede haber dos triángulos, uno o ninguno. Fijar el lado b y el ángulo A coloca un vértice en una semirrecta y otro en una posición conocida. La condición de distancia a exige cortar esa semirrecta con una circunferencia: los dos cortes posibles explican la ambigüedad. Solo cuentan los cortes que producen lados positivos y ángulos cuya suma sea $180°$.



$$AB_1 = 4\sqrt{3} - 3;\ AB_2 = 4\sqrt{3} + 3$$

Propiedades de las leyes de triángulos

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Área trigonométrica	$\Delta = bc\sin A/2$, con A comprendido entre b y c y $0 < A < \pi$.
Ley de senos	$a/\sin A = b/\sin B = c/\sin C$, para un triángulo no degenerado.
Ley de cosenos	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$; índices opuestos correspondientes.
Datos y alternativas	Dos lados y el ángulo comprendido determinan un triángulo; un ángulo no comprendido requiere comprobar todas las ramas admisibles de seno.

Pruebas. Véase «Área trigonométrica y leyes de senos y cosenos» en el apéndice.

Problema 17. Dos ángulos y un lado

Enunciado. En un triángulo, $A = 30°$, $B = 45°$ y $a = 6\,\text{cm}$. Halla C, b, c.

Solución. La suma angular da $C = 105°$. Por senos, el cociente común es $a/\sin A = 6/(1/2) = 12\,\text{cm}$. De ahí $b = 12\sin 45° = 6\sqrt{2}\,\text{cm}$. Para c usamos $\sin 105° = \sin 75° = (\sqrt{6}+\sqrt{2})/4$, deducido de la fórmula de suma: $c = 3(\sqrt{6}+\sqrt{2})\,\text{cm}$. El mayor lado corresponde a $105°$, el mayor ángulo, como permite comprobar la figura.

Problema 18. El ángulo está entre los lados

Enunciado. Dos lados de un triángulo miden 5 y 7 cm y su ángulo comprendido es $60°$. Halla el tercer lado.

Solución. Llamemos c al lado opuesto a ese ángulo. La ley de cosenos da $c^2 = 5^2 + 7^2 - 2\cdot 5\cdot 7\cos 60° = 25 + 49 - 35 = 39$. Por tanto $c = \sqrt{39}\,\text{cm}$, aproximadamente 6,245 cm. Está entre la diferencia y la suma de los lados, $2 < \sqrt{39} < 12$, condición necesaria de existencia. Los dos lados y su ángulo comprendido fijan una única forma hasta movimientos y reflexión.

Problema 19. Los mismos datos, dos formas

Enunciado. Se dan $A = 30°$, $a = 5\,\text{cm}$ y $b = 8\,\text{cm}$. Determina cuántos triángulos existen y halla sus posibles lados c.

Solución. La ley de senos exige $\sin B = b\sin A/a = 4/5$. Las alternativas son $B_1 = \arcsin(4/5) \approx 53{,}13°$ y $B_2 = 180° - B_1 \approx 126{,}87°$. Con $A = 30°$, ambas dejan un tercer ángulo positivo: aproximadamente $96{,}87°$ y $23{,}13°$. Para hallar c exactamente, proyectamos el lado b: la altura es $8\sin 30° = 4$ y la proyección $8\cos 30° = 4\sqrt{3}$. La distancia horizontal desde el pie de altura a cada corte de radio 5 vale $\sqrt{25-16} = 3$. Así, $c = 4\sqrt{3}+3$ o $c = 4\sqrt{3}-3$, ambas positivas. El lado mayor corresponde al ángulo B_1 y el menor a B_2.

Problema 20. Datos incompatibles

Enunciado. ¿Existe un triángulo con $A = 30°$, $a = 3\,\text{cm}$ y $b = 8\,\text{cm}$?

Solución. La ley de senos obligaría a $\sin B = 8(1/2)/3 = 4/3$, valor mayor que uno. No existe ese ángulo y, por tanto, tampoco el triángulo. Geométricamente, el vértice situado al final del lado b está a altura $8\sin 30° = 4$ sobre la semirrecta del lado c. Un segmento de longitud 3 no puede alcanzar esa semirrecta. La comprobación geométrica explica el fracaso del cálculo.

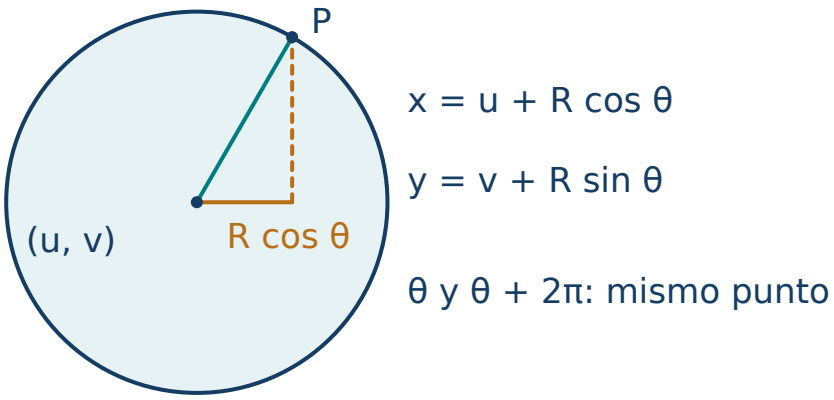
Describir una posición mientras el radio gira

Para una circunferencia de centro (u, v) y radio $R > 0$, el punto unitario se amplía por R y se traslada al centro. Esto produce

$$x = u + R\cos\theta, \qquad y = v + R\sin\theta.$$

Al sustituir, $(x-u)^2 + (y-v)^2 = R^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = R^2$. Todas las posiciones descritas pertenecen a la circunferencia. Recíprocamente, si un punto satisface esa ecuación, al restar el centro y dividir por R obtenemos un punto unitario; su dirección proporciona un ángulo θ. Las fórmulas recorren, pues, la circunferencia entera. Un mismo punto admite los ángulos $\theta + 2k\pi$; el parámetro conserva información sobre las vueltas si decidimos seguir un movimiento.

En un giro uniforme que tarda $T > 0$ unidades de tiempo por vuelta, el ángulo crece 2π en cada período. Si el sentido es positivo y el ángulo inicial es θ_0, entonces $\theta(t) = \theta_0 + (2\pi/T)t$. En sentido horario se cambia el signo del término temporal. Escribimos $\omega = \pm 2\pi/T$ para la razón angular con signo, expresada en radianes por unidad de tiempo. La longitud recorrida durante un intervalo de duración $\Delta t \geq 0$ es $R|\omega|\Delta t$; la distancia recta entre extremos puede ser menor y llega a ser cero al completar una vuelta.



Este modelo basta para describir el extremo de una rueda o de una aguja. Suponer giro uniforme es una decisión del modelo: conocer el período por sí solo no fija las posiciones intermedias de un giro irregular. Más adelante estudiaremos cómo las coordenadas varían como funciones del tiempo.

Propiedades de la parametrización circular

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Circunferencia trasladada	$x = u + R\cos\theta$, $y = v + R\sin\theta$, con $R > 0$; describe todos los puntos de $(x-u)^2 + (y-v)^2 = R^2$.
Repetición del punto	Dos parámetros representan el mismo punto exactamente cuando difieren en $2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.
Giro uniforme	$\theta(t) = \theta_0 + \omega t$, con $\omega = \pm 2\pi/T$ y $T > 0$.
Longitud recorrida	$\ell = R\lvert\omega\rvert\Delta t$ en un giro uniforme durante $\Delta t \geq 0$.

Pruebas. Véase «Parametrización de una circunferencia y giro uniforme» en el apéndice.

Problema 21. Un centro distinto del origen

Enunciado. Una circunferencia tiene centro $(2,-1)$ y radio 3. Halla su punto de parámetro $\theta=\pi/3$.

Solución. La ampliación del punto unitario y la traslación dan $x=2+3(1/2)=7/2$ e $y=-1+3(\sqrt{3}/2)=-1+3\sqrt{3}/2$. Para comprobar la pertenencia, las diferencias respecto del centro son $3/2$ y $3\sqrt{3}/2$; sus cuadrados suman $9/4+27/4=9=R^2$. Las coordenadas del centro se añaden después de escalar el radio.

Problema 22. Seguir un punto de una rueda

Enunciado. Una rueda de radio 2 m, con centro fijo en el origen, gira uniformemente en sentido positivo y tarda 8 segundos por vuelta. Parte del extremo derecho. Halla la posición y la longitud recorrida a los 3 segundos.

Solución. El ángulo inicial es cero y la rapidez angular es $\omega=2\pi/8=\pi/4$ rad/s. A los 3 segundos, $\theta=3\pi/4$ y el punto está en $(2\cos(3\pi/4),2\sin(3\pi/4))=(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, en metros. El arco recorrido mide $\ell=2(\pi/4)3=3\pi/2$ m. Ese arco sigue el borde de la rueda; la distancia recta al punto inicial se obtendría por Pitágoras entre las coordenadas.

Problema 23. Del punto al parámetro

Enunciado. Encuentra los parámetros de la circunferencia centrada en el origen que representan el punto $(-3,4)$ de radio 5.

Solución. Al dividir por 5 obtenemos las coordenadas unitarias $(-3/5,4/5)$. El punto está en el segundo cuadrante. Su ángulo de referencia es $\beta=\arctan(4/3)$, y un representante es $\theta=\pi-\beta\approx 126{,}87^\circ$. Todos los parámetros son $\pi-\arctan(4/3)+2k\pi$, con $k\in\mathbb{Z}$ y el arctangente en radianes en esa expresión. La tangente sola sería negativa en dos cuadrantes; las dos coordenadas fijan cuál corresponde.

Problema 24. Componer dos giros

Enunciado. En una circunferencia de centro $(1,2)$ y radio 2, un punto está inicialmente en el parámetro $\pi/3$. Gira después $-\pi/2$. Halla su posición final.

Solución. Los dos giros se refieren al mismo centro, así que sus medidas se suman: $\theta_f=\pi/3-\pi/2=-\pi/6$. Las coordenadas finales son $x=1+2\cos(-\pi/6)=1+\sqrt{3}$ e $y=2+2\sin(-\pi/6)=1$. El parámetro equivalente $11\pi/6$ produce el mismo punto. La traslación del centro no cambia las razones del radio, y la suma angular conserva el sentido horario del segundo giro.

Ejercicios para trabajar sin profesor

1. Un triángulo rectángulo tiene catetos 5 y 12. Halla hipotenusa y razones del ángulo opuesto al cateto de 5.

2. A 12 metros de una torre vertical se mide elevación de 60°, con ojos a 1,5 m y suelo horizontal. Halla la altura.

3. Una escalera de 8 metros forma 30° con el suelo horizontal y se apoya en una pared vertical. Halla altura y separación del pie.

4. Un triángulo rectángulo tiene cateto opuesto 5 y adyacente 12 respecto de α. Halla α en grados.

5. Convierte 300° a radianes y calcula el arco recorrido con radio 3 cm.

6. Halla un representante de $-5\pi/6$ en $[0, 2\pi)$ y sus coordenadas unitarias.

7. Si $\cos\theta = -8/17$ y θ está en el tercer cuadrante, halla seno y tangente.

8. Halla las tres razones de 210°.

9. Justifica $\dfrac{1-\sin^2 x}{\cos x} = \cos x$ e indica el dominio del cociente.

10. Si $\sin\alpha = 5/13$ y α es agudo, halla seno, coseno y tangente de 2α.

11. Calcula $\sin 15^\circ$ a partir de $45^\circ - 30^\circ$.

12. Si $\sin\theta = -12/13$ y θ está en el cuarto cuadrante, halla coseno y tangente y verifica $1 + \tan^2\theta = 1/\cos^2\theta$.

13. Resuelve $\cos x = -\sqrt{2}/2$ en $[-\pi, \pi)$ y escribe las familias reales.

14. Resuelve $\sin 2x = 0$ en $[0, 2\pi)$.

15. Resuelve $\cos^2 x = \cos x$ en $[0, 2\pi]$.

16. Resuelve $\dfrac{1+\cos x}{\sin x} = 0$ en $[0, 2\pi]$.

17. Si $A = 45^\circ$, $B = 60^\circ$ y $a = 10$ cm, halla C, b, c.

18. Dos lados miden 6 y 10 cm y forman 60°. Halla el tercero.

19. Para $A = 30^\circ$, $a = 7$ y $b = 12$ cm, encuentra el número de triángulos y los posibles valores de c.

20. ¿Existe un triángulo con $A = 30^\circ$, $a = 4$ y $b = 10$ cm?

21. Halla el punto de parámetro $\pi/6$ en la circunferencia de centro $(-2, 3)$ y radio 4.

22. Un punto gira uniformemente en sentido positivo sobre radio 3 m, con centro en el origen y período 12 segundos. Parte del extremo derecho. Halla posición y arco a los 4 segundos.

23. Encuentra todos los parámetros que representan $(-5, -12)$ en la circunferencia de centro origen y radio 13.

24. En una circunferencia de centro $(2, -1)$ y radio 2, un punto de parámetro $\pi/4$ gira otro $\pi/4$ en sentido positivo. Halla la posición final.

Soluciones desarrolladas

Ejercicio 1. Otra inclinación

Pitágoras da $h = \sqrt{25 + 144} = 13$. Para el ángulo indicado, $\sin\alpha = 5/13$, $\cos\alpha = 12/13$ y $\tan\alpha = 5/12$. Si se eligiera el otro ángulo se intercambiarían los catetos y cambiarían las razones.

Ejercicio 2. Altura desde el observador

La subida desde los ojos cumple $(H - 1{,}5)/12 = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$. Por ello $H = 1{,}5 + 12\sqrt{3}\,\text{m} \approx 22{,}28\,\text{m}$. Se añade la altura de los ojos después de calcular la subida del triángulo.

Ejercicio 3. Escalera de ocho metros

La altura es $8\sin 30^\circ = 4\,\text{m}$ y la separación $8\cos 30^\circ = 4\sqrt{3}\,\text{m}$. Se verifica $4^2 + (4\sqrt{3})^2 = 16 + 48 = 64$, cuadrado de la hipotenusa. La separación resulta mayor que la altura, acorde con una inclinación menor que 45°.

Ejercicio 4. Reconstruir un ángulo agudo

La tangente es $5/12$ y el ángulo es agudo: $\alpha = \arctan(5/12) \approx 22{,}62^\circ$. Hay que seleccionar grados en la calculadora. El complementario mide aproximadamente $67{,}38^\circ$; ambos completan 90°.

Ejercicio 5. Un giro de trescientos grados

La conversión da $300\pi/180 = 5\pi/3$. El arco es $\ell = 3(5\pi/3) = 5\pi\,\text{cm}$. Es cinco sextas partes de la vuelta completa, cuya longitud es $6\pi\,\text{cm}$. La conversión angular precede al producto por el radio.

Ejercicio 6. Otro giro negativo

Sumando 2π se obtiene $7\pi/6$, situado en el tercer cuadrante con ángulo de referencia $\pi/6$. Por tanto, las coordenadas son $(-\sqrt{3}/2, -1/2)$. Ambos signos son negativos; el valor negativo del giro original describe el sentido del recorrido, no el signo de ambas coordenadas por sí solo.

Ejercicio 7. Coseno y cuadrante

El seno tiene cuadrado $1 - 64/289 = 225/289$. En el tercer cuadrante debe ser negativo: $\sin\theta = -15/17$. La tangente es el cociente de dos negativos, $15/8$. La comprobación $64/289 + 225/289 = 1$ confirma la pertenencia al círculo.

Ejercicio 8. Doscientos diez grados

Es una media vuelta más 30°, por lo que seno y coseno cambian de signo: $\sin 210^\circ = -1/2$ y $\cos 210^\circ = -\sqrt{3}/2$. Su cociente da $\tan 210^\circ = \sqrt{3}/3$. La tangente conserva el valor de 30° porque tiene período 180°.

Ejercicio 9. Un cociente simplificado

El denominador exige $\cos x \neq 0$, o $x \neq \pi/2 + k\pi$. En ese dominio el numerador es $\cos^2 x$ por la identidad fundamental y puede dividirse por $\cos x$. La expresión simplificada tiene valores en más puntos, pero la identidad del cociente se afirma únicamente donde este está definido.

Ejercicio 10. Doblar un ángulo agudo

El coseno positivo es $12/13$. Entonces $\sin 2\alpha = 2\cdot 5\cdot 12/169 = 120/169$ y $\cos 2\alpha = (144-25)/169 = 119/169$. Como este último es no nulo, $\tan 2\alpha = 120/119$. Ambos signos positivos sitúan el doble ángulo en el primer cuadrante.

Ejercicio 11. Quince grados exactos

La fórmula de diferencia da $\sin 15^\circ = (\sqrt{2}/2)(\sqrt{3}/2) - (\sqrt{2}/2)(1/2) = (\sqrt{6}-\sqrt{2})/4$. Es positivo y menor que $\sin 30^\circ = 1/2$. Los valores especiales se han conservado exactos durante todo el cálculo.

Ejercicio 12. Identidad en el cuarto cuadrante

La raíz con signo positivo da $\cos\theta = 5/13$. La tangente es $-12/5$. Así $1 + 144/25 = 169/25$ y $1/(25/169) = 169/25$. La división está permitida porque $\cos\theta \neq 0$; el signo de la tangente corresponde a un seno negativo y un coseno positivo.

Ejercicio 13. Una coordenada horizontal

El ángulo principal del coseno es $3\pi/4$. Las familias son $x = \pm 3\pi/4 + 2k\pi$. Sus representantes en el intervalo son $-3\pi/4$ y $3\pi/4$. Ninguno coincide con los extremos; todos los demás representantes difieren en vueltas completas y quedan fuera.

Ejercicio 14. Ceros de un doble giro

El seno se anula en los múltiplos de π: $2x = k\pi$, luego $x = k\pi/2$. El intervalo selecciona $k = 0, 1, 2, 3$, de donde $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$. El valor 2π queda fuera por el extremo abierto.

Ejercicio 15. Producto nulo con coseno

Factorizamos $\cos x(\cos x - 1) = 0$. La rama $\cos x = 0$ aporta $\pi/2, 3\pi/2$ y la rama $\cos x = 1$ aporta $0, 2\pi$. Son cuatro valores; los dos extremos representan el mismo punto circular, pero ambos están incluidos como números del intervalo.

Ejercicio 16. Otra exclusión por dominio

El denominador excluye $0, \pi, 2\pi$. El numerador solo se anula en $x = \pi$ dentro del intervalo, y ese valor está excluido. La ecuación no tiene soluciones. La comprobación en el cociente evita admitir una raíz que solo pertenece a la ecuación obtenida al borrar el denominador.

Ejercicio 17. Un triángulo de ángulos conocidos

La suma da $C = 75^\circ$. Por la ley de senos, $b = 10\sin 60^\circ / \sin 45^\circ = 5\sqrt{6}$ cm. La fórmula de suma da $\sin 75^\circ = (\sqrt{6}+\sqrt{2})/4$. Por la misma ley, $c = 10\sin 75^\circ / \sin 45^\circ$. Su valor exacto es $5(\sqrt{3}+1)$ cm. Los tres ángulos son positivos y el mayor lado corresponde a 75°.

Ejercicio 18. Dos lados y su ángulo

La ley de cosenos da $c^2 = 36 + 100 - 2\cdot 6\cdot 10(1/2) = 76$. La longitud es la raíz positiva $c = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$ cm. Se cumple $4 < c < 16$, coherente con la desigualdad triangular de los lados dados.

Ejercicio 19. Dos triángulos posibles

La altura desde el extremo de b es $12\sin 30^\circ = 6$ y su proyección es $6\sqrt{3}$. El radio 7 corta la recta en dos puntos separados del pie por $\sqrt{49-36} = \sqrt{13}$. Ambas posiciones están en la semirrecta positiva, así que $c = 6\sqrt{3} \pm \sqrt{13}$ son dos longitudes admisibles. Por senos, $\sin B = 6/7$; tanto $B_1 = \arcsin(6/7)$ como $180^\circ - B_1$ son menores que 150° y dejan un tercer ángulo positivo.

Ejercicio 20. Sin intersección

Sería necesario $\sin B = 10 \sin 30^\circ / 4 = 5/4$, imposible. La altura del extremo del lado b sobre la semirrecta del lado c es 5, mayor que el lado $a = 4$ que debería alcanzarla. Las dos comprobaciones conducen a inexistencia.

Ejercicio 21. Centro y radio

Las coordenadas son $x = -2+4(\sqrt{3}/2) = -2+2\sqrt{3}$ e $y = 3+4(1/2) = 5$. Las diferencias respecto del centro son $2\sqrt{3}$ y 2, cuyos cuadrados suman $12 + 4 = 16$. Esa suma es el cuadrado del radio.

Ejercicio 22. Una vuelta en doce segundos

La rapidez angular es $2\pi/12 = \pi/6\,\text{rad/s}$. A los 4 segundos el ángulo es $2\pi/3$. La posición es $(-3/2, 3\sqrt{3}/2)$ metros y la longitud recorrida $3(2\pi/3) = 2\pi\,\text{m}$. La posición está en el segundo cuadrante; se ha recorrido un tercio de vuelta.

Ejercicio 23. Un punto del tercer cuadrante

Las coordenadas unitarias son $(-5/13, -12/13)$. El ángulo de referencia es $\beta = \arctan(12/5)$; como el punto está en el tercer cuadrante, los parámetros son $\pi + \beta + 2k\pi$, con k entero. Un representante en grados es aproximadamente 247,38°. Un arctangente de 12/5 aislado devolvería un ángulo agudo y perdería el cuadrante.

Ejercicio 24. Sumar dos ángulos de cuarenta y cinco grados

El parámetro final es $\pi/2$. Por ello $x = 2 + 2\cos(\pi/2) = 2$ e $y = -1 + 2\sin(\pi/2) = 1$. El punto queda sobre la vertical del centro, a distancia 2 por encima de él. La composición se realiza sumando giros referidos al mismo centro.

Diagnóstico de salida

Explica por qué ampliar un triángulo conserva sus razones trigonométricas. Reconstruye las dos soluciones del seno y los dos triángulos del caso ambiguo. Justifica las restricciones al dividir y distingue, en un giro, la posición final de la longitud recorrida.

CAPÍTULO 15

Coordenadas, rectas, distancias y vectores

Un equipo de rescate recibe dos referencias: el refugio está dos kilómetros al oeste y uno al norte del campamento; una persona pide ayuda desde un punto situado cuatro kilómetros al este y nueve al norte. El mapa permite señalar ambos lugares. Para organizar el traslado hace falta obtener algo más: la dirección y la longitud del desplazamiento entre ellos. Las coordenadas convierten esas referencias en números con los que podemos razonar, calcular y comprobar una ruta.

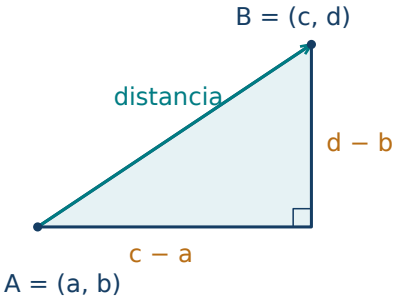
La elección del campamento como origen forma parte de la descripción. Otro equipo podría usar un origen distinto y localizar exactamente los mismos lugares. Esa libertad será útil: escogeremos las coordenadas que hagan visible la estructura de cada problema. Trabajaremos primero en un plano euclidiano con dos ejes perpendiculares, orientados y provistos de la misma unidad de longitud. Esta última condición permite aplicar directamente Pitágoras a las diferencias de coordenadas.

Localizar y medir

El punto $P = (x, y)$ queda determinado por sus proyecciones sobre los ejes: x mide la posición horizontal con signo y y la vertical. El orden del par indica qué eje corresponde a cada número. Al pasar de $A = (a, b)$ a $B = (c, d)$, las variaciones horizontal y vertical son $c - a$ y $d - b$. El segmento que une los puntos es la hipotenusa de un triángulo cuyos catetos miden $|c-a|$ y $|d-b|$. Pitágoras da

$$d(A, B) = \sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2}.$$

El cuadrado absorbe el signo de cada diferencia; la raíz elegida es la no negativa, como corresponde a una longitud. Si el mapa usa escalas gráficas distintas en ambos ejes, primero se convierten las componentes a una unidad física común. La inclinación aparente de una línea en una pantalla deformada puede cambiar, mientras las coordenadas y la fórmula conservan su significado en el sistema declarado. Por ejemplo, si ambos ejes representan kilómetros, una diferencia horizontal de tres y una vertical de cuatro siguen dando cinco kilómetros, aunque el dibujo aparezca estirado.



Problema 1. Del campamento al rescate

En el mapa descrito al comienzo, calcula la distancia recta entre el refugio $A = (-2, 1)$ y la persona $B = (4, 9)$. Cada unidad representa un kilómetro.

Solución. De oeste a este se avanza $4-(-2) = 6$ km y hacia el norte, $9-1 = 8$ km. La distancia recta es $\sqrt{6^2+8^2} = \sqrt{100} = 10$ km. Una ruta que recorra primero la dirección este y luego la norte mide $6+8 = 14$ km. Ambas cifras responden a recorridos concretos: diez kilómetros corresponden al segmento que une los lugares; catorce, al trayecto quebrado descrito. El terreno determinará cuál puede recorrerse.

Problema 2. Un punto igualmente alejado de dos estaciones

Encuentra todos los puntos del eje horizontal que están a igual distancia de $A = (-2, 3)$ y $B = (4, 1)$.

Solución. Escribimos el punto buscado como $P = (x, 0)$: pertenecer al eje horizontal fija la segunda coordenada. Igualar distancias equivale aquí a igualar sus cuadrados, pues ambas son no negativas:

$$(x+2)^2 + 9 = (x-4)^2 + 1.$$

Al desarrollar, $x^2 + 4x + 13 = x^2 - 8x + 17$, de donde $12x = 4$ y $x = 1/3$. Hay un solo punto, $(1/3, 0)$. Para comprobarlo, ambos cuadrados de distancia valen $130/9$. La ecuación lineal obtenida muestra además la unicidad.

Un segmento contiene una sucesión continua de puntos entre sus extremos. Para describirlos podemos repartir el desplazamiento total: una fracción t de la variación horizontal y la misma fracción de la vertical. Así obtenemos

$$P = A + t(B - A) = ((1-t)a + tc, (1-t)b + td).$$

Para $0 \le t \le 1$, el punto recorre el segmento de A a B; con t real recorre toda la recta cuando $A \neq B$. El punto medio corresponde a $t = 1/2$. Si $AP : PB = m : n$, con $m, n > 0$, la fracción recorrida es $t = m/(m+n)$: el denominador cuenta las partes totales.

Problema 3. Repartir un tramo

Para $A = (-1, 2)$ y $B = (5, -4)$, calcula el punto medio M y el punto interior P que cumple $AP : PB = 1 : 2$.

Solución. El desplazamiento total es $(6, -6)$. Su mitad lleva a $M = (-1, 2) + (3, -3) = (2, -1)$. El reparto $1 : 2$ asigna a AP una de las tres partes: $P = (-1, 2) + (2, -2) = (1, 0)$. Las longitudes son $AP = 2\sqrt{2}$ y $PB = 4\sqrt{2}$, por lo que la razón pedida se cumple. Dar a AP dos tercios colocaría el punto en el reparto inverso.

La circunferencia de centro $C = (h, k)$ y radio $r > 0$ reúne los puntos cuya distancia a C es r. La fórmula de distancia transforma esa condición en $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$. Los signos del centro se leen dentro de las diferencias: $y + 1$ expresa la distancia con signo respecto de la coordenada -1.

Problema 4. Reconocer una circunferencia

Determina el centro y el radio de $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$. Decide si $(5, 3)$ pertenece a ella.

Solución. Agrupamos y completamos cuadrados:

$$(x - 2)^2 - 4 + (y + 1)^2 - 1 = 20.$$

Por tanto, $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$. El centro es $(2, -1)$ y el radio es 5. Para $(5, 3)$, el lado izquierdo vale $3^2+4^2 = 25$, así que el punto pertenece a la circunferencia. La misma comprobación dice que su distancia al centro es cinco.

Propiedades de coordenadas y distancias

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Distancia cartesiana	$d(A, B) = \sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2}$ en ejes perpendiculares con unidad común.
División del segmento	$P = A + t(B - A)$; $0 \le t \le 1$ describe el segmento.
Punto medio	$M = ((a + c)/2, (b + d)/2)$.
Razón interior	$AP : PB = m : n$ implica $t = m/(m + n)$, para $A \neq B$ y $m, n > 0$.
Circunferencia	$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, con centro (h, k) y radio $r > 0$.

Pruebas. En el apéndice, «Distancias y reparto en coordenadas».

Describir un desplazamiento

Para volver del rescate al refugio hay que invertir las dos variaciones. El desplazamiento posee componentes con signo y una longitud. Un vector libre representa la clase de todos los desplazamientos que tienen las mismas componentes en los ejes elegidos. Podemos dibujarlo mediante una flecha desde cualquier punto: la cola indica dónde comenzamos y la punta dónde terminamos. Para $A = (a, b)$ y $B = (c, d)$ escribimos $\overrightarrow{AB} = (c - a, d - b)$.

La componente horizontal y la vertical son números reales con signo. El módulo $\|u\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$ es una longitud. El vector cero $(0, 0)$ tiene módulo cero; su representación es un desplazamiento que termina donde comienza, y su dirección angular queda indeterminada. Para $u \neq 0$, el vector $u/\|u\|$ tiene módulo uno y el mismo sentido.

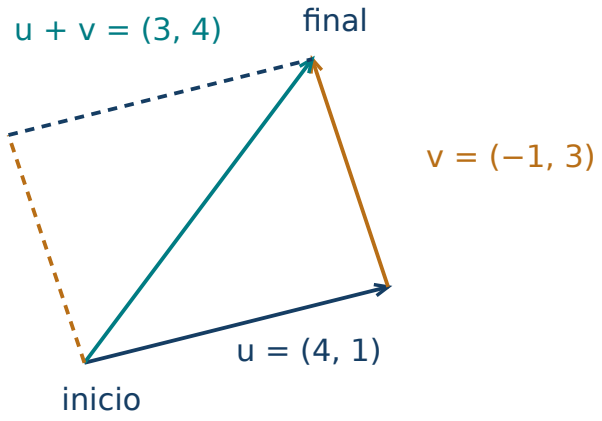
Problema 5. Cambiar el lugar de una flecha

Un desplazamiento va de $A = (2, -1)$ a $B = (-1, 3)$. Obtén sus componentes, su módulo y la punta de una flecha equivalente que comience en $C = (5, 2)$.

Solución. Restamos final menos inicial: $u = (-1-2, 3-(-1)) = (-3, 4)$. Su módulo es $\sqrt{9 + 16} = 5$. La nueva punta es $D = C + u = (2, 6)$. En efecto, $\overrightarrow{CD} = (2 - 5, 6 - 2) = (-3, 4)$. El número -3 expresa tres unidades hacia el lado negativo horizontal; el módulo cinco expresa la longitud total del desplazamiento.

Si a un desplazamiento u le sigue otro v, las variaciones por eje se acumulan. Esto define $u + v = (u_x + v_x, u_y + v_y)$ y justifica la regla de colocar la cola de la segunda flecha en la punta

de la primera. La resultante une el inicio del primer tramo con el final del segundo. La figura del paralelogramo expresa la misma suma al dibujar ambos vectores desde un origen común.



Multiplicar u por un real k produce $ku = (ku_x, ku_y)$. Si $k > 0$ conserva el sentido; si $k < 0$ lo invierte; su longitud es $|k|\|u\|$. Para $k = 0$ obtenemos el vector cero. Las reglas de suma y producto por escalar heredan las propiedades de los números reales componente a componente: por ejemplo, $k(u + v) = (ku_x + kv_x, ku_y + kv_y) = ku + kv$.

Problema 6. Dos tramos y una resultante

Una persona recorre los desplazamientos $u = (4, 1)$ y $v = (-1, 3)$, en kilómetros. Calcula el desplazamiento total y la longitud del trayecto quebrado.

Solución. La resultante es $u + v = (3, 4)$, de módulo cinco kilómetros. Los tramos miden $\sqrt{17}$ y $\sqrt{10}$ km, de modo que la longitud recorrida es $\sqrt{17} + \sqrt{10} \approx 7{,}29$ km. La suma de longitudes conserva el recorrido; la suma vectorial conserva el efecto de ambos tramos sobre la posición final.

Problema 7. Un movimiento que deshace otro

Una plataforma ha sufrido el desplazamiento $u = (-6, 8)$ cm. ¿Qué desplazamiento debe aplicarse para volver a su posición inicial? ¿Y para deshacer solamente la cuarta parte del desplazamiento original?

Solución. El retorno completo requiere $-u = (6, -8)$ cm, porque $u + (-u) = (0, 0)$. Su longitud es diez centímetros. Para deshacer una cuarta parte aplicamos $-u/4 = (3/2, -2)$ cm, cuyo módulo es $10/4 = 5/2$ cm. Queda entonces un desplazamiento neto de $3u/4 = (-9/2, 6)$ cm respecto del inicio.

Problema 8. Una homotecia vista desde su centro

Una homotecia tiene centro $O = (1, -2)$ y razón $k = -2$. Obtén la imagen de $A = (3, 1)$.

Solución. Primero medimos desde el centro: $\overrightarrow{OA} = (2, 3)$. La imagen debe satisfacer $\overrightarrow{OA'} = -2(2, 3) = (-4, -6)$. Sumando de nuevo el centro, $A' = O + (-4, -6) = (-3, -8)$. El signo sitúa la imagen en el rayo opuesto y el factor dos duplica la distancia al centro. La fórmula $A' = O + k(A - O)$ mantiene visibles ambas decisiones.

Propiedades de las operaciones vectoriales

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Desplazamiento y módulo	$\overrightarrow{AB} = B - A$; $\|u\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$.
Suma por componentes	$u + v = (u_x + v_x, u_y + v_y)$.
Conmutatividad y asociatividad	$u + v = v + u$; $(u + v) + w = u + (v + w)$.
Cero y opuesto	$u + 0 = u$; $u + (-u) = 0$.
Escala y longitud	$ku = (ku_x, ku_y)$; $\|ku\| = \|k\|\|u\|$.
Distributividades	$k(u + v) = ku + kv$; $(k + l)u = ku + lu$.
Compatibilidad escalar	$k(lu) = (kl)u$; $1u = u$.
Vector unitario	$\hat{u} = u/\|u\|$, para $u \neq 0$.
Homotecia	$A' = O + k(A - O)$; $k \neq 0$ para una homotecia invertible.

Pruebas. En el apéndice, «Operaciones con vectores y homotecias en coordenadas».

Ángulos, componentes y proyecciones

Un vector de módulo $r > 0$ que forma un ángulo orientado θ desde el eje horizontal positivo tiene componentes $(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Basta ampliar por r el radio unitario estudiado en el capítulo anterior. Los signos de seno y coseno incorporan el cuadrante. Si el ángulo se mide desde otro eje, hay que reconstruir el triángulo correspondiente o traducirlo al ángulo orientado declarado.

Problema 9. Una dirección del segundo cuadrante

Calcula las componentes de un vector de módulo diez que forma 150° con el eje horizontal positivo.

Solución. El ángulo tiene coseno $-\sqrt{3}/2$ y seno $1/2$. Por tanto, $u = (-5\sqrt{3}, 5)$. Su componente horizontal es negativa y la vertical positiva, como exige el segundo cuadrante. La comprobación $\|u\|^2 = 75 + 25 = 100$ recupera el módulo diez.

Problema 10. Una embarcación y una corriente

En un modelo de velocidades constantes, una embarcación avanza respecto del agua a 4 m/s hacia el norte y la corriente fluye a 3 m/s hacia el este. Obtén la velocidad respecto de la orilla.

Solución. Elegimos este como eje horizontal positivo y norte como vertical positivo. Las contribuciones son $(0, 4)$ y $(3, 0)$ m/s, cuya suma es $(3, 4)$ m/s. Su módulo es cinco metros por segundo. El ángulo al este del norte cumple $\tan\alpha = 3/4$, así que $\alpha \approx 36{,}87^\circ$. El resultado supone que ambas velocidades se componen mediante la suma de desplazamientos durante el mismo intervalo de tiempo; con un segundo, las componentes del desplazamiento son tres y cuatro metros.

El producto escalar permitirá hacer proyecciones sobre una dirección cualquiera. Lo definimos por $u \cdot v = u_x v_x + u_y v_y$. Para vectores no nulos, si $\phi \in [0, \pi]$ es el ángulo entre ellos, la ley de cosenos aplicada al triángulo de lados $u, v, u - v$ da

$$u \cdot v = \|u\| \, \|v\| \cos \phi.$$

La justificación algebraica consiste en desarrollar $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2(u \cdot v)$ y comparar con la ley de cosenos. Así se unen la definición por coordenadas y la interpretación geométrica. Dos vectores no nulos son perpendiculares precisamente cuando su producto escalar vale cero. Adoptamos también la convención algebraica de que el vector cero es ortogonal a todos los vectores; el ángulo geométrico se reserva a los pares no nulos.

Si e es unitario, el número $u \cdot e$ es la componente de u en la dirección orientada de e; puede ser negativo. El vector proyectado es $(u \cdot e)e$. Para una dirección dada por $v \neq 0$, sustituimos $e = v/\|v\|$ y obtenemos

$$\operatorname{proj}_v u = \frac{u \cdot v}{v \cdot v} \, v.$$

Restar esta proyección deja una componente perpendicular a v. La igualdad $(u - \operatorname{proj}_v u) \cdot v = 0$ lo comprueba directamente y permite verificar cualquier cálculo de proyección.

Problema 11. Empujar junto a una rampa

Una fuerza horizontal hacia la derecha tiene módulo 20 N. Una rampa asciende hacia la derecha formando 30° con la horizontal. Descompón la fuerza en las direcciones paralela y normal a la rampa, con normal positiva hacia arriba de su superficie.

Solución. En los ejes horizontales habituales, $F = (20, 0)$. Elegimos los unitarios $e = (\sqrt{3}/2, 1/2)$ a lo largo de la subida y $n = (-1/2, \sqrt{3}/2)$ hacia arriba de la superficie. Son perpendiculares, pues $e \cdot n = 0$, y ambos tienen módulo uno. Las componentes con signo son $F \cdot e = 10\sqrt{3}$ N y $F \cdot n = -10$ N. Los vectores correspondientes son $(15, 5\sqrt{3})$ y $(5, -5\sqrt{3})$ N; su suma recupera $(20, 0)$. El signo negativo de la segunda componente expresa que la fuerza empuja hacia la superficie.

Problema 12. Proyectar sobre una dirección oblicua

Proyecta $u = (3, 4)$ sobre la dirección $v = (1, 2)$ y determina la componente perpendicular.

Solución. Calculamos $u \cdot v = 3 + 8 = 11$ y $v \cdot v = 1 + 4 = 5$. La proyección vectorial es $(11/5)v = (11/5, 22/5)$. Al restar queda $w = (4/5, -2/5)$. Se verifica $w \cdot v = 4/5 - 4/5 = 0$. La componente escalar sobre el unitario que apunta como v vale $11/\sqrt{5}$, una longitud con signo; la proyección vectorial tiene además dirección y componentes. Sus cuadrados de módulo satisfacen $121/5 + 4/5 = 25 = \|u\|^2$.

Propiedades del producto escalar y de la proyección

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Componentes desde un ángulo	$u = (r\cos\theta, r\sin\theta)$; $r > 0$, ángulo desde el eje horizontal positivo.
Producto escalar	$u \cdot v = u_x v_x + u_y v_y$; $u \cdot u = \|u\|^2$.
Simetría y linealidad	$u \cdot v = v \cdot u$; $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$; $(ku) \cdot v = k(u \cdot v)$.
Ángulo y ortogonalidad	$\cos\phi = (u \cdot v)/(\|u\|\|v\|)$ para $u, v \neq 0$; ortogonalidad algebraica: $u \cdot v = 0$.
Proyección escalar	$u \cdot e$, con $\|e\| = 1$, en la dirección orientada de e.
Proyección vectorial	$\text{proj}_v\, u = ((u \cdot v)/(v \cdot v))v$, para $v \neq 0$.
Descomposición perpendicular	$u = \text{proj}_v\, u + w$, con $w \cdot v = 0$.

Pruebas. En el apéndice, «Producto escalar, ángulos y proyecciones ortogonales».

Una recta a partir de un punto y una dirección

Imaginemos una guía recta que atraviesa un punto A y sigue una dirección $d \neq 0$. Todos sus puntos se obtienen mediante $P = A + td$, con t real. El parámetro recorre desplazamientos en ambos sentidos. Si $d = (p, q)$, esto significa $x = a + tp$, $y = b + tq$. La dirección se conserva al sustituir d por cualquier múltiplo no nulo: cambia la manera de recorrer la recta.

Cuando $p \neq 0$, despejamos $t = (x - a)/p$ y obtenemos $y - b = (q/p)(x - a)$. La pendiente $m = q/p$ mide la variación vertical por unidad horizontal. Si $p = 0$, todos los puntos tienen $x = a$ y la recta es vertical; su dirección se describe perfectamente con $(0, q)$. Para $q = 0$ y $p \neq 0$, la pendiente vale cero y la recta es horizontal.

Problema 13. Reconstruir una guía recta

Encuentra una ecuación de la recta que pasa por $A = (-2, 1)$ y $B = (4, 4)$. Da también una parametrización.

Solución. La dirección $B - A = (6, 3)$ se puede simplificar a $(2, 1)$. La pendiente es $1/2$, y la forma punto-pendiente da $y - 1 = (x + 2)/2$, equivalente a $y = x/2 + 2$. Una parametrización es $(x, y) = (-2, 1) + t(2, 1)$, con $t \in \mathbb{R}$. Para $t = 0$ aparece A; para $t = 3$ aparece B. Sustituir ambos puntos en la ecuación proporciona una segunda comprobación.

Problema 14. Dos direcciones de referencia

Escribe ecuaciones y parametrizaciones de la recta vertical por $(3, 1)$ y de la horizontal por $(1, -2)$. Encuentra su intersección.

Solución. En la vertical, la primera coordenada permanece fija: $x = 3$, o $(x, y) = (3, 1) + t(0, 1)$. En la horizontal, permanece fija la segunda: $y = -2$, o $(x, y) = (1, -2) + s(1, 0)$. El punto común debe satisfacer ambas condiciones, de modo que es $(3, -2)$. La dirección de la primera forma 90° con la de la segunda.

Otra descripción de una recta es $ax + by + c = 0$, con $(a, b) \neq (0, 0)$. Su vector normal es $n = (a, b)$ y una dirección es $d = (-b, a)$, pues $n \cdot d = 0$. Si P_0 pertenece a la recta, la ecuación

equivale a $n \cdot (P - P_0) = 0$: el desplazamiento desde P_0 es perpendicular a la normal. Multiplicar los tres coeficientes por un mismo real no nulo conserva la recta.

Problema 15. Cruzar dos condiciones

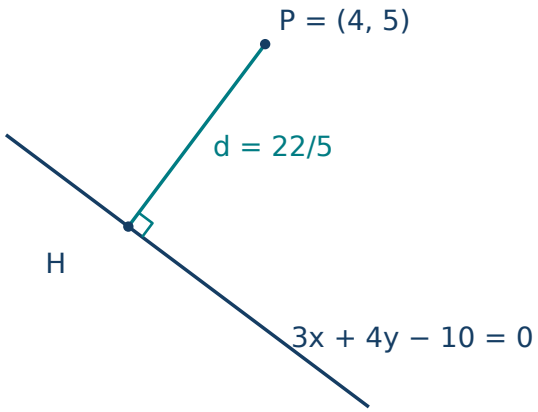
Encuentra el punto común de $x + 2y = 5$ y $2x - y = 0$.

Solución. La segunda condición da $y = 2x$. Sustituida en la primera, produce $x + 4x = 5$, luego $x = 1$ y $y = 2$. La comprobación entrega $1 + 4 = 5$ y $2 - 2 = 0$. Las direcciones $(2, -1)$ y $(1, 2)$ tienen producto escalar cero; estas rectas se cruzan perpendicularmente. Resolver sus ecuaciones ha localizado el mismo cruce que representa la geometría.

Para medir la distancia de un punto $P = (x_0, y_0)$ a una recta, buscamos el pie perpendicular H. La normal (a, b) indica la dirección en la que debemos movernos desde P, así que podemos escribir $H = P - t(a, b)$ y buscar el valor de t que sitúe el punto en la recta. Al sustituir sus coordenadas en $ax + by + c = 0$ aparece $ax_0 + by_0 + c - t(a^2 + b^2) = 0$. Si llamamos $f = ax_0 + by_0 + c$, obtenemos $t = f/(a^2 + b^2)$, con denominador positivo porque la normal es no nula. El desplazamiento necesario queda entonces expresado por

$$H = P - \frac{f}{a^2 + b^2}(a, b).$$

Al sustituir las coordenadas de H en la ecuación queda $f - f = 0$. Además, $P - H$ es paralelo a la normal y, por ello, perpendicular a la recta. Su módulo es $|f|/\sqrt{a^2 + b^2}$. Este segmento es el más corto: para cualquier otro punto Q de la recta, Pitágoras da $PQ^2 = PH^2 + HQ^2 \geq PH^2$.



Problema 16. La distancia a un borde recto

Obtén la distancia de $P = (4, 5)$ a la recta $3x + 4y - 10 = 0$ y las coordenadas del punto más cercano.

Solución. Evaluar la expresión de la recta en P da $f = 12 + 20 - 10 = 22$. El normal $(3, 4)$ tiene módulo cinco, por lo que la distancia es $22/5$. El pie es

$$H = (4, 5) - \frac{22}{25}(3, 4) = (34/25, 37/25).$$

Se comprueba que $3(34/25) + 4(37/25) = 250/25 = 10$. El desplazamiento $P - H = (66/25, 88/25)$ es un múltiplo de $(3, 4)$ y tiene módulo $22/5$, como debía suceder.

Dos rectas tienen direcciones paralelas cuando sus vectores directores son proporcionales. Para $u = (u_x, u_y)$ y $v = (v_x, v_y)$ no nulos, esto equivale a $u_x v_y - u_y v_x = 0$. Direcciones perpendiculares satisfacen $u \cdot v = 0$. Estas pruebas incluyen las rectas verticales. Para rectas paralelas distinguiremos además su posición: pueden compartir todos sus puntos o tener conjuntos de puntos disjuntos.

Problema 17. Paralelas o coincidentes

Compara $r : 2x - y + 1 = 0$ con $s : 4x - 2y - 6 = 0$ y con $q : 4x - 2y + 2 = 0$. Calcula la distancia entre r y s.

Solución. Sus normales son proporcionales. Dividir s por dos da $2x - y - 3 = 0$, mientras dividir q por dos reproduce r. Así, q y r coinciden, y s es paralela y distinta. El punto $(0, 1)$ pertenece a r; su distancia a s es $|2(0) - 1 - 3|/\sqrt{5} = 4/\sqrt{5}$. Para cualquier punto (x, y) de r se cumple $2x - y = -1$, por lo que el numerador mantiene ese valor absoluto cuatro: la separación es constante.

Problema 18. Construir una perpendicular

Encuentra la recta por $P = (2, -1)$ perpendicular a $r : 2x + 3y - 6 = 0$ y su cruce con r.

Solución. El normal de r, $(2, 3)$, sirve como dirección de la perpendicular. Un normal para la nueva recta es $(3, -2)$, y su ecuación resulta $3(x - 2) - 2(y + 1) = 0$, es decir, $3x - 2y - 8 = 0$. Para cruzarlas, multiplicamos la primera por dos y la segunda por tres: $4x + 6y = 12$ y $9x - 6y = 24$. Al sumar, $13x = 36$, luego $x = 36/13$ y $y = 2/13$. Desde P hasta el cruce, la variación es $(10/13, 15/13) = (5/13)(2, 3)$, que confirma la perpendicularidad buscada.

Problema 19. Un ángulo entre rectas

Obtén el ángulo agudo entre las direcciones $u = (1, 2)$ y $v = (2, 1)$.

Solución. El producto escalar vale cuatro y ambos módulos valen $\sqrt{5}$. El ángulo entre estos vectores tiene coseno $4/5$, así que $\phi = \arccos(4/5) \approx 36{,}87^\circ$. Para el ángulo agudo entre rectas usamos el valor absoluto del producto escalar: elegir $-v$ describiría la misma recta y daría el ángulo suplementario entre flechas. El valor absoluto selecciona siempre el ángulo menor o igual que 90°.

Propiedades de las rectas y de la perpendicularidad

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Recta paramétrica	$P = A + td$, $t \in \mathbb{R}$, $d \neq 0$.
Pendiente	$m = q/p$ para $d = (p, q)$ y $p \neq 0$; $y - b = m(x - a)$.
Forma general y normal	$ax + by + c = 0$, $(a, b) \neq (0, 0)$; normal (a, b) y dirección $(-b, a)$.
Paralelismo de direcciones	$u_x v_y - u_y v_x = 0$, para $u, v \neq 0$.
Rectas perpendiculares	$u \cdot v = 0$ para sus directores no nulos; si ambas pendientes existen, $m_1 m_2 = -1$.
Pie perpendicular	$H = P - f(a, b)/(a^2 + b^2)$; $f = ax_0 + by_0 + c$.

Continuación de la tabla de propiedades

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Distancia a una recta	$d(P,r) = \lvert ax_0 + by_0 + c\rvert / \sqrt{a^2+b^2}$.
Ángulo menor entre rectas	$\cos\phi = \lvert u \cdot v\rvert / (\lVert u\rVert \lVert v\rVert)$, $0 \le \phi \le \pi/2$.

Pruebas. En el apéndice, «Rectas, normales y distancia mínima».

Mover una figura y cambiar la referencia

Una traslación por v lleva cada punto P a $P' = P + v$. Una reflexión respecto del eje horizontal lleva (x, y) a $(x, -y)$; respecto del vertical, a $(-x, y)$. Para girar θ alrededor del origen, las fórmulas de adición de seno y coseno proporcionan

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta,$$
$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta.$$

En efecto, escribimos $P = (r\cos\alpha, r\sin\alpha)$ y reemplazamos α por $\alpha + \theta$; el origen queda fijo. Para girar alrededor de C, primero usamos $P - C$, después lo giramos y finalmente sumamos C. Traslaciones, reflexiones y giros conservan distancias: las diferencias entre puntos se conservan en una traslación, cambian signos en una reflexión y conservan la suma de cuadrados en un giro.

Estas transformaciones tienen forma afín: cada coordenada nueva es una combinación lineal de las originales más una constante. La forma afín describe también homotecias y transformaciones que alteran ángulos o longitudes. Cada propiedad geométrica requiere comprobar el tipo de transformación aplicado.

Problema 20. Un giro seguido de una reflexión

Gira $P = (3, 1)$ 90° en sentido antihorario alrededor de $C = (1, -1)$ y refleja el resultado respecto del eje horizontal. Compara con ejecutar primero la reflexión y después el giro alrededor del mismo centro fijo C.

Solución. Respecto de C, el vector es $(2, 2)$. Girar 90° lo lleva a $(-2, 2)$, y sumar C da $(-1, 1)$. La reflexión final produce $(-1, -1)$. En el orden inverso, la reflexión inicial da $(3, -1)$, cuyo vector desde C es $(2, 0)$. El giro lo transforma en $(0, 2)$ y la posición final es $(1, 1)$. Los dos resultados muestran que el orden forma parte de la composición. En ambos casos se ha mantenido fijo el centro especificado.

Problema 21. El mismo lugar desde otro origen

En un sistema dado, $P = (5, 2)$ y $Q = (1, -1)$. Se elige un nuevo origen situado en $O' = (2, -3)$, manteniendo orientación y unidad de los ejes. Obtén las nuevas coordenadas y compara la distancia.

Solución. Las coordenadas nuevas son los desplazamientos desde O': $P_{\text{nuevo}} = (3, 5)$ y $Q_{\text{nuevo}} = (-1, 2)$. En ambos sistemas, el desplazamiento de Q a P es $(4, 3)$ y su longitud es cinco. Cambiar la referencia asigna otros pares a los mismos lugares. Trasladar físicamente los puntos en un sistema fijo describe otro problema y se expresa sumándoles el desplazamiento elegido.

Propiedades de movimientos y referencias

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Traslación	$P' = P + v$; conserva diferencias y distancias.
Reflexiones en los ejes	$(x, y) \mapsto (x, -y)$ o $(x, y) \mapsto (-x, y)$; conservan distancias.
Giro alrededor del origen	$R_\theta(x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$; conserva distancias.
Giro de centro arbitrario	$P' = C + R_\theta(P - C)$.
Cambio de origen paralelo	$P_{\text{nuevo}} = P - O'$ con iguales ejes orientados y unidad.
Composición afín	Sustituir las fórmulas en el orden dado produce otra transformación afín.

Pruebas. En el apéndice, «Movimientos del plano y elección del origen».

Una tercera coordenada

Para localizar una carga suspendida necesitamos además la altura. En el espacio elegimos tres ejes perpendiculares con la misma unidad. Un punto tiene coordenadas (x, y, z) y los desplazamientos se suman componente a componente. Aplicar Pitágoras primero en la proyección horizontal y después con la altura da $\|u\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$. El producto escalar añade un tercer término: $u \cdot v = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$; su interpretación angular y la fórmula de proyección se conservan.

Problema 22. La diagonal de un recinto

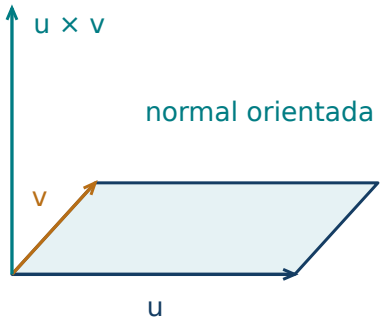
Un recinto rectangular mide 3, 4 y 12 metros. Calcula la distancia entre dos vértices opuestos y el vector unitario que apunta de $(0, 0, 0)$ a $(3, 4, 12)$.

Solución. La diagonal del piso mide $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ m. Con la altura forma un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa mide $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ m. El desplazamiento es $(3, 4, 12)$ m y su unitario es $(3/13, 4/13, 12/13)$. El cuadrado de su módulo es $(9 + 16 + 144)/169 = 1$.

Dos vectores del espacio pueden determinar una orientación perpendicular a su plano. Para fijarla elegimos ejes con orientación de mano derecha: girar del eje positivo x al positivo y por el ángulo recto menor señala el eje positivo z según la regla de la mano derecha. En esa base ortonormal orientada definimos el producto vectorial por

$$u \times v = (u_y v_z - u_z v_y,\ u_z v_x - u_x v_z,\ u_x v_y - u_y v_x).$$

Cada componente combina dos productos y su orden controla el signo. El resultado es perpendicular a ambos factores. Su módulo cumple $\|u \times v\| = \|u\|\|v\|\sin\phi$: mide el área del paralelogramo generado por las dos flechas. Para factores paralelos o alguno cero, ese paralelogramo tiene área cero y el producto es el vector cero. Cambiar el orden invierte el resultado.



Esquema espacial; base de mano derecha.

Problema 23. Área y normal de una placa

Una placa triangular tiene vértices $A = (0,0,0)$, $B = (2,0,0)$ y $C = (0,3,0)$. Obtén su área y la normal orientada determinada por el orden A, B, C.

Solución. Los lados desde A son $u = (2,0,0)$ y $v = (0,3,0)$. La fórmula da $u \times v = (0,0,6)$. El paralelogramo tiene área seis unidades cuadradas, así que la placa triangular tiene área tres. La normal unitaria orientada es $(0,0,1)$. Elegir el orden A, C, B daría $(0,0,-6)$ y conservaría el área.

Problema 24. Una normal oblicua

Para $u = (1,2,0)$ y $v = (0,1,3)$, calcula $u \times v$, verifica su perpendicularidad y obtén el área del triángulo generado por esos lados.

Solución. Calculamos por componentes: $u \times v = (2\cdot 3 - 0\cdot 1, 0\cdot 0 - 1\cdot 3, 1\cdot 1 - 2\cdot 0) = (6,-3,1)$. Sus productos escalares con u y v son $6-6=0$ y $-3+3=0$. El módulo es $\sqrt{36+9+1} = \sqrt{46}$, por lo que el área triangular es $\sqrt{46}/2$. Como control adicional, $\|u\|^2\|v\|^2 - (u\cdot v)^2 = 5\cdot 10 - 2^2 = 46$, el cuadrado del módulo calculado.

Propiedades de los vectores del espacio

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Módulo y distancia espacial	$\|u\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$; $d(A,B) = \|B - A\|$.
Operaciones y producto escalar	Suma y escala componente a componente; $u \cdot v = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$. Las propiedades escalares del plano se conservan.
Producto vectorial	$u \times v = (u_y v_z - u_z v_y, u_z v_x - u_x v_z, u_x v_y - u_y v_x)$ en base ortonormal de mano derecha.
Orden y distributividad	$v \times u = -(u \times v)$; $u \times (v + w) = u \times v + u \times w$; $(ku) \times v = k(u \times v)$.
Normalidad	$(u \times v) \cdot u = (u \times v) \cdot v = 0$.
Área	$\|u \times v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - (u \cdot v)^2$; área del paralelogramo $\|u \times v\|$, del triángulo la mitad.

Pruebas. En el apéndice, «Vectores espaciales, orientación y áreas».

Ejercicios para trabajar sin profesor

1. Halla la distancia entre $A = (-3, 2)$ y $B = (5, -4)$ y compara con un recorrido horizontal seguido de uno vertical.

2. Encuentra los puntos $(0, y)$ igualmente alejados de $A = (2, -1)$ y $B = (-4, 3)$.

3. Para $A = (2, -3)$ y $B = (8, 9)$, calcula el punto medio y el reparto interior $AP : PB = 2 : 1$.

4. Obtén centro y radio de $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$ y decide si $(0, 0)$ pertenece a la circunferencia.

5. Halla el desplazamiento de $(4, 2)$ a $(-2, -6)$, su módulo y su representante con cola en $(1, 1)$.

6. Suma los desplazamientos $(2, -1)$ y $(-5, 5)$. Compara el módulo de la suma con la longitud del trayecto quebrado.

7. Un desplazamiento es $(8, -6)$. Aplica el opuesto de sus tres décimas partes y calcula el desplazamiento neto.

8. Aplica a $A = (5, -1)$ la homotecia de centro $(1, 1)$ y razón $-1/2$. Comprueba la distancia al centro.

9. Calcula las componentes de un vector de módulo seis y ángulo 240° desde el eje horizontal positivo.

10. Una embarcación lleva velocidad $(5, 0)$ m/s respecto del agua; la corriente aporta $(0, -12)$ m/s. Calcula velocidad, rapidez y ángulo al sur del este respecto de la orilla.

11. Descompón $F = (0, -12)$ N según $e = (\sqrt{3}/2, 1/2)$ y $n = (-1/2, \sqrt{3}/2)$. Comprueba la reconstrucción.

12. Proyecta $u = (4, 1)$ sobre $v = (2, -1)$ y verifica que el resto es perpendicular a v.

13. Encuentra ecuación y parametrización de la recta por $(1, 3)$ y $(5, -5)$.

14. Da las rectas vertical y horizontal por $(-2, 4)$ y parametrízalas.

15. Localiza el cruce de $x - y = 1$ y $x + 2y = 7$.

16. Calcula la distancia desde $(1, 4)$ a $x + 2y - 3 = 0$ y su pie perpendicular.

17. Compara $3x + 4y - 5 = 0$, $6x + 8y + 10 = 0$ y $6x + 8y - 10 = 0$. Calcula la separación de las dos distintas.

18. Construye la perpendicular por $(1, 2)$ a $x - 2y + 3 = 0$ y halla el cruce.

19. Determina el ángulo menor entre las rectas de direcciones $(1, 0)$ y $(-1, \sqrt{3})$.

20. Gira $(4, 1)$ 90° antihorarios alrededor de $(2, 1)$ y luego traslada por $(-3, 2)$. Calcula el resultado en ambos órdenes, manteniendo fijo el centro del giro.

21. Si el nuevo origen es $(-1, 2)$ y los ejes mantienen orientación y unidad, expresa las coordenadas nuevas de $P = (3, -2)$ y $Q = (0, 2)$. Comprueba su distancia.

22. Obtén la distancia entre $A = (1, -1, 2)$ y $B = (3, 2, 8)$ y el unitario de A a B.

23. Halla área y normal orientada del triángulo con vértices $(0, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ y $(0, 0, 5)$, en ese orden.

24. Calcula el producto vectorial de $u = (1, 0, 2)$ por $v = (2, 1, 0)$, comprueba la normalidad y obtén el área triangular.

Soluciones desarrolladas

Ejercicio 1. Distancia y recorrido

Las variaciones son 8 y -6. La distancia es $\sqrt{8^2 + (-6)^2} = 10$. El recorrido por tramos ortogonales mide $8 + 6 = 14$. El primero une directamente los puntos; el segundo visita el vértice intermedio $(5, 2)$ antes de llegar a B.

Ejercicio 2. Igual distancia sobre el eje vertical

La igualdad de cuadrados es $4+(y+1)^2 = 16+(y-3)^2$. Desarrollar da $y^2+2y+5 = y^2-6y+25$, luego $8y = 20$ y $y = 5/2$. El único punto es $(0, 5/2)$. Ambos cuadrados de distancia valen $65/4$, lo que verifica la condición original.

Ejercicio 3. Un reparto de dos a uno

La diferencia $B - A = (6, 12)$ tiene mitad $(3, 6)$, por lo que $M = (5, 3)$. El reparto pedido asigna a AP dos tercios: $P = (2, -3) + (4, 8) = (6, 5)$. Las longitudes $AP = 4\sqrt{5}$ y $PB = 2\sqrt{5}$ tienen razón dos a uno.

Ejercicio 4. Leer un centro al completar cuadrados

Completamos $x^2+6x = (x+3)^2-9$ y $y^2-8y = (y-4)^2-16$. La ecuación queda $(x+3)^2+(y-4)^2 = 25$. El centro es $(-3, 4)$ y el radio cinco. El origen pertenece porque su distancia al centro es $\sqrt{9 + 16} = 5$.

Ejercicio 5. Trasladar el representante

Final menos inicial da $u = (-6, -8)$, de módulo diez. Con cola en $(1, 1)$, la punta debe ser $(1, 1) + (-6, -8) = (-5, -7)$. Restar esa cola de la nueva punta reproduce las componentes originales y comprueba la equivalencia.

Ejercicio 6. La longitud de dos etapas

La suma es $(-3, 4)$ y su módulo cinco. Los módulos individuales son $\sqrt{5}$ y $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$, de modo que el trayecto mide $\sqrt{5}+5\sqrt{2} \approx 9{,}31$ unidades. La dirección del segundo tramo cambia respecto del primero y el recorrido excede la distancia directa.

Ejercicio 7. Deshacer una parte

Aplicar $-3u/10$ da $(-12/5, 9/5)$. El desplazamiento neto es $7u/10 = (28/5, -21/5)$, cuyo módulo es siete porque el original mide diez. También puede verificarse sumando las dos componentes por separado.

Ejercicio 8. Imagen desde el centro

Desde $O = (1, 1)$ a A el vector es $(4, -2)$. Multiplicarlo por $-1/2$ da $(-2, 1)$; así $A' = (-1, 2)$. Las distancias al centro son $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ y $\sqrt{5}$. El factor absoluto es la mitad y el signo invierte el sentido.

Ejercicio 9. Componentes del tercer cuadrante

Para 240°, $\cos\theta = -1/2$ y $\sin\theta = -\sqrt{3}/2$. El vector es $(-3, -3\sqrt{3})$. Las dos componentes negativas concuerdan con el cuadrante y $9 + 27 = 36$ recupera el módulo seis al tomar raíz.

Ejercicio 10. Velocidad respecto de la orilla

La suma es $(5, -12)$ m/s y su módulo es trece metros por segundo. El ángulo al sur del este satisface $\tan\alpha = 12/5$, por lo que $\alpha \approx 67{,}38^\circ$. Se toma el ángulo agudo desde el este y se declara el sentido sur para expresar el signo vertical.

Ejercicio 11. Ejes de la rampa

Los productos escalares son $F \cdot e = -6$ N y $F \cdot n = -6\sqrt{3}$ N. Los vectores paralelos a cada eje son $-6e = (-3\sqrt{3}, -3)$ y $-6\sqrt{3}n = (3\sqrt{3}, -9)$ N. Su suma es $(0, -12)$ N. Además, los cuadrados de las componentes dan $36 + 108 = 144$, el cuadrado del módulo de F.

Ejercicio 12. Proyección y resto

Tenemos $u \cdot v = 8 - 1 = 7$ y $v \cdot v = 5$. La proyección es $(7/5)(2, -1) = (14/5, -7/5)$. El resto es $w = (6/5, 12/5)$. Su producto escalar con v vale $12/5 - 12/5 = 0$. Ambas partes suman $(4, 1)$ y sus módulos al cuadrado suman $49/5 + 36/5 = 17$.

Ejercicio 13. Una pendiente negativa

La dirección entre los puntos es $(4, -8)$, equivalente a $(1, -2)$. La ecuación $y - 3 = -2(x - 1)$ se reduce a $y = -2x + 5$. Una parametrización es $(x, y) = (1, 3) + t(1, -2)$; el segundo punto aparece para $t = 4$. Ambas coordenadas verifican la ecuación.

Ejercicio 14. Dos rectas por un punto

La vertical es $x = -2$, con parametrización $(-2, 4) + t(0, 1)$. La horizontal es $y = 4$, con parametrización $(-2, 4) + s(1, 0)$. Sus directores tienen producto escalar cero y se cruzan en el punto dado, que corresponde a $t = s = 0$.

Ejercicio 15. Resolver el cruce

La primera ecuación implica $x = y + 1$. Sustituida en la segunda, da $3y + 1 = 7$, de donde $y = 2$ y $x = 3$. El punto $(3, 2)$ verifica $3 - 2 = 1$ y $3 + 4 = 7$. La reducción deja una sola pareja y demuestra unicidad.

Ejercicio 16. Un pie perpendicular calculado

En $P = (1, 4)$, el valor de $x + 2y - 3$ es seis y el normal tiene cuadrado de módulo cinco. La distancia es $6/\sqrt{5}$. El pie es $H = (1, 4) - (6/5)(1, 2) = (-1/5, 8/5)$. Al sustituir, $-1/5 + 16/5 - 3 = 0$; $P - H = (6/5, 12/5)$ es normal a la recta.

Ejercicio 17. Normalizar las ecuaciones

Dividir las dos últimas ecuaciones por dos da $3x + 4y + 5 = 0$ y $3x + 4y - 5 = 0$. La tercera coincide con la primera. La segunda es paralela y distinta; las constantes difieren en diez y el normal tiene módulo cinco. La separación es $10/5 = 2$. Por ejemplo, el punto $(5/3, 0)$ de la primera tiene distancia dos a la segunda.

Ejercicio 18. La perpendicular por un punto de la recta

Un director perpendicular a la recta dada es su normal $(1, -2)$. La nueva recta tiene normal $(2, 1)$ y ecuación $2(x - 1) + (y - 2) = 0$, es decir, $2x + y - 4 = 0$. El punto $(1, 2)$ satisface también

$1-4+3=0$, por lo que ya pertenece a la recta original. Es el cruce buscado. Resolver el sistema confirma $x=1$, $y=2$.

Ejercicio 19. Elegir el ángulo menor

Los módulos son uno y dos y el producto escalar es -1. Para el ángulo menor entre rectas, $\cos\phi = |-1|/2 = 1/2$, así que $\phi = 60°$. El ángulo entre los vectores tal como están orientados es $120°$; invertir el segundo director conserva la recta y permite leer el ángulo agudo.

Ejercicio 20. Componer en el orden indicado

Desde el centro, $(4,1)-(2,1)=(2,0)$. Girar da $(0,2)$ y la posición $(2,3)$. Trasladar después produce $(-1,5)$. En el orden inverso se traslada primero a $(1,3)$; desde el centro queda $(-1,2)$, que gira a $(-2,-1)$. Al sumar el centro resulta $(0,0)$. La sustitución ordenada de las operaciones explica la diferencia.

Ejercicio 21. Cambiar el origen

Restamos $O'=(-1,2)$: $P_{\text{nuevo}}=(4,-4)$ y $Q_{\text{nuevo}}=(1,0)$. En la referencia original, $P-Q=(3,-4)$; en la nueva, la diferencia es la misma. La distancia vale cinco en ambos sistemas porque los ejes conservaron orientación y unidad.

Ejercicio 22. Distancia espacial

El desplazamiento es $B-A=(2,3,6)$ y su módulo es $\sqrt{4+9+36}=7$. Por tanto, el unitario buscado es $(2/7,3/7,6/7)$. Su módulo al cuadrado es $49/49=1$ y apunta en el mismo sentido, pues el factor $1/7$ es positivo.

Ejercicio 23. Normal hacia el eje horizontal espacial

Desde el primer vértice, los lados son $u=(0,2,0)$ y $v=(0,0,5)$. El producto es $(10,0,0)$ y su módulo diez. El área triangular vale cinco unidades cuadradas y la normal unitaria orientada es $(1,0,0)$. Ambos lados son perpendiculares a esta normal por su primera componente cero.

Ejercicio 24. Comprobar una normal espacial

La fórmula da $u\times v=(-2,4,1)$. El producto con u es $-2+2=0$ y con v es $-4+4=0$. Su módulo es $\sqrt{4+16+1}=\sqrt{21}$ y el área triangular es $\sqrt{21}/2$. La identidad de control entrega $\|u\|^2\|v\|^2-(u\cdot v)^2=5\cdot 5-2^2=21$.

Diagnóstico de salida

Elige dos puntos y explica qué representa su diferencia. Construye una recta mediante un punto y una dirección, incluyendo un ejemplo vertical. Justifica una proyección comprobando que el resto es perpendicular; después usa esa idea para encontrar el punto más cercano de una recta. En el espacio, verifica una normal mediante dos productos escalares. Si estas comprobaciones acompañan tus cálculos, las coordenadas te permiten sostener cada conclusión geométrica con una razón que puedes volver a examinar.

CAPÍTULO 16

Funciones, dominios y representaciones

Una empresa de transporte ofrece calcular el precio de un viaje a partir de su distancia. Para que esa promesa sea precisa necesitamos conocer la tarifa, la unidad de distancia y las condiciones del servicio. Con una tarifa fija, cada distancia admisible debe conducir a un precio determinado. Si el precio depende también de la hora, habrá que fijarla o incorporarla entre los datos de entrada. Una dependencia puede parecer sencilla y, sin embargo, exigir que expliquemos con cuidado qué información estamos dando.

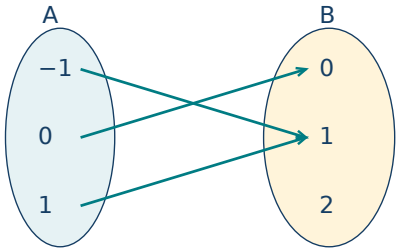
Las funciones expresan esta clase de correspondencia. Nos permitirán estudiar en un mismo lenguaje una tarifa, el área de un terreno, la lectura de un sensor y una curva dibujada en el plano. Cada representación mostrará algo que conviene observar: una fórmula facilita calcular, una tabla permite comparar valores y una gráfica hace visible cómo se distribuyen los pares. Aprenderemos a pasar entre ellas conservando las condiciones que dan sentido a la dependencia.

Una entrada y su imagen

Una función $f : A \to B$ asigna a **cada** elemento de A **exactamente un** elemento de B. El conjunto A es su dominio y B su codominio. Para $x \in A$, el elemento asignado se escribe $f(x)$ y se llama imagen de x. El recorrido, que denotaremos por $f(A)$, reúne las imágenes que efectivamente se obtienen: $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$. Por tanto, $f(A) \subseteq B$.

Una correspondencia entre dos conjuntos también puede describirse como una relación: un conjunto de pares (x, y) que indica qué elementos están relacionados. Para representar una función con dominio A, cada $x \in A$ debe aparecer en un único par. Es posible que distintas entradas compartan su imagen; cada entrada conserva, aun así, una salida determinada. También es posible que algunos elementos del codominio queden sin recibir una flecha.

Conviene dar a estas palabras un ejemplo de uso. Si una ficha identifica una persona y su fecha de nacimiento registrada, la ficha determina una fecha; varias fichas pueden compartirla. Si queremos conocer la edad, la fecha de consulta participa también en el cálculo. Explicitar la entrada completa nos permite precisar qué dependencia estamos estudiando y mantenerla fija mientras hacemos preguntas sobre ella.



Problema 1. Leer una correspondencia finita

Sean $A = \{-1, 0, 1\}$ y $B = \{0, 1, 2\}$. Los pares $(-1, 1)$, $(0, 0)$ y $(1, 1)$ describen una correspondencia. ¿Definen una función $A \to B$? Determina su recorrido.

Solución. Cada elemento del dominio aparece una vez: las imágenes de -1, 0 y 1 son, respectivamente, 1, 0 y 1. Por ello se cumplen existencia y unicidad de salida para cada entrada.

El recorrido es $\{0,1\}$, mientras el codominio declarado es $\{0,1,2\}$. El valor dos pertenece al conjunto de llegada y queda sin preimagen. Compartir la imagen uno resulta compatible con la definición de función.

Problema 2. Una circunferencia y una elección de altura

La relación $x^2+y^2=4$ reúne los puntos de una circunferencia. Examina si determina y como función de x en $[-2,2]$. Describe después una función cuya gráfica sea la semicircunferencia superior.

Solución. Para $x=0$, la ecuación admite $y=2$ y $y=-2$. Esa entrada posee dos alturas, por lo que la relación completa incumple la unicidad exigida. La semicircunferencia superior incorpora la condición $y\geq 0$ y queda descrita por $g(x)=\sqrt{4-x^2}$, con dominio $[-2,2]$. El radicando es no negativo en ese intervalo y la raíz cuadrada elegida asigna una única altura. Su recorrido es $[0,2]$: cada altura y de ese intervalo aparece, por ejemplo, con $x=\sqrt{4-y^2}$.

El símbolo $f(x)$ representa el valor que la función asigna al argumento escrito entre paréntesis. Si conocemos una fórmula para f, evaluar consiste en sustituir ese argumento en cada aparición de la variable y conservar los paréntesis necesarios. La letra usada para la entrada puede cambiar: $f(t)=t^2-3t$ y $f(x)=x^2-3x$ expresan la misma regla cuando dominio y codominio coinciden.

Problema 3. Sustituir un número y una expresión

Para $f(t)=t^2-3t$, definida en los reales, calcula $f(-2)$ y desarrolla $f(a+h)-f(a)$.

Solución. Al sustituir -2, los paréntesis muestran que el cuadrado afecta al número completo: $f(-2)=(-2)^2-3(-2)=4+6=10$. Para el segundo cálculo, $f(a+h)=(a+h)^2-3(a+h)$. Restamos $f(a)=a^2-3a$ y distribuimos el signo de la resta:

$$\begin{aligned} f(a+h)-f(a) &= a^2+2ah+h^2-3a-3h-a^2+3a \\ &= 2ah+h^2-3h. \end{aligned}$$

La expresión mide el cambio de imagen al pasar de la entrada a a la entrada $a+h$. Para $h=0$ vale cero, como exige esa interpretación.

Una función afín tiene una regla de la forma $f(x)=mx+b$, con m,b reales fijos. Cuando $b=0$, la regla $f(x)=mx$ define una función lineal. Si cero pertenece al dominio, $f(0)=b$ permite interpretar el término constante.

Una familia de funciones incorpora parámetros: números que elegimos para fijar una regla dentro de la familia. En $C_m(x)=1500+mx$, la variable x puede representar distancia y m la tarifa por unidad de distancia. Durante la evaluación de una función concreta, el parámetro conserva el valor elegido.

Problema 4. Fijar una tarifa

El precio, en pesos, de un servicio se modela por $C_m(x)=1500+mx$, para $0\leq x\leq 20$ kilómetros. Si un viaje de cinco kilómetros cuesta 5500 pesos, determina m y calcula el precio a los ocho kilómetros.

Solución. El dato significa $C_m(5)=5500$, así que $1500+5m=5500$. Restar el cargo fijo deja $5m=4000$ y dividir por cinco da $m=800$ pesos por kilómetro. La función fijada es

$C_{800}(x) = 1500 + 800x$. Su valor en ocho kilómetros es $1500 + 6400 = 7900$ pesos. El dominio declarado mantiene el cálculo dentro de la extensión de servicio que contempla el modelo.

Propiedades de una función y su evaluación

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Asignación funcional	$f : A \to B$ asigna a cada $x \in A$ una única imagen $f(x) \in B$.
Recorrido	$f(A) = \{f(x) : x \in A\} \subseteq B$.
Evaluación	En una fórmula, $f(u)$ se obtiene sustituyendo el argumento completo u; se exige $u \in A$.
Cambio de imagen	$f(a+h) - f(a)$ requiere $a, a+h \in A$.
Familia afín y lineal	Regla afín $f(x) = mx + b$; lineal $f(x) = mx$, con parámetros reales fijos y dominio declarado.
Igualdad de funciones	Mismos dominio, codominio y asignación en cada entrada, bajo la convención adoptada en este libro.

Pruebas. En el apéndice, «Funciones, imágenes y sustitución».

Elegir el dominio y encontrar el recorrido

Una expresión real permite calcular para ciertos valores de sus letras. Su **dominio natural real** reúne todos los valores en los que las operaciones escritas están definidas en los reales. En particular, un denominador exige un valor distinto de cero y una raíz de índice par exige un radicando no negativo. Cuando varias operaciones participan en la expresión, sus condiciones deben cumplirse simultáneamente.

Una situación concreta puede pedir un dominio más pequeño. Una longitud de lado debe ser positiva; una cantidad de personas toma valores enteros; un tiempo de observación puede estar acotado por la duración del experimento. El dominio de la función que usamos resulta de combinar las condiciones matemáticas con las condiciones declaradas del problema.

Problema 5. Una raíz y un denominador

Determina el dominio natural real de $f(x) = \sqrt{x-1}/(x-3)$.

Solución. La raíz exige $x-1 \geq 0$, es decir, $x \geq 1$. El denominador exige $x \neq 3$. Ambas condiciones dan $[1,3) \cup (3,\infty)$. El extremo uno está incluido porque su radicando es cero y su denominador vale -2; allí la función tiene imagen cero. En tres, la división carece de valor y ese punto queda excluido.

Problema 6. El signo de una fracción dentro de una raíz

Encuentra el dominio natural real de $g(x) = \sqrt{(x-1)/(x+2)}$.

Solución. El denominador obliga a excluir -2. Además, la fracción debe ser no negativa. Los puntos que separan sus posibles signos son -2 y 1. Para $x < -2$, numerador y denominador son negativos y el cociente es positivo. Entre -2 y 1, sus signos son opuestos y el cociente es negativo. Para $x > 1$, ambos son positivos. En $x = 1$ el cociente vale cero y la raíz existe. El dominio es

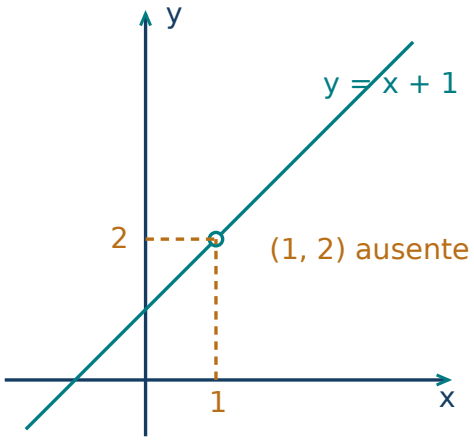
$(-\infty, -2) \cup [1, \infty)$. La raíz afecta a la fracción completa: su condición se decide por el signo de ese cociente.

El recorrido exige otra clase de pregunta: qué valores se alcanzan cuando la entrada recorre el dominio elegido. Una manera de justificarlo consiste en proponer una imagen y, resolver $f(x) = y$ y comprobar si la entrada obtenida pertenece al dominio. Así podemos probar tanto que los valores anunciados aparecen como que las exclusiones son necesarias.

Problema 7. Un punto ausente cambia el recorrido

Sea $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ en su dominio natural. Simplifica la regla y determina el recorrido.

Solución. Factorizar da $(x-1)(x+1)/(x-1) = x+1$ para $x \neq 1$. La función conserva el dominio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Para una imagen propuesta y, la ecuación $y = x + 1$ obliga a $x = y - 1$. Esta entrada es admisible exactamente cuando $y \neq 2$. Por tanto, el recorrido es $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. La gráfica es la recta $y = x + 1$ con el punto $(1, 2)$ ausente.



Problema 8. Área y condiciones geométricas

Un rectángulo tiene perímetro de veinte metros y lados positivos. Expresa su área mediante la longitud x de uno de los lados; determina dominio y recorrido.

Solución. Si el otro lado mide z, la condición $2x + 2z = 20$ da $z = 10 - x$. La positividad de ambos lados exige $0 < x < 10$. El área es $A(x) = x(10 - x) = 25 - (x - 5)^2$, en metros cuadrados. Es positiva para esas entradas y alcanza veinticinco cuando $x = 5$. Para cualquier área y con $0 < y \leq 25$, tomar $x = 5 - \sqrt{25 - y}$ proporciona una entrada de $(0, 5]$ y produce precisamente esa área. El recorrido es, por tanto, $(0, 25]$. El área cero corresponde a un extremo degenerado que las condiciones de lados positivos dejan fuera del dominio.

Propiedades del dominio y del recorrido

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
División real	En $p(x)/q(x)$ se exige $q(x) \neq 0$ y que ambas expresiones estén definidas.
Raíz par real	En $\sqrt[2n]{u(x)}$ se exige $u(x) \geq 0$, con n entero positivo.
Condiciones simultáneas	El dominio satisface la intersección de todas las restricciones.
Simplificación con dominio	Una igualdad algebraica se aplica en las entradas donde ambas expresiones originales están definidas.
Comprobación del recorrido	$y \in f(A)$ equivale a que exista $x \in A$ con $f(x) = y$.

Pruebas. En el apéndice, «Dominios y valores alcanzados».

Tablas, gráficas y fórmulas

La gráfica de $f : A \to \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}$, es el conjunto de puntos $(x, f(x))$ para $x \in A$. Al recorrerla, la primera coordenada indica la entrada y la segunda su imagen. Una línea vertical de abscisa admisible debe encontrar exactamente un punto de la gráfica. Esta lectura geométrica expresa las dos exigencias de la definición de función: una imagen para cada entrada del dominio y unicidad de esa imagen.

Una tabla finita puede describir completamente una función de dominio finito o recoger una muestra de otra cuyo dominio sea más amplio. Cuando una regla se declara para todos los valores de un intervalo, una lista de valores ofrece referencias para dibujar y comprobar; los demás puntos siguen determinados por la regla.

Problema 9. De una regla a una tabla y una recta

Para $f(x) = 2x - 1$ en $[-2, 2]$, calcula las imágenes de las entradas enteras del dominio, describe la gráfica y encuentra el recorrido.

Solución. La sustitución de $-2, -1, 0, 1, 2$ da, en ese orden, $-5, -3, -1, 1, 3$. Podemos registrar los pares en una tabla. La ecuación $y = 2x - 1$ representa una recta y el dominio selecciona el segmento desde $(-2, -5)$ hasta $(2, 3)$, con ambos extremos incluidos. La regla es creciente porque, si $a < b$, entonces $f(b) - f(a) = 2(b - a) > 0$. Sus imágenes recorren $[-5, 3]$: para cualquier y de ese intervalo, $x = (y + 1)/2$ pertenece a $[-2, 2]$ y satisface la ecuación.

Entrada x	Imagen $f(x) = 2x - 1$
-2	-5
-1	-3
0	-1
1	1
2	3

Problema 10. Una gráfica con dos respuestas a una pregunta inversa

Considera $f(x) = 2 - |x - 1|$ para $-1 \leq x \leq 3$. Determina $f(1)$, el recorrido y todas las entradas cuya imagen sea uno.

Solución. En $x = 1$, el valor absoluto es cero y $f(1) = 2$. Dentro del dominio, $|x-1|$ recorre $[0, 2]$, por lo que las imágenes recorren $[0, 2]$. La ecuación $f(x) = 1$ equivale a $|x-1| = 1$; sus soluciones son $x = 0$ y $x = 2$, ambas admisibles. La gráfica está formada por dos segmentos que suben desde $(-1, 0)$ hasta $(1, 2)$ y bajan hasta $(3, 0)$. Una altura puede corresponder a varias entradas y cada entrada mantiene su imagen única.

Los cortes con el eje horizontal se obtienen resolviendo $f(x) = 0$ dentro del dominio. El corte con el eje vertical existe cuando 0 pertenece al dominio y tiene coordenadas $(0, f(0))$. Las proyecciones de la gráfica sobre los ejes permiten leer, respectivamente, el dominio y el recorrido. Hay que observar los puntos abiertos, cerrados y ausentes: su inclusión forma parte del conjunto representado.

Problema 11. Reconocer puntos de una parábola

Para $p(x) = (x - 1)^2 - 4$, definida en los reales, determina los cortes con los ejes, el punto más bajo y el recorrido.

Solución. Resolver $p(x) = 0$ da $(x - 1)^2 = 4$, de donde $x = -1$ o $x = 3$. Los cortes horizontales son $(-1, 0)$ y $(3, 0)$. Como $p(0) = 1 - 4 = -3$, el corte vertical es $(0, -3)$. El cuadrado es siempre no negativo y vale cero exactamente en $x = 1$; el punto más bajo es $(1, -4)$. Toda imagen $y \geq -4$ aparece con $x = 1 + \sqrt{y + 4}$, así que el recorrido es $[-4, \infty)$.

Problema 12. Comparar dos funciones

Sean $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$, y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $g(x) = x + 1$. Compara ambas funciones y la restricción de g a $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Solución. Para cada entrada del dominio de f, la factorización demuestra $f(x) = g(x)$. Sus dominios son distintos: $g(1) = 2$ está definido y $f(1)$ queda fuera de la asignación de f. Bajo la convención adoptada, representan funciones distintas. Si restringimos g al dominio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ y conservamos codominio $\mathbb{R}$, la función resultante coincide con f en los tres datos: dominio, codominio y asignación. Restringir conserva los pares cuyas entradas pertenecen al subconjunto elegido.

Propiedades de las representaciones

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Gráfica	$G_f = \{(x, f(x)) : x \in A\}$ para una función real de variable real.
Lectura vertical	Para cada $x \in A$, la vertical correspondiente encuentra exactamente un punto de G_f.
Ceros y corte vertical	Ceros: soluciones admisibles de $f(x) = 0$; corte vertical: $(0, f(0))$ si $0 \in A$.
Proyecciones de la gráfica	Las abscisas forman A y las ordenadas forman $f(A)$.

Continuación de la tabla de propiedades

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Restricción	Para $D \subseteq A$, $f\|_D$ conserva las imágenes de entradas de D y tiene recorrido $f(D) \subseteq f(A)$.

Pruebas. En el apéndice, «Gráficas, restricciones y lectura de valores».

Comparar imágenes: variación, extremos y simetría

Una función es **estrictamente creciente** en un intervalo de su dominio cuando $a < b$ implica $f(a) < f(b)$ para cualesquiera entradas de ese intervalo. Es **estrictamente decreciente** cuando la misma condición implica $f(a) > f(b)$. El crecimiento compara las imágenes de dos entradas ordenadas. Los valores de las imágenes, positivos o negativos, se estudian mediante otra pregunta: su posición respecto de cero.

También usaremos «no decreciente» para $f(a) \leq f(b)$ cuando $a < b$, y «no creciente» para $f(a) \geq f(b)$. Estas convenciones incluyen tramos constantes. Cuando afirmemos crecimiento estricto o decrecimiento estricto, lo diremos expresamente.

Problema 13. Variación y extremos en un intervalo

Estudia $f(x) = (x-2)^2 + 1$ en $[-1, 4]$: encuentra los intervalos de variación estricta, sus extremos absolutos y su recorrido.

Solución. Para $a < b$, la diferencia de imágenes es $(b-2)^2 - (a-2)^2 = (b-a)(a+b-4)$. Si $a < b \leq 2$, el primer factor es positivo y el segundo negativo, así que la función decrece estrictamente en $[-1, 2]$. Si $2 \leq a < b$, ambos factores son positivos y crece estrictamente en $[2, 4]$. El mínimo es uno y se alcanza en dos. Para el máximo comparamos los extremos del dominio: $f(-1) = 10$ y $f(4) = 5$, de modo que el máximo es diez. El recorrido es $[1, 10]$: todo y de ese intervalo se obtiene con $x = 2 - \sqrt{y-1} \in [-1, 2]$.

Problema 14. Crecer con imágenes negativas

Para $h(x) = -5 + 2x$ en $[-2, 2]$, determina el signo de sus imágenes y su variación.

Solución. En el intervalo, $h(-2) = -9$ y $h(2) = -1$. Para $a < b$, la diferencia $h(b) - h(a) = 2(b-a)$ es positiva, luego h es estrictamente creciente. Su recorrido es $[-9, -1]$, enteramente negativo. Por ejemplo, al pasar de $x = -1$ a $x = 1$, la imagen pasa de -7 a -3: aumenta cuatro unidades y permanece debajo del eje horizontal.

Un máximo absoluto es una imagen $f(c)$ que satisface $f(x) \leq f(c)$ para todas las entradas del dominio estudiado. Un mínimo absoluto satisface la desigualdad inversa. La palabra «alcanzar» importa: una cota puede limitar las imágenes sin ser ella misma una imagen.

La simetría requiere observar también el dominio. Lo llamamos simétrico respecto de cero cuando $x \in A$ implica $-x \in A$. En ese dominio, una función es **par** si $f(-x) = f(x)$ para todo x, e **impar** si $f(-x) = -f(x)$. En la gráfica, estas identidades corresponden a reflexión en el eje vertical y a giro de media vuelta alrededor del origen, respectivamente.

Problema 15. Dos simetrías y una restricción

Estudia la paridad de $f(x) = x^4 + 2x^2$ y $g(x) = x^3 - 3x$, ambas en los reales. Examina qué sucede al restringir g a $[0, \infty)$.

Solución. Al sustituir $-x$, obtenemos $f(-x) = (-x)^4 + 2(-x)^2 = x^4 + 2x^2 = f(x)$; por ello f es par. Para g, $g(-x) = -x^3 + 3x = -g(x)$, así que es impar. La restricción a $[0, \infty)$ conserva la fórmula y cambia el dominio. Este nuevo dominio carece de la simetría requerida: contiene dos y excluye menos dos. La clasificación como función impar, con la definición adoptada, exige el dominio simétrico.

Problema 16. Una cota que se alcanza y otra que se aproxima

Sea $f(x) = x$ con dominio $(0, 1]$. Determina si tiene máximo y mínimo absolutos.

Solución. Todas las imágenes cumplen $0 < f(x) \leq 1$, y uno se alcanza con $x = 1$. El máximo es uno. Para cualquier entrada propuesta $c \in (0, 1]$, la entrada $c/2$ también pertenece al dominio y produce una imagen menor. Por ello ninguna imagen puede ser mínima. Cero es una cota inferior que las imágenes pueden aproximar tanto como se quiera: para cualquier $\varepsilon > 0$, elegir $x = \min(1/2, \varepsilon/2)$ da $0 < f(x) < \varepsilon$.

Propiedades de variación y simetría

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Crecimiento estricto	$a < b$ implica $f(a) < f(b)$ para todas las entradas del intervalo estudiado.
Decrecimiento estricto	$a < b$ implica $f(a) > f(b)$ en ese intervalo.
Máximo y mínimo absolutos	Se alcanzan en una entrada c: $f(x) \leq f(c)$ o $f(x) \geq f(c)$ para todo x del dominio estudiado.
Paridad	Dominio simétrico y $f(-x) = f(x)$; la gráfica es simétrica respecto del eje vertical.
Imparidad	Dominio simétrico y $f(-x) = -f(x)$; la gráfica tiene simetría central en el origen.
Cota alcanzada	Si $L \leq f(x) \leq U$ para todo x, un valor L alcanzado es mínimo y un valor U alcanzado es máximo.

Pruebas. En el apéndice, «Orden, extremos y simetrías de funciones».

Una regla para cada tramo

Una tarifa puede aplicar un precio hasta cierta distancia y otro cálculo después. Para describirla dividimos el dominio en tramos y damos una regla para cada uno. Los intervalos deben cubrir las entradas admitidas y asignarles un valor único. Una forma especialmente clara de lograrlo consiste en usar intervalos disjuntos: un extremo pertenece a uno de los tramos y el tramo vecino comienza de forma abierta en ese mismo número.

Problema 17. Cargo fijo y distancia adicional

Un servicio cobra mil pesos por un recorrido de hasta dos kilómetros y trescientos pesos por cada kilómetro adicional, hasta diez kilómetros. Admite distancias reales x con $0 \le x \le 10$. Escribe la función de precio y calcula sus valores en dos y tres kilómetros.

Solución. Los primeros dos kilómetros ya están incluidos en el cargo fijo. La distancia adicional es $x-2$, así que

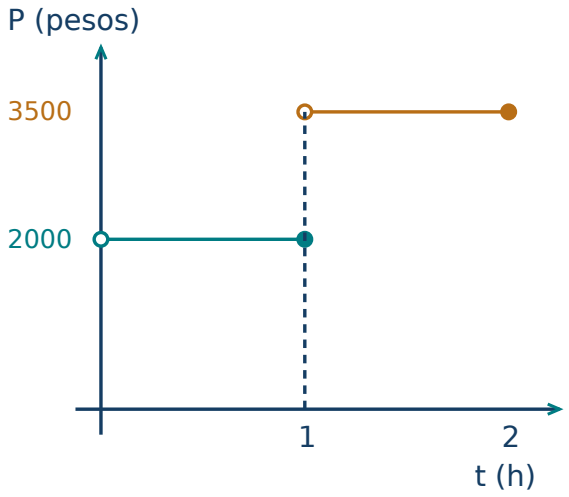
$$T(x) = \begin{cases} 1000, & 0 \le x \le 2, \\ 1000 + 300(x-2), & 2 < x \le 10. \end{cases}$$

El primer tramo da $T(2) = 1000$ y el segundo, $T(3) = 1300$ pesos. Evaluar la segunda fórmula en el extremo dos también da mil; las reglas coinciden allí y la gráfica enlaza el tramo horizontal con el ascendente. El precio final es $T(10) = 3400$ y el recorrido completo es $[1000, 3400]$.

Problema 18. Una tarifa por bloques

Una sala se arrienda por dos mil pesos para duraciones $0 < t \le 1$ hora y por tres mil quinientos para $1 < t \le 2$ horas. Obtén $P(1)$ y $P(1{,}01)$ y describe la gráfica.

Solución. La primera regla incluye una hora, de modo que $P(1) = 2000$. La duración 1,01 pertenece al segundo bloque y da $P(1{,}01) = 3500$. La gráfica tiene un segmento horizontal de altura dos mil, abierto en cero y cerrado en uno; el segundo tiene altura tres mil quinientos, abierto en uno y cerrado en dos. El recorrido es el conjunto $\{2000, 3500\}$. Al cruzar una hora aparece un salto de mil quinientos pesos, aunque el aumento de tiempo sea pequeño.



Problema 19. Elegir un parámetro para enlazar dos reglas

Sea $f_k(x) = 2x + 1$ para $x < 2$ y $f_k(x) = kx - 3$ para $x \ge 2$. Determina qué valor de k hace coincidir los valores de ambas fórmulas en la frontera. Examina si los demás valores de k siguen definiendo una función.

Solución. En dos, la primera expresión da cinco y la segunda da $2k-3$. Igualarlas exige $5 = 2k-3$, luego $k = 4$. Para ese parámetro, $f_4(2) = 5$ y ambas reglas llegan a la misma altura. Para cualquier

otro real k, la asignación sigue siendo una función: cada entrada cumple exactamente una de las condiciones $x < 2$ o $x \geq 2$. La elección de k determina si las dos partes se enlazan a la misma altura o presentan un salto.

Propiedades de las funciones por tramos

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Dominio por tramos	Los dominios de las reglas cubren el dominio declarado.
Unicidad en fronteras	Si dos reglas incluyen una misma entrada, deben asignarle la misma imagen.
Evaluación por tramo	Primero se localiza la entrada en su intervalo y después se aplica la regla correspondiente.
Empalme de reglas afines	En una frontera a, las expresiones $mx + b$ y $nx + c$ coinciden en altura si $ma + b = na + c$; para enlazar con el punto de la función se exige ese mismo valor en a.

Pruebas. En el apéndice, «Reglas por tramos y fronteras».

Recuperar una entrada a partir de su imagen

Para recuperar una entrada a partir de su imagen podemos volver al cuadrado: las entradas dos y menos dos producen ambas cuatro, de modo que la imagen por sí sola deja dos alternativas. Necesitamos una condición que asegure una sola entrada para cada imagen. Una función es **inyectiva** cuando $f(a) = f(b)$ implica $a = b$. También debemos poder partir de cada elemento del conjunto de llegada: la función es **sobreyectiva** sobre el codominio declarado B cuando cada $y \in B$ es imagen de alguna entrada. Si posee ambas propiedades, es **biyectiva** y cada elemento de llegada tiene exactamente una preimagen. Sobre esos conjuntos podremos definir la correspondencia que recorre la asignación en sentido inverso.

Para una función biyectiva $f : A \to B$, su inversa $f^{-1} : B \to A$ asigna a cada imagen su única entrada original. Por construcción, $f^{-1}(f(x)) = x$ para $x \in A$ y $f(f^{-1}(y)) = y$ para $y \in B$. El recíproco $1/f(x)$ es otra operación: toma el inverso multiplicativo del número $f(x)$ en las entradas donde ese número es distinto de cero.

Problema 20. Deshacer una transformación afín

Encuentra la inversa de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 6$, y verifica las dos recuperaciones. Calcula $f^{-1}(6)$.

Solución. Para recuperar la entrada a partir de $y = 3x - 6$, sumamos seis y dividimos por tres: $x = (y + 6)/3$. Cada real y produce una única entrada real, así que f es biyectiva y $f^{-1}(y) = (y + 6)/3$. La comprobación entrega

$$f^{-1}(f(x)) = (3x - 6 + 6)/3 = x,$$
$$f(f^{-1}(y)) = 3(y + 6)/3 - 6 = y.$$

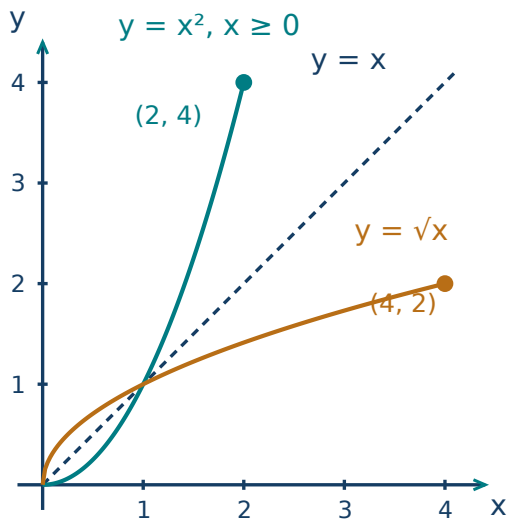
En particular, $f^{-1}(6) = 4$, que se verifica con $f(4) = 6$. El valor seis se usa como entrada de la función inversa porque antes fue imagen de cuatro. La siguiente tabla puede leerse en ambos sentidos: de izquierda a derecha aplica f y de derecha a izquierda recupera la entrada mediante f^{-1}.

Entrada de f	Imagen mediante f
2	0
3	3
4	6

Problema 21. Elegir una rama para invertir un cuadrado

Estudia la inversión de $q(x) = x^2$ en los reales. Encuentra una inversa al restringir el dominio a $[0, \infty)$ y adoptar ese mismo conjunto como codominio. Examina también la restricción a $(-\infty, 0]$ con codominio $[0, \infty)$.

Solución. En el dominio real completo, las entradas dos y menos dos comparten la imagen cuatro; recuperar una entrada única exige precisar una rama. En $[0, \infty)$, la ecuación $y = x^2$ tiene la solución única $x = \sqrt{y}$, para cada $y \geq 0$. Esa restricción es biyectiva y su inversa es la raíz cuadrada. En $(-\infty, 0]$, la solución única es $x = -\sqrt{y}$ y esa es la inversa de la segunda restricción. El codominio de cada inversa coincide con el dominio de la rama original.



Problema 22. Invertir una correspondencia entre conjuntos finitos

Sean $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$, con $f(a) = 2$, $f(b) = 4$ y $f(c) = 1$. Estudia la inyectividad y encuentra una inversa usando como conjunto de llegada el recorrido de f.

Solución. Las tres entradas tienen imágenes distintas, así que la función es inyectiva. Su recorrido es $\{1, 2, 4\}$. El elemento tres del codominio original carece de preimagen; una inversa definida en todo B no podría cumplir la recuperación $f(f^{-1}(3)) = 3$. Si tomamos $f : A \to \{1, 2, 4\}$ con la misma asignación, se vuelve biyectiva. Su inversa queda determinada por $1 \mapsto c$, $2 \mapsto a$ y $4 \mapsto b$. Cada flecha original puede entonces recorrerse en sentido inverso de manera única.

Una función estrictamente monótona en un intervalo es inyectiva: dos entradas distintas se ordenan, y la desigualdad estricta de sus imágenes impide que compartan valor. Al elegir su recorrido como codominio, podemos definir una inversa. En la gráfica, invertir intercambia los pares (x, y) por (y, x), operación que refleja los puntos respecto de la diagonal $y = x$.

Propiedades de la inversa

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Inyectividad	$f(a) = f(b)$ implica $a = b$ para entradas del dominio.
Biyectividad e inversa	Para $f : A \to B$ biyectiva existe una única $f^{-1} : B \to A$ que recupera las entradas.
Dos recuperaciones	$f^{-1}(f(x)) = x$ para $x \in A$ y $f(f^{-1}(y)) = y$ para $y \in B$.
Monotonía estricta	Una función estrictamente creciente o decreciente en un intervalo es inyectiva y admite inversa sobre su recorrido.
Gráfica de la inversa	$(x, y) \in G_f$ equivale a $(y, x) \in G_{f^{-1}}$; reflexión en $y = x$.

Pruebas. En el apéndice, «Inyectividad e inversión de funciones».

Una fórmula exacta y los datos de una medición

Una fórmula matemática determina sus valores en el dominio declarado. Al usarla para describir mediciones, añadimos una hipótesis sobre el fenómeno: por ejemplo, que el precio crece a una tarifa constante o que un sensor responde de forma afín dentro de cierto intervalo. Los datos permiten contrastar esa hipótesis y estimar sus parámetros. Una medición puede contener variaciones y errores; la discrepancia entre dato y predicción ayuda a evaluar el alcance del modelo.

Problema 23. Ajustar una regla y contrastarla

En un registro de viajes aparecen los pares distancia-precio $(0, 1200)$, $(2, 2400)$ y $(4, 3600)$, con kilómetros y pesos. Bajo una hipótesis afín, encuentra el modelo y predice el precio a seis kilómetros. Compara con una medición posterior de cinco mil pesos para esa distancia.

Solución. La entrada cero fija el cargo inicial en mil doscientos pesos. Entre cero y dos kilómetros, el precio aumenta mil doscientos, lo que da seiscientos pesos por kilómetro. La regla propuesta es $C(x) = 1200 + 600x$, y en cuatro predice 3600, coincidiendo con el tercer dato. En seis predice 4800 pesos. La nueva medición excede la predicción en 200 pesos. Esa diferencia puede orientar la búsqueda de recargos, cambios de tarifa o incertidumbre de registro. Los tres primeros datos sostienen la compatibilidad del modelo con esas observaciones; el nuevo dato precisa una limitación que debemos investigar.

Problema 24. Qué determinan tres observaciones

Se conocen los valores $f(0) = 1$, $f(1) = 3$ y $f(2) = 5$. Compara las reglas $p(x) = 2x + 1$ y $q(x) = 2x + 1 + x(x - 1)(x - 2)$. Examina sus valores en tres y en $3/2$.

Solución. El producto añadido vale cero en cero, uno y dos; por ello ambas reglas reproducen exactamente los tres datos. En tres, $p(3) = 7$ y $q(3) = 7 + 3 \cdot 2 \cdot 1 = 13$. Incluso dentro del intervalo de observación pueden diferir: $p(3/2) = 4$, mientras el término añadido es $(3/2)(1/2)(-1/2) = -3/8$, de modo que $q(3/2) = 29/8$. Los datos finitos son compatibles con distintas reglas en un dominio más amplio. Elegir una clase de modelos y justificarla forma parte del problema de interpretación.

Propiedades de datos y modelos

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Residuo de una predicción	Para un dato (x_i, y_i) y un modelo m, $r_i = y_i - m(x_i)$.
Compatibilidad exacta con una muestra	Se cumple cuando $m(x_i) = y_i$ en todas las entradas observadas.
Libertad entre observaciones	Si p reproduce datos en $x_1, \dots, x_n$, también los reproduce $p(x) + k\prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$, para cualquier real k, en un dominio común.

Pruebas. En el apéndice, «Datos finitos y alcance de un modelo».

Ejercicios para trabajar sin profesor

1. Sean $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$ y los pares $(0, a)$, $(1, a)$, $(2, c)$. Decide si describen una función $A \to B$ y encuentra su recorrido.

2. Examina la relación $y^2 = x$ para $x \geq 0$. Describe una función al añadir $y \leq 0$ y determina su recorrido.

3. Para $f(t) = t^2 + 2t$, calcula $f(-3)$ y desarrolla $f(a + h) - f(a)$.

4. Un modelo $C_m(x) = 800 + mx$, para $0 \leq x \leq 15$ kilómetros, cumple $C_m(4) = 3600$ pesos. Encuentra m y $C_m(7)$.

5. Determina el dominio natural de $\sqrt{x + 2}/(x - 1)$.

6. Determina el dominio natural de $\sqrt{(x + 1)/(x - 2)}$.

7. Simplifica $(x^2 - 4)/(x - 2)$ conservando el dominio natural y encuentra su recorrido.

8. Un rectángulo de lados positivos tiene perímetro de doce metros. Expresa su área según un lado y determina dominio y recorrido.

9. Para $f(x) = 3 - x$ en $[-1, 3]$, calcula las imágenes de sus entradas enteras, describe la gráfica y determina el recorrido.

10. Sea $f(x) = 3 - |x|$ en $[-3, 3]$. Determina su recorrido, sus ceros y todas las entradas con imagen uno.

11. Para $p(x) = (x + 2)^2 - 9$ en los reales, encuentra cortes con los ejes, mínimo y recorrido.

12. Compara $f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$ con dominio natural y $g(x) = x + 2$ en los reales, ambas con codominio real. Especifica una restricción que las haga coincidir como funciones.

13. Estudia variación estricta, extremos y recorrido de $(x + 1)^2 - 2$ en $[-3, 2]$.

14. Estudia signo y variación de $h(x) = -10 + x$ en $[1, 4]$.

15. Examina la paridad de $f(x) = x^6 + 1$ y $g(x) = x^5 + x$ en los reales y la restricción de f a $[0, 2]$.

16. Para $f(x) = x$ en $[-1, 2)$, determina si hay máximo y mínimo absolutos.

17. Un servicio cobra quinientos pesos hasta un kilómetro, incluido cero, y doscientos por cada kilómetro adicional, hasta cinco. Escribe la función, calcula sus valores en uno y tres kilómetros y determina su recorrido.

18. Una tarifa vale diez para $0 < t \leq 2$ y dieciocho para $2 < t \leq 4$. Calcula los valores en dos y 2,1, el recorrido y la magnitud del salto.

19. Se define $f_k(x) = 3x - 1$ para $x < 1$ y $kx + 2$ para $x \geq 1$. Encuentra k para que coincidan las alturas en la frontera y explica la existencia de la función para otros valores.

20. Encuentra y verifica la inversa de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4x + 8$. Calcula $f^{-1}(20)$.

21. Restringe $f(x) = (x-1)^2$ a $[1, \infty)$ y toma codominio $[0, \infty)$. Encuentra su inversa y verifica ambas recuperaciones.

22. Para $A = \{u, v, w\}$, $B = \{0, 1, 2, 3\}$ y $f(u) = 3$, $f(v) = 0$, $f(w) = 2$, encuentra el recorrido y la inversa sobre él.

23. Ajusta una regla afín a $(0, 500)$, $(3, 1400)$ y $(6, 2300)$. Predice su valor en ocho y calcula el residuo si se observa 3000.

24. Para los datos $(0, 2)$, $(1, 5)$ y $(2, 8)$, compara $p(x) = 3x+2$ y $q(x) = 3x+2+2x(x-1)(x-2)$ en las entradas observadas y en tres.

Soluciones desarrolladas

Ejercicio 1. Entradas con una misma imagen

Cada elemento de A aparece en un único par y su segunda componente pertenece a B. Por ello los pares definen una función. El recorrido es $\{a, c\}$; la imagen compartida de cero y uno es a, y el elemento b del codominio queda sin preimagen.

Ejercicio 2. Elegir la raíz negativa

Para $x = 1$, la relación admite $y = 1$ y $y = -1$, así que la relación completa tiene dos salidas en esa entrada. La condición $y \leq 0$ selecciona $g(x) = -\sqrt{x}$ en $[0, \infty)$. Su recorrido es $(-\infty, 0]$: para cada $y \leq 0$, la entrada $x = y^2$ produce $-\sqrt{y^2} = -|y| = y$.

Ejercicio 3. Argumentos entre paréntesis

Sustituir da $f(-3) = (-3)^2 + 2(-3) = 9 - 6 = 3$. Para el incremento, desarrollamos $(a + h)^2 + 2(a+h) - (a^2 + 2a)$ y obtenemos $2ah + h^2 + 2h$. Al tomar $h = 0$, la diferencia vale cero; el dominio real permite ambos argumentos para todo a, h reales.

Ejercicio 4. Obtener el parámetro

El dato significa $800 + 4m = 3600$, de modo que $4m = 2800$ y $m = 700$ pesos por kilómetro. Así, $C_{700}(7) = 800 + 4900 = 5700$ pesos. La entrada siete está dentro del intervalo de servicio declarado y la tarifa conserva su unidad de pesos por kilómetro.

Ejercicio 5. Intersectar restricciones

La raíz exige $x + 2 \geq 0$, o $x \geq -2$. El denominador exige $x \neq 1$. El dominio es $[-2, 1) \cup (1, \infty)$. En -2 la imagen es cero, pues la raíz vale cero y el denominador vale -3; en uno la división queda excluida.

Ejercicio 6. Un cuadro de signos verbal

Los puntos críticos son -1 y 2. Para $x < -1$, numerador y denominador son negativos; entre -1 y 2, tienen signos opuestos; para $x > 2$, ambos son positivos. Se admite -1, donde el cociente vale cero, y se excluye dos por el denominador. Resulta $(-\infty, -1] \cup (2, \infty)$.

Ejercicio 7. Una imagen ausente

La factorización da $(x-2)(x+2)/(x-2) = x+2$ para $x \neq 2$. Su dominio natural conserva esa exclusión. Resolver $y = x+2$ da $x = y-2$, que es admisible exactamente cuando $y \neq 4$. El recorrido es $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ y la gráfica tiene ausente el punto $(2, 4)$.

Ejercicio 8. Un área positiva acotada

El segundo lado es $6-x$, así que $0 < x < 6$. El área es $A(x) = x(6-x) = 9-(x-3)^2$. Es positiva y alcanza nueve en tres. Para cada $0 < y \leq 9$, la entrada $x = 3 - \sqrt{9-y}$ pertenece a $(0, 3]$ y produce y. El recorrido es $(0, 9]$ metros cuadrados.

Ejercicio 9. Una tabla sobre un segmento

Para las entradas $-1, 0, 1, 2, 3$, las imágenes son $4, 3, 2, 1, 0$. La gráfica es el segmento de $(-1, 4)$ a $(3, 0)$, con extremos incluidos. Para $a < b$, la diferencia de imágenes es $-(b-a) < 0$, por lo que decrece estrictamente. Su recorrido es $[0, 4]$: cada y de ese intervalo se obtiene con $x = 3 - y$ en el dominio.

Ejercicio 10. Leer alturas repetidas

El valor absoluto recorre $[0, 3]$ y la función recorre $[0, 3]$. Sus ceros satisfacen $|x| = 3$, luego son $x = -3$ y $x = 3$. Para la imagen uno, $3-|x| = 1$ da $|x| = 2$, con entradas -2 y 2. Todas pertenecen al dominio declarado.

Ejercicio 11. Un mínimo y dos ceros

La ecuación $(x+2)^2 = 9$ da $x = -5$ o $x = 1$. Los cortes horizontales son $(-5, 0)$ y $(1, 0)$. En cero la imagen vale $4 - 9 = -5$, así que el corte vertical es $(0, -5)$. El mínimo es -9, alcanzado en $x = -2$, y el recorrido es $[-9, \infty)$: para $y \geq -9$ sirve $x = -2 + \sqrt{y+9}$.

Ejercicio 12. Conservar las entradas permitidas

La primera función tiene dominio $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ y satisface $f(x) = x+2$ en cada entrada admisible. La segunda incluye además $g(2) = 4$. Para obtener igualdad de funciones con el mismo codominio real, restringimos g a $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Sus gráficas coinciden entonces con la recta que tiene ausente $(2, 4)$.

Ejercicio 13. Ordenar cuadrados desde el vértice

Para $a < b$, la diferencia es $(b+1)^2 - (a+1)^2 = (b-a)(a+b+2)$. Es negativa si $a < b \leq -1$ y positiva si $-1 \leq a < b$. La función decrece estrictamente en $[-3, -1]$ y crece estrictamente en $[-1, 2]$. El mínimo vale -2 en -1; los valores extremos del dominio son dos y siete, de modo que el máximo es siete en dos. El recorrido es $[-2, 7]$: $x = -1 + \sqrt{y+2}$ recorre $[-1, 2]$ cuando y recorre ese intervalo.

Ejercicio 14. Imágenes negativas que aumentan

Para $a < b$, $h(b) - h(a) = b - a > 0$; la función es estrictamente creciente. Sus imágenes van de $h(1) = -9$ a $h(4) = -6$, ambas incluidas, y todas son negativas. La ubicación debajo del eje horizontal y el crecimiento describen propiedades compatibles.

Ejercicio 15. Revisar fórmula y dominio

El dominio real es simétrico. Tenemos $f(-x) = (-x)^6 + 1 = f(x)$, así que f es par. También $g(-x) = -x^5 - x = -g(x)$, de modo que g es impar. La restricción de f a $[0, 2]$ conserva los valores de esa parte de la curva, pero su dominio contiene uno y excluye menos uno. La definición de paridad requiere dominio simétrico.

Ejercicio 16. Un extremo abierto

El valor -1 es la menor imagen y se alcanza en $x = -1$, por lo que es mínimo absoluto. Para cada $c < 2$ del dominio, $(c + 2)/2$ está entre c y dos, pertenece al dominio y tiene imagen mayor. Por ello no hay máximo. Dos es una cota superior y las imágenes pueden acercarse arbitrariamente a ella desde abajo.

Ejercicio 17. Contar la distancia adicional

La regla es $T(x) = 500$ para $0 \le x \le 1$ y $T(x) = 500 + 200(x - 1)$ para $1 < x \le 5$. Da $T(1) = 500$ y $T(3) = 900$. Ambas expresiones coinciden en la altura quinientos al evaluar el extremo uno. Como $T(5) = 1300$ y el segundo tramo recorre todos los precios intermedios, el recorrido es $[500, 1300]$.

Ejercicio 18. Dos alturas de tarifa

El primer intervalo incluye dos, así que $P(2) = 10$. La entrada 2,1 pertenece al segundo y da dieciocho. El recorrido es $\{10, 18\}$ y el salto tiene magnitud ocho. En la gráfica, el punto $(2, 10)$ es cerrado y $(2, 18)$ es abierto; esto conserva una sola imagen en la entrada dos.

Ejercicio 19. Hacer coincidir los extremos de las reglas

En la frontera uno, la primera fórmula da $3 - 1 = 2$ y la segunda $k + 2$. La coincidencia exige $k = 0$. Para ese parámetro, la imagen en uno es dos. Para todo real k, los intervalos $x < 1$ y $x \ge 1$ reparten las entradas de forma disjunta y completa, por lo que la asignación sigue siendo funcional.

Ejercicio 20. Recuperar mediante una regla afín

Despejar $y = 4x + 8$ da $x = (y - 8)/4$. Cada real y tiene una preimagen única, así que $f^{-1}(y) = (y - 8)/4$. Se verifica $f^{-1}(f(x)) = (4x + 8 - 8)/4 = x$ y $f(f^{-1}(y)) = 4(y - 8)/4 + 8 = y$. En veinte, la inversa vale tres y la comprobación original es $f(3) = 20$.

Ejercicio 21. Una raíz con desplazamiento

En el dominio elegido, $x - 1 \ge 0$, por lo que resolver $y = (x - 1)^2$ da $x = 1 + \sqrt{y}$. Así, $f^{-1} : [0, \infty) \to [1, \infty)$ tiene regla $1 + \sqrt{y}$. Para $x \ge 1$, $1 + \sqrt{(x - 1)^2} = 1 + |x - 1| = x$. Para $y \ge 0$, $(1 + \sqrt{y} - 1)^2 = y$. Ambas recuperaciones verifican dominios y asignaciones.

Ejercicio 22. Recorrer las flechas al revés

El recorrido es $\{0, 2, 3\}$ y las imágenes de las tres entradas son distintas. Con ese conjunto como codominio, la función es biyectiva y la inversa asigna $0 \mapsto v$, $2 \mapsto w$ y $3 \mapsto u$. El elemento uno del codominio original queda fuera del dominio de esta inversa sobre el recorrido.

Ejercicio 23. Una predicción y su residuo

La entrada cero fija el término constante en quinientos. El aumento entre cero y tres es novecientos, de modo que la pendiente es trescientos. El modelo es $m(x) = 500 + 300x$, que reproduce también $m(6) = 2300$. Predice $m(8) = 2900$. Frente al dato tres mil, el residuo observado menos predicho vale cien. La discrepancia se conserva como dato para contrastar las hipótesis.

Ejercicio 24. Compatibilidad con una muestra

El término $2x(x-1)(x-2)$ vale cero en cero, uno y dos. Las dos reglas producen, respectivamente, dos, cinco y ocho en esas entradas. En tres, $p(3) = 11$ y $q(3) = 11 + 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 23$. Ambas ajustan la muestra; sus predicciones fuera de ella difieren. Una hipótesis afín seleccionaría p dentro de esa clase de modelos.

Diagnóstico de salida

Describe una función indicando dominio, codominio y regla; identifica su recorrido y justifica que todos los valores anunciados se alcanzan. Traduce algunos pares a una tabla y una gráfica conservando extremos y exclusiones. Explica qué compara el crecimiento y qué pide la inyectividad. Al invertir una regla, comprueba las dos recuperaciones y los conjuntos entre los que actúa. Frente a una muestra de datos, declara qué hipótesis adicionales sostienen tu elección de modelo.

CAPÍTULO 17

Funciones afines y cuadráticas

Dos talleres ofrecen fabricar el mismo objeto. Uno cobra un cargo inicial y una cantidad por cada unidad; el otro tiene un cargo inicial mayor y un precio unitario menor. Para decidir conviene reunir cada presupuesto en una función y averiguar cómo cambia la diferencia entre ambos. Si, además, queremos escoger las dimensiones de una caja o el precio de una entrada, aparecen productos de cantidades variables. Las rectas y las parábolas permiten seguir esas decisiones con una precisión que una lista de valores apenas comienza a sugerir.

Estudiaremos las expresiones como herramientas para reconocer una estructura. La pendiente contará cuánto cambia una cantidad por unidad de otra. Un cuadrado completo mostrará a qué distancia estamos de un valor extremo. Los factores localizarán los ceros y ayudarán a leer signos. Elegir una forma de escribir la función será parte de la solución del problema.

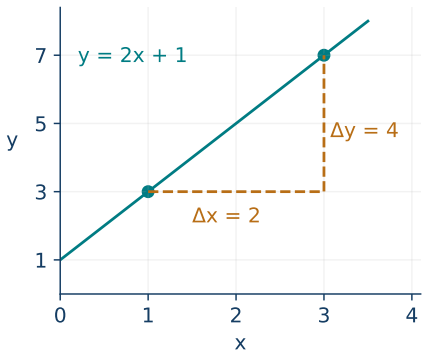
Una tasa de cambio que se conserva

Una función afín tiene una regla $f(x) = mx+b$, con parámetros reales fijos y un dominio declarado. Al comparar dos entradas u y v obtenemos

$$f(v) - f(u) = m(v - u).$$

Esta igualdad explica la función de m: mide el cambio de imagen por cada unidad de cambio de entrada. Para $u \neq v$, el cociente entre ambos cambios es siempre m. La gráfica es una recta, o la parte de ella seleccionada por el dominio. El valor b es la imagen de cero cuando esa entrada pertenece al dominio; en la recta completa, señala el corte con el eje vertical.

La pendiente conserva también las unidades. En un costo medido en pesos frente a una longitud medida en metros, m se expresa en pesos por metro. Una pendiente negativa describe una disminución de la imagen al aumentar la entrada. Una pendiente cero produce una función constante. La regla $f(x) = mx$ recibe el nombre de función lineal en la convención de esta obra y expresa proporcionalidad directa en los contextos apropiados. En el dibujo, pasar de la entrada uno a la entrada tres aumenta la imagen de tres a siete. El cambio horizontal es dos y el vertical cuatro: su cociente vuelve a ser dos. El triángulo reúne visualmente los dos cambios que aparecen en la fórmula.



Problema 1. Recuperar una tarifa desde dos presupuestos

Un taller cobra 3800 pesos por fabricar dos piezas y 7400 por fabricar cinco. Se supone un cargo fijo y un precio constante por pieza. Encuentra la función de costo e interpreta sus parámetros.

Solución. Las tres piezas adicionales aumentan el costo en $7400 - 3800 = 3600$ pesos. Cada pieza añade, por tanto, $m = 3600/3 = 1200$ pesos. Escribimos $C(n) = 1200n + b$ y usamos el primer presupuesto: $3800 = 2400 + b$, de donde $b = 1400$. La regla es $C(n) = 1400 + 1200n$, con n entero positivo para los pedidos descritos. Se verifica $C(5) = 1400 + 6000 = 7400$. El número 1400 representa el cargo fijo del modelo; atribuirlo a un pedido de cero piezas exige que el contrato admita también ese caso. Así se conserva la interpretación del parámetro sin ampliar silenciosamente el servicio.

Problema 2. Un depósito que se vacía a ritmo constante

Un depósito contiene 900 litros al empezar y pierde 30 litros por minuto hasta vaciarse. Describe volumen, dominio temporal y gráfica. ¿Cuándo quedan 240 litros?

Solución. En t minutos salen $30t$ litros, así que $V(t) = 900 - 30t$. El vaciado termina cuando $900 - 30t = 0$, es decir, a los treinta minutos. El modelo actúa en $0 \le t \le 30$ y su recorrido es $[0, 900]$. La gráfica es el segmento que une $(0, 900)$ con $(30, 0)$, con tiempo en el eje horizontal y litros en el vertical. Para localizar 240 litros resolvemos $900 - 30t = 240$: resulta $30t = 660$ y $t = 22$, dentro del dominio. La pendiente -30 tiene unidades de litros por minuto. La ecuación describe el tramo de vaciado; una etapa posterior necesita su propia regla.

Problema 3. Traducir una escala de temperatura

Se adopta la relación afín entre dos escalas cuyas lecturas correspondientes son $(C, F) = (0, 32)$ y $(100, 212)$. Encuentra F en función de C y recupera C cuando $F = 95$.

Solución. La pendiente es $(212 - 32)/(100 - 0) = 180/100 = 9/5$. El primer par fija el término constante en 32. Por tanto, $F = (9/5)C + 32$. Para recuperar la lectura inicial restamos 32 y dividimos por $9/5$: $C = (5/9)(F - 32)$. Cuando $F = 95$, obtenemos $C = (5/9)63 = 35$. Al sustituir, $(9/5)35 + 32 = 63 + 32 = 95$. El cociente $9/5$ expresa unidades de la segunda escala por unidad de la primera; el desplazamiento de 32 explica que multiplicar por ese cociente, por sí solo, produzca otra conversión.

Problema 4. Comprobar la hipótesis afín

En una tabla aparecen los pares $(1, 4)$, $(3, 10)$ y $(6, 19)$. Determina si pertenecen a una misma función afín. Examina después el dato adicional $(4, 14)$.

Solución. Entre los dos primeros pares, la pendiente es $(10 - 4)/(3 - 1) = 3$; entre el segundo y el tercero es $(19 - 10)/(6 - 3) = 3$. La regla determinada por los primeros dos es $f(x) = 3x + 1$, y efectivamente $f(6) = 19$. Los tres datos son compatibles con esa función. En cuatro, la regla predice trece, mientras el nuevo dato registra catorce: el residuo observado menos predicho es uno. Los cuatro pares admiten otras descripciones, pero una sola función afín que contenga los dos primeros ya está determinada. La discrepancia pide revisar la hipótesis o el registro. Las

entradas están separadas por distancias distintas; los cocientes de cambio permiten compararlas correctamente.

Propiedades de las funciones afines

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Regla y cambio	$f(x) = mx + b$ implica $f(v) - f(u) = m(v - u)$ para entradas del dominio.
Pendiente entre puntos	$m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$, con $x_1 \neq x_2$; $b = y_1 - mx_1$.
Variación	$m > 0$: crecimiento estricto; $m < 0$: decrecimiento estricto; $m = 0$: constancia.
Corte vertical	$(0, b)$ pertenece a la gráfica si 0 pertenece al dominio.
Cero	Para $m \neq 0$, el único candidato es $-b/m$; se comprueba su pertenencia al dominio.
Recuperación afín	Para $m \neq 0$, $y = mx + b$ equivale a $x = (y - b)/m$, dentro de los conjuntos declarados.

Pruebas. En el apéndice, «Tasa constante y reconstrucción afín».

Comparar dos reglas y cuidar el intervalo

Comparar presupuestos significa estudiar la función diferencia. Para dos reglas afines, esa diferencia vuelve a ser afín; su cero marca un posible empate y su signo señala cuál imagen es mayor. El dominio común reúne las entradas admisibles para ambas ofertas. Si contamos objetos, una igualdad obtenida con una cantidad fraccionaria puede separar dos decisiones enteras aunque ningún pedido empate exactamente.

Problema 5. El pedido que cambia la elección

Dos talleres ofrecen $A(n) = 2000 + 700n$ y $B(n) = 5000 + 400n$, en pesos, para pedidos enteros de una a treinta piezas. Determina cuándo conviene cada uno.

Solución. Restamos los costos: $A(n) - B(n) = 300n - 3000 = 300(n - 10)$. Para $n < 10$ la diferencia es negativa y A cuesta menos. En diez ambos cobran 9000 pesos. Para $n > 10$, B cuesta menos. Al incorporar el dominio, elegimos A para pedidos de una a nueve piezas, cualquiera en diez y B de once a treinta. El resultado incluye tanto el punto de intersección $(10, 9000)$ como la comparación a ambos lados. Comprobar un pedido pequeño, por ejemplo $n = 1$, confirma el sentido del signo: 2700 frente a 5400.

Problema 6. Un cruce fuera del servicio disponible

Dos planes tienen costos $A(x) = 1000 + 200x$ y $B(x) = 4000 + 100x$, para $0 \leq x \leq 20$. ¿Hay una entrada del servicio en que cuesten lo mismo? ¿Cuál conviene?

Solución. Igualar las expresiones produce $100x = 3000$, de donde $x = 30$. Ese valor queda fuera del intervalo disponible. Para todas las entradas permitidas, $A(x) - B(x) = 100x - 3000 \leq 2000 - 3000 = -1000 < 0$. Por tanto, A es más barato en todo el servicio. Las rectas completas sí se cruzan en $(30, 7000)$; las gráficas de los planes son segmentos que terminan en veinte. La distinción geométrica explica por qué resolver la ecuación es solo una parte de la comparación contextual.

Problema 7. Un umbral entre cantidades enteras

Para pedidos enteros positivos se ofrecen $A(n) = 500 + 120n$ y $B(n) = 1000 + 80n$. Decide desde qué cantidad conviene B y examina si existe empate.

Solución. La diferencia es $A - B = 40n - 500$. Su cero real es $n = 500/40 = 12,5$. Para cantidades enteras, $n \leq 12$ produce diferencia negativa y conviene A; $n \geq 13$ produce diferencia positiva y conviene B. En doce, los costos son 1940 y 1960; en trece, 2060 y 2040. El cambio de preferencia ocurre entre esos pedidos. El dominio entero conserva ambas comprobaciones y muestra que ningún pedido alcanza el empate de las rectas completas.

Problema 8. Una familia de rectas con un punto fijo

Estudia las gráficas de $f_k(x) = kx + 2$, para k real. Determina qué parámetros hacen que la recta pase por $(3, 8)$ y clasifica su intersección con $g(x) = 2x - 1$.

Solución. Todas las rectas pasan por $(0, 2)$; el parámetro k cambia la pendiente alrededor de ese punto. La condición $f_k(3) = 8$ da $3k + 2 = 8$, así que $k = 2$. Para comparar la familia con g, la ecuación general es $(k - 2)x = -3$. Si $k \neq 2$, hay una intersección con abscisa $x = -3/(k - 2)$ y ordenada $2x - 1$. Si $k = 2$, la diferencia $f_k - g = 3$ es constante y positiva: son rectas paralelas distintas. En particular, la recta que pasa por $(3, 8)$ pertenece a este último caso. Para $k = 0$, la familia contiene la horizontal $y = 2$, incluida en el análisis general.

Propiedades de las comparaciones afines

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Función diferencia	$(m_1x + b_1) - (m_2x + b_2) = (m_1 - m_2)x + b_1 - b_2$.
Intersección única	Si $m_1 \neq m_2$, $x = (b_2 - b_1)/(m_1 - m_2)$; se valida en el dominio común.
Pendientes iguales	Si $m_1 = m_2$, las reglas coinciden cuando $b_1 = b_2$ y tienen diferencia constante distinta de cero cuando $b_1 \neq b_2$.
Comparación	El signo de $f - g$ decide el orden de los valores para cada entrada común.
Umbral discreto	Una solución real de la comparación se intersecta con las entradas enteras admitidas.

Pruebas. En el apéndice, «Diferencias afines e intersecciones».

El cuadrado que organiza una parábola

Una función cuadrática tiene la regla $q(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$. Para comprender su gráfica conviene completar el cuadrado. Extraemos a de los términos que contienen x y añadimos dentro el cuadrado de la mitad del coeficiente lineal, compensando su valor:

$$q(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = a(x - h)^2 + k,$$

donde $h = -b/(2a)$ y $k = c - b^2/(4a)$. La forma canónica sitúa el vértice en (h, k). Las entradas $h - d$ y $h + d$ producen la misma imagen porque sus diferencias con h son opuestas y tienen igual cuadrado. La recta $x = h$ es, por ello, el eje de simetría de la parábola completa.

Si $a > 0$, el término $a(x-h)^2$ es no negativo y la menor imagen es k. Si $a < 0$, ese término es no positivo y la mayor imagen es k. En la gráfica diremos, respectivamente, que la parábola abre hacia arriba o hacia abajo. A igual distancia horizontal d del eje, la separación vertical respecto del vértice es ad^2. Esta relación da un significado preciso al efecto de a: su valor absoluto controla esa separación, mientras su signo fija la orientación.

Problema 9. Leer una expresión desde su vértice

Estudia $q(x) = 2(x-3)^2 - 8$ en los reales. Encuentra vértice, eje, recorrido, ceros y corte vertical.

Solución. El cuadrado se anula en $x = 3$ y es positivo en las demás entradas. Como su coeficiente es dos, la menor imagen es -8, alcanzada en tres. El vértice es $(3, -8)$, el eje $x = 3$ y el recorrido $[-8, \infty)$. Para un valor $y \geq -8$, tomar $x = 3 + \sqrt{(y+8)/2}$ comprueba que se alcanza. Los ceros satisfacen $(x-3)^2 = 4$, de donde $x = 1$ o $x = 5$. En cero, $q(0) = 18 - 8 = 10$, así que el corte vertical es $(0, 10)$. Las dos raíces quedan a igual distancia del eje, como exige la simetría.

Problema 10. Cambiar de forma para revelar un máximo

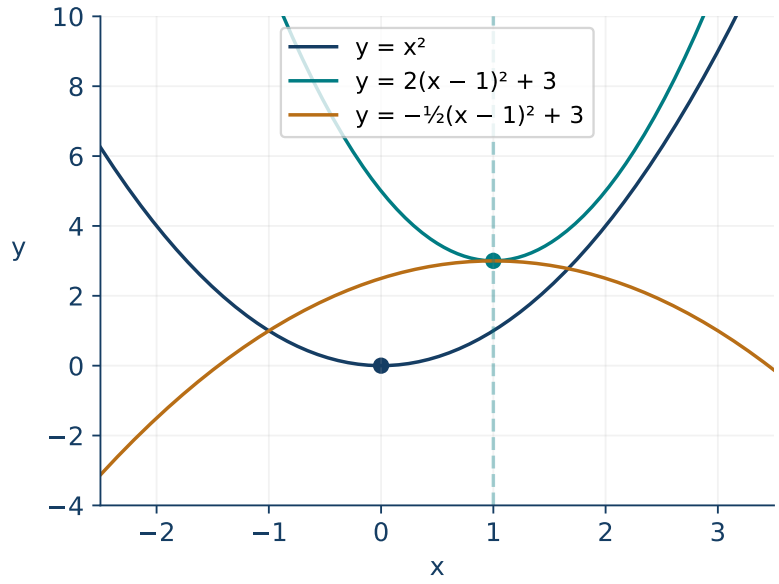
Encuentra la información principal de $q(x) = -x^2 + 6x - 5$ y describe su variación.

Solución. Agrupamos $q(x) = -(x^2 - 6x + 9) + 9 - 5 = -(x-3)^2 + 4$. La mayor imagen es cuatro y se alcanza en tres. El vértice es $(3, 4)$ y el recorrido $(-\infty, 4]$. Para $u < v \leq 3$, las distancias al eje disminuyen, sus cuadrados disminuyen y el signo negativo hace aumentar la imagen. Para $3 \leq u < v$, sucede lo inverso. La función crece estrictamente en $(-\infty, 3]$ y decrece estrictamente en $[3, \infty)$. Los ceros resultan de $(x-3)^2 = 4$: son uno y cinco. El corte vertical es $(0, -5)$. Expandir la forma canónica recupera los tres coeficientes originales y verifica la transformación.

Problema 11. Separar los efectos de tres parámetros

Compara $p(x) = x^2$, $r(x) = 2(x-1)^2 + 3$ y $s(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 3$. Calcula sus valores a una unidad de sus respectivos ejes de simetría.

Solución. En p el vértice es $(0, 0)$; a una unidad del eje, las imágenes son uno. En r el vértice se sitúa en $(1, 3)$; en $x = 0$ y $x = 2$ el cuadrado vale uno y la imagen vale cinco, dos unidades por encima del vértice. En s se conserva el vértice $(1, 3)$, la abertura es hacia abajo y esas mismas entradas dan $3 - 1/2 = 5/2$. Los parámetros actúan en lugares distintos de la expresión: h localiza el eje, k la altura del vértice y a multiplica el cuadrado de la distancia horizontal. En particular, el término $(x-1)$ hace que el cuadrado se anule en uno, lo que fija el sentido del desplazamiento horizontal.



Problema 12. Conservar el coeficiente lineal mientras cambia la abertura

Para $q_a(x) = ax^2 + 4x + 1$, con $a \neq 0$, encuentra el vértice en función de a. Examina también la regla que se obtiene en $a = 0$.

Solución. La abscisa del vértice es $h = -4/(2a) = -2/a$ y su ordenada es $k = 1 - 16/(4a) = 1 - 4/a$. Para $a = 1$, el vértice es $(-2, -3)$; para $a = 2$, $(-1, -1)$; para $a = -1$, $(2, 5)$. Cambiar a manteniendo $b = 4$ desplaza también el vértice: la lectura de parámetros depende de la forma de escritura. La forma canónica es $a(x + 2/a)^2 + 1 - 4/a$ y su expansión da la expresión inicial. En $a = 0$ la regla original produce $4x + 1$, una función afín. Las fórmulas que dividen por a se aplican precisamente a los miembros cuadráticos de la familia.

Propiedades de las formas de una cuadrática

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Forma general	$q(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$.
Forma canónica	$q(x) = a(x - h)^2 + k$, con $h = -b/(2a)$ y $k = c - b^2/(4a)$.
Simetría	$q(h - d) = q(h + d)$; eje de la parábola completa: $x = h$.
Separación vertical	$q(h + d) - k = ad^2$; el signo de a fija la abertura.
Extremo y recorrido	En dominio $\mathbb{R}$: mínimo k si $a > 0$, máximo k si $a < 0$; recorridos $[k, \infty)$ y $(-\infty, k]$, respectivamente.
Variación estricta	Para $a > 0$, decrece hasta h y crece desde h; para $a < 0$, crece hasta h y decrece desde h.

Pruebas. En el apéndice, «Cuadrados completos y parámetros de parábolas».

Ceros, signos y encuentros con una recta

La ecuación $q(x) = 0$ pregunta por los puntos de altura cero. Completar el cuadrado conduce a una condición sobre un cuadrado real. El discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ resume esa condición:

hay dos raíces reales distintas si $\Delta > 0$, una raíz real doble si $\Delta = 0$ y las imágenes conservan un mismo signo si $\Delta < 0$. Las fórmulas y la factorización estudiadas antes adquieren aquí una lectura gráfica.

Si las raíces reales son r_1, r_2, podemos escribir $q(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$. Los factores hacen visibles los cambios de signo. Para encontrar el encuentro con una recta ℓ, estudiamos $q - \ell$: sus ceros son las abscisas comunes y su signo compara las alturas. Una raíz doble de esa diferencia corresponde a un contacto con una recta tangente a la parábola.

Problema 13. Leer el signo desde los factores

Estudia ceros y signo de $q(x) = -2(x + 1)(x - 3)$. Encuentra también su vértice y corte vertical.

Solución. Los ceros son -1 y tres. Para $x < -1$, ambos factores son negativos y el coeficiente -2 hace negativa la imagen. Entre -1 y tres, los factores tienen signos opuestos y la imagen es positiva. Para $x > 3$, ambos factores son positivos y la imagen vuelve a ser negativa. En las raíces vale cero. El eje queda en el punto medio de las raíces, $h = (-1 + 3)/2 = 1$; allí $q(1) = -2 \cdot 2 \cdot (-2) = 8$. La forma canónica es $-2(x - 1)^2 + 8$, que verifica el máximo. En cero, el valor es seis. Las formas factorizada y canónica responden a preguntas complementarias sobre la misma función.

Problema 14. Contar raíces sin calcularlas una por una

Clasifica los ceros de $q_k(x) = x^2 - 4x + k$ según el parámetro k e interpreta el caso de contacto con el eje horizontal.

Solución. Escribimos $q_k(x) = (x-2)^2 + k - 4$. Para anular la imagen necesitamos $(x-2)^2 = 4-k$. Si $k < 4$, aparecen las dos raíces $2 \pm \sqrt{4-k}$. Si $k = 4$, ambas se reúnen en $x = 2$ y la expresión es $(x - 2)^2$. Si $k > 4$, el mínimo $k - 4$ es positivo y todas las imágenes son positivas. La familia conserva el eje $x = 2$ y desplaza verticalmente el vértice $(2, k - 4)$. En $k = 4$, el eje horizontal toca la parábola en el mínimo; la raíz doble expresa algebraicamente ese contacto.

Problema 15. Dos alturas iguales a la de una recta

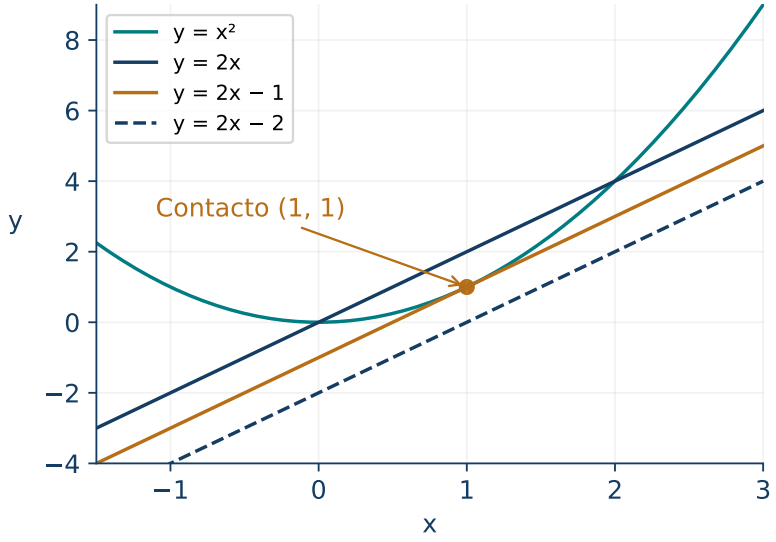
Encuentra las intersecciones de $q(x) = x^2 - 2x$ y $\ell(x) = x + 4$, y determina dónde la parábola está por debajo de la recta.

Solución. La diferencia es $q(x) - \ell(x) = x^2 - 3x - 4 = (x - 4)(x + 1)$. Sus ceros son -1 y cuatro. Sustituimos en la recta para obtener las ordenadas: tres y ocho. Las intersecciones son $(-1, 3)$ y $(4, 8)$. Entre las raíces los factores tienen signos opuestos, así que $q - \ell < 0$: la parábola está por debajo para $-1 < x < 4$. Fuera de ese intervalo está por encima, y en los extremos coinciden las alturas. Sustituir los dos pares en ambas expresiones comprueba el encuentro; resolver solo sus abscisas habría dejado incompleta la localización gráfica.

Problema 16. La altura de una tangente

Para las rectas $\ell_k(x) = 2x + k$, determina cuántas intersecciones hay con $q(x) = x^2$. Encuentra el miembro tangente de la familia.

Solución. La igualdad de alturas equivale a $x^2 - 2x - k = 0$, o $(x-1)^2 = k+1$. Si $k > -1$, hay dos intersecciones; si $k = -1$, hay una sola abscisa, $x = 1$; si $k < -1$, el cuadrado requerido es negativo y la igualdad carece de solución real. La recta tangente es $y = 2x - 1$ y su punto de contacto es $(1, 1)$. Además, $x^2 - (2x-1) = (x-1)^2 \geq 0$: la recta queda debajo de toda la parábola y la toca precisamente en uno. Esta identidad justifica el contacto sin recurrir a cálculo diferencial.



Propiedades de ceros e intersecciones cuadráticas

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Discriminante	$\Delta = b^2 - 4ac$; raíces reales $(-b \pm \sqrt{\Delta})/(2a)$ si $\Delta \geq 0$.
Número de raíces reales	Dos distintas si $\Delta > 0$; una doble si $\Delta = 0$; ninguna si $\Delta < 0$.
Factorización real	Con raíces reales r_1, r_2, $q(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$, incluida la raíz doble.
Signo con dos raíces	Para $r_1 < r_2$, el signo es el de a fuera de $[r_1, r_2]$ y el opuesto dentro; vale cero en los extremos.
Comparación con una recta	Los ceros y el signo de $q - \ell$ describen encuentros y orden de alturas en el dominio común.
Contacto con una recta	Si $q(x) - \ell(x) = a(x-r)^2$, hay contacto en $(r, q(r))$ y una raíz doble de la diferencia.

Pruebas. En el apéndice, «Raíces, signos y contacto de una parábola».

Optimizar dentro de las condiciones del problema

Una forma canónica permite comparar todos los valores con el del vértice. Para usarla en una decisión hay que localizar ese vértice respecto del dominio. En un intervalo cerrado, la menor distancia al eje se alcanza en el vértice si pertenece al intervalo, o en el extremo más cercano si queda fuera; la mayor distancia se alcanza en algún extremo. El signo de a traduce esa comparación de distancias al orden de las imágenes.

Cuando la entrada es entera, conviene comparar los enteros admisibles más cercanos al eje. En un intervalo abierto, una cota puede quedar sin alcanzar. Cada una de estas situaciones conserva la misma identidad cuadrática y cambia la pregunta sobre qué entradas están disponibles.

Problema 17. Cercar un terreno junto a un muro

Se dispone de cuarenta metros de cerca para tres lados de un rectángulo; el cuarto lado queda junto a un muro. Encuentra las dimensiones que maximizan el área.

Solución. Sea x la longitud de cada lado perpendicular al muro y y el lado paralelo que sí se cerca. La condición es $2x + y = 40$, de modo que $y = 40 - 2x$. Las longitudes positivas exigen $0 < x < 20$. El área es $A(x) = x(40 - 2x) = 40x - 2x^2 = 200 - 2(x - 10)^2$. Como restamos un cuadrado no negativo, $A(x) \leq 200$, con igualdad en $x = 10$, que pertenece al dominio. Entonces $y = 20$. El área máxima es 200 metros cuadrados. La comprobación $2 \cdot 10 + 20 = 40$ devuelve la solución al recurso inicial. Aunque el dominio sea abierto, el vértice interior permite alcanzar el máximo.

Problema 18. Una restricción impide alcanzar el vértice global

Un modelo de ingreso es $R(x) = -2x^2 + 24x$, y las condiciones de operación permiten $1 \leq x \leq 4$. Encuentra sus extremos en ese intervalo.

Solución. Completamos $R(x) = 72 - 2(x - 6)^2$. El vértice completo tiene abscisa seis, fuera del intervalo. Entre uno y cuatro, la distancia a seis disminuye al crecer x, por lo que R crece estrictamente. El mínimo se alcanza en uno y vale $-2 + 24 = 22$; el máximo se alcanza en cuatro y vale $-32 + 96 = 64$. Por tanto, el recorrido restringido es $[22, 64]$. La cota 72 pertenece al estudio de la parábola completa y queda por encima de todos los ingresos disponibles en esta operación. La restricción cambia el óptimo efectivo.

Problema 19. Elegir un precio en una escala discreta

Un modelo de ingreso adopta $R(p) = p(90 - 2p)$, donde el precio p solo puede tomar valores enteros entre cero y cuarenta y cinco. Encuentra los precios de mayor ingreso.

Solución. La expresión es $R(p) = 90p - 2p^2 = 1012,5 - 2(p - 22,5)^2$. En la recta real la mayor imagen estaría en $p = 22,5$. Los enteros admisibles más cercanos son veintidós y veintitrés, ambos a distancia $0,5$. Producen $R(22) = 22 \cdot 46 = 1012$ y $R(23) = 23 \cdot 44 = 1012$. Cualquier otro entero queda más lejos del eje y da un cuadrado mayor, así que su ingreso es menor. Los dos precios son óptimos para el modelo discreto. La regla supone una demanda de $90 - 2p$ unidades; la elección comercial depende de que esa hipótesis describa el mercado considerado.

Problema 20. Un extremo que se alcanza y otro que se aproxima

Estudia los extremos de $q(x) = (x - 2)^2 + 1$ en el dominio $(0, 3]$.

Solución. El vértice pertenece al dominio, así que el mínimo es uno y se alcanza en dos. Para $0 < x \leq 3$, tenemos $-2 < x - 2 \leq 1$, por lo que $q(x) < 5$. Las imágenes pueden aproximarse a cinco tomando entradas positivas cada vez más pequeñas. Para comprobar que cualquier imagen admite otra mayor, si $0 < x < 2$ elegimos $x/2$: queda más lejos de dos y aumenta el cuadrado. Si

$2 \le x \le 3$, su imagen es a lo sumo dos, mientras $q(1/2) = 13/4 > 2$. Así, ninguna entrada alcanza un máximo. El recorrido es $[1, 5)$: para $1 \le y < 5$, $x = 2 - \sqrt{y-1}$ pertenece a $(0, 2]$ y produce y.

Propiedades de la optimización cuadrática

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Comparación con el vértice	$q(x) - k = a(x-h)^2$; la distancia $\lvert x-h\rvert$ organiza el orden de las imágenes.
Intervalo cerrado	En $[L, U]$, se comparan $q(L)$, $q(U)$ y $q(h)$ cuando $h \in [L, U]$.
Entradas enteras	Para buscar el extremo del vértice se comparan los enteros admisibles de menor distancia a h; se consideran los límites del dominio.
Extremos abiertos	Un extremo requiere una entrada que alcance su valor; los límites excluidos pueden dar cotas sin máximo o mínimo.

Pruebas. En el apéndice, «Distancia al eje y optimización restringida».

Reconstruir una regla y reconocer el alcance de los datos

La información que recibimos puede favorecer una forma particular. Un vértice sugiere $a(x-h)^2+k$; dos ceros sugieren $a(x-r_1)(x-r_2)$. Un punto adicional determina entonces el factor que falta, siempre que aporte una condición efectiva. Tres pares con entradas distintas determinan una única regla polinómica de grado a lo sumo dos. Según los datos, el coeficiente cuadrático puede resultar cero y la regla obtenida será afín.

Si los datos vienen de entradas separadas por el mismo paso, podemos estudiar qué cambia de una fila a la siguiente. Para una regla cuadrática $q(x) = ax^2 + bx + c$, fijemos un paso $d \neq 0$ y restemos dos valores consecutivos:

$$q(x+d) - q(x) = 2adx + ad^2 + bd.$$

La expresión obtenida es afín en x. Por eso, al avanzar otra vez el mismo paso d, su valor cambia en la cantidad constante $2ad^2$. Las segundas diferencias registran ese cambio entre primeras diferencias y permiten reconstruir o comprobar un candidato cuadrático en una muestra equiespaciada. La constancia observada describe las filas disponibles; para extender la regla a otras entradas mantendremos explícita la hipótesis de que buscamos un modelo de grado a lo sumo dos.

Problema 21. Un vértice y un punto

Una parábola tiene vértice $(2, -3)$ y pasa por $(0, 5)$. Encuentra su regla y verifica ambas condiciones.

Solución. La forma canónica es $q(x) = a(x-2)^2 - 3$. El punto adicional exige $5 = 4a - 3$, por lo que $a = 2$. Así, $q(x) = 2(x-2)^2 - 3 = 2x^2 - 8x + 5$. Al sustituir cero aparece cinco; al sustituir dos aparece -3. Además, $q(x) + 3 = 2(x-2)^2 \ge 0$, con igualdad solo en dos, lo que comprueba que el par indicado es efectivamente el vértice. El punto adicional está fuera del eje y proporciona un cuadrado positivo para determinar a. Si se hubiera repetido solo el vértice, cualquier valor positivo o negativo distinto de cero de a habría conservado su posición, con orientación según su signo.

Problema 22. Dos raíces y una altura

Una función cuadrática tiene ceros -2 y cuatro, y su gráfica pasa por $(0, -16)$. Encuentra su expresión, vértice y recorrido.

Solución. Los ceros sugieren $q(x) = a(x+2)(x-4)$. En cero, $-16 = -8a$, así que $a = 2$. Obtenemos $q(x) = 2(x+2)(x-4) = 2x^2 - 4x - 16$. El eje está en $x = (-2+4)/2 = 1$ y la altura allí es $2 \cdot 3 \cdot (-3) = -18$. Por tanto, $q(x) = 2(x-1)^2 - 18$ y su recorrido en los reales es $[-18, \infty)$. Sustituir las dos raíces anula sus factores; sustituir cero da -16. Las tres comprobaciones corresponden a las condiciones del enunciado y la forma canónica confirma el mínimo.

Problema 23. Una tabla regular y una comprobación adicional

Para entradas $0, 1, 2, 3$ se registran imágenes $1, 4, 9, 16$. Reconstruye una regla de grado a lo sumo dos y examina el nuevo par $(4, 26)$.

Solución. Las primeras diferencias son tres, cinco y siete; sus diferencias son dos y dos. Con paso uno, $2a = 2$ da $a = 1$. En $q(x) = x^2 + bx + c$, el dato de cero da $c = 1$ y el de uno da $1 + b + 1 = 4$, así que $b = 2$. La regla $q(x) = (x+1)^2$ produce nueve y dieciséis en las dos entradas restantes. Predice $q(4) = 25$, mientras el nuevo par da veintiséis: el residuo es uno. Los cinco pares carecen de una única regla de grado a lo sumo dos que los reproduzca todos, pues los tres primeros ya la determinan. Una fórmula de grado mayor o un modelo con errores de observación son posibilidades distintas que exigen sus propias hipótesis.

Entrada	Imagen observada
0	1
1	4
2	9
3	16

Propiedades de la reconstrucción y las diferencias

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Vértice y punto adicional	$a = (y_0 - k)/(x_0 - h)^2$ si $x_0 \neq h$; se exige $a \neq 0$ para una cuadrática.
Raíces y punto adicional	$a = y_0/((x_0 - r_1)(x_0 - r_2))$ si el denominador es distinto de cero; se exige $a \neq 0$.
Tres entradas distintas	Tres pares con abscisas distintas determinan un único polinomio de grado a lo sumo dos.
Primera diferencia	Con paso fijo d, $q(x+d) - q(x) = 2adx + ad^2 + bd$.
Segunda diferencia	Con paso fijo $d \neq 0$, $q(x+2d) - 2q(x+d) + q(x) = 2ad^2$.
Alcance de una muestra	Reproducir una tabla finita comprueba compatibilidad del modelo en esas entradas; su extensión requiere hipótesis.

Pruebas. En el apéndice, «Reconstrucción cuadrática y diferencias regulares».

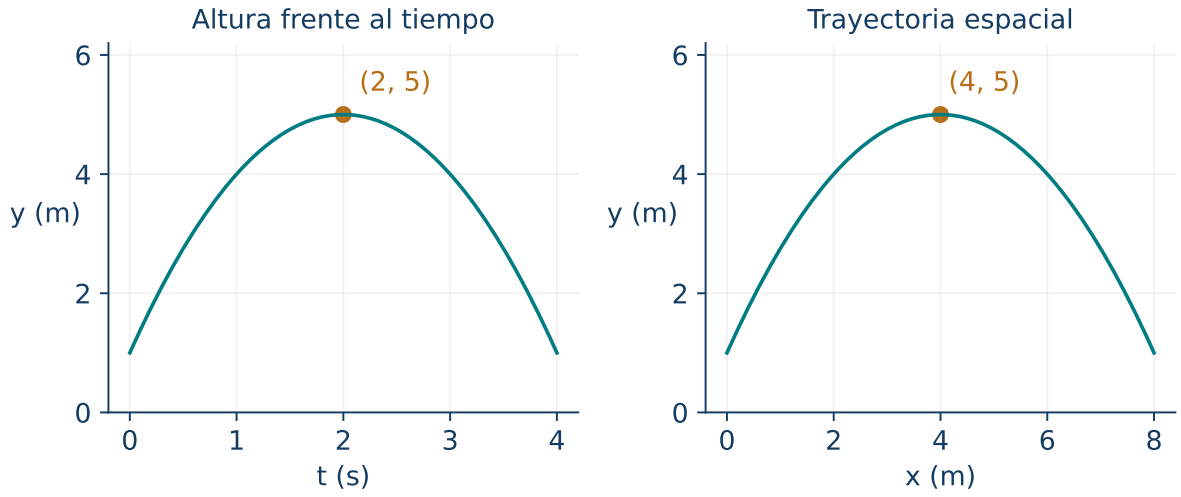
El tiempo en un eje y el lugar en otro

Una gráfica temporal reúne pares formados por un instante y una cantidad observada. Una trayectoria espacial reúne posiciones de un punto que se mueve. Para relacionarlas hacen falta funciones que indiquen cada coordenada en el mismo instante. Escribir qué significa cada eje permite conservar esa relación durante un cálculo.

Problema 24. Dos gráficas temporales y una trayectoria

Un movimiento se modela por $x(t) = 2t$ e $y(t) = 1+4t-t^2$, para $0 \le t \le 4$, con coordenadas en metros y tiempo en segundos. Describe la altura máxima, la posición correspondiente y la trayectoria espacial.

Solución. La altura se escribe $y(t) = 5-(t-2)^2$. Su máximo es cinco metros en $t = 2$ segundos. En ese instante, la coordenada horizontal es $x(2) = 4$ metros: el punto espacial es $(4, 5)$. En la gráfica altura-tiempo el par correspondiente es $(2, 5)$, donde el dos mide segundos. Para obtener la trayectoria despejamos $t = x/2$ de la primera regla y sustituimos en la segunda: $y = 1+2x-x^2/4$, con $0 \le x \le 8$. La curva une $(0, 1)$ y $(8, 1)$ y tiene vértice $(4, 5)$. Cada coordenada de sus puntos mide metros. Ambas parábolas describen el mismo modelo desde variables horizontales diferentes. La hipótesis temporal uniforme $x = 2t$ permite esta eliminación directa del tiempo.



Propiedades de gráficas temporales y trayectorias

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Gráfica temporal	Los pares $(t, y(t))$ relacionan tiempo y altura, con sus unidades respectivas.
Trayectoria paramétrica	Los pares $(x(t), y(t))$ reúnen coordenadas del mismo instante.
Eliminación temporal afín	Si $x(t) = ut + x_0$ con $u \neq 0$, se sustituye $t = (x - x_0)/u$ y se transporta el dominio temporal.

Pruebas. En el apéndice, «Coordenadas temporales y eliminación de un parámetro».

Ejercicios para trabajar sin profesor

1. Un costo afín da 5000 pesos por tres objetos y 8600 por seis. Encuentra la regla e interpreta el cargo fijo.

2. Un depósito contiene 600 litros y pierde veinte por minuto. Determina dominio de vaciado y tiempo en que quedan 140 litros.

3. Dos escalas afines tienen pares $(0, 10)$ y $(50, 110)$. Encuentra la conversión y recupera la primera lectura cuando la segunda es setenta.

4. Examina si $(0, 2)$, $(2, 8)$ y $(5, 17)$ admiten una regla afín. Contrasta el dato $(3, 12)$.

5. Compara $A(n) = 1000 + 500n$ y $B(n) = 3400 + 300n$ para pedidos enteros entre uno y veinte.

6. Compara $A(x) = 500 + 100x$ y $B(x) = 2000 + 50x$ en $[0, 10]$. Localiza el cruce de las rectas completas.

7. Para enteros positivos, decide cuándo conviene cada costo $A(n) = 200 + 90n$, $B(n) = 700 + 50n$.

8. Estudia $f_k(x) = kx - 1$: punto común, parámetro para pasar por $(2, 5)$ e intersección con $g(x) = 3x + 2$.

9. Encuentra vértice, recorrido, ceros y corte vertical de $q(x) = 3(x + 1)^2 - 12$.

10. Estudia vértice, ceros y variación de $q(x) = -2x^2 + 8x - 6$.

11. Compara los vértices y las imágenes a una unidad del eje de x^2, $3(x+2)^2-1$ y $-(x+2)^2-1$.

12. Encuentra el vértice de $q_a(x) = ax^2 - 6x + 2$, con $a \neq 0$. Evalúa los casos $a = 1, 3, -1$ y examina $a = 0$.

13. Estudia ceros, signo, vértice y corte vertical de $q(x) = -(x + 2)(x - 4)$.

14. Clasifica los ceros de $q_k(x) = x^2 + 2x + k$ según k.

15. Encuentra las intersecciones de $q(x) = x^2$ y $\ell(x) = 2x + 3$ y compara sus alturas.

16. Clasifica las intersecciones de $q(x) = x^2$ con $\ell_k(x) = -4x + k$. Encuentra la recta tangente y su punto de contacto.

17. Se cercan tres lados de un rectángulo junto a un muro con 32 metros de cerca. Encuentra el área máxima.

18. Determina extremos y recorrido de $R(x) = -x^2 + 10x$ en $[1, 3]$.

19. Maximiza $R(p) = p(70 - 2p)$ para precios enteros entre cero y treinta y cinco.

20. Estudia extremos y recorrido de $q(x) = (x - 1)^2 + 2$ en $(-1, 2]$.

21. Reconstruye una parábola de vértice $(-1, 2)$ que pase por $(1, 10)$.

22. Reconstruye una cuadrática con ceros uno y cinco y corte vertical $(0, 10)$. Encuentra su vértice.

23. Reconstruye una regla de grado a lo sumo dos desde las imágenes $2, 5, 12, 23$ en $0, 1, 2, 3$. Contrasta el par $(4, 39)$.

24. Para $x(t) = 3t$, $y(t) = 2 + 6t - t^2$ en $0 \leq t \leq 6$, encuentra altura máxima, posición correspondiente y trayectoria espacial.

Soluciones desarrolladas

Ejercicio 1. Separar el cargo y el incremento

Las tres unidades adicionales cuestan $8600 - 5000 = 3600$, por lo que la pendiente es 1200 pesos por objeto. En $C(n) = 1200n + b$, el dato de tres objetos da $b = 5000 - 3600 = 1400$. Así, $C(n) = 1400 + 1200n$ para pedidos enteros positivos dentro del servicio. Sustituir seis da $1400 + 7200 = 8600$. El valor 1400 describe el cargo fijo del modelo; el cobro efectivo de un pedido vacío depende de las condiciones del taller.

Ejercicio 2. El segmento de vaciado

La regla es $V(t) = 600 - 20t$. Su cero está en $t = 30$, así que el dominio temporal de vaciado es $[0, 30]$. El recorrido es $[0, 600]$ litros. Para $V(t) = 140$, resolvemos $20t = 460$ y obtenemos $t = 23$ minutos, que pertenece al dominio. En la gráfica, el segmento une $(0, 600)$ con $(30, 0)$; su pendiente representa una variación de -20 litros por minuto.

Ejercicio 3. Recuperar una lectura

La pendiente entre los pares es $(110-10)/50 = 2$, y el primer par fija el término constante en diez. La segunda lectura es $y = 2x + 10$. Para $y = 70$, la entrada es $x = (70 - 10)/2 = 30$. Comprobar $2 \cdot 30 + 10 = 70$ verifica la recuperación. El desplazamiento de diez forma parte de la conversión y explica que la relación entre las lecturas incluya una suma.

Ejercicio 4. Un dato que obliga a revisar el modelo

Los cocientes de cambio son $(8-2)/(2-0) = 3$ y $(17-8)/(5-2) = 3$. La regla es $f(x) = 3x+2$; sus imágenes en cero, dos y cinco son las registradas. En tres predice once, frente al doce observado. El residuo es uno. Los dos primeros pares ya determinan la única regla afín candidata, por lo que los cuatro datos completos exigen revisar el registro o ampliar la familia de modelos.

Ejercicio 5. Comparar por la diferencia

La diferencia $A - B = 200n - 2400 = 200(n - 12)$ se anula en doce. Para pedidos de uno a once conviene A; en doce ambos cuestan 7000; de trece a veinte conviene B. Las dos sustituciones en doce dan $1000 + 6000 = 3400 + 3600 = 7000$. El dominio entero y sus límites forman parte de la decisión final.

Ejercicio 6. Dos segmentos separados

Igualar costos da $50x = 1500$, de donde $x = 30$. Allí las rectas completas tienen valor 3500. En el dominio permitido, $A - B = 50x - 1500 \leq 500 - 1500 = -1000 < 0$. Por tanto, A cuesta menos para toda entrada de $[0, 10]$. El cruce de las prolongaciones queda fuera de los segmentos que describen el servicio.

Ejercicio 7. Dos pedidos vecinos del umbral

Se obtiene $A - B = 40n - 500$, con cero real en $12,5$. Para enteros $1 \leq n \leq 12$ conviene A; para $n \geq 13$ conviene B. En doce, los costos son 1280 y 1300; en trece, 1370 y 1350. Las comprobaciones muestran el cambio de preferencia entre enteros consecutivos y la ausencia de empate para un pedido admisible.

Ejercicio 8. Pendientes que coinciden

Todos los miembros pasan por $(0,-1)$. La condición $f_k(2)=5$ da $2k-1=5$, de donde $k=3$. Para intersectar con g, resolvemos $(k-3)x=3$. Si $k\neq 3$, la abscisa es $3/(k-3)$ y la ordenada es $3x+2$. Si $k=3$, las rectas son paralelas y su diferencia constante es -3. Ese es justamente el parámetro exigido por el punto $(2,5)$.

Ejercicio 9. El cuadrado y sus distancias

El vértice es $(-1,-12)$ y la abertura es hacia arriba. El recorrido es $[-12,\infty)$: cada $y\geq -12$ se alcanza con $x=-1+\sqrt{(y+12)/3}$. Los ceros satisfacen $(x+1)^2=4$ y son -3 y uno. En cero, la imagen es $3-12=-9$, así que el corte vertical es $(0,-9)$. Las raíces quedan a distancia dos del eje $x=-1$.

Ejercicio 10. Un máximo por completar el cuadrado

Escribimos $q(x)=-2(x^2-4x+4)+8-6=-2(x-2)^2+2$. El vértice es $(2,2)$, el máximo es dos y el recorrido es $(-\infty,2]$. Los ceros cumplen $(x-2)^2=1$: son uno y tres. La función crece estrictamente hasta dos y decrece estrictamente desde dos, porque la distancia al eje primero disminuye y después aumenta. El signo del coeficiente convierte el menor cuadrado en la mayor imagen.

Ejercicio 11. Comparar separaciones desde el vértice

La primera parábola tiene vértice $(0,0)$ y vale uno en $x=\pm 1$. La segunda tiene vértice $(-2,-1)$ y, a una unidad del eje, en $x=-3,-1$, vale $3-1=2$. La tercera comparte ese vértice y en esas entradas vale $-1-1=-2$. Las separaciones verticales son, respectivamente, uno, tres y menos uno. Así se distinguen la posición del vértice, la orientación y el factor que multiplica el cuadrado.

Ejercicio 12. El vértice depende de dos cocientes

Para $a\neq 0$, $h=-(-6)/(2a)=3/a$ y $k=2-36/(4a)=2-9/a$. En $a=1$ resulta $(3,-7)$; en $a=3$, $(1,-1)$; en $a=-1$, $(-3,11)$. La forma canónica $a(x-3/a)^2+2-9/a$ se expande a la regla inicial. En $a=0$ queda la función afín $-6x+2$, cuyo estudio se realiza con la regla original y sus parámetros afines.

Ejercicio 13. Signos y simetría desde las raíces

Las raíces son -2 y cuatro. Fuera de ellas, el producto de factores es positivo y la imagen negativa; entre ellas, el producto es negativo y la imagen positiva. En las raíces vale cero. El eje es $x=1$ y la imagen allí vale $-(3)(-3)=9$, de modo que el vértice es $(1,9)$. En cero se obtiene ocho. La identidad $q(x)=-(x-1)^2+9$ comprueba el máximo y el recorrido $(-\infty,9]$.

Ejercicio 14. Desplazar la altura del vértice

Completamos $q_k(x)=(x+1)^2+k-1$. Los ceros exigen $(x+1)^2=1-k$. Para $k<1$, son $-1\pm\sqrt{1-k}$; para $k=1$, hay una raíz doble en -1; para $k>1$, el mínimo $k-1$ es positivo. La familia conserva el eje $x=-1$ y mueve verticalmente el vértice $(-1,k-1)$. El caso $k=1$ corresponde al contacto con el eje horizontal.

Ejercicio 15. Comparar alturas de una recta y una parábola

La diferencia es $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$. Las abscisas comunes son -1 y tres; al sustituir en $2x+3$ obtenemos uno y nueve. Los puntos son $(-1, 1)$ y $(3, 9)$. En $(-1, 3)$ el producto es negativo y la parábola queda debajo de la recta; fuera del intervalo queda encima. En los extremos coinciden ambas alturas.

Ejercicio 16. Encontrar el contacto

La igualdad es $x^2+4x-k = 0$, equivalente a $(x+2)^2 = k+4$. Hay dos intersecciones para $k > -4$, una para $k = -4$ y ninguna para $k < -4$. La tangente es $y = -4x - 4$ y toca en $(-2, 4)$. La identidad $x^2-(-4x-4) = (x+2)^2 \geq 0$ comprueba que la recta permanece debajo de la parábola y que ambas alturas coinciden solo en $x = -2$.

Ejercicio 17. El recurso fija el dominio

Si x es cada lado perpendicular al muro, el lado restante mide $32 - 2x$ y las longitudes positivas exigen $0 < x < 16$. El área es $A(x) = 32x - 2x^2 = 128 - 2(x-8)^2$. Su máximo es 128 metros cuadrados y se alcanza en $x = 8$, con el otro lado igual a dieciséis. Las dimensiones son admisibles y consumen $2 \cdot 8 + 16 = 32$ metros de cerca.

Ejercicio 18. El mejor valor disponible

Se obtiene $R(x) = 25 - (x-5)^2$. En $[1, 3]$ la distancia a cinco disminuye al crecer la entrada, por lo que R crece estrictamente. El mínimo es $R(1) = 9$ y el máximo $R(3) = 21$. El recorrido es $[9, 21]$. El vértice completo, en cinco, queda fuera de las condiciones y su altura veinticinco expresa una cota superior a la alcanzable en ese intervalo.

Ejercicio 19. Comparar los dos enteros más cercanos

La forma canónica es $R(p) = 612,5 - 2(p-17,5)^2$. Los enteros admisibles de menor distancia al eje son diecisiete y dieciocho. Sus ingresos son $17 \cdot 36 = 612$ y $18 \cdot 34 = 612$. Todo otro entero está más lejos de $17,5$ y produce una imagen menor. Ambos precios maximizan el ingreso de este modelo discreto.

Ejercicio 20. Una cota en el extremo excluido

El vértice es $(1, 2)$ y pertenece al dominio, así que el mínimo es dos. En $(-1, 2]$ se tiene $|x-1| < 2$ y $q(x) < 6$. Para $-1 < x < 1$, la entrada $(x-1)/2$ está entre -1 y x y queda más lejos de uno, por lo que produce una imagen mayor. Para $1 \leq x \leq 2$, las imágenes son a lo sumo tres; en $x = -1/2$ la imagen es $17/4 > 3$. Por ello falta máximo. Para cualquier $2 \leq y < 6$, la entrada $x = 1 - \sqrt{y-2}$ pertenece al dominio y da y. El recorrido es $[2, 6)$.

Ejercicio 21. Determinar el factor restante

Partimos de $q(x) = a(x+1)^2 + 2$. El punto $(1, 10)$ exige $10 = 4a + 2$, así que $a = 2$. La regla es $2(x+1)^2+2 = 2x^2+4x+4$. En $x = 1$ vale diez y en $x = -1$ vale dos. Como $q(x)-2 = 2(x+1)^2 \geq 0$, esa última imagen es el mínimo y confirma el vértice declarado.

Ejercicio 22. Los ceros sugieren los factores

Escribimos $q(x) = a(x-1)(x-5)$. El corte vertical da $10 = 5a$, de donde $a = 2$. Así, $q(x) = 2x^2 - 12x + 10 = 2(x-3)^2 - 8$. El vértice es $(3, -8)$ y el recorrido completo $[-8, \infty)$. Los factores

verifican los ceros uno y cinco; sustituir cero recupera diez. La forma canónica demuestra la posición del mínimo.

Ejercicio 23. Comprobar una regla reconstruida

Las primeras diferencias de la tabla son tres, siete y once; las segundas son cuatro y cuatro. Con paso uno, $2a = 4$ da $a = 2$. El valor inicial fija $c = 2$ y el de uno exige $2 + b + 2 = 5$, por lo que $b = 1$. La regla $q(x) = 2x^2 + x + 2$ produce doce y veintitrés en dos y tres. En cuatro predice $32 + 4 + 2 = 38$; el dato treinta y nueve deja residuo uno. Los tres primeros pares ya fijan el candidato dentro de la familia de grado a lo sumo dos.

Ejercicio 24. Conservar el significado de los ejes

La altura es $y(t) = 11 - (t - 3)^2$, con máximo once metros en tres segundos. En ese instante $x(3) = 9$, por lo que la posición espacial es $(9, 11)$, mientras la gráfica temporal altura-tiempo contiene $(3, 11)$. Al despejar $t = x/3$ obtenemos $y = 2 + 2x - x^2/9$, con $0 \leq x \leq 18$. La trayectoria une $(0, 2)$ con $(18, 2)$ y tiene vértice $(9, 11)$. El transporte del dominio conserva los instantes permitidos y todas las posiciones alcanzadas.

Diagnóstico de salida

Ante una regla afín, interpreta pendiente y cargo inicial con sus unidades. Ante una cuadrática, escoge una forma que revele la información pedida y justifica el cambio de expresión. Compara las entradas candidatas con el dominio y distingue un valor alcanzado de una cota. Al reconstruir desde datos, declara la familia adoptada y comprueba las condiciones originales. En un movimiento, escribe qué cantidad y qué unidad representa cada eje antes de comparar las gráficas.

CAPÍTULO 18

Funciones polinómicas, racionales y radicales

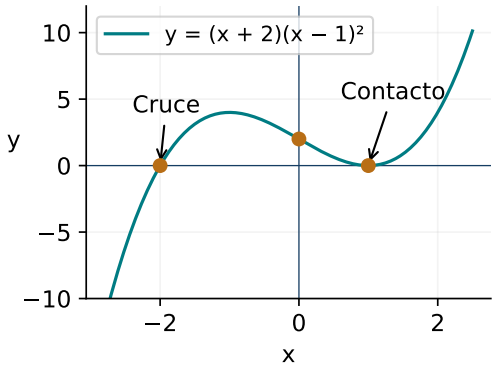
Un taller reparte un gasto fijo entre sus productos. Al aumentar la producción, el gasto por unidad disminuye; si además cambia la forma del envase, el volumen aparece como producto de tres longitudes. Una medición de área, en cambio, conduce a recuperar una longitud mediante una raíz. Las tres dependencias nacen de operaciones familiares. Estudiarlas como funciones permite responder una pregunta más amplia: qué valores admiten, qué alturas alcanzan y qué ocurre cuando la entrada se acerca a un valor especial.

La factorización aprendida en los capítulos de álgebra servirá para seguir la gráfica a través de sus ceros. La división conservará las exclusiones del denominador. Las raíces exigirán mirar el signo del argumento y el de la salida. Trabajaremos con desigualdades e identidades exactas: ellas darán fundamento a las curvas y a las aproximaciones.

Los factores cuentan cómo se llega al eje

Una función polinómica real tiene una regla $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, con coeficientes reales y exponentes enteros no negativos. Su dominio natural es $\mathbb{R}$; un contexto puede seleccionar una parte. Para un polinomio de grado n, el coeficiente a_n es distinto de cero. Los polinomios constantes y el polinomio cero se conservan como casos propios según las convenciones del capítulo de álgebra.

Si $P(x) = (x-r)^m S(x)$, con entero $m \geq 1$ y $S(r) \neq 0$, decimos que r es un cero de multiplicidad m. El factor $x-r$ cambia de signo al pasar por r. Su potencia conserva ese cambio cuando m es impar y tiene signo positivo a ambos lados cuando m es par. El factor restante conserva el signo de $S(r)$ suficientemente cerca de r. Esta última afirmación tiene una razón algebraica: $S(x) - S(r)$ es divisible por $x - r$, y su cociente se puede acotar en un intervalo pequeño. En el apéndice se desarrolla esa cota. Así se justifica el cruce o el contacto con el eje sin confiar únicamente en la apariencia del dibujo.



Problema 1. Un cruce y un contacto

Estudia los ceros y el signo de $P(x) = (x+2)(x-1)^2$. Describe qué información de su gráfica queda determinada.

Solución. El producto se anula en -2 y en 1. Las multiplicidades son uno y dos, pues los factores restantes valen, respectivamente, 9 y 3. Para $x \neq 1$, el cuadrado es positivo; el signo procede de $x+2$. Por ello $P(x) < 0$ en $(-\infty, -2)$ y $P(x) > 0$ en $(-2, 1) \cup (1, \infty)$. La gráfica cruza el eje en $(-2, 0)$ y toca el eje en $(1, 0)$ manteniéndose arriba a ambos lados cercanos. Además, $P(0) = 2$.

Problema 2. Escoger una función desde sus ceros

Un polinomio de grado tres tiene un cero doble en 2 y un cero simple en -1. Su valor en cero es -8. Encuentra su regla.

Solución. Las multiplicidades suman tres, por lo que la división sucesiva por los factores deja una constante: $P(x) = a(x-2)^2(x+1)$. Evaluar en cero da $4a = -8$, de donde $a = -2$. La regla es $P(x) = -2(x-2)^2(x+1)$. El coeficiente resulta distinto de cero, como exige el grado. Los factores restantes valen -6 en 2 y -18 en -1, ambos distintos de cero; las multiplicidades son exactamente las pedidas.

Problema 3. Resolver una desigualdad con repetición

Resuelve $(x+1)^2(x-2)(x-4) \le 0$.

Solución. Los puntos que separan los intervalos son -1, 2 y 4. Fuera de -1, el cuadrado aporta signo positivo. El producto $(x-2)(x-4)$ es positivo para $x < 2$ y para $x > 4$, y negativo entre 2 y 4. Se obtiene el intervalo $[2, 4]$ al incorporar sus extremos. Además, en $x = -1$ el producto vale cero. La solución completa es $\{-1\} \cup [2, 4]$. El punto aislado surge del factor doble: allí se alcanza cero aun cuando los valores vecinos son positivos.

Problema 4. Un parámetro cambia el grado

Estudia el grado y los ceros de $P_a(x) = ax^3 - x$ para todo real a.

Solución. La forma factorizada es $x(ax^2 - 1)$. Si $a = 0$, queda $-x$, de grado uno y único cero cero. Si $a > 0$, el grado es tres y los ceros son 0, $1/\sqrt{a}$ y $-1/\sqrt{a}$; los tres son simples. Si $a < 0$, se cumple $ax^2 - 1 < 0$ para cada real x; el único cero real es cero, simple porque ese segundo factor vale -1 allí. La ecuación $x^2 = 1/a$ solo aporta raíces reales en el caso positivo. Separar el valor cero del parámetro conserva tanto el grado como el alcance real del problema.

Propiedades de los ceros y los signos

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Dominio polinómico	Una suma finita de potencias enteras no negativas se evalúa para cada $x \in \mathbb{R}$.
Multiplicidad	$P(x) = (x-r)^m S(x)$, $m \ge 1$ entero y $S(r) \neq 0$; m es la multiplicidad de r.
Signo del producto	En un intervalo donde cada factor conserva su signo, el signo del producto es el producto de esos signos.
Cruce y contacto	En un cero de multiplicidad impar el signo cambia; en uno de multiplicidad par se conserva, suficientemente cerca del cero.
Cota de ceros	Un polinomio de grado $n \ge 1$ tiene a lo sumo n ceros reales distintos; sus multiplicidades suman a lo sumo n.

Pruebas. Véase «Ceros polinómicos, multiplicidad y signo» en el apéndice.

Lo que domina cuando la entrada crece

En $P(x) = 2x^3 - 5x + 1$ conviene extraer x^3 para comparar términos:

$$P(x) = x^3\left(2 - \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right), \qquad x \neq 0.$$

Al dividir por la potencia principal hemos separado el coeficiente 2 de las contribuciones que contienen denominadores crecientes. Para medir cuánto falta para llegar a 2, sumamos los tamaños de esas contribuciones: cuando $|x| \geq 1$, $1/|x|^3 \leq 1/x^2$ y el error del paréntesis queda acotado por $6/x^2$. El mismo procedimiento sirve para un polinomio de grado $n \geq 1$: si reunimos los tamaños de los coeficientes restantes en $S = \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$, obtenemos

$$\left|\frac{P(x)}{x^n} - a_n\right| \leq \frac{S}{|x|} \quad (|x| \geq 1).$$

Para obtenerla basta observar que $1/|x|^{n-k} \leq 1/|x|$ para cada exponente $n-k \geq 1$. Si $|x| > 2S/|a_n|$, el paréntesis tiene el signo de a_n y magnitud mayor que $|a_n|/2$. El signo y la paridad de x^n determinan entonces las dos colas de la gráfica. Un umbral efectivo permite usar esta idea con seguridad.

Problema 5. Justificar las dos colas

Da una cota que justifique el comportamiento de $P(x) = 2x^3 - 5x + 1$ para entradas de gran magnitud.

Solución. Si $|x| \geq 3$, la diferencia del paréntesis respecto de 2 satisface $5/x^2 + 1/|x|^3 \leq 5/9 + 1/27 = 16/27 < 1$. El paréntesis es mayor que uno. Por ello $P(x) > x^3$ para $x \geq 3$; sus valores superan cualquier altura positiva al tomar x bastante grande. Para $x \leq -3$, multiplicar por $x^3 < 0$ da $P(x) < x^3$; sus valores descienden por debajo de cualquier cota negativa. La cota usa magnitudes explícitas y conserva el sentido de la desigualdad en la cola izquierda.

Problema 6. Un parecido a gran escala

Compara $P(x) = -3x^4 + 2x^2 + 7$ con $-3x^4$. Encuentra un umbral que garantice error relativo a lo sumo $1/10$ respecto del término principal.

Solución. Para $x \neq 0$,

$$\frac{|P(x) - (-3x^4)|}{3x^4} = \frac{2x^2 + 7}{3x^4}.$$

Si $|x| \geq 3$, la expresión es a lo sumo $2/27 + 7/243 = 25/243 < 0{,}103$, cota todavía insuficiente para el décimo. Con $|x| \geq 4$ obtenemos $2/48 + 7/768 = 13/256 < 1/10$. Ese umbral basta. Ambas colas descienden: el error relativo queda por debajo de uno y el término principal es negativo. Se distingue así una aproximación proporcional de una aproximación con error absoluto pequeño; aquí el error absoluto $2x^2 + 7$ crece.

Problema 7. Una escala horizontal y otra vertical

Sea $p(u) = u^3$. Describe $g(x) = -2p(x-1) + 3$, determina su único cero y justifica su crecimiento o decrecimiento.

Solución. La regla es $g(x) = -2(x-1)^3 + 3$. Cada punto (u, u^3) pasa a $(u+1, 3-2u^3)$. La entrada se desplaza una unidad, la altura se multiplica por -2 y se suma tres. Resolver $g(x) = 0$ equivale a $(x-1)^3 = 3/2$, de donde $x = 1 + \sqrt[3]{3/2}$. La función cubo es estrictamente creciente: si $v > u$, $v^3 - u^3 = (v-u)(v^2 + uv + u^2) > 0$, pues el segundo factor es positivo para dos valores

distintos. La multiplicación por -2 invierte ese orden, así que g es estrictamente decreciente y el cero es único.

Propiedades del término principal y las transformaciones

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Control del término principal	Si $\deg P = n \geq 1$ y $\lvert x\rvert \geq 1$, $\lvert P(x)/x^n - a_n\rvert \leq S/\lvert x\rvert$, con $S = \sum_{k<n} \lvert a_k\rvert$.
Signo lejano	Para $\lvert x\rvert > \max(1, 2S/\lvert a_n\rvert)$, $P(x)$ tiene el signo de $a_n x^n$ y $\lvert P(x)\rvert > \lvert a_n\rvert\lvert x\rvert^n/2$.
Transformación de puntos	Para $g(x) = Af(B(x-h)) + k$, con $A, B \neq 0$, $(u, f(u))$ pasa a $(h + u/B, k + Af(u))$.
Dominio transformado	$D_g = \{x : B(x-h) \in D_f\}$, manteniendo $A, B \neq 0$. Con $A = 0$, la expresión conserva el dominio de evaluación de f si se declara como composición.

Pruebas. Véase «Dominancia polinómica y transformación de gráficas» en el apéndice.

Una fórmula breve con un dominio que recordar

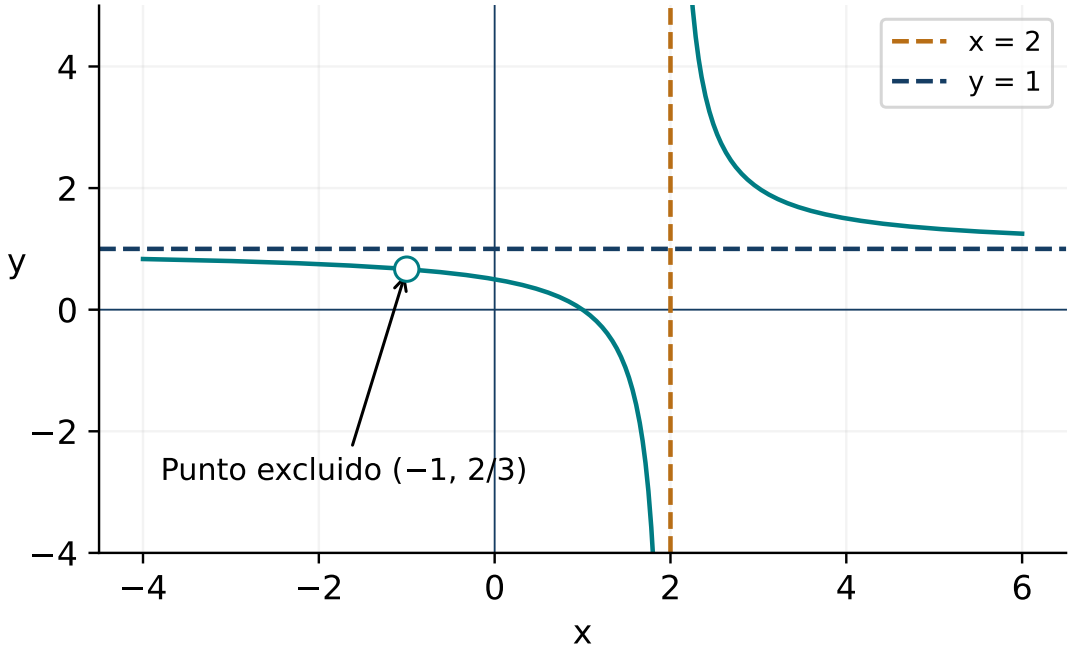
Una función racional tiene una regla $P(x)/Q(x)$, con polinomios reales y denominador distinto del polinomio cero. Su dominio natural reúne las entradas con $Q(x) \neq 0$. Para estudiar un punto excluido conviene comparar las multiplicidades del numerador y del denominador.

Si ambos contienen $(x-a)$ con la misma multiplicidad, la cancelación puede dejar una regla con valor finito en a. La gráfica original tiene un punto excluido que se representa con un círculo abierto; el valor de la regla reducida proporciona una extensión. Si queda una potencia positiva de $(x-a)$ en el denominador y el numerador reducido vale algo distinto de cero, aparece una asíntota vertical. Si queda el factor en el numerador, el punto excluido puede situarse sobre el eje horizontal. Estas posibilidades se deciden conservando primero todas las exclusiones originales.

Problema 8. Dos exclusiones con destinos distintos

Estudia $f(x) = (x^2-1)/(x^2-x-2)$: dominio, ceros, punto excluido finito y asíntota vertical.

Solución. Factorizar da $(x-1)(x+1)/[(x-2)(x+1)]$. El dominio es $\mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ y, dentro de él, $f(x) = (x-1)/(x-2) = 1 + 1/(x-2)$. El cero es 1. En $x = -1$ la regla reducida vale $2/3$, por lo que hay un círculo abierto en $(-1, 2/3)$. En $x = 2$ el término $1/(x-2)$ adquiere magnitudes arbitrariamente grandes: es negativo a la izquierda y positivo a la derecha. La recta $x = 2$ es asíntota vertical. La cancelación conserva ambas exclusiones del dominio original.



Problema 9. Una ecuación conserva sus exclusiones

Encuentra las intersecciones de la función del problema anterior con la recta $y = x$.

Solución. Trabajamos con $x \neq -1, 2$. La ecuación $(x-1)/(x-2) = x$ equivale a $x-1 = x(x-2)$, pues el factor multiplicador vale algo distinto de cero. Se obtiene $x^2 - 3x + 1 = 0$, cuyas raíces son $(3-\sqrt{5})/2$ y $(3+\sqrt{5})/2$. Ninguna coincide con -1 o 2: sustituir esos valores en el polinomio da 5 y -1. Ambas raíces son admisibles y las intersecciones son (r, r) para esos dos valores de r. La equivalencia algebraica y la comprobación del dominio certifican las dos soluciones.

Problema 10. Un signo racional con un punto abierto

Resuelve $(x^2 - 1)/(x^2 - x - 2) \geq 0$.

Solución. La regla reducida es $(x - 1)/(x - 2)$ y las exclusiones son $-1, 2$. Numerador y denominador son negativos para $x < 1$, así que el cociente es positivo allí, con el punto -1 retirado. En 1 vale cero. Entre 1 y 2 los signos son opuestos y para $x > 2$ ambos son positivos. La solución es $(-\infty, -1) \cup (-1, 1] \cup (2, \infty)$. El signo se ha decidido por intervalos; multiplicar una desigualdad por $x - 2$ habría exigido separar sus dos signos.

Problema 11. Una cancelación que depende del parámetro

Clasifica la entrada excluida de $f_a(x) = (x - a)/(x - 2)$ según el parámetro real a.

Solución. El dominio natural siempre es $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. La identidad $f_a(x) = 1 + (2-a)/(x-2)$ separa los casos. Para $a = 2$ la función vale uno en todo su dominio y tiene un punto excluido finito en $(2, 1)$. Para $a \neq 2$, dado cualquier $M > 0$, tomar $0 < |x - 2| < |2 - a|/(M + 1)$ garantiza $|(2-a)/(x-2)| > M + 1$ y, por la desigualdad triangular, $|f_a(x)| > M$. Hay asíntota vertical en 2; el signo de $2 - a$ decide qué rama sube y cuál baja. El parámetro determina además un cero en $x = a$ exactamente en este segundo caso.

Propiedades de funciones racionales y puntos excluidos

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Dominio y ceros	$D = \{x : Q(x) \neq 0\}$; los ceros satisfacen simultáneamente $P(x) = 0$ y $Q(x) \neq 0$.
Cancelación	$AP/AQ = P/Q$ en el dominio original $\{x : A(x)Q(x) \neq 0\}$.
Punto excluido finito	Si la regla reducida R/S cumple $S(a) \neq 0$, la extensión asigna $R(a)/S(a)$ en el punto originalmente excluido a.
Polo tras reducción	Si queda $R(x)/[(x-a)^m S(x)]$, $m \geq 1$, $R(a)S(a) \neq 0$, la magnitud crece arbitrariamente al acercarse a a.
Signos racionales	El signo de P/Q es el producto de los signos de P y Q donde $Q \neq 0$.

Pruebas. Véase «Cancelación, extensión y polos racionales» en el apéndice.

Aproximarse a una recta

La recta $y = L$ es una asíntota horizontal hacia la derecha si el error $|f(x)-L|$ puede hacerse menor que cualquier tolerancia positiva para todas las entradas suficientemente grandes del dominio. Hacia la izquierda se pide la misma condición con entradas suficientemente negativas. Una asíntota oblicua $y = mx + b$, con $m \neq 0$, se define de la misma manera usando el error $|f(x) - (mx + b)|$. La definición se refiere a una distancia vertical que tiende a cero.

Para comparar una función racional con una recta podemos recuperar la división de polinomios: la identidad $P = QS + R$, con resto de grado menor que el divisor, da $P/Q = S + R/Q$ en el dominio. Si S es afín, la diferencia vertical entre la curva y la recta $y = S(x)$ es precisamente el resto dividido por el divisor. Controlar el tamaño de R/Q permitirá comprobar que esa recta es una asíntota. Si el cociente S tiene grado mayor, el mismo razonamiento proporciona una aproximación polinómica. La diferencia puede anularse en alguna entrada y hacerse pequeña en las colas, de modo que cruzar una asíntota horizontal es compatible con esa aproximación.

Problema 12. Una tolerancia alrededor de la horizontal

Para $f(x) = (x-1)/(x-2)$, encuentra entradas que garanticen $|f(x)-1| < 0{,}01$ y explica las dos colas.

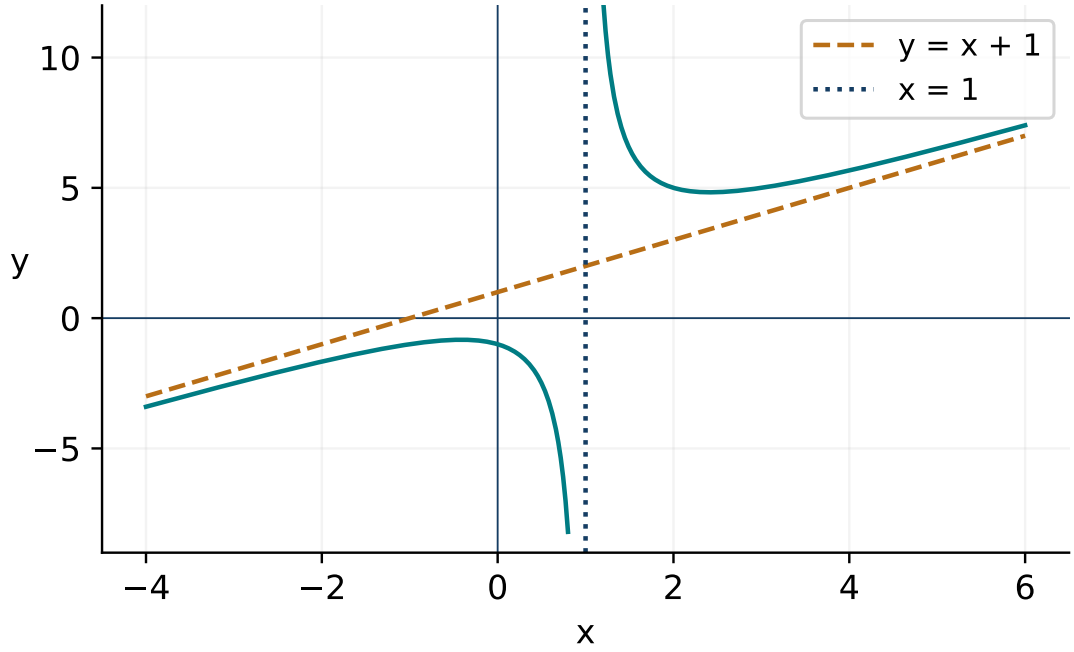
Solución. La identidad $f(x) - 1 = 1/(x-2)$ da $|f(x) - 1| = 1/|x-2|$. El error es menor que $1/100$ exactamente cuando $|x-2| > 100$, es decir, $x < -98$ o $x > 102$. En ambas colas la recta $y = 1$ es asíntota horizontal. El error es negativo para $x < 2$ y positivo para $x > 2$, lo que sitúa las ramas por debajo y por encima de la recta, respectivamente. Si se usa la función original del problema 8, se mantiene también la exclusión $x = -1$, ajena a esas dos colas.

Problema 13. Obtener una asíntota oblicua

Estudia la aproximación a una recta de $g(x) = (x^2 + 1)/(x - 1)$ y da una cota de error.

Solución. La división exacta es $x^2+1 = (x-1)(x+1)+2$. Para $x \neq 1$ resulta $g(x) = x+1+2/(x-1)$. El error respecto de $y = x + 1$ tiene magnitud $2/|x - 1|$. Para una tolerancia $\varepsilon > 0$, basta $|x - 1| > 2/\varepsilon$; se cumple en ambas colas. Además, al acercarse a 1 el término restante tiene

magnitudes arbitrarias, con signos opuestos. La gráfica tiene asíntota vertical $x = 1$ y oblicua $y = x + 1$.



Problema 14. Cruzar una asíntota

Estudia $h(x) = x/(x^2 + 1)$: dominio, ceros y aproximación horizontal. ¿La gráfica alcanza su asíntota?

Solución. El denominador es positivo para todo real, así que el dominio es $\mathbb{R}$ y el único cero es cero. Para $|x| \geq 1$,

$$|h(x)| = \frac{|x|}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{|x|}.$$

Dada una tolerancia $\varepsilon > 0$, tomar $|x| > \max(1, 1/\varepsilon)$ hace el error menor que ε. La asíntota es $y = 0$ en ambas colas. La gráfica pasa por $(0, 0)$ y cambia de signo allí, pues el denominador es siempre positivo. Alcanzar la recta en una entrada es compatible con la aproximación descrita para las entradas lejanas.

Problema 15. Un polo con el mismo signo a ambos lados

Explica con una desigualdad qué ocurre con $q(x) = 3/(x + 1)^2$ cerca de -1.

Solución. La función es positiva para $x \neq -1$. Dada una altura $M > 0$, si $0 < |x + 1| < \sqrt{3/M}$, entonces $(x + 1)^2 < 3/M$ y $q(x) > M$. Esto vale a ambos lados de -1. La asíntota vertical tiene dos ramas que suben, en acuerdo con la potencia par del denominador. El control cuantitativo explica el comportamiento completo para cualquier altura solicitada.

Propiedades de las aproximaciones racionales

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
División exacta	$P/Q = S + R/Q$ en $Q \neq 0$, con $\deg R < \deg Q$ o $R = 0$.
Menor grado arriba	Si P es cero o $\deg P < \deg Q$, P/Q se aproxima a cero en ambas colas.
Igual grado	Para igual grado y coeficientes principales a, b, P/Q se aproxima a a/b, con $b \neq 0$.
Una diferencia de grado	Si $\deg P = \deg Q + 1$, la división produce la asíntota oblicua $y = S(x)$ de pendiente distinta de cero.
Tolerancia	La condición $\lvert R(x)/Q(x)\rvert < \varepsilon$ controla la distancia vertical respecto del cociente polinómico.

Pruebas. Véase «Asíntotas racionales y cotas del resto» en el apéndice.

Las raíces conservan un orden y una elección

Para entero $n \geq 2$ par, la raíz principal $\sqrt[n]{u}$ asigna al argumento $u \geq 0$ el único número no negativo cuya potencia n es u. Para n impar, la raíz asigna a cada real el único real con esa potencia. Las funciones raíz son crecientes en sus dominios; se deduce del orden de las potencias ya estudiado. Una raíz par en un denominador exige argumento estrictamente positivo, pues su valor debe permitir la división. Una raíz impar situada allí exige argumento distinto de cero.

En una fórmula compuesta cada operación aporta sus condiciones. Para $\sqrt{(x-1)/(x+2)}$ se exige que la fracción esté definida y sea no negativa. Para $1/\sqrt{(x-1)/(x+2)}$ se exige que sea positiva. Resolver estas condiciones mediante signos reúne álgebra y dominio en el mismo argumento.

Problema 16. Una raíz de un cociente

Encuentra el dominio de $f(x) = \sqrt{(x-1)/(x+2)}$ y el de $g(x) = 1/\sqrt{(x-1)/(x+2)}$.

Solución. Los puntos críticos son -2 y 1. El cociente es positivo para $x < -2$ y para $x > 1$, y negativo en $(-2, 1)$. En 1 vale cero; en -2 queda excluido. Así, $D_f = (-\infty, -2) \cup [1, \infty)$. En el segundo caso la raíz debe ser positiva para servir de denominador: $D_g = (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$. Sustituir una entrada de cada intervalo comprueba el signo; la factorización lineal garantiza que permanece allí.

Problema 17. Reconocer una gráfica desde su construcción

Describe dominio, recorrido y variación de $r(x) = 2 - \sqrt{3 - x}$. Encuentra su cero.

Solución. El argumento exige $x \leq 3$. Para estas entradas la raíz recorre $[0, \infty)$, así que r recorre $(-\infty, 2]$ y alcanza 2 en $x = 3$. Si $x_1 < x_2 \leq 3$, entonces $3 - x_1 > 3 - x_2$; tomar raíces conserva ese orden y restarlas de 2 lo invierte. Por tanto $r(x_1) < r(x_2)$: la función es estrictamente creciente. Su cero exige $\sqrt{3 - x} = 2$, equivalente a $3 - x = 4$, de donde $x = -1$. El punto inicial de la curva al recorrer el dominio desde la derecha es $(3, 2)$.

Problema 18. Una raíz impar y una restricción posterior

Determina dominio y recorrido de $s(x) = \sqrt[3]{x-2}$ y de $t(x) = 1/\sqrt[3]{x-2}$.

Solución. La raíz cúbica se evalúa para cada real. Para cualquier salida y, la entrada $x = y^3 + 2$ produce $s(x) = y$; dominio y recorrido de s son $\mathbb{R}$. Para t, el denominador se anula exactamente en 2, de modo que el dominio es $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Su recorrido es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$: para cualquier $y \neq 0$, la entrada $x = 2 + 1/y^3$ pertenece al dominio y da $t(x) = y$. Estas preimágenes justifican los recorridos completos.

Propiedades de dominios y raíces

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Raíz par	Para $n \geq 2$ par, $u \geq 0$, $y = \sqrt[n]{u}$ equivale a $y \geq 0$ y $y^n = u$.
Raíz impar	Para $n \geq 3$ impar y $u \in \mathbb{R}$, $y = \sqrt[n]{u}$ equivale a $y^n = u$.
Denominador radical	$1/\sqrt[n]{u}$ exige $u > 0$ si n es par y $u \neq 0$ si n es impar.
Orden de las raíces	$u < v$ en el dominio de una misma raíz implica $\sqrt[n]{u} < \sqrt[n]{v}$.
Raíz de un cuadrado	Para todo real u, $\sqrt{u^2} = \lvert u \rvert$.

Pruebas. Véase «Raíces, dominios y orden funcional» en el apéndice.

Elevar al cuadrado conservando la equivalencia

La igualdad $\sqrt{A(x)} = B(x)$ exige a la vez $A(x) \geq 0$, $B(x) \geq 0$ y $A(x) = B(x)^2$. Con esas condiciones, ambos miembros son las raíces no negativas del mismo número y coinciden. El cuadrado conserva la información necesaria cuando se retiene el signo de la salida. Si hay varias raíces, aislar una de ellas permite aplicar este criterio por etapas.

La composición también se estudia paso a paso. Para $f(g(x))$ la entrada x debe pertenecer al dominio de g, y la salida $g(x)$ debe pertenecer al de f. El capítulo dedicado a composición desarrollará sus propiedades generales; aquí usaremos esta condición para interpretar expresiones racionales y radicales.

Problema 19. Seleccionar una solución después del cuadrado

Resuelve $\sqrt{x+2} = x$.

Solución. El dominio inicial exige $x \geq -2$ y el signo del segundo miembro exige además $x \geq 0$. Bajo esas condiciones podemos escribir $x + 2 = x^2$, que factoriza como $(x-2)(x+1) = 0$. Los candidatos son 2 y -1; únicamente 2 cumple $x \geq 0$. La sustitución da $\sqrt{4} = 2$. En -1, la raíz vale 1 y el segundo miembro vale -1, lo que muestra exactamente qué información de signo se había perdido al cuadrar sin la condición.

Problema 20. Dos radicales y una diferencia

Resuelve $\sqrt{x+5}-\sqrt{x}=1$.

Solución. Partimos de $x \geq 0$ y aislamos $\sqrt{x+5}=1+\sqrt{x}$. Ambos miembros son no negativos. Cuadrar es equivalente a $x+5=1+2\sqrt{x}+x$, de donde $\sqrt{x}=2$. Cuadrar de nuevo, con ambos miembros no negativos, da $x=4$. La comprobación $3-2=1$ confirma la solución. Cada transformación ha sido equivalente sobre el dominio señalado, por lo que la solución es única.

Problema 21. Dos órdenes para componer

Sean $f(u)=\sqrt{u}$ y $g(x)=1/(x-1)$, con sus dominios naturales. Calcula ambas composiciones y sus dominios.

Solución. Para $f(g(x))=\sqrt{1/(x-1)}$ se exige $x \neq 1$ y $1/(x-1) \geq 0$, lo que equivale a $x>1$. Para $g(f(x))=1/(\sqrt{x}-1)$ se exige $x \geq 0$ y $\sqrt{x} \neq 1$, es decir, $x \in [0,\infty) \setminus \{1\}$. La entrada cero pertenece al segundo dominio y produce -1; en el primero, el argumento de la raíz sería -1. El orden de evaluación determina las restricciones efectivas.

Propiedades de ecuaciones radicales y composición

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Una raíz aislada	$\sqrt{A(x)}=B(x)$ equivale a $A(x)\geq 0$, $B(x)\geq 0$ y $A(x)=B(x)^2$, donde las expresiones están definidas.
Dos miembros no negativos	Si $u,v\geq 0$, $u=v$ equivale a $u^2=v^2$.
Dominio de composición	$D_{f\circ g}=\{x\in D_g : g(x)\in D_f\}$.
Racionalización	$\sqrt{u}-\sqrt{v}=(u-v)/(\sqrt{u}+\sqrt{v})$ para $u,v\geq 0$ y $u+v>0$.

Pruebas. Véase «Equivalencias radicales y evaluación compuesta» en el apéndice.

Una raíz puede describir una longitud y un error

Si un cuadrado tiene área A en metros cuadrados, su lado en metros es $\sqrt{A}$. La raíz conserva la información geométrica de una longitud no negativa. Si el área medida cambia un poco, la diferencia de lados se puede estudiar racionalizando: para áreas positivas A y A_0,

$$\sqrt{A}-\sqrt{A_0}=\frac{A-A_0}{\sqrt{A}+\sqrt{A_0}}.$$

El denominador explica la sensibilidad: una misma diferencia de áreas produce diferencias de lado distintas según el tamaño inicial. La misma identidad permite construir una aproximación afín con una cota exacta del error.

Problema 22. Recuperar un lado con incertidumbre

El área de un cuadrado está entre 99 y 101 metros cuadrados, incluidos los extremos. Encuentra el intervalo exacto del lado y una cota de su diferencia respecto de diez metros.

Solución. Como la raíz es creciente, el lado pertenece a $[\sqrt{99}, \sqrt{101}]$ metros. Para cualquiera de esas áreas,

$$|\sqrt{A} - 10| = \frac{|A - 100|}{\sqrt{A} + 10} \leq \frac{1}{\sqrt{99} + 10} < \frac{1}{19}.$$

La última desigualdad usa $\sqrt{99} > 9$. El error es menor que $1/19$ de metro, aproximadamente 5,27 centímetros. El intervalo exacto conserva más información que esta cota simétrica; ambos son útiles según se necesiten extremos precisos o una garantía sencilla.

Problema 23. Una longitud determinada por dos restricciones

Un punto de una semicircunferencia superior de radio cinco tiene abscisa $x \geq 0$. Su altura debe ser al menos tres. Describe la altura como función y determina las abscisas admisibles.

Solución. La ecuación $x^2 + y^2 = 25$ junto con $y \geq 0$ da $y(x) = \sqrt{25 - x^2}$. En la mitad elegida, el dominio es $[0, 5]$. La exigencia $y(x) \geq 3$ se puede cuadrar conservando equivalencia, pues los dos miembros son no negativos: $25 - x^2 \geq 9$. Así, $x^2 \leq 16$ y, en el dominio contextual, $0 \leq x \leq 4$. El extremo 4 produce altura tres y cero produce altura cinco. Cada restricción conserva su origen: la raíz corresponde a la altura superior y $x \geq 0$ selecciona la mitad derecha.

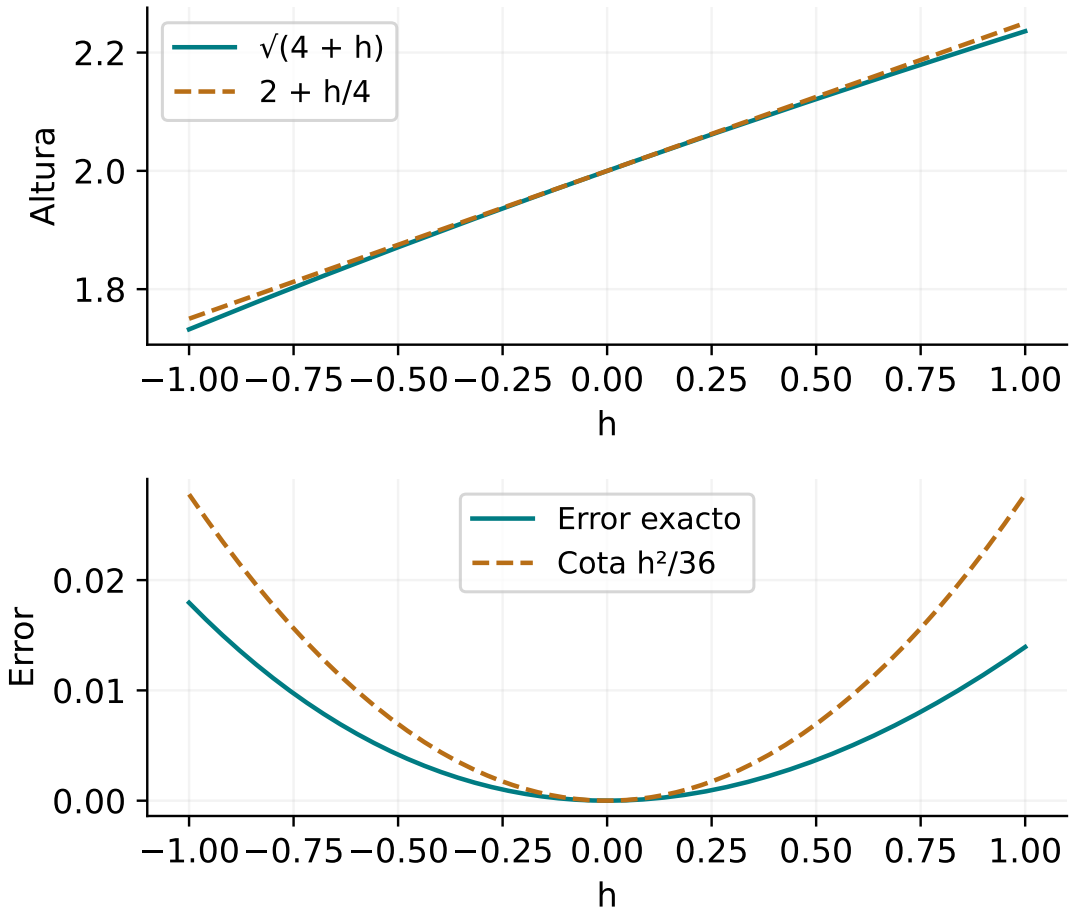
Problema 24. Aproximar una raíz cerca de un cuadrado

Para $|h| \leq 1$, aproxima $\sqrt{4 + h}$ mediante una función afín de h y acota el error. Aplica la fórmula a $\sqrt{4{,}04}$.

Solución. Sea $s = \sqrt{4 + h}$, que es positivo en el intervalo dado. Racionalizar da $s - 2 = h/(s + 2)$. Como s está cerca de dos, la fracción sugiere $L(h) = 2 + h/4$. La diferencia exacta es

$$s - 2 - \frac{h}{4} = -\frac{h^2}{4(s + 2)^2}.$$

Se obtiene sustituyendo $s - 2 = h/(s + 2)$ en $h[1/(s + 2) - 1/4]$. Como $s \geq \sqrt{3} > 1$, el denominador supera 36, y por tanto $0 \leq L(h) - \sqrt{4 + h} \leq h^2/36$. Para $h = 0{,}04 = 1/25$, $L(h) = 2{,}01$ y el error es a lo sumo $1/22500 < 0{,}000045$. La aproximación queda por encima del valor exacto. La cota se ha obtenido mediante identidades y orden; su dependencia cuadrática de h explica la mejora al reducir la perturbación.



Propiedades de modelos radicales y error local

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Recuperación de una longitud	Un cuadrado de área $A \geq 0$ tiene lado $\sqrt{A}$; las unidades pasan de área a longitud.
Cota por racionalización	Para $u, v \geq c > 0$, $\lvert\sqrt{u} - \sqrt{v}\rvert \leq \lvert u - v\rvert/(2\sqrt{c})$.
Aproximación en torno de cuatro	Para $\lvert h\rvert \leq 1$, $L(h) = 2 + h/4$ cumple $0 \leq L(h) - \sqrt{4+h} \leq h^2/36$.
Restricción contextual	El dominio de un modelo reúne simultáneamente las condiciones algebraicas y las condiciones de las magnitudes representadas.

Pruebas. Véase «Modelos radicales y aproximación afín con error» en el apéndice.

Ejercicios para trabajar sin profesor

1. Estudia ceros, multiplicidades y signo de $(x+3)^2(x-2)$.

2. Un polinomio de grado tres tiene cero doble en -2, cero simple en 1 y valor 12 en cero. Determina su regla.

3. Resuelve $(x-1)^2(x+2)(x-3) \geq 0$.

4. Clasifica grado y ceros reales de $Q_a(x) = ax^4 - x^2$ según a.

5. Justifica las dos colas de $P(x) = -x^3 + 2x + 1$ mediante un umbral efectivo.

6. Para $P(x) = 2x^4 - 3x^2 + 1$, garantiza un error relativo a lo sumo $1/10$ respecto de $2x^4$.

7. Describe $g(x) = 1 - (2x + 2)^3$ como transformación del cubo; encuentra cero y variación.

8. Estudia dominio, ceros y exclusiones de $(x^2 - 4)/(x^2 + x - 2)$.

9. Encuentra las intersecciones de la función del ejercicio 8 con $y = x$.

10. Resuelve $(x^2 - 4)/(x^2 + x - 2) \leq 0$.

11. Clasifica la exclusión de $(x - a)/(x + 1)$ según el parámetro a.

12. Para $f(x) = 1 + 3/(x + 2)$, determina exactamente cuándo $|f(x) - 1| < 0{,}02$.

13. Encuentra las asíntotas de $(x^2 + 4)/(x + 2)$ y da una condición para error oblicuo menor que ε.

14. Estudia dominio, ceros y aproximación horizontal de $(x - 1)/(x^2 + 1)$. Justifica si cruza la horizontal.

15. Para $q(x) = -2/(x - 3)^2$, encuentra una condición que garantice $q(x) < -M$, dado $M > 0$.

16. Determina los dominios de $\sqrt{(x + 2)/(x - 1)}$ y de su recíproca.

17. Estudia dominio, recorrido, variación y cero de $r(x) = \sqrt{x + 1} - 3$.

18. Determina dominio y recorrido de $1/\sqrt[3]{x + 4}$.

19. Resuelve $\sqrt{2x + 3} = x$.

20. Resuelve $\sqrt{x + 8} - \sqrt{x} = 2$.

21. Para $f(u) = \sqrt{u}$ y $g(x) = x/(x + 1)$, calcula ambas composiciones y sus dominios.

22. El área de un cuadrado está en $[24, 26]$ metros cuadrados. Da el intervalo exacto de su lado y una cota de la diferencia respecto de cinco metros.

23. En la semicircunferencia superior de radio trece y con $x \geq 0$, exige altura al menos doce. Encuentra las abscisas admisibles.

24. Para $|h| \leq 1$, construye una aproximación afín de $\sqrt{9 + h}$ y prueba una cota cuadrática. Aplícala a $\sqrt{9{,}06}$.

Soluciones desarrolladas

Ejercicio 1. El signo del factor simple

Los ceros son -3 de multiplicidad dos y 2 de multiplicidad uno. El cuadrado es positivo salvo en -3; el signo del producto coincide con el de $x - 2$ fuera de los ceros. Es negativo en $(-\infty, -3) \cup (-3, 2)$ y positivo en $(2, \infty)$. Hay contacto con el eje en -3 y cruce en 2. El valor $P(0) = -18$ permite comprobar la región negativa entre ambos ceros.

Ejercicio 2. Determinar el factor constante

El grado y las multiplicidades dan $P(x) = a(x + 2)^2(x - 1)$. La condición $P(0) = 12$ exige $-4a = 12$, así que $a = -3$. La regla $-3(x + 2)^2(x - 1)$ verifica el dato y tiene exactamente esos ceros, pues el factor restante vale 9 en -2 y -27 en 1, ambos distintos de cero.

Ejercicio 3. Un punto aislado añadido

Fuera de 1, el cuadrado es positivo. El producto $(x+2)(x-3)$ es positivo para $x<-2$ y $x>3$, y negativo entre -2 y 3. Se incorporan los ceros $-2, 1, 3$. La solución es $(-\infty,-2]\cup\{1\}\cup[3,\infty)$. El cero doble 1 aporta un punto aislado en la región donde el resto del producto tiene signo negativo.

Ejercicio 4. Grado y multiplicidad con parámetro

La forma $x^2(ax^2-1)$ muestra un cero doble en cero para todo a, porque el segundo factor vale -1 allí. Para $a=0$ la función es $-x^2$, de grado dos. Para $a\neq 0$ tiene grado cuatro. Si $a>0$, aparecen además los ceros simples $\pm 1/\sqrt{a}$; si $a<0$, el segundo factor es negativo en toda la recta y cero es el único cero real. Cada caso mantiene las multiplicidades de los factores efectivamente presentes.

Ejercicio 5. Controlar el signo lejano

Para $x\neq 0$, $P(x)=x^3(-1+2/x^2+1/x^3)$. Si $|x|\geq 3$, el valor absoluto de la suma de las dos fracciones es a lo sumo $2/9+1/27=7/27<1/2$. El paréntesis es menor que $-1/2$. Para $x\geq 3$, $P(x)<-x^3/2$ y desciende sin cota inferior al crecer x. Para $x\leq -3$, $P(x)>-x^3/2$ y crece sin cota superior al tomar entradas cada vez más negativas. El cambio de sentido se debe al signo de x^3.

Ejercicio 6. Elegir un umbral suficiente

El error relativo es $|-3x^2+1|/(2x^4)$. Para $|x|\geq 4$, se acota por $3/(2x^2)+1/(2x^4)\leq 3/32+1/512=49/512<1/10$. Por ello $|x|\geq 4$ garantiza la precisión pedida. La desigualdad triangular permite una cota uniforme; el problema pide un umbral suficiente, por lo que esta garantía completa la tarea.

Ejercicio 7. La entrada también cambia de escala

Cada punto (u,u^3) pasa a $(u/2-1, 1-u^3)$. La regla admite todo real. El cero satisface $(2x+2)^3=1$, así que $x=-1/2$. Si x aumenta, $2x+2$ aumenta y también su cubo; restarlo de uno hace decrecer estrictamente g. La transformación de puntos permite comprobar $g(-1)=1$ y $g(0)=-7$.

Ejercicio 8. Conservar el punto cancelado

Factorizar da $(x-2)(x+2)/[(x+2)(x-1)]$, con dominio $\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$. La regla reducida es $(x-2)/(x-1)=1-1/(x-1)$. El único cero es 2. En -2 hay un punto excluido finito con altura $4/3$. En 1 hay asíntota vertical: a la izquierda $-1/(x-1)$ es positivo y crece en magnitud; a la derecha es negativo. La horizontal es $y=1$, pues la magnitud del error es $1/|x-1|$.

Ejercicio 9. Intersecciones admisibles

En $x\neq -2, 1$, $(x-2)/(x-1)=x$ equivale a $x-2=x^2-x$, es decir, $x^2-2x+2=0$. Completar el cuadrado produce $(x-1)^2+1=0$. Su miembro izquierdo es positivo para cada real; el conjunto de intersecciones reales es vacío. La conclusión procede de una cota global del polinomio y conserva las exclusiones originales.

Ejercicio 10. Signos del cociente reducido

Los factores $x-2$ y $x-1$ tienen signos opuestos exactamente en $(1,2)$. La entrada 2 se incorpora por anular el numerador y 1 queda excluida por el denominador. La solución es $(1,2]$. La otra

exclusión, -2, ya queda fuera del intervalo encontrado. Las pruebas con $x = 0$, $3/2$ y 3 corroboran los tres intervalos determinados por 1 y 2.

Ejercicio 11. El parámetro cancela el polo

En el dominio $x \neq -1$, la regla es $1-(a+1)/(x+1)$. Si $a = -1$, vale uno y tiene un punto excluido en $(-1, 1)$. Si $a \neq -1$, para $0 < |x+1| < |a+1|/(M+1)$ el término fraccionario supera $M+1$ en magnitud, y la función supera M en magnitud. La recta $x = -1$ es entonces una asíntota vertical. El cero admisible es a en este segundo caso.

Ejercicio 12. Resolver la tolerancia exacta

El error es $3/|x+2|$. Exigir que sea menor que $1/50$ equivale a $|x+2| > 150$. Se obtiene $x < -152$ o $x > 148$. Las desigualdades son estrictas porque en las dos fronteras el error vale exactamente $0{,}02$. Estos intervalos garantizan la aproximación a $y = 1$ en ambas colas.

Ejercicio 13. División con resto constante

La identidad $x^2+4 = (x+2)(x-2)+8$ da $f(x) = x-2+8/(x+2)$ en $x \neq -2$. Por tanto $y = x-2$ es asíntota oblicua y el error es menor que $\varepsilon > 0$ cuando $|x+2| > 8/\varepsilon$. En -2 el numerador vale 8, así que la exclusión produce una asíntota vertical. El resto tiene signo negativo a la izquierda y positivo a la derecha.

Ejercicio 14. Una horizontal atravesada

El dominio es $\mathbb{R}$ porque $x^2 + 1 > 0$. El único cero es 1. Para $|x| \geq 1$, $|(x-1)/(x^2+1)| \leq (|x|+1)/x^2 \leq 2/|x|$. Así, $|x| > \max(1, 2/\varepsilon)$ garantiza error menor que ε respecto de cero. La asíntota horizontal es $y = 0$ y se cruza en 1, donde cambia el signo del numerador mientras el denominador sigue positivo.

Ejercicio 15. Descenso por ambos lados

Para $M > 0$, si $0 < |x-3| < \sqrt{2/M}$, entonces $(x-3)^2 < 2/M$, de donde $2/(x-3)^2 > M$ y $q(x) < -M$. La condición vale a ambos lados. El dominio excluye 3 y el denominador positivo fija el signo negativo de la función en cada entrada admisible.

Ejercicio 16. Argumento no negativo o positivo

El cociente $(x+2)/(x-1)$ es positivo en $(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$, cero en -2 y negativo entre -2 y 1. El dominio de la raíz es $(-\infty, -2] \cup (1, \infty)$. Para la recíproca se exige raíz positiva, y el dominio queda $(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$. La entrada 1 se excluye desde la evaluación del cociente.

Ejercicio 17. Raíz creciente y desplazada

El argumento exige $x \geq -1$. La raíz recorre $[0, \infty)$ y al restar tres se obtiene $[-3, \infty)$. Si aumenta x, aumenta $x+1$ y su raíz, de modo que la función es estrictamente creciente. El cero satisface $\sqrt{x+1} = 3$, equivalente a $x+1 = 9$, así que $x = 8$. El punto $(-1, -3)$ pertenece a la gráfica y alcanza el mínimo del recorrido.

Ejercicio 18. Reconstruir cada preimagen

La raíz cúbica se evalúa para cada real y se anula cuando $x = -4$; el dominio de su recíproca es $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$. Para cualquier $y \neq 0$, resolver $1/\sqrt[3]{x+4} = y$ da $x = 1/y^3 - 4$, entrada admisible que

verifica la igualdad. El recorrido es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, pues el recíproco de un real distinto de cero tiene valor distinto de cero y se han construido todas esas salidas.

Ejercicio 19. Un candidato de signo incompatible

Se exige $x \geq -3/2$ por el argumento y $x \geq 0$ por la igualdad con una raíz. Cuadrar bajo estas condiciones da $2x + 3 = x^2$, o $(x - 3)(x + 1) = 0$. Los candidatos son 3 y -1; solo 3 satisface el signo exigido. Comprobar da $\sqrt{9} = 3$. Las equivalencias sobre $x \geq 0$ justifican que la solución es única.

Ejercicio 20. Aislar antes de cuadrar

Con $x \geq 0$, la ecuación equivale a $\sqrt{x+8} = 2 + \sqrt{x}$. Los dos miembros son no negativos; al cuadrar resulta $x + 8 = 4 + 4\sqrt{x} + x$. Entonces $\sqrt{x} = 1$, así que $x = 1$. Se verifica $3 - 1 = 2$. Cada paso conserva equivalencia en el dominio y determina el conjunto de soluciones $\{1\}$.

Ejercicio 21. Una raíz dentro y otra fuera

La composición $f(g(x)) = \sqrt{x/(x+1)}$ exige $x \neq -1$ y cociente no negativo. El análisis de signos da $(-\infty, -1) \cup [0, \infty)$. En el otro orden, $g(f(x)) = \sqrt{x}/(\sqrt{x} + 1)$ exige $x \geq 0$; entonces el denominador es al menos uno. Su dominio es $[0, \infty)$. La entrada cero produce cero en ambas, y una entrada como -2 pertenece únicamente a la primera.

Ejercicio 22. Propagar una incertidumbre de área

El lado está en $[\sqrt{24}, \sqrt{26}]$ metros. Racionalizar frente a cinco da $|\sqrt{A} - 5| = |A - 25|/(\sqrt{A} + 5) \leq 1/(\sqrt{24} + 5) < 1/9$ de metro, porque $\sqrt{24} > 4$. Los extremos exactos proceden de la monotonía de la raíz. La cota simétrica ofrece una garantía válida para todas las áreas del intervalo, incluidas sus fronteras.

Ejercicio 23. Altura en una semicircunferencia

La altura es $y(x) = \sqrt{169 - x^2}$ en $[0, 13]$. Exigir $y \geq 12$ equivale, por no negatividad, a $169 - x^2 \geq 144$, es decir, $x^2 \leq 25$. La selección $x \geq 0$ da $[0, 5]$. En los extremos, las alturas son trece y doce, respectivamente; ambas cumplen la condición y se incluyen.

Ejercicio 24. Un error que conserva su signo

Con $s = \sqrt{9 + h}$, racionalizar da $s - 3 = h/(s + 3)$. La aproximación afín es $L(h) = 3 + h/6$. Restando exactamente se obtiene $L(h) - s = h^2/[6(s + 3)^2]$. Para $|h| \leq 1$, $s \geq \sqrt{8} > 2$, de modo que $0 \leq L(h) - s \leq h^2/150$. Con $h = 0{,}06 = 3/50$, $L = 3{,}01$ y el error es a lo sumo $9/375000 = 0{,}000024$. La cota y el signo proceden de la identidad exacta, y la aproximación queda por encima de la raíz.

Diagnóstico de salida

Escoge una función factorizada, una racional y una radical. Justifica sus dominios y ceros. Explica un cambio de signo, un punto excluido y una equivalencia al cuadrar. Para una aproximación estudiada, indica el intervalo y la cota del error.

CAPÍTULO 19

Funciones exponenciales y logarítmicas

Dos cultivos empiezan con la misma cantidad de organismos. Durante cada hora, uno añade veinte organismos y el otro aumenta en un veinte por ciento. En la primera hora sus cantidades pueden coincidir. Después, el porcentaje actúa sobre una población que ha cambiado y la distancia entre ambos crece. Para describirla necesitamos conservar la operación que se repite: una suma en el primer cultivo y una multiplicación en el segundo.

Las sucesiones geométricas ya permitieron estudiar esa repetición por períodos enteros. Las funciones exponenciales extenderán la pregunta a tiempos intermedios bajo una hipótesis precisa sobre el factor de cambio. Los logaritmos resolverán la pregunta inversa: cuánto tiempo, o qué exponente, hace falta para alcanzar una cantidad. El dominio y las unidades seguirán acompañando cada operación.

Repetir un factor

Si una cantidad inicial $A_0 > 0$ se multiplica por el mismo factor $q > 0$ en cada período, después de n períodos vale $A_n = A_0 q^n$. La igualdad se obtiene aplicando la multiplicación sucesivamente. El cociente $A_{n+1}/A_n = q$ expresa la hipótesis del modelo. Si $q = 1 + r$, el número r es la tasa relativa por período: un aumento del veinte por ciento corresponde a $q = 1{,}20$, y una disminución del veinte por ciento a $q = 0{,}80$.

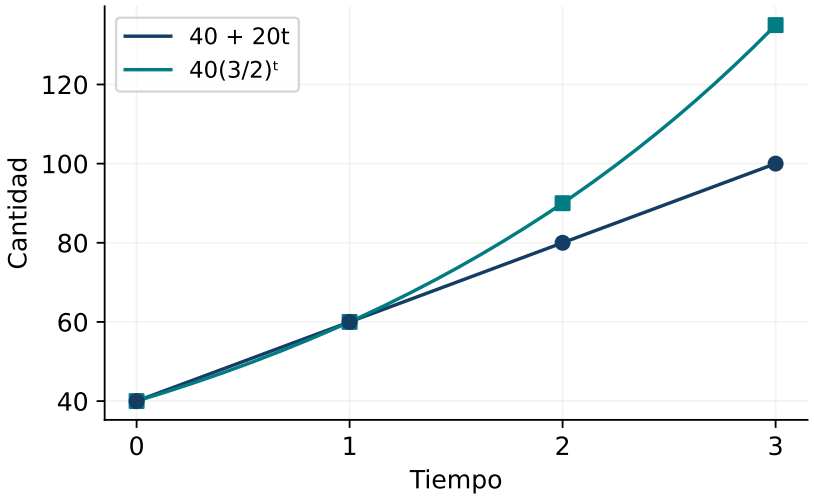
La unidad de tiempo forma parte del parámetro: un factor mensual describe lo que ocurre en un mes. Para usar otra unidad contamos cuántos periodos de referencia han transcurrido. Si cada periodo dura T unidades, la regla se escribe $A(t) = A_0 q^{t/T}$; interpretar tiempos intermedios requiere extender la misma ley multiplicativa a esas duraciones.

Podemos preparar esa extensión dividiendo un periodo en n partes iguales. El factor de cada parte debe producir q al repetirse n veces, por lo que elegimos la raíz positiva $q^{1/n}$; repetirlo m veces da $q^{m/n}$. Recuperamos así las potencias racionales estudiadas antes. Para tiempos reales, la construcción por aproximaciones racionales y completitud conserva esos valores y su orden: con base mayor que uno se toma la menor cota superior apropiada, para base entre cero y uno se usa el recíproco y para base uno se mantiene el valor constante. El apéndice desarrolla esa construcción y demuestra las leyes reales de la tabla siguiente. Su aplicación a un cultivo o a un saldo conserva, además, la hipótesis de cambio multiplicativo uniforme del modelo.

Problema 1. Una suma y un factor en los datos

Las cantidades de dos procesos, en los tiempos $0, 1, 2, 3$, son respectivamente $40, 60, 80, 100$ y $40, 60, 90, 135$. Encuentra una regla afín para el primero y una exponencial para el segundo. Explica qué suponen esas reglas.

Solución. En la primera lista las diferencias consecutivas valen veinte, de modo que $L(n) = 40 + 20n$ reproduce los cuatro datos. En la segunda, los cocientes valen $60/40 = 90/60 = 135/90 = 3/2$; la regla $E(n) = 40(3/2)^n$ los reproduce. En $n = 1$ ambas dan sesenta. En $n = 2$ el factor del segundo proceso actúa sobre sesenta y produce noventa, mientras la suma fija produce ochenta. Mantener las reglas para tiempos posteriores supone que continúen la diferencia constante y el factor constante, respectivamente. Los cuatro datos respaldan esa elección sobre las observaciones y dejan abierta su validación futura.



Problema 2. Cambiar el período de referencia

Una cantidad aumenta por un factor de 1,21 cada dos horas. Bajo una ley multiplicativa uniforme, encuentra el factor por hora y escribe el modelo desde una cantidad inicial de cincuenta unidades.

Solución. Si $q > 0$ es el factor por hora, dos horas producen $q^2 = 1{,}21 = 121/100$. La raíz positiva da $q = 11/10 = 1{,}10$. El modelo es $A(t) = 50(1{,}21)^{t/2} = 50(1{,}10)^t$, con $t \geq 0$ medido en horas. Por ejemplo, en tres horas da $50(11/10)^3 = 66{,}55$. La tasa por hora es diez por ciento. Se verifica que dos aumentos sucesivos del diez por ciento producen un aumento total del veintiuno por ciento. La elección de raíz positiva conserva el carácter de factor de una cantidad positiva.

Problema 3. Qué se decide entre dos mediciones

Un proceso duplica su cantidad en cada tiempo entero: los datos son $A(n) = 2^n$ para enteros $n \geq 0$. Compara dos propuestas para la cantidad en $t = 1/2$: unir los datos mediante segmentos o conservar el mismo factor para intervalos de igual duración.

Solución. El segmento entre $(0, 1)$ y $(1, 2)$ tiene altura $1+t$, así que en $1/2$ propone $3/2$. Con factor uniforme para cada media unidad de tiempo, un factor positivo q repetido dos veces debe producir dos: $q^2 = 2$. La altura intermedia es entonces $\sqrt{2}$. Son valores distintos, pues $(3/2)^2 = 9/4 > 2$. Ambas propuestas pueden recorrer de manera continua los datos enteros; la segunda incorpora además la ley de factores iguales para duraciones iguales. Esa hipótesis adicional selecciona la interpolación exponencial.

Para exponentes racionales ya construimos $b^{m/n}$ mediante potencias y raíces, con $b > 0$. Si $b > 1$, los valores racionales aumentan con el exponente. Para un real x definimos

$$b^x = \sup\{b^r : r \in \mathbb{Q},\ r \le x\}.$$

El conjunto tiene elementos y está acotado superiormente por una potencia de exponente entero mayor que x. La completitud de los reales proporciona el supremo. Si $0 < b < 1$, definimos $b^x = (1/b)^{-x}$; para $b = 1$ fijamos $1^x = 1$. Esta construcción conserva las potencias racionales y la ley $b^{x+y} = b^x b^y$. El apéndice justifica esas propiedades, la continuidad y el recorrido positivo. La función exponencial de base $b > 0$ tiene regla $x \mapsto b^x$ y dominio real.

Problema 4. Una transformación del decaimiento

Estudia dominio, recorrido y variación de $f(x) = 3 - 2(1/2)^{x-1}$. Calcula $f(1)$ e interpreta la recta $y = 3$.

Solución. La potencia está definida y es positiva para todo real, de modo que el dominio es $\mathbb{R}$. Al aumentar x, la potencia de base $1/2$ disminuye; multiplicarla por -2 invierte el orden. Así, f es estrictamente creciente. Como la potencia recorre todos los reales positivos, f recorre $(-\infty, 3)$. En $x = 1$ vale $3-2 = 1$. Hacia entradas positivas grandes, $(1/2)^{x-1}$ puede hacerse arbitrariamente pequeño; por eso $y = 3$ es una asíntota horizontal y las alturas se acercan a ella por debajo. El valor tres es la cota superior del recorrido.

Propiedades de factores y potencias reales

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Factor por período	$A_n = A_0 q^n$ para $A_0, q > 0$ y períodos enteros $n \ge 0$.
Tasa relativa	$q = 1 + r > 0$; aumento si $r > 0$, decaimiento positivo si $-1 < r < 0$.
Potencia de una suma	Para $b > 0$ y $u, v \in \mathbb{R}$, $b^{u+v} = b^u b^v$ y $b^0 = 1$.
Recíproco y cociente	$b^{-u} = 1/b^u$ y $b^{u-v} = b^u/b^v$, para $b > 0$.
Potencia de potencia	$(b^u)^v = b^{uv}$ para $b > 0$ y u, v reales.
Orden y recorrido	Si $b > 1$, b^x crece estrictamente; si $0 < b < 1$, decrece estrictamente. En ambos casos recorre $(0, \infty)$.

Pruebas. Véase «Construcción de las potencias reales» en el apéndice.

Recuperar el exponente

Si una población inicial de cien se duplica en cada período, alcanzar ochocientos exige resolver $2^t = 8$. El exponente buscado es tres. Para alcanzar trescientos necesitamos el exponente que produce tres a partir de dos. La función exponencial, estrictamente monótona y con recorrido positivo, garantiza que ese exponente existe y es único.

Para una base $b > 0$, $b \neq 1$, y un argumento $y > 0$, el logaritmo $\log_b y$ es el único real x tal que $b^x = y$. En particular,

$$\log_b y = x \quad \Longleftrightarrow \quad b^x = y.$$

La base indica qué familia de potencias utilizamos. El argumento es la cantidad positiva cuyo exponente buscamos. Para base diez escribiremos también $\log y$. Otra base de uso frecuente es el número e, que se obtiene como límite de las sumas

$$1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdots n}.$$

Estas sumas crecen y están acotadas; el apéndice demuestra su convergencia y da una cota del resto. Su límite satisface $2<e<3$ y se aproxima por 2,71828 con error menor que 0,000005. La **exponencial natural** tiene regla $x\mapsto e^x$ y su inversa es el **logaritmo natural**, escrito $\ln y=\log_e y$ para $y>0$. Las leyes demostradas para cualquier base válida se aplican a esta base. Esta notación permitirá escribir las cadenas exponenciales de los capítulos siguientes.

En las aproximaciones con calculadora mantendremos expresiones exactas y una precisión declarada.

Problema 5. Leer cuatro logaritmos exactos

Calcula $\log_4 8$, $\log_{1/2} 8$, $\log_5 1$ y $\log_{1/3}(1/9)$.

Solución. Como $4^{3/2}=(\sqrt{4})^3=8$, se tiene $\log_4 8=3/2$. La igualdad $(1/2)^{-3}=8$ da $\log_{1/2}8=-3$. Para cualquier base válida, $b^0=1$, así que $\log_5 1=0$. Finalmente, $(1/3)^2=1/9$ da $\log_{1/3}(1/9)=2$. El signo del logaritmo depende de la posición del argumento respecto de uno y del sentido de variación de la base elegida.

Problema 6. Dos restricciones en una misma regla

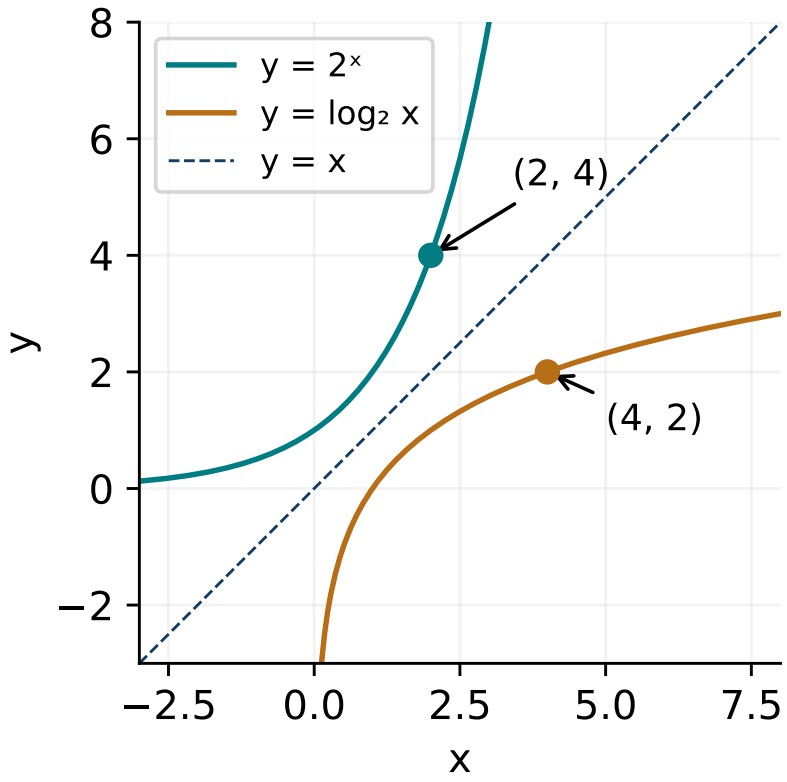
Encuentra los dominios de $f(x)=\log_3(5-2x)$ y $g(x)=1/\log_3(x-1)$.

Solución. Para f se exige $5-2x>0$, equivalente a $x<5/2$. Su dominio es $(-\infty,5/2)$. Para g, primero se exige $x-1>0$, es decir, $x>1$. Además, el denominador debe tener valor distinto de cero. La igualdad $\log_3(x-1)=0$ equivale a $x-1=3^0=1$, por lo que se excluye $x=2$. El dominio es $(1,2)\cup(2,\infty)$. La primera condición permite evaluar el logaritmo; la segunda permite tomar su recíproco.

Problema 7. Una gráfica inversa y desplazada

Describe dominio, recorrido, variación y cero de $h(x)=\log_2(x-1)+3$. Relaciona sus puntos con los de $y=2^t$.

Solución. Se exige $x>1$. El logaritmo de base dos es estrictamente creciente y recorre $\mathbb{R}$, así que h conserva esas dos propiedades sobre su dominio. Si $(t,2^t)$ pertenece a la exponencial, intercambiar coordenadas da $(2^t,t)$ en el logaritmo. Después de desplazar una unidad la entrada y tres la altura obtenemos $(1+2^t,t+3)$ en h. El cero cumple $\log_2(x-1)=-3$, de donde $x=1+2^{-3}=9/8$. Al acercarse x a 1 por la derecha, el argumento positivo se aproxima a cero y el logaritmo desciende por debajo de cualquier cota; la recta $x=1$ es asíntota vertical.



Problema 8. Encontrar la base

Encuentra todas las bases válidas a que cumplen $\log_a 9 = 2$. Explica también las soluciones de $1^x = 1$.

Solución. La condición logarítmica equivale a $a^2 = 9$ con $a > 0$ y $a \neq 1$. La raíz positiva da $a = 3$, que verifica $3^2 = 9$. La ecuación $1^x = 1$, por su parte, se cumple para cada real x porque la potencia de base uno es constante. La definición de logaritmo requiere una potencia que determine un único exponente para cada salida positiva; las bases positivas distintas de uno proporcionan precisamente esa correspondencia inversa.

Propiedades del logaritmo como inversa

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Definición	$\log_b y = x$ equivale a $b^x = y$, para $b > 0$, $b \neq 1$, $y > 0$.
Base natural	e es el límite de las sumas indicadas; $\ln y = \log_e y$ para $y > 0$, y $e^{\ln y} = y$.
Valores básicos	$\log_b 1 = 0$ y $\log_b b = 1$, para una base válida.
Composiciones inversas	$\log_b(b^x) = x$ para $x \in \mathbb{R}$; $b^{\log_b y} = y$ para $y > 0$.
Dominio y recorrido	$\log_b : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ es una biyección.
Intercambio de coordenadas	(x, b^x) corresponde a (b^x, x) en la gráfica inversa.

Pruebas. Véase «Logaritmos, inversión y gráficas» en el apéndice.

Traducir productos a sumas

Si $u = b^p$ y $v = b^q$, entonces $uv = b^{p+q}$. Recuperar el exponente de ese producto da $\log_b(uv) = p + q = \log_b u + \log_b v$. La propiedad nace de la ley de las potencias y conserva las condiciones $u, v > 0$. Un cociente produce una diferencia de exponentes y una potencia produce un producto de exponentes.

Estas leyes permiten reorganizar cálculos y controlar su dominio. Cada logaritmo de una expresión tiene su propio argumento positivo. En particular, al expandir el logaritmo de un cuadrado conviene recordar que $\sqrt{z^2} = |z|$: para $z \neq 0$, $\log_b(z^2) = 2\log_b|z|$. El valor absoluto conserva ambos signos posibles de z en el dominio original.

Problema 9. Reunir un cálculo exacto

Calcula $\log_2 12 + \log_2 8 - \log_2 3$.

Solución. Los tres argumentos son positivos y comparten una base válida. Las leyes permiten reunirlos como $\log_2(12 \cdot 8/3) = \log_2 32 = 5$. El resultado puede comprobarse sin aproximar los logaritmos intermedios: $12 \cdot 8/3 = 32 = 2^5$.

Problema 10. Expandir conservando el dominio

Determina el dominio de $F(x) = \log_3((x-2)^2)$ y escribe una expansión válida en todo ese dominio.

Solución. El cuadrado debe ser positivo, lo que equivale a $x \neq 2$. Para esas entradas, $(x-2)^2 = |x-2|^2$ y $|x-2| > 0$. Por tanto $F(x) = 2\log_3|x-2|$ en $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Por ejemplo, en $x = 1$ la regla original vale $\log_3 1 = 0$ y la expandida da $2\log_3 1 = 0$. La expresión $2\log_3(x-2)$ corresponde solamente a la parte $x > 2$ del dominio; el valor absoluto permite mantener la expansión completa.

Problema 11. Cambiar de base sin cambiar el número

Expresa $\log_4 7$ usando logaritmos de base dos y demuestra la igualdad obtenida.

Solución. Sea $t = \log_4 7$. Entonces $4^t = 7$, y como $4 = 2^2$, resulta $2^{2t} = 7$. Al tomar el logaritmo de base dos obtenemos $2t = \log_2 7$. Así, $\log_4 7 = (\log_2 7)/2$. En general, para bases válidas b, c y $y > 0$, escribir $y = b^{\log_b y}$ y tomar logaritmos de base c da

$$\log_b y = \frac{\log_c y}{\log_c b}.$$

El denominador tiene valor distinto de cero porque $b \neq 1$. Esta fórmula permite evaluar una base elegida mediante la base disponible en una calculadora.

Problema 12. Examinar una suma de argumentos

Compara $\log_2(1+3)$ con $\log_2 1 + \log_2 3$ y explica qué operación corresponde a la suma de logaritmos.

Solución. La primera expresión es $\log_2 4 = 2$. La segunda es $0 + \log_2 3 = \log_2 3 < 2$, porque $3 < 4$ y el logaritmo de base dos crece. La suma de logaritmos corresponde al producto de argumentos: $\log_2 1 + \log_2 3 = \log_2(1 \cdot 3)$. El ejemplo localiza la operación que la ley permite reunir y muestra por cálculo exacto la diferencia entre ambas expresiones.

Propiedades algebraicas de los logaritmos

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Producto	$\log_b(uv) = \log_b u + \log_b v$, con $u, v > 0$ y base válida.
Cociente	$\log_b(u/v) = \log_b u - \log_b v$, con $u, v > 0$ y base válida.
Potencia	$\log_b(u^r) = r \log_b u$, con $u > 0$, $r \in \mathbb{R}$ y base válida.
Cuadrado	$\log_b(z^2) = 2 \log_b \lvert z \rvert$, con $z \neq 0$ y base válida.
Cambio de base	$\log_b y = \log_c y / \log_c b$, con $y > 0$ y bases válidas b, c.

Pruebas. Véase «Leyes logarítmicas y conservación del dominio» en el apéndice.

Resolver una igualdad de exponentes o de cantidades

Una exponencial de base válida es inyectiva. La igualdad $b^{U(x)} = b^{V(x)}$ equivale, en el dominio de las expresiones, a $U(x) = V(x)$. Cuando las bases son potencias de una misma base, reescribirlas hace visible esa comparación. En otras ecuaciones conviene introducir una nueva variable positiva, como $u = 2^x$, y resolver primero en ella.

Con logaritmos, el primer paso consiste en reunir las condiciones de positividad de todos los argumentos. Las leyes se aplican dentro de ese dominio. Si la ecuación transformada admite varias raíces algebraicas, cada una debe examinarse en las condiciones originales. La sustitución final confirma que la cantidad y la operación descritas coinciden.

Problema 13. Dos bases comparables

Resuelve $9^{x-1} = 27^{x+1}$.

Solución. Ambas potencias se evalúan para todo real. Escribir $9 = 3^2$ y $27 = 3^3$ convierte la ecuación en $3^{2x-2} = 3^{3x+3}$. La inyectividad de base tres permite igualar exponentes: $2x-2 = 3x+3$, de donde $x = -5$. Los dos exponentes resultan -12, por lo que ambas expresiones valen 3^{-12}. Las equivalencias justifican la unicidad.

Problema 14. Una cuadrática en una potencia positiva

Resuelve $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$.

Solución. La identidad $4^x = (2^x)^2$ sugiere $u = 2^x > 0$. La ecuación pasa a $u^2 - 5u + 4 = (u-1)(u-4) = 0$. Ambos candidatos son positivos: $u = 1$ y $u = 4$. Recuperar los exponentes da $x = 0$ y $x = 2$. Sustituir produce $1 - 5 + 4 = 0$ y $16 - 20 + 4 = 0$. Cada valor positivo de u corresponde a un único x, así que estas son todas las soluciones.

Problema 15. Alcanzar un umbral por períodos completos

Una cantidad inicial de cien aumenta un ocho por ciento al final de cada período. ¿Cuál es el primer período completo en que supera doscientos? Expresa también el instante de igualdad en la interpolación exponencial.

Solución. Después de n períodos la cantidad es $100(27/25)^n$. Superar doscientos equivale a $(27/25)^n > 2$. Como la base es mayor que uno, equivale a $n > \log_{27/25} 2$. En la interpolación,

la igualdad se alcanza en $t = \log_{27/25} 2$, aproximadamente 9,0065 períodos. Para decidir el entero basta el control exacto $27^9 < 2 \cdot 25^9$ y $27^{10} > 2 \cdot 25^{10}$. La primera cantidad superior al umbral corresponde al período diez. La expresión logarítmica describe el instante interpolado; las comparaciones enteras certifican la decisión discreta.

Problema 16. Dos logaritmos y un candidato descartado

Resuelve $\log_2(x-1) + \log_2(x-3) = 3$.

Solución. Las dos condiciones de argumento dan $x > 3$. En ese dominio, la ecuación equivale a $\log_2((x-1)(x-3)) = 3$, y por inversión a $(x-1)(x-3) = 8$. Se obtiene $x^2 - 4x - 5 = (x-5)(x+1) = 0$. De los candidatos 5 y -1, solo 5 pertenece al dominio. La comprobación da $\log_2 4 + \log_2 2 = 2 + 1 = 3$. La raíz -1 hace negativos ambos argumentos originales, por lo que queda descartada antes de evaluar logaritmos reales.

Problema 17. Igualar argumentos dentro del dominio

Resuelve $\log_3(x+2) = \log_3(2x-1)$.

Solución. Se exige $x + 2 > 0$ y $2x - 1 > 0$, cuya intersección es $x > 1/2$. La inyectividad del logaritmo permite escribir $x + 2 = 2x - 1$ y obtener $x = 3$. Pertenece al dominio y produce argumento cinco en ambos miembros. Las dos funciones toman el mismo valor exactamente en esa entrada.

Propiedades para resolver ecuaciones

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Igual base exponencial	$b^U = b^V$ equivale a $U = V$, para base válida y exponentes reales definidos.
Igual base logarítmica	$\log_b U = \log_b V$ equivale a $U = V$, dentro de $U, V > 0$.
Incógnita exponencial	La sustitución $u = b^x$ recorre exactamente $u > 0$ para base válida.
Recuperación de la entrada	$A_0 q^{t/T} = K$ da $t = T \log_q(K/A_0)$, con $A_0, K, T > 0$ y $q > 0$, $q \neq 1$.

Pruebas. Véase «Ecuaciones exponenciales y logarítmicas» en el apéndice.

El sentido del orden también depende de la base

La función logarítmica hereda la monotonía de su exponencial inversa. Para base mayor que uno, una cantidad mayor tiene logaritmo mayor. Para base entre cero y uno, una cantidad mayor requiere un exponente menor. Al resolver una desigualdad conservaremos tanto la condición positiva del argumento como ese sentido del orden.

Problema 18. Una base decreciente

Resuelve $\log_{1/2}(x-1) \geq -2$.

Solución. El dominio exige $x > 1$. Como la base $1/2$ produce una función decreciente, el logaritmo es al menos -2 exactamente cuando el argumento es a lo sumo $(1/2)^{-2} = 4$. Se obtiene $0 < x-1 \leq 4$ y, por tanto, $x \in (1, 5]$. En el extremo cinco el logaritmo vale -2 y se incluye; uno queda excluido por la positividad del argumento.

Problema 19. La base como parámetro

Para una base válida a, resuelve $\log_a(x+1) > \log_a(3-x)$ y distingue los casos posibles de a.

Solución. Las condiciones de argumento se reúnen en $-1 < x < 3$. Si $a > 1$, el orden de los logaritmos coincide con el de los argumentos: $x+1 > 3-x$ equivale a $x > 1$. La solución es $(1, 3)$. Si $0 < a < 1$, el logaritmo invierte el orden y se exige $x+1 < 3-x$, equivalente a $x < 1$. La solución es $(-1, 1)$. En $x = 1$ los argumentos coinciden y la desigualdad estricta queda fuera. La clasificación cubre las dos familias de bases válidas.

Propiedades de monotonía y desigualdades

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Base creciente	Para $b > 1$, $b^u < b^v$ equivale a $u < v$; $\log_b u < \log_b v$ equivale a $u < v$ cuando $u, v > 0$.
Base decreciente	Para $0 < b < 1$, $b^u < b^v$ equivale a $u > v$; $\log_b u < \log_b v$ equivale a $u > v$ cuando $u, v > 0$.
Umbral logarítmico	Para $U > 0$, $\log_b U \leq c$ equivale a $U \leq b^c$ si $b > 1$, y a $U \geq b^c$ si $0 < b < 1$.

Pruebas. Véase «Orden exponencial y logarítmico» en el apéndice.

Modelar una escala de tiempo o de intensidad

Para reconocer un modelo exponencial conviene identificar qué magnitud se mide, qué unidad de tiempo se usa y por qué un factor constante resulta razonable. El factor puede estimarse desde dos mediciones positivas, pero la concordancia entre esos dos datos solo fija los parámetros del modelo elegido. Una tercera medición permite examinar su capacidad descriptiva. Las predicciones requieren además que las condiciones del proceso sigan sosteniendo el factor.

En otras situaciones se compara una cantidad con una referencia positiva y se toma el logaritmo de su razón. Así se obtiene una escala en la que factores iguales producen diferencias iguales. La razón es un número puro: sus unidades se cancelan porque cantidad y referencia se miden en la misma unidad.

Problema 20. Recuperar un modelo de decaimiento

Una cantidad vale doscientas unidades en $t = 0$ y cincuenta unidades en $t = 3$ horas. Bajo un modelo exponencial positivo, determina su regla y el tiempo de reducción a la mitad.

Solución. Escribimos $A(t) = 200q^t$ con $q > 0$ por hora. El segundo dato da $200q^3 = 50$, de modo que $q^3 = 1/4$ y $q = (1/4)^{1/3}$. La regla se puede escribir $A(t) = 200(1/4)^{t/3}$ para $t \geq 0$. Reducirse a cien exige $(1/4)^{t/3} = 1/2$. Como $1/4 = (1/2)^2$, la inyectividad da $2t/3 = 1$ y $t = 3/2$ horas. Se comprueba que en tres horas han transcurrido dos tiempos de semirreducción: $200 \cdot (1/2)^2 = 50$.

Problema 21. Contrastar una regla con un dato adicional

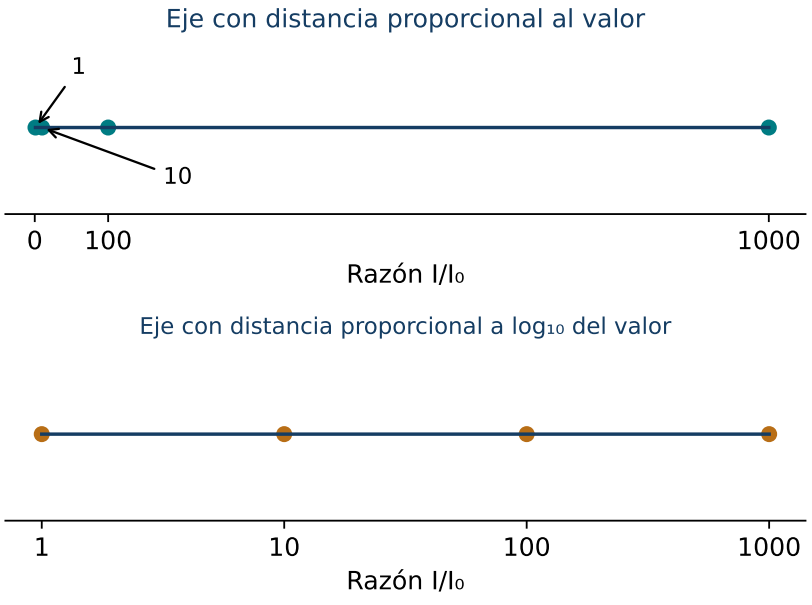
Tres observaciones en los tiempos $0, 1, 2$ son cien, ciento veinte y ciento cuarenta. Compara una regla afín y una exponencial ajustadas a las dos primeras observaciones.

Solución. La regla afín es $L(t) = 100+20t$ y la exponencial es $E(t) = 100(6/5)^t$. Ambas producen cien y ciento veinte en los dos primeros tiempos. En el tercero, $L(2) = 140$ y $E(2) = 144$. El residuo del modelo exponencial, observado menos predicho, es $140 - 144 = -4$ unidades. Las diferencias de las observaciones son constantes, mientras sus cocientes son $6/5$ y $7/6$, distintos. El modelo afín reproduce los tres datos exactamente. Su uso posterior exige que la tendencia aditiva continúe; la concordancia observada tiene ese alcance temporal concreto.

Problema 22. Una escala construida desde una razón

Se define un nivel $L = 10\log_{10}(I/I_0)$, donde $I, I_0 > 0$ se miden en la misma unidad. Calcula el nivel para $I = 1000I_0$ y el cambio que produce multiplicar cualquier intensidad por diez. ¿Qué razón corresponde a un aumento de veinte unidades de nivel?

Solución. Para la primera intensidad, $I/I_0 = 1000 = 10^3$, así que $L = 30$. Al multiplicar una intensidad por diez, el nuevo nivel es $10\log_{10}(10I/I_0) = 10 + L$, un aumento de diez unidades. Para un aumento de veinte se exige $10\log_{10}(I_2/I_1) = 20$, equivalente a $I_2/I_1 = 10^2 = 100$. La razón positiva permite aplicar las leyes y la cancelación de unidades justifica el argumento del logaritmo. La fórmula se estudia con una referencia fija y cantidades positivas.



Propiedades de modelos y escalas

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Factor desde dos datos	Si $A(t) = Cq^t$, $C, q > 0$ y $t_2 > t_1$, entonces $q = [A(t_2)/A(t_1)]^{1/(t_2-t_1)}$.
Tiempo de duplicación	$T_2 = T \log_q 2$ para $A(t) = A_0 q^{t/T}$, con $A_0, T > 0$ y $q > 1$.
Tiempo de semirreducción	$T_{1/2} = T \log_q(1/2) > 0$, con $A_0, T > 0$ y $0 < q < 1$.
Diferencia de niveles	Si $L(I) = k \log_b(I/I_0)$, entonces $L(I_2) - L(I_1) = k \log_b(I_2/I_1)$, con $I_0, I_1, I_2 > 0$ y base válida.

Pruebas. Véase «Modelos multiplicativos y escalas logarítmicas» en el apéndice.

Justificar una aproximación y un cambio pequeño

Un logaritmo exacto puede quedar entre dos exponentes racionales. Para acotar $\log_2 3$ basta comparar potencias de dos con tres. Cuando los exponentes tienen el mismo denominador, elevar a una potencia entera positiva transforma la comparación en una desigualdad entre enteros, que podemos verificar exactamente. Ese control proporciona un intervalo certificado para la respuesta.

También podemos precisar la continuidad de la exponencial sin recurrir a derivadas. Cerca de una entrada x, la identidad

$$b^{x+h} - b^x = b^x(b^h - 1)$$

separa la escala inicial del cambio relativo. Para base dos y un entero $n \geq 2$, la desigualdad de Bernoulli da $(1 + 1/n)^n > 2$, por lo que $2^{1/n} < 1 + 1/n$. Si $|h| \leq 1/n$, la monotonía y el recíproco permiten acotar $|2^h - 1| < 1/n$. Así, escoger una entrada suficientemente próxima produce una salida tan próxima como se desee. La construcción de las potencias reales y la cota general para cualquier base se justifican en el apéndice.

Problema 23. Acotar un logaritmo con enteros

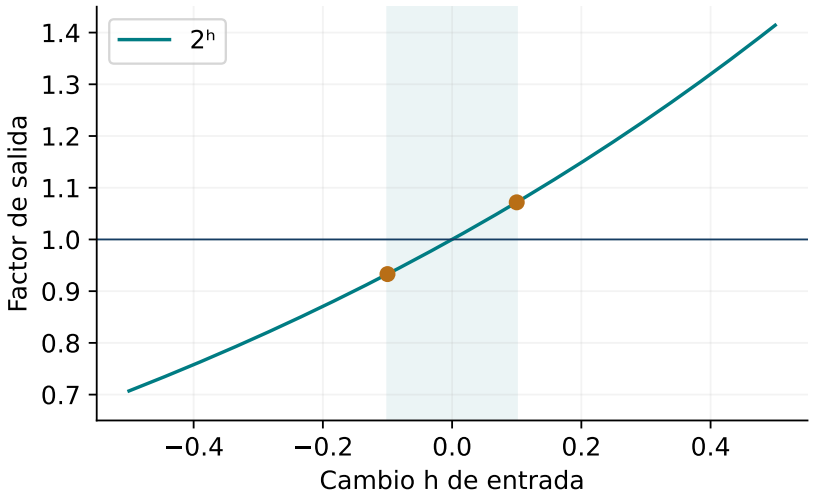
Prueba $1{,}58 < \log_2 3 < 1{,}59$ mediante una comparación exacta e indica el error de usar $1{,}585$.

Solución. Por el orden de las potencias, la desigualdad pedida equivale a $2^{158/100} < 3 < 2^{159/100}$. Elevar los tres términos a la potencia cien conserva el orden positivo y deja la comparación entera $2^{158} < 3^{100} < 2^{159}$. Esta comparación puede comprobarse por multiplicación entera exacta; el registro computacional la verifica sin redondear. Tomar logaritmos de base dos y dividir por cien produce las cotas indicadas. El punto medio $1{,}585$ queda a distancia menor que $0{,}005$ de cualquier número del intervalo, en particular del logaritmo. La aproximación se entrega junto a una garantía de error absoluto.

Problema 24. Una tolerancia para la salida exponencial

Encuentra una condición sencilla sobre h que garantice $|2^{3+h} - 8| < 0{,}01$. Justifícala mediante la cota anterior.

Solución. La identidad de potencias da $|2^{3+h} - 8| = 8|2^h - 1|$. Si $|h| \le 1/800$, la cota con $n = 800$ proporciona $|2^h - 1| < 1/800$. Por ello el error es menor que $8/800 = 0{,}01$. Para $h < 0$, la misma cota se mantiene: si $u = 2^{|h|} \ge 1$, entonces $|2^h - 1| = 1 - 1/u = (u-1)/u \le u - 1$. La condición controla las dos direcciones del cambio y convierte la continuidad en una tolerancia explícita.



Propiedades de continuidad y control de aproximaciones

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Cambio relativo	$b^{x+h}/b^x = b^h$, para $b > 0$ y x, h reales.
Cota local en base dos	Si $n \ge 2$ es entero y $\|h\| \le 1/n$, entonces $\|2^h - 1\| < 1/n$.
Intervalo para un logaritmo	Para $b > 1$, $b^r < y < b^s$ equivale a $r < \log_b y < s$, con $y > 0$.
Continuidad exponencial	Para cada x real y $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|h\| < \delta$ implica $\|b^{x+h} - b^x\| < \varepsilon$, para $b > 0$.

Pruebas. Véase «Continuidad y aproximación exponencial» en el apéndice.

Ejercicios para trabajar sin profesor

1. En los tiempos cero, uno, dos y tres, una serie registra 30, 40, 50 y 60; otra registra 30, 45, 67,5 y 101,25. Propón una regla afín y una exponencial y declara sus supuestos.

2. Una cantidad inicial de ochenta disminuye por un factor de 0,81 cada dos horas. Encuentra su factor horario bajo una ley multiplicativa uniforme y calcula la cantidad a las tres horas.

3. Los datos enteros son $A(n) = 3^n$. Compara las alturas en $t = 1/2$ de la interpolación lineal por tramos y de la exponencial uniforme.

4. Estudia dominio, recorrido, variación y asíntota horizontal de $g(x) = -1 + 4 \cdot 3^{-x}$.

5. Calcula $\log_9 27$, $\log_{1/3} 27$, $\log_7 1$ y $\log_{1/2}(1/16)$.

6. Determina los dominios de $\log_2(7-3x)$ y $1/\log_2(x+2)$.

7. Estudia dominio, recorrido, variación y cero de $h(x)=\log_3(x+2)-2$.

8. Encuentra la base válida a que cumple $\log_a 16=-2$.

9. Calcula $\log_3 18+\log_3 9-\log_3 2$.

10. Expande $\log_5((x+1)^2)$ conservando todo su dominio.

11. Expresa $\log_8 5$ mediante logaritmos de base dos y demuestra la igualdad.

12. Compara $\log_3(1+8)$ con $\log_3 1+\log_3 8$ y explica la operación de la ley del producto.

13. Resuelve $4^{x+1}=8^{x-1}$.

14. Resuelve $9^x-10\cdot 3^x+9=0$.

15. Una cantidad inicial de cincuenta aumenta un diez por ciento por período. Encuentra el primer período entero en que supera cien y expresa el instante interpolado de igualdad.

16. Resuelve $\log_3(x-1)+\log_3(x-3)=1$.

17. Resuelve $\log_2(x+4)=\log_2(3x)$.

18. Resuelve $\log_{1/3}(x+2)\le -1$.

19. Para base válida a, resuelve $\log_a(2x-1)<\log_a(5-x)$ distinguiendo las dos familias de bases.

20. Una cantidad pasa de ochenta a diez unidades en seis horas. Ajusta un modelo exponencial positivo y calcula su tiempo de semirreducción.

21. Compara una regla afín y una exponencial ajustadas a los dos primeros datos de $50, 75, 112{,}5$, observados en $t=0,1,2$. Usa el tercero para examinarlas.

22. En la escala $L=10\log_{10}(I/I_0)$, calcula el nivel para $I=100I_0$ y la razón I_2/I_1 que corresponde a un aumento de treinta unidades de nivel.

23. Prueba $2{,}32<\log_2 5<2{,}33$ mediante enteros y acota el error de usar $2{,}325$.

24. Usa Bernoulli para probar $|3^h-1|<2/n$ cuando $n\ge 2$ es entero y $|h|\le 1/n$. Da una condición que garantice $|3^{2+h}-9|<0{,}001$.

Soluciones desarrolladas

Ejercicio 1. Examinar diferencias y cocientes

Las diferencias de la primera lista valen diez; su regla afín es $L(n)=30+10n$. Los cocientes de la segunda valen $3/2$; la regla exponencial es $E(n)=30(3/2)^n$. Para $n=3$ produce $30\cdot 27/8=101{,}25$, en acuerdo con el dato. La prolongación de cada regla supone que se mantengan su diferencia o su factor por período. Los valores observados permiten formular esos modelos y localizar el intervalo de comprobación.

Ejercicio 2. Una raíz positiva para el factor

El factor horario $q>0$ cumple $q^2=81/100$, así que $q=9/10$. La cantidad es $A(t)=80(9/10)^t$ para $t\ge 0$ en horas. A las tres horas vale $80\cdot 729/1000=58{,}32$ unidades. El factor horario corresponde a un decaimiento del diez por ciento; dos períodos dan $0{,}9^2=0{,}81$, y por tanto una reducción total del diecinueve por ciento.

Ejercicio 3. Dos interpolaciones continuas

El segmento entre $(0,1)$ y $(1,3)$ tiene altura $1+2t$, que en $t=1/2$ vale dos. La ley multiplicativa uniforme exige un factor positivo q con $q^2=3$, así que propone $\sqrt{3}$. Como $2^2=4>3$, los valores son distintos. Las dos reglas pasan por los datos enteros; la elección exponencial añade la constancia del factor para duraciones iguales, incluidas las medias unidades.

Ejercicio 4. Decaimiento con desplazamiento

El dominio de $g(x)=-1+4\cdot 3^{-x}$ es $\mathbb{R}$. La potencia positiva recorre $(0,\infty)$ y decrece estrictamente; multiplicar por cuatro y restar uno da recorrido $(-1,\infty)$ y conserva el decrecimiento. En cero vale tres. Hacia x positivo grande, el error respecto de -1 es $4\cdot 3^{-x}$, que se hace arbitrariamente pequeño. La recta $y=-1$ es asíntota horizontal y las alturas se aproximan por encima.

Ejercicio 5. Volver a las potencias

Las igualdades $9^{3/2}=27$, $(1/3)^{-3}=27$, $7^0=1$ y $(1/2)^4=1/16$ dan, en ese orden, $3/2$, -3, cero y cuatro. Cada argumento es positivo y cada base es válida. La definición permite obtener los cuatro valores de manera exacta.

Ejercicio 6. Positividad y recíproco

La primera regla exige $7-3x>0$, así que su dominio es $(-\infty,7/3)$. En la segunda se exige $x+2>0$ y $\log_2(x+2)\neq 0$. La primera condición da $x>-2$; la segunda excluye $x+2=1$, es decir, $x=-1$. El dominio es $(-2,-1)\cup(-1,\infty)$.

Ejercicio 7. Trasladar una función inversa

La condición es $x+2>0$, por lo que el dominio es $(-2,\infty)$. El recorrido es $\mathbb{R}$ y la función crece estrictamente porque la base tres es mayor que uno. El cero cumple $\log_3(x+2)=2$, equivalente a $x+2=9$, de donde $x=7$. A cada punto $(t,3^t)$ le corresponde $(3^t-2,t-2)$ en la gráfica pedida; por ejemplo, $t=2$ produce $(7,0)$.

Ejercicio 8. Un exponente negativo fija la base

La ecuación equivale a $a^{-2}=16$ con $a>0$ y $a\neq 1$. Multiplicar por a^2 da $a^2=1/16$. La base positiva es $a=1/4$. Se comprueba $(1/4)^{-2}=16$, por lo que cumple la definición y es la única base válida que resulta de la ecuación cuadrática.

Ejercicio 9. Un argumento que es potencia exacta

Con argumentos positivos y base común tres, la expresión se reúne como $\log_3(18\cdot 9/2)=\log_3 81$. Como $81=3^4$, el valor es cuatro. El cálculo conserva las leyes en su dominio y evita introducir aproximaciones de los sumandos.

Ejercicio 10. El valor absoluto conserva las dos ramas

El argumento $(x+1)^2$ es positivo exactamente para $x\neq -1$. En ese dominio, la identidad $(x+1)^2=|x+1|^2$ permite escribir $\log_5((x+1)^2)=2\log_5|x+1|$. La expansión se evalúa tanto para $x<-1$ como para $x>-1$. En $x=-2$, ambas reglas dan cero, lo que comprueba una entrada de la primera rama.

Ejercicio 11. Cambiar a una base común

Sea $t = \log_8 5$. La igualdad $8^t = 5$ se escribe $2^{3t} = 5$. Aplicar el logaritmo de base dos da $3t = \log_2 5$, de donde $\log_8 5 = (\log_2 5)/3$. El divisor tres es $\log_2 8$, positivo y distinto de cero. La demostración usa la ley de potencia y la inversión sobre cantidades positivas.

Ejercicio 12. Una suma de argumentos distinta del producto

La primera expresión vale $\log_3 9 = 2$. La segunda es $0 + \log_3 8 = \log_3 8 < 2$, pues $8 < 9$ y la base tres es creciente. La ley reúne el producto: $\log_3 1 + \log_3 8 = \log_3(1 \cdot 8)$. El cálculo conserva explícitas las operaciones y muestra por qué los dos resultados difieren.

Ejercicio 13. Exponentes comparables

Reescribir las bases da $2^{2x+2} = 2^{3x-3}$. La inyectividad equivale a $2x + 2 = 3x - 3$, así que $x = 5$. Al sustituir, ambos exponentes valen doce y los miembros iniciales son 2^{12}. Todas las entradas reales permiten evaluar las potencias; la ecuación lineal determina la única solución.

Ejercicio 14. Dos valores positivos de la sustitución

Sea $u = 3^x > 0$. La ecuación es $u^2 - 10u + 9 = (u - 1)(u - 9) = 0$. Sus raíces positivas son uno y nueve; al recuperar los exponentes obtenemos $x = 0$ y $x = 2$. Las comprobaciones dan $1 - 10 + 9 = 0$ y $81 - 90 + 9 = 0$. La biyección entre exponentes reales y potencias positivas justifica que son todas las soluciones.

Ejercicio 15. Comparar antes de redondear el tiempo

Se requiere $50(11/10)^n > 100$, equivalente a $n > \log_{11/10} 2$. El instante interpolado de igualdad es $t = \log_{11/10} 2$, aproximadamente 7,2725. Para decidir el primer período completo, las comparaciones exactas $11^7 < 2 \cdot 10^7$ y $11^8 > 2 \cdot 10^8$ muestran que siete queda por debajo y ocho por encima. La respuesta discreta es el período ocho.

Ejercicio 16. Filtrar con los argumentos originales

El dominio de la ecuación exige $x > 3$. Allí, reunir los logaritmos y usar la inversa da $(x-1)(x-3) = 3$. Desarrollar produce $x^2 - 4x = x(x-4) = 0$. Los candidatos son cero y cuatro; solo cuatro pertenece al dominio. La comprobación da $\log_3 3 + \log_3 1 = 1 + 0 = 1$. Las transformaciones son equivalentes sobre $x > 3$, por lo que cuatro es la única solución.

Ejercicio 17. Un argumento común admisible

Se necesita $x + 4 > 0$ y $3x > 0$, cuya intersección es $x > 0$. Igualar argumentos da $x + 4 = 3x$ y $x = 2$. En esa entrada ambos argumentos valen seis y son positivos. La inyectividad del logaritmo garantiza que la coincidencia se produce exactamente allí.

Ejercicio 18. Invertir el sentido de la comparación

El dominio exige $x > -2$. Para base $1/3$, la condición $\log_{1/3}(x + 2) \le -1$ equivale a $x + 2 \ge (1/3)^{-1} = 3$. Por tanto $x \ge 1$. La solución es $[1, \infty)$; el extremo uno da exactamente el logaritmo -1 y se incluye.

Ejercicio 19. Dos familias de bases

La intersección de $2x-1>0$ y $5-x>0$ es $(1/2,5)$. Si $a>1$, la desigualdad conserva el orden de los argumentos: $2x-1<5-x$, de donde $x<2$. La solución es $(1/2,2)$. Si $0<a<1$, se exige $2x-1>5-x$, equivalente a $x>2$, y la solución es $(2,5)$. La entrada dos produce igualdad y queda fuera de ambas soluciones estrictas.

Ejercicio 20. Tres reducciones a la mitad

Escribimos $A(t)=80q^t$. El segundo dato da $q^6=10/80=1/8$. Con $q>0$, resulta $q=(1/8)^{1/6}=(1/2)^{1/2}$. Así, $A(t)=80(1/2)^{t/2}$, con $t\geq 0$ en horas. El tiempo de semirreducción es dos horas; transcurridas seis horas se aplican tres factores $1/2$ y se obtiene $80/8=10$. La regla recupera ambos datos y mantiene el período interpretado.

Ejercicio 21. Un tercer dato multiplicativo

El ajuste afín a los dos primeros datos es $L(t)=50+25t$ y el exponencial es $E(t)=50(3/2)^t$. En $t=2$, el afín predice cien y el exponencial $50\cdot 9/4=112{,}5$. El dato adicional concuerda exactamente con el segundo. Las razones observadas son ambas $3/2$, mientras las diferencias son veinticinco y 37,5. La evidencia favorece la regla multiplicativa en esos tres tiempos; prolongarla supone mantener las condiciones del proceso.

Ejercicio 22. Una diferencia de nivel como razón

Para $I=100I_0$, el nivel es $10\log_{10}100=20$. Un aumento de treinta unidades satisface $10\log_{10}(I_2/I_1)=30$, por lo que la razón es $I_2/I_1=10^3=1000$. Las intensidades positivas y la referencia fija permiten restar los logaritmos y reunirlos como logaritmo de un cociente. La cancelación de unidades mantiene un argumento numérico positivo.

Ejercicio 23. Un intervalo certificado para el exponente

Las comparaciones enteras $2^{232}<5^{100}<2^{233}$ implican, al tomar raíces centésimas positivas, $2^{2{,}32}<5<2^{2{,}33}$. El orden de la exponencial de base dos da $2{,}32<\log_2 5<2{,}33$. El registro computacional comprueba las dos desigualdades enteras exactamente. El punto medio 2,325 tiene error absoluto menor que 0,005. La garantía usa el intervalo completo y conserva separados el valor exacto y el aproximado.

Ejercicio 24. Una cota local para otra base

Por el desarrollo binomial, para $n\geq 2$ se tiene $(1+2/n)^n>1+n(2/n)=3$, pues los términos restantes son positivos. La raíz positiva da $3^{1/n}<1+2/n$. Si $0\leq h\leq 1/n$, la monotonía acota $0\leq 3^h-1<2/n$. Si $-1/n\leq h<0$, escribir $u=3^{-h}\geq 1$ da $|3^h-1|=(u-1)/u\leq u-1<2/n$. Así, $|3^{2+h}-9|=9|3^h-1|<18/n$. Elegir $n=18000$ garantiza error menor que 0,001 siempre que $|h|\leq 1/18000$. Las dos direcciones del incremento quedan controladas por la misma condición.

Diagnóstico de salida

Describe un proceso mediante su factor y su período. Recupera una entrada con un logaritmo y comprueba el dominio. Justifica el sentido de una desigualdad con base decreciente. Para una aproximación, da un intervalo que certifique el error y señala qué supuestos permiten usar el modelo entre las mediciones.

CAPÍTULO 20

Funciones trigonométricas y modelos periódicos

Una marca en el borde de una rueda sube, alcanza una altura máxima, baja y vuelve a su posición inicial. Si la rueda gira uniformemente, cada vuelta repite la misma historia de alturas. Podemos registrar esa historia sobre una recta temporal: mientras el ángulo avanza, la altura dibuja una curva. El círculo proporciona entonces una función capaz de describir una oscilación.

En el capítulo de razones trigonométricas construimos el seno y el coseno mediante coordenadas. Aquí seguiremos sus valores mientras cambia una entrada real. Una unidad en el eje horizontal podrá representar un radián, un segundo o una hora; la fórmula tendrá que explicar cómo se relaciona esa unidad con el giro. Esa relación permitirá recuperar períodos, comparar fases, resolver condiciones sobre una señal y examinar hasta dónde un modelo describe los datos.

Del círculo a una gráfica

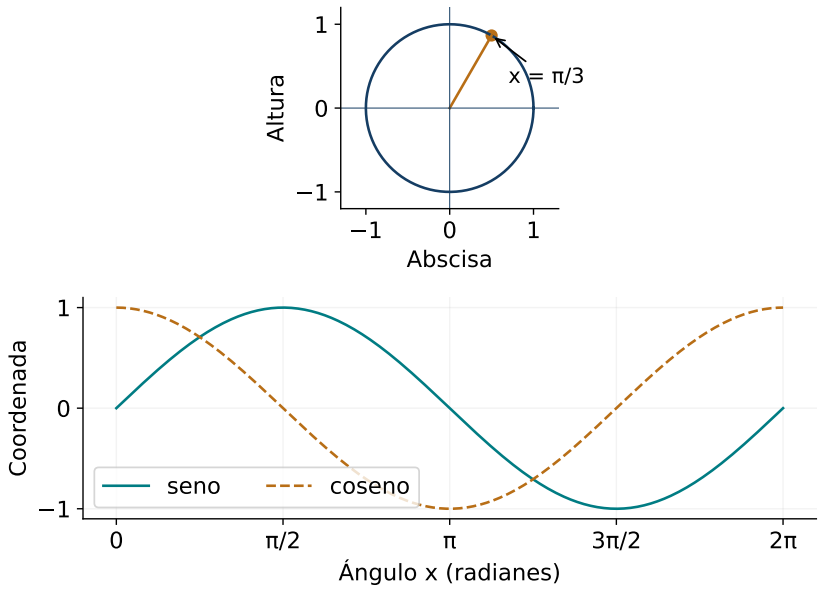
En el círculo unitario, el punto alcanzado después de un giro de medida real x, en radianes, tiene coordenadas $(\cos x, \sin x)$. La función seno asigna a cada entrada real la coordenada vertical de ese punto; la función coseno asigna la horizontal. Las vueltas completas permiten continuar ambas reglas sobre toda la recta real, con valores en $[-1, 1]$.

Una función f de dominio real tiene período $T > 0$ cuando $f(x + T) = f(x)$ para cada real x. Esta igualdad expresa la repetición de toda la regla. Al trasladar su gráfica horizontalmente en T, cada punto encuentra otro de la misma altura. Cuando existe un menor período positivo, lo llamamos período fundamental. El seno y el coseno tienen período fundamental 2π.

Problema 1. El tiempo entra en el círculo

Un punto recorre el círculo unitario con ángulo $\theta(t) = (\pi/2)t$, donde t se mide en segundos y el giro empieza en $(1, 0)$. Encuentra sus coordenadas en los primeros cuatro segundos y escribe su altura como función del tiempo.

Solución. En $t = 0, 1, 2, 3, 4$, los ángulos son $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$. Los puntos correspondientes son $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$ y $(1, 0)$. La altura es $y(t) = \sin((\pi/2)t)$. La entrada de seno es el ángulo; el factor $\pi/2$ convierte segundos en radianes. Cada cuatro segundos el ángulo aumenta en 2π y la altura repite su evolución completa. Por eso el período temporal es cuatro segundos.



Problema 2. Valores y simetrías sobre la recta

Calcula $\sin(-\pi/6)$, $\cos(13\pi/3)$ y $\sin(17\pi/2)$. Relaciona los cálculos con las simetrías y las vueltas del círculo.

Solución. La reflexión respecto del eje horizontal cambia el signo de la coordenada vertical: $\sin(-\pi/6) = -\sin(\pi/6) = -1/2$. El ángulo $13\pi/3 = 4\pi + \pi/3$ termina en el mismo punto que $\pi/3$, por lo que su coseno es $1/2$. Finalmente, $17\pi/2 = 8\pi + \pi/2$ termina en $(0, 1)$ y su seno vale uno. Las identidades que usamos son $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$ y la repetición al sumar vueltas enteras.

Problema 3. Un período y el menor período

Comprueba que 2π es un período de $g(x) = \sin^2 x$ y encuentra su período fundamental.

Solución. La igualdad $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ prueba la primera afirmación. Además, $\sin(x + \pi) = -\sin x$, así que al cuadrar obtenemos $g(x + \pi) = g(x)$. El número π también es un período. Para probar que es el menor, observemos que $g(0) = 0$ y sus ceros son exactamente $k\pi$, con k entero. Cualquier período positivo T debe cumplir $g(T) = g(0) = 0$, de donde $T = k\pi > 0$. El menor candidato es π, cuya validez ya comprobamos. La elevación al cuadrado reúne las alturas opuestas y acorta la repetición.

Problema 4. Leer variación y extremos

Describe el recorrido, los ceros y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = \cos x$ en $[0, 2\pi]$.

Solución. El punto comienza con abscisa uno. Durante la media vuelta superior llega a -1; durante la inferior regresa a uno. Por tanto el coseno decrece estrictamente en $[0, \pi]$ y crece estrictamente en $[\pi, 2\pi]$. Se anula cuando el radio es vertical: $x = \pi/2$ y $x = 3\pi/2$. El recorrido es $[-1, 1]$; el mínimo -1 se alcanza en π y el máximo uno en ambos extremos del intervalo. Las dos ramas recorren las mismas alturas en sentidos contrarios.

Propiedades de las funciones del círculo

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Coordenadas	$(\cos x, \sin x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$, medido en radianes.
Dominio y recorrido	Seno y coseno tienen dominio $\mathbb{R}$ y recorrido $[-1, 1]$.
Simetría	$\sin(-x) = -\sin x$ y $\cos(-x) = \cos x$.
Vuelta completa	$\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ y $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$; $k \in \mathbb{Z}$. Su período fundamental es 2π.
Media vuelta y cuadrado	$\sin(x + \pi) = -\sin x$; $\sin^2 x$ tiene período fundamental π.

Pruebas. Véase «Círculo, gráficas y periodicidad» en el apéndice.

Cambiar la escala de una oscilación

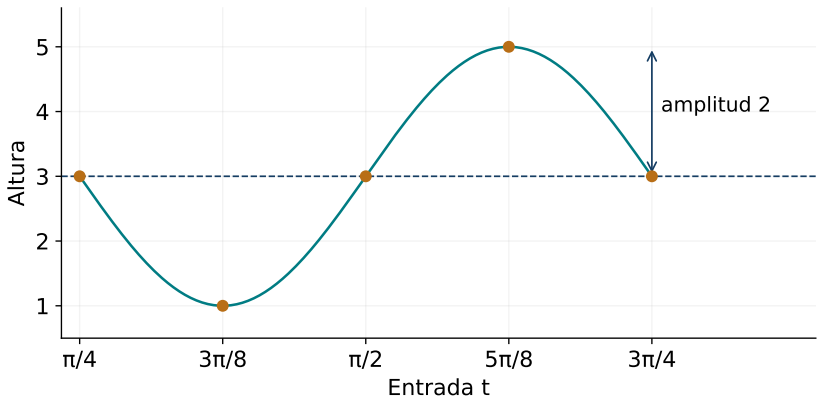
El movimiento de una rueda real añade un radio y una altura del centro. La regla se convierte en $y(t) = d + A\sin(\omega(t - t_0))$. Para $A > 0$ y $\omega > 0$, el eje medio es $y = d$, la amplitud es A y el período es $T = 2\pi/\omega$. La amplitud mide la distancia entre el eje medio y cada extremo; la diferencia entre máximo y mínimo vale $2A$.

El número t_0 localiza un cruce ascendente del eje medio en esta forma con seno y coeficiente positivo. Si usamos $a\sin(bt + c) + d$ con $a, b \neq 0$, la amplitud es $|a|$, el período es $2\pi/|b|$ y el desplazamiento horizontal representado por la fórmula es $-c/b$. El signo de a controla la reflexión vertical. Varias fases pueden describir la misma función, porque sumar una vuelta completa al argumento conserva cada valor.

Problema 5. Cinco puntos de una oscilación transformada

Estudia $f(t) = 3 - 2\sin(4t - \pi)$. Encuentra eje medio, amplitud, período y cinco puntos separados por un cuarto de período.

Solución. Escribimos el argumento como $4(t - \pi/4)$. El eje medio es tres, la amplitud es dos y el período es $2\pi/4 = \pi/2$. Desde $t = \pi/4$, un cuarto de período vale $\pi/8$. Las entradas $\pi/4, 3\pi/8, \pi/2, 5\pi/8, 3\pi/4$ producen argumentos $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$ y alturas $3, 1, 3, 5, 3$. La primera salida desde el eje medio es descendente por el coeficiente -2. El recorrido completo es $[1, 5]$.



La frecuencia ν cuenta ciclos por unidad de tiempo. Para un período temporal T, se cumple $\nu = 1/T$ y $\omega = 2\pi\nu$. Si el tiempo está en segundos, ν se expresa en ciclos por segundo o hertz, y ω en radianes por segundo. Una vuelta ocupa 2π radianes; ese es el origen del factor de conversión.

Problema 6. De ciclos a radianes por segundo

Una señal tiene frecuencia de cincuenta hertz y regla $s(t) = \sin(\omega t)$. Encuentra ω, su período y la primera entrada positiva en que alcanza el máximo.

Solución. La frecuencia angular es $\omega = 2\pi \cdot 50 = 100\pi$ radianes por segundo. El período es $T = 1/50 = 0{,}02$ segundos. El primer máximo aparece al llegar el argumento a $\pi/2$, así que $100\pi t = \pi/2$ y $t = 1/200 = 0{,}005$ segundos. Es un cuarto de período. Sustituir produce $\sin(\pi/2) = 1$, como exige el máximo.

Problema 7. Una fase escrita como tiempo

Para $h(t) = 4 + 3\cos((\pi/3)(t - 2))$, localiza dos máximos consecutivos y los cruces descendente y ascendente del eje medio entre ellos.

Solución. El período es seis. En $t = 2$, el argumento vale cero y la altura es siete, el máximo. El siguiente máximo ocurre en $t = 8$. Un cuarto de período después del primero, en $t = 7/2$, el argumento es $\pi/2$ y la función cruza hacia abajo el eje $y = 4$. En $t = 5$ alcanza el mínimo uno, y en $t = 13/2$ el argumento es $3\pi/2$ y cruza hacia arriba. Las cinco entradas separadas por $3/2$ describen un ciclo completo.

Problema 8. Dos fórmulas de una misma señal

Prueba que $u(x) = 2\sin(3x + \pi/2)$ y $v(x) = 2\cos(3x)$ representan la misma función. Da otra fase para la primera fórmula.

Solución. La identidad de adición da $\sin(\alpha + \pi/2) = \sin\alpha \cdot 0 + \cos\alpha \cdot 1 = \cos\alpha$. Con $\alpha = 3x$ obtenemos $u(x) = v(x)$ para cada real. Podemos sumar 2π a la fase y escribir $2\sin(3x + 5\pi/2)$. Ambas fases producen la misma altura en cada entrada. La fase queda así determinada hasta vueltas completas cuando la familia y sus otros parámetros están fijados.

Propiedades de los parámetros de oscilación

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Eje y amplitud	Para $f(t) = d + a\sin(bt + c)$, $a, b \neq 0$, eje d, amplitud $\lvert a\rvert$ y recorrido $[d - \lvert a\rvert, d + \lvert a\rvert]$; igual para coseno.
Período fundamental	$T = 2\pi/\lvert b\rvert$ para una sinusoide con $a, b \neq 0$.
Desplazamiento horizontal	$bt + c = b(t - t_0)$ con $t_0 = -c/b$, para $b \neq 0$.
Frecuencias	$\nu = 1/T$ y $\omega = 2\pi\nu$ para una oscilación temporal escrita con frecuencia angular positiva.
Fases equivalentes	Sumar $2k\pi$ al argumento conserva seno y coseno; $k \in \mathbb{Z}$.

Pruebas. Véase «Parámetros de una oscilación» en el apéndice.

Si $a = 0$ o $b = 0$, la regla anterior es constante. Cada número positivo es entonces un período y el conjunto de períodos positivos carece de mínimo. Las fórmulas de período fundamental de la tabla se aplican a las oscilaciones de amplitud y frecuencia angular distintas de cero.

Recuperar una regla desde datos

Si adoptamos una regla sinusoidal, el máximo y el mínimo nos permiten situar el eje medio a mitad de camino entre ambos y medir la amplitud como la distancia hasta cualquiera de ellos. Para recuperar el período necesitamos saber qué extremos corresponden a ciclos consecutivos: dos máximos observados podrían tener otros entre ellos. Las mediciones de posiciones intermedias permitirán examinar tanto esa elección de período como la forma sinusoidal adoptada, porque hay procesos periódicos con curvas distintas. Reconstruir la regla exigirá reunir esa información antes de fijar sus parámetros.

Problema 9. Reconstruir una oscilación desde extremos

Una magnitud alcanza un mínimo de una unidad en $t = 0$ y el máximo siguiente de cinco unidades en $t = 3$ horas. Suponiendo una sinusoide simple, encuentra una regla.

Solución. El eje medio es $(5 + 1)/2 = 3$ y la amplitud es $(5 - 1)/2 = 2$. En una sinusoide, pasar de un mínimo al máximo siguiente ocupa medio período; por eso $T = 6$ horas y $\omega = \pi/3$ radianes por hora. Una regla que empieza en el mínimo es $H(t) = 3 - 2\cos(\pi t/3)$. En cero produce uno y en tres produce cinco. La elección del período usa la hipótesis de extremos consecutivos dentro de esta familia.

Problema 10. La altura de una cabina

Una rueda tiene radio de cinco metros y centro a seis metros del suelo. Da una vuelta uniforme en veinte segundos y la cabina parte del punto más bajo. Modela su altura y encuentra cuándo está al menos a seis metros durante $0 \le t \le 20$.

Solución. La altura del centro proporciona el eje medio seis; el radio da amplitud cinco. El ángulo crece con $\omega = 2\pi/20 = \pi/10$. La regla $h(t) = 6 - 5\cos(\pi t/10)$ empieza en un metro, el punto inferior. Pedir $h(t) \ge 6$ equivale a $\cos(\pi t/10) \le 0$. Durante una vuelta, esto ocurre entre $\pi/2$ y $3\pi/2$, incluidos. Al convertir los ángulos a tiempo resulta $t \in [5, 15]$ segundos. Los extremos corresponden a las posiciones laterales de la rueda.

Problema 11. Dos señales en las mismas muestras

Se observa una altura igual a cero en todos los tiempos enteros. Compara las reglas $f(t) = \sin(\pi t)$ y $g(t) = \sin(3\pi t)$. ¿Qué medición permitiría distinguirlas?

Solución. En cualquier entero n, los argumentos πn y $3\pi n$ son múltiplos enteros de π; ambas salidas son cero. Sus períodos fundamentales son dos y $2/3$, respectivamente. En $t = 1/2$, la primera produce uno y la segunda -1. Esa medición intermedia distingue las propuestas. Las muestras enteras coinciden también con la función constante cero. El intervalo entre observaciones forma parte de la información necesaria para reconocer un modelo; esta coincidencia de muestras se conoce como aliasing.

Problema 12. Contrastar una propuesta con nuevas mediciones

En los tiempos $0, 3, 6, 9, 12$ horas se miden $10, 12, 10, 8{,}4, 10{,}3$ unidades. Examina la propuesta $M(t) = 10 + 2\sin(\pi t/6)$ mediante residuos definidos como observación menos predicción.

Solución. Los argumentos son $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$ y las predicciones son $10, 12, 10, 8, 10$. Los residuos valen $0, 0, 0, 0{,}4, 0{,}3$. Los tres primeros datos coinciden exactamente con la regla, mientras los siguientes cuantifican sus discrepancias. La propuesta tiene período doce; las mediciones de cero y doce horas difieren en 0,3. Para decidir si la aproximación es útil necesitamos conocer precisión instrumental, variabilidad del proceso y tolerancia de la aplicación. El modelo matemático repite exactamente sus valores; las observaciones tienen el alcance que les dan esas condiciones de medida.

Propiedades de datos y modelos periódicos

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Extremos de una sinusoide	Con mínimo m y máximo $M > m$, eje $(M + m)/2$ y amplitud $(M - m)/2$.
Extremos consecutivos	En una sinusoide simple, mínimo a máximo siguiente ocupa $T/2$; máximos consecutivos están separados por T.
Rueda desde abajo	$h(t) = d - R\cos(2\pi t/T)$ para radio $R > 0$, centro de altura d y giro uniforme de período $T > 0$.
Residuo	$r_i = y_i - f(t_i)$; su interpretación usa las unidades y la precisión de las observaciones.

Pruebas. Véase «Datos y modelos periódicos» en el apéndice.

Resolver dentro de un intervalo

Una altura del seno suele aparecer dos veces durante una vuelta. Cada familia de ángulos vuelve a repetirse al sumar 2π. Resolver una ecuación exige reunir esas familias y después seleccionar las entradas del intervalo pedido. Si hay una transformación del argumento, conviene transformar también los extremos del intervalo antes de enumerar.

Para $s \in [-1, 1]$, escribimos $\alpha = \arcsin s \in [-\pi/2, \pi/2]$. Las soluciones de $\sin\theta = s$ son $\theta = \alpha + 2k\pi$ y $\theta = \pi - \alpha + 2k\pi$. En $s = \pm 1$ las familias representan los mismos puntos. Para $c \in [-1, 1]$, con $\beta = \arccos c \in [0, \pi]$, las soluciones de $\cos\theta = c$ son $\theta = \pm\beta + 2k\pi$. En todos estos casos k recorre los enteros y las repeticiones se cuentan una sola vez.

Problema 13. Dos familias en un argumento doble

Resuelve $\sin(2x) = \sqrt{3}/2$ para $x \in [0, 2\pi]$.

Solución. Ponemos $\theta = 2x$, cuyo intervalo es $[0, 4\pi]$. En él, las alturas pedidas aparecen en $\theta = \pi/3, 2\pi/3, 7\pi/3, 8\pi/3$. Dividir por dos da $x = \pi/6, \pi/3, 7\pi/6, 4\pi/3$. Todos pertenecen al intervalo original y al duplicarlos recuperamos los cuatro ángulos enumerados. Los extremos cero y 2π producen seno cero y quedan fuera de la solución.

Problema 14. Conservar el extremo inicial

Resuelve $\cos(3t - \pi/2) = 0$ en $[0, 2\pi)$.

Solución. El coseno se anula en $\pi/2 + k\pi$. De $3t - \pi/2 = \pi/2 + k\pi$ resulta $t = (k+1)\pi/3$. La condición $0 \le t < 2\pi$ equivale a $0 \le k+1 < 6$, así que los valores son $t = 0, \pi/3, 2\pi/3, \pi, 4\pi/3, 5\pi/3$. El cero inicial corresponde a argumento $-\pi/2$ y debe incluirse. El valor 2π también anula la expresión, pero pertenece al extremo excluido del intervalo.

Problema 15. Una cuadrática en el seno

Resuelve $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$ en $[0, 2\pi)$.

Solución. Con $u = \sin x \in [-1, 1]$, la ecuación se factoriza como $(2u + 1)(u - 1) = 0$. Los dos valores posibles, $u = -1/2$ y $u = 1$, pertenecen al recorrido del seno. La altura uno da $x = \pi/2$; la altura $-1/2$ da $x = 7\pi/6$ y $11\pi/6$. Cada valor verifica la ecuación factorizada y la original. Conservar las dos raíces de la cuadrática mantiene todas las alturas posibles.

Problema 16. Una ecuación con tangente

Resuelve $\tan x = 1$ en $[-\pi, \pi]$.

Solución. La tangente está definida cuando $\cos x \neq 0$, así que dentro del intervalo quedan excluidos $-\pi/2$ y $\pi/2$. En la rama central, $\tan(\pi/4) = 1$, y su período fundamental π da $x = \pi/4 + k\pi$. Los únicos valores del intervalo son $-3\pi/4$ y $\pi/4$. En ambos, seno y coseno tienen el mismo valor distinto de cero; su cociente es uno. La condición de dominio se conserva al usar esa razón.

Propiedades para ecuaciones trigonométricas

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Ecuación del seno	$\theta = \alpha + 2k\pi$ o $\pi - \alpha + 2k\pi$, con $\alpha = \arcsin s$, $s \in [-1, 1]$, $k \in \mathbb{Z}$.
Ecuación del coseno	$\theta = \pm \arccos c + 2k\pi$, para $c \in [-1, 1]$ y $k \in \mathbb{Z}$.
Ecuación de tangente	$\theta = \arctan q + k\pi$, para $q \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$ y $\cos\theta \neq 0$.
Sustitución y selección	Al poner $u = \sin\theta$ o $u = \cos\theta$, se conserva $u \in [-1, 1]$ y se seleccionan después todas las entradas del intervalo original.

Pruebas. Véase «Ecuaciones trigonométricas por intervalos» en el apéndice.

Comparar alturas y recuperar ángulos

Una desigualdad trigonométrica selecciona arcos completos del círculo. Sobre cada rama monótona podemos ordenar las alturas y recuperar los ángulos de sus fronteras. Después se reúnen los arcos y se respetan tanto los extremos del intervalo como los puntos donde la función está definida.

Problema 17. Una altura mínima del seno

Resuelve $\sin x \geq 1/2$ en $[0, 2\pi]$.

Solución. La recta horizontal de altura $1/2$ corta el círculo en los ángulos $\pi/6$ y $5\pi/6$. El arco superior entre ellos tiene coordenada vertical al menos $1/2$; el resto queda por debajo. La solución es $[\pi/6, 5\pi/6]$. Las fronteras se incluyen por la igualdad permitida. En los extremos del intervalo original el seno es cero.

Problema 18. Una condición estricta sobre el tiempo

Encuentra cuándo $1 + 2\cos(\pi t/6) > 2$ durante $0 \leq t \leq 12$.

Solución. Restar uno y dividir por dos da $\cos(\pi t/6) > 1/2$. El argumento recorre $[0, 2\pi]$. En una vuelta, las coordenadas horizontales mayores que $1/2$ corresponden a $[0, \pi/3) \cup (5\pi/3, 2\pi]$. Multiplicar las entradas angulares por $6/\pi$ produce $t \in [0, 2) \cup (10, 12]$. Los tiempos dos y diez alcanzan exactamente la altura dos y se excluyen; cero y doce producen altura tres y pertenecen al dominio temporal.

Problema 19. Signos separados por puntos excluidos

Resuelve $\tan x \geq 0$ en $[-\pi, \pi]$.

Solución. La tangente es el cociente seno/coseno. Ambos tienen el mismo signo en los cuadrantes primero y tercero; el cociente vale cero en los múltiplos de π. En el intervalo pedido resulta $[-\pi, -\pi/2) \cup [0, \pi/2) \cup \{\pi\}$. Los puntos $\pm\pi/2$ quedan excluidos por coseno cero. El extremo π se incluye como punto aislado: allí la tangente vale cero, mientras en el tramo inmediatamente anterior es negativa.

Las ramas principales permiten definir funciones inversas. El seno restringido a $[-\pi/2, \pi/2]$ es una biyección sobre $[-1, 1]$; su inversa es arcsin. El coseno restringido a $[0, \pi]$ es una biyección sobre $[-1, 1]$; su inversa es arccos. La tangente restringida a $(-\pi/2, \pi/2)$ es una biyección sobre $\mathbb{R}$; su inversa es arctan. Cada elección de rama fija el intervalo en que se recupera el ángulo.

Problema 20. Qué ángulo devuelve una rama principal

Calcula $\arcsin(\sin(7\pi/6))$ y $\arccos(\cos(7\pi/6))$.

Solución. El seno de $7\pi/6$ es $-1/2$. El único ángulo de $[-\pi/2, \pi/2]$ con ese seno es $-\pi/6$, de modo que la primera expresión vale $-\pi/6$. El coseno del ángulo original es $-\sqrt{3}/2$; dentro de $[0, \pi]$ ese valor corresponde a $5\pi/6$. Por eso la segunda expresión vale $5\pi/6$. Cada composición recupera el representante de su rama principal con la misma coordenada trigonométrica.

Propiedades de orden y ramas inversas

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Ramas monótonas	Seno crece en $[-\pi/2, \pi/2]$; coseno decrece en $[0, \pi]$; tangente crece en $(-\pi/2, \pi/2)$.
Ramas principales	$\arcsin : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$, $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ y $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ son las inversas de esas restricciones.
Recuperación de entrada	$\arcsin(\sin x) = x$ en la rama principal del seno; análogamente para coseno y tangente en sus ramas.
Selección de arcos	Las desigualdades reúnen las ramas pertinentes; sus fronteras cumplen el signo de igualdad y las condiciones del dominio.

Pruebas. Véase «Orden y ramas inversas trigonométricas» en el apéndice.

Sumar oscilaciones

Supongamos que dos contribuciones actúan sobre una misma magnitud y que el modelo permite sumarlas, con unidades compatibles. Podemos entonces sumar sus funciones y seguir cómo coinciden sus alturas en cada instante. Si tienen la misma frecuencia angular, unas fases próximas producen refuerzo y otras pueden producir compensación; la amplitud resultante dependerá de esa relación. Con frecuencias distintas buscaremos primero un tiempo de repetición común, si existe, y examinaremos después la forma que adquiere la suma durante ese intervalo.

Problema 21. Dos contribuciones de igual frecuencia

Escribe $s(x) = 3\sin x + 4\cos x$ como una sola sinusoide y encuentra su recorrido.

Solución. Buscamos $R\sin(x+\varphi) = R\cos\varphi\sin x + R\sin\varphi\cos x$. Debe cumplirse $R\cos\varphi = 3$ y $R\sin\varphi = 4$. Al sumar cuadrados obtenemos $R^2 = 25$, por lo que elegimos amplitud $R = 5$. El ángulo del primer cuadrante con coseno $3/5$ y seno $4/5$ es $\varphi = \arctan(4/3)$. Así, $s(x) = 5\sin(x+\varphi)$ y su recorrido es $[-5, 5]$. La amplitud resulta de la fase relativa de las contribuciones.

Problema 22. Una suma con dos frecuencias

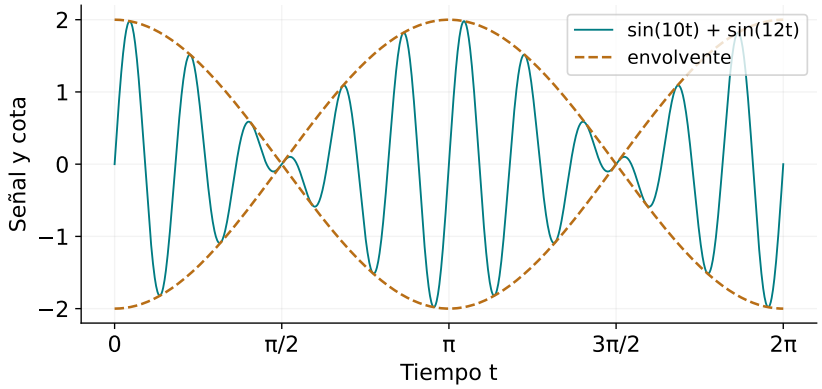
Comprueba que 2π es un período de $f(x) = \sin x + \sin(2x)$ y encuentra sus ceros en $[0, 2\pi)$. Examina si π también es un período.

Solución. Al sumar 2π a x, el primer argumento suma una vuelta y el segundo suma dos; ambas contribuciones se conservan. Usando $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$, factorizamos $f(x) = \sin x(1 + 2\cos x)$. Los ceros proceden de $\sin x = 0$ o de $\cos x = -1/2$: son $0, 2\pi/3, \pi, 4\pi/3$. Conservamos ambas posibilidades sin dividir por el seno. Para examinar el desplazamiento π, tomamos $x = \pi/6$: $f(x) = 1/2 + \sqrt{3}/2$, mientras $f(x+\pi) = -1/2 + \sqrt{3}/2$. Esas alturas difieren, así que π falla la condición de período.

Problema 23. Una oscilación rápida y su envolvente

Reescribe $s(t) = \sin(10t) + \sin(12t)$ como producto. Encuentra una cota variable de su valor absoluto y comprueba un período común.

Solución. La suma de senos da $s(t) = 2\sin(11t)\cos t$. Como $|\sin(11t)| \le 1$, se obtiene $|s(t)| \le 2|\cos t|$. Las curvas $\pm 2|\cos t|$ delimitan una envolvente: la señal queda entre ellas. La amplitud de esa envolvente se repite cada π. Al sustituir $t+\pi$, tanto $\sin(11t)$ como $\cos t$ cambian de signo, y su producto conserva el valor. Por tanto π es también un período de la señal. En cero, la envolvente superior vale dos y la señal vale cero; la cota describe un límite que la oscilación alcanza solo en ciertas entradas.



Propiedades de superposición

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Frecuencia común	$a\sin\theta + b\cos\theta = R\sin(\theta+\varphi)$, con $R = \sqrt{a^2+b^2} > 0$, $\cos\varphi = a/R$, $\sin\varphi = b/R$.
Suma de senos	$\sin u + \sin v = 2\sin((u+v)/2)\cos((u-v)/2)$ para u, v reales.
Período común	Si $T > 0$ es período de f y de g, también es período de $f+g$; su período fundamental puede ser menor.
Cota de envolvente	$\lvert 2\sin(\alpha t)\cos(\beta t)\rvert \le 2\lvert\cos(\beta t)\rvert$.

Pruebas. Véase «Superposición de oscilaciones» en el apéndice.

Examinar una tasa de cambio

En una gráfica, el cociente entre el cambio de altura y el cambio de entrada mide una tasa media. Para el seno, desde x hasta $x+h$, con $h \neq 0$, esa tasa es

$$D_h(x) = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}.$$

Al hacer pequeño el intervalo, los cocientes pueden acercarse a un valor determinado. Ese límite es la tasa instantánea, llamada derivada. El seno permite anticipar la idea mediante el círculo y cotas geométricas: el movimiento cerca de una altura extrema tiene una variación vertical más lenta que cerca del eje medio.

Para $0 < |h| < \pi/2$, la comparación de áreas entre un triángulo inscrito, un sector del círculo unitario y un triángulo tangente da $\cos h \le \operatorname{sin} h/h \le 1$. La identidad $1 - \cos h = 2\operatorname{sin}^2(h/2)$ y la cota geométrica $|\operatorname{sin} u| \le |u|$ permiten controlar cuánto difieren esos cocientes de uno. El apéndice desarrolla el argumento y obtiene

$$|D_h(x) - \cos x| \le \frac{|\operatorname{sin} x|}{2}|h| + \frac{|\cos x|}{2}h^2.$$

El miembro derecho tiende a cero con h. Así, la tasa instantánea del seno en x es $\cos x$, cuando la entrada está medida en radianes. El capítulo de variación retomará el concepto general y sus reglas.

Problema 24. Comparar tasas cerca del eje y de un extremo

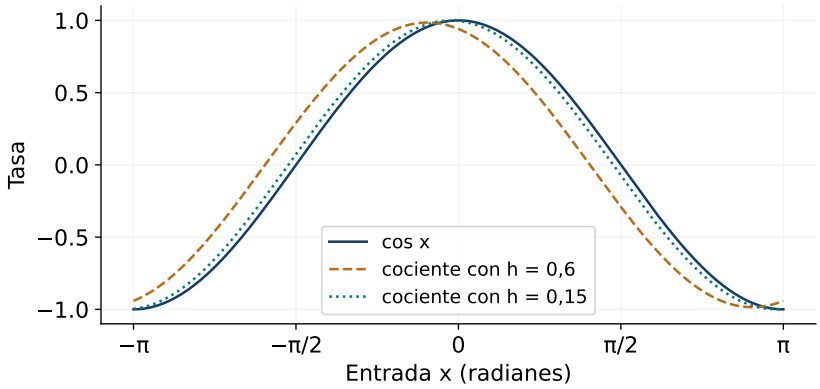
Calcula aproximadamente $D_h(0)$ y $D_h(\pi/2)$ para $h = 0{,}1$ y $h = 0{,}01$ radianes. Da cotas de sus diferencias respecto de las tasas instantáneas correspondientes.

Solución. En cero, $D_h(0) = \operatorname{sin} h/h$.

Sus valores son aproximadamente 0,9983342 y 0,9999833. La tasa instantánea es $\cos 0 = 1$ y la cota anterior da errores a lo sumo $h^2/2$: 0,005 y 0,00005. En el máximo, la tasa media es

$$D_h(\pi/2) = \frac{\cos h - 1}{h}.$$

Sus valores son aproximadamente $-0{,}0499583$ y $-0{,}0050000$. La tasa instantánea es cero y el error está acotado por $|h|/2$: 0,05 y 0,005. Los decimales están redondeados a siete cifras después de la coma; las garantías proceden de las desigualdades. Para $h < 0$, la primera tasa conserva su valor y la segunda cambia de signo, conforme a la simetría alrededor del máximo.



Propiedades de cambio y aproximación del seno

Propiedad	Fórmula y condiciones de uso
Cotas geométricas	$\|\operatorname{sin} u\| \le \|u\|$ y $0 \le 1 - \cos u \le u^2/2$ para u real, en radianes.
Cociente cerca de cero	$\cos h \le \operatorname{sin} h/h \le 1$ para $0 < \|h\| < \pi/2$; de ahí $\|\operatorname{sin} h/h - 1\| \le h^2/2$.
Tasa del seno	$D_h(x)$ tiende a $\cos x$; su error satisface la cota expuesta para $0 < \|h\| < \pi/2$.
Escala temporal	Para $y(t) = d + A\operatorname{sin}(\omega(t - t_0))$, la tasa instantánea es $A\omega\cos(\omega(t - t_0))$ con tiempo y ángulo en las unidades declaradas.

Pruebas. Véase «Tasas de cambio del seno» en el apéndice.

Ejercicios para trabajar sin profesor

1. Un punto gira en el círculo unitario con $\theta(t) = \pi t/3$, con t en segundos. Encuentra su posición en $t = 0, 3/2, 3, 9/2, 6$ y el período de su altura.

2. Calcula $\sin(-5\pi/6)$, $\cos(19\pi/3)$ y $\sin(23\pi/2)$.

3. Encuentra el período fundamental de $\cos^2 x$ y justifica que es el menor.

4. Describe recorrido, ceros, extremos y variación del seno en $[-\pi/2, 3\pi/2]$.

5. Para $f(t) = -1 + 3\cos(2t + \pi)$, determina eje, amplitud, período y cinco puntos separados por un cuarto de período.

6. Una señal tiene frecuencia de veinticinco hertz y regla $s(t) = \sin(\omega t)$. Halla frecuencia angular, período y primer máximo positivo.

7. Para $h(t) = 2 - 4\sin((\pi/2)(t-1))$, localiza el cruce descendente en $t = 1$, el mínimo siguiente, el cruce ascendente siguiente y el máximo siguiente.

8. Demuestra $3\cos(2x - \pi/2) = 3\sin(2x)$ y escribe otra fase equivalente.

9. Una sinusoide tiene máximo ocho en $t = 1$ y mínimo siguiente dos en $t = 5$. Propón una regla y declara la hipótesis que fija su período.

10. Una rueda de radio cuatro metros tiene centro a cinco metros del suelo, período doce segundos y parte con la cabina abajo. Encuentra su altura y los tiempos de $[0, 12]$ en que está al menos a siete metros.

11. Compara $\cos(2\pi t)$ y $\cos(4\pi t)$ en tiempos enteros y en $t = 1/2$. Da sus períodos fundamentales.

12. En los tiempos $0, 2, 4, 6, 8$ se observan $7, 5, 3, 5{,}2, 6{,}8$. Examina $M(t) = 5 + 2\cos(\pi t/4)$ mediante residuos de observación menos predicción.

13. Resuelve $\cos(2x) = 1/2$ en $[0, 2\pi)$.

14. Resuelve $\sin(3t + \pi/2) = 0$ en $[0, 2\pi]$.

15. Resuelve $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ en $[0, 2\pi)$.

16. Resuelve $\tan x = -1$ en $[-\pi, \pi]$.

17. Resuelve $\cos x \le -1/2$ en $[0, 2\pi]$.

18. Encuentra cuándo $2 + 3\sin(\pi t/4) \ge 7/2$ durante $0 \le t \le 8$.

19. Resuelve $\tan x < 0$ en $[-\pi, \pi]$.

20. Calcula $\arcsin(\sin(5\pi/4))$ y $\arccos(\cos(5\pi/4))$.

21. Escribe $5\sin x - 12\cos x$ como una sola sinusoide y encuentra su recorrido.

22. Comprueba un período 2π y encuentra los ceros de $\sin x - \sin(2x)$ en $[0, 2\pi)$.

23. Reescribe $\sin(8t) + \sin(10t)$ como producto. Encuentra una envolvente y comprueba el período π.

24. Para $y(t) = 3 + 2\sin(\pi t)$, encuentra la tasa instantánea en cero y en $t = 1/2$. Da una condición sobre $\Delta t \neq 0$ que garantice un error menor que 0,01 al aproximar la tasa de cero por un cociente de cambio.

Soluciones desarrolladas

Ejercicio 1. Una vuelta en seis segundos

Los ángulos son $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$ y los puntos son $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$ y $(1,0)$. La altura es $\sin(\pi t/3)$. Una vuelta angular exige $(\pi/3)T = 2\pi$, por lo que $T = 6$ segundos. La conversión mantiene explícita la diferencia entre entrada temporal y argumento angular.

Ejercicio 2. Reducir vueltas y conservar signos

El seno es impar y $\sin(5\pi/6) = 1/2$, de modo que el primer resultado es $-1/2$. Como $19\pi/3 = 6\pi + \pi/3$, el coseno vale $1/2$. Finalmente, $23\pi/2 = 10\pi + 3\pi/2$, cuyo seno es -1. Cada reducción conserva el punto final del giro; la reflexión inicial controla el signo de la primera entrada.

Ejercicio 3. El cuadrado del coseno

La media vuelta cambia el coseno de signo y conserva su cuadrado, así que π es un período. Para probar minimalidad, si $T > 0$ es período debe cumplirse $\cos^2 T = \cos^2 0 = 1$. Esto sucede exactamente en los múltiplos enteros de π, pues la coordenada horizontal tiene valor absoluto uno solo en los extremos horizontales del diámetro. El menor candidato positivo es π y ya se verificó.

Ejercicio 4. Un ciclo que empieza en el mínimo

En $-\pi/2$ el seno vale -1; crece estrictamente hasta uno en $\pi/2$ y después decrece hasta -1 en $3\pi/2$. Su recorrido es $[-1,1]$. Los ceros del intervalo son cero y π. El máximo aparece en $\pi/2$ y los mínimos en los dos extremos. La variación se lee siguiendo la coordenada vertical de cada semicircunferencia pertinente.

Ejercicio 5. Una amplitud sobre un eje negativo

El eje es $y = -1$, la amplitud es tres y el período es π. Escribimos $2t+\pi = 2(t+\pi/2)$ y partimos de $t = -\pi/2$. Un cuarto de período vale $\pi/4$. En $-\pi/2, -\pi/4, 0, \pi/4, \pi/2$, el coseno toma $1, 0, -1, 0, 1$ y las alturas son $2, -1, -4, -1, 2$. El recorrido es $[-4, 2]$; la amplitud mide tres desde el eje, aunque la altura máxima sea dos.

Ejercicio 6. Convertir frecuencia y localizar un cuarto de ciclo

Se tiene $\omega = 2\pi \cdot 25 = 50\pi$ radianes por segundo y $T = 1/25 = 0{,}04$ segundos. La igualdad $50\pi t = \pi/2$ localiza el primer máximo en $t = 1/100 = 0{,}01$ segundos. Al multiplicar este tiempo por la frecuencia angular se recupera el ángulo de un cuarto de vuelta.

Ejercicio 7. Sentido del cruce y signo del coeficiente

El período es cuatro y cada cuarto ocupa una unidad de tiempo. En $t = 1$ el argumento vale cero y la altura es dos; el signo negativo del coeficiente hace descendente el cruce. En $t = 2$ el argumento es $\pi/2$ y se alcanza el mínimo -2. En $t = 3$ aparece el cruce ascendente de altura dos, y en $t = 4$ el máximo seis. En $t = 5$ vuelve el cruce descendente inicial.

Ejercicio 8. Una identidad de fase

La fórmula de diferencia da $\cos(\alpha - \pi/2) = \cos\alpha \cdot 0 + \sin\alpha \cdot 1 = \sin\alpha$. Con $\alpha = 2x$ y multiplicación por tres queda la igualdad pedida. Sumar una vuelta a la fase produce $3\cos(2x + 3\pi/2)$, otra expresión de la misma función.

Ejercicio 9. Extremos consecutivos y escala temporal

El eje es $(8+2)/2 = 5$, la amplitud es tres y el tiempo del máximo al mínimo siguiente es cuatro. Bajo la hipótesis de una sinusoide simple con esos extremos consecutivos, el período es ocho y $\omega = \pi/4$. Una regla es $h(t) = 5+3\cos((\pi/4)(t-1))$. En uno da ocho y en cinco da dos. Si hubiera oscilaciones completas intermedias, la distancia temporal observada permitiría otros períodos; la condición de consecutividad fija el elegido.

Ejercicio 10. Alturas por encima del eje medio

La regla es $h(t) = 5 - 4\cos(\pi t/6)$. Exigir $h(t) \geq 7$ equivale a $\cos(\pi t/6) \leq -1/2$. Durante una vuelta los ángulos correspondientes forman $[2\pi/3, 4\pi/3]$. La conversión $t = 6\theta/\pi$ da $t \in [4, 8]$ segundos. En los extremos la altura es exactamente siete; en seis segundos alcanza el máximo nueve.

Ejercicio 11. Coincidencia de muestras con períodos distintos

En cada entero n, los dos cosenos valen uno. Los períodos fundamentales son uno y $1/2$. En $t = 1/2$, la primera regla vale $\cos\pi = -1$ y la segunda $\cos 2\pi = 1$. Una medición entre los tiempos enteros las distingue. Las muestras enteras admiten además la función constante uno, lo que vuelve a mostrar el papel de la separación temporal de los datos.

Ejercicio 12. Medir las discrepancias

Los argumentos son $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$, y la propuesta produce $7, 5, 3, 5, 7$. Restar las predicciones de las observaciones da residuos $0, 0, 0, 0{,}2, -0{,}2$. La regla tiene período ocho, mientras las observaciones de cero y ocho difieren en 0,2. La elección de una tolerancia y la precisión de medición permiten valorar la utilidad del ajuste. Los residuos conservan la unidad de la magnitud registrada.

Ejercicio 13. Dos vueltas del argumento

Con $\theta = 2x$, el intervalo es $[0, 4\pi)$. El coseno vale $1/2$ en $\theta = \pi/3, 5\pi/3, 7\pi/3, 11\pi/3$. Dividir por dos da $x = \pi/6, 5\pi/6, 7\pi/6, 11\pi/6$. Cada valor pertenece a $[0, 2\pi)$ y produce una de las cuatro posiciones angulares de la misma coordenada horizontal.

Ejercicio 14. Enumerar enteros antes de recuperar el tiempo

El seno se anula cuando $3t+\pi/2 = k\pi$. Por tanto $t = (k-1/2)\pi/3$. Las condiciones $0 \leq t \leq 2\pi$ dan $1/2 \leq k \leq 13/2$, así que $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Las soluciones son $\pi/6, \pi/2, 5\pi/6, 7\pi/6, 3\pi/2, 11\pi/6$. Ninguno de los dos extremos temporales anula la expresión, pues ambos producen seno uno.

Ejercicio 15. Dos coordenadas horizontales posibles

Ponemos $u = \cos x \in [-1, 1]$ y factorizamos $2u^2 + u - 1 = (2u - 1)(u + 1)$. Las posibilidades son $u = 1/2$ y $u = -1$, ambas admisibles. La primera da $x = \pi/3$ y $5\pi/3$; la segunda da $x = \pi$. Sustituir cada coordenada en la factorización produce cero y verifica todas las soluciones.

Ejercicio 16. Repetir una solución de tangente

La rama central contiene $\arctan(-1) = -\pi/4$. La familia completa es $x = -\pi/4 + k\pi$. Dentro de $[-\pi, \pi]$ quedan $-\pi/4$ y $3\pi/4$. Los cosenos son distintos de cero y los cocientes seno/coseno valen -1. Los puntos $\pm\pi/2$ permanecen excluidos del dominio.

Ejercicio 17. Un arco a la izquierda del círculo

La coordenada horizontal vale $-1/2$ en $2\pi/3$ y $4\pi/3$. En el arco entre ellos es menor o igual que ese valor, así que la solución es $[2\pi/3, 4\pi/3]$. Las dos fronteras se incluyen. El ángulo π da el mínimo -1 y pertenece al interior del arco seleccionado.

Ejercicio 18. Convertir un arco cerrado a tiempo

La desigualdad equivale a $\sin(\pi t/4) \geq 1/2$. El argumento recorre $[0, 2\pi]$, y el arco correspondiente es $[\pi/6, 5\pi/6]$. Multiplicar por $4/\pi$ da $t \in [2/3, 10/3]$. Las fronteras producen exactamente $7/2$ en la expresión original y quedan incluidas.

Ejercicio 19. Signo negativo de la tangente

Seno y coseno tienen signos opuestos en los cuadrantes segundo y cuarto. En $[-\pi, \pi]$ esto corresponde a $(-\pi/2, 0) \cup (\pi/2, \pi)$. Los extremos cero y $\pm\pi$ producen tangente cero y quedan fuera de la desigualdad estricta. Los puntos $\pm\pi/2$ quedan fuera por el dominio.

Ejercicio 20. Representantes de las dos ramas

El seno y el coseno de $5\pi/4$ valen ambos $-\sqrt{2}/2$. El seno recupera su representante $-\pi/4$ en $[-\pi/2, \pi/2]$, mientras el coseno recupera $3\pi/4$ en $[0, \pi]$. Por eso las composiciones pedidas valen $-\pi/4$ y $3\pi/4$, respectivamente. La coordenada trigonométrica se conserva y la rama fija el ángulo devuelto.

Ejercicio 21. Una fase en el cuarto cuadrante

La amplitud es $R = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = 13$. Elegimos $\varphi = -\arctan(12/5)$, de modo que $\cos\varphi = 5/13$ y $\sin\varphi = -12/13$. La fórmula de adición prueba $5\sin x - 12\cos x = 13\sin(x + \varphi)$. El recorrido es $[-13, 13]$. El signo negativo de la segunda contribución queda incorporado en la fase.

Ejercicio 22. Factorizar sin perder los ceros del seno

El desplazamiento 2π conserva ambas contribuciones. La diferencia se factoriza como $\sin x(1 - 2\cos x)$. Por tanto los ceros proceden de $\sin x = 0$ o $\cos x = 1/2$. En $[0, 2\pi)$ se obtienen $0, \pi/3, \pi, 5\pi/3$. Sustituir confirma cada cero; mantener la factorización evita perder cero y π al dividir por el seno.

Ejercicio 23. Una envolvente lenta

La identidad de suma da $s(t) = 2\sin(9t)\cos t$. De ahí $|s(t)| \leq 2|\cos t|$. Al sumar π a t, los dos factores trigonométricos cambian de signo, así que la señal se conserva y π es un período. La envolvente se repite con ese mismo desplazamiento. En cero, la señal es cero aunque la envolvente superior vale dos; el producto conserva la diferencia entre la cota y el valor efectivo.

Ejercicio 24. Una tasa con cambio de escala

La frecuencia angular es $\omega = \pi$ y la amplitud es dos. La tasa instantánea es $2\pi\cos(\pi t)$; vale 2π en cero y cero en $t = 1/2$. Para un incremento temporal Δt, el cociente en cero es $Q = 2\sin(\pi\Delta t)/\Delta t = 2\pi\,\operatorname{sin}h/h$, con $h = \pi\Delta t$. Si $0 < |h| < \pi/2$, la cota geométrica da $|Q - 2\pi| \leq \pi h^2 = \pi^3(\Delta t)^2$. Una condición suficiente es $0 < |\Delta t| \leq 1/100$: entonces $|h| \leq \pi/100 < \pi/2$ y el error es a lo sumo $\pi^3/10000 < 0{,}01$, usando la cota $\pi < 4$. La desigualdad controla ambos signos del incremento y mantiene las unidades de altura por unidad de tiempo.

Diagnóstico de salida

Relaciona una entrada temporal con su ángulo y sus unidades. Recupera eje medio, amplitud y período de una oscilación; identifica qué datos y supuestos sostienen esos parámetros. Justifica las familias de soluciones y los extremos de un intervalo. Compara dos señales mediante sus fases o sus muestras. Explica cómo una cota del cociente de cambio aproxima una tasa instantánea.

CAPÍTULO 21

Composición, inversión y modelización funcional

Una empresa aplica un descuento del veinte por ciento al precio de un producto y cobra después una tarifa fija de tres mil pesos por el despacho. Otra empresa anuncia los mismos dos cambios, en el orden contrario. ¿Producen el mismo cobro? Si conocemos el total pagado, ¿podemos reconstruir el precio inicial? La primera pregunta exige seguir una cadena de operaciones; la segunda pide recorrerla hacia atrás. Ambas dependen del orden y de los valores que cada etapa admite.

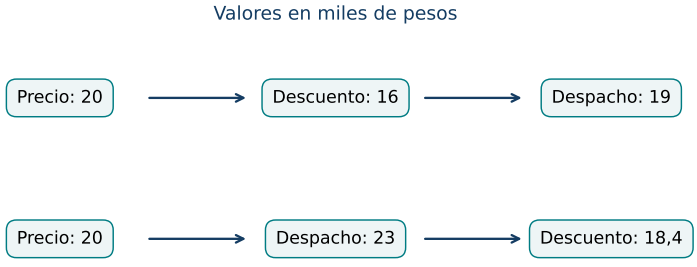
Las familias funcionales estudiadas en los capítulos anteriores permiten construir cadenas mucho más variadas. Una temperatura produce una señal eléctrica; la señal se transforma en una lectura; una calibración convierte esa lectura en una estimación. La fórmula final reúne varias decisiones: qué entra, qué sale, qué restricciones conserva y qué parte del fenómeno representa. En este capítulo trataremos esas decisiones como parte del razonamiento matemático.

Seguir una salida hasta la siguiente entrada

Sean $g : D_g \to B$ y $f : D_f \to C$. La composición $f \circ g$ asigna a cada entrada admisible x el valor $f(g(x))$. Su dominio natural es

$$D_{f\circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\}.$$

La función interior actúa primero. Para componer en todo D_g basta que $g(D_g) \subseteq D_f$. Cuando esta inclusión falla, la misma regla puede definir una composición sobre el subconjunto indicado. Llamaremos imagen de un conjunto $S \subseteq D_g$ al conjunto $g(S) = \{g(x) : x \in S\}$. La preimagen $g^{-1}(T) = \{x \in D_g : g(x) \in T\}$ está definida para cualquier conjunto T de salidas; esta notación designa aquí un conjunto, incluso cuando g carece de función inversa.



Propiedades del encadenamiento

Propiedad	Hipótesis y alcance
Dominio natural	Se exige $x \in D_g$ y $g(x) \in D_f$ para evaluar $f \circ g$.
Identidad	$\mathrm{id}(x) = x$ conserva los valores; $f \circ \mathrm{id}_{D_f} = f$ y $\mathrm{id}_C \circ f = f$ para $f : D_f \to C$.
Asociatividad	$h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g$ donde x, $g(x)$ y $f(g(x))$ cumplen las tres restricciones.
Orden de las etapas	La igualdad $f \circ g = g \circ f$ requiere comprobación de valores y dominios.

Pruebas. Véase «Encadenamiento, dominio y asociatividad» en el apéndice de demostraciones.

Problema 1. Descuento y despacho

Un producto cuesta $p \geq 0$ miles de pesos. Se aplican $d(p) = 0{,}8p$ y $s(p) = p + 3$. Hallar ambos cobros y determinar cuándo coinciden.

Solución. Descontar y despachar produce $(s \circ d)(p) = 0{,}8p + 3$. Despachar y descontar produce $(d \circ s)(p) = 0{,}8p + 2{,}4$. La diferencia es 0,6 miles de pesos para toda entrada admisible. Por tanto, los cobros difieren en seiscientos pesos y no coinciden. Para $p = 20$, los totales son 19 y 18,4 miles. La diferencia constante expresa que la segunda empresa también descuenta una parte del despacho.

Problema 2. Una misma regla con dominios distintos

Sean $g(x) = x^2$, definida en $\mathbb{R}$, y $f(u) = \sqrt{u}$, definida en $[0, \infty)$. Determinar las dos composiciones como funciones.

Solución. Todo cuadrado pertenece al dominio de la raíz; por ello $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ para $x \in \mathbb{R}$. Para $g \circ f$, la entrada debe satisfacer $x \geq 0$; allí $(g \circ f)(x) = (\sqrt{x})^2 = x$. Una composición es el valor absoluto sobre $\mathbb{R}$ y la otra es la identidad sobre $[0, \infty)$. En particular, evaluar $f \circ g$ en -2 da 2, mientras que $g \circ f$ carece de valor en esa entrada.

Problema 3. Tres etapas compatibles

Una señal $x \in [0, 4]$ pasa por $g(x) = x + 1$, por $f(u) = u^2$ y por $h(v) = \log_2 v$. Calcular la salida y justificar que puede agruparse de dos maneras.

Solución. Las salidas intermedias pertenecen a $[1, 5]$ y $[1, 25]$, respectivamente, de modo que el logaritmo recibe siempre un número positivo. La salida es $\log_2((x+1)^2) = 2\log_2(x+1)$. Tanto $h(f(g(x)))$ como $(h \circ f)(g(x))$ evalúan esos mismos tres pasos. Para $x = 3$, la cadena $3 \mapsto 4 \mapsto 16 \mapsto 4$ comprueba el resultado. La identidad logarítmica se usa con $x + 1 > 0$.

Conservar las restricciones de la cadena

Para que una salida pase a la etapa siguiente, debe cumplir las condiciones de entrada de esa etapa. Si la función exterior es un logaritmo, examinamos si la salida interior es positiva; si es una raíz par, si esa salida es no negativa; si aparece un cociente, si su denominador tiene un valor distinto de cero. Estas comprobaciones siguen la cadena en su orden de evaluación y el dominio obtenido acompañará cualquier simplificación posterior. La intersección $D_f \cap D_g$ responde a otra

pregunta, la de qué números sirven como entradas de ambas funciones por separado; al componer, necesitamos que $g(x)$ pueda entrar en f.

Propiedades de los dominios compuestos

Propiedad	Hipótesis y alcance
Preimagen del dominio exterior	$D_{f\circ g} = g^{-1}(D_f)$, con la preimagen tomada dentro de D_g.
Logaritmo exterior	Para $f(u) = \log_a u$, $a > 0$, $a \neq 1$, se exige $g(x) > 0$.
Raíz par exterior	Para $f(u) = \sqrt[2n]{u}$, $n \geq 1$, se exige $g(x) \geq 0$.
Simplificación y dominio	Si una regla simplificada coincide con $f(g(x))$ en su dominio, la composición conserva ese dominio; una extensión requiere declararse.

Pruebas. Véase «Restricciones de una composición» en el apéndice de demostraciones.

Problema 4. La raíz de un cociente

Determinar el dominio de $F(x) = \sqrt{(x-1)/(x+2)}$.

Solución. El cociente exige $x \neq -2$ y la raíz exige $(x-1)/(x+2) \geq 0$. Los puntos -2 y 1 separan los intervalos de signo. A la izquierda de -2 ambos factores son negativos; entre -2 y 1 tienen signos opuestos; a la derecha de 1 son positivos. Se incluye 1, cuyo cociente es cero, y se excluye -2. El dominio es $(-\infty, -2) \cup [1, \infty)$. Por ejemplo, $F(-3) = 2$ y $F(1) = 0$ comprueban las dos componentes.

Problema 5. Logaritmo después de una raíz

Hallar el dominio de $G(x) = \ln(\sqrt{5-2x} - 1)$.

Solución. Primero se requiere $5 - 2x \geq 0$. El logaritmo añade $\sqrt{5-2x} > 1$. Como ambos lados son no negativos, elevar al cuadrado conserva esa desigualdad y da $5 - 2x > 1$, es decir, $x < 2$. Esta condición ya garantiza la existencia de la raíz. El dominio es $(-\infty, 2)$. No hay una ley que convierta el logaritmo de esta diferencia en diferencia de logaritmos; la expresión dada describe adecuadamente la regla. En $x = 0$ se obtiene $\ln(\sqrt{5} - 1)$, y en $x = 2$ el argumento logarítmico es cero, fuera del dominio.

Problema 6. Cancelar con memoria del dominio

Sean $g(x) = 1/(x-1)$ y $f(u) = u/(u+1)$. Determinar $f \circ g$ y compararla con $q(x) = 1/x$ en su dominio natural.

Solución. Se exige $x \neq 1$ y $g(x) \neq -1$. La ecuación $1/(x-1) = -1$ tiene solución $x = 0$. Para $x \notin \{0, 1\}$,

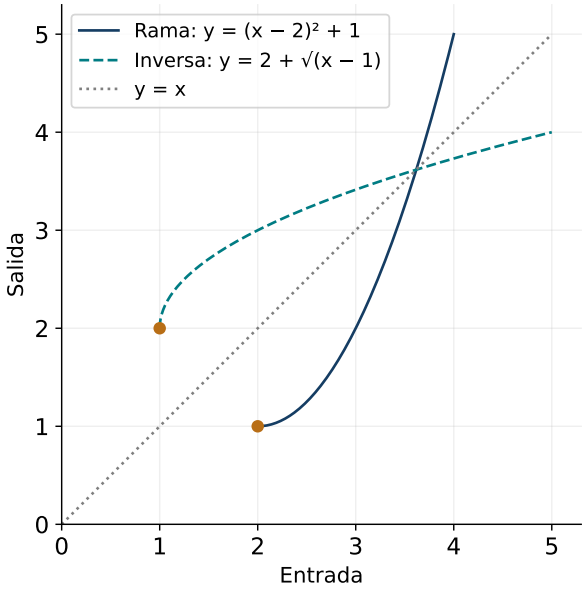
$$f(g(x)) = \frac{1/(x-1)}{1/(x-1)+1} = \frac{1}{x}.$$

La composición es la restricción de q a $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. La función q también admite $x = 1$ y vale allí 1; asignar ese valor extiende la composición. El proceso original sigue sin tener primera salida en $x = 1$.

Volver desde la salida

Una función $f : D \to C$ es inyectiva cuando $f(x_1) = f(x_2)$ implica $x_1 = x_2$. Es sobreyectiva sobre C cuando $f(D) = C$. Es biyectiva cuando cumple ambas condiciones. Si f es inyectiva, cada $y \in f(D)$ tiene una única entrada $x \in D$; la función inversa sobre la imagen, $f^{-1} : f(D) \to D$, asigna esa entrada a y. Para hablar de inversa sobre todo un codominio declarado C se exige además sobreyectividad sobre C.

La gráfica de la inversa contiene el punto (y, x) por cada punto (x, y) de la gráfica original. Por ello las dos gráficas se reflejan en la recta $y = x$, con sus dominios e imágenes intercambiados. El símbolo f^{-1} representa la función inversa; el recíproco $1/f(x)$ representa otra operación.



Propiedades de la inversión

Propiedad	Hipótesis y alcance
Existencia y unicidad	$f : D \to f(D)$ admite inversa exactamente cuando es inyectiva.
Comprobación bilateral	$f^{-1}(f(x)) = x$ para $x \in D$ y $f(f^{-1}(y)) = y$ para $y \in f(D)$.
Orden estricto	Una función estrictamente creciente o estrictamente decreciente en un conjunto ordenado es inyectiva.
Inversa de una cadena	Para biyecciones compatibles $g : A \to B$ y $f : B \to C$, $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.
Reflexión de gráficas	La gráfica inversa intercambia ambas coordenadas; el nuevo dominio es $f(D)$.

Pruebas. Véase «Inyectividad, inversa y orden de recuperación» en el apéndice de demostraciones.

Problema 7. Deshacer una calibración afín

Un sensor admite $T \in [-10, 50]$ grados Celsius y entrega $V = 0{,}04T + 1{,}2$ voltios. Hallar la imagen y la función que recupera la temperatura.

Solución. El coeficiente positivo hace la función estrictamente creciente. Las salidas extremas son 0,8 y 3,2 voltios; su imagen es $[0{,}8, 3{,}2]$. Despejar da $T = (V - 1{,}2)/0{,}04 = 25V - 30$, con V expresado en voltios. Sustituir en la fórmula inicial produce V, y sustituir la lectura inicial en la inversa produce T. Para $V = 2$, se recuperan 20 grados. Una lectura de 4 voltios queda fuera del intervalo de calibración y exige investigar el modelo o el sensor.

Problema 8. Elegir una rama de la parábola

Para $f(x) = (x - 2)^2 + 1$, hallar las inversas de sus restricciones a $[2, \infty)$ y a $(-\infty, 2]$.

Solución. Cada restricción tiene imagen $[1, \infty)$. En la primera, $x - 2 \geq 0$, de modo que $y - 1 = (x-2)^2$ equivale a $x = 2 + \sqrt{y - 1}$. En la segunda se cumple $x - 2 \leq 0$ y se obtiene $x = 2 - \sqrt{y - 1}$. Cada fórmula lleva $[1, \infty)$ a su rama correspondiente. La función sobre $\mathbb{R}$ repite, por ejemplo, el valor 2 en $x = 1$ y $x = 3$; escoger una rama aporta la unicidad requerida.

Problema 9. Inversa racional con un valor excluido

Determinar la inversa de $f(x) = (2x + 1)/(x - 3)$ en $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Solución. De $y(x - 3) = 2x + 1$ se deduce $(y - 2)x = 3y + 1$. El valor $y = 2$ llevaría a $-6 = 1$, imposible. Para $y \neq 2$ existe el único candidato $x = (3y + 1)/(y - 2)$, que nunca vale 3, pues eso exigiría $1 = -6$. Así, la imagen es $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ y $f^{-1}(y) = (3y + 1)/(y - 2)$. Estas equivalencias demuestran existencia y unicidad; sustituir $y = 5$ da $x = 16/3$, cuya imagen es 5.

Problema 10. Una cadena exponencial hacia atrás

Sea $F(x) = 5 + 2e^{3x-1}$ en $\mathbb{R}$. Hallar su inversa y resolver $F(x) = 9$.

Solución. La cadena multiplica por 3, resta 1, exponencia, multiplica por 2 y suma 5. Es estrictamente creciente y su imagen es $(5, \infty)$. Para recuperar x se resta 5, se divide por 2, se toma logaritmo, se suma 1 y se divide por 3:

$$F^{-1}(y) = \frac{1 + \ln((y - 5)/2)}{3}, \qquad y > 5.$$

La ecuación tiene solución única $x = (1 + \ln 2)/3$. Al sustituir, $3x - 1 = \ln 2$ y la salida es $5 + 2 \cdot 2 = 9$. La inversa invierte el orden de las etapas además de invertir cada operación.

Un problema inverso puede tener varias respuestas

Dada una salida b, el problema inverso consiste en encontrar el conjunto $f^{-1}(\{b\})$ de entradas que la producen. Ese conjunto puede ser vacío, unitario o tener varios elementos. Una función inversa selecciona la única entrada de cada salida en la imagen de una función inyectiva. En una aplicación, restricciones como tiempo positivo, intervalo de observación o rama de movimiento pueden reducir el conjunto de candidatos.

Propiedades de las preimágenes y las ramas

Propiedad	Hipótesis y alcance
Clasificación de soluciones	$f(x) = b$ se resuelve describiendo $f^{-1}(\{b\})$ dentro del dominio declarado.
Cadena inversa por conjuntos	$(f \circ g)^{-1}(S) = g^{-1}(f^{-1}(S))$ para las preimágenes compatibles.
Restricción inyectiva	Si f es inyectiva sobre $I \subseteq D$, la ecuación tiene a lo sumo una solución en I.
Ramas exhaustivas	Si $D = \bigcup I_j$, la unión de las soluciones halladas en cada I_j da todas las soluciones en D.

Pruebas. Véase «Preimágenes, candidatos y ramas exhaustivas» en el apéndice de demostraciones.

Problema 11. Altura y dos instantes

En un modelo de lanzamiento, $h(t) = 20t - 5t^2$ metros para $t \in [0, 4]$ segundos. Determinar los instantes con altura 15 metros y explicar la recuperación de tiempo.

Solución. La ecuación equivale a $t^2 - 4t + 3 = 0$, cuyas raíces son 1 y 3. Ambas pertenecen al intervalo y dan 15 metros. Como $h(t) = 20 - 5(t-2)^2$, la altura aumenta hasta $t = 2$ y disminuye después. La rama ascendente recupera $t = 2 - \sqrt{(20-h)/5}$; la descendente recupera $t = 2 + \sqrt{(20-h)/5}$, ambas para $0 \le h \le 20$. Una altura aislada de 15 metros exige conocer la rama para fijar un instante único.

Problema 12. Un sensor que satura

Un dispositivo entrega $r(T) = T$ para $0 \le T \le 80$ y $r(T) = 80$ para $80 < T \le 120$. Hallar las preimágenes de 50, 80 y 90.

Solución. La salida 50 procede sólo de $T = 50$, por la primera regla. La salida 80 procede de cada $T \in [80, 120]$: incluye el extremo de la primera regla y toda la segunda región. La salida 90 carece de preimagen porque la imagen del dispositivo es $[0, 80]$. El modelo admite inversión sobre $[0, 80]$ si se restringe la temperatura a ese mismo intervalo; una lectura saturada en el dominio completo informa un intervalo de temperaturas.

Problema 13. Recuperar una fase dentro del intervalo

Una señal satisface $s(t) = 2 + \sin(\pi t/6)$ para $0 \le t \le 12$ segundos. Hallar todas las entradas que producen $s = 5/2$.

Solución. El ángulo $\theta = \pi t/6$ recorre $[0, 2\pi]$. La ecuación $\sin\theta = 1/2$ da $\theta = \pi/6$ o $5\pi/6$ dentro de ese intervalo. Por tanto $t = 1$ o $t = 5$ segundos. Las otras familias periódicas quedan fuera de la ventana. La inversa principal $\arcsin(1/2) = \pi/6$ encuentra la primera rama; la simetría del seno aporta la segunda. Sustituir ambos tiempos confirma la salida $5/2$.

Unidades y parámetros que dicen algo del fenómeno

Un modelo funcional representa una relación entre magnitudes bajo supuestos explícitos. Debe declarar variable de entrada, variable de salida, unidades, parámetros, intervalo de uso y origen de

sus datos. En $C(t) = Ae^{-kt}$, el argumento kt es adimensional; si t se expresa en horas, k se expresa en horas inversas. El parámetro A tiene las unidades de C. Una suma combina magnitudes con las mismas unidades; una razón puede normalizar una magnitud mediante una escala de su misma dimensión.

Cambiar la unidad o el origen temporal puede cambiar los valores numéricos de los parámetros y conservar la misma predicción física. Conviene distinguir parámetros identificables por los datos de combinaciones que los datos dejan indeterminadas.

Propiedades de las escalas y los parámetros

Propiedad	Hipótesis y alcance
Escala de entrada	Si $t = a\tau + b$, $a \neq 0$, la nueva representación es $\tilde{f}(\tau) = f(a\tau + b)$ sobre las entradas transformadas.
Escala de salida	Si $z = (y - c)/d$, $d \neq 0$, se obtiene $z = (f(t) - c)/d$; recuperar y exige $y = c + dz$.
Normalización	$\tau = (t - t_0)/T$ es adimensional cuando $T \neq 0$ tiene la unidad de t; $z = (y - y_0)/Y$ procede análogamente.
Identificabilidad	Un parámetro es identificable respecto de los datos cuando todos los parámetros admisibles que reproducen esos datos le asignan el mismo valor.
Coherencia dimensional	Los términos sumados tienen una unidad común y los argumentos de exponenciales y logaritmos son adimensionales.

Pruebas. Véase «Escalas, normalización e identificabilidad» en el apéndice de demostraciones.

Problema 14. Caudal, concentración y unidades

En un modelo, una sustancia entra con caudal constante $q = 3$ litros por minuto y concentración $c = 2$ gramos por litro. Expresar la masa acumulada tras t minutos, suponiendo depósito inicialmente vacío y ausencia de pérdidas.

Solución. El volumen es $V(t) = 3t$ litros para $t \geq 0$. La masa se obtiene componiendo con $M(V) = 2V$ gramos: $M(t) = 6t$ gramos. Las unidades se multiplican como $(\text{g/L})(\text{L/min})\text{min} = \text{g}$. Tras 5 minutos hay 30 gramos. Un depósito de capacidad 60 litros limita la validez sin rebalse a $0 \leq t \leq 20$. La acumulación supone que la sustancia permanece en el depósito y que ambos parámetros conservan sus valores.

Problema 15. Pasar de minutos a segundos

La concentración $C(t) = 80e^{-0{,}2t}$ se expresa en miligramos por litro y t en minutos. Reescribir el modelo con s en segundos y hallar el tiempo en que alcanza 40.

Solución. Como $t = s/60$, se obtiene $C(s) = 80e^{-s/300}$. El nuevo coeficiente es $1/300$ por segundo; ambos exponentes son adimensionales. Para $C = 40$, $e^{-s/300} = 1/2$ da $s = 300 \ln 2$ segundos, aproximadamente 208 segundos al segundo más próximo. El error de redondeo es menor que medio segundo. En minutos el valor exacto es $5 \ln 2$, y multiplicarlo por 60 confirma la equivalencia.

Problema 16. Medir desde un nuevo origen

Una temperatura cumple $T(t) = 18 + 42e^{-t/10}$, con $t \geq 0$ en minutos. Tomar $\tau = t - 5$ y normalizar la diferencia respecto del ambiente mediante $z = (T - 18)/42$.

Solución. Con $t = \tau + 5$, el modelo pasa a $T(\tau) = 18 + 42e^{-1/2}e^{-\tau/10}$, con $\tau \geq -5$. El nuevo coeficiente de la parte exponencial es la diferencia térmica existente en el instante que ahora llamamos cero. La variable normalizada satisface $z = e^{-(\tau+5)/10}$. Si además se usa $u = t/10$, resulta $z = e^{-u}$. Recuperar la temperatura exige $T = 18 + 42z$. Estas representaciones conservan las mismas predicciones cuando se transforman las entradas y las unidades de manera coherente.

Problema 17. Datos que identifican una combinación

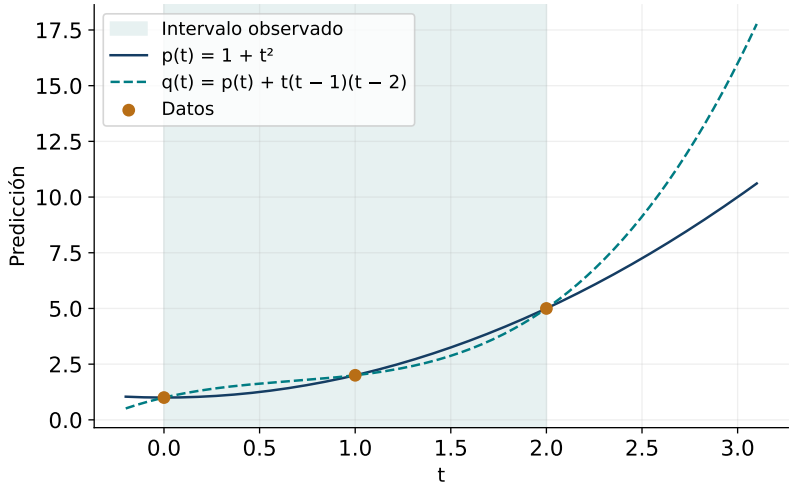
Un instrumento se representa por $R(t) = ab\,t$, con $a > 0$ y $b > 0$. Se observa $R(1) = 6$ y $R(2) = 12$. ¿Se determinan a y b?

Solución. La primera observación impone $ab = 6$ y la segunda repite esa condición. Todos los pares $(a, b) = (u, 6/u)$, $u > 0$, reproducen los datos y generan exactamente la misma función $R(t) = 6t$. El producto es identificable, mientras que los factores individuales quedan indeterminados. Una medición independiente de $a = 2$, por ejemplo, fijaría $b = 3$. Repetir lecturas del mismo tipo puede comprobar la regla lineal, pero esas lecturas dependen siempre de la misma combinación de parámetros.

Qué afirman los datos y qué añade el modelo

Cuando disponemos de varios datos podemos buscar una función que pase por todos ellos y usarla dentro del intervalo observado: esa tarea se llama interpolar. Si los datos presentan discrepancias respecto de una familia elegida, podemos fijar un criterio de proximidad y buscar los parámetros que lo satisfacen mejor; estamos ajustando un modelo. Evaluar cualquiera de esas reglas fuera del intervalo observado es extrapolar. En cada caso conservaremos qué información procede de los datos y qué decisiones añade la construcción, porque funciones que coinciden exactamente en una muestra pueden diferir entre sus entradas o fuera del intervalo.

Para un dato (t_i, y_i) definiremos el residuo $r_i = y_i - \hat{y}_i$, donde $\hat{y}_i$ es la predicción. La suma de cuadrados $\sum r_i^2$ es un criterio de ajuste: penaliza residuos grandes y evita cancelaciones entre signos. Su valor depende de la escala usada para medir la salida. Un criterio debe compararse en la misma escala y sobre los mismos datos.



Propiedades del ajuste y su alcance

Propiedad	Hipótesis y alcance
Recta por dos puntos	Si $t_1 \neq t_2$, existe una única función afín que pasa por ambos datos, de pendiente $(y_2 - y_1)/(t_2 - t_1)$.
Interpolaciones múltiples	Si p interpola nodos distintos t_i, también lo hace $p(t) + q(t)\prod_i (t - t_i)$ para cualquier función q definida allí.
Ajuste constante por cuadrados	Para $n \geq 1$, el único valor c que minimiza $\sum (y_i - c)^2$ es la media $\bar{y}$.
Predicción y evidencia	La coincidencia en un conjunto finito de datos verifica esos valores; extender una ley requiere supuestos adicionales y contraste.

Pruebas. Véase «Interpolación, residuos y alcance de un ajuste» en el apéndice de demostraciones.

Problema 18. Interpolar y salir del intervalo

Una tabla registra $(t, y) = (0, 10)$ y $(4, 18)$, con tiempo en horas. Construir el modelo afín y clasificar las predicciones para $t = 2$ y $t = 7$.

Solución. La pendiente es $(18-10)/4 = 2$ unidades de salida por hora, y la ordenada inicial es 10. El modelo es $y = 10+2t$. Predice 14 en $t = 2$, por interpolación dentro de $[0, 4]$, y 24 en $t = 7$, por extrapolación. La unicidad corresponde a la familia afín elegida. Por ejemplo $y = 10+2t+t(t-4)$ pasa también por los dos datos y predice 10 en $t = 2$ y 45 en $t = 7$. Los dos datos solos dejan abierta la elección de familia.

Problema 19. Dos modelos, tres coincidencias

Los datos son $(0, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, 5)$. Comparar $p(t) = 1 + t^2$ y $q(t) = 1 + t^2 + t(t-1)(t-2)$ en los datos, en $t = 3/2$ y en $t = 3$.

Solución. La diferencia $q - p = t(t-1)(t-2)$ se anula en los tres nodos. En $t = 3/2$ vale $-3/8$, de modo que $p = 13/4$ y $q = 23/8$. En $t = 3$, $p = 10$ y $q = 16$. Las predicciones interiores ya difieren; fuera del intervalo observado la diferencia aumenta en este ejemplo. Los residuos cero

en tres puntos certifican sólo esas coincidencias. Una justificación física de forma cuadrática o nuevas observaciones podrían orientar la selección.

Problema 20. Elegir una constante por residuos

Tres mediciones en la misma unidad dan 8, 10 y 15. Ajustar un modelo constante mediante suma de cuadrados y comparar con la constante 10.

Solución. La media es $\bar{y} = 33/3 = 11$. Sus residuos son $-3, -1, 4$ y la suma de cuadrados es $9 + 1 + 16 = 26$. Para la constante 10 son $-2, 0, 5$, con suma 29. Para cualquier c,

$$\sum_{i=1}^{3}(y_i - c)^2 = 26 + 3(c - 11)^2.$$

El término adicional es no negativo y se anula sólo en $c = 11$, lo que demuestra el mínimo único. La elección se refiere al criterio cuadrático; si se minimizara la suma de valores absolutos, habría que estudiar otro problema.

Problema 21. Dos lecturas de un decaimiento

Se propone $C(t) = Ae^{-kt}$ con $A > 0$, $k > 0$, tiempo en horas. Las lecturas exactas para este problema son $C(0) = 50$ y $C(2) = 20$. Determinar los parámetros y el instante en que el modelo predice $C = 5$.

Solución. La lectura inicial da $A = 50$. La segunda impone $e^{-2k} = 2/5$, así que $k = \frac{1}{2}\ln(5/2)$ por hora. Para $C = 5$, $e^{-kt} = 1/10$, de donde

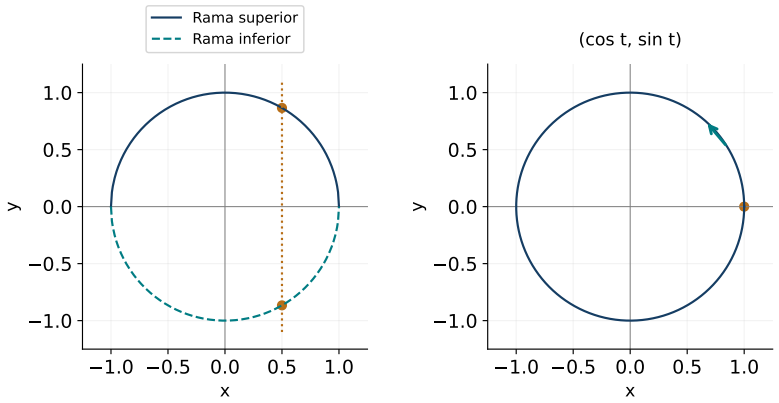
$$t = \frac{2\ln 10}{\ln(5/2)} \text{ horas.}$$

Los parámetros son únicos dentro de la familia y de las restricciones dadas. El instante excede las dos horas observadas, pues $5 < 20$ y el modelo es decreciente; se trata de extrapolación. Las lecturas reales tendrían precisión finita y exigirían considerar su incertidumbre antes de atribuir exactitud a los parámetros.

Una ecuación puede describir una curva entera

Una relación implícita se presenta mediante una condición $F(x, y) = 0$ que deben cumplir los pares (x, y). Para que defina una función $y = f(x)$ en un conjunto de entradas, cada entrada debe tener exactamente una salida en la región elegida. La circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ contiene dos alturas para $-1 < x < 1$. Sus semicircunferencias superior e inferior sí dan funciones sobre $[-1, 1]$.

Otra forma de recorrer una curva consiste en expresar ambas coordenadas mediante un parámetro: $(x(t), y(t))$. Al eliminar el parámetro se obtiene una relación que contiene los puntos recorridos; debe comprobarse además que las restricciones recuperan exactamente el recorrido. Un mismo lugar geométrico admite distintas velocidades y distintos sentidos de recorrido.



Propiedades de relaciones y parametrizaciones

Propiedad	Hipótesis y alcance
Criterio de función	Una relación define $y = f(x)$ sobre D cuando cada $x \in D$ tiene una única salida admitida.
Dos ramas circulares	$x^2 + y^2 = r^2$, $r > 0$, equivale a $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ con $\lvert x\rvert \le r$; se unen las ramas.
Eliminación del parámetro	Una relación deducida de $(x(t), y(t))$ contiene su imagen; la igualdad de conjuntos exige comprobar también el recíproco.
Nuevo parámetro	Una biyección $t = \phi(s)$ entre intervalos conserva la imagen de $\gamma(t)$ al formar $\gamma(\phi(s))$.

Pruebas. Véase «Relaciones implícitas y reparametrización de curvas» en el apéndice de demostraciones.

Problema 22. Una elipse y sus ramas

Describir la relación $x^2/9 + y^2/4 = 1$ mediante funciones y decidir para qué entradas hay una o dos alturas.

Solución. Despejar da $y^2 = 4(1 - x^2/9)$. Hay salidas reales exactamente cuando $\lvert x\rvert \le 3$. Las ramas son $y = 2\sqrt{1 - x^2/9}$ y $y = -2\sqrt{1 - x^2/9}$. Para $-3 < x < 3$ la raíz es positiva y hay dos alturas distintas; en $x = \pm 3$ ambas valen cero. Fuera de $[-3, 3]$ no hay salidas. Restringir a $y \ge 0$ selecciona la primera función y su imagen es $[0, 2]$.

Problema 23. Una curva recorrida parcialmente

Sea $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ para $t \in [-1, 2]$. Eliminar el parámetro y describir exactamente la imagen.

Solución. Se obtiene $y^2 = x^3$, con $x \ge 0$. Si $t \in [0, 2]$, entonces $0 \le x \le 4$ y $y = x^{3/2}$. Si $t \in [-1, 0]$, entonces $0 \le x \le 1$ y $y = -x^{3/2}$. Cada punto de esas ramas se recupera tomando $t = \sqrt{x}$ o $t = -\sqrt{x}$ en su intervalo. Así, la imagen es la unión de esas dos ramas restringidas. La ecuación $y^2 = x^3$ por sí sola incluiría, por ejemplo, $(4, -8)$, que exigiría $t = -2$ y queda fuera del recorrido.

Problema 24. Igual trayectoria, distinto reloj

Dos movimientos son $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ para $0 \le t \le 2\pi$ y $\eta(s) = (\cos(2s), \sin(2s))$ para $0 \le s \le \pi$. Comparar trayectorias, correspondencia temporal y recuperación del parámetro desde la posición inicial.

Solución. El cambio $t = 2s$ es una biyección de $[0, \pi]$ a $[0, 2\pi]$, así que ambas imágenes son la circunferencia unidad completa, recorrida en el mismo sentido. La segunda llega a cada fase empleando la mitad del valor de su parámetro: $t = \pi/2$ corresponde a $s = \pi/4$. En ambos intervalos la posición $(1, 0)$ aparece en los dos extremos, por lo que la posición sola deja dos parámetros posibles. Usar $[0, 2\pi)$ y $[0, \pi)$ da recorridos inyectivos; recuperar el ángulo requiere entonces determinar el cuadrante y respetar el extremo excluido. La relación geométrica y la ley temporal responden a preguntas distintas del mismo movimiento.

Ejercicios para trabajar sin profesor

En cada ejercicio, declare el dominio, justifique las operaciones y compruebe el resultado en la relación inicial. En los modelos, conserve las unidades y distinga las conclusiones algebraicas de las hipótesis de uso.

1. Sean $a(x) = x - 4$ y $b(x) = 3x$. Calcule $a \circ b$, $b \circ a$ y su diferencia en $\mathbb{R}$.

2. Para $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x + 1}$ con sus dominios naturales, determine ambas composiciones y sus dominios.

3. Una cadena lleva $x \in [1, 3]$ a $2x$, después a $u+1$ y finalmente a $\ln v$. Halle la regla, su imagen y la salida en $x = 1$.

4. Determine el dominio de $\sqrt{(x + 3)/(x - 2)}$.

5. Determine el dominio de $\ln(4 - \sqrt{x + 2})$.

6. Sean $g(x) = 1/(x + 2)$ y $f(u) = 1/u$. Determine $f \circ g$ como función y compárela con $x + 2$ en $\mathbb{R}$.

7. La calibración $V = 0{,}05T + 0{,}5$ admite $0 \le T \le 40$. Halle la inversa y recupere T desde $V = 1{,}25$.

8. Halle las inversas de $q(x) = (x + 1)^2 - 2$ en las ramas $x \ge -1$ y $x \le -1$.

9. Determine la inversa de $f(x) = (x + 4)/(2x - 1)$ en su dominio natural y precise su imagen.

10. Halle la inversa de $F(x) = 3 + 4e^{2x}$ y resuelva $F(x) = 11$.

11. Un modelo de altura es $h(t) = 12t - 3t^2$ para $0 \le t \le 4$. Halle los tiempos con $h = 9$ y la altura máxima.

12. Una lectura es $r(x) = \min(x, 5)$ para $x \in [0, 9]$. Halle las preimágenes de 3, 5 y 6.

13. Halle todos los tiempos $t \in [0, 8]$ que satisfacen $1 + \cos(\pi t/4) = 1$.

14. Un líquido entra a 4 litros por minuto con concentración 3 gramos por litro. El depósito comienza vacío y admite 48 litros. Modele la masa y su intervalo de uso sin pérdidas ni rebalse.

15. Reescriba $C(t) = 60e^{-0{,}1t}$, con t en horas, usando minutos m. Halle el tiempo exacto para llegar a 20.

16. Para $y(t) = 5 + 12e^{-t/4}$, $t \ge 0$, use $\tau = t - 2$ y después $u = t/4$, $z = (y - 5)/12$. Precise dominios y reglas.

17. Se propone $S(t) = (a+b)t$ con $a, b > 0$. Las lecturas $S(1) = 7$ y $S(3) = 21$ son exactas. Determine qué combinación queda identificada y describa todos los pares admisibles.

18. Interpole afínmente los datos $(1, 4)$ y $(5, 12)$. Evalúe en $t = 3$ y $t = 8$ y clasifique las predicciones.

19. Los modelos $p(t) = 2t + 1$ y $q(t) = 2t + 1 + 2t(t-2)$ coinciden en dos nodos. Halle esos nodos y compare predicciones en $t = 1$ y $t = 3$.

20. Ajuste por cuadrados una constante a 4, 7, 7 y 10. Pruebe el mínimo y calcule la suma de cuadrados.

21. En $C(t) = Ae^{-kt}$, $A, k > 0$, se conocen $C(0) = 72$ y $C(3) = 9$. Halle los parámetros y el instante con $C = 1$. Clasifique esta predicción respecto de $[0, 3]$.

22. Exprese $x^2/4 + y^2/9 = 1$ mediante ramas y determine sus dominios e imágenes.

23. Para $\gamma(t) = (t^2, t)$, $t \in [-2, 1]$, elimine el parámetro y describa las ramas con sus restricciones.

24. Compare $\gamma(t) = (t, t^2)$ para $t \in [-1, 2]$ con $\eta(s) = (3s-1, (3s-1)^2)$ para $s \in [0, 1]$. Halle la correspondencia y explique si la primera coordenada permite recuperar cada parámetro.

Soluciones desarrolladas

Ejercicio 1. Orden de cambios afines

Primero multiplicar por tres y luego restar cuatro da $(a \circ b)(x) = 3x - 4$. En el orden contrario resulta $(b \circ a)(x) = 3x - 12$. Ambas están definidas en $\mathbb{R}$ y su diferencia, en el orden escrito, es 8. Para $x = 0$ las salidas -4 y -12 comprueban la diferencia. El orden cambia el tratamiento de la resta fija.

Ejercicio 2. Cuadrado y raíz trasladada

El dominio de g es $[-1, \infty)$. En él $(f \circ g)(x) = (\sqrt{x+1})^2 = x + 1$. En cambio, $g \circ f$ exige $x^2 \geq -1$, condición válida para todo real, y resulta $\sqrt{x^2+1}$ en $\mathbb{R}$. Los dominios se obtienen siguiendo la entrada de cada etapa. En $x = 0$ ambas salidas valen 1, pero esa coincidencia puntual no establece igualdad de funciones.

Ejercicio 3. Tres etapas y una imagen

La cadena es $x \mapsto 2x \mapsto 2x + 1 \mapsto \ln(2x + 1)$. Para $1 \leq x \leq 3$ el argumento recorre $[3, 7]$, siempre positivo. Como cada etapa es creciente, la imagen es $[\ln 3, \ln 7]$. La salida inicial solicitada es $\ln 3$, correspondiente al extremo $x = 1$. Esta comprobación conserva tanto el dominio de partida como la condición del logaritmo.

Ejercicio 4. Signo del cociente

Se necesita $x \neq 2$ y $(x+3)/(x-2) \geq 0$. El cociente es positivo para $x < -3$ y para $x > 2$, negativo entre los puntos críticos y cero en $x = -3$. Por tanto, el dominio es $(-\infty, -3] \cup (2, \infty)$. El extremo -3 produce raíz cero y el extremo 2 anula el denominador, así que reciben tratamientos distintos.

Ejercicio 5. Dos restricciones sucesivas

La raíz exige $x \geq -2$. El logaritmo requiere $4 - \sqrt{x+2} > 0$, equivalente a $\sqrt{x+2} < 4$. Con ambos lados no negativos, esto equivale a $x + 2 < 16$, o $x < 14$. El dominio es $[-2, 14)$. En -2 el argumento vale 4 y el logaritmo existe; en 14 vale cero y queda excluido.

Ejercicio 6. Una regla extendible

La función interior exige $x \neq -2$ y su salida $1/(x+2)$ nunca es cero. La composición vale $1/(1/(x+2)) = x + 2$ en $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. La función afín definida en todo $\mathbb{R}$ extiende esa composición al asignar el valor cero en $x = -2$. La primera operación original carece de valor allí, aunque la fórmula simplificada sí lo tenga.

Ejercicio 7. Invertir con intervalos

La calibración es creciente y lleva $[0, 40]$ a $[0{,}5, 2{,}5]$. Despejar da $T = 20V - 10$ para lecturas en ese intervalo. En $V = 1{,}25$ resulta $T = 15$. La comprobación $0{,}05 \cdot 15 + 0{,}5 = 1{,}25$ y la pertenencia $15 \in [0, 40]$ validan la recuperación. El coeficiente 20 se interpreta en grados por voltio.

Ejercicio 8. Dos signos justificados

Ambas ramas tienen imagen $[-2, \infty)$. De $(x+1)^2 = y + 2$ sale $x + 1 = \sqrt{y+2}$ en la rama derecha y $x + 1 = -\sqrt{y+2}$ en la izquierda. Las inversas son $-1 + \sqrt{y+2}$ y $-1 - \sqrt{y+2}$, respectivamente, para $y \geq -2$. En $y = -2$ ambas dan el vértice $x = -1$; para valores mayores recuperan entradas distintas de la parábola completa.

Ejercicio 9. Un cociente invertible

El dominio inicial excluye $x = 1/2$. La ecuación $y(2x-1) = x+4$ da $(2y-1)x = y+4$. Si $y = 1/2$, conduciría a $0 = 9/2$; si $y \neq 1/2$, tiene el único candidato $x = (y+4)/(2y-1)$, que tampoco vale $1/2$. Así la imagen excluye $1/2$ y la inversa es esa fórmula sobre $\mathbb{R} \setminus \{1/2\}$. Por ejemplo $f(0) = -4$ y la inversa de -4 vale cero.

Ejercicio 10. Desandar una exponencial

La imagen es $(3, \infty)$ y la función es estrictamente creciente. Restar 3, dividir por 4, tomar logaritmo y dividir por 2 da $F^{-1}(y) = \frac{1}{2}\ln((y-3)/4)$ para $y > 3$. Para $y = 11$ se obtiene $x = \frac{1}{2}\ln 2$. Al sustituir, $e^{2x} = 2$ y la salida es $3 + 8 = 11$. Las dos composiciones con la inversa recuperan su respectiva entrada en los dominios indicados.

Ejercicio 11. Subida y bajada

La ecuación $12t - 3t^2 = 9$ equivale a $t^2 - 4t + 3 = 0$, con raíces 1 y 3, ambas admisibles. Además $h(t) = 12 - 3(t-2)^2 \leq 12$, con igualdad en $t = 2$. Por tanto, la altura máxima es 12 y la altura 9 se alcanza antes y después del máximo. Sustituir $t = 1, 3$ produce en ambos casos 9.

Ejercicio 12. Una lectura constante en un intervalo

Para $0 \leq x \leq 5$, la lectura coincide con x; para $5 \leq x \leq 9$ vale 5. Las preimágenes son $\{3\}$, $[5, 9]$ y $\emptyset$, respectivamente. La tercera es vacía porque la imagen completa es $[0, 5]$. Conocer una salida saturada determina un intervalo de entradas y permite expresar exactamente la información conservada por el dispositivo.

Ejercicio 13. Todas las fases admisibles

La ecuación exige $\cos(\pi t/4) = 0$. El ángulo recorre $[0, 2\pi]$, donde las soluciones son $\pi/2$ y $3\pi/2$. Multiplicar por $4/\pi$ da $t = 2$ y $t = 6$. Ambas pertenecen al intervalo y producen salida 1. La enumeración angular completa impide perder la segunda solución al usar una única rama inversa.

Ejercicio 14. Acumulación limitada por capacidad

El volumen es $V(t) = 4t$ litros y la masa $M(V) = 3V$ gramos; componer da $M(t) = 12t$ gramos. La capacidad exige $4t \leq 48$ y el tiempo comienza en cero, por lo que el dominio de uso es $[0, 12]$ minutos. Al llenarse hay 144 gramos. El coeficiente 12 tiene unidades de gramos por minuto y la regla supone concentración constante y conservación de toda la sustancia entrante.

Ejercicio 15. Unidades de la tasa

Como $t = m/60$, se obtiene $C(m) = 60e^{-m/600}$. La tasa numérica es $1/600$ por minuto. Para $C = 20$ se exige $e^{-m/600} = 1/3$ y resulta $m = 600 \ln 3$ minutos. En horas se obtiene $10 \ln 3$, cuyo producto por 60 coincide con el valor anterior. La concentración inicial y las predicciones físicas se conservan tras convertir las entradas.

Ejercicio 16. Traslación y normalización

Con $t = \tau + 2$, $y = 5 + 12e^{-1/2}e^{-\tau/4}$ y el dominio es $\tau \geq -2$. Con $u = t/4$, se tiene $u \geq 0$ y $z = (y - 5)/12 = e^{-u}$, con imagen $(0, 1]$. Recuperar las variables originales requiere $t = 4u$ y $y = 5 + 12z$. En $t = 0$ se recuperan $u = 0$, $z = 1$ e $y = 17$, lo que comprueba el origen original.

Ejercicio 17. Una suma identificada

Las observaciones imponen $a + b = 7$ y $3(a + b) = 21$, que expresan la misma restricción. Todos los pares son $(a, b) = (u, 7 - u)$ con $0 < u < 7$. La suma vale siempre 7 y es identificable; cada componente varía entre pares admisibles. Las lecturas de esta familia sólo dependen de la suma. Una observación adicional que mida uno de los componentes permitiría separar ambos parámetros.

Ejercicio 18. Una familia declarada

La pendiente es $(12 - 4)/(5 - 1) = 2$ y la ordenada es $4 - 2 \cdot 1 = 2$. Así, $y = 2t + 2$. Predice 8 en $t = 3$, por interpolación en $[1, 5]$, y 18 en $t = 8$, por extrapolación. Comprobar $t = 1, 5$ recupera los datos. La fórmula elegida tiene unicidad dentro de las funciones afines y requiere justificación adicional para describir el fenómeno fuera de las mediciones.

Ejercicio 19. Coincidencias finitas

La diferencia es $2t(t - 2)$, que se anula exactamente en $t = 0$ y $t = 2$. En $t = 1$, $p = 3$ y $q = 1$; en $t = 3$, $p = 7$ y $q = 13$. Si los datos se limitan a los dos nodos comunes, la primera comparación es interior y la segunda es exterior. Las coincidencias en los nodos permiten ambos modelos; sus predicciones distintas muestran la información que falta para elegir una familia.

Ejercicio 20. Mínimo cuadrático exacto

La media es $(4 + 7 + 7 + 10)/4 = 7$. Los residuos son $-3, 0, 0, 3$ y su suma de cuadrados es 18. Para cualquier c, escribir $y_i - c = (y_i - 7) + (7 - c)$ y sumar cuadrados da $18 + 4(c - 7)^2$, porque

$\sum(y_i - 7) = 0$. El mínimo vale 18 y se alcanza únicamente en $c = 7$. Esta identidad demuestra el resultado para toda constante admisible.

Ejercicio 21. Recuperación de parámetros y umbral

La primera lectura da $A = 72$. La segunda exige $e^{-3k} = 1/8$, así que $k = \ln 2$ por unidad temporal. Para $C = 1$, se tiene $e^{-kt} = 1/72$ y $t = \ln 72/\ln 2$. Como $72 > 8$, este tiempo es mayor que 3, de modo que la predicción extrapola el intervalo observado. Sustituir los parámetros reproduce las dos lecturas y el umbral. La unicidad se refiere a la familia exponencial positiva asumida.

Ejercicio 22. Dos ramas de la elipse

La ecuación equivale a $y = \pm 3\sqrt{1 - x^2/4}$ con $x \in [-2, 2]$. La rama superior tiene imagen $[0, 3]$ y la inferior $[-3, 0]$. En los extremos $x = \pm 2$ comparten la salida cero; en el interior dan dos valores distintos. La unión describe toda la elipse y cada rama por separado define una función. En $x = 0$ se alcanzan las alturas extremas ± 3.

Ejercicio 23. Restricciones tras eliminar el parámetro

Como $y = t$, se obtiene $x = y^2$ con $-2 \le y \le 1$. En forma de funciones de x, la rama negativa es $y = -\sqrt{x}$ para $0 \le x \le 4$ y la positiva es $y = \sqrt{x}$ para $0 \le x \le 1$. Toda pareja de esas ramas recupera un parámetro admisible tomando $t = y$. El punto $(4, 2)$ cumple $x = y^2$ pero queda fuera del recorrido; conservar el intervalo del parámetro evita incluirlo.

Ejercicio 24. Un cambio de reloj biyectivo

La sustitución $t = 3s - 1$ lleva biyectivamente $[0, 1]$ a $[-1, 2]$, y $\eta(s) = \gamma(3s - 1)$. Las dos imágenes son el arco de parábola $y = x^2$ con $-1 \le x \le 2$. Desde la primera coordenada se recupera $t = x$ y $s = (x + 1)/3$, cada uno único en su intervalo. Las posiciones coinciden para parámetros correspondientes; la proporción entre intervalos del reloj es tres a uno.

Diagnóstico de salida

El lector puede seguir una composición cuando comprueba cada valor intermedio y conserva las restricciones al simplificar. Puede invertir una función cuando establece la unicidad de las entradas sobre el dominio elegido y verifica las dos composiciones. Puede evaluar un modelo cuando explica sus unidades, la información que identifica sus parámetros y el alcance de sus predicciones. Las relaciones implícitas y los cambios de parámetro preparan el estudio de curvas y de tasas de cambio: fijan con precisión qué magnitud depende de cuál y en qué región esa dependencia es una función.

CAPÍTULO 22

Combinatoria, muestreo y descripción de datos

Dos cursos informan que sus estudiantes tardan, en promedio, veinte minutos en llegar al colegio. En uno casi todos viven a una distancia semejante; en el otro conviven viajes de cinco minutos y viajes de más de una hora. ¿Qué información falta para comparar esas experiencias? Antes de calcular conviene conocer a quiénes se preguntó, cómo se registró el tiempo y qué rasgos del conjunto conserva cada resumen.

Una colección de datos permite estudiar valores frecuentes, posiciones centrales y diferencias entre observaciones. Para obtenerla debemos elegir unidades y un procedimiento de selección. Contar las selecciones posibles ayuda a describir ese procedimiento con precisión. El capítulo recorrerá ese trayecto: observar y organizar, resumir y comparar, contar posibilidades y examinar el alcance de una muestra. Todos los datos numéricos de los problemas son construidos para el estudio.

De las personas a los registros

La población es el conjunto de unidades al que se refiere una investigación. La unidad estadística es cada entidad sobre la que se observa una característica: una persona, una vivienda, una pieza producida o un trayecto, según la pregunta. Una muestra es un subconjunto de unidades seleccionado de esa población. Un censo procura observar todas sus unidades.

Una variable asigna a cada unidad un valor de la característica estudiada. Una variable cualitativa registra categorías; sus categorías pueden tener un orden propio, como los niveles de satisfacción, o una organización nominal, como el medio de transporte. Una variable cuantitativa registra cantidades. Los recuentos suelen tomar valores discretos y las mediciones se representan mediante una escala continua, aunque el instrumento las redondee. El dato observado reúne valor, unidad de medida y contexto de registro. Si se mide varias veces a una misma persona, debe precisarse si la unidad de análisis es la persona o cada medición.

Para una muestra de $n \geq 1$ registros, la frecuencia absoluta f_j de una categoría o clase cuenta cuántos registros pertenecen a ella. La frecuencia relativa es $h_j = f_j/n$. Cuando las clases están ordenadas, la frecuencia acumulada $F_j = f_1 + \cdots + f_j$ cuenta los registros hasta la clase j. Los intervalos de una agrupación deben cubrir los datos y asignar cada observación a una única clase; por ejemplo, $[0, 10)$ incluye cero y deja diez para la clase siguiente.

Propiedades de las frecuencias

Propiedad	Hipótesis y alcance
Total absoluto	Para clases exhaustivas y disjuntas, $\sum_j f_j = n$.
Total relativo	$h_j = f_j/n \geq 0$ y $\sum_j h_j = 1$; los porcentajes exactos suman cien por ciento.
Acumulación	En clases ordenadas, $F_j = \sum_{i \leq j} f_i$ es creciente en sentido amplio y termina en n.
Recuperar frecuencias	$f_1 = F_1$ y $f_j = F_j - F_{j-1}$ para $j \geq 2$.

Pruebas. Véase «Partición de registros y frecuencias» en el apéndice de demostraciones.

Problema 1. Qué se observa y a quién

Se quiere describir el tiempo de viaje habitual de los 240 estudiantes de un establecimiento. Se eligen 30 estudiantes y se registra, para cada uno, el tiempo de su viaje del lunes en minutos enteros. Identificar población, muestra, unidad y variable; precisar el alcance de la observación.

Solución. La población objetivo son los 240 estudiantes, la muestra contiene 30 y la unidad estadística es cada estudiante. La variable observada es el tiempo del viaje del lunes, medido en minutos y redondeado al entero. El tamaño muestral es 30; la amplitud de los tiempos requeriría conocer sus valores extremos. Para estudiar un tiempo habitual convendría registrar varios días o formular una pregunta que lo defina: una única observación del lunes describe ese viaje y puede reflejar condiciones particulares de ese día. El procedimiento de selección de los 30 estudiantes también forma parte de la información necesaria.

Problema 2. Una tabla de recuentos

Los números de libros leídos por diez estudiantes durante un mes son $0, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4$. Organizar frecuencias y hallar la proporción que leyó al menos tres libros.

Solución. Para los valores $0, 1, 2, 3, 4$, las frecuencias absolutas son $1, 2, 3, 2, 2$ y las relativas son $1/10, 2/10, 3/10, 2/10, 2/10$. Suman diez y uno, respectivamente. Los valores tres y cuatro reúnen cuatro estudiantes, de modo que la proporción buscada es $4/10 = 40\%$. La tabla representa los diez registros del grupo; extender ese porcentaje a todos los estudiantes del establecimiento exigiría estudiar cómo se eligieron estos diez.

Problema 3. Leer una acumulación

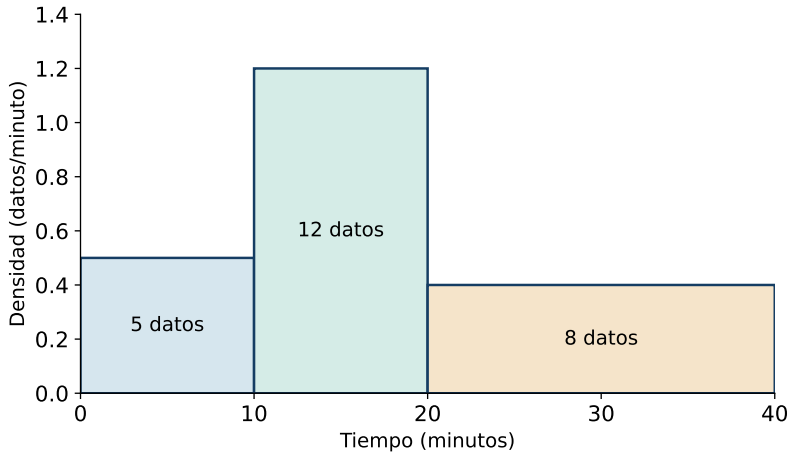
Las frecuencias acumuladas para las clases de tiempo $[0, 10)$, $[10, 20)$ y $[20, 40]$ son $5, 17, 25$. Recuperar las frecuencias simples y calcular el porcentaje de tiempos inferiores a veinte minutos.

Solución. Las frecuencias simples son 5, $17 - 5 = 12$ y $25 - 17 = 8$. El total es 25. Las dos primeras clases reúnen los tiempos estrictamente menores que veinte, por lo que el porcentaje es $17/25 = 68\%$. Una observación de veinte pertenece a la tercera clase, cuyo extremo inferior está incluido. Las diferencias sucesivas son no negativas, como exige una acumulación válida.

Dar forma visible a los datos

Un gráfico de barras representa categorías mediante alturas o longitudes proporcionales a sus frecuencias. El orden de presentación puede elegirse para facilitar una comparación; cuando las categorías tienen un orden sustantivo conviene respetarlo. Un gráfico de líneas enlaza observaciones según una secuencia, como el tiempo, y comunica también esa continuidad o evolución. Los ejes, sus unidades y la escala hacen explícita la relación entre números y dibujo.

Para representar clases numéricas mediante un histograma, cada intervalo de clase será la base de un rectángulo. Queremos que el área muestre cuántos registros contiene, así que debemos repartir la frecuencia f_j sobre una base de amplitud $a_j > 0$: la altura será f_j/a_j. Al multiplicar altura por base recuperamos la frecuencia. Si usamos h_j/a_j, el área representará la frecuencia relativa. Cuando todas las bases tienen la misma amplitud, las alturas permiten comparar directamente los recuentos; con bases distintas, la división por la amplitud conserva el significado de las áreas.



Propiedades de las representaciones

Propiedad	Hipótesis y alcance
Barras y frecuencias	Con escala común y base cero, la altura de cada barra es proporcional a su frecuencia.
Área del histograma	Para amplitud $a_j > 0$ y altura f_j/a_j, el área del rectángulo es f_j.
Densidad relativa	Con altura h_j/a_j, el área total del histograma es uno.

Pruebas. Véase «Escalas gráficas y áreas de histogramas» en el apéndice de demostraciones.

Problema 4. Elegir una representación

En un grupo de veinte estudiantes, doce viajan en bus, cinco caminan y tres van en bicicleta. Elegir un gráfico y explicar qué debe mostrar su escala.

Solución. Un gráfico de barras permite comparar las tres categorías. Puede usar frecuencias absolutas $12, 5, 3$ o porcentajes $60\%, 25\%, 15\%$, con eje claramente rotulado y origen cero para representar esas magnitudes mediante longitudes. Las categorías son nominales y el orden elegido

sólo organiza la lectura. Unir sus alturas con segmentos sugeriría una evolución entre categorías que la encuesta no establece. Las proporciones suman cien por ciento porque cada estudiante se asignó a un único medio de transporte principal.

Problema 5. Una clase ancha con más observaciones

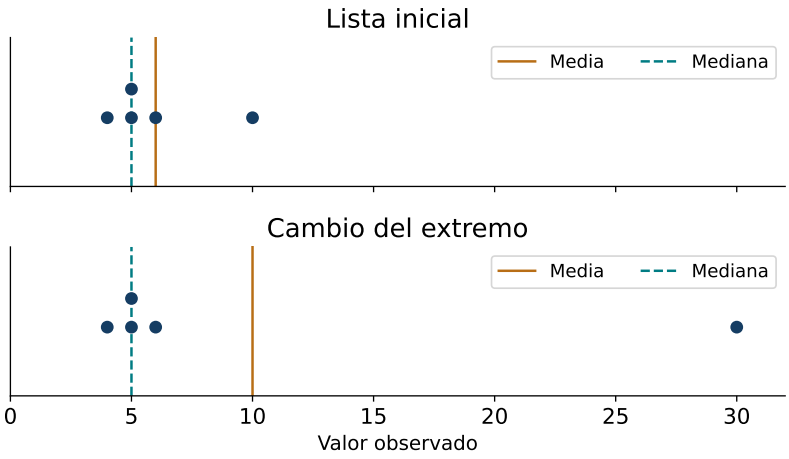
Para tiempos en minutos, las clases $[0, 10)$, $[10, 20)$ y $[20, 40]$ contienen $5, 12, 8$ observaciones. Hallar las alturas de un histograma de frecuencia por área e identificar la clase más concentrada por unidad de tiempo.

Solución. Las amplitudes son $10, 10, 20$ minutos. Las alturas son $5/10 = 0{,}5$, $12/10 = 1{,}2$ y $8/20 = 0{,}4$ observaciones por minuto. Sus áreas son $5, 12, 8$, que recuperan los recuentos. La clase $[10, 20)$ tiene la mayor densidad. La última clase contiene ocho observaciones, pero distribuye ese total sobre un intervalo dos veces más ancho que el primero. Las alturas relativas serían estas mismas alturas divididas por 25 y sus áreas sumarían uno.

Qué conserva un valor central

La media aritmética de n valores reales $x_1, \dots, x_n$ es $\bar{x} = (x_1 + \cdots + x_n)/n$. Reparte la suma total en partes iguales. Si los valores se presentan con frecuencias f_j, puede calcularse mediante $\bar{x} = \sum_j f_j v_j / n$, donde v_j es cada valor distinto. Esta fórmula usa valores observados exactos; reemplazar una clase de un intervalo por su punto medio produce una estimación que requiere declararse.

Para hallar la mediana se ordenan los datos $x_{(1)} \le \cdots \le x_{(n)}$. Si n es impar se toma el valor de posición $(n+1)/2$; si es par se promedian las posiciones $n/2$ y $n/2+1$. La mediana elegida deja al menos la mitad de las observaciones a cada lado, contando las igualdades. La moda es cada valor o categoría con frecuencia máxima; puede haber varias modas. Conocer el centro facilita la comparación y conviene acompañarlo con la forma y la dispersión de los datos.



Propiedades de los centros

Propiedad	Hipótesis y alcance
Balance de la media	$\sum_i (x_i - \bar{x}) = 0$.
Media ponderada	Para pesos $w_j \geq 0$ de suma positiva, $\bar{x}_w = \sum_j w_j x_j / \sum_j w_j$.
Reunir grupos	Si los grupos disjuntos tienen tamaños $n_j > 0$ y medias m_j, la media conjunta es $\sum_j n_j m_j / \sum_j n_j$.
Posición mediana	La mediana definida por orden deja al menos $n/2$ observaciones menores o iguales y al menos $n/2$ mayores o iguales.
Moda	Las modas corresponden a las frecuencias máximas; su interpretación conserva el tipo de variable y la agrupación usada.

Pruebas. Véase «Media, ponderaciones y posiciones centrales» en el apéndice de demostraciones.

Problema 6. Calcular desde frecuencias

Calcular la media del número de libros del problema 2 y comprobar el balance respecto de ella.

Solución. La suma es $0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 22$, así que $\bar{x} = 22/10 = 2{,}2$ libros por estudiante. La suma de las diferencias, con sus frecuencias, es $1(0-2{,}2) + 2(1-2{,}2) + 3(2-2{,}2) + 2(3-2{,}2) + 2(4-2{,}2) = 0$. La media admite un valor fraccionario aunque cada recuento individual sea entero: expresa un reparto del total de libros entre los diez estudiantes.

Problema 7. Centro y valor extremo

Comparar media, mediana y moda en $4, 5, 5, 6, 10$ y en $4, 5, 5, 6, 30$.

Solución. En el primer conjunto la suma es 30 y la media vale 6; en el segundo la suma es 50 y la media vale 10. Ambos conjuntos están ordenados, tienen cinco datos y conservan el tercer valor 5, que es su mediana. El valor 5 aparece dos veces y cada otro valor una vez, por lo que también es la moda de ambos. El cambio de veinte unidades en un dato aumenta la media en $20/5 = 4$ y conserva las posiciones centrales de este ejemplo. El efecto sobre una mediana depende de las posiciones que cambien.

Problema 8. Ponderar una calificación

Una calificación se obtiene con tres resultados $5, 6, 4$ y ponderaciones $20\%, 30\%, 50\%$. Calcularla e interpretar las ponderaciones.

Solución. La suma ponderada es $0{,}2 \cdot 5 + 0{,}3 \cdot 6 + 0{,}5 \cdot 4 = 4{,}8$. Los pesos suman uno y representan la fracción de la calificación atribuida a cada evaluación. Como son no negativos, el resultado está entre el mínimo 4 y el máximo 6. Usar la media simple daría 5 y correspondería a otro sistema de pesos, con igual aporte de las tres evaluaciones.

Problema 9. Reunir dos cursos

Un curso de 20 estudiantes tiene media de viaje de 15 minutos; otro de 30 tiene media de 25 minutos. Hallar la media conjunta.

Solución. Las sumas de tiempos son $20 \cdot 15 = 300$ y $30 \cdot 25 = 750$ minutos. Al reunir los 50 estudiantes, la media es $(300 + 750)/50 = 21$ minutos. Promediar las dos medias con igual peso produciría 20 y otorgaría el mismo aporte a grupos de tamaños diferentes. El cálculo correcto pondera cada media por la cantidad de observaciones que resume.

Posiciones, cuartiles y cajas

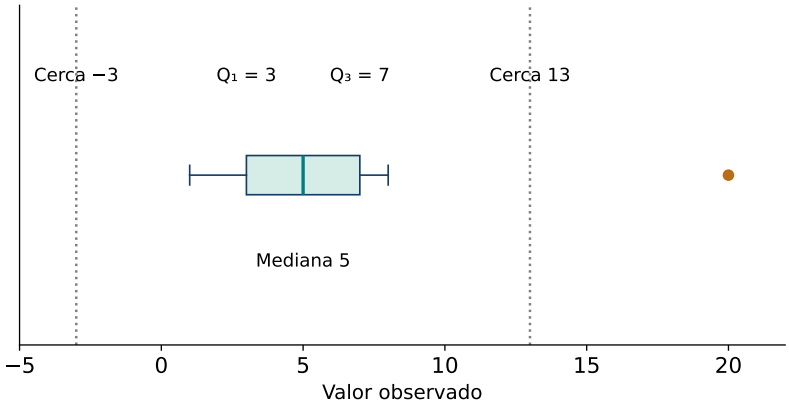
Un cuantil sitúa un valor dentro de una distribución ordenada. Para que los resultados sean reproducibles declararemos la convención usada. En este capítulo los cuantiles interpolados de una lista de $n \geq 1$ datos ordenados se calculan con

$$h = 1 + (n-1)p, \qquad 0 \leq p \leq 1.$$

Si h es entero, se toma $Q(p) = x_{(h)}$. Si $j < h < j+1$ y $d = h - j$, se interpola mediante $Q(p) = (1-d)x_{(j)} + dx_{(j+1)}$. Los extremos dan mínimo y máximo; para $n = 1$ todos los cuantiles valen el único dato. El percentil $100p$ corresponde a $Q(p)$; los cuartiles son $Q_1 = Q(1/4)$, $Q_2 = Q(1/2)$ y $Q_3 = Q(3/4)$. Esta convención hace coincidir Q_2 con la mediana anterior.

Otra convención, la de rango próximo superior, elige $x_{(\lceil np \rceil)}$ para $0 < p \leq 1$, donde $\lceil u \rceil$ es el menor entero mayor o igual que u. Las dos reglas pueden producir valores distintos en una lista finita. Un percentil interpolado describe la posición calculada por su regla; la proporción efectiva de datos inferiores a él se obtiene contando las observaciones, especialmente en muestras pequeñas o con empates.

El recorrido intercuartílico es $RIC = Q_3 - Q_1$. Un diagrama de caja representa la caja entre ambos cuartiles y marca la mediana. Usaremos bigotes hasta las observaciones extremas incluidas en las cercas $Q_1 - 1{,}5RIC$ y $Q_3 + 1{,}5RIC$, y dibujaremos separadamente las observaciones exteriores. La denominación «valor atípico» se refiere aquí a esa regla descriptiva; su interpretación requiere conocer el contexto y comprobar el registro.



Propiedades de los cuantiles declarados

Propiedad	Hipótesis y alcance
Interpolación	Si $h = j + d$, $0 < d < 1$, $Q(p) = (1-d)x_{(j)} + dx_{(j+1)}$ queda entre los datos vecinos.
Orden de cuantiles	Con la convención interpolada y datos ordenados, $p \le q$ implica $Q(p) \le Q(q)$.
Cuartil central	$Q(1/2)$ coincide con la mediana definida por las posiciones centrales.
Caja y cercas	$RIC = Q_3 - Q_1 \ge 0$ y las cercas $Q_1 - 1{,}5RIC$, $Q_3 + 1{,}5RIC$ fijan la regla de clasificación adoptada.

Pruebas. Véase «Cuantiles interpolados y convención de caja» en el apéndice de demostraciones.

Problema 10. Un percentil entre posiciones

Los datos ordenados son $2, 4, 6, 8, 10, 12$. Calcular el percentil 30 mediante la convención interpolada.

Solución. Con $n = 6$ y $p = 0{,}30$, se obtiene $h = 1+5\cdot 0{,}30 = 2{,}5$. Las posiciones vecinas contienen 4 y 6. La interpolación con $d = 0{,}5$ da $Q(0{,}30) = 5$. Hay dos observaciones menores o iguales que 5, es decir, $2/6$ del conjunto. El percentil calculado conserva la posición interpolada; el recuento efectivo se expresa con esa fracción.

Problema 11. Cuartiles y un dato exterior

Para $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 20$, calcular cuartiles, recorrido intercuartílico y bigotes con la regla declarada.

Solución. Como $n = 9$, las posiciones son $h_1 = 3$, $h_2 = 5$ y $h_3 = 7$. Por tanto $Q_1 = 3$, mediana 5, $Q_3 = 7$ y $RIC = 4$. Las cercas valen $3-6 = -3$ y $7+6 = 13$. Los bigotes llegan a las observaciones 1 y 8. El valor 20 queda fuera de la cerca superior y se representa aparte. El máximo de la lista sigue siendo 20, aunque el bigote superior termine en 8.

Problema 12. Dos convenciones sobre cuatro datos

Calcular el percentil 90 de $0, 10, 20, 100$ mediante interpolación y mediante rango próximo superior; interpretar los recuentos.

Solución. La interpolación usa $h = 1 + 3 \cdot 0{,}9 = 3{,}7$ y da $0{,}3 \cdot 20 + 0{,}7 \cdot 100 = 76$. El rango próximo superior usa $\lceil 4\cdot 0{,}9 \rceil = 4$ y da 100. En la lista hay tres de cuatro valores menores o iguales que 76, y cuatro de cuatro menores o iguales que 100. Ambas reglas son explícitas y producen resultados reproducibles; indicar la convención permite comprender la diferencia. La interpolación por posiciones no impone que exactamente el noventa por ciento de cuatro observaciones quede bajo el valor obtenido.

Cuánto se separan las observaciones

El rango es la diferencia entre máximo y mínimo. La varianza descriptiva de una lista completa de $n \ge 1$ datos se define por

$$v = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2.$$

La desviación típica descriptiva es $\sigma = \sqrt{v}$. Si los datos representan toda la población de interés, estas son la varianza y desviación poblacionales. Para una muestra de $n \geq 2$ observaciones es frecuente usar también la varianza muestral con divisor $n - 1$,

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2.$$

Su raíz es s. La elección del divisor debe declararse: v describe la dispersión de la lista usando su tamaño; s^2 es la convención de uso inferencial que retomará el estudio de probabilidad. Aquí compararemos ambas fórmulas algebraicamente y reservaremos sus propiedades probabilísticas para ese desarrollo.

La varianza se expresa en el cuadrado de la unidad de los datos y la desviación en su unidad original. Una traslación común cambia el centro y conserva todas las diferencias respecto de él. Un cambio de escala multiplica esas diferencias y, por tanto, modifica la dispersión de una manera que puede calcularse exactamente.

Propiedades de la dispersión

Propiedad	Hipótesis y alcance
Positividad	$v \geq 0$ y $v = 0$ exactamente cuando todos los datos coinciden.
Cálculo equivalente	$v = (\sum_i x_i^2)/n - \bar{x}^2$; al calcular con redondeos, conviene controlar la pérdida de precisión.
Cambio afín	Para $y_i = ax_i + b$, $\bar{y} = a\bar{x} + b$, $v_y = a^2 v_x$ y $\sigma_y = \lvert a\rvert\sigma_x$.
Dos divisores	Si $n \geq 2$, $s^2 = nv/(n-1)$; para una lista de un solo dato $v = 0$ y s^2 queda sin definir.
Unidades	Si los datos se miden en una unidad U, v y s^2 se expresan en U^2 y sus raíces en U.

Pruebas. Véase «Dispersión, divisores y cambios de escala» en el apéndice de demostraciones.

Problema 13. Dispersión de una lista completa

Los tiempos de tres trayectos son $2, 4, 6$ minutos. Calcular media, rango, varianza y desviación típica descriptivas.

Solución. La media es 4 minutos y el rango es $6 - 2 = 4$ minutos. Las diferencias son $-2, 0, 2$, con cuadrados $4, 0, 4$. Así $v = 8/3$ minutos cuadrados y $\sigma = \sqrt{8/3}$ minutos. La aproximación 1,63 minutos tiene error menor que 0,005 minutos, porque $1{,}625^2 < 8/3 < 1{,}635^2$. La fórmula alternativa da $(4 + 16 + 36)/3 - 16 = 8/3$ y comprueba la varianza.

Problema 14. Declarar el divisor

Para la muestra $1, 3, 5, 7$, calcular la varianza descriptiva de la lista y la varianza muestral con divisor $n - 1$.

Solución. La media es 4 y la suma de cuadrados respecto de ella es $9 + 1 + 1 + 9 = 20$. Con divisor cuatro se obtiene $v = 5$. Con divisor tres se obtiene $s^2 = 20/3$. La relación $s^2 = 4v/3$ confirma el resultado. Las desviaciones correspondientes son $\sqrt{5}$ y $\sqrt{20/3}$. Ambas fórmulas usan las mismas cuatro observaciones; la diferencia procede de la definición elegida y debe acompañar cualquier comparación con otro grupo.

Problema 15. Convertir la escala de medición

Una lista de temperaturas Celsius tiene media 20 y varianza descriptiva 9. Se transforma mediante $F = 1{,}8C + 32$. Hallar media, varianza y desviación típica en la escala Fahrenheit.

Solución. La media pasa a $1{,}8 \cdot 20 + 32 = 68$ grados Fahrenheit. La varianza se multiplica por $1{,}8^2$, de modo que vale 29,16 grados Fahrenheit cuadrados. La desviación inicial es 3 grados Celsius y la nueva es $1{,}8 \cdot 3 = 5{,}4$ grados Fahrenheit. El desplazamiento 32 modifica el origen de la escala; las diferencias se multiplican por 1,8. Las unidades de los resultados distinguen varianza y desviación.

Problema 16. Igual media e igual rango

Comparar las listas $A = (0, 2, 2, 4)$ y $B = (0, 0, 4, 4)$ mediante media, rango y varianza descriptiva.

Solución. Ambas suman ocho, tienen media dos y rango cuatro. En A, los cuadrados de las diferencias son $4, 0, 0, 4$ y la varianza vale $8/4 = 2$. En B son $4, 4, 4, 4$ y la varianza vale $16/4 = 4$. Sus desviaciones son $\sqrt{2}$ y 2, respectivamente. La segunda lista concentra todos sus datos en los extremos, mientras que la primera sitúa dos en el centro. La varianza distingue así dos distribuciones que tienen la misma media y el mismo rango.

Contar la estructura de las elecciones

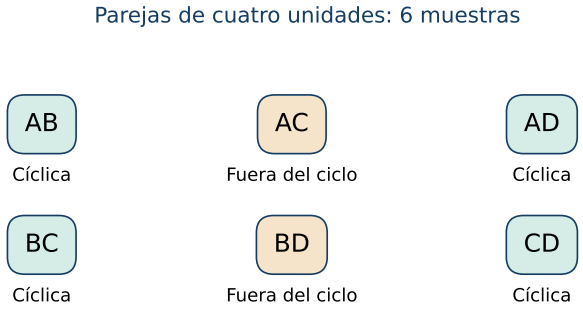
Contar casos exige describir qué constituye un resultado distinto. La regla de la suma reúne alternativas disjuntas: si una elección pertenece a una de dos clases de tamaños a y b, el total es $a+b$. Si se superponen, hay que descontar las elecciones contadas en ambas. La regla del producto organiza etapas: si cada una de a primeras elecciones admite exactamente b segundas elecciones, existen ab parejas posibles. Cuando la cantidad de continuaciones varía, se suman los recuentos de cada primera elección.

Una variación ordenada de longitud k elige y ordena k elementos de un conjunto de n elementos distintos. Con repetición, cada posición admite los n elementos y se obtienen n^k secuencias. Sin repetición, para $0 \le k \le n$, las cantidades disponibles son $n, n-1, \dots, n-k+1$ y su producto vale $n!/(n-k)!$. El factorial $n!$ es el producto $1 \cdot 2 \cdots n$ para $n \ge 1$, con $0! = 1$. Una permutación ordena todos los elementos: corresponde a $k = n$.

Una combinación de tamaño k es un subconjunto de k elementos de un conjunto de n elementos distintos. Podemos obtenerlo comenzando por una selección ordenada, pero cada subconjunto aparece entonces una vez por cada orden de sus k elementos: exactamente $k!$ veces. Dividir el número de selecciones ordenadas entre esa cantidad de representaciones da

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \qquad 0 \le k \le n.$$

Si se ordenan objetos con repeticiones indistinguibles de multiplicidades $m_1, \dots, m_r$, cuya suma es n, se divide $n!$ por $m_1! \cdots m_r!$. Estas divisiones se justifican al identificar cuántos registros ordenados representan el mismo resultado final.



Propiedades del conteo

Propiedad	Hipótesis y alcance
Suma disjunta	Si $A \cap B = \emptyset$, $\lvert A \cup B \rvert = \lvert A \rvert + \lvert B \rvert$.
Producto por etapas	Si cada primera elección tiene el mismo número b de continuaciones, a primeras elecciones generan ab pares.
Variaciones	Para $n \ge 1$, con repetición hay n^k secuencias; sin repetición hay $n!/(n-k)!$, para $0 \le k \le n$.
Permutaciones	n elementos distintos admiten $n!$ órdenes; multiplicidades indistinguibles m_j dan $n!/\prod_j m_j!$.
Combinaciones	Los subconjuntos de tamaño k se cuentan con $\binom{n}{k} = n!/[k!(n-k)!]$.
Complementos	$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ porque elegir un subconjunto determina su complemento.

Pruebas. Véase «Suma, producto y orden en el conteo» en el apéndice de demostraciones.

Problema 17. Alternativas y etapas

Un taller ofrece cuatro actividades individuales y tres actividades en parejas. Cada participante elige una actividad. Para la actividad elegida puede escoger entre dos horarios. ¿Cuántas inscripciones diferentes hay?

Solución. Las actividades individuales y en parejas son dos clases disjuntas de alternativas, con total $4 + 3 = 7$. Cada una admite dos horarios, así que hay $7 \cdot 2 = 14$ pares actividad-horario. Se supone que todos los horarios están disponibles para las siete actividades. Si una actividad tuviera un solo horario, habría que contar sus continuaciones por separado; el total bajaría a 13. El conteo distingue elegir una alternativa de completar sus etapas.

Problema 18. Claves y cargos

Con cinco símbolos distintos, formar claves de tres posiciones permitiendo repetición. Comparar con la asignación de presidencia, secretaría y tesorería a tres personas distintas de un grupo de cinco.

Solución. Cada posición de la clave admite los cinco símbolos, de modo que hay $5^3 = 125$ claves. Para los cargos hay cinco elecciones para presidencia, cuatro para secretaría y tres para tesorería: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. El orden de los cargos distingue resultados, pues intercambiar dos personas cambia sus funciones. La exigencia de personas distintas reduce las alternativas disponibles después de cada elección.

Problema 19. Letras que se repiten

Contar los arreglos distintos de las cinco letras de la palabra MAMAS, usando todas las letras.

Solución. Hay dos letras M, dos A y una S. Si se etiquetaran las copias como M_1, M_2, A_1, A_2, S, habría $5! = 120$ órdenes. Cada arreglo visible se obtiene de $2! \cdot 2! = 4$ órdenes etiquetados, porque pueden intercambiarse las dos M y las dos A dentro de sus posiciones. Por ello hay $120/4 = 30$ arreglos visibles. La división tiene un factor constante para cada resultado y conserva exactamente una cuenta por arreglo distinto.

Problema 20. Comité y distribución de funciones

De ocho personas se eligen tres para un comité. Contar los comités y comparar con las elecciones en que esas tres personas reciben tres cargos diferentes.

Solución. Un comité es un subconjunto y se cuenta con $\binom{8}{3} = 8 \cdot 7 \cdot 6/(3 \cdot 2 \cdot 1) = 56$. Si se asignan tres cargos, cada comité admite $3! = 6$ distribuciones y se obtienen $56 \cdot 6 = 336$, que también es $8 \cdot 7 \cdot 6$. Elegir quiénes participan y decidir sus funciones son dos etapas distintas. Como comprobación, elegir un comité de tres equivale a elegir las cinco personas que quedan fuera: $\binom{8}{3} = \binom{8}{5}$.

Problema 21. Dos mecanismos para seleccionar parejas

Una población tiene cuatro unidades A, B, C, D. Enumerar las muestras de tamaño dos. Comparar seleccionar entre todas ellas con igual oportunidad y seleccionar sólo entre AB, BC, CD, DA con igual oportunidad.

Solución. Las seis muestras son AB, AC, AD, BC, BD, CD, en acuerdo con $\binom{4}{2} = 6$. La primera selección permite las seis y constituye una muestra aleatoria simple de tamaño dos. La segunda permite cuatro parejas; cada unidad aparece en dos de las cuatro, así que todas tienen la misma oportunidad individual de inclusión. Sin embargo, las parejas AC y BD quedan excluidas. La igualdad de oportunidades individuales es compatible con diseños que generan conjuntos de muestras diferentes. Para describir el mecanismo completo debe conocerse qué subconjuntos puede producir.

Seleccionar una muestra y explicar su alcance

El marco de muestreo es la lista o procedimiento que permite acceder a las unidades de la población. Una muestra aleatoria simple de tamaño fijo k se elige dando la misma oportunidad a cada subconjunto de ese tamaño. Un muestreo estratificado separa la población en grupos disjuntos relevantes para la investigación y selecciona unidades dentro de cada grupo mediante un procedimiento declarado. El diseño debe registrar cobertura del marco, selección, respuesta y tratamiento de los datos faltantes.

El sesgo de selección aparece cuando el mecanismo favorece sistemáticamente ciertas unidades o tipos de respuesta en relación con la característica estudiada. Una encuesta voluntaria puede atraer especialmente a quienes tienen una experiencia intensa; un formulario accesible sólo por internet puede dejar fuera a parte de la población. Aumentar el número de respuestas dentro del mismo mecanismo conserva sus condiciones de acceso. El alcance de la generalización depende del diseño y de supuestos que deben examinarse, además del tamaño obtenido.

Para reunir los estratos podemos recuperar el total que aporta cada uno: su media multiplicada por su tamaño. Sumar esos totales y dividir por la población completa produce la media conjunta, con los pesos poblacionales de los grupos. El cálculo es exacto cuando conocemos sus verdaderas medias; si las sustituimos por medias muestrales, obtenemos una estimación que conserva la incertidumbre y las condiciones de selección de esas muestras. Conocer el peso de un estrato permite combinar su información, y estudiar cómo se obtuvo esa información permite evaluar el alcance de la estimación.

Propiedades del muestreo y sus resúmenes

Propiedad	Hipótesis y alcance
Espacio de muestras	Una población de N unidades distintas tiene $\binom{N}{k}$ muestras sin orden de tamaño fijo k.
Cobertura del marco	Cada unidad accesible debe vincularse con la población objetivo; omisiones y duplicaciones requieren revisión del marco.
Peso por estrato	Si N_j y μ_j son tamaño y media reales de cada estrato, $\mu = \sum_j N_j\mu_j / \sum_j N_j$. Usar medias muestrales produce una estimación.
Información agrupada	Con frecuencias y clases se conocen recuentos por intervalo; una media por puntos medios es una estimación de los valores individuales.

Pruebas. Véase «Marcos, estratos y datos agrupados» en el apéndice de demostraciones.

Problema 22. Muchas respuestas con cobertura parcial

Un municipio desea conocer el tiempo de acceso a sus oficinas de todos los vecinos adultos. Publica una encuesta en la aplicación municipal y recibe 2000 respuestas. ¿Qué debe examinarse antes de generalizar?

Solución. La población objetivo reúne a todos los vecinos adultos. El marco efectivo alcanza a quienes acceden a la aplicación, ven la encuesta y pueden responder. La participación voluntaria puede relacionarse con experiencias especialmente favorables o desfavorables. Deben examinarse cobertura por sectores y edades, duplicaciones, selección y falta de respuesta. Una mejora sería construir un marco que incluya los distintos sectores, seleccionar unidades con un procedimiento aleatorio declarado y ofrecer medios de respuesta accesibles, registrando quiénes responden. Las

2000 respuestas describen a quienes participaron; el diseño determina qué evidencia aportan sobre la población objetivo.

Problema 23. Recuperar el peso de cada estrato

Una población tiene 900 unidades en el estrato A y 100 en B. Se toman 50 de cada uno y sus medias observadas son 10 y 30. Comparar la media de los cien datos con la estimación ponderada por tamaños poblacionales.

Solución. La media de los cien datos es $(50 \cdot 10 + 50 \cdot 30)/100 = 20$. La estimación ponderada es $(900 \cdot 10 + 100 \cdot 30)/1000 = 12$. La primera resume la muestra equilibrada entre estratos; la segunda otorga a cada estrato su proporción poblacional. Si 10 y 30 fueran las medias verdaderas de cada estrato, 12 sería la media poblacional exacta. Con medias muestrales, 12 es una estimación cuya calidad depende de la selección y respuesta dentro de cada estrato.

Problema 24. Qué permite reconstruir un histograma

Las clases de tiempos $[0, 10)$, $[10, 20)$ y $[20, 40]$ tienen frecuencias $5, 12, 8$. Estimar la media con puntos medios, dar un intervalo garantizado para la media de esos 25 registros y decidir qué se sabe de su mediana y de la población.

Solución. Los puntos medios son $5, 15, 30$. La media estimada es $(5 \cdot 5 + 12 \cdot 15 + 8 \cdot 30)/25 = 445/25 = 17{,}8$ minutos. Reemplazar cada dato por el extremo inferior de su clase da la cota $\bar{x} \geq (5 \cdot 0 + 12 \cdot 10 + 8 \cdot 20)/25 = 11{,}2$. Usar los extremos superiores da $\bar{x} < (5 \cdot 10 + 12 \cdot 20 + 8 \cdot 40)/25 = 24{,}4$; la desigualdad es estricta porque las dos primeras clases tienen extremos superiores excluidos y frecuencias positivas. La mediana es el dato de posición trece, que pertenece a $[10, 20)$ porque las acumuladas son 5 y 17. Sus valores exactos se perdieron al agrupar. Estas conclusiones describen los registros; para generalizar a una población falta conocer cómo se obtuvieron.

Ejercicios para trabajar sin profesor

En cada ejercicio conserve las unidades, indique el divisor de la varianza y use la convención interpolada de cuantiles, salvo que se solicite otra. En el conteo, explique qué diferencia dos resultados. En las muestras, distinga la población objetivo de las unidades observadas.

1. Se estudia el gasto semanal de los 600 hogares de una localidad mediante 40 hogares elegidos de un listado. Identifique población, muestra, unidad y variable; explique qué información requiere el marco.

2. Para $0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3$, construya frecuencias absolutas y relativas y calcule la proporción de valores al menos dos.

3. Tres clases ordenadas tienen frecuencias acumuladas $4, 11, 20$. Recupere las simples y la frecuencia relativa acumulada hasta la segunda clase.

4. Una encuesta registra 9 preferencias por teatro, 6 por música y 5 por danza. Elija un gráfico y calcule porcentajes.

5. Un histograma tiene clases de amplitudes $5, 10, 20$ y frecuencias $10, 15, 20$. Halle alturas para representar frecuencias por áreas y densidades relativas.

6. Calcule la media de los datos del ejercicio 2 mediante frecuencias y compruebe el balance.

7. Compare media, mediana y moda en $2, 3, 3, 4, 8$ y $2, 3, 3, 4, 28$.

8. Los resultados $4, 5, 7$ pesan $25\%, 25\%, 50\%$. Halle la media ponderada y verifique que queda entre los extremos.

9. Un grupo de 12 datos tiene media 8 y otro de 18 datos tiene media 13. Halle la media conjunta.

10. Calcule el percentil 40 interpolado de $1, 3, 5, 7, 9, 11$ y cuente cuántos datos quedan bajo el resultado, incluyendo igualdades.

11. Para $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 15$, halle cuartiles, cercas y bigotes con el método declarado.

12. Calcule el percentil 80 de $0, 5, 10, 50$ mediante interpolación y rango próximo superior. Compare los recuentos efectivos.

13. Para $1, 3, 5$, calcule media, rango, varianza descriptiva y desviación típica exacta.

14. Para $2, 4, 6, 8$, calcule las varianzas con divisores n y $n-1$ y sus desviaciones.

15. Una lista tiene media 3 y varianza descriptiva 4. Se transforma mediante $y = -2x + 7$. Halle media, varianza y desviación nuevas.

16. Compare media, rango y varianza descriptiva de $A = (1, 3, 3, 5)$ y $B = (1, 1, 5, 5)$.

17. Un programa ofrece cinco talleres de mañana y dos de tarde. Cada taller admite tres modalidades de inscripción. Cuente los pares taller-modalidad y explique los supuestos.

18. Con seis símbolos forme secuencias de cuatro posiciones con repetición. Compare con cuatro cargos distintos asignados a personas diferentes de un grupo de seis.

19. Cuente los arreglos distintos de las seis letras de BANANA, usando todas las letras.

20. De nueve personas elija un comité de cuatro. Compare con asignar cuatro cargos distintos y compruebe la simetría por complementos.

21. Una población tiene cinco unidades. Cuente las muestras de dos unidades. Compare con un mecanismo que siempre incluye A y elige la otra unidad entre las cuatro restantes.

22. Se desea conocer la satisfacción de todos los usuarios de una biblioteca y se encuesta a quienes asisten un sábado por la mañana. Examine cobertura, selección y una mejora del diseño.

23. Dos estratos tienen tamaños poblacionales 800 y 200. Se observan 40 unidades de cada uno, con medias 6 y 16. Compare la media de la muestra con la estimación ponderada por población.

24. Las clases $[0, 5)$, $[5, 15)$ y $[15, 25]$ tienen frecuencias $4, 10, 6$. Estime la media por puntos medios, acote su valor real y localice la mediana de los veinte datos. Precise el alcance poblacional.

Soluciones desarrolladas

Ejercicio 1. Unidades y cobertura

La población está formada por los 600 hogares, la muestra por los 40 elegidos y cada hogar es una unidad estadística. La variable es el gasto semanal, expresado en una moneda y un período que deben declararse. El listado debe revisarse para verificar que incluya la población objetivo, represente cada hogar una sola vez y esté actualizado. También hace falta conocer cómo se eligieron los 40 y cuáles respondieron. El tamaño 40 cuenta unidades observadas; la amplitud de gastos se calcula desde sus valores.

Ejercicio 2. Recontar y dividir por el total

Los valores $0, 1, 2, 3$ tienen frecuencias $2, 3, 2, 1$ y frecuencias relativas $2/8, 3/8, 2/8, 1/8$. Las primeras suman ocho y las segundas uno. Los valores al menos dos reúnen tres registros y representan $3/8 = 37{,}5\%$. Cada dato pertenece a una única clase de valor y esa partición justifica sumar los recuentos.

Ejercicio 3. Diferencias de una acumulación

Las frecuencias simples son 4, $11 - 4 = 7$ y $20 - 11 = 9$. El total es 20. Hasta la segunda clase se acumulan once registros y la frecuencia relativa acumulada es $11/20 = 55\%$. Sumar $4 + 7 + 9 = 20$ y volver a acumular $4, 11, 20$ comprueba ambas lecturas de la tabla.

Ejercicio 4. Categorías y porcentajes

El total es veinte. Teatro representa $9/20 = 45\%$, música $6/20 = 30\%$ y danza $5/20 = 25\%$. Un gráfico de barras con eje de frecuencia desde cero muestra la comparación. También puede usarse un eje porcentual debidamente rotulado. Las categorías designan preferencias artísticas y el dibujo debe comunicar sus frecuencias; la elección de un orden de presentación organiza la lectura.

Ejercicio 5. Alturas con bases distintas

Las alturas absolutas son $10/5 = 2$, $15/10 = 1{,}5$ y $20/20 = 1$. El total es 45 y las densidades relativas son $2/45$, $1/30$ y $1/45$. Multiplicar cada altura absoluta por su amplitud recupera $10, 15, 20$; al hacerlo con las densidades relativas se obtienen $10/45, 15/45, 20/45$, cuya suma es uno. La clase de mayor recuento tiene la menor densidad en este ejemplo porque también tiene la mayor amplitud.

Ejercicio 6. Media desde una tabla

La suma ponderada por frecuencias es $0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 10$. La media es $10/8 = 5/4$. El balance se verifica mediante $2(0 - 5/4) + 3(1 - 5/4) + 2(2 - 5/4) + (3 - 5/4) = 0$. La fórmula con frecuencias agrupa términos iguales de la suma original y conserva el mismo total.

Ejercicio 7. Modificar un extremo

Las sumas de las dos listas son 20 y 40; por tanto sus medias son 4 y 8. La tercera posición vale 3 en ambas y fija su mediana. La moda también es 3 porque aparece dos veces y cada otro dato aparece una. El aumento de veinte unidades en el último valor modifica la media en cuatro unidades y conserva las posiciones centrales de estas listas.

Ejercicio 8. Pesos y extremos

La media ponderada es $\frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{1}{4} \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 7 = 23/4 = 5{,}75$. Está entre 4 y 7, como se comprueba directamente. Los pesos suman uno y el último resultado aporta la mitad del total. La suma de las distancias ponderadas respecto del mínimo es no negativa, y la suma de las distancias ponderadas hasta el máximo también lo es; ambas observaciones justifican el encierro entre extremos.

Ejercicio 9. Sumas que se reúnen

El primer grupo suma $12 \cdot 8 = 96$ y el segundo $18 \cdot 13 = 234$. La suma conjunta es 330 para treinta registros, con media 11. El promedio simple de las medias sería 10,5 y asignaría igual peso

a grupos de tamaños diferentes. Reconstruir las sumas originales establece el peso correcto de cada grupo.

Ejercicio 10. Un percentil que coincide con un dato

Con $n = 6$ y $p = 0{,}4$, la posición es $h = 1 + 5 \cdot 0{,}4 = 3$. El percentil interpolado es el tercer dato, 5. Hay tres valores menores o iguales que 5, es decir, $3/6 = 50\%$ de la lista. La convención de posición produce el percentil solicitado; el recuento real de la muestra se obtiene por separado y admite saltos y empates.

Ejercicio 11. Cuartiles y bigotes

Las posiciones de los cuartiles son 3, 5 y 7. Por ello $Q_1 = 2$, mediana 4 y $Q_3 = 6$. El recorrido intercuartílico es 4 y las cercas son -4 y 12. Los bigotes llegan a 0 y 7, que son las observaciones extremas dentro de las cercas. El 15 se dibuja aparte como dato exterior según la regla adoptada. Su condición requiere interpretación contextual antes de modificar o excluir el registro.

Ejercicio 12. Convención y frecuencia efectiva

La interpolación usa $h = 1 + 3 \cdot 0{,}8 = 3{,}4$ y produce $0{,}6 \cdot 10 + 0{,}4 \cdot 50 = 26$. El rango próximo superior usa $\lceil 4 \cdot 0{,}8 \rceil = 4$ y produce 50. Hay tres de cuatro observaciones menores o iguales que 26 y cuatro de cuatro menores o iguales que 50. Declarar el método explica ambos resultados y permite reproducirlos sobre los mismos datos.

Ejercicio 13. Una dispersión exacta

La media es 3 y el rango es 4. Las diferencias respecto de la media son $-2, 0, 2$, con suma de cuadrados ocho. La varianza descriptiva es $8/3$ y la desviación típica exacta es $\sqrt{8/3}$. La fórmula de cuadrados de valores da $(1 + 9 + 25)/3 - 9 = 8/3$, en acuerdo con el cálculo directo. Si los datos tienen unidad U, las unidades son U^2 y U, respectivamente.

Ejercicio 14. Los mismos cuadrados y dos divisores

La media es 5 y las diferencias son $-3, -1, 1, 3$. Su suma de cuadrados vale 20. La varianza descriptiva es $v = 20/4 = 5$ y la muestral con divisor $n-1$ es $s^2 = 20/3$. Las desviaciones son $\sqrt{5}$ y $\sqrt{20/3}$. La relación $s^2 = 4v/3$ comprueba la coherencia de ambas fórmulas.

Ejercicio 15. Una escala que invierte el orden

La media nueva es $-2 \cdot 3 + 7 = 1$. La varianza nueva es $(-2)^2 \cdot 4 = 16$ y la desviación es 4. La desviación original era 2 y el cambio la multiplica por $|-2| = 2$. El signo negativo invierte el orden de los valores; sus separaciones se multiplican por dos y los cuadrados de esas separaciones por cuatro.

Ejercicio 16. Dos formas de distribuirse

Las dos listas tienen media 3 y rango 4. En A los cuadrados de las diferencias son $4, 0, 0, 4$, cuya media es 2. En B son $4, 4, 4, 4$, cuya media es 4. Las desviaciones típicas son $\sqrt{2}$ y 2. La segunda lista sitúa todas sus observaciones en los extremos y la primera conserva dos en la media, lo que explica sus dispersiones distintas.

Ejercicio 17. Sumar talleres y completar la inscripción

Las alternativas de taller son $5+2=7$, suponiendo que mañana y tarde designan talleres distintos y que se elige uno solo. Cada taller admite las mismas tres modalidades, de modo que hay $7\cdot 3=21$ pares taller-modalidad. Si las modalidades dependieran del taller, se sumarían sus cantidades de continuaciones. Las reglas de suma y producto se aplican a las dos partes de la estructura descrita.

Ejercicio 18. Repetición y disponibilidad

Las secuencias con repetición admiten seis símbolos en cada una de cuatro posiciones: $6^4=1296$. La asignación de cargos distintos a personas diferentes tiene $6\cdot 5\cdot 4\cdot 3=360$ resultados. En ambos casos las posiciones o funciones distinguen el orden. En los cargos, cada persona elegida reduce en uno el conjunto disponible para la etapa siguiente.

Ejercicio 19. Multiplicidades visibles

BANANA contiene tres A, dos N y una B. Al etiquetar todas las copias se obtienen $6!=720$ órdenes. Cada arreglo visible procede de $3!\cdot 2!=12$ órdenes etiquetados, por los intercambios de copias iguales. El total de arreglos distintos es $720/12=60$. La multiplicidad constante de doce justifica la división.

Ejercicio 20. Elegir personas y ordenar cargos

Los comités son $\binom{9}{4}=9\cdot 8\cdot 7\cdot 6/(4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)=126$. Cada comité admite $4!=24$ asignaciones de cargos, con total $126\cdot 24=3024$. El producto directo $9\cdot 8\cdot 7\cdot 6$ confirma el segundo resultado. Elegir las cuatro personas del comité determina las cinco restantes, por lo que $\binom{9}{4}=\binom{9}{5}=126$.

Ejercicio 21. Una unidad siempre incluida

Las muestras de dos unidades entre cinco se cuentan con $\binom{5}{2}=10$. El segundo mecanismo sólo produce cuatro muestras: AB, AC, AD, AE. La unidad A aparece en todas; cada otra aparece en una. La selección favorece a A y excluye las seis parejas formadas únicamente por las otras cuatro unidades. Este mecanismo tiene un espacio de muestras distinto del muestreo aleatorio simple de tamaño dos sobre la población completa.

Ejercicio 22. Cobertura de un horario

La población objetivo incluye a todos los usuarios de la biblioteca, mientras que la encuesta alcanza a quienes asisten el sábado por la mañana y aceptan responder. Horarios laborales, actividades familiares o hábitos de uso pueden relacionarse con la asistencia y con la satisfacción. Una mejora consiste en construir un marco actualizado de usuarios, seleccionar unidades con un procedimiento aleatorio declarado y ofrecer horarios o canales diversos de respuesta, registrando la falta de respuesta. El informe debe conservar la distinción entre respuestas obtenidas y población objetivo.

Ejercicio 23. Peso de la muestra y peso de la población

La media de los ochenta registros es $(40\cdot 6+40\cdot 16)/80=11$. La estimación con tamaños poblacionales es $(800\cdot 6+200\cdot 16)/1000=8$. La primera asigna peso igual a ambos estratos porque sus muestras tienen igual tamaño; la segunda usa proporciones poblacionales de 0,8 y 0,2. Si las medias observadas fueran las medias verdaderas de los estratos, ocho sería la media poblacional exacta. El uso de medias muestrales conserva la condición de estimación.

Ejercicio 24. Límites de la agrupación

Los puntos medios son 2,5, 10, 20. La media estimada es $(4{\cdot}2{,}5{+}10{\cdot}10{+}6{\cdot}20)/20 = 230/20 = 11{,}5$. La cota inferior es $(4 \cdot 0 + 10 \cdot 5 + 6 \cdot 15)/20 = 7$ y la superior es $(4 \cdot 5 + 10 \cdot 15 + 6 \cdot 25)/20 = 16$. Por tanto $7 \leq \bar{x} < 16$, con extremo superior estricto por las dos primeras clases. La estimación queda dentro de esas cotas, que ofrecen una comprobación del cálculo. Las posiciones centrales diez y once pertenecen a $[5, 15)$, de modo que su promedio, la mediana, pertenece a ese mismo intervalo. Para describir la población hace falta conocer la selección de los veinte registros.

Diagnóstico de salida

El lector puede describir un conjunto de datos cuando identifica unidades, variables y procedimiento de observación, y conserva el total al organizar frecuencias. Puede comparar centros y dispersiones cuando declara fórmulas, unidades y convenciones de cuantiles. Puede contar elecciones cuando explica sus etapas, su orden y las repeticiones admitidas. Al interpretar una muestra, puede examinar el marco, la selección y el alcance de una estimación. Estas decisiones preparan la probabilidad: proporcionan los casos y las variables sobre los que se formularán sus modelos.

CAPÍTULO 23

Probabilidad, condiciones y distribuciones elementales

Una caja contiene fichas rojas y azules. Extraemos dos y queremos saber cuán probable es obtener dos rojas. La respuesta cambia si devolvemos la primera ficha antes de sacar la segunda. También cambia si recibimos una información nueva: por ejemplo, que al menos una de las fichas extraídas es roja. Las cuentas requieren describir el experimento, conservar su orden y precisar qué información está disponible.

La probabilidad construye modelos para cuantificar incertidumbre. Un modelo asigna pesos a los resultados posibles y permite calcular el peso de un conjunto de resultados. La observación aporta frecuencias que pueden orientar o contrastar esa asignación. El trabajo comienza al definir los casos y continúa al examinar cómo se relacionan los sucesos. Los ejemplos de este capítulo usan datos construidos para el estudio; cada supuesto de azar se declara dentro del problema.

Dar peso a los resultados posibles

El espacio muestral Ω reúne los resultados completos del experimento considerado. Un suceso es un subconjunto de Ω. En un modelo finito, cada resultado ω recibe un peso $p_\omega \geq 0$ y la suma de todos los pesos es uno. La probabilidad de un suceso A es

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega.$$

El peso uno corresponde al espacio completo y el peso cero al conjunto vacío. Si los $N \geq 1$ resultados tienen el mismo peso, cada uno vale $1/N$ y $P(A) = |A|/N$. La equiprobabilidad es una hipótesis del modelo; debe apoyarse en el mecanismo de selección o adoptarse expresamente para el estudio.

Una frecuencia relativa observada es el cociente entre el número de veces que ocurrió un suceso y el número de repeticiones realizadas. Es un resumen de datos. Una probabilidad teórica es un parámetro del modelo. Repetir el experimento permite comparar ambos, con variaciones muestrales y condiciones de observación que deben estudiarse antes de sacar conclusiones.

Propiedades del modelo finito

Propiedad	Hipótesis y alcance
Normalización	$p_\omega \geq 0$, $\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$ y $P(\Omega) = 1$.
Suceso y cota	$P(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$ y $0 \leq P(A) \leq 1$.
Casos equiprobables	Si todos los N resultados tienen igual peso, $P(A) = \lvert A \rvert / N$.
Inclusión	Si $A \subseteq B$, entonces $P(A) \leq P(B)$.

Pruebas. Véase «Pesos y sucesos en espacios finitos» en el apéndice de demostraciones.

Problema 1. Dos giros con resultados ordenados

Se gira dos veces una ruleta con sectores A, B y C. Construir el espacio de resultados y el suceso «aparece exactamente una A». Calcular su probabilidad si los nueve pares ordenados son equiprobables.

Solución. El espacio es $\{AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB, CC\}$. Cada par indica primero el resultado del primer giro y después el del segundo. El suceso pedido es $\{AB, AC, BA, CA\}$ y tiene cuatro de los nueve casos, así que su probabilidad es $4/9$. La cuenta usa la equiprobabilidad conjunta declarada. Una ruleta con sectores de tamaños distintos requeriría asignar otros pesos a esos mismos resultados.

Problema 2. Una ruleta con pesos diferentes

Una ruleta tiene tres resultados A, B y C, con pesos $1/2$, $1/3$ y $1/6$. Hallar la probabilidad de obtener A o C y compararla con contar simplemente dos de tres resultados.

Solución. Los pesos suman $1/2+1/3+1/6=1$. El suceso $\{A, C\}$ tiene probabilidad $1/2+1/6=2/3$. En este caso coincide con $2/3$ obtenido al contar dos resultados, pero la coincidencia es particular: para $\{A, B\}$, la suma de pesos es $5/6$, aunque también contiene dos resultados. El procedimiento general suma los pesos asignados; el cociente de recuentos exige equiprobabilidad.

Problema 3. Frecuencia observada y modelo

En cuarenta giros se observó A diecisiete veces. Se propone para A una probabilidad de $1/2$. Calcular la frecuencia relativa y explicar qué permite concluir esa diferencia.

Solución. La frecuencia observada es $17/40=0{,}425$. Difiere de $1/2$ en $-3/40=-0{,}075$. El dato describe estas cuarenta observaciones y el parámetro propuesto describe el modelo. Una muestra finita puede dar una frecuencia distinta del parámetro aun cuando el modelo sea adecuado. Para valorar la diferencia haría falta un criterio de contraste y examinar las condiciones de repetición. La igualdad entre una frecuencia particular y el parámetro no forma parte de la definición del modelo.

Reunir sucesos y conservar las intersecciones

La unión $A \cup B$ reúne los resultados que pertenecen a A, a B o a ambos. La intersección $A \cap B$ reúne los que cumplen las dos condiciones. El complemento A^c contiene los resultados del espacio que quedan fuera de A. Dos sucesos son mutuamente excluyentes cuando su intersección es vacía.

Al sumar $P(A)+P(B)$, los resultados de la intersección se cuentan dos veces. Restar una copia de $P(A \cap B)$ da el peso de la unión. El complemento permite convertir «al menos uno» en el complemento de «ninguno», siempre que ambos sucesos se describan dentro del mismo espacio.

Propiedades de uniones y complementos

Propiedad	Hipótesis y alcance
Complemento	$P(A^c) = 1 - P(A)$.
Regla aditiva	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
Exclusión mutua	Si $A \cap B = \emptyset$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
Diferencia	$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$.

Pruebas. Véase «Uniones, complementos y diferencias de sucesos» en el apéndice de demostraciones.

Problema 4. Dos condiciones sobre un dado

Se lanza un dado con seis caras equiprobables. Sean A «sale par» y B «sale mayor que tres». Hallar intersección, unión y sus probabilidades.

Solución. $A = \{2, 4, 6\}$ y $B = \{4, 5, 6\}$. La intersección es $\{4, 6\}$, de probabilidad $2/6 = 1/3$. La unión es $\{2, 4, 5, 6\}$, de probabilidad $4/6 = 2/3$. La regla aditiva lo comprueba: $1/2 + 1/2 - 1/3 = 2/3$. El resultado dos pertenece sólo a A y el cinco sólo a B; cuatro y seis satisfacen ambas condiciones.

Problema 5. Al menos una aparición

Se lanza dos veces una moneda y los cuatro pares CC, CS, SC, SS son equiprobables. Hallar la probabilidad de al menos una cara.

Solución. El suceso complementario es obtener ninguna cara, que corresponde sólo a SS y tiene probabilidad $1/4$. Por tanto la probabilidad pedida es $1 - 1/4 = 3/4$. La enumeración directa da los tres pares CC, CS, SC y confirma el resultado. La expresión «al menos una» incluye el resultado con dos caras.

Problema 6. Separar participantes de dos actividades

En un grupo de 50 personas, 28 participan en A, 20 en B y 12 en ambas. Se elige una persona con igual probabilidad entre las cincuenta. Hallar la probabilidad de participar sólo en A, en alguna de las dos y en ninguna.

Solución. Sólo en A hay $28 - 12 = 16$ personas, con probabilidad $16/50 = 8/25$. La unión contiene $28 + 20 - 12 = 36$, de probabilidad $18/25$. Fuera de ambas quedan $50 - 36 = 14$, de probabilidad $7/25$. Las regiones «sólo A», «ambas», «sólo B» y «ninguna» tienen tamaños $16, 12, 8, 14$ y suman cincuenta.

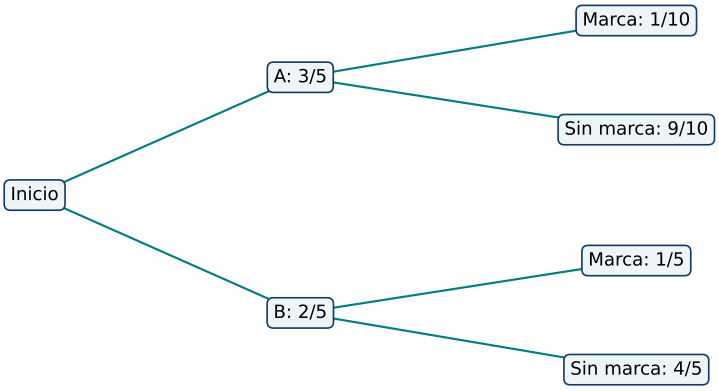
Cambiar la base cuando llega información

Si recibimos la información de que ocurrió B, conservamos los resultados compatibles con ella. El peso total de esa nueva base es $P(B)$; para volver a expresarlo como uno debemos dividir por esa misma cantidad. Los resultados favorables a A dentro de la base son los que cumplen ambas condiciones y tienen peso $P(A \cap B)$. Cuando $P(B) > 0$, definimos por ello la probabilidad condicional mediante

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

La condición fija la nueva base y la intersección conserva los resultados favorables dentro de ella. Multiplicar por $P(B)$ recupera la probabilidad conjunta. En una cadena de selecciones, esta regla permite actualizar las cantidades disponibles después de cada paso.

Podemos seguir un razonamiento parecido cuando el experimento comienza en una de varias clases. Una partición $B_1, \dots, B_r$ separa los resultados del espacio en clases disjuntas y exhaustivas. Si cada clase tiene probabilidad positiva, la parte de A que procede de B_j pesa $P(B_j)P(A \mid B_j)$; sumar esas contribuciones da la probabilidad total de A. Para preguntar después qué clase produjo una observación de A, dividimos la contribución de esa clase por el peso total de A, suponiendo $P(A) > 0$. Ese cambio de base produce la fórmula de Bayes y permite reconocer por qué intervienen tanto el peso inicial de la clase como la probabilidad de la evidencia dentro de ella.



Propiedades de la condición

Propiedad	Hipótesis y alcance
Base condicional	Si $P(B) > 0$, $P(A \mid B) = P(A \cap B)/P(B)$.
Producto	Si $P(B) > 0$, $P(A \cap B) = P(B)P(A \mid B)$; la forma inversa exige $P(A) > 0$.
Probabilidad total	Para una partición con $P(B_j) > 0$, $P(A) = \sum_j P(B_j)P(A \mid B_j)$.
Bayes	Si además $P(A) > 0$, $P(B_j \mid A) = P(B_j)P(A \mid B_j)/P(A)$.
Orden de condiciones	$P(A \mid B)$ y $P(B \mid A)$ usan bases distintas; cada cociente conserva su denominador.

Pruebas. Véase «Condición, producto, probabilidad total y Bayes» en el apéndice de demostraciones.

Problema 7. Dos preguntas con bases distintas

En una población de 100 unidades, 40 pertenecen a B, 30 a A y 18 a ambas. Se elige una unidad uniformemente. Calcular $P(A \mid B)$ y $P(B \mid A)$.

Solución. La primera condición restringe la selección a las 40 unidades de B y deja 18 favorables: $P(A \mid B) = 18/40 = 9/20$. La segunda restringe a las 30 de A y conserva las mismas 18 de la intersección: $P(B \mid A) = 18/30 = 3/5$. Sus productos con las bases originales coinciden: $(40/100)(18/40) = (30/100)(18/30) = 18/100$.

Problema 8. Dos extracciones sin devolución

Una urna contiene tres fichas rojas y dos azules. Se extraen dos fichas sucesivamente, con selección uniforme entre las disponibles y sin devolver la primera. Hallar la probabilidad de dos rojas.

Solución. La primera roja tiene probabilidad 3/5. Después de una roja quedan dos rojas entre cuatro fichas, así que la probabilidad condicional de otra roja es 2/4. El producto da $P(RR) = (3/5)(2/4) = 3/10$. Como comprobación por subconjuntos, hay $\binom{3}{2} = 3$ parejas rojas entre $\binom{5}{2} = 10$ parejas posibles equiprobables. La segunda etapa usa las cantidades actualizadas.

Problema 9. Reconstruir el origen de una pieza

Un sistema toma una pieza de la línea A con probabilidad 3/5 y de B con probabilidad 2/5. Las probabilidades de una marca son 1/10 en A y 1/5 en B. Hallar la probabilidad de marca y la probabilidad de origen B sabiendo que la pieza está marcada.

Solución. Las líneas forman una partición. La probabilidad total de marca M es $(3/5)(1/10) + (2/5)(1/5) = 3/50 + 4/50 = 7/50$. La rama B y marca tiene probabilidad 4/50. Al condicionar en la marca, $P(B \mid M) = (4/50)/(7/50) = 4/7$. El hecho de que la marca sea más probable en B se combina con el peso inicial de ambas líneas; el posterior es la fracción de toda la evidencia que procede de B.

Problema 10. Una condición sobre dos monedas

Los pares CC, CS, SC, SS son equiprobables. Sabiendo que al menos una moneda muestra cara, hallar la probabilidad de dos caras. Comparar con saber que la primera muestra cara.

Solución. La primera información permite CC, CS, SC, cada uno con el mismo peso original; sólo CC tiene dos caras y la probabilidad es 1/3. La segunda información permite CC, CS y produce probabilidad 1/2. Las frases definen sucesos condicionantes diferentes. Un procedimiento que eligiera una moneda para mostrarla añadiría un mecanismo de observación que habría que incluir en el espacio.

Independencia de sucesos

Dos sucesos A y B son independientes cuando $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Si $P(B) > 0$, esta igualdad equivale a $P(A \mid B) = P(A)$. La información de B conserva la probabilidad de A. La exclusión mutua expresa otra relación: exige que la intersección sea vacía. Cuando ambos sucesos tienen

probabilidad positiva y son excluyentes, su probabilidad conjunta es cero y el producto de las marginales es positivo.

Para tres o más sucesos, la independencia mutua exige la igualdad entre probabilidad conjunta y producto para cada subfamilia. Comprobar sólo las parejas verifica independencia por pares, una condición que puede dejar pendiente la relación de los grupos mayores. En modelos de ensayos repetidos declararemos independencia mutua de los ensayos, junto a la probabilidad de cada resultado.

Propiedades de la independencia

Propiedad	Hipótesis y alcance
Producto independiente	A y B son independientes si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
Conservación condicional	Si $P(B) > 0$, la independencia equivale a $P(A \mid B) = P(A)$.
Complementos	La independencia de A y B implica la de A^c y B, de A y B^c y de ambos complementos.
Exclusión y producto	Sucesos excluyentes de probabilidades positivas tienen probabilidad conjunta cero y producto positivo.
Familia de ensayos	La independencia mutua exige el producto para todas las subfamilias; en un modelo producto, las cadenas completas tienen el producto de sus pesos.

Pruebas. Véase «Independencia, exclusión y familias de ensayos» en el apéndice de demostraciones.

Problema 11. Dos relaciones dentro de un dado

En un dado equiprobable sean A «sale par», B «sale múltiplo de tres» y C «sale impar». Estudiar A con B y A con C.

Solución. $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/3$ y $A \cap B = \{6\}$ tiene probabilidad $1/6 = (1/2)(1/3)$. A y B son independientes y pueden ocurrir juntos. En cambio, $A \cap C = \emptyset$, con probabilidad cero, mientras que $P(A)P(C) = 1/4$. A y C son excluyentes y dependientes. Cada relación se comprueba con su propia condición.

Problema 12. Devolver la primera ficha

En la urna de tres rojas y dos azules se devuelve la primera ficha y se mezcla antes de extraer de nuevo. Se adopta independencia entre extracciones. Hallar la probabilidad de dos rojas y compararla con el problema 8.

Solución. Cada extracción tiene probabilidad roja $3/5$. La independencia declarada da $P(RR) = (3/5)^2 = 9/25$. Sin devolución era $3/10$. La diferencia es $9/25 - 3/10 = 3/50$. La devolución conserva la composición de la urna; la mezcla y la hipótesis de independencia forman parte del mecanismo modelado. Ambas condiciones deben describirse al usar el producto de marginales.

Problema 13. Parejas independientes y un grupo dependiente

Se consideran equiprobables los cuatro pares de bits $00, 01, 10, 11$. Sean A «el primer bit es 1», B «el segundo es 1» y C «los bits coinciden». Comprobar independencia por pares y estudiar los tres sucesos juntos.

Solución. Cada suceso contiene dos de los cuatro resultados y tiene probabilidad $1/2$. Las intersecciones $A \cap B$, $A \cap C$ y $B \cap C$ contienen sólo 11, por lo que valen $1/4$ y satisfacen el producto de cada pareja. La intersección triple también contiene sólo 11 y vale $1/4$, mientras que el producto de las tres marginales es $1/8$. Se verifica independencia por pares y falla la independencia mutua. La comprobación del grupo aporta una condición adicional real.

Convertir resultados en una variable

Una variable aleatoria real X asigna un número a cada resultado ω del espacio. Su distribución discreta reúne los valores que puede tomar y sus probabilidades, sumando los pesos de los resultados que producen el mismo valor. La esperanza es la media ponderada $E(X) = \sum_x xP(X = x)$ en un modelo finito. Su interpretación es la de un promedio del modelo; puede ser fraccionaria aunque cada observación sea entera.

La varianza del modelo se define por $\operatorname{Var}(X) = E((X - E(X))^2)$ y la desviación típica por su raíz no negativa. Las sumas finitas permiten demostrar linealidad de la esperanza sin exigir independencia. Para la varianza de una suma, la relación entre las variables añade un término que debe examinarse. Dos variables finitas X e Y son independientes cuando $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$ para cada pareja de valores.

Propiedades de variables discretas

Propiedad	Hipótesis y alcance
Distribución	$P(X = x)$ suma los pesos de $\{\omega : X(\omega) = x\}$; las probabilidades de valores distintos suman uno.
Esperanza lineal	Para variables finitas, $E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$.
Varianza	$\operatorname{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 \geq 0$.
Cambio afín	$\operatorname{Var}(aX + b) = a^2 \operatorname{Var}(X)$.
Suma independiente	Si X e Y son independientes, $\operatorname{Var}(X + Y) = \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y)$.

Pruebas. Véase «Distribuciones finitas, esperanza y varianza» en el apéndice de demostraciones.

Problema 14. Número de caras y distribución

En dos lanzamientos con pares equiprobables, sea X el número de caras. Construir su distribución y calcular esperanza y varianza.

Solución. SS produce X=0; CS y SC producen X=1; CC produce X=2. Las probabilidades son $1/4, 1/2, 1/4$. La esperanza es $0/4 + 1/2 + 2/4 = 1$. El segundo momento es $0 + 1/2 + 4/4 = 3/2$, por lo que la varianza es $3/2 - 1 = 1/2$. Dos resultados diferentes pueden producir el mismo valor de la variable, como muestran CS y SC.

Problema 15. Un pago aleatorio

Un juego paga 0 unidades con probabilidad 1/2, 4 con probabilidad 1/3 y 10 con probabilidad 1/6. Participar cuesta 3 unidades. Hallar la esperanza del pago y de la ganancia neta.

Solución. La esperanza del pago Y es $0 + 4/3 + 10/6 = 3$. La ganancia neta es $G = Y - 3$, de esperanza $E(G) = E(Y) - 3 = 0$. Sus valores posibles son $-3, 1, 7$, cuyas probabilidades conservan las del pago. La esperanza cero expresa un equilibrio promedio bajo el modelo y conserva la posibilidad de pérdidas y ganancias en cada participación.

Problema 16. Sumar variables dependientes

Sea X una variable que vale cero o uno con probabilidad 1/2 cada uno, e Y=1 − X. Hallar esperanzas y comparar la varianza de X+Y con la suma de varianzas.

Solución. Ambas variables tienen esperanza 1/2 y varianza $1/2 - (1/2)^2 = 1/4$. Su suma vale siempre uno, por lo que tiene esperanza uno y varianza cero. Las esperanzas se suman correctamente: $1/2 + 1/2 = 1$. Las varianzas individuales suman 1/2, un valor distinto de cero. Aquí conocer X determina Y y las variables son dependientes. La condición de independencia en la propiedad de suma de varianzas tiene una función concreta.

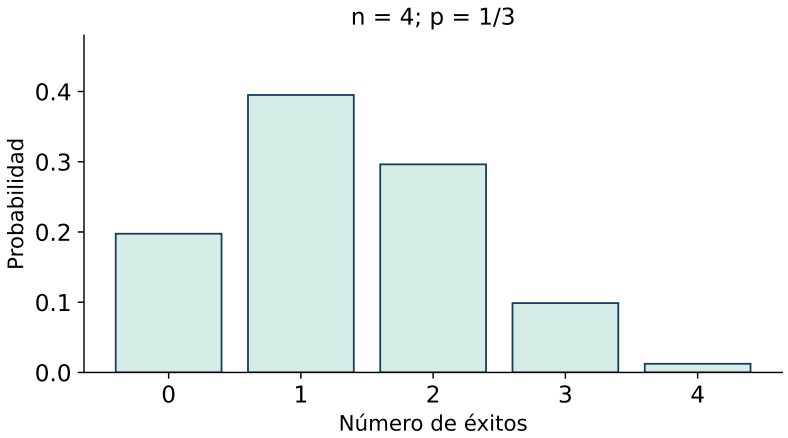
Contar éxitos en ensayos independientes

Un ensayo de Bernoulli distingue éxito y fracaso, con probabilidades p y $1-p$, donde $0 \le p \le 1$. Los nombres designan las dos categorías elegidas para el modelo. Si se realizan n ensayos mutuamente independientes, con la misma probabilidad p, el número X de éxitos tiene distribución binomial:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, \dots, n.$$

Para $0 < p < 1$, cada cadena concreta con k éxitos tiene peso $p^k(1-p)^{n-k}$ y existen $\binom{n}{k}$ cadenas de ese tipo. Si p=0, X vale cero con certeza; si p=1, X vale n. Para n=0 se toma X=0. Declarar estos casos extremos evita ambigüedades en productos con exponentes cero.

La esperanza es np y la varianza $np(1-p)$. Estas fórmulas resultan de sumar indicadores de éxito y usar la independencia. Antes de aplicarlas a datos hay que evaluar si el número de ensayos es fijo, si cada ensayo tiene dos categorías, si la probabilidad se conserva y si el mecanismo sustenta la independencia.



Propiedades binomiales

Propiedad	Hipótesis y alcance
Masa binomial	Para n entero no negativo, ensayos independientes y p constante, $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ en $0<p<1$.
Probabilidad total	La suma de las masas es $(p+1-p)^n=1$; los casos extremos se definen por sus valores ciertos.
Esperanza y varianza	$E(X)=np$ y $\operatorname{Var}(X)=np(1-p)$.
Al menos uno	Para $n\geq 1$, $P(X\geq 1)=1-(1-p)^n$, incluidos p=0 y p=1.

Pruebas. Véase «Ensayos de Bernoulli y conteos binomiales» en el apéndice de demostraciones.

Problema 17. Exactamente dos éxitos

En cuatro ensayos independientes, cada uno con probabilidad de éxito 1/3, hallar la probabilidad de exactamente dos éxitos.

Solución. Una cadena específica con dos éxitos y dos fracasos tiene probabilidad $(1/3)^2(2/3)^2=4/81$. Hay $\binom{4}{2}=6$ posiciones posibles para los dos éxitos, y las cadenas son sucesos disjuntos. Por tanto, $P(X=2)=6\cdot 4/81=8/27$. La multiplicidad de cadenas explica el coeficiente combinatorio.

Problema 18. Complemento y momentos

En cinco ensayos independientes con p=1/5, hallar la probabilidad de al menos un éxito, la esperanza y la varianza del recuento.

Solución. Ningún éxito tiene probabilidad $(4/5)^5=1024/3125$. El complemento da $P(X\geq 1)=2101/3125$. La esperanza es $5/5=1$ y la varianza $5(1/5)(4/5)=4/5$. La esperanza uno es un promedio del modelo; el mismo modelo asigna probabilidad positiva a otros recuentos, incluido cero.

Problema 19. Una selección que cambia la urna

De cinco fichas, dos rojas y tres azules, se extraen dos sin devolución, uniformemente entre las disponibles. Hallar la probabilidad de dos rojas y explicar qué ocurriría al usar una binomial con n=2 y p=2/5.

Solución. La probabilidad real del experimento es $(2/5)(1/4) = 1/10$. Una binomial daría $(2/5)^2 = 4/25$, correspondiente a dos ensayos independientes con probabilidad roja constante. En la extracción descrita, después de una roja la probabilidad roja baja a 1/4. La selección sin devolución se resuelve mediante condicionales o mediante $\binom{2}{2}/\binom{5}{2} = 1/10$. Comparar los mecanismos permite decidir qué distribución representa el recuento.

Problema 20. Un umbral de diseño

Una operación independiente tiene probabilidad de éxito 1/2 en cada intento. Hallar el menor número entero positivo n de intentos para que la probabilidad de al menos un éxito sea al menos 31/32.

Solución. Se requiere $1 - (1/2)^n \geq 31/32$, equivalente a $(1/2)^n \leq 1/32 = 2^{-5}$. Por monotonía de las potencias, esto exige $n \geq 5$. Para n=5 se obtiene exactamente 31/32; para n=4 la probabilidad es $15/16 = 30/32$, menor que el umbral. Así se comprueban tanto la suficiencia como la minimalidad.

Leer áreas y cambiar de escala

En un modelo continuo con densidad, una curva no negativa distribuye probabilidad mediante áreas. El área total bajo la curva vale uno y el área entre a y b representa $P(a \leq X \leq b)$. Para una densidad continua, un punto aislado tiene área cero. Una altura expresa probabilidad por unidad de la variable; para obtener una probabilidad se considera un intervalo y su área.

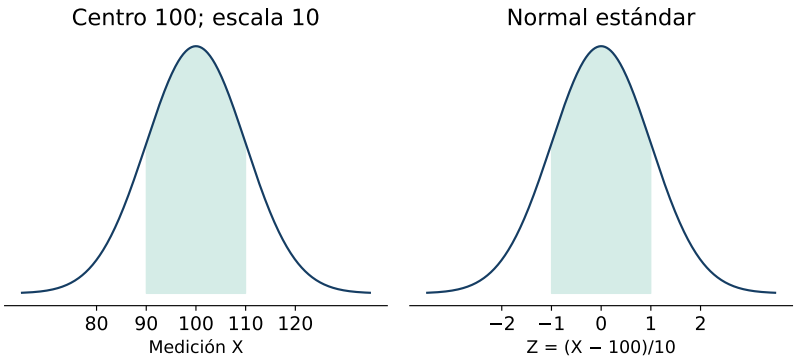
Introduciremos la normal estándar mediante la curva

$$\varphi(z) = c\, e^{-z^2/2},$$

donde c es la constante positiva que hace que su área total sea uno. La exponencial natural usa la base usual e; el apéndice construye el área finita del núcleo y fija c por normalización. Esta descripción permite desarrollar áreas y cambios de escala. El cálculo continuo de momentos y de constantes en forma cerrada corresponde al desarrollo analítico del cálculo.

La función acumulada $\Phi(z)$ es el área a la izquierda de z. La simetría da $\Phi(0) = 1/2$ y $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$. Si Z sigue la normal estándar y $X = \mu + \sigma Z$, con $\sigma > 0$, decimos que X sigue el modelo normal de centro μ y escala σ. Recuperar $Z = (X - \mu)/\sigma$ transforma los límites de un intervalo. La densidad de X se obtiene comprimiendo verticalmente por $1/\sigma$ para compensar el cambio horizontal y conservar áreas. En este anticipo, σ se utiliza como escala; los momentos continuos requieren la integración.

Usaremos los encierros numéricos $0{,}8413 < \Phi(1) < 0{,}8414$ y $0{,}9772 < \Phi(2) < 0{,}9773$, obtenidos mediante sumas de rectángulos con control de colas y redondeo, descritas en el apéndice. Sus puntos medios son aproximaciones con error menor que 0,00005. Las sumas y restas de aproximaciones conservan las correspondientes cotas de error.



Propiedades de áreas y estandarización

Propiedad	Hipótesis y alcance
Área y acumulación	Para una densidad continua normalizada, $P(a \le X \le b)$ es el área entre los límites y los puntos tienen probabilidad cero.
Simetría normal	$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ y $\Phi(0) = 1/2$.
Cambio de escala	Para $X = \mu + \sigma Z$, $\sigma > 0$, se usa $Z = (X - \mu)/\sigma$.
Intervalo normal	Con $a \le b$, la probabilidad es $\Phi((b-\mu)/\sigma) - \Phi((a-\mu)/\sigma)$.
Densidad transformada	$f_X(x) = \varphi((x-\mu)/\sigma)/\sigma$ conserva el área total uno.

Pruebas. Véase «Áreas normales y estandarización» en el apéndice de demostraciones.

Problema 21. Un intervalo de una escala a otra

Se adopta un modelo normal de centro 100 y escala 10 para una medición X. Hallar $P(90 \le X \le 110)$ con los encierros dados.

Solución. Los límites estandarizados son -1 y 1. La simetría da la probabilidad $\Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1$. Por tanto, está entre 0,6826 y 0,6828. El punto medio 0,6827 tiene error menor que 0,0001. Es una predicción del modelo adoptado; su uso para un instrumento concreto exige contrastar la forma de su distribución.

Problema 22. Una cola y una escala con unidades

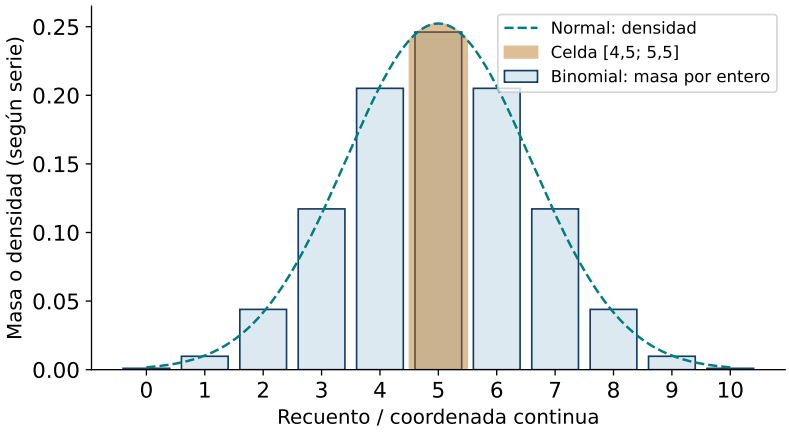
Un tiempo T se modela mediante una normal de centro 50 segundos y escala 5 segundos. Hallar $P(T > 60)$ y explicar el significado de $P(T = 60)$.

Solución. El umbral estandarizado es $(60 - 50)/5 = 2$, una cantidad adimensional. La cola vale $1 - \Phi(2)$ y queda entre 0,0227 y 0,0228. La aproximación 0,02275 tiene error menor que 0,00005. En el modelo continuo, $P(T = 60) = 0$ porque un punto tiene área cero. Una lectura instrumental redondeada a 60 segundos representa un intervalo de tiempos, como $[59{,}5, 60{,}5)$ si se redondea al segundo, y su probabilidad se calcula con los dos límites. El modelo normal también asigna área a tiempos negativos; su adecuación depende de la escala y del fenómeno.

Problema 23. Una condición dentro de la normal

Para Z normal estándar, hallar $P(0 \le Z \le 1 \mid Z \ge 0)$ con una cota de error.

Solución. La base $Z \ge 0$ tiene probabilidad $1/2$. El suceso del numerador ya está contenido en ella y su probabilidad es $\Phi(1)-1/2$. Al dividir, la condicional vale $2\Phi(1)-1$, entre 0,6826 y 0,6828. Puede usarse 0,6827 con error menor que 0,0001. La condición conserva sólo la mitad derecha y renormaliza su área; la regla del cociente mantiene el mismo significado que en los modelos finitos.



Problema 24. Una aproximación continua a un recuento

Sea X binomial con n=10 y p=1/2. Calcular exactamente $P(X = 5)$. Comparar con la aproximación por una normal Y de centro 5 y escala $\sqrt{5/2}$ usando el intervalo [4,5, 5,5]. Se da $0{,}6240 < \Phi(1/\sqrt{10}) < 0{,}6241$.

Solución. La probabilidad exacta es $\binom{10}{5}/2^{10} = 252/1024 = 63/256$. El intervalo continuo tiene límites estandarizados $\pm(0{,}5/\sqrt{5/2}) = \pm 1/\sqrt{10}$. Su área queda entre 0,2480 y 0,2482, con punto medio 0,2481 y error de cálculo menor que 0,0001. La probabilidad binomial exacta es 0,24609375, de modo que el punto medio difiere de ella en 0,00200625. Esta diferencia corresponde a la aproximación entre modelos, además de la incertidumbre de cálculo del área. La corrección de continuidad asigna al entero cinco una celda de ancho uno; este ejemplo comprueba una aproximación concreta y conserva el cálculo exacto como referencia.

Ejercicios para trabajar sin profesor

En cada problema declare espacio, pesos y supuestos. En una condición, identifique la base y compruebe que su probabilidad sea positiva. En los modelos normal y binomial conserve las diferencias entre cálculo exacto, aproximación numérica y aproximación de un modelo por otro.

1. Se gira dos veces una ruleta con resultados A y B y los cuatro pares son equiprobables. Enumere el espacio y halle la probabilidad de exactamente una A.

2. Una ruleta asigna pesos $1/2, 1/4, 1/4$ a A, B y C. Halle $P(\{B, C\})$ y $P(\{A, B\})$.

3. En cincuenta repeticiones ocurre un suceso veintidós veces. Calcule su frecuencia y su diferencia respecto de una probabilidad propuesta de 2/5. Explique el alcance de esa comparación.

4. En un dado equiprobable sean A «sale par» y B «sale al menos cuatro». Halle intersección y unión y sus probabilidades.

5. Tres monedas generan ocho cadenas equiprobables. Halle la probabilidad de al menos una cara por complemento y por recuento.

6. De 60 personas, 30 participan en A, 24 en B y 10 en ambas. Se elige una uniformemente. Halle probabilidades de sólo A, de la unión y de ninguna.

7. En 80 unidades hay 32 de B, 20 de A y 12 de ambas. Con elección uniforme calcule las dos probabilidades condicionales y la conjunta.

8. Una urna tiene cuatro rojas y dos azules. Se extraen dos sin devolución, uniformemente. Halle la probabilidad de dos rojas por etapas y por combinaciones.

9. Una pieza procede de A con probabilidad 3/4 y de B con 1/4. La marca tiene probabilidades 1/5 en A y 2/5 en B. Halle la probabilidad de marca y el posterior de B dada la marca.

10. En dos monedas con pares equiprobables, halle la probabilidad de dos caras dado que al menos una es cara. Compare con la condición de que la segunda sea cara.

11. En un dado equiprobable sean A «sale impar», B «sale múltiplo de tres» y C «sale par». Examine A con B y A con C.

12. En la urna de cuatro rojas y dos azules se devuelve y mezcla la primera ficha. Bajo independencia, halle la probabilidad de dos rojas y compárela con la extracción sin devolución.

13. En los cuatro pares de bits equiprobables, sean A «el primer bit es cero», B «el segundo es cero» y C «ambos coinciden». Examine parejas e intersección triple.

14. En tres monedas con ocho cadenas equiprobables, construya la distribución del número de caras, su esperanza y su varianza.

15. Un juego paga 0, 6 o 12 unidades con probabilidades $1/2, 1/3, 1/6$. La entrada cuesta 4. Halle esperanza del pago y de la ganancia neta.

16. X vale cero o dos con igual probabilidad e Y=$2 - X$. Halle esperanzas y varianzas individuales y de la suma.

17. En cinco ensayos independientes con p=1/3, halle la probabilidad de exactamente dos éxitos.

18. Para cuatro ensayos independientes con p=1/4, halle la probabilidad de al menos uno, la esperanza y la varianza.

19. Entre seis fichas hay dos rojas. Se extraen dos sin devolución, uniformemente. Calcule la probabilidad de dos rojas y compárela con una binomial de n=2 y p=1/3.

20. Con éxito independiente de probabilidad 1/2 en cada intento, halle el menor n positivo para que la probabilidad de al menos un éxito sea al menos 63/64.

21. Para un modelo normal de centro 20 y escala 4, acote $P(12 \le X \le 28)$ y dé una aproximación con cota de error.

22. Un tiempo normal tiene centro 30 segundos y escala 3 segundos. Acote $P(T > 33)$ y explique la probabilidad de una lectura redondeada a 33 segundos.

23. Para Z normal estándar acote $P(-1 \le Z \le 0 \mid Z \le 0)$ e interprete la base.

24. Sea X binomial con n=8 y p=1/2. Halle exactamente $P(X = 4)$ y compárela con la normal de centro 4 y escala $\sqrt{2}$ sobre [3,5, 4,5]. Use $0{,}6381 < \Phi(1/\sqrt{8}) < 0{,}6382$ y separe las dos clases de aproximación.

Soluciones desarrolladas

Ejercicio 1. Pares completos

El espacio es $\{AA, AB, BA, BB\}$. Exactamente una A corresponde a AB y BA. Al tener los cuatro resultados el mismo peso, la probabilidad es $2/4 = 1/2$. El orden distingue los dos resultados favorables y la equiprobabilidad conjunta es un supuesto expreso.

Ejercicio 2. Sumar los pesos

Los tres pesos suman uno. Para $\{B, C\}$, la probabilidad es $1/4 + 1/4 = 1/2$. Para $\{A, B\}$ es $1/2 + 1/4 = 3/4$. Ambos conjuntos tienen dos elementos, pero sus pesos totales son diferentes. El cálculo usa la asignación del modelo para cada resultado.

Ejercicio 3. Un resumen de cincuenta datos

La frecuencia es $22/50 = 11/25 = 0{,}44$. Su diferencia respecto de $2/5 = 0{,}4$ es $1/25 = 0{,}04$. La frecuencia corresponde a estas observaciones y la probabilidad propuesta al modelo. Evaluar el ajuste requiere conocer el mecanismo de repetición y un criterio que trate la variación de muestras finitas. La comparación numérica por sí sola registra esa diferencia.

Ejercicio 4. Contar el solapamiento

Los sucesos son $A = \{2, 4, 6\}$ y $B = \{4, 5, 6\}$. La intersección tiene dos elementos y probabilidad $1/3$; la unión tiene cuatro y probabilidad $2/3$. La igualdad $1/2 + 1/2 - 1/3 = 2/3$ verifica la regla aditiva y corrige la doble cuenta de cuatro y seis.

Ejercicio 5. El único caso sin caras

La cadena SSS es el único resultado sin cara y tiene peso $1/8$. El complemento da $1 - 1/8 = 7/8$. Directamente, las otras siete cadenas contienen al menos una cara y suman ese mismo peso. Se incluye la cadena CCC, que satisface «al menos una».

Ejercicio 6. Las cuatro regiones

Sólo A tiene $30 - 10 = 20$ personas, de probabilidad $1/3$. La unión tiene $30 + 24 - 10 = 44$, de probabilidad $11/15$. Ninguna tiene $60 - 44 = 16$, de probabilidad $4/15$. Las regiones simples tienen recuentos $20, 10, 14, 16$, que suman sesenta y comprueban la partición.

Ejercicio 7. Conservar el denominador de la condición

La probabilidad de A dada B es $12/32 = 3/8$. La de B dada A es $12/20 = 3/5$. La conjunta es $12/80 = 3/20$. Multiplicar la primera por $32/80$ o la segunda por $20/80$ recupera $3/20$. La intersección es la misma y las bases cambian según la información recibida.

Ejercicio 8. Cantidades que se actualizan

Las etapas dan $(4/6)(3/5) = 2/5$, porque después de una roja quedan tres entre cinco. Por subconjuntos, la probabilidad es $\binom{4}{2}/\binom{6}{2} = 6/15 = 2/5$. Los resultados de ambas cuentas coinciden bajo el procedimiento uniforme sin devolución declarado.

Ejercicio 9. Total y posterior

La probabilidad de marca M es $(3/4)(1/5) + (1/4)(2/5) = 3/20 + 2/20 = 1/4$. La probabilidad conjunta B y marca es $2/20 = 1/10$. Al condicionar, $P(B \mid M) = (1/10)/(1/4) = 2/5$. La fracción de la evidencia procedente de B combina su peso inicial con su tasa de marca.

Ejercicio 10. Dos informaciones distintas

La condición «al menos una cara» permite CC, CS y SC; sólo CC tiene dos caras, así que la probabilidad es 1/3. La condición «la segunda es cara» permite CC y SC, con probabilidad de dos caras 1/2. Cada respuesta procede del conjunto de resultados compatibles con la frase concreta.

Ejercicio 11. Independencia y exclusión

$A = \{1, 3, 5\}$ tiene probabilidad 1/2 y $B = \{3, 6\}$ tiene 1/3. Su intersección es $\{3\}$, de probabilidad 1/6, igual al producto: son independientes. A y C son excluyentes; su probabilidad conjunta cero difiere del producto 1/4 y son dependientes. La pareja independiente puede ocurrir simultáneamente en el resultado tres.

Ejercicio 12. Comparar mecanismos

Con devolución e independencia, la probabilidad roja es $4/6 = 2/3$ en cada etapa, y la de dos rojas es 4/9. Sin devolución era 2/5. La diferencia es $4/9 - 2/5 = 2/45$. El primer modelo conserva las cantidades y el supuesto de independencia; el segundo actualiza las cantidades según el primer resultado.

Ejercicio 13. Comprobar todas las subfamilias

Cada suceso tiene probabilidad 1/2. Las tres intersecciones por parejas contienen sólo 00 y valen 1/4, igual al producto de cada pareja. La intersección triple también es $\{00\}$ y vale 1/4, frente al producto 1/8. Se verifica independencia por pares y falla la condición de independencia mutua para los tres.

Ejercicio 14. Agrupar por número de caras

Los recuentos cero, uno, dos y tres aparecen en $1, 3, 3, 1$ cadenas, respectivamente. Sus probabilidades son $1/8, 3/8, 3/8, 1/8$. La esperanza es $(3 + 6 + 3)/8 = 3/2$. El segundo momento es $(3 + 12 + 9)/8 = 3$, de modo que la varianza es $3 - (3/2)^2 = 3/4$. Las probabilidades suman uno y la simetría de la distribución sitúa su centro en 3/2.

Ejercicio 15. Pago y costo fijo

La esperanza del pago es $0 + 6/3 + 12/6 = 4$. Restar el costo fijo da esperanza neta cero. Las ganancias posibles son $-4, 2, 8$, de pesos $1/2, 1/3, 1/6$, y su suma ponderada es $-2 + 2/3 + 8/6 = 0$. Esta segunda cuenta comprueba la linealidad y mantiene la distribución de resultados individuales.

Ejercicio 16. Una suma constante

X e Y tienen esperanza uno y segundo momento dos, así que cada varianza vale $2 - 1 = 1$. La suma X+Y vale siempre dos; su esperanza es dos y su varianza cero. Las esperanzas individuales

suman dos. Las varianzas individuales suman dos y la suma constante tiene dispersión nula. La dependencia explica la necesidad de examinar los términos cruzados.

Ejercicio 17. Posiciones de los éxitos

Hay $\binom{5}{2} = 10$ cadenas con dos éxitos. Cada una tiene probabilidad $(1/3)^2(2/3)^3 = 8/243$. La probabilidad total es 80/243. La independencia permite multiplicar las etapas y la igualdad de p permite asignar ese mismo peso a todas las cadenas del recuento.

Ejercicio 18. Complemento y dispersión

El recuento cero tiene probabilidad $(3/4)^4 = 81/256$. Por complemento, la probabilidad de al menos uno es 175/256. La esperanza es $4(1/4) = 1$ y la varianza $4(1/4)(3/4) = 3/4$. Todas estas cuentas pertenecen al mismo modelo binomial con cuatro ensayos y p constante.

Ejercicio 19. Usar la distribución del mecanismo

Sin devolución se obtiene $(2/6)(1/5) = 1/15$, también igual a $\binom{2}{2}/\binom{6}{2}$. La binomial propuesta daría $(1/3)^2 = 1/9$. Después de la primera roja la probabilidad de roja es 1/5, lo que muestra el cambio que debe conservar la segunda etapa. La cuenta condicional describe el experimento dado.

Ejercicio 20. Minimalidad del umbral

La condición es $1 - 2^{-n} \geq 63/64$, equivalente a $2^{-n} \leq 2^{-6}$. Esto exige $n \geq 6$. Para seis intentos la probabilidad es exactamente 63/64, mientras que para cinco es $31/32 = 62/64$. El menor entero positivo admisible es seis.

Ejercicio 21. Dos unidades de escala a cada lado

Los límites estandarizados son $(12 - 20)/4 = -2$ y $(28 - 20)/4 = 2$. La probabilidad es $2\Phi(2) - 1$, que queda entre 0,9544 y 0,9546. El punto medio 0,9545 tiene error menor que 0,0001. La transformación usa una escala positiva y conserva el orden de los extremos.

Ejercicio 22. Una cola y una lectura redondeada

El umbral 33 corresponde a z=1. La cola está entre 0,1586 y 0,1587, y puede aproximarse por 0,15865 con error menor que 0,00005. Una lectura redondeada de 33 segundos corresponde a [32,5, 33,5); su probabilidad es $\Phi(7/6) - \Phi(5/6)$. La probabilidad del valor puntual T=33 es cero en el modelo continuo. La lectura instrumental agrupa un intervalo de valores posibles.

Ejercicio 23. Renormalizar una mitad

La condición $Z \leq 0$ tiene probabilidad 1/2. El área entre -1 y cero es $1/2 - \Phi(-1) = \Phi(1) - 1/2$. Dividir por la base da $2\Phi(1) - 1$, entre 0,6826 y 0,6828. La aproximación 0,6827 tiene error menor que 0,0001. La base selecciona la mitad izquierda y el cociente expresa qué fracción de esa mitad ocupa el intervalo.

Ejercicio 24. Dos errores que se distinguen

La probabilidad exacta es $\binom{8}{4}/2^8 = 70/256 = 35/128 = 0{,}2734375$. La celda continua produce límites $\pm(0{,}5/\sqrt{2}) = \pm 1/\sqrt{8}$. Su área queda entre 0,2762 y 0,2764. El punto medio 0,2763 tiene error de cálculo menor que 0,0001 y difiere de la probabilidad exacta en 0,0028625. El encierro cuantifica el cálculo del área de la normal; la comparación con la fracción exacta cuantifica el efecto de cambiar el modelo en este caso particular.

Diagnóstico de salida

El lector puede construir una probabilidad cuando define resultados y pesos y justifica las operaciones entre sucesos. Puede actualizarla cuando identifica la información disponible y la nueva base de la condición. Puede elegir una distribución cuando explica sus variables y los supuestos del mecanismo. Al aproximar, puede conservar una cota numérica y distinguirla del alcance del modelo. El paso al cálculo desarrollará las áreas y los momentos continuos con herramientas generales de variación y acumulación.

CAPÍTULO 24

Variación, acumulación y umbral del cálculo

Un vehículo ocupa posiciones distintas a lo largo del tiempo. Si conocemos dos de ellas, podemos calcular cuánto cambió su posición y repartir ese cambio entre los segundos transcurridos. Un registro más fino permite repetir la cuenta en intervalos cada vez menores. Surge una pregunta precisa: ¿se aproximan esas tasas a un valor determinado? Otra pregunta recorre el camino inverso. Si conocemos la velocidad durante un recorrido, ¿cómo recuperamos el desplazamiento?

Las dos preguntas organizan este capítulo. La derivada estudia el cambio local mediante límites de cocientes. La integral reúne contribuciones pequeñas para obtener una acumulación. En ejemplos polinómicos, ambas operaciones pueden justificarse con herramientas que ya conocemos: identidades algebraicas, desigualdades, sumas y completitud de los reales. El trabajo de los límites consiste en controlar todas las aproximaciones suficientemente cercanas; ese control permitirá pasar de una exploración numérica a una afirmación demostrada.

Repartir un cambio entre dos instantes

Para una función f definida en a y b, con $a < b$, el incremento es $f(b) - f(a)$ y la tasa media en ese intervalo es

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

El denominador mide la longitud del intervalo. Si f expresa una posición en metros y su argumento es tiempo en segundos, la tasa tiene unidades de metros por segundo. En el gráfico es la pendiente de la secante que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

Al reunir intervalos, se suman los incrementos y las duraciones. Por eso la tasa conjunta es una media ponderada de las tasas de cada tramo, con las duraciones como pesos. Si una posición aumenta durante una parte del recorrido y disminuye durante otra, los incrementos conservan sus signos. La distancia recorrida suma las longitudes de los movimientos; el desplazamiento conserva el efecto conjunto de sus orientaciones.

Propiedades de incrementos y tasas

Propiedad	Hipótesis y alcance
Incremento aditivo	Para a, b y c del dominio, $f(c) - f(a) = [f(b) - f(a)] + [f(c) - f(b)]$.
Tasa y unidades	Para $a < b$, la tasa media es $[f(b) - f(a)]/(b - a)$ y sus unidades son las de f divididas por las del argumento.
Reunión de intervalos	Si $a < b < c$ y las tasas son m_1, m_2, la tasa conjunta es $[(b - a)m_1 + (c - b)m_2]/(c - a)$.

Continuación de la tabla de propiedades

Propiedad	Hipótesis y alcance
Secante	La recta que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, $a \neq b$, tiene pendiente $[f(b) - f(a)]/(b - a)$.

Pruebas. Véase «Incrementos, tasas y unidades» en el apéndice de demostraciones.

Problema 1. Una tasa con unidades

La posición de un móvil es $s(t) = t^2 - 2t$, con t en segundos y s en metros. Hallar el desplazamiento y la velocidad media entre t=1 y t=4.

Solución. $s(1) = -1$ y $s(4) = 8$. El desplazamiento es $8 - (-1) = 9$ metros en tres segundos. La velocidad media vale $9/3 = 3$ metros por segundo. Las dos cantidades responden a preguntas diferentes: el incremento mide el cambio de posición y su cociente con la duración mide el cambio por unidad de tiempo.

Problema 2. Conservar el sentido de cada tramo

Un móvil avanza a 2 metros por segundo durante tres segundos y retrocede a 1 metro por segundo durante los dos siguientes. Hallar desplazamiento, distancia, velocidad media y rapidez media en los cinco segundos.

Solución. Elegimos como sentido positivo el avance. Los desplazamientos son $2 \cdot 3 = 6$ y $(-1) \cdot 2 = -2$ metros. Su suma es 4 metros y la distancia es $6 + 2 = 8$ metros. La velocidad media es $4/5$ metros por segundo; la rapidez media, $8/5$ metros por segundo. La velocidad de cada tramo es constante y las duraciones convierten las tasas en contribuciones al recorrido.

Problema 3. Dos intervalos de duración diferente

Una cantidad cambia a tasa constante 2 durante una unidad de tiempo y a tasa constante 4 durante las tres siguientes. Hallar la tasa media del intervalo completo.

Solución. El cambio total es $2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = 14$ y la duración es cuatro. La tasa conjunta vale $14/4 = 7/2$. La media de las dos tasas con pesos iguales sería 3; los pesos adecuados son las duraciones 1 y 3. También se obtiene $(1/4)2 + (3/4)4 = 7/2$.

Acercarse con un control explícito

Para estudiar la tasa cerca de un punto a, escribimos el segundo argumento como a+h. El cociente incremental es

$$q(h) = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}, \qquad h \neq 0.$$

La identidad $f(a + h) - f(a) = hq(h)$ reúne cambio y tasa. El valor h=0 corresponde al punto de llegada del proceso. Las cuentas se hacen con incrementos distintos de cero y se estudia qué ocurre al aproximarlos a cero por ambos lados.

Escribimos $q(h) \to L$ cuando podemos hacer que el error $|q(h) - L|$ sea menor que cualquier tolerancia positiva fijada, tomando incrementos suficientemente próximos a cero. En símbolos,

para cada $\varepsilon > 0$ debe existir $\delta > 0$ tal que $0 < |h| < \delta$ implique $|q(h) - L| < \varepsilon$ dentro del dominio considerado. La tolerancia se elige primero; después buscamos una distancia que sirva para todos los incrementos admisibles que la cumplen. Esa dependencia entre ε y δ será lo que construyamos al demostrar un límite.

La misma definición se usa para $f(x) \to L$ cuando x se acerca a a, sustituyendo h por x-a. Una función es continua en a cuando $f(x) \to f(a)$ al acercarse a a dentro de su dominio. En un intervalo cerrado se usa el acercamiento disponible en cada extremo. Los límites de sumas, productos y cocientes permiten demostrar la continuidad de los polinomios y tratar cocientes donde el límite del denominador es distinto de cero.

Propiedades de límites y continuidad

Propiedad	Hipótesis y alcance
Control de un límite	$q(h) \to L$ exige: para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ con $0 < \|h\| < \delta \Rightarrow \|q(h) - L\| < \varepsilon$, en el dominio.
Unicidad	En un punto de acumulación del dominio, un límite finito tiene un único valor.
Combinación lineal	Si $u \to L$ y $v \to M$, entonces $\alpha u + \beta v \to \alpha L + \beta M$ para constantes reales.
Producto	Si $u \to L$ y $v \to M$, entonces $uv \to LM$. Una función con límite finito queda acotada cerca del punto.
Cociente	Si $u \to L$, $v \to M$ y $M \neq 0$, entonces $u/v \to L/M$; v queda separado de cero cerca del punto.
Continuidad polinómica	Todo polinomio real es continuo en cada punto real. La continuidad en a exige que el límite coincida con el valor f(a).

Pruebas. Véase «Límites, continuidad y operaciones» en el apéndice de demostraciones.

Problema 4. El cociente de un cuadrado

Para $f(x) = x^2$, hallar el cociente incremental en a=3 y demostrar que su límite es 6.

Solución. Para $h \neq 0$,

$$\frac{(3+h)^2 - 9}{h} = \frac{6h + h^2}{h} = 6 + h.$$

La diferencia respecto de 6 es $|h|$. Dada cualquier tolerancia $\varepsilon > 0$, tomar $\delta = \varepsilon$ asegura que $0 < |h| < \delta$ implica $|q(h) - 6| < \varepsilon$. La simplificación es válida para cada incremento permitido y el control establece el límite.

Problema 5. Una cota para el cubo

Para $f(x) = x^3$, estudiar el cociente incremental en a=2 y justificar su límite con una cota.

Solución. La expansión da $q(h) = 12 + 6h + h^2$ para $h \neq 0$. Si $|h| < 1$, entonces $|q(h) - 12| \leq 6|h| + |h|^2 \leq 7|h|$. Para una tolerancia $\varepsilon > 0$ sirve $\delta = \min(1, \varepsilon/7)$. Todo incremento con $0 < |h| < \delta$ produce error menor que ε. Así se obtiene el límite 12 por una desigualdad que abarca incrementos positivos y negativos.

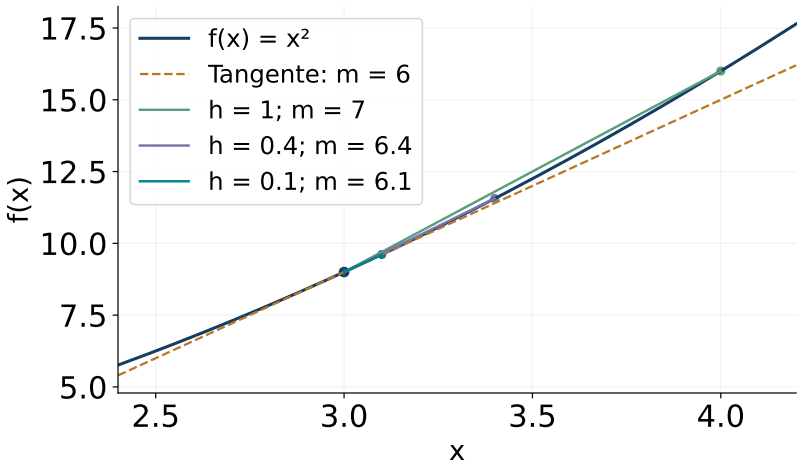
Problema 6. Un valor aislado y un límite

Sea $f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$ para $x \neq 2$, y sea f(2)=7. Hallar el límite al acercarse a 2 y estudiar la continuidad en ese punto.

Solución. Para $x \neq 2$ se tiene $f(x) = x+2$. Por tanto $|f(x)-4| = |x-2|$ y el límite es 4. El valor asignado en el punto es 7, de modo que la función presenta una discontinuidad en 2. Asignar allí el valor 4 produciría la extensión continua. El límite queda determinado por los valores cercanos y la continuidad relaciona ese límite con el valor elegido en el punto.

La derivada de una función

La derivada de f en un punto interior a es el límite finito de su cociente incremental, cuando ese límite existe, y se escribe $f'(a)$. Su valor expresa la tasa local y determina la pendiente de la tangente. Los problemas 4 y 5 muestran dos casos: el cuadrado tiene derivada 6 en 3 y el cubo tiene derivada 12 en 2.



Para el cuadrado en un punto real cualquiera a, la misma expansión da $q(h) = 2a + h$, cuyo límite es $2a$. Podemos seguir el mecanismo en x^n, con n entero positivo: al desarrollar $(a+h)^n$, el término a^n se cancela al restar el valor inicial; todos los restantes contienen h y permiten dividir por el incremento no nulo. Queda na^{n-1} más términos con potencias positivas de h. Las reglas de límites hacen que estos últimos tiendan a cero, y obtenemos así la regla de la potencia. Combinar un número finito de esas identidades permite derivar un polinomio término a término.

La existencia de la derivada también asegura continuidad: la identidad $f(a+h) - f(a) = hq(h)$ muestra que el cambio tiende a cero cuando q tiene límite finito. La continuidad permite que las tasas cercanas se estudien sobre una función cuyos valores se aproximan al del punto. La existencia de una tasa local añade una condición específica sobre el cociente.

Propiedades de la derivación polinómica

Propiedad	Hipótesis y alcance
Derivada en un punto	Para a interior del dominio, $f'(a) = \lim_{h\to 0}[f(a+h)-f(a)]/h$, si existe como número real.
Constante	La derivada de $f(x) = c$ es cero en cada punto real.
Función afín	La derivada de $f(x) = mx + b$ es m en cada punto real.
Potencia entera	Para n entero positivo, $(x^n)' = nx^{n-1}$ en todos los reales; el caso constante se trata aparte.
Combinación lineal	Si f y g son derivables en a, $(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$.
Continuidad	Si f es derivable en a, entonces es continua en a.

Pruebas. Véase «Cocientes incrementales y derivadas de polinomios» en el apéndice de demostraciones.

Problema 7. Dos pendientes al acercarse a una punta

Estudiar la derivabilidad de $f(x) = |x|$ en cero.

Solución. El cociente es $|h|/h$. Para h positivo vale 1 y para h negativo vale -1. Si hubiera un límite bilateral L, los valores constantes de cada lado tendrían que aproximarse a ese mismo L; exigirían simultáneamente L=1 y L=-1. La función es continua en cero, pues $||h| - 0| = |h| \to 0$, y tiene dos pendientes laterales diferentes. La punta del gráfico refleja esa diferencia.

Problema 8. Una tabla y dos funciones compatibles

Se observan las tasas $q(h) = 2 + h$ en los incrementos $h_1 = 1$, $h_2 = 1/10$ y $h_3 = 1/100$. Examinar si esos tres valores determinan el límite. Comparar los polinomios

$$f(x) = 2x + x^2, \qquad g(x) = 2x + x^2 + x\prod_{j=1}^{3}(1 - x/h_j)^2.$$

Solución. Ambos polinomios valen cero en cero y coinciden en cada h_j, porque allí uno de los factores del producto se anula. Sus cocientes incrementales en cero son $2+h$ y $2+h+\prod_j(1-h/h_j)^2$. En los tres incrementos observados coinciden exactamente. Al acercarse h a cero, cada factor del producto tiende a uno, así que los límites son 2 y 3, respectivamente. Las tres observaciones admiten estas dos continuaciones polinómicas. Una fórmula acompañada de un control de límite aporta información sobre todos los incrementos cercanos.

Problema 9. Derivar y evaluar un polinomio

Hallar la derivada de $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5x - 7$ y su valor en x=1.

Solución. Potencias y combinación lineal dan $f'(x) = 12x^3 - 4x + 5$. En x=1 resulta $12-4+5 = 13$. Cada término procede de un límite justificado para una potencia entera, y el dominio del polinomio y de su derivada es todo el conjunto de los reales.

Problema 10. Una expresión que puede desarrollarse

Derivar $f(x) = (x-1)^2$ usando las reglas justificadas hasta aquí.

Solución. La identidad polinómica $f(x) = x^2 - 2x + 1$ vale para todo x real. Derivarla término a término da $f'(x) = 2x - 2$. También puede comprobarse directamente: el cociente incremental en a es $2(a-1) + h$, cuyo límite es $2a - 2$. Los dos procedimientos conservan el mismo dominio y obtienen la misma función derivada.

Problema 11. Velocidad de un modelo de posición

Una posición en metros viene dada por $s(t) = 5 + 2t + t^2$, con t en segundos. Hallar la velocidad en t=3 y la velocidad media entre 3 y 3+h, para $h \neq 0$.

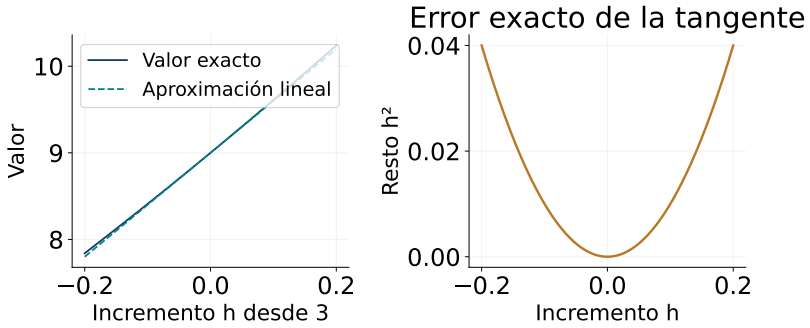
Solución. La función derivada es $s'(t) = 2 + 2t$, por lo que $s'(3) = 8$ metros por segundo. La tasa media del intervalo escrito es $[s(3+h) - s(3)]/h = 8 + h$, con las unidades correspondientes al expresar h en segundos. El valor 8 se obtiene al hacer tender h a cero. En una aplicación, la fórmula de posición y el intervalo físico donde se usa forman parte del modelo.

Aproximar cerca de un punto y localizar extremos

Si f tiene derivada en a, podemos escribir

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + r(h), \qquad \frac{r(h)}{h} \longrightarrow 0.$$

La recta $f(a) + f'(a)h$ describe la parte de primer orden del cambio. El resto precisa la calidad de la aproximación. Para un polinomio podemos conservarlo de forma exacta y acotarlo, como hicimos con los cocientes incrementales.



La derivada también permite localizar candidatos a extremos. En un máximo interior, los cocientes con incrementos positivos tienen signo no positivo y los de incrementos negativos tienen signo no negativo. Si ambos lados llegan a un límite común, ese límite es cero. Un mínimo interior produce la misma conclusión. Los extremos de un intervalo cerrado requieren además revisar sus fronteras.

Para relacionar una derivada con un cambio sobre un intervalo usaremos el teorema del valor medio: si f es continua en $[a, b]$, con $a < b$, y derivable en (a, b), existe $c \in (a, b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$. Su prueba se apoya en la existencia de extremos de una función continua en un intervalo cerrado y en la condición de derivada cero para un extremo interior. El apéndice

demuestra esos pasos desde la completitud de los reales. Una consecuencia útil es que una cota $|f'| \le L$ controla todos los cambios mediante $|f(t) - f(s)| \le L|t - s|$.

Propiedades de aproximación y extremos

Propiedad	Hipótesis y alcance
Aproximación local	Si f es derivable en a, $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + r(h)$ con $r(h)/h \to 0$.
Extremo interior	Si f es derivable en un punto interior donde tiene un máximo o mínimo local, su derivada allí es cero.
Valor medio	Si f es continua en $[a, b]$, $a < b$, y derivable en (a, b), existe c interior con $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.
Cota del cambio	Bajo esas condiciones, si $\lvert f'(x)\rvert \le L$ en el interior, entonces $\lvert f(t) - f(s)\rvert \le L\lvert t - s\rvert$ para s y t del intervalo.

Pruebas. Véase «Aproximación local, extremos y valor medio» en el apéndice de demostraciones.

Problema 12. Una tangente y un error exacto

Aproximar $(3{,}02)^2$ mediante la tangente de x^2 en 3 y calcular el error.

Solución. El incremento es $h = 1/50$. La aproximación lineal vale $9 + 6/50 = 9{,}12$. La identidad $(3 + h)^2 = 9 + 6h + h^2$ conserva el resto $h^2 = 1/2500 = 0{,}0004$. El valor exacto es 9,1204. La tangente proporciona la aproximación y el término cuadrático determina su error y su signo.

Problema 13. Conservar el resto de un cubo

Aproximar $(2{,}1)^3$ linealmente alrededor de 2 y calcular la diferencia exacta.

Solución. Como la derivada del cubo en 2 es 12, la aproximación es $8 + 12(1/10) = 9{,}2$. La identidad $(2 + h)^3 = 8 + 12h + 6h^2 + h^3$ da resto $6/100 + 1/1000 = 61/1000$. Por tanto, el valor exacto es 9,261 y la aproximación queda por debajo en 0,061. Conocer el resto permite decidir cuántas cifras sostiene esta aproximación concreta.

Problema 14. Un máximo con comprobación algebraica

Un rectángulo tiene perímetro 20 unidades. Usando una longitud x, hallar el área máxima y comprobar el candidato obtenido por derivación.

Solución. La otra longitud es $10 - x$, con $0 < x < 10$ para rectángulos de lados positivos. El área es $A(x) = 10x - x^2$ y su derivada $10 - 2x$ se anula en x=5. La identidad $A(x) = 25 - (x - 5)^2$ demuestra que el área es como máximo 25 y que ese valor se alcanza en x=5. Los lados son 5 y 5. La condición de derivada cero localiza el candidato y la identidad verifica la comparación con todos los rectángulos admisibles.

Problema 15. Un punto de derivada cero

Para $f(x) = x^3$, estudiar x=0 como candidato a extremo.

Solución. La derivada $3x^2$ vale cero en el origen. Para todo $\eta > 0$, los puntos $-\eta$ y η dan $-\eta^3 < 0 < \eta^3$. Así, alrededor de cero aparecen valores a ambos lados de f(0). El punto es estacionario y la función atraviesa su nivel. Este ejemplo establece el alcance de la condición necesaria de extremo interior.

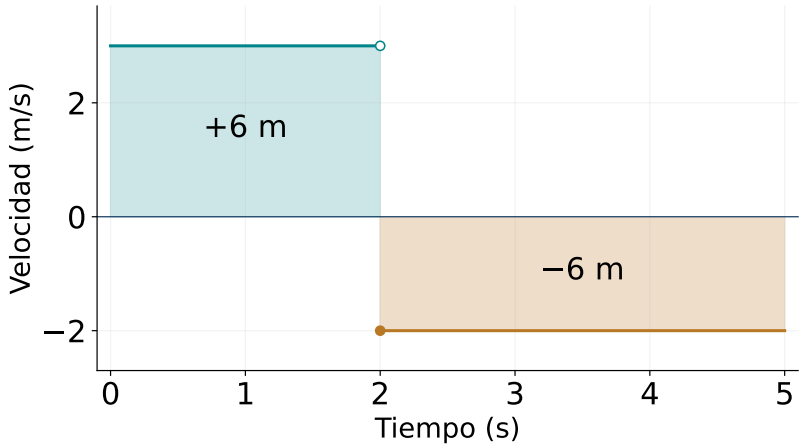
Problema 16. Un intervalo que termina antes del vértice

Hallar el máximo de $f(x) = 10 - (x-4)^2$ en $[0, 3]$.

Solución. La derivada es $8 - 2x$ y es positiva en todo el intervalo. El teorema del valor medio asegura que f crece: para $s < t$, el cambio es $f'(c)(t-s) > 0$. El mayor valor está en la frontera x=3 y vale 9. El único cero de la derivada es 4, situado fuera del intervalo permitido. La búsqueda conserva las restricciones desde el inicio.

Acumular contribuciones de una tasa

Cuando una tasa es constante e igual a v durante un intervalo de longitud Δt, su contribución es $v\Delta t$. Para una tasa constante por tramos, la acumulación es la suma de esas contribuciones. Las partes de signo negativo se conservan al calcular un cambio orientado. En un movimiento, integrar el valor absoluto de la velocidad suma las distancias de los tramos.



Una partición $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ divide un intervalo en piezas. Si una tasa v varía dentro de una pieza, una cota inferior m_i y una superior M_i producen contribuciones que encierran su acumulación. Al sumar se obtienen las sumas inferior $\sum_i m_i \Delta x_i$ y superior $\sum_i M_i \Delta x_i$. Para una función acotada, la integral de Darboux existe cuando el supremo de todas las sumas inferiores coincide con el ínfimo de las superiores. Ese valor común se escribe $\int_a^b v(t)\,dt$.

Para controlar la separación entre las sumas, buscaremos una cota sobre cuánto puede variar la tasa dentro de cada pieza. Supondremos que existe $L \geq 0$ tal que $|v(t) - v(s)| \leq L|t - s|$ en el intervalo; una función con esta propiedad se llama Lipschitz allí. En una pieza de ancho Δx_i, cualquier diferencia entre sus alturas es como máximo $L\Delta x_i$. Al multiplicar esa oscilación por el ancho, la diferencia entre las contribuciones superior e inferior queda acotada por $L(\Delta x_i)^2$. Si h es

el mayor ancho de la partición, cada cuadrado es a lo sumo $h\Delta x_i$; al sumar obtenemos $L(b-a)h$. El apéndice demuestra que las sumas encierran un único valor y que cualquier elección de una altura por pieza aproxima ese valor con error como máximo $L(b-a)h$.

Las tasas constantes y lineales cumplen esa condición. También la cumplen los polinomios sobre cualquier intervalo cerrado, porque su derivada continua queda acotada y se aplica la cota del cambio. Esto da una clase amplia de ejemplos donde la acumulación puede construirse y controlarse.

Propiedades de particiones y acumulación

Propiedad	Hipótesis y alcance
Tasa por tramos	Si v es constante v_i en cada pieza, su acumulación es $\sum_i v_i \Delta x_i$, con signos y unidades conservados.
Refinamiento	Añadir puntos a una partición aumenta o conserva su suma inferior y disminuye o conserva la superior.
Integral de Darboux	Para v acotada en $[a, b]$, es el valor común de supremos inferiores e ínfimos superiores, cuando coinciden.
Operaciones	Para funciones integrables, la integral es lineal, aditiva sobre intervalos contiguos y conserva el orden de funciones en un intervalo con a<b.
Control Lipschitz	Si $\lvert v(t)-v(s)\rvert \le L\lvert t-s\rvert$, v es integrable y una suma con malla h tiene error a lo sumo $L(b-a)h$.

Pruebas. Véase «Particiones, áreas orientadas e integrabilidad» en el apéndice de demostraciones.

Problema 17. Un regreso al punto de partida

Una velocidad vale 3 metros por segundo en $[0, 2)$ y -2 metros por segundo en $[2, 5]$, con tiempos en segundos. Hallar desplazamiento y distancia, y describir la acumulación desde cero.

Solución. Las contribuciones son 6 y -6 metros, por lo que el desplazamiento es cero y la distancia es 12 metros. La acumulación S(t) vale 3t para $0 \le t \le 2$ y $6-2(t-2) = 10-2t$ para $2 \le t \le 5$. Ambas expresiones dan 6 en t=2 y la segunda da cero en t=5. El regreso reúne dos movimientos de magnitudes iguales y sentidos opuestos.

Problema 18. Encerrar una acumulación con rectángulos

Para $v(t) = t$ en $[0, 2]$, usar n piezas iguales y hallar sumas inferiores y superiores. Deducir la integral y un número de piezas que asegure error a lo sumo $1/100$ al usar la suma inferior.

Solución. Los anchos son $2/n$. Como v crece, las alturas inferiores son $2j/n$, con $j = 0, \dots, n-1$. Su suma ponderada es

$$L_n = \frac{4}{n^2}\frac{n(n-1)}{2} = 2 - \frac{2}{n}.$$

Las alturas superiores dan $U_n = 2 + 2/n$. Todo valor encerrado entre ambas tiende a 2 al crecer n, y el criterio de Darboux establece $\int_0^2 t\,dt = 2$. El error de L_n es exactamente $2/n$, así que $n \ge 200$ asegura el margen pedido. La unidad del resultado es la de la tasa multiplicada por la del argumento.

Problema 19. Una recta que cambia de signo

Una velocidad es $v(t) = 4 - 2t$ en $[0, 3]$, con unidades de metros y segundos. Hallar desplazamiento y distancia mediante áreas.

Solución. La velocidad se anula en t=2. Entre 0 y 2, el triángulo sobre el eje tiene base 2 y altura 4, con área 4. Entre 2 y 3, el triángulo bajo el eje tiene base 1 y altura 2, con área orientada -1. El desplazamiento es $4 - 1 = 3$ metros y la distancia es $4 + 1 = 5$ metros. Las áreas triangulares coinciden con los límites de las sumas para una función lineal, como se demuestra en el apéndice.

Problema 20. Alturas, anchos y acumulación

Una tasa vale $v(t) = 2+t$ en $[0, 4]$. Usar las piezas $[0, 2]$ y $[2, 4]$ para encerrar la acumulación y calcular después su valor exacto.

Solución. Las alturas inferiores son 2 y 4 y los anchos valen 2. La suma inferior es $2 \cdot 2+4 \cdot 2 = 12$. La superior es $4 \cdot 2 + 6 \cdot 2 = 20$. El área del trapecio bajo la recta es $[(2 + 6)/2]4 = 16$, situada entre las dos sumas. La multiplicación por los anchos convierte una tasa en una contribución y hace que todas las cantidades comparadas tengan las mismas unidades.

Recuperar una función a partir de su tasa

Una primitiva de v en un intervalo es una función F continua en ese intervalo y derivable en su interior, cuyo valor de derivada es v en cada punto interior. Para una tasa constante k, la función kt es una primitiva. Para una tasa $\alpha t + \beta$, la derivación del cuadrado muestra que $\alpha t^2/2 + \beta t$ cumple esa condición. Sumar una constante conserva la derivada y permite ajustar un valor inicial.

Si dos primitivas tienen la misma derivada en un intervalo, su diferencia tiene derivada cero. El teorema del valor medio hace que esa diferencia sea constante. Así se describe la familia completa de primitivas y se justifica que un valor inicial seleccione una de ellas. El intervalo común conserva la conexión necesaria para comparar cualesquiera dos puntos.

Propiedades de primitivas y datos iniciales

Propiedad	Hipótesis y alcance
Primitiva	En un intervalo, F es una primitiva de v cuando es continua en el intervalo, derivable en su interior y $F' = v$ allí.
Constante entre primitivas	Dos primitivas de la misma función en un intervalo difieren en una constante.
Tasa lineal	Para $v(t) = \alpha t + \beta$, todas sus primitivas son $F(t) = \alpha t^2/2 + \beta t + C$.
Valor inicial	Prescribir $F(t_0) = y_0$ fija $C = y_0 - \alpha t_0^2/2 - \beta t_0$ en esa familia.

Pruebas. Véase «Primitivas polinómicas y condiciones iniciales» en el apéndice de demostraciones.

Problema 21. Reconstruir una posición

Una velocidad es $v(t) = 2t - 3$ y la posición cumple s(1)=4. Hallar s(t) y comprobar ambos datos.

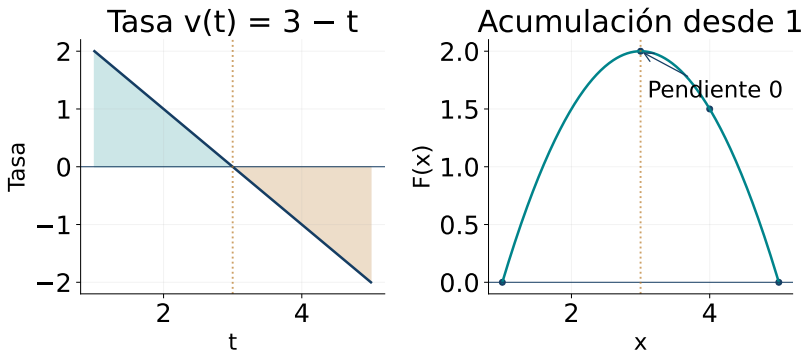
Solución. Las primitivas son $s(t) = t^2 - 3t + C$. El dato inicial exige $1 - 3 + C = 4$, por lo que C=6. La función buscada es $s(t) = t^2 - 3t + 6$. Su derivada es $2t - 3$ y su valor en 1 es 4. La constante fija el nivel de posición compatible con la tasa dada.

La función que acumula y su derivada

Fijemos un punto a y hagamos variar el extremo de la acumulación:

$$F(x) = \int_a^x v(t)\,dt.$$

Para x<a usamos orientación inversa: $\int_a^x v = -\int_x^a v$. El valor en el propio punto inicial es cero. Si v es Lipschitz en un intervalo cerrado, la diferencia $F(x+h) - F(x)$ es la acumulación sobre el pequeño intervalo entre x y x+h. Su cociente con h es una tasa media de acumulación. Todas las alturas de ese intervalo difieren de v(x) en a lo sumo $L|h|$, por lo que el cociente se aproxima a v(x). Se obtiene $F'(x) = v(x)$ en los puntos interiores.



Esta es una forma elemental del teorema fundamental del cálculo, con una hipótesis que ya permite construir la integral y controlar su límite. Si G es cualquier primitiva de v en el intervalo, la diferencia G-F tiene derivada cero. Por tanto, $\int_a^b v(t)\,dt = G(b) - G(a)$. Las dos preguntas del inicio quedan conectadas: una acumulación recupera una función a partir de su tasa, y la derivación de esa acumulación devuelve la tasa.

Propiedades de la conexión fundamental

Propiedad	Hipótesis y alcance
Orientación	Para una función integrable, $\int_a^a v = 0$ y $\int_b^a v = -\int_a^b v$.
Derivada de la acumulación	Si v es Lipschitz en $[a,b]$, entonces $F(x) = \int_a^x v$ cumple $F' = v$ en (a,b).
Evaluación por una primitiva	Si v es Lipschitz y G es una primitiva continua en los extremos del intervalo, $\int_a^b v = G(b) - G(a)$.

Continuación de la tabla de propiedades

Propiedad	Hipótesis y alcance
Error de una suma	Bajo una cota Lipschitz L, cualquier suma con una altura de v por pieza y malla h difiere de la integral en a lo sumo $L(b-a)h$.

Pruebas. Véase «Acumulación y teorema fundamental elemental» en el apéndice de demostraciones.

Problema 22. Derivar una acumulación explícita

Sea $F(x) = \int_0^x (2t+1)\,dt$. Hallar F(x), F(2) y F'(2), justificando la conexión entre acumulación y tasa.

Solución. Una primitiva es $G(t) = t^2 + t$. La tasa es Lipschitz con L=2 en cualquier intervalo, por lo que $F(x) = G(x) - G(0) = x^2 + x$, con orientación cuando x es negativo. Se obtiene F(2)=6 y F'(2)=5. Derivar la expresión explícita devuelve $2x + 1$, que es la tasa en el extremo variable. La constante inicial F(0)=0 queda incorporada por la resta.

Problema 23. Una integral de un cuadrado

Calcular $\int_0^2 t^2\,dt$ mediante una primitiva justificada y explicar qué hipótesis permite usarla.

Solución. La regla de potencias prueba que $G(t) = t^3/3$ tiene derivada t^2. En $[0, 2]$, la derivada de la tasa t^2 es 2t y tiene magnitud a lo sumo 4; por el teorema del valor medio, la tasa es Lipschitz con L=4. La conexión fundamental permite evaluar $G(2) - G(0) = 8/3$. La regla usada para derivar la primitiva y la integrabilidad de la tasa quedan justificadas por pasos distintos del argumento.

Problema 24. Un margen para una suma finita

Aproximar $\int_0^2 t^2\,dt$ con veinte rectángulos de alturas tomadas en los extremos izquierdos. Calcular el error exacto, contrastarlo con una cota Lipschitz y hallar un n que garantice error a lo sumo 1/10 con esa cota.

Solución. El ancho es 1/10 y las alturas son $(j/10)^2$, para $j = 0, \ldots, 19$. La suma es $\sum_{j=0}^{19} j^2/1000 = 2470/1000 = 247/100$. Respecto de $8/3$, el error es $8/3 - 247/100 = 59/300$. Como $|t^2 - s^2| = |t - s||t + s| \le 4|t - s|$ en el intervalo, sirve L=4. La cota general para veinte piezas es $4 \cdot 2 \cdot (1/10) = 4/5$, que cubre el error exacto. Para n piezas iguales la cota es $16/n$; elegir $n \ge 160$ asegura el margen pedido. La cota garantiza una precisión aun cuando exceda el error que se obtiene en un caso particular.

El rectángulo visto desde el cálculo

Volvamos al rectángulo de veinte metros de perímetro de la introducción. Si uno de sus lados mide x metros, el otro mide $10 - x$ y el área es $A(x) = x(10 - x)$, con $0 < x < 10$. Esta vez la entrada representa una longitud. La derivada $A'(x) = 10 - 2x$ mide cuánto cambia el área por unidad de cambio de ese lado: es positiva antes de cinco y negativa después. El teorema del valor medio

permite concluir que el área crece hasta $x = 5$ y decrece a partir de allí. El cuadrado de cinco metros de lado alcanza el máximo de veinticinco metros cuadrados que el dibujo inicial sugería.

El álgebra ya permitía reconocer ese máximo escribiendo $A(x) = 25-(x-5)^2$. El cálculo añade una lectura mediante la tasa de cambio y su signo a cada lado del máximo. También podemos recorrer el camino inverso: integrar la tasa entre dos longitudes admisibles recupera la diferencia entre sus áreas por el teorema fundamental. La misma figura admite así una comparación global mediante cuadrados y un estudio de sus cambios mediante tasas y acumulaciones.

Ejercicios para trabajar sin profesor

En cada tasa conserve las unidades. Para un límite, presente una identidad y un control válido para todos los incrementos suficientemente pequeños. Al acumular, conserve los anchos, los signos y el intervalo. Si usa una primitiva para evaluar una integral, compruebe su derivada y las hipótesis de la conexión fundamental.

1. Sea $s(t) = t^2 + t$, en metros, con t en segundos. Halle desplazamiento y velocidad media entre 0 y 3 segundos.

2. Un móvil avanza a 3 metros por segundo durante dos segundos y retrocede a 2 metros por segundo durante el siguiente. Halle desplazamiento, distancia, velocidad media y rapidez media.

3. Una tasa vale 1 durante dos unidades de tiempo y 7 durante la siguiente. Halle la tasa media del intervalo completo.

4. Obtenga el cociente incremental de x^2 en a=-2 y demuestre su límite mediante una tolerancia arbitraria.

5. Obtenga el cociente incremental de x^3 en a=-1 y acote su diferencia respecto del límite cuando $|h| < 1$.

6. Sea $f(x) = (x^2 - 9)/(x - 3)$ para $x \neq 3$, con f(3)=0. Halle el límite en 3 y el valor que produciría una extensión continua.

7. Estudie la derivabilidad de $f(x) = |x - 2|$ en x=2 y su continuidad allí.

8. Sean $h_1 = 1/2$, $h_2 = 1/20$ y $h_3 = 1/200$. Compare los cocientes incrementales en cero de $f(x) = -4x + x^2$ y $g(x) = -4x + x^2 + 2x\prod_{j=1}^{3}(1 - x/h_j)^2$. Estudie sus valores en los tres incrementos y sus límites.

9. Derive $f(x) = 2x^3 - x^2 + 4$ y evalúe su derivada en -1.

10. Derive $(2x + 1)^2$ mediante desarrollo polinómico y compruebe el resultado con un cociente incremental.

11. Una posición es $s(t) = 3 - t + 2t^2$, con unidades de metros y segundos. Halle s'(2) y la tasa media entre 2 y 2+h.

12. Aproxime $(1{,}97)^2$ mediante la tangente del cuadrado en 2 y calcule su error exacto.

13. Aproxime $(1{,}02)^3$ linealmente en 1 y calcule el resto exacto.

14. Un rectángulo de lados positivos tiene perímetro 24 unidades. Localice y compruebe el área máxima.

15. Estudie x=1 para $f(x) = (x - 1)^3$: valor de la derivada y existencia de un extremo local.

16. Halle el máximo de $f(x) = 12 - (x - 5)^2$ en $[1, 4]$.

17. Una velocidad vale 2 en $[0, 4)$ y -1 en $[4, 6]$, con unidades de metros y segundos. Halle desplazamiento, distancia y acumulación desde cero.

18. Para $v(t) = 2t$ en $[0, 3]$, halle las sumas inferiores y superiores con n piezas iguales, la integral y un n que asegure error a lo sumo 3/100 al usar la suma inferior.

19. Para $v(t) = 3 - t$ en $[0, 5]$, halle desplazamiento y distancia mediante áreas orientadas.

20. Encierre la integral de $v(t) = 2t + 1$ en $[1, 3]$ usando las dos piezas de ancho uno, y calcule su valor exacto.

21. Halle una posición cuya velocidad sea $4t + 1$ y que cumpla s(0)=-2. Compruebe los dos datos.

22. Sea $F(x) = \int_1^x (3 - t)\,dt$. Halle F(x), F(4) y F'(4), justificando las hipótesis usadas.

23. Calcule $\int_{-1}^{1} (3t^2 - 2)\,dt$ con una primitiva comprobada. Interprete el signo del resultado como acumulación orientada.

24. Aproxime $\int_0^1 t^2\,dt$ con diez alturas izquierdas. Calcule el error exacto, contrástelo con L=2 y halle un n que garantice error a lo sumo 1/100 mediante la cota Lipschitz.

Soluciones desarrolladas

Ejercicio 1. Cambio y duración

Las posiciones son s(0)=0 y s(3)=12 metros. El desplazamiento es 12 metros y la duración tres segundos, por lo que la velocidad media es 4 metros por segundo. La secante del modelo en ese intervalo tiene pendiente 4 cuando se usan las unidades indicadas.

Ejercicio 2. Sumar movimientos orientados

Los desplazamientos son 6 y -2 metros. El total es 4 metros y la distancia es 8. En tres segundos, la velocidad media vale 4/3 metros por segundo y la rapidez media 8/3 metros por segundo. La suma orientada y la suma de magnitudes conservan sus respectivos significados durante todo el cálculo.

Ejercicio 3. Pesar por la duración

El cambio total es $1 \cdot 2 + 7 \cdot 1 = 9$ en tres unidades de tiempo. La tasa media es 3, equivalente a $(2/3)1 + (1/3)7$. Los pesos suman uno y corresponden a la fracción de tiempo en cada tramo.

Ejercicio 4. Un control a ambos lados

Para $h \neq 0$, el cociente es $[(-2+h)^2 - 4]/h = -4 + h$. Su diferencia respecto de -4 tiene magnitud $|h|$. Dada $\varepsilon > 0$, elegir $\delta = \varepsilon$ prueba el límite -4. La cuenta conserva la posibilidad de incrementos de ambos signos.

Ejercicio 5. Una cota que tiende a cero

El cociente es $3 - 3h + h^2$. Para $|h| < 1$, su diferencia respecto de 3 tiene magnitud a lo sumo $3|h| + |h|^2 \leq 4|h|$. Sirve $\delta = \min(1, \varepsilon/4)$ para asegurar error menor que cualquier tolerancia positiva dada. El límite es 3.

Ejercicio 6. Completar el valor del punto

Para $x \neq 3$, la factorización da $f(x) = x + 3$. Como $|f(x) - 6| = |x - 3|$, el límite en 3 es 6. La asignación f(3)=0 produce una discontinuidad; asignar 6 hace que el valor coincida con el límite y produce la extensión continua.

Ejercicio 7. Una punta trasladada

El cociente en 2 es $|h|/h$, que vale 1 a la derecha y -1 a la izquierda. Los dos valores laterales impiden un límite bilateral común. La continuidad se comprueba con $|f(2+h)-f(2)| = |h| \to 0$. La traslación del argumento conserva la forma de la punta y sus dos pendientes laterales.

Ejercicio 8. Igualdad de datos y límites diferentes

Los dos polinomios valen cero en cero y coinciden en los tres h_j. Los cocientes son $-4+h$ y $-4+h+2\prod_j(1-h/h_j)^2$. En los incrementos observados, el producto se anula; al acercarse a cero tiende a uno. Los límites son -4 y -2. El ejemplo conserva exactamente la tabla finita y modifica el comportamiento entre sus puntos.

Ejercicio 9. Regla y punto de evaluación

La derivada es $f'(x) = 6x^2 - 2x$. En x=-1 vale $6+2=8$. Las constantes derivan a cero y los términos de potencias enteras siguen de la expansión binomial y las reglas de límites.

Ejercicio 10. Dos cálculos del mismo polinomio

El desarrollo da $4x^2+4x+1$, de derivada $8x+4$. En un punto a, la diferencia de valores dividida por h se simplifica a $8a+4+4h$, para $h \neq 0$. Su límite es $8a+4$, que coincide con el resultado de la regla polinómica en todos los reales.

Ejercicio 11. Tasa instantánea y tasas cercanas

La derivada es $s'(t) = -1+4t$, así que s'(2)=7 metros por segundo. El cociente incremental en 2 vale $7+2h$. La magnitud de su diferencia respecto de 7 es $2|h|$; elegir $|h| < \varepsilon/2$ proporciona el control de aproximación para la tolerancia dada.

Ejercicio 12. Un incremento negativo

El incremento desde 2 es $h = -3/100$. La tangente da $4+4(-3/100) = 3{,}88$. El resto del cuadrado es $h^2 = 9/10000 = 0{,}0009$, y el valor exacto es 3,8809. El signo negativo del incremento conserva un resto cuadrático positivo.

Ejercicio 13. La precisión de la recta local

La aproximación es $1+3(1/50) = 1{,}06$. El resto de $(1+h)^3$ es $3h^2+h^3$, que para h=1/50 vale $3/2500 + 1/125000 = 151/125000 = 0{,}001208$. El valor exacto es 1,061208. La fracción exacta justifica las cifras de error comunicadas.

Ejercicio 14. Verificar el candidato global

Los lados son x y $12-x$, con $0 < x < 12$. El área $12x-x^2$ tiene derivada $12-2x$, cuyo cero es 6. La identidad $12x-x^2 = 36-(x-6)^2$ demuestra que el máximo es 36 y se alcanza con ambos lados iguales a 6.

Ejercicio 15. Un nivel atravesado

La derivada es $3(x-1)^2$ y vale cero en 1. Para cualquier $\eta > 0$, los valores en $1-\eta$ y $1+\eta$ son $-\eta^3$ y η^3. Hay valores menores y mayores que f(1)=0 arbitrariamente cerca. El punto es estacionario y conserva el paso de la función de un lado del nivel al otro.

Ejercicio 16. Revisar el intervalo permitido

La derivada $10-2x$ es positiva en $[1,4]$. Por valor medio, f es creciente en ese intervalo. El máximo se alcanza en x=4 y vale $12-1=11$. El cero de la derivada se encuentra en 5 y la restricción del problema mantiene la búsqueda dentro de $[1,4]$.

Ejercicio 17. Una acumulación continua por tramos

Los desplazamientos son 8 y -2 metros. El desplazamiento total es 6 metros y la distancia 10. La acumulación S(t) es 2t en $[0,4]$ y $8-(t-4)=12-t$ en $[4,6]$. Las dos expresiones coinciden en t=4 y la segunda termina en S(6)=6. Un valor asignado a la velocidad exactamente en el instante de cambio conserva la misma integral.

Ejercicio 18. Reducir la separación entre sumas

El ancho es $3/n$. Las alturas inferiores son $6j/n$, de modo que $L_n = 18\sum_{j=0}^{n-1} j/n^2 = 9-9/n$. Las superiores dan $U_n = 9+9/n$. La integral es 9 y el error inferior es $9/n$. Pedir $9/n \le 3/100$ exige $n \ge 300$. La separación de las sumas es $18/n$ y tiende a cero.

Ejercicio 19. Dos triángulos y una orientación

La velocidad cambia de signo en t=3. El triángulo positivo tiene base 3 y altura 3: área 9/2. El negativo tiene base 2 y altura 2: área orientada -2. El desplazamiento es $9/2-2=5/2$ metros y la distancia $9/2+2=13/2$ metros. El signo de cada contribución conserva el sentido del movimiento.

Ejercicio 20. Un trapecio entre dos sumas

La tasa crece de 3 a 7. Las dos alturas izquierdas son 3 y 5, con anchos uno, y dan suma inferior 8. Las derechas son 5 y 7 y dan suma superior 12. El trapecio tiene área $[(3+7)/2]2 = 10$. La acumulación exacta queda entre las dos aproximaciones.

Ejercicio 21. El nivel fijado por un dato

Las primitivas de $4t+1$ son $2t^2+t+C$. El dato s(0)=-2 fija C=-2. Por tanto, $s(t) = 2t^2+t-2$. Su derivada es la velocidad prescrita y su valor inicial coincide con el dado. La familia completa se justifica mediante la constancia de la diferencia de dos primitivas en un intervalo.

Ejercicio 22. Una acumulación que puede decrecer

Una primitiva de $3-t$ es $G(t) = 3t-t^2/2$. La tasa es Lipschitz con L=1, de modo que $F(x) = G(x)-G(1) = 3x-x^2/2-5/2$. En x=4 se obtiene $F(4) = 3/2$ y $F'(4) = 3-4 = -1$. La acumulación conserva lo reunido desde 1 y su pendiente en 4 expresa una tasa negativa en ese instante.

Ejercicio 23. Evaluación y signo de la acumulación

La función $G(t) = t^3-2t$ tiene derivada $3t^2-2$. La derivada de esta tasa es 6t y está acotada en magnitud por 6 sobre $[-1,1]$, así que la tasa es Lipschitz. La integral vale $G(1)-G(-1) = -1-1 = -2$. El resultado expresa que la contribución negativa supera a la positiva en dos unidades de acumulación. La integral del valor absoluto reuniría magnitudes de ambas partes.

Ejercicio 24. Un error exacto dentro de una garantía

El ancho es $1/10$ y la suma izquierda es $\sum_{j=0}^{9} j^2/1000 = 285/1000 = 57/200$. La integral es $1/3$, obtenida con la primitiva $t^3/3$, y el error es $1/3 - 57/200 = 29/600$. La desigualdad $|t^2 - s^2| \leq 2|t - s|$ en $[0, 1]$ da L=2 y cota $2 \cdot 1 \cdot (1/10) = 1/5$. Para n piezas, la garantía es $2/n$, que queda a lo sumo $1/100$ cuando $n \geq 200$. El margen garantiza precisión a partir de la regularidad y la malla.

Diagnóstico de salida

El lector puede obtener una tasa media, justificar una tasa local mediante un límite, derivar polinomios y controlar una aproximación lineal. Puede construir acumulaciones con signos y anchos, recuperar primitivas con un dato inicial y explicar las condiciones bajo las cuales derivar y acumular se conectan. Los ejemplos conservan una diferencia entre una tabla finita de datos y un control válido para todos los puntos suficientemente cercanos.

El estudio posterior del cálculo ampliará las clases de funciones y las hipótesis de integración, examinará convergencia y tratará intervalos ilimitados. Las probabilidades continuas del capítulo anterior abren una aplicación concreta: calcular momentos y constantes de normalización mediante integrales impropias requiere ese desarrollo adicional. El recorrido preuniversitario deja herramientas verificables para entrar en él y preguntas precisas que orientan la continuación.

APÉNDICE A

Demostraciones de las propiedades

Una tabla permite encontrar una regla con rapidez. Para saber por qué funciona hay que reconstruir las razones que la sostienen y reconocer dónde intervienen sus hipótesis. Este apéndice reúne esas razones para las propiedades de los capítulos anteriores. Las reglas que se repiten en varias tablas comparten aquí una misma demostración.

El recorrido empieza por las operaciones de los reales y avanza hacia las fracciones, las potencias, las raíces y el control del error. Puede consultarse una sección concreta después de leer el desarrollo del capítulo. Cuando un argumento necesita una propiedad anterior, se indica esa dependencia. Las letras representan números reales, salvo que se especifique otro conjunto; una igualdad de expresiones solo se considera en los valores para los que todas sus operaciones están definidas.

Qué adoptamos y qué demostramos

Trabajamos con los números reales como un **cuerpo ordenado completo**. Esta expresión reúne los puntos de partida de la obra. La suma y el producto son operaciones cerradas, conmutativas y asociativas; existen el cero y el uno, distintos entre sí, como elementos neutros; todo real tiene opuesto y todo real no nulo tiene inverso multiplicativo. El producto distribuye sobre la suma. El orden es total, es compatible con sumar una misma cantidad y el producto de dos positivos es positivo. Adoptamos además la completitud: todo conjunto no vacío de reales acotado superiormente tiene una menor cota superior en los reales.

Estas reglas son **axiomas del sistema con el que trabajamos**. Se pueden verificar a partir de una construcción de los reales, que queda fuera del alcance de esta obra. La completitud también se adopta como punto de partida. Las pruebas siguientes deducen consecuencias de estos supuestos.

Algunas filas de las tablas fijan una definición: qué significa una potencia negativa, un error relativo o una proporcionalidad. Una definición no se demuestra como si fuera una conclusión; se explica su elección, se comprueba su coherencia cuando admite distintas representaciones y se deducen sus consecuencias. El desempate del redondeo y la interpretación de ciertas potencias con base negativa son convenciones declaradas. Esta distinción permite seguir el razonamiento sin circularidad.

Usaremos también las propiedades elementales de los enteros y la inducción sobre los naturales: una afirmación que vale en el comienzo y se transmite de cada natural al siguiente vale para todos ellos. La construcción de los sistemas numéricos y el fundamento de ese principio pertenecen a un estudio de fundamentos.

Opuestos, inversos y productos nulos

El opuesto y el inverso son únicos. Si b y c son opuestos de a, entonces

$$b = b + 0 = b + (a + c) = (b + a) + c = 0 + c = c.$$

Si $a \neq 0$ y $ab = ac = 1$, la misma idea con productos da $b = b(ac) = (ba)c = c$. Por tanto tiene sentido hablar de *el* opuesto y *el* inverso de un número. Como $(-a) + a = 0$, el opuesto de $-a$ es a: queda justificado $-(-a) = a$. Definimos $a - b = a + (-b)$ y $a/b = a\,b^{-1}$ cuando $b \neq 0$.

La distributividad obliga a que multiplicar por cero dé cero. En efecto,

$$a0 = a(0 + 0) = a0 + a0.$$

Sumar el opuesto de $a0$ a ambos miembros deja $0 = a0$. Por ello $0/b = 0$ para $b \neq 0$. Si intentáramos definir $a/0$ como la única solución de $0x = a$, para $a \neq 0$ no habría ninguna y para $a = 0$ servirían todas. No se obtiene una división en ninguno de los casos.

De $b + (-b) = 0$ resulta $ab + a(-b) = a0 = 0$. La unicidad del opuesto da $a(-b) = -(ab)$. Conmutando los factores obtenemos también $(-a)b = -(ab)$. Aplicamos la primera regla al producto $(-a)(-b)$:

$$(-a)(-b) = -((-a)b) = -(-(ab)) = ab.$$

Los signos no se añaden a las operaciones como instrucciones independientes: estas identidades proceden de conservar la distributividad y los opuestos.

Si $uv = 0$ y $u \neq 0$, multiplicar por u^{-1} produce $v = 0$. Si $u = 0$, ya se anula el primer factor. Recíprocamente, un producto con un factor cero es cero. Así,

$$uv = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u = 0 \text{ o } v = 0.$$

De aquí se deduce que el producto de dos no nulos es no nulo. Esta observación garantiza, por ejemplo, que el denominador bd no se anula cuando b y d no se anulan.

Transformaciones que conservan una ecuación

De $A = B$ se sigue $A + c = B + c$. Para volver basta sumar $-c$ a ambos lados. Tenemos una equivalencia, porque los dos recorridos son posibles. Si $c \neq 0$, multiplicar por c también es reversible: la vuelta consiste en multiplicar por c^{-1}. Dividir por un no nulo es esa misma operación. Si el factor depende de una incógnita, su posible anulación obliga a separar casos antes de dividir.

En cambio, $A = B$ implica $A^2 = B^2$ sin garantizar la vuelta con el mismo signo. La diferencia de cuadrados, demostrada más adelante mediante distributividad, permite escribir

$$A^2 = B^2 \quad \Longleftrightarrow \quad (A - B)(A + B) = 0.$$

Por el producto nulo, esto equivale a $A = B$ o $A = -B$. Elevar al cuadrado puede reunir dos posibilidades que la ecuación original distinguía.

Si $A \geq 0$, la raíz principal es no negativa. Por tanto $\sqrt{A} = B$ implica $B \geq 0$ y, al elevar al cuadrado, $A = B^2$. A la inversa, si $B \geq 0$ y $B^2 = A$, la unicidad de la raíz no negativa, que probaremos en «Existencia y unicidad de las raíces reales», obliga a que $B = \sqrt{A}$. Queda la equivalencia

$$\sqrt{A} = B \quad \Longleftrightarrow \quad A = B^2 \text{ y } B \geq 0 \qquad (A \geq 0).$$

La condición de signo participa en la demostración; omitirla cambia el conjunto solución.

Fracciones: representantes y operaciones

Para $b, d \neq 0$, de $a/b = c/d$ obtenemos $ad = bc$ al multiplicar por el no nulo bd. Si partimos de $ad = bc$, multiplicar por $(bd)^{-1}$ devuelve la igualdad de fracciones. Esto demuestra el criterio de los productos cruzados. En particular, si también $k \neq 0$, los productos $a(kb)$ y $b(ka)$ coinciden y por tanto $a/b = (ka)/(kb)$.

El inverso de un producto no nulo satisface $(bd)^{-1} = b^{-1}d^{-1}$: multiplicar ambas expresiones por bd da uno, y el inverso es único. Usando esta identidad y distributividad,

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= ab^{-1} + cd^{-1} \\ &= (ad)(bd)^{-1} + (bc)(bd)^{-1} \\ &= (ad + bc)(bd)^{-1} = \frac{ad + bc}{bd}. \end{aligned}$$

Cambiar c por $-c$ produce la resta. Reagrupar los factores en $(ab^{-1})(cd^{-1})$ da $ac(bd)^{-1} = ac/(bd)$ y justifica el producto.

Si $c, d \neq 0$, la fracción c/d tiene inverso d/c, porque su producto vale uno. Entonces

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b}\frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}, \qquad b, c, d \neq 0.$$

Estas operaciones conservan el valor del racional aunque cambien sus representantes, pues se dedujeron de operaciones sobre sus valores reales. Cancelar factores completos es una aplicación del mismo razonamiento: $ab/(ac) = b/c$ exige $a, c \neq 0$. No hay una regla semejante que permita cancelar un sumando aislado de $a + b$.

Signos y compatibilidad del orden

Escribimos $a < b$ cuando $b - a > 0$. Sumar c deja la diferencia intacta: $(b+c)-(a+c) = b-a$. Esto justifica que el orden se conserve y que la transformación sea reversible. Si $c > 0$, la diferencia de los productos es $bc - ac = c(b - a) > 0$; así $ac < bc$. Si $c < 0$, el producto $(-c)(b - a)$ es positivo, y su opuesto $c(b - a)$ es negativo. Por tanto $ac > bc$. Para $c = 0$, los dos productos son cero y ya no hay desigualdad estricta.

El inverso de un positivo es positivo. No es cero, y si fuera negativo, su producto con el positivo sería negativo, aunque ese producto es uno. Aquí $1 > 0$ se deduce del orden del cuerpo: si uno fuera negativo, -1 sería positivo y $(-1)^2 = 1$ sería positivo, contradicción. Un inverso negativo corresponde de la misma manera a una base negativa. Dividir por un positivo conserva el orden y dividir por un negativo lo invierte, porque equivale a multiplicar por su inverso.

Para $0 < a < b$, el producto ab es positivo y

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b - a}{ab} > 0.$$

Por eso $1/b < 1/a$. El mismo cálculo funciona si $a < b < 0$, pues también entonces $ab > 0$. Si los extremos tienen distinto signo, el producto es negativo y no se obtiene esa comparación; el signo del denominador explica la restricción.

Un cuadrado real es no negativo. Para $x > 0$, lo afirma la compatibilidad del producto de positivos; para $x < 0$, usamos $x^2 = (-x)^2 > 0$; para $x = 0$, el cuadrado vale cero. Queda también $x^2 = 0$ si y solo si $x = 0$. Si $0 \le a < b$, la identidad $b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$ tiene dos factores positivos, luego $a^2 < b^2$. La restricción a los no negativos permite invertir la comparación de cuadrados.

Valor absoluto, distancia e intervalos

Definimos $|x| = x$ para $x \ge 0$ y $|x| = -x$ para $x < 0$. En ambos casos el resultado es no negativo, y solo se anula si $x = 0$. Cambiar x por $-x$ intercambia los casos, de modo que $|-x| = |x|$. Como $b - a = -(a - b)$, la distancia satisface $|a - b| = |b - a|$.

Si $r > 0$, estudiamos $u = x - a$. Cuando $u \ge 0$, la condición $|u| < r$ equivale a $u < r$, y ya se cumple $u > -r$. Cuando $u < 0$, equivale a $-u < r$, es decir $u > -r$, y ya se cumple $u < r$. Recorrer los dos casos en sentido inverso prueba

$$|x - a| < r \quad \Longleftrightarrow \quad a - r < x < a + r.$$

El mismo razonamiento con $\le$ incluye los dos extremos. Para $|u| > r$, el caso $u \ge 0$ da $u > r$ y el caso $u < 0$ da $u < -r$; por tanto $|x-a| > r$ equivale a $x < a-r$ o $x > a+r$. Con $\ge$ se incluyen los extremos. Exigir $r > 0$ mantiene el alcance de las tablas; otros radios requieren interpretar sus propios casos.

La intersección y la unión expresan condiciones de pertenencia: $x \in A \cap B$ significa que $x \in A$ y $x \in B$; $x \in A \cup B$ significa que al menos una de esas pertenencias se cumple. Por ello, al reunir condiciones simultáneas tomamos la intersección de sus conjuntos solución, y al reunir alternativas tomamos su unión. El argumento depende de qué debe cumplir cada elemento y permite interpretar del mismo modo conjuntos de intervalos, puntos aislados o cualquier otra forma de conjunto solución.

Necesitaremos además la **desigualdad triangular**. La definición da $-|u| \le u \le |u|$. Sumando las cotas de u y v resulta

$$-(|u| + |v|) \le u + v \le |u| + |v|.$$

Si $|u| + |v| > 0$, la caracterización del valor absoluto entre dos cotas implica $|u + v| \le |u| + |v|$. Si esa suma es cero, ambos números son cero y la desigualdad también se cumple. Aplicada a $u = (u - v) + v$, da $|u| - |v| \le |u - v|$. Intercambiando u, v obtenemos también $|v| - |u| \le |u - v|$, de donde

$$\big||u| - |v|\big| \le |u - v|.$$

Estas dos desigualdades permiten trasladar cotas sin suponer independencia estadística. Por casos de signo se comprueba igualmente $|uv| = |u||v|$; si $v \neq 0$, dividir esta igualdad aplicada a $(u/v)v = u$ da $|u/v| = |u|/|v|$.

Razones y proporcionalidad

Una proporción es una igualdad de razones, por lo que su criterio de productos cruzados es el ya probado para fracciones, con denominadores no nulos y cantidades expresadas en unidades compatibles.

La proporcionalidad directa **se define** por $y = kx$ en el dominio del modelo. Para $x \neq 0$, dividir por x prueba $y/x = k$, y multiplicar devuelve la fórmula. Si x y cx pertenecen al dominio, el nuevo valor es $k(cx) = c(kx) = cy$. Para cantidades positivas se toma $k > 0$. Ninguna de estas consecuencias demuestra que un fenómeno real deba obedecer al modelo: esa es una hipótesis adicional.

La proporcionalidad inversa entre positivos se define por $xy = K > 0$. Como $x > 0$, dividir produce $y = K/x$, y la vuelta es multiplicar por x. Al sustituir x por cx, con $c > 0$ y entrada admitida, obtenemos $K/(cx) = (K/x)/c = y/c$. Así se justifica el cambio inverso de escala sin confundirlo con cualquier dependencia decreciente.

Porcentajes y bases de comparación

El símbolo $p\%$ significa $p/100$. Si la parte A es el $p\%$ de una base positiva B, la definición da $A = (p/100)B$. Dividir por B y multiplicar por cien devuelve $p = 100A/B$.

Un aumento añade la parte calculada sobre el inicio:

$$F = B + \frac{p}{100}B = B\left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Para un descuento se resta esa parte y queda $F = B(1 - p/100)$. La restricción $0 \leq p \leq 100$ garantiza un resultado no negativo en el modelo de descuentos de la tabla. Si el factor aplicado es $f \neq 0$, la equivalencia $F = Bf \iff B = F/f$ permite recuperar el inicio. Con $f = 0$, todos los valores de B producen cero y la información se pierde.

La variación relativa se define como el cambio dividido por el inicio: $r = (F - B)/B$ para $B > 0$. Despejar da $F = B(1 + r)$ y expresarla en porcentaje da $100r$. Si luego actúa una variación s, el resultado es $B(1 + r)(1 + s)$. La distributividad muestra

$$(1 + r)(1 + s) = 1 + r + s + rs,$$

por lo que la variación relativa total es $r + s + rs$. Se deben respetar las restricciones del contexto en cada factor.

Si una tasa pasa de $p_1\%$ a $p_2\%$, los coeficientes porcentuales difieren en $p_2 - p_1$: esa es la diferencia en puntos porcentuales. Si $p_1 > 0$, la variación relativa de la tasa es

$$\frac{p_2/100 - p_1/100}{p_1/100} = \frac{p_2 - p_1}{p_1}.$$

Se comparan dos objetos distintos: una diferencia de tasas expresadas sobre cien y una razón del cambio respecto de la tasa inicial.

Para reunir grupos de bases $B_1, B_2 > 0$, las partes son r_1B_1 y r_2B_2. La parte total dividida por la base total da

$$r = \frac{r_1B_1 + r_2B_2}{B_1 + B_2}.$$

El denominador es positivo. Los pesos $B_1/(B_1+B_2)$ y $B_2/(B_1+B_2)$ suman uno. Si las bases son iguales, la expresión se reduce a $(r_1+r_2)/2$; si las proporciones son iguales a r_0, el numerador es $r_0(B_1+B_2)$ y el resultado es r_0. Esta deducción supone que los grupos se reúnen sumando sus bases y sus partes. Para precisar cuándo coincide esta media con la media simple de las dos proporciones, restamos ambas expresiones y usamos un denominador común:

$$\frac{r_1B_1+r_2B_2}{B_1+B_2}-\frac{r_1+r_2}{2}=\frac{(B_1-B_2)(r_1-r_2)}{2(B_1+B_2)}.$$

Como las bases son positivas, el denominador también lo es. La diferencia vale cero exactamente cuando el producto del numerador es cero. Por la propiedad del producto nulo, esto ocurre cuando las bases son iguales o las proporciones son iguales. Queda demostrado el criterio de coincidencia que acompaña a la proporción conjunta en la tabla del capítulo 2.

Potencias enteras y conteo de factores

Para un entero positivo n, definimos a^n como el producto de n factores a. La asociatividad permite agruparlos y obtener $a^1=a$ y $a^{n+1}=a^n a$. Juntar los factores de a^m y a^n prueba $a^m a^n=a^{m+n}$ cuando $m,n>0$. Reunir n grupos de m factores prueba $(a^m)^n=a^{mn}$. Reordenar el producto de n factores ab da $(ab)^n=a^nb^n$; la conmutatividad de los reales permite juntar los factores de cada clase. Si $b\neq 0$, se obtiene de la misma manera $(a/b)^n=a^n/b^n$.

Para $a\neq 0$ definimos $a^0=1$ y $a^{-n}=(a^n)^{-1}$ si $n>0$. Estas definiciones conservan la recurrencia $a^{k+1}=a^k a$ para todo entero k. En el paso $k=-1$ da $a^{-1}a=1=a^0$; si $k=-n$ con $n>1$, la igualdad $a^n=a^{n-1}a$ muestra, tomando inversos, que $a^{-n}a=a^{-(n-1)}$.

Fijado cualquier entero m, la identidad $a^m a^0=a^m$ es el comienzo. Si $a^m a^n=a^{m+n}$, multiplicar por a y usar la recurrencia prueba el caso $n+1$. Para bajar del caso n al $n-1$, multiplicamos por a^{-1}. Así la inducción hacia arriba y hacia abajo da la ley del producto para todos los enteros m,n. En particular, $a^n a^{-n}=1$, y por tanto

$$a^m/a^n=a^m a^{-n}=a^{m-n}.$$

Para $(a^m)^n$ con $n\geq 0$, la ley del producto cuenta de nuevo los grupos. Si $n<0$, se toma el inverso del caso positivo y se usa $a^{-k}=(a^k)^{-1}$: resulta la misma ley. Las potencias de productos y cocientes con exponente negativo se deducen invirtiendo sus igualdades de exponente positivo; esto exige que todas las bases que se invierten sean no nulas. El exponente cero también pide bases no nulas en la convención de la obra.

Para $n>0$, $0^n=0$ porque el producto contiene factores cero. La definición anterior no asigna 0^0 ni potencias negativas de cero. Si $a>0$, los factores de $(-a)^n$ se agrupan en parejas de producto a^2: un número par de factores da a^n y uno impar deja un factor negativo, dando $-a^n$. La misma paridad determina el signo con exponentes enteros negativos al tomar inversos.

Comparar potencias naturales

Para $u,v>0$, la distributividad permite verificar, cancelando los términos intermedios,

$$v^n-u^n=(v-u)\sum_{j=0}^{n-1}v^{n-1-j}u^j,\qquad n\geq 1.$$

Para $0 < u < v$, el factor $v - u$ es positivo y la suma también lo es: todos sus términos son positivos, incluido el caso $n = 1$, en que el sumando vale uno. Así $u^n < v^n$. Si $u = 0 < v$, la misma conclusión se obtiene directamente de $0^n = 0 < v^n$, sin introducir 0^0 en la suma. Dos números no negativos con la misma potencia natural deben ser iguales. Para n impar, las potencias también conservan el orden entre negativos, porque $(-t)^n = -t^n$, y entre números de distinto signo. Esta monotonía sustentará la unicidad de las raíces.

Existencia y unicidad de las raíces reales

Sea $a > 0$ y $n \geq 2$ entero. Consideremos $S = \{t \geq 0 : t^n \leq a\}$. No está vacío, pues contiene cero; de hecho contiene un positivo, $\min(1, a)$. Está acotado por $M = a + 1$: si $t > M > 1$, entonces $t^n \geq t > a$. Por completitud tiene supremo s, con $0 < s \leq M$.

La identidad de diferencia de potencias proporciona una cota que evita suponer continuidad sin demostrarla. Para $0 < h \leq 1$,

$$0 < (s + h)^n - s^n \leq nh(M + 1)^{n-1}.$$

En efecto, hay n términos en la suma y cada factor que aparece no supera $M + 1$. Si $s^n < a$, elegimos además $h < (a - s^n)/(n(M + 1)^{n-1})$. Entonces $(s + h)^n < a$, por lo que $s + h \in S$, contradiciendo que s sea cota superior.

Si $s^n > a$, elegimos $0 < h < s$ tan pequeño que $nhM^{n-1} < s^n - a$. La misma identidad da $s^n - (s - h)^n \leq nhM^{n-1}$, luego $(s - h)^n > a$. Por monotonía, todo elemento de S es menor que $s - h$. Esto convertiría a $s - h$ en una cota superior menor que el supremo. Las dos alternativas son imposibles: $s^n = a$. Para $a = 0$ la raíz no negativa es cero.

La monotonía probada antes da unicidad en los no negativos. Si n es par, ninguna potencia real de índice n es negativa; por ello la raíz principal real solo se define para $a \geq 0$ y se elige no negativa. Si n es impar y $a < 0$, el opuesto de la raíz positiva de $-a$ tiene potencia a. La monotonía impar en toda la recta da unicidad. Esto justifica existencia, dominio y elección de signo, sin confundir una raíz principal con todas las soluciones de una ecuación.

Como $|u| \geq 0$ y $|u|^2 = u^2$, la unicidad demuestra $\sqrt{u^2} = |u|$ para cualquier real u. Quitar las barras exigiría además $u \geq 0$.

Productos, cocientes y sumas de radicales

Para índice par y $a, b \geq 0$, el número $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$ es no negativo. Su potencia n vale ab por la ley de la potencia de un producto. La unicidad obliga a que sea $\sqrt[n]{ab}$. Si $b > 0$, el cociente de las raíces es no negativo, está definido y su potencia vale a/b; de nuevo es la raíz principal. Si el índice es impar, la raíz es única en toda la recta y los mismos argumentos admiten cualquier signo de los radicandos, exigiendo $b \neq 0$ en el cociente.

Con $y \geq 0$, ambos factores de $x^2 y$ admiten raíz cuadrada real, y las reglas anteriores dan

$$\sqrt{x^2 y} = \sqrt{x^2}\sqrt{y} = |x|\sqrt{y}.$$

No afirmamos que $y \geq 0$ caracterice por sí sola todo el dominio de la expresión de la izquierda: cuando $x = 0$ pueden aparecer otros casos. Es la hipótesis suficiente que permite separar ambos radicales tal como están escritos.

La distributividad permite reunir radicales iguales: $u\sqrt{a}+v\sqrt{a}=(u+v)\sqrt{a}$ para $a\geq 0$. No se suman los radicandos. Por otra parte, la diferencia de cuadrados aplicada a $\sqrt{a}$ y b da

$$(\sqrt{a}-b)(\sqrt{a}+b)=a-b^2, \qquad a\geq 0.$$

Para racionalizar una fracción mediante ese producto, el denominador original y el factor por el que se amplifica deben ser no nulos. La identidad por sí sola no autoriza a multiplicar una fracción por una expresión que no sea una forma válida de uno.

Exponentes racionales sin ambigüedad

Para $a>0$, $m\in\mathbb{Z}$ y $n\geq 1$ entero, definimos $a^{m/n}=(\sqrt[n]{a})^m$; para $n=1$ entendemos $\sqrt[1]{a}=a$. La raíz es positiva, de modo que también admite los exponentes enteros negativos. Hay que comprobar que elegir otro representante del mismo racional no cambia el valor.

Si $m/n=p/q$, con $n,q>0$, entonces $mq=pn$. Los positivos $u=(\sqrt[n]{a})^m$ y $v=(\sqrt[q]{a})^p$ satisfacen

$$u^{nq}=a^{mq}=a^{pn}=v^{nq}.$$

Se usaron únicamente leyes de exponentes enteros. La monotonía de la potencia de exponente nq en los positivos obliga a $u=v$. La definición depende, por tanto, del racional y no de la fracción elegida.

Para probar el producto escribimos $r=M/N$, $s=P/N$ con un denominador común positivo y ponemos $w=\sqrt[N]{a}$. Entonces

$$a^r a^s=w^M w^P=w^{M+P}=a^{r+s}.$$

La ley entera vale también si M o P es negativo. El caso $s=-r$ muestra que a^{-r} es el inverso de a^r, y de ahí $a^r/a^s=a^{r-s}$.

Para la potencia de una potencia, escribimos $r=m/n$, $s=p/q$ con denominadores positivos. El positivo $z=(a^{m/n})^{p/q}$ satisface $z^q=(a^{m/n})^p$. Al elevar a n y usar leyes enteras,

$$z^{nq}=((a^{m/n})^n)^p=(a^m)^p=a^{mp}.$$

El positivo $a^{mp/(nq)}$ tiene la misma potencia nq; la unicidad demuestra $(a^r)^s=a^{rs}$. No se aplicó la ley que queríamos demostrar a una base negativa.

Si $a,b>0$ y $r=m/n$, los positivos $(ab)^r$ y $a^r b^r$ tienen potencia n igual a $(ab)^m=a^m b^m$. Son iguales por unicidad. El cociente sigue de $(a/b)^r b^r=a^r$ y de que $b^r\neq 0$.

Añadimos por definición $0^r=0$ para racionales positivos r. Sus representantes reducidos tienen numerador positivo, por lo que la raíz de cero elevada a ese entero también da cero. Los exponentes cero o negativos permanecen excluidos para esa base.

Para $a<0$, la obra adopta la siguiente convención: se reduce m/n con $n>0$; si n es impar, se usa $(\sqrt[n]{a})^m$; si n es par, no se asigna un valor real. La fracción reducida es única. Esta convención define valores, pero no demuestra para ellos todas las leyes anteriores. De hecho, $((-1)^2)^{1/2}=1$, mientras que $(-1)^{2(1/2)}=-1$. La base positiva es una hipótesis efectiva de la ley general de composición.

Orden al cambiar el exponente

Si $a > 1$ y $r < s$ son racionales, la ley del cociente da $a^s/a^r = a^{s-r}$. Escribimos $s - r = m/n > 0$ con m, n positivos. La raíz $a^{1/n}$ supera uno, pues un número positivo no mayor que uno tendría potencia n no mayor que uno. Su potencia m también supera uno. Por tanto $a^s/a^r > 1$ y, como $a^r > 0$, resulta $a^s > a^r$.

Si $0 < a < 1$, la base $1/a$ supera uno. Para ella acabamos de probar $(1/a)^r < (1/a)^s$. Estos números son $1/a^r$ y $1/a^s$; invertir positivos invierte el orden, por lo que $a^r > a^s$. Para $a = 1$ las raíces positivas y todas sus potencias racionales valen uno. Por último, las raíces de índice fijo conservan el orden en su dominio: una comparación contraria entre sus valores contradiría la monotonía de sus potencias, ya demostrada.

Escalas decimales y unidades

La existencia de la notación científica usa que las potencias de diez pueden superar cualquier cantidad. Primero, los naturales no están acotados en los reales: si tuvieran supremo s, habría un natural $n > s-1$, y entonces el natural $n+1 > s$ contradiría esa cota. Por inducción, $10^n \geq n+1$ para todo natural n. Las potencias de diez tampoco están, pues, acotadas. Sus recíprocos pueden hacerse menores que cualquier positivo: basta superar su inverso con una potencia de diez.

Dado $x \neq 0$, elegimos un natural N con $10^{-N} \leq |x| < 10^N$. En la lista finita de enteros entre $-N$ y N hay un mayor k que cumple $10^k \leq |x|$. Su elección asegura $|x| < 10^{k+1}$. Tomamos $c = x/10^k$ y obtenemos $x = c10^k$, con $1 \leq |c| < 10$.

Si $c10^k = d10^\ell$ fueran dos formas normalizadas y $k < \ell$, tendríamos $|c| = |d|10^{\ell-k} \geq 10$, contradicción. Intercambiando los exponentes se excluye $k > \ell$, de modo que $k = \ell$ y después $c = d$. El cero no admite un coeficiente normalizado de magnitud al menos uno; se escribe simplemente cero.

Las reglas de cálculo son consecuencias de las potencias enteras y de la distributividad:

$$\begin{aligned} (c10^k)(d10^\ell) &= cd\,10^{k+\ell}, \\ \frac{c10^k}{d10^\ell} &= \frac{c}{d}\,10^{k-\ell} \quad (d \neq 0), \\ c10^k + d10^k &= (c+d)10^k. \end{aligned}$$

Para sumar escalas distintas se puede sustituir $d10^\ell$ por $(d10^{\ell-k})10^k$, igualdad que vuelve a usar la ley del producto. La normalización se aplica después y no modifica el valor.

Si una conversión exacta afirma $1\,U = 10^k\,V$, elevar ambos miembros a un entero positivo n da $(1\,U)^n = 10^{kn}\,V^n$. Esto prueba por qué se eleva también el factor de conversión en áreas o volúmenes. La relación inicial entre unidades se adopta por su definición; el álgebra explica su consecuencia para unidades elevadas.

Truncación, redondeo y cifras significativas

Sea $u > 0$ el tamaño de la posición que conservamos. Para $x \geq 0$ existe un entero $k \geq 0$ tal que $ku \leq x < (k+1)u$: se busca el último múltiplo que no supera x, usando que los naturales no están acotados. La truncación hacia cero es $t = ku$, por lo que $0 \leq x - t < u$. Para $x < 0$ truncamos $|x|$ y restituimos el signo; la distancia es la misma. Así $|x - t| < u$ en ambos casos.

Entre dos múltiplos consecutivos ku y $(k+1)u$, el punto medio es $(k+1/2)u$. Si x está a su izquierda, la distancia al múltiplo izquierdo no supera $u/2$; si está a su derecha, ocurre lo mismo con el derecho. En el punto medio ambas distancias valen $u/2$. Por ello todo redondeo al múltiplo más cercano satisface $|x-r| \le u/2$. Elegir en los empates el que se aleja del cero es la convención de este libro; la cota vale con cualquiera de las dos elecciones.

Para $x \neq 0$, la normalización determina k por $10^k \le |x| < 10^{k+1}$. La primera cifra significativa ocupa el lugar 10^k, la segunda el 10^{k-1} y la cifra s, con $s \ge 1$ entero, el lugar $u = 10^{k-s+1}$. Redondear a ese múltiplo conserva las posiciones deseadas; si hay acarreo, se comunica la cantidad de cifras mediante la escritura final. Esta es una consecuencia del valor posicional decimal. No demuestra por sí sola que un instrumento tenga una incertidumbre de ese tamaño.

Errores y cotas relativas seguras

El error absoluto se define por $E_{\text{abs}} = |a - x|$, donde x es el valor exacto y a la aproximación. Si $x \neq 0$, el relativo se define por $E_{\text{rel}} = |a - x|/|x|$. El primero conserva unidades y el segundo divide magnitudes de la misma unidad. Expresarlo como porcentaje es multiplicar por cien.

Para $\delta \ge 0$, la definición de valor absoluto da

$$|x - a| \le \delta \quad \Longleftrightarrow \quad a - \delta \le x \le a + \delta.$$

Si $\delta = 0$, ambos miembros de la equivalencia exigen $x = a$; si $\delta > 0$, es la caracterización de distancia ya demostrada.

Supongamos además que $|a| > \delta$. La desigualdad triangular aplicada a $a = (a - x) + x$ da $|a| \le |a - x| + |x|$, de donde

$$|x| \ge |a| - |a - x| \ge |a| - \delta > 0.$$

El numerador del error relativo no supera δ y el denominador no baja de $|a| - \delta$. La comparación de cocientes positivos prueba

$$E_{\text{rel}} \le \frac{\delta}{|a| - \delta}.$$

La separación del cero permite dividir y garantiza una cota finita. Sustituir el denominador por $|a|$, que puede ser mayor que $|x|$, no conserva automáticamente esa garantía.

Intervalos bajo las operaciones

Sean $x \in [a, b]$ e $y \in [c, d]$, con $a \le b$ y $c \le d$. Sumar desigualdades compatibles da $a + c \le x + y \le b + d$. Multiplicar $c \le y \le d$ por menos uno produce $-d \le -y \le -c$; sumando las cotas de x, obtenemos $a - d \le x - y \le b - c$.

Para el producto fijamos primero y. Si $y > 0$, el valor xy queda entre ay y by; si $y < 0$, el orden de esos extremos se invierte; si $y = 0$, los tres son cero. Al variar luego y entre c y d, cada expresión ay y by queda entre sus valores en los extremos, cualquiera que sea el signo de a o b. En consecuencia, xy está entre el menor y el mayor de

$$ac, \quad ad, \quad bc, \quad bd.$$

No se ha supuesto que x e y puedan elegirse libremente: la cota es segura incluso si existe una relación entre ellos. Esa relación puede impedir que se alcancen algunos extremos y permitir una cota mejor.

Si el intervalo del denominador no contiene cero, sus extremos tienen el mismo signo. La regla de recíprocos da

$$\frac{1}{d} \le \frac{1}{y} \le \frac{1}{c}$$

tanto para $0 < c \le y \le d$ como para $c \le y \le d < 0$. Si un extremo coincide con el otro no hay dificultad: el intervalo es un punto no nulo. Multiplicar este intervalo recíproco por el del numerador mediante las cuatro esquinas da una cota para el cociente. En particular, si $0 < a \le x \le b$ y $0 < c \le y \le d$, todos los valores son positivos y queda $a/d \le x/y \le b/c$.

Si el intervalo contiene cero, la inversión completa no está definida. Incluso quitando cero, puede no haber cota finita: en un intervalo con positivos arbitrariamente pequeños, los inversos pueden superar cualquier número dado. Por eso no basta afirmar que el denominador efectivo es distinto de cero; necesitamos una separación positiva del cero para garantizar una envolvente finita.

Propagación determinista de errores

Supongamos $|x - a| \le \alpha$, $|y - b| \le \beta$ con $\alpha, \beta \ge 0$. Para la suma,

$$|(x + y) - (a + b)| = |(x - a) + (y - b)| \le \alpha + \beta.$$

Para la resta reemplazamos $y - b$ por su opuesto, que tiene el mismo valor absoluto, y obtenemos la misma cota. Se usó la desigualdad triangular, sin hipótesis probabilísticas.

Escribimos $x = a + e$, $y = b + f$, con $|e| \le \alpha$, $|f| \le \beta$. La distributividad da exactamente

$$xy - ab = af + be + ef.$$

La desigualdad triangular y la multiplicatividad del valor absoluto permiten acotar cada término:

$$|xy - ab| \le |a|\beta + |b|\alpha + \alpha\beta.$$

El último término procede del producto ef y no desaparece por el hecho de que las perturbaciones sean pequeñas. Si $ab \neq 0$, dividimos por $|ab| = |a||b| > 0$ y resulta

$$\frac{|xy - ab|}{|ab|} \le \frac{\alpha}{|a|} + \frac{\beta}{|b|} + \frac{\alpha\beta}{|ab|}.$$

El denominador de esta comparación es el producto central. El error relativo respecto del producto exacto usaría $|xy|$ y exigiría comprobar que $xy \neq 0$ y controlar ese denominador. No son la misma afirmación.

Recíprocos y una aproximación radical

Con $x \neq 0$ y $x + h \neq 0$, llevar las fracciones al denominador común da

$$\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} = \frac{-h}{x(x+h)}.$$

Tomar valores absolutos, usando las propiedades del producto y del cociente, prueba

$$\left|\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right| = \frac{|h|}{|x|\,|x+h|}.$$

La identidad muestra cómo intervienen los denominadores en la sensibilidad de un recíproco.

Para $t \geq 0$, ponemos $z = \sqrt{1+t} \geq 1$. De $z^2 = 1 + t$ se obtiene

$$1 + \frac{t}{2} - z = \frac{z^2 + 1 - 2z}{2} = \frac{(z-1)^2}{2} \geq 0.$$

Además, $(z-1)(z+1) = t$ y $z + 1 \geq 2$, de modo que $z - 1 = t/(z+1)$. Sustituir permite expresar y acotar exactamente el error:

$$0 \leq 1 + \frac{t}{2} - \sqrt{1+t} = \frac{t^2}{2(\sqrt{1+t}+1)^2} \leq \frac{t^2}{8}.$$

La última desigualdad usa un denominador al menos igual a ocho. La prueba vale para todo $t \geq 0$; la utilidad numérica se decide comparando $t^2/8$ con la precisión que necesitamos.

Punto medio y bisección

Si $a \leq x \leq b$ y $m = (a+b)/2$, restar m deja

$$-\frac{b-a}{2} \leq x - m \leq \frac{b-a}{2}.$$

Por la caracterización del valor absoluto, $|x - m| \leq (b-a)/2$. En consecuencia, un intervalo de ancho no mayor que 2ε, con $\varepsilon > 0$, garantiza error del punto medio no mayor que ε.

Para encerrar $\sqrt{A}$ con $A \geq 0$, se parte de cotas no negativas a, b que satisfacen $a^2 \leq A \leq b^2$. La monotonía del cuadrado permite conservar $[m, b]$ si $m^2 < A$, o $[a, m]$ si $m^2 > A$. Si hay igualdad, se conoce ya la raíz. En cada paso que continúa, el ancho se divide por dos; por inducción, tras n pasos el ancho inicial w es $w/2^n$. Aplicar la cota del punto medio al intervalo final da $w/2^{n+1}$.

Si se encuentra antes la raíz exacta, se puede detener el procedimiento con error cero; también se puede conservar el intervalo puntual, que cumple una cota aún mejor. La fórmula del ancho describe los pasos de división efectiva y no obliga a seguir calculando después de hallar la raíz.

Distributividad, signos y términos semejantes

La distributividad es uno de los axiomas adoptados al inicio. Sus formas con resta se deducen de la suma y los opuestos:

$$a(b - c) = a(b + (-c)) = ab + a(-c) = ab - ac.$$

Con $a = -1$, obtenemos $-(b+c) = -b - c$ y $-(b-c) = -b + c$. La sustitución es válida incluso cuando algún término es cero o negativo.

Reunir términos semejantes recorre la distributividad en sentido inverso: $au + bu = (a + b)u$. La cantidad u representa la parte completa que se repite. Lo mismo permite extraer un factor común: $ab+ac = a(b+c)$. Estas son identidades de expresiones y siguen valiendo cuando el factor común se anula; no se ha dividido por él.

Si la expresión común es un binomio, se trata como un solo factor:

$$u(v + w) + z(v + w) = (u + z)(v + w).$$

Primero se aplica distributividad a u y z con el factor $v + w$; no es necesario desarrollar ese factor para justificar la igualdad.

Productos de binomios, cuadrados y cubos

Aplicar dos veces la distributividad prueba el producto general:

$$\begin{aligned}(a + b)(c + d) &= a(c + d) + b(c + d)\\ &= ac + ad + bc + bd.\end{aligned}$$

Elegir $c = a$, $d = b$ y usar $ab = ba$ produce $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Sustituir b por $-b$ da $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, porque $(-b)^2 = b^2$. Para el producto de conjugados,

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2.$$

Estos desarrollos sirven para cualesquiera reales a, b, sin depender de una interpretación por áreas positivas.

El cubo se obtiene multiplicando el cuadrado por la misma suma:

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= (a^2 + 2ab + b^2)(a + b)\\ &= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3\\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.\end{aligned}$$

Cambiar b por $-b$ conserva los términos con potencia par de b y cambia los de potencia impar, de donde

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

La forma desarrollada y la forma producto son iguales; por eso estas identidades pueden usarse también para factorizar un polinomio que tenga exactamente esos términos.

Sumas de cubos y reconstrucción de factores

Para la diferencia de cubos desarrollamos y cancelamos:

$$\begin{aligned}(a - b)(a^2 + ab + b^2) &= a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3\\ &= a^3 - b^3.\end{aligned}$$

Sustituir b por $-b$ en esta igualdad da $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$. Los signos del factor cuadrático proceden de esa sustitución; no se eligen para hacer parecido el resultado.

Si buscamos dos factores lineales mónicos, el producto general proporciona

$$(x+p)(x+q) = x^2 + px + qx + pq = x^2 + (p+q)x + pq.$$

Para reconstruir un trinomio de esa forma, la suma $p+q$ debe coincidir con el coeficiente de x y el producto pq con el término constante. Encontrar solo uno de los dos datos no verifica una factorización. Esta identidad no asegura que los números p, q existan en el conjunto de coeficientes que se haya elegido.

Por ejemplo, $x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ es una factorización real porque $\sqrt{2}$ existe y tiene cuadrado dos. En cambio, $x^2 + 1 \geq 1$ para todo real x. Un factor lineal real no constante $ax + b$, con $a \neq 0$, se anularía en $x = -b/a$ y obligaría al producto a valer cero allí. Esto contradice la positividad. La afirmación depende de que se pidan factores lineales reales no constantes.

Completar cuadrados y localizar extremos

Del cuadrado de una suma, con $h = b/2$, resulta $(x + b/2)^2 = x^2 + bx + b^2/4$. Restar la constante añadida y sumar c prueba

$$x^2 + bx + c = (x + b/2)^2 + c - b^2/4.$$

Para un coeficiente principal $a \neq 0$, extraemos primero a de los dos primeros términos y aplicamos la misma identidad dentro del paréntesis:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}. \end{aligned}$$

Si $a > 0$, el primer término de la última expresión es no negativo. Por tanto la constante exterior es una cota inferior y se alcanza exactamente cuando el cuadrado se anula, en $x = -b/(2a)$. Es el mínimo. Si $a < 0$, el término es no positivo: la misma constante es el máximo y se alcanza en el mismo valor de x. Si $a = 0$, las divisiones de la fórmula no existen y se debe volver a la expresión lineal o constante inicial.

Cancelación y dominio de una expresión

La igualdad de cocientes ya probada da $ab/(ac) = b/c$ cuando $a, c \neq 0$. También puede verse multiplicando la fracción por a^{-1}/a^{-1}, que vale uno. Si a es una expresión en una variable, los valores que la anulan estaban excluidos del cociente original y siguen excluidos al describirlo mediante la fórmula reducida.

Por ejemplo, $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$ permite escribir

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = x + 3 \qquad (x \neq 3).$$

A la derecha podemos sustituir tres, pero esa sustitución no adquiere sentido en el cociente original. Las fórmulas coinciden en el dominio original; prolongar el valor al punto excluido define una función de dominio mayor. Esta distinción explica por qué una simplificación conserva valores sin rellenar automáticamente los huecos del problema.

Ecuaciones lineales y restricciones del dominio

Fijemos un dominio D en el que las expresiones estén definidas. Si $F(x) = G(x)$, sumar $H(x)$ conserva la igualdad; restarlo recupera la condición inicial. Si además $H(x) \neq 0$ para todo $x \in D$, multiplicar por $H(x)$ tiene como operación inversa multiplicar por $1/H(x)$. Esto demuestra la equivalencia en todo D. Cuando H puede anularse, la equivalencia solo queda establecida en el subconjunto donde no se anula. En los otros puntos hay que examinar la condición original.

Para $ax = b$, con $a \neq 0$, multiplicar por $1/a$ produce $x = b/a$. Sustituir ese valor da $a(b/a) = b$, y cualquier solución debe tener ese mismo valor. Si $a = 0$, el miembro izquierdo vale cero para todo real: cuando $b = 0$ todos sirven y cuando $b \neq 0$ ninguno sirve. Si a y b dependen de un parámetro, aplicamos el razonamiento para cada valor del parámetro donde ambos coeficientes existen. La clasificación es puntual y exhaustiva.

Sea S el conjunto obtenido al resolver una condición algebraica en un dominio amplio D, y sea $C \subseteq D$ la restricción del contexto. Un valor es admisible precisamente cuando pertenece a S y a C. Por definición de intersección, el conjunto solicitado es $S \cap C$. Una cancelación puede proporcionar una expresión definida en un conjunto más amplio; eso no cambia el dominio de la pregunta inicial.

Inecuaciones, conjuntos y análisis por casos

Para reales definidos F, G, H, la condición $F < G$ equivale a $G - F > 0$. La diferencia $(G + H) - (F + H)$ es la misma, de modo que sumar H conserva la condición. Si $H > 0$, el producto $H(G - F)$ es positivo exactamente cuando $G - F$ lo es: la implicación inversa se obtiene multiplicando por el positivo $1/H$. Por tanto, multiplicar por H conserva el sentido. Si $H < 0$, el producto $H(G - F)$ es negativo exactamente cuando $G - F$ es positivo, y el sentido se invierte. Para desigualdades no estrictas añadimos el caso de diferencia cero; como $H \neq 0$, ese caso se conserva en ambos sentidos.

Si H depende de la incógnita y cambia de signo, particionamos el dominio en $H > 0$, $H < 0$ y $H = 0$. Las dos primeras partes admiten las reglas anteriores. En la tercera no dividimos: comprobamos la condición original. Para $ax \leq b$, esto da $x \leq b/a$ si $a > 0$, $x \geq b/a$ si $a < 0$, y la condición constante $0 \leq b$ si $a = 0$. Cada real del dominio pertenece a exactamente una de esas tres partes, por lo que la unión de las soluciones encontradas es completa.

Sean $S_P = \{x \in D : P(x)\}$ y $S_Q = \{x \in D : Q(x)\}$. Un valor satisface «P y Q» exactamente cuando pertenece a ambos conjuntos; esa es la definición de $S_P \cap S_Q$. Satisface «P o Q», con disyunción inclusiva, exactamente cuando pertenece por lo menos a uno de los conjuntos; esa es la definición de $S_P \cup S_Q$. Las bandas compuestas se obtienen aplicando esta interpretación a sus dos desigualdades.

En un cociente $N(x)/D(x)$ solo consideramos puntos con $D(x) \neq 0$. Dentro de ellos el cociente es cero si y solo si $N(x) = 0$, pues multiplicar por $D(x)$ es reversible. Por ello, una desigualdad no estricta que admita el valor cero puede incluir los ceros del numerador, pero nunca los del denominador. Los signos de los productos y cocientes se justificaron antes desde el orden. Para

factores lineales, $ax + b = a(x + b/a)$ cuando $a \neq 0$: a cada lado de su raíz, el signo del segundo factor es constante. Así queda justificado el análisis por intervalos empleado en el capítulo.

Distancias y condiciones con valor absoluto

Por definición, $|u| = u$ cuando $u \geq 0$ y $|u| = -u$ cuando $u < 0$. En ambos casos es no negativo. Si $r > 0$, pedir $|u| = r$ conduce a $u = r$ en la primera rama y a $u = -r$ en la segunda; ambos valores sirven. Para $r = 0$, las dos ramas se reducen a $u = 0$. Para $r < 0$, ninguna puede alcanzar el radio propuesto.

Si $r \geq 0$, la condición $|u| \leq r$ equivale, en la rama $u \geq 0$, a $0 \leq u \leq r$, y en la rama $u < 0$, a $-r \leq u < 0$. Su unión es $-r \leq u \leq r$. Con desigualdad estricta y $r > 0$ obtenemos $-r < u < r$. Si el umbral es negativo, ni siquiera el valor cero puede cumplir $|u| \leq r$; si es cero, la versión estricta tampoco tiene solución.

Para $r \geq 0$, el complemento en $\mathbb{R}$ de la banda cerrada $[-r, r]$ es $(-\infty, -r) \cup (r, \infty)$. Esto prueba la regla de $|u| > r$. Si $r > 0$, el complemento de la banda abierta $(-r, r)$ prueba $|u| \geq r$. Cuando $r = 0$, esta última condición es verdadera para todo real, y también lo es la unión $u \leq 0$ o $u \geq 0$. Si $r < 0$, tanto $|u| > r$ como $|u| \geq r$ se cumplen siempre. Quedan incluidos todos los signos del radio.

De $ax + b = a(x + b/a)$, con $a \neq 0$, y de la regla ya probada $|uv| = |u||v|$, resulta $|ax + b| = |a||x + b/a|$. El centro geométrico es $-b/a$, pues $x + b/a = x - (-b/a)$.

Finalmente, $|u|^2 = u^2$ y $|v|^2 = v^2$. Si los valores absolutos son iguales, entonces $u^2 - v^2 = 0$, y factorizar da $(u-v)(u+v) = 0$. Por el producto nulo, $u = v$ o $u = -v$. Recíprocamente, cualquiera de estas igualdades da valores absolutos iguales, porque $|-v| = |v|$. La prueba no supone que u o v sean constantes; vale en cada punto donde las expresiones son reales.

Transformaciones y candidatos espurios

La igualdad $u = v$ implica $u^2 = v^2$ al multiplicar iguales por iguales. La condición cuadrada equivale a $(u - v)(u + v) = 0$ y, por tanto, a $u = v$ o $u = -v$. La rama adicional explica por qué elevar al cuadrado puede agregar candidatos. Si sabemos que $u, v \geq 0$, la rama $u = -v$ solo es posible cuando ambos son cero, que ya pertenece a $u = v$. Así, cuadrar es reversible entre dos cantidades no negativas.

Si $\sqrt{F} = G$, la definición de raíz principal garantiza $G \geq 0$ y, al cuadrar, $F = G^2$. Recíprocamente, si $F = G^2$ y $G \geq 0$, entonces $F \geq 0$, la raíz principal existe y su unicidad da $\sqrt{F} = G$. Esto prueba la equivalencia completa, sin omitir la condición de signo. Para expresiones $F(x), G(x)$ la aplicamos en cada punto donde son reales y conservamos cualquier exclusión previa del dominio.

Cuando solo usamos una implicación para transformar una ecuación, toda solución original aparece entre los candidatos de la ecuación transformada. Comprobar cada candidato en la condición original elimina los valores añadidos y conserva todos los verdaderos. El argumento exige haber resuelto completamente la condición transformada; comprobar unos pocos valores elegidos no demuestra que la lista sea exhaustiva.

Equivalencia de sistemas y operaciones de filas

Fijemos un dominio de pares reales en el que todas las expresiones estén definidas. El conjunto solución de un sistema es la intersección de los conjuntos solución de sus ecuaciones: pertenecer a él significa satisfacer cada una. Cambiar el orden de los requisitos conserva esa intersección. Multiplicar una ecuación por un real $c \neq 0$ es reversible al multiplicarla después por $1/c$; por tanto, conserva las soluciones de esa ecuación y del sistema completo. El argumento se aplica punto a punto si el factor depende de un parámetro, pero solo en la rama donde no se anula.

Escribamos dos ecuaciones como $F_1 = G_1$, $F_2 = G_2$. Conservar la primera y reemplazar la segunda por $F_2 + cF_1 = G_2 + cG_1$ conserva toda solución inicial, porque sumar igualdades produce una igualdad. Para regresar, restamos c veces la primera ecuación de la nueva segunda. Recuperamos exactamente $F_2 = G_2$. No hemos dividido por c, de modo que se permite cualquier valor real, incluido cero. Una suma aislada, sin la ecuación conservada, no permite esa recuperación y puede admitir soluciones adicionales.

Si una ecuación equivale en el dominio a $y = f(x)$, toda solución del sistema cumple esa relación y, al sustituirla, satisface las ecuaciones restantes. Recíprocamente, un par que satisface la relación conservada y las ecuaciones sustituidas satisface las originales, pues allí y vale precisamente $f(x)$. Así se prueba la equivalencia de la sustitución. Despejar mediante un coeficiente que puede anularse exige separar sus valores antes de invocar esta prueba.

Una matriz ampliada registra las mismas igualdades con un orden fijo de incógnitas. Intercambiar filas, escalar una fila por un número no nulo y sumar a una fila un múltiplo de otra tienen las operaciones inversas que acabamos de describir. Cada operación debe incluir la columna de constantes. Esta correspondencia demuestra que la reducción de filas conserva el conjunto solución; no presupone que la matriz de coeficientes tenga inversa.

Finalmente, si el contexto exige un dominio C más pequeño que el dominio algebraico D, un par es admisible exactamente cuando satisface las ecuaciones y pertenece a C. El conjunto buscado es, por definición, la intersección del conjunto solución algebraico con C. Una coordenada negativa o no entera puede fallar esa condición aunque el par satisfaga todas las igualdades.

Determinante, existencia y clasificación de sistemas

Consideremos $ax + by = e$, $cx + dy = f$, con coeficientes reales, y escribamos $D = ad - bc$. Multiplicar la primera igualdad por d y restar b veces la segunda da $Dx = ed - bf$. Multiplicar la segunda por a y restar c veces la primera da $Dy = af - ec$. Si $D \neq 0$, cualquier solución debe ser el par indicado por estas dos divisiones. Para probar que ese par existe, sustituimos:

$$a\frac{ed - bf}{D} + b\frac{af - ec}{D} = \frac{aed - abf + abf - bec}{D} = \frac{e(ad - bc)}{D} = e.$$

De la misma manera,

$$c\frac{ed - bf}{D} + d\frac{af - ec}{D} = \frac{ced - cbf + daf - dec}{D} = \frac{f(ad - bc)}{D} = f.$$

El par satisface las dos ecuaciones y es el único posible. La necesidad y la sustitución recíproca establecen existencia y unicidad sin suponer reversibles las combinaciones que pudieran contener multiplicadores cero.

Supongamos ahora $D = 0$ y $(a, b) \neq (0, 0)$. Si $a \neq 0$, tomamos $\lambda = c/a$. De $ad = bc$ se deduce $d = bc/a = \lambda b$, por lo que $(c, d) = \lambda(a, b)$. Si $a = 0$, entonces $b \neq 0$ y $D = -bc = 0$ obliga

a $c = 0$; tomamos $\lambda = d/b$ y obtenemos la misma proporcionalidad. Restar λ veces la primera ecuación de la segunda deja $0 = f - \lambda e$. Si $f \neq \lambda e$, es imposible. Si $f = \lambda e$, solo queda la primera ecuación. Esta admite una recta completa de soluciones: para $b \neq 0$, son $(t, (e - at)/b)$; para $b = 0$, necesariamente $a \neq 0$ y son $(e/a, t)$, siempre con $t \in \mathbb{R}$. En ambas parametrizaciones hay infinitos pares distintos.

Si la primera fila es nula y la segunda no, intercambiarlas nos sitúa en el caso anterior. Si ambas son nulas, cada ecuación se reduce a $0 = e$ o $0 = f$. Cuando ambas constantes son cero, todo el plano satisface el sistema; si alguna no lo es, ningún punto lo satisface. Esto explica por qué la anulación de D, $ed - bf$ y $af - ec$ no basta para declarar compatibilidad cuando toda la matriz de coeficientes es nula.

Cuando ambas ecuaciones representan rectas, esta clasificación algebraica describe exactamente su intersección. Un par común es un punto de las dos; una única condición efectiva describe la recta coincidente, y la incompatibilidad significa que no comparten ningún punto. El caso de todo el plano solo aparece al admitir las ecuaciones degeneradas, que no representan rectas.

Rectas, pendientes y relaciones afines

En la representación cartesiana, una recta por dos puntos distintos $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$ se describe como

$$\{(x_1 + t(x_2 - x_1),\ y_1 + t(y_2 - y_1)) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Esta caracterización expresa desplazamientos en una dirección fija. Si $x_1 = x_2$, la recta es vertical. Si $x_1 \neq x_2$, para cada abscisa x existe un único $t = (x - x_1)/(x_2 - x_1)$; al sustituir obtenemos $y = y_1 + m(x - x_1)$, con $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$. Por tanto, la ecuación es $y = mx + b$, donde $b = y_1 - mx_1$. Cualquier regla afín que pase por los dos puntos debe tener esa pendiente, pues restar $y_1 = mx_1 + b$ a $y_2 = mx_2 + b$ da $m(x_2 - x_1) = y_2 - y_1$. La regla es única bajo la hipótesis de abscisas distintas.

Para $ax + by = c$ con fila de coeficientes no nula, si $b \neq 0$ despejamos $y = -(a/b)x + c/b$, que describe una recta no vertical por la caracterización anterior. Si $b = 0$, tenemos $a \neq 0$ y $x = c/a$, una recta vertical. Con ambos coeficientes cero, en cambio, el conjunto es todo el plano o el vacío según la constante. Así quedan incluidos los casos que la forma $y = mx + b$ no representa.

En una relación afín, restar $y(x) = mx + b$ de $y(x + h) = m(x + h) + b$ produce exactamente mh. Para $x_1 < x_2$, la diferencia entre las ordenadas es $m(x_2 - x_1)$; el segundo factor es positivo, así que el signo de la diferencia es el signo de m. Quedan demostrados el crecimiento para $m > 0$, el decrecimiento para $m < 0$ y la constancia para $m = 0$.

Al poner $x = 0$ obtenemos $(0, b)$. Si $m \neq 0$, resolver $0 = mx + b$ da el corte horizontal $(-b/m, 0)$ y despejar la ecuación general da $x = (y - b)/m$. Si el dominio original está restringido, solo se admiten los cortes o pares inversos que pertenezcan a él. Para $m = 0$, la relación es constante: tiene todo el eje horizontal como ceros si $b = 0$, y ningún cero si $b \neq 0$.

La gráfica completa pasa por el origen exactamente cuando $b = 0$, ya que sustituir $(0, 0)$ da $0 = b$. Bajo esa condición, $y = mx$ y, para $x \neq 0$, dividir produce $y/x = m$. Recíprocamente, exigir esa razón constante para todo $x \neq 0$ de la regla afín completa fuerza $b = 0$. Las unidades de m son las unidades de y divididas por las de x, y b conserva las unidades de y, porque cada suma de la fórmula debe comparar cantidades homogéneas.

Parámetros y sensibilidad de un sistema

En el sistema $x+y=s$, $2x+(2+\varepsilon)y=2s+\delta$, restar dos veces la primera ecuación de la segunda es reversible y deja $\varepsilon y=\delta$, conservando $x+y=s$. Para $\varepsilon\neq 0$ obtenemos $y=\delta/\varepsilon$ y $x=s-\delta/\varepsilon$. Sustituir muestra que satisfacen la primera ecuación y que la segunda vale $2(x+y)+\varepsilon y=2s+\delta$. No puede haber otro par porque cada coordenada ha quedado determinada.

Si $\varepsilon=0$ y $\delta=0$, la ecuación reducida es una identidad y queda la recta $(t,s-t)$, con $t\in\mathbb{R}$. Si $\varepsilon=0$ y $\delta\neq 0$, queda la contradicción $0=\delta$. Estos casos agotan todos los parámetros reales y muestran la diferencia entre singularidad compatible e incompatible.

Con s y $\varepsilon\neq 0$ fijos, cambiar δ por $\delta+\Delta\delta$ produce

$$\Delta y=\frac{\delta+\Delta\delta}{\varepsilon}-\frac{\delta}{\varepsilon}=\frac{\Delta\delta}{\varepsilon}.$$

Como $x=s-y$, resulta $\Delta x=-\Delta y$. Por tanto, $|\Delta y|=|\Delta\delta|/|\varepsilon|$: un ε pequeño puede amplificar el cambio. Esta identidad corresponde a la familia estudiada. El tamaño absoluto del determinante no mide por sí solo la estabilidad de cualquier sistema: escalar una ecuación modifica ese determinante sin cambiar las soluciones.

Factorización y ecuaciones de un cuadrado

El producto nulo real ya se dedujo de la existencia de inversos. Para un producto finito se aplica repetidamente: si el primer factor es no nulo, multiplicar por su inverso reduce la pregunta al producto de los restantes. Por inducción, el producto es cero si y solo si al menos un factor es cero. Por tanto, una identidad $P(x)=A(x)B(x)$ permite describir los ceros de P como la unión de los ceros de sus factores, siempre dentro del dominio original. Un producto que procede de una fracción simplificada no restituye los puntos excluidos de esa fracción.

Si $r>0$, existe una única raíz principal positiva $\sqrt{r}$. La identidad $u^2-r=(u-\sqrt{r})(u+\sqrt{r})$ y el producto nulo dan $u^2=r$ si y solo si $u=\sqrt{r}$ o $u=-\sqrt{r}$. Para $r=0$, $u^2=0$ implica $u=0$; para $r<0$, la no negatividad de un cuadrado real impide la igualdad. Esta prueba establece exhaustividad de las ramas y evita confundir una raíz principal con todas las soluciones de una ecuación.

La sustitución $u=x^2$ conserva la condición de que $u\geq 0$. Si x resuelve $A(x^2)=0$, entonces $u=x^2$ es un cero no negativo de A. Recíprocamente, cada cero no negativo u de A, junto con todas las soluciones reales de $x^2=u$, produce soluciones de la ecuación inicial. Ambas implicaciones prueban la completitud del procedimiento. La intersección con las restricciones de un contexto se justifica por la definición de conjunto admisible, ya usada en las ecuaciones lineales.

Fórmula cuadrática y relaciones entre raíces

Para $a\neq 0$, desarrollar el cuadrado demuestra

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=ax^2+bx+c.$$

Los denominadores existen. Multiplicar la ecuación por el número no nulo $4a$ da la equivalencia con $(2ax+b)^2=\Delta$, donde $\Delta=b^2-4ac$. Las tres posibilidades del signo de Δ se reducen al apartado anterior. Para $\Delta\geq 0$, despejar $2ax+b=\pm\sqrt{\Delta}$ da $x=(-b\pm\sqrt{\Delta})/(2a)$. Si $\Delta>0$, la

diferencia entre las dos expresiones es $\sqrt{\Delta}/a$, no nula; si $\Delta = 0$, coinciden. Si $\Delta < 0$, no existe solución real.

Llamemos r, s a los dos valores de la fórmula cuando $\Delta \geq 0$, permitiendo que sean iguales. Sumarlos da $r + s = -b/a$. Multiplicarlos da

$$rs = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Al desarrollar $a(x-r)(x-s)$ y sustituir esas dos relaciones se recupera ax^2+bx+c. Queda probada la factorización, incluida la raíz doble. Recíprocamente, cualquier factorización de esa forma obliga, por comparación de coeficientes, a las mismas relaciones de suma y producto. Estas afirmaciones se refieren a raíces reales en este tramo; no suponen raíces reales cuando el discriminante es negativo.

División de polinomios, restos y multiplicidad

El coeficiente de mayor grado de un producto de polinomios no nulos es el producto de sus coeficientes principales. Como los reales no tienen divisores de cero, ese coeficiente no se anula. Así, $\deg(AB) = \deg A + \deg B$.

Sea D un divisor no nulo de grado m. Si el polinomio actual tiene grado $n \geq m$, restamos el múltiplo de D cuyo término principal coincide con el suyo: el cociente de los coeficientes principales multiplicado por $x^{n-m}D$. El término de grado n se cancela y el grado disminuye, o el polinomio se vuelve cero. Sumamos los múltiplos utilizados en Q. Como una sucesión estrictamente decreciente de grados no negativos solo tiene finitos pasos, obtenemos $P = DQ + R$, con $R = 0$ o grado menor que m. Si $P = 0$, tomamos $Q = R = 0$. El procedimiento también cubre un divisor constante no nulo: el resto final debe ser cero.

Para la unicidad, supongamos $DQ_1 + R_1 = DQ_2 + R_2$. Entonces $D(Q_1 - Q_2) = R_2 - R_1$. Si $Q_1 - Q_2$ fuese no nulo, el miembro izquierdo tendría grado al menos m. El derecho sería cero o tendría grado menor que m, contradicción. Por tanto, $Q_1 = Q_2$ y después $R_1 = R_2$.

Para $D(x) = x - r$, el resto es una constante c. Sustituir $x = r$ en la identidad da $P(r) = c$. En consecuencia, $P(r) = 0$ si y solo si el resto es cero, equivalente a la existencia de un factor $x - r$. La sustitución se hace en una identidad de polinomios definida para todo real; no requiere dividir por cero.

Un polinomio no nulo de grado cero no tiene ceros. Supongamos probada la cota para el grado $n-1$. Si un polinomio de grado n no tiene ceros, la cota es inmediata. Si tiene uno, r, el teorema del factor entrega $P(x) = (x-r)Q(x)$ con $\deg Q = n-1$. Todo cero distinto de r debe ser cero de Q, pues su otro factor es no nulo. Hay a lo sumo $n-1$ de esos ceros, y a lo sumo n en total. La inducción demuestra la cota para todos los grados. El polinomio cero se excluye porque se anula en todos los reales.

Para una raíz de un polinomio no nulo podemos dividir sucesivamente por $x - r$ mientras el cociente se anule en r. El grado disminuye en cada división, así que el proceso se detiene con un cociente Q tal que $Q(r) \neq 0$. El número de factores extraídos es la multiplicidad. Su unicidad se sigue de que, si dos exponentes distintos sirvieran, el cociente asociado al menor conservaría un factor $x - r$ y se anularía en r. Esta definición distingue el número de factores repetidos del número de raíces distintas; no afirma que todo polinomio se descomponga por completo en factores lineales reales.

Parámetros y cambios de grado

Fijado un parámetro, los coeficientes de $a(k)x^2 + b(k)x + c(k) = 0$ son números reales. En los valores donde $a(k) \neq 0$ se aplica la clasificación cuadrática anterior. Donde $a(k) = 0$, la ecuación es $b(k)x + c(k) = 0$. Si $b(k) \neq 0$, dividir da la raíz única $-c(k)/b(k)$. Si $b(k) = 0 = c(k)$, la condición es una identidad y todo real sirve; si $b(k) = 0$, $c(k) \neq 0$, no sirve ninguno. Esta partición cubre todos los parámetros donde los coeficientes estén definidos.

En $kx^2-2x+1 = 0$, para $k \neq 0$ la equivalencia con $(kx-1)^2 = 1-k$ se obtiene multiplicando por k y completando el cuadrado. En $k = 0$ esa multiplicación no es reversible, por lo que se conserva la ecuación lineal original. El caso con término $+2x$ se comprueba mediante $(kx+1)^2 = 1-k$ en la misma rama regular. Así se justifica la precaución ante fórmulas que contienen el parámetro en un denominador.

Cuando una cuadrática tiene dos raíces reales con producto positivo, ninguna es cero y ambas tienen el mismo signo. La suma distingue cuál: una suma positiva obliga a que ambas sean positivas y una negativa, a que ambas sean negativas. Este argumento utiliza las relaciones entre raíces solo después de haber establecido que existen en los reales.

Los complejos como pares y las leyes de cuerpo

Definimos $\mathbb{C}$ como el conjunto de pares reales, con igualdad por coordenadas, suma componente a componente y producto $(a,b)(c,d) = (ac - bd, ad + bc)$. La escritura $a + bi$ representa ese par, y $i = (0,1)$. Estas operaciones son definiciones; las leyes de cuerpo son consecuencias que verificamos a continuación.

La suma es conmutativa y asociativa por las leyes reales en cada coordenada. Su neutro es $(0,0)$ y el opuesto de (a,b) es $(-a,-b)$. La multiplicación es conmutativa porque $ac - bd = ca - db$ y $ad + bc = cb + da$. El par $(1,0)$ es neutro multiplicativo. Para la asociatividad, sean $z = (a,b)$, $w = (c,d)$ y $u = (e,f)$. Tanto $(zw)u$ como $z(wu)$ tienen coordenadas

$$ace - bde - adf - bcf, \qquad acf - bdf + ade + bce.$$

La igualdad resulta al desarrollar y agrupar términos reales. Para la distributividad, las coordenadas de $z(w+u)$ son $a(c+e) - b(d+f)$ y $a(d+f) + b(c+e)$; distribuir en los reales entrega exactamente las coordenadas de $zw + zu$.

Si $(a,b) \neq (0,0)$, entonces $a^2 + b^2 > 0$. Multiplicar (a,b) por $(a,-b)$ produce $(a^2+b^2, 0)$. Por tanto, el par

$$\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right)$$

es un inverso multiplicativo, con denominador no nulo. Si $zw = 0$ y $z \neq 0$, multiplicar por su inverso da $w = 0$. Recíprocamente, un factor cero hace cero el producto. Queda probado el producto nulo complejo.

Los pares $(a,0)$ conservan la suma y el producto de los reales, por lo que los identificamos con ellos. El par $i = (0,1)$ tiene cuadrado $(-1,0)$, escrito -1. Si existiera un orden de cuerpo sobre los complejos, el cuadrado de todo número no nulo sería positivo: si el número es positivo, por compatibilidad del producto; si es negativo, aplicando lo mismo a su opuesto. Entonces $i^2 = -1$ sería positivo. Pero 1 es positivo en un cuerpo ordenado y su opuesto es negativo. La contradicción impide tal orden. El argumento no prohíbe ordenar pares con algún criterio convencional; demuestra que ese criterio no puede satisfacer las leyes de un cuerpo ordenado.

Fracciones algebraicas y operaciones en su dominio

Fijemos un argumento real en el que todos los denominadores indicados sean no nulos. Los valores de los polinomios son números reales, así que se aplican las reglas de fracciones ya demostradas. En particular, $A/B = AB^{-1}$. El producto de un número no nulo por su inverso vale uno y permite cancelar un factor $C \neq 0$: $AC/(BC) = A/B$, siempre con $B \neq 0$. Si C se anula en un argumento, la fracción inicial no existe allí; ninguna igualdad obtenida en otros argumentos le asigna un valor. Esta es la razón para conservar el dominio original después de cancelar.

El cociente vale cero exactamente cuando $AB^{-1} = 0$. Como $B^{-1} \neq 0$, el producto nulo equivale a $A = 0$. Distribuir C^{-1} sobre $A + B$ demuestra $(A + B)/C = A/C + B/C$ para $C \neq 0$. El razonamiento cancela factores de productos completos y no sumandos separados.

Para $B, D \neq 0$, amplificar cada fracción por el otro denominador da

$$\frac{A}{B} \pm \frac{C}{D} = \frac{AD \pm BC}{BD}, \qquad \frac{A}{B}\frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}.$$

El producto BD es no nulo. Para dividir por C/D hace falta además $C \neq 0$; su inverso es D/C porque el producto vale uno. Se obtiene $(A/B) \div (C/D) = AD/(BC)$ bajo las tres condiciones $B, D, C \neq 0$. Finalmente, amplificar por $H/H = 1$ justifica $A/B = AH/(BH)$ con $H \neq 0$. Si las letras representan expresiones compuestas, todas deben existir antes de aplicar estas reglas. Un denominador que desaparece de la escritura final sigue registrado en el dominio de la expresión compuesta original.

El dominio natural de P/Q es una definición de su evaluación como cociente real: comprende exactamente los argumentos con $Q(x) \neq 0$. Una restricción contextual C produce la intersección de ese dominio con C. Simplificar conserva los valores de esa función en su dominio; extenderla a otros argumentos es una operación adicional.

Ecuaciones y signos de expresiones racionales

Sea D un dominio común donde F, G, H estén definidos y $H(x) \neq 0$. Si $F(x) = G(x)$, multiplicar por $H(x)$ conserva la igualdad. Recíprocamente, multiplicar $H(x)F(x) = H(x)G(x)$ por $1/H(x)$ recupera la primera. La equivalencia vale en cada argumento de D. Si la ecuación resultante tiene conjunto solución S en un dominio mayor, los argumentos que responden a la pregunta inicial son exactamente $S \cap D$. Una identidad en D admite todos sus argumentos y una contradicción no admite ninguno. No se ha afirmado equivalencia fuera de D.

Para $x \neq r$, cada factor $x - r$ tiene signo positivo a la derecha de r y negativo a su izquierda. Un producto de un número par de factores negativos es positivo; uno de un número impar es negativo, por las leyes de signos. Por eso $(x - r)^m$ es positivo si m es par y conserva el signo de $x - r$ si m es impar. Entre dos puntos consecutivos de la lista de raíces de factores lineales, la posición respecto de cada raíz es fija. Cada signo es constante allí y también lo es el signo del producto o cociente, siempre que el denominador sea no nulo. Una constante no nula aporta su propio signo. Un factor cuadrático sin raíces reales tiene signo constante: al completar cuadrados, para coeficiente principal positivo queda una cantidad estrictamente positiva y para coeficiente principal negativo, estrictamente negativa.

Para números no nulos a, b, el inverso de b tiene el mismo signo que b, como se probó en el apartado sobre orden. El cociente $a/b = ab^{-1}$ es por tanto positivo exactamente cuando los signos coinciden y negativo cuando difieren. Para combinar estos argumentos no es necesario

multiplicar la desigualdad por un factor cuyo signo se desconoce; se decide directamente el signo de la expresión en cada intervalo.

En un cero admisible del numerador, el cociente vale cero, por lo que satisface las desigualdades no estrictas y no satisface las estrictas contra cero. En un cero del denominador original no existe valor y ninguna desigualdad del problema lo admite. Una tabla que estudia solo intervalos abiertos debe completarse con el examen de esos puntos. Así se justifican tanto los extremos cerrados como los ceros aislados que aparecen cuando un factor par se anula.

Huecos y aproximaciones de una fracción

Precisamos el sentido de aproximarse a un número finito L cerca de r: para cada tolerancia $\varepsilon > 0$ podemos elegir una distancia $\delta > 0$ tal que los argumentos del dominio con $0 < |x-r| < \delta$ cumplan $|f(x) - L| < \varepsilon$. Si dos expresiones coinciden en todos esos argumentos, cumplen exactamente las mismas desigualdades. Por eso la sustitución por una fórmula equivalente en un entorno perforado conserva ese comportamiento. Asignar el valor L en el punto ausente construye la extensión que rellena el hueco; no cambia el dominio que tenía la expresión inicial.

Para $f(x) = x + c$ salvo en r, tomamos $L = r + c$ y obtenemos $|f(x) - L| = |x - r|$. Basta elegir $\delta = \varepsilon$. Esto prueba los huecos de las rectas de los problemas y ejercicios. El argumento de una tabla que supone que otra función h se aproxima a L se reduce a transferir las mismas desigualdades donde $f = h$; no afirma que cualquier función tenga una aproximación finita.

Sean A, B, r reales y $B \neq 0$. Para $F(x) = A + B/(x - r)$, la desigualdad triangular implica

$$|F(x)| \geq \frac{|B|}{|x - r|} - |A|.$$

Dada cualquier cota $M > 0$, si $0 < |x - r| < |B|/(M + |A|)$, el miembro derecho es mayor que M. Queda probado que el valor absoluto no tiene cota al acercarse a r. El signo del término recíproco a cada lado, junto con el hecho de que domina a la constante, determina si la rama crece hacia valores positivos o negativos. Este es el comportamiento de la asíntota vertical usado en el capítulo.

Para la aproximación horizontal, la identidad exacta es $|F(x) - A| = |B|/|x - r|$. Ante $\varepsilon > 0$, la condición $|x-r| > |B|/\varepsilon$ hace la diferencia menor que ε. Se cumple para todo $|x| > |r| + |B|/\varepsilon$, porque $|x-r| \geq |x|-|r|$. Así se demuestra la aproximación en ambas direcciones del eje. Si $B = 0$, la función es constante en su dominio y la diferencia ya es cero; no hay el polo demostrado bajo la hipótesis $B \neq 0$. El estudio de una asíntota horizontal no afirma, en general, ausencia de cortes con ella.

Dominio, igualdad de funciones y parámetros

Una función especifica un dominio, un conjunto de llegada o codominio y un único valor de ese codominio para cada argumento del dominio. Adoptamos que dos funciones son iguales cuando coinciden esos tres datos: dominio, codominio y asignación. Si g tiene un dominio mayor que f, ambas comparten codominio y sus valores coinciden en el dominio de f, la restricción de g a ese dominio es f. En sentido inverso, g es una extensión de f. Distinguir las operaciones permite usar una fórmula simplificada conservando el dominio original o declarar expresamente que se está definiendo una extensión.

Para r fijo, la identidad $(x^2 - r^2)/(x - r) = x + r$ vale sobre $x \neq r$. La ecuación con parámetro $(x^2 - r^2)/(x - r) = k$ tiene candidato único $x = k - r$. Es admisible si y solo si $k - r \neq r$, equivalente a $k \neq 2r$. Si se cumple, sustituir da $x + r = k$; si $k = 2r$, el único candidato está excluido y no hay solución. Este razonamiento general cubre los dos problemas de parámetros del capítulo y utiliza una identidad únicamente donde está definida.

Diferencias constantes y sumas aritméticas

Una sucesión asigna un valor a cada índice de su conjunto de posiciones. La recurrencia $a_{n+1} = a_n + d$, junto con a_1, define una progresión aritmética: determina sucesivamente cada término de manera única. Para probar $a_n = a_1 + (n - 1)d$, comenzamos con $n = 1$, donde ambos miembros valen a_1. Si la fórmula vale en n, la recurrencia da $a_{n+1} = a_1 + (n - 1)d + d = a_1 + nd$. El principio de inducción extiende la fórmula a todos los enteros $n \geq 1$. Al restar las fórmulas de dos posiciones resulta $a_n - a_m = (n - m)d$.

Sea $S_n = a_1 + \cdots + a_n$. Podemos escribir la misma suma en orden inverso. Al añadir ambas escrituras, cada una de las n columnas contiene $a_k + a_{n+1-k} = 2a_1 + (n - 1)d = a_1 + a_n$. Por tanto, $2S_n = n(a_1 + a_n)$ y dividir entre dos da la fórmula. El argumento cuenta columnas de dos copias de la suma y vale también para n impar. Sustituir a_n da $S_n = n[2a_1 + (n - 1)d]/2$.

Para $a_1 = 1$ y $d = 2$, el último término es $2n - 1$ y la suma vale n^2. La diferencia $n^2 - (n - 1)^2 = 2n - 1$ prueba además la construcción geométrica: una fila nueva de n casillas y una columna de $n - 1$ amplían el cuadrado de lado $n - 1$ al de lado n.

Productos repetidos y sumas geométricas

La condición $a_{n+1} = ra_n$ con $a_1 = a$ define una progresión geométrica y determina sus términos uno a uno. Si $r = 0$, el segundo término y todos los siguientes valen cero. Si $r \neq 0$, el caso inicial de $a_n = ar^{n-1}$ usa $r^0 = 1$; multiplicar la fórmula por r prueba el paso siguiente. Con índice inicial cero, el mismo argumento da $u_n = u_0 r^n$. Dividir la recurrencia entre a_n permite recuperar r solamente cuando $a_n \neq 0$. Si $a = 0$, todos los términos son cero y cualquier razón satisface la recurrencia.

Para $a > 0$ y $r > 0$, todos los términos son positivos y $a_{n+1} - a_n = (r - 1)a_n$ tiene el signo de $r - 1$. Así se prueban el crecimiento cuando $r > 1$ y el decrecimiento cuando $0 < r < 1$. Una razón negativa invierte el signo de cada término no nulo, por las leyes del producto. La alternancia de signos impide deducir monotonía a partir del crecimiento de los valores absolutos.

Para $n \geq 1$, escribimos $S_n = a + ar + \cdots + ar^{n-1}$, entendiendo el primer término como a aun si $r = 0$. Multiplicar por r y restar cancela todos los términos intermedios y produce $(1 - r)S_n = a - ar^n$. Si $r \neq 1$, dividir entre $1 - r$ da $S_n = a(1 - r^n)/(1 - r)$. Si $r = 1$, los n términos son iguales a a y la suma vale na; no se divide entre cero. Para $r \neq 0$, los exponentes enteros de cero a m son $m + 1$ posiciones, por lo que la suma que termina en r^m corresponde a $n = m + 1$.

Capitalización y comparación de tasas

En el modelo simple, cada periodo añade el interés fijo Ci calculado sobre el capital inicial. La recurrencia $C_{n+1} = C_n + Ci$, con $C_0 = C$, es aritmética y da $C_n = C + nCi$. En el modelo compuesto, el interés de cada periodo se calcula sobre su saldo inicial: $C_{n+1} = C_n + iC_n = (1 + i)C_n$.

La fórmula geométrica da $C_n = C(1+i)^n$. Las tasas y las duraciones deben referirse al mismo periodo; movimientos o cargos adicionales cambian la recurrencia.

Con $1+i>0$, encadenar m periodos multiplica el saldo por $(1+i)^m$. La definición de una tasa efectiva j para ese horizonte exige $1+j=(1+i)^m$, de donde $j=(1+i)^m-1$. Recíprocamente, dado $j>-1$, el factor positivo único es $1+i=\sqrt[m]{1+j}$. La raíz positiva es única porque las potencias de exponente entero positivo conservan estrictamente el orden de los números positivos, como se justifica al factorizar la diferencia de dos potencias. La existencia de esa raíz pertenece a la construcción de las raíces reales. Esta equivalencia supone periodos iguales y un mismo factor en cada uno.

Si un saldo inicial $C>0$ compra C/P unidades a precio $P>0$, después de las variaciones compra $C(1+i)/[P(1+\pi)]$. Dividir esta cantidad por C/P da el factor de capacidad de compra $(1+i)/(1+\pi)$. Restar uno da su tasa de variación. Las condiciones $i,\pi>-1$ conservan positivos el saldo y el precio. La resta $i-\pi$ puede servir de aproximación para tasas pequeñas, pero la igualdad exacta es el cociente anterior.

Recurrencias de depósitos y deudas

Consideremos depósitos iguales $A\geq 0$, tasa $i\geq 0$ y factor $q=1+i$. Con saldo inicial cero y depósitos al final de cada periodo, primero se capitaliza el saldo y después se añade el aporte: $S_{n+1}=qS_n+A$. La fórmula $S_n=A(1+q+\cdots+q^{n-1})$ vale para $n=1$. Si vale en n, multiplicarla por q y añadir A da exactamente la suma correspondiente a $n+1$. La inducción prueba la fórmula para todo $n\geq 1$. La suma geométrica permite evaluarla; para $q=1$, da nA.

Cada depósito final crece durante tantos periodos como separen su fecha de la fecha de observación. Si adelantamos todos los aportes exactamente un periodo y mantenemos esa fecha final, cada contribución adquiere un factor adicional q. Distribuir q en la suma de contribuciones prueba que el saldo total también se multiplica por q. Esta afirmación compara el mismo número de aportes; contar un aporte adicional cambiaría la comparación.

En una deuda con cuotas finales, la recurrencia es $D_{n+1}=qD_n-A$, con $D_0=C$. La fórmula

$$D_n = Cq^n - A(1+q+\cdots+q^{n-1})$$

se prueba con el mismo paso inductivo: multiplicar por q añade una potencia a cada término y restar A completa la nueva suma. Mientras subsista la deuda, el interés del periodo es iD_n; por eso $D_{n+1}-D_n=iD_n-A$. Comparar A con ese interés decide si el saldo baja, se mantiene o sube. Si una cuota excede lo adeudado al final del periodo, el modelo de una deuda cancelada exige ajustar ese pago y detener la recurrencia.

Para cancelar exactamente en $n\geq 1$ periodos, imponemos $D_n=0$. La suma $1+q+\cdots+q^{n-1}$ es positiva, de modo que hay una única cuota $A=Cq^n/(1+q+\cdots+q^{n-1})$. Para $i>0$, usar la suma geométrica y $q-1=i$ da $A=Ciq^n/(q^n-1)$; el denominador es positivo. Para $i=0$, la ecuación es $C-nA=0$ y $A=C/n$. Con $C>0$ y la cuota exacta anterior, los saldos previos al último son positivos: sustituyendo $C=A\sum_{j=0}^{n-1}q^j/q^n$ en la fórmula de D_k queda $D_k=A\sum_{j=0}^{n-k-1}q^j/q^{n-k}>0$ para $0\leq k<n$. Así la cancelación ocurre en la fecha prevista. Redondear las cuotas modifica los saldos; el último pago debe calcularse desde el saldo efectivo, con la regla de redondeo declarada.

Aproximación de sumas geométricas infinitas

Decir que S_N tiende a S significa que para cada tolerancia $\varepsilon > 0$ existe un índice a partir del cual $|S_N - S| < \varepsilon$. Es una afirmación sobre sumas finitas de longitud creciente.

Sea $0 < q < 1$ y pongamos $h = 1/q - 1 > 0$. La desigualdad $(1+h)^N \geq 1 + Nh$ se prueba por inducción: el paso multiplica por $1 + h$ y deja el término adicional $Nh^2 \geq 0$. Por tanto, $q^N \leq 1/(1+Nh)$. Dada una tolerancia positiva, la propiedad arquimediana permite elegir N tan grande que el último cociente sea menor que ella. Así q^N tiende a cero.

Si $0 < |r| < 1$, la fórmula finita da

$$\frac{a}{1-r} - S_N = \frac{ar^N}{1-r}, \qquad \left|\frac{a}{1-r} - S_N\right| = \frac{|a|\,|r|^N}{|1-r|}.$$

La cota anterior prueba que esta diferencia tiende a cero. Si $a = 0$, ya es cero; si $a \neq 0$, basta aplicar la cota a la tolerancia $\varepsilon|1-r|/|a|$. Esto demuestra el límite $S = a/(1-r)$ y el error exacto. Para $r = 0$, la sucesión de términos es $a, 0, 0, \ldots$ y todas las sumas con $N \geq 1$ valen a, sin emplear 0^0.

Por último, si las sumas parciales tuvieran límite finito, sus diferencias consecutivas tenderían a cero: $|S_N - S_{N-1}| \leq |S_N - S| + |S_{N-1} - S|$. Para $a \neq 0$ y $|r| \geq 1$, cada diferencia tiene valor absoluto $|a|\,|r|^{N-1} \geq |a| > 0$, contradicción. Si $a = 0$, todos los términos y sumas son cero con cualquier razón. Estas condiciones explican exactamente cuándo puede utilizarse la fórmula infinita.

Medida angular y paralelismo euclidiano

La medida angular aditiva, el ángulo llano de 180° y el giro completo de 360° son reglas de medida del modelo adoptado. La suma de dos ángulos que componen uno llano es, por esa aditividad, 180°. El término «suplementarios» define esta relación entre medidas y no exige adyacencia. Para ángulos opuestos por el vértice, si γ es un vecino común, las igualdades $\alpha + \gamma = 180^\circ$ y $\beta + \gamma = 180^\circ$ implican $\alpha = \beta$ por cancelación.

Usamos la forma angular del postulado de las paralelas: una transversal determina iguales ángulos correspondientes en dos paralelas. La tomamos como regla euclidiana equivalente al postulado de existencia y unicidad de la paralela; no intentamos deducirla de las reglas de incidencia por sí solas. Un alterno interno es opuesto por el vértice al correspondiente pertinente en una de las intersecciones. La igualdad de opuestos y de correspondientes prueba la igualdad de alternos internos. Un interior del mismo lado es suplementario del otro alterno; su suma con el interior de la otra recta es por tanto 180°.

Para el recíproco, sea P la segunda intersección. Trazamos por P la paralela a la primera recta. El postulado angular le asigna el correspondiente, o alterno interno indicado, con la medida del primer ángulo. Por hipótesis, la recta dada tiene esa misma medida en la misma posición. En el semiplano fijado, un ángulo dado con una semirrecta de origen P determina una única semirrecta. Ambas rectas coinciden y son paralelas. Este paso justifica el sentido inverso sin tratar la conclusión como un dato previo.

Triángulos, diagonales y sumas angulares

Para un triángulo ABC no degenerado trazamos por C la paralela a AB. Los ángulos que forman CA y CB con esa paralela, en los lados apropiados, son iguales a los interiores en A y B por

alternos internos. Junto con el interior en C, componen un ángulo llano, sin solapar interiores. Por aditividad, los tres interiores suman 180°. Aquí se utiliza explícitamente el postulado angular euclidiano.

Si prolongamos un lado en C, el ángulo exterior δ satisface $\delta + \gamma = 180^\circ$. De la suma interior obtenemos $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Restar γ da $\delta = \alpha + \beta$. La propiedad se refiere al exterior adyacente producido por esa prolongación.

En un polígono simple convexo de vértices $V_1, \dots, V_n$ ordenados sobre su frontera, las diagonales desde V_1 permanecen dentro de la región y no se cruzan entre sí fuera de ese vértice. Forman los triángulos $V_1V_kV_{k+1}$, con $k = 2, \dots, n-1$: exactamente $n-2$. Cada ángulo interior del polígono se reparte entre ángulos de esos triángulos, y ninguno se cuenta dos veces. Sumar sus medidas da $(n-2)180^\circ$.

Cada exterior de un recorrido convexo con giros de un mismo sentido mide $180^\circ - \alpha_k$. La suma de los n exteriores es $n180^\circ - (n-2)180^\circ = 360^\circ$. Si el polígono es regular, sus interiores son iguales por definición; dividir su suma entre n da $(n-2)180^\circ/n$. Sus exteriores también son iguales y miden $360^\circ/n$. Una suma angular común no prueba la igualdad individual ni la de los lados.

Longitudes, superposición y medida de áreas

El perímetro de un polígono es, por definición, la suma de sus lados. La adición de longitudes sobre un segmento y la desigualdad estricta para un camino quebrado no alineado pertenecen al modelo euclidiano de distancia que adoptamos. Para lados positivos a, b, c, las condiciones $c < a + b$, $a < b + c$ y $b < a + c$ equivalen a $c < a + b$, $c > a - b$ y $c > b - a$. Las dos últimas se reúnen en $c > |a - b|$. En un extremo admisible de igualdad, los puntos quedan alineados; las circunferencias proporcionan la construcción en el caso estricto, bajo la regla de continuidad que precisamos en el apartado siguiente.

Adoptamos la aditividad del área en piezas de interiores separados, su invariancia bajo movimientos rígidos y la normalización $A = bh$ para rectángulos de lados positivos. Las fórmulas restantes se obtienen a partir de esas reglas. El cuadrado es el caso $b = h = l$, por lo que su área es l^2; su perímetro es $4l$ por suma de cuatro lados. El área rectangular para longitudes reales se incluye en la normalización; no se presenta un conteo finito de cuadrados como demostración suficiente para cualquier longitud irracional.

Una diagonal de un rectángulo lo divide en dos triángulos que se intercambian al girar media vuelta alrededor del centro. Cada uno tiene la mitad del área: el triángulo rectángulo con lados perpendiculares b, h tiene área $bh/2$. Para un triángulo general, trazamos la perpendicular desde el vértice a la recta de la base. Si su pie divide la base en longitudes $u, v \geq 0$, el área es $uh/2 + vh/2 = (u + v)h/2 = bh/2$. Si el pie cae fuera, las dos distancias sobre la recta son u y $u + b$; el triángulo pedido es la diferencia de dos triángulos rectángulos y su área es $(u+b)h/2 - uh/2 = bh/2$. El pie en un extremo es el caso rectángulo. Queda cubierta cualquier posición de una altura positiva.

Para el paralelogramo, una diagonal lo divide en dos triángulos cuyas bases son lados opuestos de longitud b y cuya altura es la separación h entre las rectas paralelas de esas bases. La igualdad de lados opuestos se prueba en el apartado sobre cuadriláteros mediante superposición, sin usar áreas. Cada triángulo tiene área $bh/2$, así que el total es bh. El perímetro suma los dos pares de lados iguales, $2(a+b)$. Esta derivación vale para cualquier desplazamiento lateral y evita depender de que un único corte triangular quepa en el extremo opuesto.

En un trapecio convexo con bases paralelas de longitudes B, b, una diagonal separa dos triángulos, uno apoyado en cada base. Ambos tienen altura h, la separación perpendicular entre

las rectas de las bases. Sus áreas suman $Bh/2 + bh/2 = (B + b)h/2$. La duplicación usada en los problemas ofrece otra descomposición de la misma área. Para un recorte contenido, la aditividad $A_{\text{inicial}} = A_{\text{restante}} + A_{\text{recorte}}$ permite despejar el área restante. Un lado oblicuo solo puede sustituir a la altura si es perpendicular a la base. Sumar longitudes de frontera y medir área son operaciones sobre magnitudes diferentes.

Mediatrices, bisectrices y construcción de triángulos

Precisamos las bases de superposición y existencia. Adoptamos LLL y LAL como reglas métricas del plano: tres lados correspondientes iguales, o dos lados y su ángulo comprendido iguales, permiten superponer triángulos. También usamos la continuidad del compás: dos circunferencias de radios positivos a, b y centros distintos a distancia c se cortan en dos puntos, uno a cada lado de la recta de centros, cuando $|a - b| < c < a + b$. En $c = a + b$, o en $c = |a - b| > 0$, hay una tangencia. Estas reglas de existencia pertenecen al modelo adoptado. No las presentamos como consecuencias de la adición de ángulos.

La necesidad de las condiciones estrictas ya se dedujo de la desigualdad triangular. Su interpretación al mover un radio aclara la continuidad: al recorrer la circunferencia de centro A y radio a, la distancia al otro centro B varía desde $|c - a|$ hasta $c + a$. Un radio b estrictamente entre esos extremos encuentra una posición en cada semiplano. La unicidad en cada uno es la rigidez LLL. Usamos aquí la continuidad de esa variación; este capítulo no reconstruye toda la geometría métrica desde axiomas de los reales. Si los radios no alcanzan la distancia de centros, las circunferencias quedan separadas; si una queda estrictamente dentro de la otra sin tocarla, tampoco se cortan. Con centros coincidentes, radios iguales producen una misma circunferencia y radios distintos, ninguna intersección.

En la mediatriz construida con radios iguales $r > AB/2$, los puntos P, Q de intersección están a lados opuestos de AB y la recta que los une atraviesa el segmento AB en un punto interior M. Las igualdades de los radios hacen congruentes APQ y BPQ por LLL. El segmento PQ biseca el ángulo APB, por lo que APM y BPM tienen $AP = BP$, lado PM común y ángulos comprendidos iguales. Por LAL se obtiene $AM = BM$ y $\angle AMP = \angle PMB$. Estos dos últimos ángulos son adyacentes y suman $180°$, de modo que cada uno mide $90°$. La recta hallada pasa por el punto medio y es perpendicular a AB. La posición interior de M sigue del orden de las dos intersecciones de circunferencias iguales, simétricas respecto de la recta de centros; es parte de la configuración de intersección utilizada.

Para la bisectriz, sea $0° < \theta < 180°$ y sean D, E puntos sobre sus lados a distancia común $R > 0$ del vértice O. La desigualdad triangular estricta da $0 < DE < 2R$. Las circunferencias de centros D, E y radio R se cortan en O y en otro punto P, situado dentro del ángulo. Los triángulos ODP, OEP tienen tres lados correspondientes iguales y sus ángulos en O coinciden por LLL. Ambos juntos forman θ, de donde cada uno mide $\theta/2$. Los casos nulo y llano quedan fuera de esta construcción de dos intersecciones distintas.

Para construir desde tres lados, fijamos la base c y usamos radios a, b. Bajo las condiciones estrictas, la regla del compás produce dos posiciones; la reflexión en la base intercambia las intersecciones, porque fija los centros y conserva los radios. LLL garantiza igualdad de forma y tamaño; fijar el semiplano elige una sola posición. Las tangencias dan puntos alineados y las desigualdades fuera del intervalo cerrado impiden el cierre. Así, ejecución, condiciones de existencia y justificación de la forma quedan diferenciadas.

Movimientos rígidos y argumentos sobre cuadriláteros

La conservación de longitudes y ángulos por traslaciones, giros y reflexiones, y la conservación del área por superposición, son reglas del modelo adoptado. De ellas se deduce que el perímetro se conserva: cada sumando de la frontera mantiene su valor. Si dos movimientos f, g conservan una medida m, entonces $m(g(f(F))) = m(f(F)) = m(F)$. La misma sustitución prueba la conservación para cualquier composición finita.

En una cuadrícula cartesiana, el punto medio de un segmento tiene las coordenadas medias de sus extremos: la mitad del desplazamiento horizontal y la mitad del vertical sitúan el punto en la mitad del recorrido recto. Esta es una propiedad afín de las coordenadas. La reflexión en el eje vertical de primera coordenada c conserva la segunda coordenada y lleva la primera x a $2c - x$, pues $[x + (2c - x)]/2 = c$. Dos ejes verticales c_1, c_2 producen $x \mapsto 2c_1 - x \mapsto x + 2(c_2 - c_1)$, con la otra coordenada fija. Para ejes paralelos en cualquier posición podemos girar el sistema hasta dejarlos verticales; las distancias se conservan y el desplazamiento tiene longitud $2|c_2 - c_1|$, del primer eje hacia el segundo. Esto prueba la propiedad de dos reflexiones con separación $d > 0$.

Para justificar los lados y diagonales del paralelogramo usaremos la superposición por un lado y sus dos ángulos adyacentes, que podemos deducir de LAL. Sean dos triángulos con lados correspondientes $AB = A'B'$ y ángulos iguales en A, A' y B, B'. Si $AC < A'C'$, tomamos D sobre $A'C'$ con $A'D = AC$. Por LAL, ABC y $A'B'D$ se superponen; por ello $\angle A'B'D = \angle ABC = \angle A'B'C'$. La unicidad de la semirrecta en ese semiplano obliga a $B'D$ y $B'C'$ a coincidir. Su intersección con la recta $A'C'$ es única, así que $D = C'$, contradiciendo la desigualdad supuesta. El caso $AC > A'C'$ se descarta intercambiando los triángulos. Luego $AC = A'C'$ y LAL prueba la superposición completa. Este argumento establece el criterio ALA a partir de la base adoptada.

Sea $ABCD$ un paralelogramo convexo no degenerado. La diagonal AC determina $\angle BAC = \angle DCA$ y $\angle BCA = \angle DAC$ por alternos internos, pues $AB \parallel CD$ y $BC \parallel AD$. El lado AC es común, por lo que ALA superpone ABC y CDA. Resulta $AB = CD$ y $BC = DA$, sin utilizar ninguna fórmula de área. Si las diagonales se cortan en O, los triángulos ABO y CDO tienen $AB = CD$ y los ángulos adyacentes a esos lados iguales, otra vez por paralelismo. ALA da $AO = CO$ y $BO = DO$. Queda probada la bisección de ambas diagonales.

Un rectángulo se define por sus cuatro ángulos rectos; sus lados opuestos son paralelos por el criterio angular recíproco. Es por tanto un paralelogramo y hereda la bisección de diagonales. Un cuadrado añade la igualdad de cuatro lados. Los ejemplos oblicuos del capítulo cumplen la bisección y carecen de cuatro ángulos rectos, de modo que refutan el recíproco «diagonales que se bisecan implican rectángulo». Una implicación demostrada y su recíproca son proposiciones distintas; un contraejemplo debe cumplir la hipótesis y fallar la conclusión.

Congruencia, datos suficientes y simetría del isósceles

Continuamos en la base euclidiana explicitada en «Mediatrices, bisectrices y construcción de triángulos». LLL y LAL son reglas de superposición adoptadas, no teoremas que aquí pretendamos deducir de la sola suma angular. Su interpretación permite dar vuelta una figura mediante reflexión; la congruencia se entiende hasta movimientos rígidos, sin fijar una orientación de lectura de sus vértices.

Para ALA, superpongamos los lados iguales de dos triángulos y, mediante una reflexión si hace falta, situemos sus terceros vértices en un mismo semiplano. Cada ángulo adyacente fija una semirrecta desde el extremo correspondiente del lado común. Ambas realizaciones tienen,

por tanto, las mismas dos semirrectas; su única intersección es el tercer vértice. Esto prueba la superposición. La existencia se presupone al hablar de dos triángulos; al construir uno desde datos, se exige que los dos ángulos sean positivos y su suma menor que 180°. Si se conocen otros dos ángulos y un lado, la suma angular permite recuperar el ángulo que falta y reducir a ALA.

En un isósceles $AB = AC$ con M punto medio de BC, los triángulos ABM, ACM son congruentes por LLL. Sus ángulos en A son iguales y los de M son iguales y suplementarios. De aquí se deducen la bisección del ángulo en A y la perpendicularidad a la base. Si se comienza con la bisectriz interior AD, se aplica LAL a ABD, ACD y se obtiene $BD = DC$; los ángulos adyacentes en D prueban de nuevo la perpendicularidad. La no alineación de los vértices y la posición interior del corte aseguran que esos triángulos existen.

Tales por comparación de áreas y su recíproco

Sean ABC un triángulo y D, E puntos interiores a AB, AC, con DE paralelo a BC. Las áreas $[BDE]$ y $[CDE]$ son iguales porque tienen base común DE y la misma distancia perpendicular desde sus vértices a esa recta. Al comparar bases sobre AB con altura común desde E, obtenemos $[ADE]/[BDE] = AD/DB$. Al comparar bases sobre AC con altura común desde D, obtenemos $[ADE]/[CDE] = AE/EC$. Todas las áreas y las longitudes de los denominadores son positivas. Igualar las razones da $AD/DB = AE/EC$.

Escribamos $AD = x$, $DB = y$, $AE = z$, $EC = w$, con los cuatro números positivos. De $x/y = z/w$ se deduce $xw = yz$ y, al sumar xz a ambos miembros, $x(z + w) = z(x + y)$. Dividir por $(x + y)(z + w) > 0$ da $AD/AB = AE/AC$. La equivalencia también vale en sentido inverso mediante esas operaciones reversibles.

Para el recíproco, supongamos que $AD/AB = AE/AC = t$, con $0 < t < 1$. La paralela a BC por D corta AC en un punto interior E_0. El resultado directo da $AE_0/AC = t$ y, por tanto, $AE_0 = AE$. La unicidad del punto a una distancia dada desde A sobre el segmento obliga a $E_0 = E$. Queda probado el paralelismo sin asumirlo en la hipótesis.

Necesitaremos además la razón del segmento paralelo. Por E trazamos la paralela a AB hasta cortar BC en F. El cuadrilátero $DBFE$ es un paralelogramo, de donde $DE = BF$. Aplicamos la proporción ya demostrada al triángulo CAB y su paralela EF: $CF/CB = CE/CA = 1 - t$. Luego $BF/BC = 1 - CF/CB = t$ y así $DE/BC = t$. Esta deducción usa las propiedades de los paralelogramos probadas antes y evita apelar a semejanza para demostrar Tales.

En la división de un segmento en razón $m : n$, la ecuación $x/(L - x) = m/n$, con $L > 0$ y $m, n > 0$, equivale a $nx = mL - mx$, de donde $x = mL/(m + n)$. Se cumple $0 < x < L$, y la otra parte es $nL/(m + n)$. Si m, n son enteros positivos, la construcción de $m + n$ tramos auxiliares iguales y una paralela realiza exactamente ese reparto.

Criterios de semejanza a partir de Tales y congruencia

Consideremos dos triángulos con dos parejas de ángulos iguales. El tercero es igual por la suma angular. Podemos intercambiar los papeles de los triángulos para que $k = A'B'/AB \le 1$. Si $k = 1$, la igualdad del lado y sus ángulos adyacentes da congruencia por ALA. Si $0 < k < 1$, marcamos D en AB con $AD = A'B'$ y trazamos DE paralelo a BC, con E en AC. Los ángulos de ADE coinciden con los de $A'B'C'$ por el paralelismo y la correspondencia supuesta; el lado $AD = A'B'$ da congruencia por ALA. Por el apartado anterior, $AD/AB = AE/AC = DE/BC = k$. Sustituir

las longitudes del triángulo congruente prueba que los tres lados originales están en razón k. Esto demuestra AA con ambas partes de la definición de semejanza.

Para el criterio de tres lados proporcionales, supongamos $a'/a = b'/b = c'/c = k > 0$ y, si hace falta, intercambiemos los triángulos para obtener $k \leq 1$. Con $k = 1$ basta LLL. Para $k < 1$, la sección paralela del triángulo mayor con razón k tiene, por Tales y la razón del segmento paralelo, lados ka, kb, kc. Esos lados coinciden con los del segundo triángulo; LLL asegura la congruencia entre la sección y él. La sección conserva los ángulos del mayor por paralelismo, lo que completa la semejanza.

Para dos lados proporcionales y su ángulo comprendido igual, construimos de la misma manera la sección de razón $k \leq 1$ sobre los lados que forman ese ángulo. Tales proporciona los dos lados requeridos y el vértice conserva el ángulo comprendido. LAL prueba la congruencia de la sección con el segundo triángulo. Las razones de los tres lados y la igualdad de los ángulos siguen de esa congruencia y del paralelismo. La inversión de la comparación reemplaza cada cociente positivo k por $1/k$. Con $k = 1$, todos los lados correspondientes son iguales y LLL da congruencia.

Escalas de longitudes, áreas y cajas

En una semejanza de razón $k > 0$, cada longitud de lado se multiplica por k. La suma de los lados de un polígono se transforma en $\sum kl_i = k\sum l_i$, por distributividad. Su perímetro tiene, por tanto, factor k.

En dos triángulos semejantes, tracemos las alturas a lados correspondientes. Si el pie de una altura está en el extremo de la base, el lado perpendicular es la propia altura y su razón ya es k. En los demás casos, el lado que une el vértice con un extremo de la base y su altura forman un triángulo rectángulo auxiliar en cada figura. Los ángulos agudos entre las rectas de base y de ese lado son iguales: si el ángulo interior es obtuso, se toma su suplemento en ambas figuras. Los auxiliares son semejantes por AA. Sus hipotenusas son lados correspondientes de los triángulos originales, con razón k; por ello, sus catetos perpendiculares, las alturas, también tienen razón k. Este argumento vale con pies interiores o exteriores. La fórmula del área da entonces $A' = (kb)(kh)/2 = k^2 A$.

Una región poligonal descompuesta en triángulos conserva esa descomposición al aplicar la misma semejanza a todas sus piezas. La suma de áreas se multiplica por k^2. Para polígonos simples puede obtenerse una descomposición finita trazando paralelas por sus vértices en una dirección que no contenga ningún lado: se forman regiones triangulares o trapezoidales entre cortes consecutivos, que se dividen a su vez en triángulos. En ningún paso se atribuye el factor superficial a una sola longitud.

Adoptamos para una caja rectangular la medida $V = abc$, con dimensiones positivas en una misma unidad, extendida continuamente desde las subdivisiones en cubos unidad. No reconstruimos aquí la teoría general del volumen. Para cajas semejantes se obtiene $V' = (ka)(kb)(kc) = k^3 V$. De $A'/A = k^2$ se recupera la única raíz positiva $k = \sqrt{A'/A}$; del cociente de volúmenes positivos de cajas, $k = \sqrt[3]{V'/V}$.

Una escala $1 : n$ significa $L_{\text{dibujo}} = L_{\text{real}}/n$ en la misma unidad. Si el papel se imprime con factor lineal $r > 0$, la nueva longitud dibujada es $rL_{\text{real}}/n = L_{\text{real}}/(n/r)$. La nueva escala es $1 : (n/r)$. Esta afirmación supone un mismo factor en todas las direcciones del dibujo.

Homotecias, vectores y razones con signo

Sea O un punto fijo y $k \neq 0$. Definimos $h_{O,k}(P) = O+k(P-O)$ mediante el desplazamiento desde O. Para $P = O$ se obtiene $P' = O$. Para $P \neq O$, multiplicar por un número positivo conserva la semirrecta y multiplica la distancia por ese número; multiplicar por uno negativo invierte la semirrecta y utiliza su valor absoluto para la distancia. Son las reglas de segmentos dirigidos y de multiplicación escalar sobre una recta, aplicadas componente a componente en coordenadas.

Si O, A, B no están alineados y $k > 0$, Tales y su recíproco, aplicados a la figura interior o a su comparación inversa cuando $k > 1$, muestran que $A'B'$ es paralelo a AB y $A'B'/AB = k$. Con $k = 1$ las imágenes coinciden con sus originales. Si los tres puntos están alineados, una coordenada dirigida sobre esa recta da $|ks_B - ks_A| = k|s_B - s_A|$; el resultado también vale si alguno coincide con el centro. Para $k < 0$, la homotecia es la composición de la razón positiva $|k|$ con un giro de media vuelta alrededor de O. El giro conserva longitudes, de donde $A'B' = |k|AB$. El paralelismo de lados correspondientes asegura la conservación de ángulos; la media vuelta también la conserva.

La resta de las fórmulas de imagen da $B'-A' = [O+k(B-O)]-[O+k(A-O)] = k(B-A)$. Este es el efecto sobre el vector entre dos puntos. La expresión indica un cambio de sentido para $k < 0$ y un factor positivo $|k|$ sobre su longitud. En el plano, el giro de media vuelta conserva la orientación cíclica de tres vértices, aunque invierta cada desplazamiento radial; no debe confundirse con una reflexión axial.

Al componer razones $k, l \neq 0$ con un mismo centro, obtenemos $O + l([O + k(P - O)] - O) = O+lk(P-O)$. Elegir $l = 1/k$ da la identidad, lo que prueba la inversa. Despejar $P' = kP+(1-k)O$ cuando $k \neq 1$ da $O = (kP-P')/(k-1)$. Con $k = 1$, la transformación es la identidad para cualquier centro; con $k = 0$, la fórmula envía todos los puntos a O y carece de inversa, caso excluido por nuestra definición.

Pitágoras por áreas, recíproco y distancia cartesiana

Tomemos un triángulo rectángulo de catetos positivos a, b e hipotenusa c. En las cuatro esquinas de un cuadrado de lado $a + b$ colocamos copias congruentes de ese triángulo, alternando los tramos a, b sobre los bordes. Las cuatro hipotenusas delimitan una región interior de cuatro lados iguales a c. En cada uno de sus vértices, los dos ángulos agudos adyacentes de las copias suman $90°$ y completan con el interior un ángulo llano. El interior mide $90°$, de modo que la región es un cuadrado de lado c. Las piezas cubren el cuadrado exterior y tienen interiores separados. La aditividad del área y las fórmulas ya justificadas dan $(a+b)^2 = c^2+4ab/2$. La identidad algebraica del cuadrado de una suma reduce esta igualdad a $a^2+b^2 = c^2$. La configuración existe para todos $a, b > 0$; el esquema no exige catetos enteros ni una desigualdad entre ellos.

La hipotenusa cumple $c^2 > a^2$ y $c^2 > b^2$, por lo que $c > a, b$. La raíz positiva recupera $c = \sqrt{a^2 + b^2}$; al despejar un cateto, $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ requiere $c > b > 0$. La raíz negativa de la ecuación cuadrática no representa una longitud.

Para el recíproco, sean a, b, c los lados de un triángulo con $a, b > 0$ y $c^2 = a^2 + b^2$. Construimos otro triángulo con lados perpendiculares de longitudes a, b. Por el resultado directo, su hipotenusa positiva es $\sqrt{a^2 + b^2} = c$. LLL hace congruentes ambos triángulos y transfiere el ángulo recto. Este argumento explica por qué una igualdad entre cuadrados puede probar la perpendicularidad; no supone el ángulo recto del triángulo dado.

En ejes cartesianos perpendiculares con idéntica unidad, dos puntos con cambios de coordenadas no nulos determinan un triángulo rectángulo de catetos $|x_B - x_A|, |y_B - y_A|$. Pitágoras da $AB^2 =$

$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$. La distancia es la raíz no negativa. Si uno de los cambios es cero, el segmento es paralelo a un eje y se mide directamente por el otro cambio absoluto; si ambos son cero, $A = B$ y la distancia es cero. La fórmula reúne los tres casos. La diagonal de un rectángulo es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos sus lados, por lo que satisface la misma relación.

Medida del círculo y aproximación poligonal

Circunferencia y círculo son definiciones de lugares geométricos mediante distancia; diámetro significa cuerda que pasa por el centro. Sus dos radios colineales dan $d = 2r$ por adición de segmentos.

Adoptamos la teoría usual de longitud y área: invariancia bajo movimientos rígidos, aditividad, monotonía y continuidad para aproximaciones poligonales regulares. En particular, los perímetros de polígonos regulares inscritos y circunscritos de una circunferencia convergen a una misma longitud. Bajo semejanza de factor $k > 0$, cada lado y cada perímetro se multiplica por k; por continuidad ocurre lo mismo con la longitud curva. Por tanto L/d es constante para todas las circunferencias. Se define $\pi = L/d$, así que $L = \pi d = 2\pi r$. Esta definición no supone de antemano la fórmula del área.

Un polígono regular inscrito de perímetro p_n y apotema a_n se divide en triángulos de altura a_n y bases que suman p_n. Su área es $p_n a_n/2$. Cuando su número de lados aumenta, el lado máximo tiende a cero y Pitágoras, $a_n^2 = r^2 - (\ell_n/2)^2$, da $a_n \to r$. Por la base de longitud adoptada, $p_n \to 2\pi r$. Las áreas inscritas convergen, pues, a πr^2. Para el polígono regular circunscrito la apotema es r, su perímetro tiende también a $2\pi r$ y su área tiende al mismo valor. El círculo está entre ambos polígonos; monotonía y continuidad fijan su área en πr^2.

Una corona con radios concéntricos $R > r \geq 0$ se descompone, junto al disco interior, en el disco exterior. Por aditividad, su área es $\pi R^2 - \pi r^2$. El espesor $R - r$ no basta por sí solo para determinarla. Las fórmulas anteriores son deducciones dentro de las bases de medida declaradas; la existencia de los límites de longitud no se presenta como una demostración puramente finita.

Radianes, sectores y segmentos

La medida en radianes se define como $\theta = s/r$ para un arco orientado o recorrido; en el capítulo se usan recorridos positivos de hasta una vuelta. Multiplicar por $r > 0$ da $s = r\theta$. Como la vuelta mide $2\pi r$, corresponde a 2π radianes. La partición en 360 grados lleva a $\theta = \alpha\pi/180$ para un valor numérico α en grados. Sustituirlo en $r\theta$ da la fórmula de longitud en grados.

Dividamos una vuelta en n sectores congruentes. Invariancia por rotación y aditividad del área dan $\pi r^2/n$ para cada uno; m sectores tienen área $(m/n)\pi r^2$. Para una fracción real t de la vuelta, se eligen fracciones racionales que la acoten por abajo y por arriba con diferencia tan pequeña como se quiera. Las regiones correspondientes contienen o están contenidas en el sector dado. Monotonía fuerza el área $t\pi r^2$. Como $t = \theta/(2\pi)$, resulta $A_s = r^2\theta/2$. Reemplazar $r\theta$ por s da $A_s = rs/2$.

En un sector propio de $0 < \theta < 2\pi$, los dos radios y el arco forman todo el contorno y solo se tocan en sus extremos; su longitud es $2r + s$. Para una vuelta completa los radios son líneas de partición interiores y el contorno es solo $2\pi r$; la fórmula del sector propio no se extiende allí. Para un segmento menor de ángulo central entre cero y 180°, el triángulo de los dos radios está

contenido en el sector. Por aditividad, el área del segmento es el área del sector menos la del triángulo. En los ejemplos de 90°, esa área triangular es $r^2/2$ por perpendicularidad.

Ángulos y potencia de un punto

Sean A, B, C puntos distintos de una circunferencia, con C vértice del ángulo inscrito, y O el centro. Primero supongamos que uno de sus lados, CA, pasa por O. En el triángulo isósceles OCB, los ángulos en C y B son iguales. Si cada uno vale β, el ángulo exterior en O formado por OA y OB vale 2β; corresponde al arco AB que no contiene a C. Por tanto, el ángulo inscrito es la mitad del arco interceptado en este caso.

Para el caso general, prolongamos CO hasta su otro punto de corte D con la circunferencia. Si el rayo CD queda dentro de $\angle ACB$, este se descompone en $\angle ACD + \angle DCB$; los arcos interceptados AD y DB forman el arco AB que no contiene a C. Sumando las dos igualdades del caso anterior se obtiene la mitad del arco total. Si el rayo CD queda fuera, el ángulo buscado es la diferencia de los dos ángulos con ese rayo, y el arco interceptado es la diferencia de sus correspondientes arcos; restar da la misma regla. Si CD coincide con un lado, ya es el primer caso. Estos emplazamientos agotan las posibilidades. Un diámetro intercepta una semicircunferencia de 180°, de modo que el ángulo inscrito vale 90°.

La perpendicular al radio OT por T es tangente: para otro punto X en ella, $OX^2 = OT^2 + TX^2 > R^2$. A la inversa, sea una tangente por T y sea H el pie de la perpendicular desde O a esa recta. Si $H \neq T$, entonces $OH < R$ y la recta contiene dos puntos a distancia R de O, a ambos lados de H por Pitágoras. Eso contradice la tangencia. Así, $H = T$ y el radio es perpendicular a la tangente.

La potencia puede demostrarse sin excepciones ocultas mediante distancias. Sea una recta secante por un punto P, con vector unitario u en la dirección elegida. Si v es el vector desde O hasta P, sus intersecciones son $P + tu$ y satisfacen

$$t^2 + 2(v \cdot u)t + \|v\|^2 - R^2 = 0.$$

Aquí el producto escalar solo abrevia la suma de productos de coordenadas ortogonales: al desarrollar el cuadrado de la distancia se obtiene esa ecuación. Por la factorización de una cuadrática mónica, el producto de sus dos raíces dirigidas es $OP^2 - R^2$, independiente de la dirección. Si P está dentro, las raíces tienen signos opuestos y el producto de las longitudes positivas es $R^2 - OP^2$. Si está fuera y la dirección apunta a ambos cortes, las dos raíces son positivas y el producto es $OP^2 - R^2$. Comparando dos secantes se obtienen las igualdades de la tabla con los órdenes indicados. Para una tangente, Pitágoras en OPT da $PT^2 = OP^2 - R^2$, que coincide con el producto de la secante. Esta vía utiliza álgebra ya desarrollada y no presupone una definición vectorial avanzada del ángulo. En el caso interior también puede usarse la semejanza de APC y DPB: los ángulos en P son opuestos por el vértice y los de A, D interceptan el mismo arco BC; de $AP/DP = PC/PB$ se deduce la igualdad.

Para el ángulo interior, sean P la intersección y A, P, B, C, P, D los órdenes de las cuerdas. En el triángulo APC, los ángulos en A y C son inscritos y miden la mitad de los arcos BC y AD, respectivamente. Así $\angle APC = 180° - (\widehat{BC} + \widehat{AD})/2$. Los cuatro arcos suman 360°; reemplazando los dos complementarios se obtiene $(\widehat{AC} + \widehat{BD})/2$, que son los arcos interceptados por el ángulo en P y su opuesto.

Para el caso exterior, los órdenes son P, A, B y P, C, D. En el triángulo PBC, el ángulo en B mide $\widehat{AC}/2$. El ángulo en C es suplementario del inscrito BCD, que mide $\widehat{BD}/2$. Por la suma

angular, $\angle BPC = \widehat{BD}/2 - \widehat{AC}/2$. Los arcos se eligen en el sector delimitado por las secantes, de modo que el primero es el lejano y el segundo el cercano. Se ha probado la semidiferencia para dos secantes; otras configuraciones tangenciales no se atribuyen a esta fila.

Prismas, conos y Cavalieri

Se adoptan aditividad, monotonía y continuidad de volumen, junto con Cavalieri en su forma habitual para cuerpos de secciones medibles: igual altura y áreas iguales en cada plano paralelo a la base, a la misma distancia de ella, implican igual volumen. Es un principio explícito de esta fundamentación, no un resultado probado por mostrar algunos cortes. Para cajas rectangulares, $V = abh$ es la normalización de medida cúbica, extendida desde subdivisiones racionales por continuidad.

Un prisma triangular recto se empareja con una copia para formar un prisma de base paralelogramo. El paralelogramo se descompone y recompone en un rectángulo conservando altura y área, y la extrusión conserva esa descomposición. Su volumen es área de base por altura; la mitad da el mismo resultado para el prisma triangular. La triangulación de un polígono extiende $V = A_b h$ a prismas rectos. Un prisma oblicuo y uno recto de igual base y altura tienen cortes de igual área en cada nivel; Cavalieri da la misma fórmula. Un cilindro de base circular se compara con un prisma de igual área de base y altura: todos sus cortes tienen el área constante de sus bases, de modo que $V = \pi r^2 h$.

Justifiquemos ahora el factor $1/3$. Las secciones de una pirámide a altura z desde la base son semejantes a ella con factor $1 - z/h$, por semejanza de los triángulos que pasan por el vértice y una arista de la base. Por el factor cuadrático de áreas, sus áreas son $A_b(1 - z/h)^2$. Cavalieri implica que dos pirámides de igual altura y áreas de base iguales tienen igual volumen; esto no utiliza todavía su valor numérico.

En un prisma triangular $ABCA'B'C'$, donde las primas son las traslaciones de los vértices, la triangulación espacial lo divide en los tetraedros $ABCA'$, $BCA'B'$ y $CA'B'C'$. Sus interiores son disjuntos y juntos llenan el prisma; se separan por los triángulos BCA' y $CA'B'$. El primero y el tercero tienen bases congruentes ABC y $A'B'C'$ y la misma altura del prisma; por el resultado de secciones tienen igual volumen. El primero y el segundo comparten base BCA' y tienen vértices A y B' a igual distancia de su plano: los segmentos AB' y BA' tienen el mismo punto medio, pues $ABB'A'$ es un paralelogramo, y el punto medio de BA' está en ese plano. Por tanto las distancias de A y B' son iguales, en lados opuestos. Reflejando una de las pirámides respecto al plano base, Cavalieri prueba su igualdad de volumen. Cada tetraedro ocupa así un tercio del prisma y vale $A_b h/3$ al considerar el primero con base ABC. Cualquier pirámide triangular se realiza como ese primer tetraedro completando el prisma mediante traslación al vértice. Triangular una base poligonal y sumar demuestra la fórmula para cualquier pirámide de esa base.

En un cono, las secciones paralelas tienen también áreas $A_b(1 - z/h)^2$, por semejanza axial; Cavalieri lo compara con una pirámide de igual altura y área de base. Por tanto $V = A_b h/3$. La deducción abarca conos oblicuos para volumen; las superficies de la tabla se restringen a los rectos.

Las caras laterales de un prisma recto son rectángulos de altura h; sus anchuras suman el perímetro P_b. Así $A_L = P_b h$ y al añadir las bases $A_T = P_b h + 2A_b$. El cilindro recto se abre en un rectángulo de anchura $2\pi r$ y altura h: $A_L = 2\pi r h$. Su superficie total cerrada suma dos discos. Para el cono circular recto, Pitágoras da $g^2 = r^2 + h^2$. Su desarrollo es un sector de radio g y

arco $2\pi r$, por conservación de longitudes al abrirlo. La fórmula $A_s = rs/2$ da $A_L = \pi rg$; la base añade πr^2.

Volumen y superficie de la esfera

Para una bola de radio $R > 0$ centrada en el origen, el corte por un plano a distancia $|z| \leq R$ tiene radio $\rho \geq 0$. El radio perpendicular al plano y un radio del corte forman un triángulo rectángulo de hipotenusa R; de ahí $\rho^2 = R^2 - z^2$. Si $|z| = R$ el corte degenera en un punto y tiene área cero; si es mayor, no hay corte.

Consideremos $0 \leq z \leq R$ en la semibola superior. Su sección tiene área $\pi(R^2 - z^2)$. En un cilindro de radio y altura R, retiremos un cono de igual base y altura con vértice en el centro de la base inferior. La semejanza de los perfiles da radio z al cono en ese nivel, así que la sección restante es una corona de área $\pi R^2 - \pi z^2$. Cavalieri iguala los volúmenes de la semibola y del cilindro sin cono, ambos de altura R. Por las fórmulas ya obtenidas, el volumen de la semibola es $\pi R^3 - \pi R^3/3 = 2\pi R^3/3$. Al sumar dos semibolas, $V = 4\pi R^3/3$.

Para la superficie declaramos otra base de medida: el área esférica se obtiene como límite de áreas de poliedros convexos circunscritos regulares en el sentido de aproximación, cuyas caras son tangentes y cuyo diámetro máximo de cara tiende a cero. «Regulares» aquí exige una refinación controlada que converge a la esfera; no supone que existan poliedros platónicos con un número arbitrario de caras. Esta definición y la continuidad de volumen para esas aproximaciones se adoptan. No se afirma que cualquier secuencia de superficies trianguladas que se acerque en posición tenga automáticamente áreas convergentes.

Para cada poliedro circunscrito, unir el centro a sus caras lo divide en pirámides disjuntas de altura R, pues cada plano de cara es tangente a la esfera. Si A_n es su área y V_n su volumen, la fórmula de pirámides da exactamente $V_n = RA_n/3$. La aproximación regular hace que $V_n \to V$ y, por la definición adoptada, $A_n \to A$. Entonces $V = RA/3$. Como el volumen ya fue obtenido independientemente, dividir por $R/3 > 0$ da $A = 4\pi R^2$. No hay circularidad entre las fórmulas de área y volumen: solo esta última deducción utiliza la base adicional de área curva.

La superficie curva de una semibola es la mitad por simetría; su base es un disco de área πR^2, y el total cerrado es $2\pi R^2 + \pi R^2 = 3\pi R^2$. Las escalas de superficie y volumen provienen de sus dimensiones: cada región plana de una aproximación semejante multiplica el área por k^2, y cada caja de una partición semejante multiplica el volumen por k^3. Aditividad y continuidad extienden esos factores a los cuerpos tratados y sus superficies de medida adoptada. Para la esfera también se comprueban sustituyendo kR en las dos fórmulas. No se aplica esta comparación a cuerpos de formas diferentes por conocer solo una de sus medidas.

Secciones y distancias en el espacio

En una caja de aristas mutuamente perpendiculares a, b, c, Pitágoras en la base da diagonal q con $q^2 = a^2 + b^2$. La dirección de la tercera arista es perpendicular a todo el plano de la base, en particular a la diagonal q. En el plano determinado por ambas, Pitágoras da $d^2 = q^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$. La proyección perpendicular de la diagonal espacial sobre la base es precisamente q: conserva sus dos desplazamientos horizontales y elimina la componente vertical. Se toman raíces positivas para longitudes.

En un cono circular recto de altura h y radio r, un plano paralelo a la base a distancia x desde el vértice produce en la sección axial un triángulo semejante al completo. Los lados correspondientes

dan $\rho/r = x/h$, con $0 \le x \le h$; al cuadrar y multiplicar por π, $A_x/A_b = (x/h)^2$. En $x = 0$ se obtiene el vértice como sección degenerada; en $x = h$ la propia base. Este cálculo permite verificar una igualdad de áreas para cada nivel, que es la hipótesis de Cavalieri, y no solo en los niveles que aparecen en una ilustración.

Razones trigonométricas y semejanza

En dos triángulos rectángulos con un mismo ángulo agudo, los otros ángulos agudos también coinciden porque suman $\pi/2$. El criterio AA prueba semejanza con correspondencia de hipotenusas, catetos opuestos y adyacentes al ángulo elegido. Si cada lado del segundo triángulo es $k > 0$ veces el correspondiente del primero, cada cociente de dos lados conserva su valor al cancelar k. Se definen seno, coseno y tangente mediante esos cocientes. Como las longitudes son positivas y cada cateto es menor que la hipotenusa, para $0 < \alpha < \pi/2$ seno y coseno están entre cero y uno y tangente es positiva.

La igualdad $\tan\alpha = \sin\alpha/\cos\alpha$ resulta de $(o/h)/(a/h) = o/a$, con $a, h > 0$. Los dos ángulos agudos del mismo triángulo son complementarios; los catetos intercambian su papel y la hipotenusa se conserva. Así se obtienen $\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos\alpha$ y $\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin\alpha$.

Para $\alpha = \pi/4$, un triángulo rectángulo isósceles de catetos 1 tiene hipotenusa $\sqrt{2}$ por Pitágoras. Por tanto seno y coseno valen $1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$ y tangente vale 1. La altura de un equilátero de lado 2 también es mediana y bisectriz, por congruencia de sus mitades. Cada mitad tiene hipotenusa 2, cateto corto 1, cateto largo $\sqrt{3}$ y ángulos $\pi/6, \pi/3$. De sus cocientes se obtienen los valores de la tabla: $\sin(\pi/6) = 1/2$, $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$, $\tan(\pi/6) = \sqrt{3}/3$, y para $\pi/3$ se intercambian seno y coseno, con tangente $\sqrt{3}$. No se han deducido estos valores desde una aproximación decimal.

Giros, coordenadas y periodicidad

La medida de radianes y su conversión fueron definidas en el apartado «Radianes, sectores y segmentos». Para giros orientados se adopta el sentido antihorario positivo y el horario negativo. Si el giro no cambia de sentido y su medida dirigida es θ, el arco total recorrido tiene longitud $r|\theta|$. Se cuentan las vueltas completas; por ejemplo, un giro de 4π vuelve al inicio y recorre dos circunferencias. Si el giro cambia de sentido, su desplazamiento angular neto puede cancelar parte del recorrido; la fórmula con el valor neto deja de medir entonces la longitud total recorrida.

Seno y coseno para cualquier real θ se definen como las coordenadas vertical y horizontal del extremo de un radio unitario que parte de $(1, 0)$ y gira θ. La noción euclidiana de giro conserva distancias y orientación; la suma de medidas de giros referidos al mismo centro describe su composición. Esta base geométrica se adopta junto con la medida angular. En el primer cuadrante, el triángulo de proyecciones tiene hipotenusa 1 y las definiciones coinciden con las razones positivas de lados ya introducidas.

Una vuelta completa conserva el extremo. De ahí $\sin(\theta + 2k\pi) = \sin\theta$ y $\cos(\theta + 2k\pi) = \cos\theta$. Media vuelta lleva un punto a su opuesto: ambas coordenadas cambian de signo. La reflexión en el eje horizontal lleva el ángulo a $-\theta$ y cambia y por $-y$, conservando x; esto prueba la imparidad del seno y la paridad del coseno. La reflexión vertical lleva el ángulo a $\pi - \theta$, conserva y y cambia el signo de x, dando las otras dos identidades de reflexión. Estas afirmaciones valen también sobre los ejes por la definición mediante coordenadas.

La tangente se extiende mediante $\tan\theta = \sin\theta/\cos\theta$. El denominador es cero exactamente cuando el extremo unitario está sobre el eje vertical, en los giros $\pi/2 + k\pi$. Son sus únicas

exclusiones. Media vuelta cambia de signo numerador y denominador y conserva el cociente, de modo que la tangente tiene período π en su dominio. Los signos de las razones se leen de las coordenadas y no del signo del número que mide el giro.

Identidades por coordenadas y composición de giros

El extremo del radio unitario pertenece al círculo $x^2 + y^2 = 1$. Sustituir $x = \cos\theta$ e $y = \sin\theta$ prueba $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ para todo real θ. Donde $\cos\theta \neq 0$, dividir por su cuadrado da $1 + \tan^2\theta = 1/\cos^2\theta$. La división no produce una afirmación en los ceros del denominador.

Para justificar la adición, describamos un giro R_α respecto del origen. La dirección horizontal unitaria $e_1 = (1, 0)$ pasa a $(\cos\alpha, \sin\alpha)$. La dirección vertical positiva $e_2 = (0, 1)$ pasa al vector unitario perpendicular situado a su izquierda: $(-\sin\alpha, \cos\alpha)$. Esa elección se comprueba porque su producto escalar con el primero es cero y su determinante orientado vale $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$. El signo del determinante conserva la orientación; la perpendicular opuesta correspondería a una reflexión.

Una suma de desplazamientos se construye como la diagonal de un paralelogramo. Un giro conserva paralelismo, longitudes y el vértice común, así que lleva ese paralelogramo al construido por las imágenes de sus lados; por tanto $R_\alpha(p + q) = R_\alpha(p) + R_\alpha(q)$. También conserva la multiplicación de un vector por un escalar real: para escala positiva conserva la dirección y la razón de longitudes, para negativa se añade la inversión de dirección y para cero queda el origen. Se sigue que, para $(x, y) = xe_1 + ye_2$,

$$R_\alpha(x, y) = (x\cos\alpha - y\sin\alpha,\ \ x\sin\alpha + y\cos\alpha).$$

Apliquemos esta igualdad a $(\cos\beta, \sin\beta)$. Por composición geométrica de giros, el extremo obtenido es el de $\alpha + \beta$, cuyas coordenadas son coseno y seno de esa suma. Igualar la primera y la segunda componente prueba, respectivamente,

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

La prueba usa giros de cualquier medida real y no requiere que los ángulos sean agudos. Sustituir β por $-\beta$ y usar las reflexiones ya probadas da las dos fórmulas de diferencia. Sustituir $\beta = \alpha = \theta$ da $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ y $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$. Al reemplazar uno u otro cuadrado mediante la identidad fundamental resultan $1 - 2\sin^2\theta$ y $2\cos^2\theta - 1$. No se introduce ninguna división en estas fórmulas y sus dominios son todos los reales.

Inversas y soluciones trigonométricas

Para $u \in [-1, 1]$, la recta horizontal $y = u$ corta el círculo unitario en $(\sqrt{1 - u^2}, u)$ dentro del semiplano derecho. Este punto es único, incluso cuando degenera en uno de los extremos verticales. Su dirección determina un único ángulo en $[-\pi/2, \pi/2]$, que define $\arcsin u$. Una coordenada vertical mayor recorre esa semicircunferencia en orden creciente; esta observación geométrica también expresa la monotonía que permite hablar de inversa. Para el coseno elegimos la semicircunferencia superior: el punto único es $(u, \sqrt{1 - u^2})$ y su ángulo en $[0, \pi]$ define $\arccos u$. Allí la coordenada horizontal decrece al avanzar el ángulo.

Para cualquier $u \in \mathbb{R}$, la dirección del vector $(1, u)$ está en el semiplano derecho y forma un ángulo único en $(-\pi/2, \pi/2)$. Su punto unitario es $(1, u)/\sqrt{1+u^2}$ y su tangente vale u. Así se define $\arctan u$ para todo real, con un único valor principal. Este argumento prueba existencia y unicidad sin presuponer una calculadora ni confundir la inversa funcional con un recíproco.

Para $\sin x = u$, los puntos unitarios son $(\pm\sqrt{1-u^2}, u)$. Si $a = \arcsin u$, sus direcciones son a y $\pi - a$, módulo vueltas completas. Se obtienen las familias $x = a + 2k\pi$ o $x = \pi - a + 2k\pi$. Cuando $u = \pm 1$, ambas familias describen el mismo conjunto; no se cuenta dos veces una solución repetida. Si $|u| > 1$, no existen puntos del círculo con esa altura y la ecuación carece de soluciones.

Para $\cos x = u$, los puntos son $(u, \pm\sqrt{1-u^2})$. Si $b = \arccos u$, sus direcciones son b y $-b$ módulo 2π, lo que da $x = \pm b + 2k\pi$. En $u = \pm 1$ se repiten familias; fuera de $[-1, 1]$ no hay solución. Para tangente, una pendiente u determina una recta por el origen. Sus dos puntos unitarios son opuestos, separados por π, y están fuera del eje vertical porque u es real finito. Las soluciones son $x = \arctan u + k\pi$, todas dentro del dominio de tangente.

En todos los casos $k \in \mathbb{Z}$. Resolver en un intervalo equivale a intersectar esas familias con él y con el dominio original. Esta intersección conserva exactamente los extremos incluidos por corchetes y elimina los excluidos por paréntesis. Factorizar un producto y usar el producto nulo conserva todas las ramas; dividir por un factor que puede ser cero requiere analizar aparte sus ceros. Un cociente definido vale cero exactamente cuando su numerador es cero, conservando la condición de denominador no nulo.

Área trigonométrica y leyes de senos y cosenos

Sea un triángulo no degenerado de lados positivos a, b, c y ángulos opuestos $A, B, C \in (0, \pi)$. Con base c, el área es $\Delta = ch/2$. La distancia perpendicular desde el extremo del lado b a la recta base vale $h = b \sin A$. Para A agudo proviene del triángulo rectángulo interior; para A obtuso proviene del triángulo exterior con ángulo suplementario $\pi - A$, de igual seno; para $A = \pi/2$ la altura es b. Por tanto $\Delta = bc \sin A/2$ en todos los casos. Las otras bases producen $\Delta = ca \sin B/2 = ab \sin C/2$.

Dividir estas tres expresiones por $abc/2 > 0$ da $\sin A/a = \sin B/b = \sin C/c$. Sus cantidades son positivas; invertirlas prueba la ley de senos $a/\sin A = b/\sin B = c/\sin C$. No se aplica a figuras degeneradas, donde algún seno podría ser cero.

Para la ley de cosenos, situamos un vértice en $(0, 0)$, otro en $(c, 0)$ y el tercero en $(b \cos A, b \sin A)$. El tercer lado es la distancia entre los dos últimos puntos. Por Pitágoras cartesiano,

$$\begin{aligned} a^2 &= (b\cos A - c)^2 + (b \sin A)^2 \\ &= b^2(\cos^2 A + \sin^2 A) + c^2 - 2bc \cos A \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A. \end{aligned}$$

La igualdad vale con coordenada horizontal positiva, cero o negativa y cubre ángulos agudos, rectos y obtusos. Dos lados positivos y su ángulo comprendido en $(0, \pi)$ construyen un triángulo único hasta movimientos y reflexión por LAL. Su tercer lado es la raíz positiva de la expresión obtenida; está estrictamente entre la diferencia absoluta y la suma de los lados porque $-1 < \cos A < 1$.

Si se dan A, a, b con A opuesto a a, la ley de senos impone $\sin B = b \sin A/a$. Un valor mayor que uno impide la existencia. Un valor en $(0, 1]$ produce un ángulo principal agudo o recto y, cuando es distinto de uno, su suplementario. Solo se conservan candidatos con $A + B < \pi$, pues

$C = \pi - A - B$ debe ser positivo. Cada candidato válido completa el triángulo mediante dos ángulos y el lado dado; la ley de senos obtiene su lado restante. Esto explica por qué no se afirma unicidad desde dos lados y un ángulo no comprendido.

En los ejemplos con $A = 30°$, el vértice al final del lado b tiene proyección $b\cos A$ y altura $b\sin A$ sobre la semirrecta del lado c. La circunferencia de radio a centrada en ese vértice corta la recta base, si alcanza, en coordenadas $c = b\cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2\sin^2 A}$. Solo los cortes con $c > 0$ generan triángulos. La fórmula explica los dos valores exactos de los problemas y sus inexistencias; no convierte todos los casos de datos semejantes en casos de dos soluciones.

Parametrización de una circunferencia y giro uniforme

Para $R > 0$, el punto $p(\theta) = (u + R\cos\theta, v + R\sin\theta)$ cumple $(x-u)^2 + (y-v)^2 = R^2$ por la identidad fundamental. Recíprocamente, restar el centro y dividir por R lleva cualquier punto de esa circunferencia a un punto unitario. La dirección de este proporciona un ángulo θ, por lo que todos los puntos quedan representados.

Si dos parámetros dan el mismo punto, al restar el centro y dividir por R sus radios unitarios coinciden. Esto ocurre exactamente cuando los giros difieren en vueltas completas: $p(\theta) = p(\varphi)$ equivale a $\theta - \varphi = 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Por ello, cualquier intervalo de longitud 2π cerrado por un extremo y abierto por el otro representa cada punto una sola vez.

En un giro uniforme la razón entre cambio angular y tiempo es constante. Una vuelta en $T > 0$ da $\omega = \pm 2\pi/T$, según el sentido, y por proporcionalidad $\theta(t) = \theta_0 + \omega t$. Durante $\Delta t \geq 0$ recorre $|\omega|\Delta t$ radianes y, por la fórmula del arco, longitud $R|\omega|\Delta t$. La uniformidad es una hipótesis; el período por sí solo no la demuestra.

Distancias y reparto en coordenadas

Fijamos ejes cartesianos perpendiculares con una unidad común. Para $A = (a, b)$ y $B = (c, d)$, los catetos del triángulo de proyecciones tienen longitudes $|c-a|$ y $|d-b|$. Pitágoras proporciona $d(A, B)^2 = (c - a)^2 + (d - b)^2$; tomar la raíz no negativa da la distancia. La fórmula incluye segmentos horizontales, verticales y el caso $A = B$, donde vale cero.

El punto $P = A + t(B - A)$ tiene variaciones $t(c - a)$ y $t(d - b)$ desde A. Todos esos desplazamientos son paralelos a $B - A$; cuando $A \neq B$, describen su recta. Para $0 \leq t \leq 1$, las longitudes son $AP = t\,AB$ y $PB = (1-t)AB$, pues la distancia entre cada par de puntos es el valor absoluto del factor que multiplica a $B-A$ por AB. En $t = 1/2$ resultan iguales y se obtiene $M = ((a+c)/2, (b+d)/2)$. La razón interior $m : n$, con $m, n > 0$, exige $t/(1-t) = m/n$; despejar da $t = m/(m+n)$ y demuestra tanto la fórmula como su unicidad. Con $A = B$, la parametrización representa un único punto y las razones interiores de longitudes positivas requieren elegir extremos distintos.

Por definición, una circunferencia de centro (h, k) y radio $r > 0$ reúne los puntos a distancia r del centro. Aplicar la distancia cartesiana y elevar al cuadrado da $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$. La recíproca se obtiene tomando la raíz positiva r, así que la ecuación caracteriza exactamente la circunferencia.

Operaciones con vectores y homotecias en coordenadas

Un vector libre del plano representa los desplazamientos de iguales componentes respecto de los ejes fijados. El desplazamiento de A a B tiene componentes $B - A$. Su módulo es la longitud de cualquiera de sus representantes, obtenida por Pitágoras. Las definiciones $u+v = (u_x+v_x, u_y+v_y)$ y $ku = (ku_x, ku_y)$ se justifican al acumular variaciones sobre cada eje y al escalar ambas variaciones por el mismo real.

La conmutatividad y asociatividad se comprueban en cada coordenada mediante las correspondientes propiedades reales. Por ejemplo, la primera componente de $(u + v) + w$ es $(u_x + v_x) + w_x = u_x + (v_x + w_x)$ y la segunda satisface la igualdad análoga. El vector $(0, 0)$ es neutro, y $(-u_x, -u_y)$ es el opuesto porque su suma con u tiene ambas componentes cero. Las dos distributividades se verifican escribiendo $k(u_x + v_x) = ku_x + kv_x$ y $(k + l)u_x = ku_x + lu_x$, junto con las igualdades de la segunda coordenada. Asimismo $k(lu_x) = (kl)u_x$ y $1u_x = u_x$, y lo mismo para y, prueban compatibilidad y unidad escalar.

Al calcular módulos, $\|ku\|^2 = k^2(u_x^2 + u_y^2)$. La raíz no negativa da $\|ku\| = |k|\|u\|$. Para $u \neq 0$, dividir por el número positivo $\|u\|$ produce un vector de módulo uno que conserva el sentido. Con $u = 0$, la suma y la escala siguen definidas; el unitario requiere módulo positivo.

Una homotecia de centro O y razón $k \neq 0$ se caracteriza por $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$. Reemplazar ambos vectores por diferencias y despejar da $A' = O + k(A - O)$. Si A, B tienen imágenes A', B', al restar obtenemos $B' - A' = k(B - A)$ y, por tanto, $A'B' = |k|AB$. La inversa tiene el mismo centro y razón $1/k$. La fórmula para $k = 0$ describe el colapso de todos los puntos en el centro; las homotecias invertibles corresponden a $k \neq 0$.

Producto escalar, ángulos y proyecciones ortogonales

Para un vector no nulo de módulo r y ángulo orientado θ desde el eje horizontal positivo, la semejanza con el radio unitario da $u = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Así se deduce la fórmula de componentes, con sus signos y referencia angular.

Definimos $u\cdot v = u_x v_x + u_y v_y$. Intercambiar los factores de cada producto real prueba la simetría. Distribuir los productos reales prueba la aditividad en cada argumento y la compatibilidad con la escala. Sustituir $v = u$ da $u \cdot u = u_x^2 + u_y^2 = \|u\|^2$.

Sean $u, v \neq 0$ y $\phi \in [0, \pi]$ su ángulo. Desarrollar los cuadrados por coordenadas da

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2(u \cdot v).$$

La ley de cosenos da la misma igualdad con $\|u\|\|v\|\cos\phi$ en el último término. Para $0 < \phi < \pi$, la comparación prueba $u \cdot v = \|u\|\|v\|\cos\phi$. En los casos alineados, $v = ku$ para algún $k \neq 0$, y el cálculo $u \cdot v = k\|u\|^2$ prueba la misma identidad con coseno 1 o -1 según el signo de k. Dividir por los módulos positivos da la fórmula del ángulo. En particular, los factores no nulos son perpendiculares exactamente cuando su producto escalar es cero. La convención algebraica de ortogonalidad incluye el vector cero, cuyo producto escalar con cualquier vector es cero.

Para un unitario e, la proyección con signo sobre su eje es $\|u\|\cos\phi = u \cdot e$, con el caso $u = 0$ verificado directamente. Multiplicarla por e produce la proyección vectorial. Para $v \neq 0$, sustituir $e = v/\|v\|$ da $\operatorname{proj}_v u = ((u \cdot v)/(v \cdot v))v$. Definiendo $w = u - \operatorname{proj}_v u$, la linealidad proporciona $w\cdot v = u\cdot v - (u\cdot v)(v\cdot v)/(v\cdot v) = 0$. Además, cualquier descomposición $u = sv + w$ con $w\cdot v = 0$ debe satisfacer $u \cdot v = s(v \cdot v)$; esto fija s y prueba la unicidad de las partes paralela y perpendicular.

Rectas, normales y distancia mínima

Fijados un punto A y un vector $d \neq 0$, los puntos $A + td$, $t \in \mathbb{R}$, forman la recta de dirección d por A. En coordenadas, con $A = (a, b)$ y $d = (p, q)$, tenemos $x = a + tp$, $y = b + tq$. Para $p \neq 0$, despejar t da $y - b = (q/p)(x - a)$; la pendiente es $m = q/p$. Para $p = 0$, necesariamente $q \neq 0$ y la parametrización recorre todos los puntos de $x = a$.

La ecuación $ax + by + c = 0$, con $(a, b) \neq (0, 0)$, tiene puntos: si $a \neq 0$ podemos tomar $(-c/a, 0)$; si $a = 0$, podemos tomar $(0, -c/b)$. Fijado uno de ellos, P_0, la ecuación equivale a $(a, b) \cdot (P - P_0) = 0$. El vector $(-b, a)$ es perpendicular a (a, b). Todos los vectores ortogonales a (a, b) son múltiplos de $(-b, a)$: si $a \neq 0$ se despeja la primera componente de $ax + by = 0$, y si $a = 0$ queda $y = 0$. Esto prueba que la ecuación representa precisamente una recta con el normal y director indicados.

Para directores no nulos u, v, la proporcionalidad implica $u_x v_y - u_y v_x = 0$ al sustituir $v = ku$. Recíprocamente, si esa diferencia es cero y $u_x \neq 0$, tomar $k = v_x/u_x$ fuerza $v_y = ku_y$; si $u_x = 0$, entonces $u_y \neq 0$ y la igualdad obliga a $v_x = 0$, permitiendo $k = v_y/u_y$. Como $v \neq 0$, el factor es no nulo. Esto prueba el criterio de paralelismo de direcciones. El criterio de perpendicularidad procede del producto escalar. Si existen ambas pendientes, podemos usar los directores $(1, m_1)$ y $(1, m_2)$: su producto es $1 + m_1 m_2$, que vale cero exactamente cuando $m_1 m_2 = -1$.

Para el ángulo menor entre rectas, cambiar el sentido de un director sustituye el coseno por su opuesto y el ángulo por su suplementario. El valor absoluto de $u \cdot v$ selecciona el coseno no negativo y, por tanto, $0 \le \phi \le \pi/2$; la fórmula incluye paralelismo y perpendicularidad.

Sean $P = (x_0, y_0)$ y $r : ax + by + c = 0$. Escribimos $f = ax_0 + by_0 + c$. El punto $H = P - f(a,b)/(a^2+b^2)$ pertenece a r, porque sustituir da $f - f = 0$. El desplazamiento $P - H$ es paralelo al normal, y su módulo es $|f|/\sqrt{a^2+b^2}$. Para cualquier $Q \in r$, los segmentos PH y HQ son perpendiculares; Pitágoras proporciona $PQ^2 = PH^2 + HQ^2$. Así PH es la distancia mínima y solo $Q = H$ la alcanza. Si $f = 0$, el punto ya está en la recta y el mínimo es cero. Quedan probadas la fórmula del pie y la de distancia con todos sus casos.

Movimientos del plano y elección del origen

La traslación $T_v(P) = P + v$ satisface $T_v(Q) - T_v(P) = Q - P$, por lo que conserva distancias. Las reflexiones en los ejes se expresan como $(x, y) \mapsto (x, -y)$ y $(x, y) \mapsto (-x, y)$. Las diferencias entre imágenes cambian el signo de una componente y conservan la suma de sus cuadrados; por ello también conservan distancias.

Para girar un punto no nulo escribimos $(x, y) = (r\cos\alpha, r\sin\alpha)$. Las fórmulas de adición dan

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta,$$
$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta.$$

En el origen, las mismas expresiones dan $(0, 0)$, así que la fórmula incluye todos los puntos. Si $c = \cos\theta$ y $s = \sin\theta$, un cálculo directo produce $(cx - sy)^2 + (sx + cy)^2 = (c^2 + s^2)(x^2 + y^2) = x^2 + y^2$. La fórmula es lineal y lleva diferencias a diferencias; aplicar esa igualdad a $Q - P$ prueba la conservación de distancias. El giro de centro C se obtiene llevando primero ese centro al origen, aplicando el giro y restituyéndolo: $P' = C + R_\theta(P - C)$.

Con ejes paralelos de igual orientación y unidad, elegir el origen O' asigna a P las coordenadas de $P - O'$. Las diferencias de coordenadas entre dos puntos permanecen iguales. Se trata de otra referencia para los mismos puntos, y esa identidad de diferencias verifica la igualdad de distancias.

Una transformación afín tiene fórmulas $x' = ax + by + e$, $y' = cx + dy + f$, con coeficientes reales fijos. Sustituir estas dos expresiones en otras del mismo tipo vuelve a producir combinaciones lineales de x, y más constantes; así la composición es afín. Las fórmulas de traslación, reflexión, giro y homotecia tienen esta forma. La conservación de distancias se ha demostrado para las tres primeras; la homotecia escala las distancias por $|k|$.

Vectores espaciales, orientación y áreas

En tres ejes perpendiculares de unidad común, Pitágoras en el plano horizontal da $u_x^2 + u_y^2$ como cuadrado de la proyección de un desplazamiento; aplicarlo con su componente vertical da $\|u\|^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$. En consecuencia, $d(A, B) = \|B - A\|$. Suma y escala se definen por componentes. Las pruebas reales de conmutatividad, asociatividad, neutro, opuesto, distributividades, compatibilidad y escala del módulo se repiten en las tres coordenadas. El producto escalar $u \cdot v = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$ hereda simetría y linealidad; $u \cdot u = \|u\|^2$. Los dos vectores están contenidos en algún plano por el origen y el desarrollo de $\|u - v\|^2$, comparado con la ley de cosenos en ese plano, prueba su interpretación angular. La deducción algebraica de proyecciones es idéntica, pues usa solo estas igualdades.

Fijamos una base ortonormal de mano derecha y definimos $w = u \times v$ mediante

$$w_x = u_y v_z - u_z v_y,$$
$$w_y = u_z v_x - u_x v_z,$$
$$w_z = u_x v_y - u_y v_x.$$

Intercambiar u y v cambia el signo de cada componente y prueba $v \times u = -u \times v$. Distribuir cada producto real prueba $u \times (v + z) = u \times v + u \times z$ y $(ku) \times v = k(u \times v)$; la antisimetría proporciona también la aditividad en el primer argumento. Al formar $w \cdot u$ aparecen seis términos que se cancelan por parejas: $u_x u_y v_z$ con $-u_y u_x v_z$, $-u_x u_z v_y$ con $u_z u_x v_y$, y $u_y u_z v_x$ con $-u_z u_y v_x$. Así $w \cdot u = 0$. Intercambiar los factores prueba igualmente $w \cdot v = 0$.

Para comprobar su módulo expandimos la suma

$$\begin{aligned}\|w\|^2 = {} & (u_y v_z - u_z v_y)^2 \\ & + (u_z v_x - u_x v_z)^2 \\ & + (u_x v_y - u_y v_x)^2.\end{aligned}$$

Por otra parte, al desarrollar $\|u\|^2\|v\|^2 - (u \cdot v)^2$, los tres términos $u_x^2 v_x^2, u_y^2 v_y^2, u_z^2 v_z^2$ se cancelan. Quedan los seis términos cuadrados cruzados $u_i^2 v_j^2$, con $i \neq j$, y los tres términos dobles negativos $-2u_x u_y v_x v_y$, $-2u_x u_z v_x v_z$ y $-2u_y u_z v_y v_z$. Son exactamente los de la expansión anterior. Esto demuestra

$$\|u \times v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - (u \cdot v)^2.$$

Para factores no nulos, sustituir la identidad angular da $\|u \times v\| = \|u\|\|v\| \sin\phi$, con $0 \leq \phi \leq \pi$ y seno no negativo. El área base por altura del paralelogramo es la misma expresión, pues la altura respecto de u mide $\|v\| \sin\phi$. Si algún factor es cero, ambas áreas y el producto son cero directamente. El triángulo ocupa la mitad del paralelogramo, lo que prueba la fórmula de área triangular.

La orientación se fija por $e_x \times e_y = e_z$ en la base de mano derecha elegida. La definición por componentes mantiene esa elección para cada par independiente: produce la normal que apunta según el giro de u hacia v por el ángulo menor y la regla de la mano derecha. Esta convención permite elegir uno de los dos sentidos perpendiculares al plano; el módulo y el área quedan determinados por la identidad probada.

Funciones, imágenes y sustitución

Adoptamos la definición de función $f : A \to B$ como una asignación que da a cada $x \in A$ un único elemento $f(x) \in B$. Dominio, codominio y asignación forman los datos de la función. El recorrido se define como el conjunto de imágenes $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$. Cada uno de sus elementos pertenece a B por la condición de llegada de la asignación; así $f(A) \subseteq B$. Las imágenes de entradas distintas pueden coincidir porque la unicidad requerida se formula para cada entrada fija.

Cuando una fórmula expresa la asignación, sustituir un argumento admisible u en cada aparición de la variable obtiene precisamente la imagen asignada a ese elemento. Los paréntesis mantienen el argumento completo en cada operación. El cambio $f(a+h) - f(a)$ es una resta de dos imágenes reales y exige que a y $a+h$ pertenezcan al dominio. Con $h = 0$ ambas imágenes coinciden y la diferencia es cero. Las formas $mx+b$ y mx son las definiciones de regla afín y lineal adoptadas; sustituir cero da $f(0) = b$ cuando esa entrada pertenece al dominio. La igualdad de funciones con idénticos dominio, codominio y asignación es la convención explícita adoptada en el cuerpo; el nombre de la variable de escritura conserva esos tres datos.

Dominios y valores alcanzados

La división real p/q usa el inverso multiplicativo de q, que existe para $q \neq 0$. Por eso una expresión $p(x)/q(x)$ exige que numerador y denominador estén definidos y que el segundo sea distinto de cero. La raíz real de índice par se define como la solución no negativa de $z^{2n} = u$ para $u \geq 0$. La potencia par es no negativa para todo real z; la raíz así definida exige radicando no negativo. Estas condiciones proceden de las operaciones numéricas estudiadas anteriormente.

Si una expresión contiene varias operaciones, un valor es admisible cuando cumple cada una de sus condiciones. Decir que pertenece a todos los conjuntos permitidos equivale a pertenecer a su intersección. Si un problema añade condiciones contextuales, se intersecta también con sus valores admitidos. Este procedimiento determina el dominio de la función declarada a partir del dominio natural y el contexto.

Una simplificación algebraica demuestra igualdad de valores en las entradas donde sus operaciones son válidas. En una cancelación, $r(x)s(x)/r(x) = s(x)$ se deduce multiplicando por el inverso de $r(x)$, así que mantiene la condición $r(x) \neq 0$ y las restantes restricciones de las expresiones. La simplificación conserva la asignación en ese dominio; extender la regla a entradas nuevas requiere declarar otra función.

Por definición de recorrido, $y \in f(A)$ equivale a que exista una entrada $x \in A$ con $f(x) = y$. Por tanto, para proponer un conjunto S como recorrido se requieren dos comprobaciones: que todas las imágenes pertenezcan a S y que cada elemento de S se obtenga con alguna entrada admisible. Las soluciones explícitas para x usadas en los problemas de área, rectas y parábolas verifican la segunda comprobación y evitan confundir una cota con una descripción completa de los valores alcanzados.

Gráficas, restricciones y lectura de valores

Para $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f : A \to \mathbb{R}$, la gráfica se define por $G_f = \{(x, f(x)) : x \in A\}$. Fijado $x \in A$, el punto $(x, f(x))$ existe y es el único de la gráfica con esa abscisa, por existencia y unicidad de la imagen. Recíprocamente, si un conjunto de pares de $A \times \mathbb{R}$ contiene exactamente uno con cada

primera coordenada $x \in A$, asignar a x su segunda coordenada define una función y recupera ese conjunto como gráfica. Esto prueba el criterio de lectura vertical con su dominio declarado.

Un punto de la gráfica está en el eje horizontal precisamente cuando su segunda coordenada es cero; así sus abscisas son las soluciones de $f(x) = 0$ en A. Para el eje vertical se requiere primera coordenada cero. Cuando $0 \in A$, la unicidad proporciona el punto $(0, f(0))$. Las primeras coordenadas de todos los pares de G_f forman exactamente A, y las segundas forman exactamente $f(A)$; esto justifica la lectura de dominio y recorrido mediante proyecciones.

Sea $D \subseteq A$. La restricción $f|_D : D \to B$ asigna a cada entrada de D su imagen mediante f. Hereda existencia, unicidad y pertenencia al codominio. Su gráfica conserva exactamente los pares de G_f con primera coordenada en D. Cada imagen de $f|_D$ es también imagen de f, de donde $f(D) \subseteq f(A)$.

Orden, extremos y simetrías de funciones

Las condiciones $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$ y $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$ para todas las entradas de un intervalo son las definiciones de crecimiento y decrecimiento estrictos adoptadas. Las versiones con desigualdad no estricta definen las variantes no decreciente y no creciente. El signo de una imagen compara $f(x)$ con cero y la variación compara imágenes entre sí, por lo que ambas condiciones pueden coexistir como muestran los ejemplos afines de imágenes negativas.

Un máximo absoluto en c se define por $f(x) \leq f(c)$ para toda entrada; un mínimo por $f(x) \geq f(c)$. Si sabemos que $L \leq f(x) \leq U$ para todo x, y existe c con $f(c) = L$, sustituir muestra $f(x) \geq f(c)$ y prueba que L es mínimo. Si existe d con $f(d) = U$, resulta $f(x) \leq f(d)$ y U es máximo. Una cota que queda fuera del recorrido carece de una entrada que satisfaga esa igualdad y debe conservarse como cota. En los intervalos abiertos de los problemas, construir para cada candidato otra imagen menor o mayor demuestra directamente la ausencia del extremo correspondiente.

Supongamos que A es simétrico respecto de cero. Si $f(-x) = f(x)$, el reflejo de cada punto $(x, f(x))$ en el eje vertical es $(-x, f(x)) = (-x, f(-x))$, otro punto de la gráfica. La reflexión aplicada dos veces devuelve el punto inicial, de modo que conserva toda la gráfica. Recíprocamente, si la gráfica es simétrica en ese eje, el punto reflejado tiene que poseer la única imagen de $-x$, lo que obliga a $f(-x) = f(x)$. Esto prueba la equivalencia entre paridad y simetría vertical.

Para la imparidad, el giro de media vuelta lleva $(x, f(x))$ a $(-x, -f(x))$. Este punto pertenece a la gráfica exactamente cuando $f(-x) = -f(x)$. El mismo argumento con la transformación aplicada dos veces prueba la equivalencia. La simetría del dominio garantiza en ambos casos que las dos entradas comparadas estén admitidas. Si cero pertenece al dominio de una función impar real, $f(0) = -f(0)$ implica además $f(0) = 0$.

Reglas por tramos y fronteras

Sean $A_1, \ldots, A_n$ los dominios de las reglas que se desean unir y sea A su unión. Para cada $x \in A$ hay al menos una regla aplicable porque pertenece a alguno de esos conjuntos. Si los conjuntos son disjuntos, la regla aplicable es única y determina la imagen. Si se superponen, la asignación es funcional exactamente cuando todas las reglas aplicables a una misma entrada le asignan el mismo valor: en ese caso se conserva la unicidad; si dos valores difieren, esa entrada tiene dos salidas.

Evaluar una función por tramos consiste por ello en comprobar primero las condiciones de pertenencia y después calcular la imagen mediante una regla válida. El uso de extremos abiertos y cerrados expresa esas pertenencias y decide la asignación en las fronteras. La unión de los recorridos de las reglas sobre sus tramos es el recorrido completo, pues cada entrada pertenece a algún tramo y cada imagen de una regla forma parte de la asignación común.

Para reglas afines $mx+b$ y $nx+c$ a ambos lados de una frontera a, sus alturas de frontera son $ma+b$ y $na+c$. Coinciden exactamente cuando $ma+b=na+c$. Además, al sustituir $a+h$ en la primera regla, su diferencia respecto de la altura $ma+b$ es mh, cuyo valor absoluto $|m||h|$ puede hacerse tan pequeño como se quiera tomando $|h|$ pequeño; para la segunda ocurre lo mismo con $|n||h|$. Por ello la coincidencia de las alturas y del valor asignado en a permite un enlace sin salto. Este argumento se limita a las reglas afines declaradas y mantiene separada la condición de enlace de la unicidad de una función por tramos.

Inyectividad e inversión de funciones

La inyectividad se define por $f(a)=f(b)\Rightarrow a=b$. La sobreyectividad sobre B exige que para todo $y\in B$ exista $x\in A$ con $f(x)=y$. Si ambas se cumplen, cada $y\in B$ tiene una preimagen existente y única: la primera condición fija la unicidad y la segunda la existencia. Asignarle esa preimagen define $f^{-1}:B\to A$. Su construcción da inmediatamente $f^{-1}(f(x))=x$ y $f(f^{-1}(y))=y$ en los respectivos dominios.

Para demostrar la unicidad de la inversa, si otra regla $g:B\to A$ cumple la recuperación $f(g(y))=y$, entonces $g(y)$ debe ser la única preimagen de y y coincide con $f^{-1}(y)$ para cada y. Recíprocamente, si existe g con las dos recuperaciones, la igualdad $f(a)=f(b)$ permite aplicar g a ambos lados y obtener $a=b$; así f es inyectiva. Para cada $y\in B$, la entrada $g(y)$ satisface $f(g(y))=y$, así que f es sobreyectiva. Queda probada la equivalencia entre biyectividad y existencia de inversa con ambas recuperaciones.

Una función estrictamente creciente en un intervalo es inyectiva: si $a\neq b$, uno es menor que el otro y sus imágenes quedan estrictamente ordenadas. El caso decreciente proporciona la misma conclusión con el orden invertido. Al adoptar como codominio el recorrido, la sobreyectividad se cumple por definición y la inversa queda definida en él. Este argumento permite recorridos que tengan huecos; la existencia de la inversa depende de la correspondencia única de valores.

Para la gráfica de una función biyectiva real, $(x,y)\in G_f$ equivale a $y=f(x)$. Por las recuperaciones, esto equivale a $x=f^{-1}(y)$ y, por tanto, a $(y,x)\in G_{f^{-1}}$. El intercambio de coordenadas es la reflexión en la recta $y=x$: el punto medio de (x,y) y (y,x) pertenece a esa recta y su diferencia es perpendicular a su director $(1,1)$. Así se justifica la representación gráfica de la inversión.

Datos finitos y alcance de un modelo

Para un dato (x_i,y_i) y un modelo m definido en esa entrada, el residuo se define como $r_i=y_i-m(x_i)$. Se cumple $r_i=0$ exactamente cuando el modelo reproduce el dato. Reproducir toda la muestra equivale a que esa igualdad se cumpla en cada una de sus entradas. La definición del residuo, por sí sola, describe una diferencia de valores y conserva las unidades de la magnitud de salida.

Si una regla p reproduce los datos en $x_1,\dots,x_n$, consideremos $q(x)=p(x)+k\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)$ en un dominio común que contenga esas entradas. Para cada entrada observada x_j, el producto contiene

el factor $x_j - x_j = 0$ y por tanto $q(x_j) = p(x_j) = y_j$, cualquiera sea el real k. En otras entradas el producto puede ser distinto de cero y las predicciones pueden diferir. Esta construcción prueba que una muestra finita compatible con una regla deja libertad para otras reglas en un dominio más amplio. Una hipótesis adicional sobre la familia de modelos puede reducir esa libertad; su justificación forma parte de la interpretación del fenómeno.

Tasa constante y reconstrucción afín

La regla afín $f(x) = mx+b$ es una definición de familia funcional, con parámetros fijos y conjuntos declarados. Sustituir v y u y restar da $f(v)-f(u) = mv+b-mu-b = m(v-u)$. Para $v \neq u$, dividir por $v-u$ proporciona la pendiente. Recíprocamente, si una asignación tiene cociente de cambio m entre cualquier par de entradas distintas, fijar una entrada u produce $f(x) = mx + f(u) - mu$ para las demás entradas y también para u. Esta afirmación supone un dominio con al menos dos entradas para determinar la pendiente de manera única.

Dos pares $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ con $x_1 \neq x_2$ obligan a $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$ y $b = y_1 - mx_1$. Esos valores, al sustituirse, reproducen ambos pares, lo que prueba existencia y unicidad dentro de la familia afín. Una tabla adicional se contrasta sustituyendo sus entradas. La compatibilidad de una tabla finita deja abierta la elección de otras familias fuera de esas entradas, como se demostró en «Datos finitos y alcance de un modelo».

Si $u < v$, el factor $v - u$ es positivo. La identidad de cambios da crecimiento para $m > 0$, decrecimiento para $m < 0$ y constancia para $m = 0$. Sustituir cero produce b cuando la entrada está admitida. Resolver $mx + b = 0$, para $m \neq 0$, da $x = -b/m$ por operaciones reversibles. En un dominio restringido, esa entrada pertenece a los ceros precisamente cuando está admitida. De igual modo, $y = mx + b$ equivale a $x = (y - b)/m$; las dos sustituciones verifican la recuperación en los conjuntos correspondientes. Las unidades de m provienen del cociente entre las unidades de salida y de entrada.

Diferencias afines e intersecciones

Sean $f(x) = m_1x+b_1$ y $g(x) = m_2x+b_2$ en un dominio común. Por distributividad, $f(x)-g(x) = (m_1 - m_2)x + b_1 - b_2$. Si $m_1 \neq m_2$, la igualdad de imágenes exige y admite la única abscisa $(b_2-b_1)/(m_1-m_2)$ en las rectas completas. Sustituirla en cualquiera de las reglas da la ordenada común. Para gráficas restringidas, la intersección existe exactamente cuando esa abscisa pertenece a ambos dominios.

Si $m_1 = m_2$, la diferencia es la constante $b_1 - b_2$. Cuando también $b_1 = b_2$, coinciden las asignaciones en cada entrada común; la igualdad de funciones requiere además los conjuntos declarados según la convención de la obra. Cuando $b_1 \neq b_2$, las imágenes difieren en todas las entradas. El orden se expresa por el signo de la diferencia porque el orden real es compatible con sumar el mismo número. Una comparación sobre enteros se obtiene intersectando su conjunto solución real con los enteros del dominio: esta es la definición del problema restringido y justifica los umbrales entre pedidos consecutivos.

Cuadrados completos y parámetros de parábolas

La función cuadrática se define mediante $q(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$. La identidad

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = ax^2 + bx + c$$

se verifica expandiendo el cuadrado; los denominadores existen por la hipótesis sobre a. Escribir $h = -b/(2a)$ y $k = c - b^2/(4a)$ produce $q(x) = a(x-h)^2 + k$. Sustituir $h+d$ y $h-d$ da en ambos casos $ad^2 + k$, lo que demuestra la simetría. La identidad $q(h+d) - k = ad^2$ expresa la separación vertical y explica el efecto del factor a manteniendo fijos h, k.

El cuadrado real es no negativo y se anula exactamente en cero. Por tanto, con dominio real completo, $a > 0$ da mínimo k y $a < 0$ da máximo k, ambos alcanzados en h. Cada $y \geq k$ en el primer caso se alcanza con $x = h + \sqrt{(y-k)/a}$; en el segundo, cada $y \leq k$ se alcanza con la misma fórmula, cuyo radicando vuelve a ser no negativo. Estas sustituciones demuestran los recorridos completos.

Para justificar la variación, sean $u < v$. Restar imágenes da

$$q(v) - q(u) = a(v-u)(u+v-2h).$$

Si $u < v \leq h$, el último factor es estrictamente negativo. Si $h \leq u < v$, es estrictamente positivo. El signo de a proporciona las cuatro afirmaciones de variación de la tabla. Las conclusiones se restringen a las entradas del dominio cuando este es menor que $\mathbb{R}$. En una familia donde se mantienen b, c y cambia a, también cambian h, k según sus fórmulas; el caso $a = 0$ se estudia directamente como regla afín.

Raíces, signos y contacto de una parábola

De la forma canónica y $k = -(b^2 - 4ac)/(4a)$ se obtiene que $q(x) = 0$ equivale a $(2ax + b)^2 = \Delta$, donde $\Delta = b^2 - 4ac$. Para $\Delta > 0$, la raíz principal positiva da dos valores distintos de $2ax + b$ y, por $a \neq 0$, dos entradas distintas. Para $\Delta = 0$, ambas coinciden. Para $\Delta < 0$, la positividad de los cuadrados excluye una solución real. Despejar proporciona las raíces de la tabla.

Con raíces reales, la suma es $r_1 + r_2 = -b/a$ y el producto $r_1 r_2 = c/a$, como se comprueba con las fórmulas. Expandir $a(x-r_1)(x-r_2)$ recupera entonces ax^2+bx+c, incluida la raíz repetida. Si $r_1 < r_2$, fuera del intervalo ambos factores tienen el mismo signo y dentro tienen signos opuestos. Multiplicar por a prueba la regla de signos. Con raíz doble, la expresión es $a(x-r)^2$ y conserva el signo de a en las entradas distintas de r.

Para una recta $\ell(x) = mx + n$, la diferencia $q - \ell = ax^2 + (b-m)x + c - n$ conserva coeficiente principal $a \neq 0$. Sus ceros son exactamente las abscisas donde coinciden las alturas y su signo compara las imágenes, por compatibilidad del orden. Si tiene una raíz doble r, su factorización es $a(x-r)^2$: hay un único encuentro y la diferencia conserva el signo a ambos lados.

La relación con las secantes permite justificar el contacto. De $q(x) = a(x-h)^2 + k$, el cociente $(q(r+s) - q(r))/s$, para $s \neq 0$, vale $2a(r-h) + as$. Al aproximarse s a cero, su diferencia respecto de $2a(r-h)$ tiene valor absoluto $|a||s|$, que se hace tan pequeño como se quiera. La recta por $(r, q(r))$ con esa pendiente satisface exactamente $q(x) - \ell(x) = a(x-r)^2$. Así se justifica el término tangente mediante el contacto y la aproximación de secantes, sin presuponer un curso de derivadas.

Distancia al eje y optimización restringida

En $q(x) = a(x-h)^2 + k$, comparar imágenes equivale a comparar distancias al eje, conservando el orden si $a > 0$ e invirtiéndolo si $a < 0$. En un intervalo cerrado $[L, U]$, la menor distancia a h se alcanza en h si $L \leq h \leq U$, en L si $h < L$ y en U si $h > U$. La mayor distancia se alcanza en algún extremo: para $x \in [L, U]$, se tiene $|x-h| \leq \max(|L-h|, |U-h|)$, como se verifica separando las posiciones relativas a h. De estas dos comparaciones resulta la lista de candidatos de la tabla.

En un intervalo de enteros, los candidatos de menor distancia son el mayor entero situado por debajo de h y el menor situado por encima, cuando están admitidos. Si el intervalo queda

por completo a un lado, el extremo entero más cercano minimiza la distancia. Cuando ambos candidatos están a la misma distancia, producen la misma imagen. El extremo opuesto de la función en un conjunto finito se encuentra entre los enteros de mayor distancia, situados en los límites del conjunto. Estos argumentos justifican la comparación discreta y sus restricciones.

Máximo y mínimo se definen por una imagen alcanzada que domina a las demás en el orden correspondiente. Una cota situada en un extremo excluido puede no alcanzarse. Para demostrar la falta de extremo basta construir para cada entrada otra admisible con imagen mayor o menor, como se hace en los problemas. El hecho de que el dominio sea abierto, por sí solo, no decide la existencia de extremos: el vértice puede estar en su interior y alcanzar uno de ellos.

Reconstrucción cuadrática y diferencias regulares

Dados un vértice (h, k) y un punto (x_0, y_0) con $x_0 \neq h$, sustituir en $a(x-h)^2 + k$ determina el único coeficiente $a = (y_0 - k)/(x_0 - h)^2$. Se comprueba la condición cuadrática $a \neq 0$. Con dos raíces declaradas, la forma $a(x - r_1)(x - r_2)$ determina del mismo modo el factor a partir de un punto cuyo producto de factores sea distinto de cero. Si se repite el vértice o una raíz como condición adicional, esa sustitución puede ser redundante o incompatible; la división solo se realiza con denominador distinto de cero.

Para tres pares (x_i, y_i) con abscisas distintas, la existencia de un polinomio de grado a lo sumo dos queda demostrada por

$$p(x) = \sum_{i=1}^{3} y_i \prod_{\substack{1 \le j \le 3 \\ j \neq i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Los denominadores existen. En $x = x_i$, el término correspondiente vale y_i y los otros contienen un factor cero, por lo que la regla reproduce las tres condiciones. Cada sumando tiene grado a lo sumo dos. Si otra regla de ese grado reprodujera los datos, la diferencia tendría tres raíces distintas. Un polinomio de grado a lo sumo dos con tres raíces distintas es el polinomio cero, por el teorema de raíces demostrado en «División de polinomios, restos y multiplicidad». Así se obtiene unicidad; el coeficiente de x^2 puede ser cero.

Expandir $q(x + d) - q(x)$ da $2adx + ad^2 + bd$. Restar esa expresión de la misma primera diferencia iniciada en $x + d$ da $2ad^2$. Se requiere un paso común para interpretar la segunda diferencia de esta forma; con $d \neq 0$ se recupera a dividiendo por $2d^2$. Recíprocamente, en una tabla finita equiespaciada con segunda diferencia constante, el polinomio ajustado a las primeras tres entradas reproduce las siguientes por la recurrencia $y_{i+2} = 2y_{i+1} - y_i + K$, donde K es esa constante. La prueba avanza por inducción. La compatibilidad se afirma en las entradas de la tabla; la extensión del modelo requiere una hipótesis sobre la regla, como se explica en «Datos finitos y alcance de un modelo».

Coordenadas temporales y eliminación de un parámetro

Una gráfica temporal de altura es por definición el conjunto de pares $(t, y(t))$. Una trayectoria paramétrica es el conjunto de pares $(x(t), y(t))$ para los instantes admitidos. Los nombres de las variables y sus unidades especifican las cantidades representadas. El mismo instante determina simultáneamente ambas coordenadas de una posición.

Si $x(t) = ut + x_0$ con $u \neq 0$, la recuperación afín da $t = (x - x_0)/u$. Para cada instante admisible, sustituir esta expresión en $y(t)$ conserva la posición; recíprocamente, para cada x de la imagen del dominio temporal, esa fórmula recupera un instante admisible y la misma altura. Las dos inclusiones prueban la igualdad entre la trayectoria paramétrica y la gráfica espacial obtenida. En un intervalo temporal cerrado, sus abscisas quedan entre los valores de x en los extremos, con orden determinado por el signo de u. Para $u = 0$, la coordenada horizontal es constante y se mantiene la representación paramétrica. En los ejemplos del capítulo, sustituir una función afín invertible en una expresión cuadrática produce la trayectoria espacial y transporta exactamente el intervalo de observación.

Ceros polinómicos, multiplicidad y signo

Un polinomio real es una suma finita de potencias enteras no negativas con coeficientes reales; las operaciones que lo forman están definidas en toda la recta. La multiplicidad de un cero r es el entero $m \geq 1$ de la factorización $P(x) = (x-r)^m S(x)$ con $S(r) \neq 0$. Es una definición; su existencia para un cero de un polinomio distinto de cero procede de dividir repetidamente por $x-r$. Cada división exacta disminuye el grado y el proceso termina.

Para justificar la conservación local del signo de S, escribimos $S(x) - S(r) = (x-r)T(x)$. En $|x-r| \leq 1$, se tiene $|x| \leq |r| + 1$. Si $T(x) = \sum b_k x^k$, entonces $|T(x)| \leq C = \sum |b_k|(|r|+1)^k$. Cuando $C > 0$, basta imponer $|x-r| < \min(1, |S(r)|/(2C))$ para obtener $|S(x)-S(r)| < |S(r)|/2$. Cuando $C = 0$, S es constante. En ambos casos S conserva el signo de $S(r)$ en un entorno. El factor $(x-r)^m$ tiene signo positivo a ambos lados si m es par y cambia de signo si es impar. Multiplicar ambos signos prueba la regla de contacto o cruce.

En un intervalo sin ceros de los factores, los signos de estos determinan el signo del producto por las reglas del orden. Para polinomios factorizados en factores lineales y cuadráticos positivos, estas reglas dan directamente las tablas de signos usadas en el capítulo. La cota general de ceros se obtiene por división: cada cero distinto permite extraer un factor lineal, y cada multiplicidad consume ese número de grados. Si se extrajeran más de n factores de un polinomio de grado n, la igualdad de grados sería imposible. Esta afirmación se refiere a polinomios distintos del polinomio cero.

Dominancia polinómica y transformación de gráficas

Sea $P(x) = a_n x^n + \sum_{k<n} a_k x^k$, $n \geq 1$, $a_n \neq 0$. Para $|x| \geq 1$, la desigualdad triangular da

$$\left| \frac{P(x)}{x^n} - a_n \right| \leq \sum_{k<n} \frac{|a_k|}{|x|^{n-k}} \leq \frac{S}{|x|}, \qquad S = \sum_{k<n} |a_k|.$$

Si $|x| > \max(1, 2S/|a_n|)$, el error es menor que $|a_n|/2$. Por ello el cociente $P(x)/x^n$ tiene el signo de a_n y magnitud mayor que $|a_n|/2$. Multiplicar por x^n demuestra la afirmación sobre signo y magnitud. Para cualquier altura $M > 0$, añadir la condición $|x| > (2M/|a_n|)^{1/n}$ garantiza $|P(x)| > M$. La paridad de n y el signo del coeficiente principal fijan las dos colas.

Para $g(x) = Af(B(x-h)) + k$, con $A, B \neq 0$, resolver $u = B(x-h)$ da $x = h + u/B$. La altura correspondiente es $k + Af(u)$: se prueba así la transformación de cada punto. El dominio es exactamente el conjunto de entradas para las que $B(x-h) \in D_f$, porque esa condición permite evaluar cada operación de la regla. Cuando $A = 0$ y se conserva la expresión como evaluación compuesta, se conserva también esa condición de dominio; una extensión constante requiere declarar su propio dominio. Estos hechos dependen de sustitución y de la definición de función, con las convenciones explícitas del capítulo 16.

Cancelación, extensión y polos racionales

El cociente racional se define en las entradas donde su denominador tiene valor distinto de cero. En ese dominio, $P(x)/Q(x) = 0$ equivale a $P(x) = 0$. Para $A(x)Q(x) \neq 0$, multiplicar por el inverso de $A(x)$ prueba $A(x)P(x)/[A(x)Q(x)] = P(x)/Q(x)$. La identidad se afirma sobre el dominio original.

Sea a una exclusión original y R/S la regla reducida, con $S(a) \neq 0$. Los polinomios cumplen $R(x)-R(a) = (x-a)U(x)$ y $S(x)-S(a) = (x-a)V(x)$. En un entorno de a, U, V están acotados por sumas de los valores absolutos de sus coeficientes y potencias de $|a|+1$. Reduciendo el entorno se garantiza $|S(x)| \geq |S(a)|/2$. Además,

$$\frac{R(x)}{S(x)} - \frac{R(a)}{S(a)} = (x-a)\frac{U(x)S(a) - R(a)V(x)}{S(x)S(a)}.$$

La fracción final tiene una cota finita K en ese entorno, de modo que la diferencia es a lo sumo $K|x-a|$. Por tanto puede hacerse menor que cualquier tolerancia. Esta desigualdad justifica la extensión con valor $R(a)/S(a)$ y el punto abierto de la gráfica original, incluso cuando el valor extendido es cero.

Para un polo reducido $R(x)/[(x-a)^m S(x)]$ con $R(a)S(a) \neq 0$, las mismas cotas aseguran en un entorno $|R(x)| \geq |R(a)|/2$ y $0 < |S(x)| \leq C$ para algún $C > 0$. Así,

$$\left|\frac{R(x)}{(x-a)^m S(x)}\right| \geq \frac{|R(a)|}{2C|x-a|^m}.$$

Para superar una altura $M > 0$, basta $0 < |x-a| < (|R(a)|/(2CM))^{1/m}$ dentro de ese entorno. Los signos de R, S permanecen fijos y el factor de potencia par o impar decide los signos laterales. Estas condiciones constituyen la afirmación precisa de asíntota vertical usada en el capítulo. El signo de un cociente definido coincide con el producto de los signos de numerador y denominador, porque un real y su inverso tienen el mismo signo.

Asíntotas racionales y cotas del resto

Una asíntota horizontal u oblicua en una cola se define por el error vertical respecto de la recta: para cada $\varepsilon > 0$ existe un umbral que garantiza error menor que ε en todas las entradas de esa cola pertenecientes al dominio. La división polinómica, cuyo algoritmo fue justificado en el apéndice algebraico, da $P = QS + R$ con resto de grado menor que el de Q o resto cero. Dividir en $Q(x) \neq 0$ prueba $P/Q - S = R/Q$.

Sea Q de grado $d \geq 1$ y coeficiente principal b. Por dominancia, para $|x|$ suficientemente grande, $|Q(x)| \geq |b||x|^d/2$. Si R tiene grado $r < d$ y C es la suma de los valores absolutos de sus coeficientes, para $|x| \geq 1$ se cumple $|R(x)| \leq C|x|^r$. Por tanto

$$\left|\frac{R(x)}{Q(x)}\right| \leq \frac{2C}{|b||x|^{d-r}} \leq \frac{2C}{|b||x|}.$$

Además del umbral de dominancia, tomar $|x| > 2C/(|b|\varepsilon)$ garantiza la tolerancia. Si $R = 0$, el error es idénticamente cero en el dominio. Si Q es constante, la división tiene resto cero y el cociente coincide exactamente con el polinomio S.

Cuando el numerador tiene menor grado, $S = 0$; para igual grado, S es el cociente de los coeficientes principales; para diferencia de grado uno, S es afín de pendiente distinta de cero. Estos casos prueban las tres reglas de asíntotas del capítulo. Para diferencia mayor, la misma cota demuestra aproximación al cociente polinómico. El error puede anularse en entradas finitas y satisfacer a la vez la condición en las colas; el ejemplo $x/(x^2+1)$ lo comprueba.

Raíces, dominios y orden funcional

Se adoptan las definiciones de raíz principal par y raíz impar construidas en el capítulo de potencias. La existencia y unicidad fueron justificadas mediante orden y completitud. Si $u < v$ son no negativos y sus raíces pares fueran iguales o estuvieran en el orden opuesto, elevarlas a la potencia correspondiente daría $u \geq v$, contradicción. El mismo argumento se aplica en toda la recta para potencias impares, que son estrictamente crecientes. Se prueba así la monotonía de las raíces.

La equivalencia $y = \sqrt[n]{u} \iff y \geq 0,\ y^n = u$ para n par expresa la definición con su dominio $u \geq 0$. Para n impar basta $y^n = u$, con u, y reales. Una raíz par tiene valor positivo exactamente cuando su argumento es positivo, de modo que su recíproca exige argumento positivo; una raíz impar se anula exactamente cuando se anula el argumento. Estas observaciones prueban las restricciones de denominadores.

Para todo real u, el número $|u|$ es no negativo y satisface $|u|^2 = u^2$. La unicidad de la raíz no negativa prueba $\sqrt{u^2} = |u|$. Todas estas afirmaciones se aplican a los argumentos efectivamente definidos de una expresión compuesta.

Equivalencias radicales y evaluación compuesta

Si $\sqrt{A(x)} = B(x)$, se tiene $A(x) \geq 0$, $B(x) \geq 0$ y al cuadrar resulta $A(x) = B(x)^2$. Recíprocamente, si estas tres condiciones valen en una entrada donde se evalúan las expresiones, $B(x)$ es el número no negativo cuyo cuadrado es $A(x)$; por unicidad, coincide con su raíz principal. Esta equivalencia prueba el procedimiento de aislar raíces y conservar signos.

Para $u, v \geq 0$, $u^2 = v^2$ da $(u - v)(u + v) = 0$. Si $u + v > 0$ resulta $u = v$; si $u + v = 0$, la no negatividad obliga a $u = v = 0$. La implicación inversa procede de elevar una igualdad al cuadrado. Para racionalizar, multiplicar $(\sqrt{u} - \sqrt{v})(\sqrt{u} + \sqrt{v})$ da $u - v$. Bajo $u, v \geq 0$ y $u + v > 0$, el segundo factor es positivo y se puede dividir por él.

La composición $f \circ g$ asigna a cada entrada admisible la imagen por f de su imagen por g. Precisamente las condiciones $x \in D_g$ y $g(x) \in D_f$ hacen posibles las dos evaluaciones, y cada una tiene salida única. Así se demuestra la fórmula del dominio compuesto. El orden de las condiciones conserva la procedencia de cada restricción, incluida la de una fórmula intermedia que se simplifique después.

Modelos radicales y aproximación afín con error

Para un cuadrado de lado $l \geq 0$, la relación de medida es $A = l^2$. La raíz principal proporciona $l = \sqrt{A}$; la elección de signo procede de la longitud. Las condiciones algebraicas de una regla y las condiciones de las magnitudes se satisfacen simultáneamente, por lo que el dominio del modelo es su intersección.

Si $u, v \geq c > 0$, racionalizar y usar la monotonía de la raíz produce

$$|\sqrt{u} - \sqrt{v}| = \frac{|u - v|}{\sqrt{u} + \sqrt{v}} \leq \frac{|u - v|}{2\sqrt{c}}.$$

Para aproximar en torno de a^2 con $a > 0$, ponemos $s = \sqrt{a^2 + h}$ en el dominio $a^2 + h \geq 0$. La identidad $s - a = h/(s + a)$ es válida porque $s + a > 0$. Restar $h/(2a)$ y sustituir de nuevo la diferencia $s - a$ da

$$s - a - \frac{h}{2a} = -\frac{h^2}{2a(s + a)^2}.$$

La aproximación afín $a + h/(2a)$ queda por encima de la raíz y la identidad expresa su error exacto. Para $a = 2$, $|h| \leq 1$ implica $s \geq \sqrt{3} > 1$, de modo que el error es a lo sumo $h^2/36$. Para $a = 3$, $|h| \leq 1$ implica $s \geq \sqrt{8} > 2$, y el error es a lo sumo $h^2/150$. Ambas cotas conservan los extremos del intervalo y se obtienen con álgebra y orden.

Construcción de las potencias reales

Si $A_{n+1} = qA_n$ para $n \geq 0$, la inducción prueba $A_n = A_0 q^n$: vale en cero, y multiplicar la fórmula del paso n por q produce la del paso siguiente. Para $A_0, q > 0$, el cociente consecutivo es q y la tasa relativa es $(A_{n+1} - A_n)/A_n = q - 1$. Esto prueba las fórmulas del factor y la tasa. La extensión a tiempo real exige la ley multiplicativa también entre períodos; la construcción siguiente proporciona esa extensión matemática.

Para $b > 1$, partimos de las potencias racionales ya justificadas. Escribimos $d_n = b^{1/n} - 1 > 0$. Para $d \geq 0$, la desigualdad $(1+d)^n \geq 1 + nd$ se prueba por inducción: multiplicar $1 + nd$ por $1 + d$ da $1 + (n+1)d + nd^2 \geq 1 + (n+1)d$. Aplicada a $d = d_n$, da $b = (1+d_n)^n \geq 1 + nd_n$, así que $0 < d_n \leq (b-1)/n$. En particular, $b^{1/n}$ se acerca a uno. Definimos $F(x) = \sup\{b^r : r \in \mathbb{Q}, r \leq x\}$. El conjunto es no vacío y acotado por potencias enteras que encierran x, y $F(x) > 0$. Para k entero tal que $k \leq nx < k + 1$, el orden racional da

$$b^{k/n} \leq F(x) \leq b^{(k+1)/n}.$$

Si x es racional, el propio b^x está en el conjunto y es cota superior, por lo que $F(x) = b^x$. Para x, y reales, escogemos $r = k/n \leq x < r + 1/n$ y $s = l/n \leq y < s + 1/n$. Tanto $F(x)F(y)$ como $F(x+y)$ pertenecen al intervalo $[b^{r+s}, b^{r+s+2/n}]$. El cociente de cualesquiera dos números positivos de ese intervalo está entre $b^{-2/n}$ y $b^{2/n}$. Como $b^{2/n} = (1+d_n)^2$ se acerca a uno, las dos cantidades fijas deben coincidir. Se obtiene $F(x+y) = F(x)F(y)$. En adelante escribimos $b^x = F(x)$.

La igualdad $b^0 = 1$ procede de la concordancia racional. Al poner $y = -x$ en la ley de suma obtenemos $b^{-x} = 1/b^x$ y, por sustitución, la ley del cociente. Si $h > 0$, existe un racional r con $0 < r < h$, y $b^h \geq b^r > 1$. Por tanto $b^{x+h} = b^x b^h > b^x$, lo que prueba crecimiento estricto.

Para $|h| \leq 1/n$, el orden y el recíproco dan $|b^h - 1| \leq b^{1/n} - 1 \leq (b-1)/n$. Así,

$$|b^{x+h} - b^x| \leq b^x \frac{b-1}{n}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, escogemos un entero $n > b^x(b-1)/\varepsilon$ y tomamos $\delta = 1/n$. Esto prueba continuidad en cada real x mediante una cota explícita. Para $0 < b < 1$, definimos $b^x = c^{-x}$ con $c = 1/b > 1$. La sustitución prueba las mismas leyes y continuidad, y convierte crecimiento estricto de c^x en decrecimiento estricto de b^x. Para $b = 1$, la regla constante satisface las leyes y es continua.

Para completar el recorrido de una base $b > 1$, Bernoulli da $b^N \geq 1 + N(b-1)$ para enteros positivos N. Por tanto las potencias positivas superan cualquier cota, y sus recíprocos se acercan a cero. Dado $y > 0$, el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} : b^x \leq y\}$ es no vacío y acotado superiormente. Sea $a = \sup S$. Si $b^a < y$, la continuidad permite elegir $h > 0$ con $b^{a+h} < y$, contradiciendo la cota superior a. Si $b^a > y$, permite elegir $h > 0$ con $b^{a-h} > y$; la monotonía haría de $a - h$ una cota superior de S, contradiciendo que a es su supremo. Luego $b^a = y$. La monotonía estricta asegura unicidad. Para $0 < b < 1$, la sustitución c^{-x} conserva el recorrido $(0, \infty)$ y la unicidad.

Finalmente, para $b > 0$ y u real, la ley de suma y la unicidad de raíces positivas prueban $(b^u)^v = b^{uv}$ cuando v es racional. Si v es real, tomamos racionales v_n que se acercan a v. La continuidad de la exponencial de base b^u y de la regla $t \mapsto b^{ut}$ hace coincidir sus valores en v, pues coinciden en cada v_n. Cuando $b^u = 1$, la regla constante verifica también la identidad. Quedan así demostradas las leyes para exponentes reales y las condiciones de orden y recorrido usadas en el capítulo.

Logaritmos, inversión y gráficas

Para base $b > 0$, $b \neq 1$, la exponencial es una biyección de $\mathbb{R}$ sobre $(0, \infty)$. Su inversa se define por $\log_b y = x$ exactamente cuando $b^x = y$. Existencia, unicidad, dominio positivo y recorrido real proceden de esa biyección. Las identidades $\log_b(b^x) = x$ y $b^{\log_b y} = y$ expresan las dos composiciones inversas, en sus respectivos dominios. De $b^0 = 1$ y $b^1 = b$ se obtienen $\log_b 1 = 0$ y $\log_b b = 1$.

Un punto (x, b^x) de la exponencial produce el punto (b^x, x) de la inversa. Intercambiar las coordenadas es la reflexión geométrica respecto de $y = x$. Si $b > 1$ y $0 < u < v$, los exponentes $p = \log_b u$, $q = \log_b v$ satisfacen $b^p < b^q$ y, por crecimiento estricto, $p < q$. Para $0 < b < 1$ la misma comparación produce $p > q$. Se prueban así los dos sentidos de monotonía.

Para $b > 1$, dado $M > 0$, si $0 < y < b^{-M}$ entonces $\log_b y < -M$. Esto justifica la asíntota vertical del logaritmo hacia el extremo positivo del dominio en cero. Si $y > b^M$, se cumple $\log_b y > M$. Para base entre cero y uno, el cambio $\log_b y = -\log_{1/b} y$ invierte estos comportamientos. Los desplazamientos y cambios de escala de una gráfica se obtienen por sustitución de coordenadas, como en el capítulo de funciones.

Para precisar la base natural, escribimos $0! = 1$ y $k! = 1 \cdot 2 \cdots k$ para un entero $k \geq 1$. Sean $E_n = \sum_{k=0}^{n} 1/k!$. Las sumas crecen estrictamente porque cada término añadido es positivo. Para $k \geq 2$, $k! \geq 2^{k-1}$; por comparación con la suma geométrica, $E_n < 3$. La completitud proporciona $e = \sup\{E_n : n \geq 1\}$. Como $E_2 = 5/2$, se tiene $e > 2$. Para $n \geq 1$ y $j \geq 1$,

$$\frac{1}{(n+j)!} \leq \frac{1}{n!(n+1)^j}.$$

La suma geométrica de las cotas da $0 < e - E_n \leq 1/(n!n)$. Esta desigualdad prueba que E_n tiende a e. Con $n = 2$ ya da $e \leq 11/4 < 3$. Con $n = 9$, las fracciones exactas E_9 y $E_9 + 1/(9!\,9)$ están entre 2,718275 y 2,718285, lo que justifica el redondeo a cinco decimales del capítulo. Puesto que $e > 1$, la construcción anterior proporciona e^x y su inversa $\ln y = \log_e y$ con todas las propiedades de una base válida. Esta construcción fija la base y la notación; las propiedades diferenciales de la exponencial natural pertenecen al desarrollo posterior del cálculo.

Leyes logarítmicas y conservación del dominio

Sean $b > 0$, $b \neq 1$, y $u, v > 0$. Ponemos $p = \log_b u$, $q = \log_b v$. Entonces $u = b^p$, $v = b^q$ y $uv = b^{p+q}$. La definición inversa da $\log_b(uv) = p + q$. El cociente satisface $u/v = b^{p-q}$ y por ello $\log_b(u/v) = p - q$. Para r real, la ley de potencia de potencia da $u^r = b^{pr}$ y $\log_b(u^r) = rp$. Estos argumentos prueban las tres propiedades en los dominios declarados.

Si $z \neq 0$, su valor absoluto es positivo y $z^2 = |z|^2$. La propiedad de potencia aplicada a $|z|$ prueba $\log_b(z^2) = 2 \log_b |z|$. Cada expansión conserva así el dominio $z \neq 0$ de la expresión original.

Para otra base válida c y $y > 0$, la igualdad $y = b^{\log_b y}$ da $\log_c y = (\log_b y)(\log_c b)$. El denominador $\log_c b$ tiene valor distinto de cero: de ser cero, la inversa daría $b = c^0 = 1$. Dividir produce la fórmula de cambio de base. Las leyes se refieren a productos, cocientes y potencias de argumentos positivos; los ejemplos de sumas del capítulo establecen su valor directamente y permiten comprobar el alcance de cada fórmula.

Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Para una base válida, la monotonía estricta implica inyectividad de la exponencial y del logaritmo. Por ello $b^U = b^V$ equivale a $U = V$ cuando los exponentes son reales definidos. También $\log_b U = \log_b V$ equivale a $U = V$ en $U, V > 0$. La restricción de dominio precede a la aplicación de estas equivalencias.

La sustitución $u = b^x$ recorre exactamente todos los reales positivos y asigna a cada uno un único exponente $x = \log_b u$. Por tanto resolver una ecuación algebraica en u y seleccionar sus raíces positivas produce exactamente las soluciones de la ecuación exponencial que se transformó mediante identidades. Las condiciones intermedias conservan su papel al recuperar la variable original.

Si $A_0, K, T > 0$ y $q > 0$, $q \neq 1$, dividir $A_0 q^{t/T} = K$ por A_0 da $q^{t/T} = K/A_0 > 0$. Aplicar la inversa produce $t/T = \log_q(K/A_0)$, y multiplicar por T da la fórmula del tiempo. Si el contexto exige $t \geq 0$ o tiempos enteros, se intersecta la respuesta con ese dominio. Para desigualdades estrictas en tiempos enteros, el primer entero admisible es el menor entero estrictamente mayor que el umbral real; cuando el umbral es entero, el paso siguiente es necesario.

Orden exponencial y logarítmico

Si $b > 1$, el crecimiento estricto de b^x y de su inversa conserva todas las comparaciones: $u < v$ equivale a $b^u < b^v$, y para $u, v > 0$ equivale a $\log_b u < \log_b v$. Si $0 < b < 1$, las dos reglas son estrictamente decrecientes y cambian el sentido de las comparaciones. La equivalencia inversa se justifica por la misma monotonía: un orden opuesto o una igualdad de entradas produciría el orden opuesto o una igualdad de salidas.

Puesto que $\log_b(b^c) = c$, comparar $\log_b U$ con c equivale a compararlo con $\log_b(b^c)$. Para $U > 0$ resulta $\log_b U \leq c \iff U \leq b^c$ si $b > 1$ y $\log_b U \leq c \iff U \geq b^c$ si $0 < b < 1$. Se incluyen las igualdades gracias a la inyectividad. Las condiciones de argumento y las restricciones contextuales se conservan al resolver cada desigualdad.

Modelos multiplicativos y escalas logarítmicas

Si $A(t) = Cq^t$ con $C, q > 0$, el cociente de dos mediciones en tiempos distintos satisface $A(t_2)/A(t_1) = q^{t_2 - t_1}$. Para $t_2 > t_1$, elevar a $1/(t_2 - t_1)$ recupera el único factor positivo q. Después, $C = A(t_1)q^{-t_1}$ determina la cantidad inicial del modelo. Dos datos positivos fijan esos parámetros dentro de la familia elegida. La valoración de la familia exige el contraste con la situación y con datos adicionales.

Para $A(t) = A_0 q^{t/T}$ con $A_0, T > 0$, la duplicación pide $q^{t/T} = 2$ y da $T_2 = T \log_q 2$, positivo si $q > 1$. La semirreducción pide $q^{t/T} = 1/2$ y da $T_{1/2} = T \log_q(1/2)$, positivo si $0 < q < 1$. La ley de suma muestra además que el factor de cambio durante cualquier intervalo de duración s es $A(t + s)/A(t) = q^{s/T}$; depende de la duración, mientras el modelo sea aplicable.

Con referencia fija $I_0 > 0$, base válida y cantidades $I_1, I_2 > 0$ expresadas en la misma unidad, la diferencia de niveles cumple

$$k \log_b(I_2/I_0) - k \log_b(I_1/I_0) = k \log_b(I_2/I_1).$$

La fórmula procede de la ley del cociente. La razón dentro del logaritmo es adimensional. Un factor fijo entre intensidades corresponde así a una diferencia fija de niveles. El signo de esa diferencia depende de k, de la base y del factor, conforme a la monotonía ya probada.

Continuidad y aproximación exponencial

Para cualquier $b > 0$, la ley de suma da $b^{x+h}/b^x = b^h$ y $b^{x+h} - b^x = b^x(b^h - 1)$. La construcción de las potencias reales ya demostró continuidad mediante una cota para base $b > 1$; el recíproco y el caso constante completan todas las bases positivas. Se conserva así un argumento de continuidad que usa orden, completitud y Bernoulli.

En base dos y para entero $n \geq 2$, el desarrollo binomial da $(1 + 1/n)^n > 1 + n/n = 2$: hay al menos un término adicional positivo. Por monotonía de la raíz, $2^{1/n} < 1 + 1/n$. Si $0 \leq h \leq 1/n$, entonces $0 \leq 2^h - 1 \leq 2^{1/n} - 1 < 1/n$. Si $-1/n \leq h < 0$, escribimos $u = 2^{-h} \geq 1$ y obtenemos $|2^h - 1| = (u - 1)/u \leq u - 1 < 1/n$. La misma prueba con $(1 + 2/n)^n > 3$ produce $|3^h - 1| < 2/n$.

Para $b > 1$ y $y > 0$, el crecimiento estricto da $b^r < y < b^s$ exactamente cuando $r < \log_b y < s$. Si $r = m/N$ y $s = k/N$ con entero $N > 0$, comparar $b^m < y^N < b^k$ es equivalente a la comparación original de cantidades positivas. En los ejemplos del capítulo, todos los términos de esta última comparación son enteros y se pueden contrastar sin redondeo. El punto medio de un intervalo abierto (r, s) tiene error menor que $(s - r)/2$ para cualquier número de ese intervalo.

Círculo, gráficas y periodicidad

La parametrización del círculo unitario asigna a cada giro real x el punto $(\cos x, \sin x)$. Sus coordenadas pertenecen a $[-1, 1]$ y cada altura o abscisa de ese intervalo aparece en el círculo. Esto prueba dominio real y recorrido de ambas funciones. La reflexión respecto del eje horizontal conserva la abscisa y cambia el signo de la ordenada, de donde $\cos(-x) = \cos x$ y $\sin(-x) = -\sin x$. Las vueltas enteras conservan el punto y prueban la repetición al sumar $2k\pi$. La media vuelta cambia ambas coordenadas de signo.

Para probar el período fundamental del seno, supongamos que $T > 0$ es un período. Al evaluar en cero resulta $\sin T = 0$; al evaluar en $\pi/2$ resulta $\sin(\pi/2 + T) = 1$, es decir, $\cos T = 1$. El punto del círculo es entonces $(1, 0)$, de modo que $T = 2k\pi$ con k entero positivo. El menor candidato, 2π, es efectivamente un período. Para el coseno, evaluar en cero ya da $\cos T = 1$ y conduce a la misma conclusión.

El cuadrado del seno conserva su valor bajo una media vuelta. Cualquier período positivo del cuadrado debe llevar el cero de la entrada cero a otro cero, así que debe ser $k\pi$; se prueba el período fundamental π. Para el cuadrado del coseno, evaluar en cero exige $\cos^2 T = 1$ y da también $T = k\pi$. Los extremos del diámetro horizontal prueban la caracterización de esas entradas.

La variación de las coordenadas se lee sobre las semicircunferencias: el seno crece estrictamente de $-\pi/2$ a $\pi/2$ y decrece de $\pi/2$ a $3\pi/2$; el coseno decrece de cero a π y crece de π a 2π. El giro recorre cada uno de esos arcos en orden. La proyección horizontal o vertical ordena sus puntos de manera estricta en los tramos indicados. Los extremos y ceros proceden de las intersecciones con los diámetros.

Parámetros de una oscilación

Sea $f(t) = d + a\sin(bt + c)$ con $a, b \neq 0$. El argumento afín recorre todos los reales cuando t recorre la recta, y el seno recorre $[-1, 1]$. Multiplicar ese intervalo por a y trasladarlo por d da $[d - |a|, d + |a|]$. El punto medio de los extremos es d y la distancia desde él a cualquiera de los extremos es $|a|$. Se prueban eje medio, amplitud y recorrido. El mismo argumento vale para coseno.

Si $T = 2\pi/|b|$, el incremento del argumento al sumar T es $bT = 2\pi$ o -2π. La periodicidad prueba que T es un período. Si $S > 0$ es cualquier período, restar d y dividir por a muestra que bS es un desplazamiento que conserva el seno para todos sus argumentos. El valor absoluto de ese desplazamiento debe ser un múltiplo positivo de 2π, por la prueba del período fundamental. Luego $S \geq 2\pi/|b|$ y la fórmula da el menor período. Para coseno se aplica su misma propiedad fundamental.

La factorización $bt + c = b(t + c/b)$ identifica $t_0 = -c/b$. El valor t_0 localiza argumento cero; el signo del coeficiente y la elección seno o coseno determinan la altura y el sentido de paso en esa entrada. Agregar $2k\pi$ a la fase conserva todos los valores por la identidad de vuelta completa. Las identidades de adición prueban además $\sin(\theta + \pi/2) = \cos\theta$ y $\cos(\theta - \pi/2) = \sin\theta$.

Una oscilación de período temporal T completa un ciclo durante T unidades de tiempo, por lo que realiza $1/T$ ciclos por unidad. Cada ciclo recorre 2π radianes. Multiplicar estas dos razones da $\nu = 1/T$ y $\omega = 2\pi\nu$. La cancelación de la unidad ciclo justifica la conversión. Para coeficiente temporal negativo, el valor absoluto mide la rapidez angular y su signo indica el sentido del giro.

Si $a = 0$ o $b = 0$, la regla es constante y todo $T > 0$ cumple $f(t+T) = f(t)$. Dado uno de esos períodos, su mitad es otro menor; por tanto el conjunto carece de mínimo. Este caso explica las condiciones de la fórmula para el período fundamental.

Datos y modelos periódicos

Para una sinusoide simple con extremos $m < M$, las igualdades $m = d - A$ y $M = d + A$, con $A > 0$, dan al sumar y restar $d = (M+m)/2$ y $A = (M-m)/2$. Un giro de media vuelta lleva un extremo al siguiente extremo opuesto; una vuelta completa lleva un máximo al máximo siguiente. Bajo la hipótesis de una sinusoide simple y extremos consecutivos, esos tiempos son $T/2$ y T, respectivamente.

En una rueda de radio $R > 0$ y centro de altura d, el vector vertical desde el centro al punto inferior es inicialmente $-R$ en la coordenada de altura. Después de un giro θ, esa coordenada relativa es $-R\cos\theta$. Si el giro es uniforme con período $T > 0$, $\theta = 2\pi t/T$ hasta un signo de sentido, que el coseno conserva por paridad. Al añadir la altura del centro se obtiene $h(t) = d - R\cos(2\pi t/T)$. El supuesto de giro uniforme fija la relación entre tiempo y ángulo.

Para cada observación (t_i, y_i), el residuo definido como $r_i = y_i - f(t_i)$ es la diferencia de dos cantidades de la misma unidad. El residuo cero expresa coincidencia en esa muestra; su valor absoluto mide allí la discrepancia. Una regla matemática de período T cumple la igualdad exacta $f(t+T) = f(t)$ en todo su dominio. El ajuste a un conjunto de muestras verifica igualdades o tolerancias únicamente en esas muestras. Las parejas de funciones del capítulo dan una prueba constructiva de esa limitación: tienen períodos diferentes y valores idénticos en cada tiempo entero, pero una entrada intermedia distingue sus valores.

Ecuaciones trigonométricas por intervalos

Una recta horizontal de altura $s \in [-1, 1]$ corta el círculo en los puntos con seno s. Si $\alpha = \arcsin s \in [-\pi/2, \pi/2]$, el otro punto corresponde a $\pi - \alpha$, por reflexión respecto del eje vertical. Las vueltas completas producen todas las entradas $\alpha + 2k\pi$ y $\pi - \alpha + 2k\pi$. En las alturas extremas los dos puntos coinciden y las dos familias describen los mismos ángulos. Una recta vertical de abscisa $c \in [-1, 1]$ produce, con $\beta = \arccos c \in [0, \pi]$, las familias $\beta + 2k\pi$ y $-\beta + 2k\pi$. La descripción completa de los puntos del círculo prueba que ambas enumeraciones agotan las soluciones.

Para la tangente, $\tan\theta = q$ equivale, en $\cos\theta \neq 0$, a $\sin\theta = q\cos\theta$. La recta por el origen de pendiente q corta el círculo en dos puntos opuestos. Uno de ellos tiene abscisa positiva y corresponde al único ángulo $\gamma = \arctan q$ de $(-\pi/2, \pi/2)$. Las medias vueltas producen exactamente la familia $\gamma + k\pi$, con coseno distinto de cero. El caso $q = 1$ incluye $\gamma = \pi/4$, y el caso $q = -1$ incluye $\gamma = -\pi/4$.

La media vuelta cambia de signo seno y coseno y conserva su cociente y su dominio, así que π es un período de la tangente. Si $T > 0$ es cualquier período, evaluar en cero da $\tan T = 0$, luego $T = k\pi$. Esto prueba que π es su período fundamental.

La sustitución $u = \sin\theta$ o $u = \cos\theta$ conserva la ecuación algebraica obtenida mediante identidades y exige además $u \in [-1, 1]$. Para cada raíz admisible se recuperan todas las preimágenes mediante las familias anteriores. La intersección con el intervalo original, con sus extremos incluidos o excluidos, completa la selección. En un argumento afín con coeficiente distinto de cero, transformar también el intervalo es una equivalencia que controla la enumeración de enteros.

Orden y ramas inversas trigonométricas

La proyección vertical recorre de manera estrictamente creciente todas las alturas de $[-1,1]$ en el arco de $-\pi/2$ a $\pi/2$. La proyección horizontal recorre de manera estrictamente decreciente todas las abscisas de $[-1,1]$ en el arco de cero a π. Se obtienen dos biyecciones y sus inversas arcsin y arccos con los dominios y recorridos declarados.

En la rama central de la tangente, si $-\pi/2 < u < v < \pi/2$, las identidades de diferencia dan

$$\tan v - \tan u = \frac{\sin(v-u)}{\cos u \cos v} > 0.$$

El denominador es positivo y $0 < v-u < \pi$ hace positivo el numerador. Además, para cualquier $q \in \mathbb{R}$, consideramos el punto

$$P_q = \left(\frac{1}{\sqrt{1+q^2}}, \frac{q}{\sqrt{1+q^2}} \right).$$

Pertenece a la semicircunferencia derecha y tiene pendiente q. Corresponde a un único ángulo de la rama central, lo que prueba recorrido real y biyección. Su inversa es arctan.

Las composiciones de una biyección con su inversa son identidades en los respectivos dominios. Esto prueba $\arcsin(\sin x) = x$ sobre su rama principal y las afirmaciones análogas de coseno y tangente. En otras entradas, las funciones trigonométricas llevan al mismo valor que algún representante de la rama, que la inversa devuelve de manera única.

Una desigualdad de alturas selecciona los puntos del círculo situados en el semiplano correspondiente. Sus arcos se ordenan mediante las ramas monótonas. Las fronteras se obtienen de la ecuación de igualdad y se incluyen cuando el signo la permite y la regla está definida allí. Para tangente, los puntos de coseno cero permanecen excluidos. La intersección con el intervalo de entrada conserva sus extremos de manera independiente. Estos hechos prueban el procedimiento de selección de arcos usado en las soluciones.

Superposición de oscilaciones

Dados a, b reales con $a^2 + b^2 > 0$, ponemos $R = \sqrt{a^2+b^2}$. El par $(a/R, b/R)$ pertenece al círculo unitario y determina un ángulo φ hasta vueltas completas. Entonces la identidad de adición produce

$$R\sin(\theta+\varphi) = R\cos\varphi\sin\theta + R\sin\varphi\cos\theta = a\sin\theta + b\cos\theta.$$

Al recorrer todos los ángulos, el miembro izquierdo tiene recorrido $[-R, R]$. Si $a = b = 0$, la suma es la función constante cero. La fórmula se aplica a contribuciones con un mismo argumento angular y unidades compatibles.

Para la suma de senos, escribimos $u = p+q$ y $v = p-q$, donde $p = (u+v)/2$ y $q = (u-v)/2$. Al sumar las dos fórmulas de adición, los términos con $\cos p \sin q$ se cancelan y queda $\sin u + \sin v = 2\sin p\cos q$. La cota $|\sin p| \le 1$ da la envolvente $|2\sin(\alpha t)\cos(\beta t)| \le 2|\cos(\beta t)|$.

Si $T > 0$ es período de f y g, entonces $(f+g)(t+T) = f(t+T) + g(t+T) = f(t) + g(t)$. La suma conserva ese período. La cancelación puede producir un período fundamental menor o una función constante; por ejemplo, $\sin t - \sin t = 0$. Para las señales de frecuencias enteras del capítulo, la sustitución directa comprueba cada período anunciado. La interpretación como suma

de desplazamientos exige la hipótesis contextual de superposición; las identidades establecen la igualdad matemática una vez fijadas las contribuciones.

Tasas de cambio del seno

Trabajamos en radianes y adoptamos las reglas de medida de áreas y sectores ya declaradas en los capítulos geométricos. Para $0 < h < \pi/2$, en el círculo unitario se comparan el triángulo con lados radiales, el sector de ángulo h y el triángulo delimitado por la tangente en $(1, 0)$ y el radio de dirección h. Sus áreas son, respectivamente, $\sin h/2$, $h/2$ y $\tan h/2$. La inclusión de las regiones da $\sin h \le h \le \tan h$. Dividir por cantidades positivas produce $\cos h \le \sin h/h \le 1$. La paridad del coseno y del cociente seno/entrada extiende esta desigualdad a $0 < |h| < \pi/2$.

Se obtiene $|\sin u| \le |u|$ para $|u| < \pi/2$ mediante esa comparación y simetría. Para $|u| \ge \pi/2$, la cota $|\sin u| \le 1 \le |u|$ completa todos los reales; se usa aquí $\pi/2 > 1$. La identidad de ángulo doble prueba

$$0 \le 1 - \cos u = 2\sin^2(u/2) \le u^2/2.$$

En consecuencia, para $0 < |h| < \pi/2$,

$$0 \le 1 - \frac{\sin h}{h} \le 1 - \cos h \le h^2/2.$$

La fórmula de adición permite escribir el cociente de cambio como

$$D_h(x) = \sin x\,\frac{\cos h - 1}{h} + \cos x\,\frac{\sin h}{h}.$$

Al restar $\cos x$ y aplicar las dos cotas anteriores resulta

$$|D_h(x) - \cos x| \le |\sin x|\frac{|h|}{2} + |\cos x|\frac{h^2}{2}.$$

Esta cota prueba el límite para ambos signos de h. De forma explícita, si $0 < |h| < 1$, el miembro derecho es a lo sumo $|h|$, porque $|\sin x|, |\cos x| \le 1$. Para cualquier tolerancia $\varepsilon > 0$, basta exigir $0 < |h| < \min(1, \varepsilon)$; además $1 < \pi/2$ garantiza la condición angular. Así queda justificada la tasa instantánea $\cos x$ mediante una desigualdad y una elección de incremento.

Finalmente, sea $y(t) = d + A\sin(\omega(t - t_0))$ con parámetros reales fijos. Si $\omega \neq 0$, ponemos $x = \omega(t - t_0)$ y $h = \omega\Delta t$ en el cociente temporal. Entonces

$$\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} = A\omega\frac{\sin(x + h) - \sin x}{h}.$$

La cota demostrada hace tender el último cociente a $\cos x$ cuando Δt tiende a cero. La tasa temporal es por tanto $A\omega\cos(\omega(t - t_0))$. Si $A = 0$ o $\omega = 0$, la función es constante y sus cocientes de cambio valen cero, en concordancia con la misma expresión. Las unidades de la tasa proceden de dividir la unidad de altura por la unidad temporal; el uso de radianes fija la normalización angular de la fórmula.

Encadenamiento, dominio y asociatividad

Sean $g : D_g \to B$ y $f : D_f \to C$. Evaluar la expresión $f(g(x))$ requiere primero que $g(x)$ exista, es decir, $x \in D_g$, y luego que ese valor pertenezca a D_f. Estas dos condiciones son necesarias y suficientes para evaluar la cadena. Por tanto, su dominio natural es $\{x \in D_g : g(x) \in D_f\}$. Si se exige una composición definida en todo D_g, la condición correspondiente es $g(D_g) \subseteq D_f$.

La función identidad de un conjunto S asigna a cada $x \in S$ ese mismo elemento. Para $f : D \to C$, evaluar $f(\mathrm{id}_D(x))$ da $f(x)$ en todo D. Evaluar $\mathrm{id}_C(f(x))$ también da $f(x)$, puesto que $f(x) \in C$. Ambas composiciones conservan el dominio y los valores de f.

Para una tercera función $h : D_h \to E$, las dos expresiones $h \circ (f \circ g)$ y $(h \circ f) \circ g$ requieren exactamente $x \in D_g$, $g(x) \in D_f$ y $f(g(x)) \in D_h$. En ese dominio común ambas dan el valor $h(f(g(x)))$. Esto demuestra la asociatividad incluyendo sus restricciones, incluso cuando cada cadena se define en el dominio natural reducido.

El orden de las etapas es una cuestión distinta de su agrupación. Si $f(u) = u + 1$ y $g(x) = 2x$ sobre $\mathbb{R}$, las composiciones son $2x + 1$ y $2x + 2$. Sus valores difieren en toda entrada, así que la conmutatividad falla en general. Para verificarla en un caso particular deben coincidir las reglas y los dominios como funciones. Las identidades anteriores son algebraicas y valen para funciones entre conjuntos, sin presuponer continuidad.

Restricciones de una composición

Para una función $g : D_g \to B$ y un conjunto de posibles salidas T, se define la preimagen $g^{-1}(T) = \{x \in D_g : g(x) \in T\}$. Esta definición existe con independencia de la inyectividad. Aplicada a $T = D_f$, reproduce exactamente las dos condiciones del dominio de $f \circ g$ demostradas en «Encadenamiento, dominio y asociatividad».

El logaritmo real $\log_a u$, para $a > 0$ y $a \neq 1$, tiene dominio $(0, \infty)$, según la construcción y el orden de las potencias reales del apéndice. Por tanto, $\log_a(g(x))$ está definido exactamente en los $x \in D_g$ con $g(x) > 0$. Para la raíz real principal de índice par $2n$, $n \geq 1$, el dominio exterior es $[0, \infty)$, y la condición transportada es $g(x) \geq 0$. La exigencia previa $x \in D_g$ conserva, por ejemplo, los denominadores de la regla interior.

Supóngase que una expresión $q(x)$ coincide algebraicamente con $f(g(x))$ para todo x del dominio compuesto D. La igualdad de valores prueba que la composición es q restringida a D. Si la expresión q tiene un dominio natural mayor E, la función $q : E \to C$ es una extensión, y sus nuevos valores requieren declararse. Por ejemplo, para $g(x) = 1/(x + 2)$ y $f(u) = 1/u$, la composición es $x + 2$ sólo en $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. La afín de dominio $\mathbb{R}$ agrega una entrada que la primera etapa de la cadena excluye. La cancelación es válida donde sus divisores existen y son distintos de cero; de ella no se deduce una modificación automática de D.

Inyectividad, inversa y orden de recuperación

Sea $f : D \to C$ e $I = f(D)$. Si f es inyectiva, para cada $y \in I$ existe al menos un $x \in D$ con $f(x) = y$, por definición de imagen, y existe a lo sumo uno, por inyectividad. Asignar ese único x a y construye $f^{-1} : I \to D$. La construcción da directamente $f^{-1}(f(x)) = x$ para $x \in D$ y $f(f^{-1}(y)) = y$ para $y \in I$.

Recíprocamente, si una función $u : I \to D$ satisface $u(f(x)) = x$ para todo $x \in D$, entonces $f(x_1) = f(x_2)$ implica $u(f(x_1)) = u(f(x_2))$ y, por tanto, $x_1 = x_2$. Así, la existencia de una

inversa bilateral implica inyectividad. Para que la inversa esté definida en todo C, cada elemento de C debe además pertenecer a la imagen, lo que equivale a sobreyectividad. Si dos funciones u, v fueran inversas sobre I, para cada $y = f(x)$ ambas deberían dar x; por ello la inversa es única.

Si D es un subconjunto ordenado de los reales y f es estrictamente creciente, de $x_1 < x_2$ se sigue $f(x_1) < f(x_2)$. La igualdad de imágenes descarta ambas desigualdades estrictas entre entradas y obliga a su igualdad. El argumento es análogo para una función estrictamente decreciente, usando $f(x_1) > f(x_2)$. El criterio prueba inyectividad sin exigir continuidad. Para identificar la imagen como un intervalo usando sólo valores extremos hace falta justificar que se alcanzan las salidas intermedias; las funciones afines y las ramas elementales usadas en el capítulo cumplen esa propiedad mediante sus fórmulas o los resultados de continuidad previamente establecidos.

Sean ahora biyecciones $g : A \to B$ y $f : B \to C$. La función $v = g^{-1} \circ f^{-1} : C \to A$ está definida en todo C. Por asociatividad,

$$v(f(g(x))) = g^{-1}(f^{-1}(f(g(x)))) = x$$

para $x \in A$, y de igual modo $f(g(v(y))) = y$ para $y \in C$. Luego $v = (f \circ g)^{-1}$. El orden inverso es necesario porque la primera operación de recuperación recibe una salida de f.

Finalmente, (x, y) pertenece a la gráfica de f exactamente cuando $y = f(x)$, lo que equivale a $x = f^{-1}(y)$. Esto equivale a que (y, x) pertenezca a la gráfica inversa. Intercambiar coordenadas es la reflexión en $y = x$; la nueva primera coordenada recorre I y la segunda recorre D. Quedan demostradas la correspondencia gráfica y sus restricciones.

Preimágenes, candidatos y ramas exhaustivas

Sea $f : D \to C$ y $b \in C$. Por definición, $f^{-1}(\{b\}) = \{x \in D : f(x) = b\}$. La igualdad describe exactamente el conjunto de soluciones de la ecuación. Puede ser vacío si $b \notin f(D)$, unitario o múltiple si varias entradas comparten esa salida. Esta notación de preimagen de un conjunto conserva su significado para funciones que repiten valores.

Sean además $g : D_g \to B$ y la composición con su dominio natural. Para un conjunto S de salidas de f, una entrada x pertenece a $(f \circ g)^{-1}(S)$ exactamente cuando $x \in D_g$, $g(x) \in D_f$ y $f(g(x)) \in S$. Las últimas dos condiciones dicen $g(x) \in f^{-1}(S)$, y las tres juntas dicen $x \in g^{-1}(f^{-1}(S))$. Así se prueba la igualdad de preimágenes, con todas las condiciones de existencia incorporadas.

Si la restricción de f a $I \subseteq D$ es inyectiva, dos soluciones en I tendrían la misma imagen b y serían iguales. Por tanto hay a lo sumo una solución en cada rama inyectiva. Si $D = \bigcup_j I_j$, toda solución pertenece al menos a una de esas ramas y aparece al resolver allí la ecuación. Recíprocamente, cada solución encontrada en una rama pertenece a D y satisface la ecuación original. La unión de los conjuntos obtenidos es exactamente el conjunto global de soluciones; los puntos compartidos por ramas se cuentan una sola vez en esa unión.

Por ejemplo, para $f(x) = x^2$ sobre $\mathbb{R}$, las ramas $(-\infty, 0]$ y $[0, \infty)$ cubren el dominio. Para $b > 0$ producen $-\sqrt{b}$ y $\sqrt{b}$; para $b = 0$ ambas producen el mismo cero; para $b < 0$ ninguna produce una solución real. La exhaustividad depende de cubrir el dominio declarado y de resolver cada rama sin perder sus extremos.

Escalas, normalización e identificabilidad

Sea $y = f(t)$ sobre D y efectúese el cambio $t = a\tau + b$, con $a \neq 0$. La regla de composición da $\tilde{f}(\tau) = f(a\tau + b)$ en $\widetilde{D} = \{\tau : a\tau + b \in D\}$. La transformación afín es biyectiva entre $\widetilde{D}$ y D, con inversa $\tau = (t - b)/a$. Por ello cada predicción original se recupera al transformar su entrada, y ninguna entrada original queda sin representante. Si $a < 0$, se invierte el orden de los extremos de un intervalo; la descripción mediante pertenencia sigue siendo válida.

Un cambio de salida $z = (y-c)/d$, $d \neq 0$, produce $z = (f(t)-c)/d$. La recuperación $y = c+dz$ demuestra equivalencia de las representaciones. Ambas transformaciones pueden combinarse. Si t_0 y T tienen la misma unidad de t, con $T \neq 0$, la razón $\tau = (t - t_0)/T$ carece de unidad. Lo mismo vale para $z = (y - y_0)/Y$ cuando $Y \neq 0$ tiene la unidad de y. La normalización conserva la información porque sus cambios son invertibles.

La coherencia dimensional usa el principio de homogeneidad adoptado para la representación de magnitudes: una suma combina cantidades de la misma dimensión. Las razones entre magnitudes de igual dimensión son números sin unidad. El argumento de e^u o $\log_a u$ en estos modelos es un número adimensional; por ejemplo kt exige dimensiones recíprocas de k y t. Esta convención expresa cómo se vinculan las operaciones sobre números con las magnitudes modeladas; su alcance pertenece a la construcción del modelo y se comprueba junto a sus supuestos físicos.

Para una familia M_θ y datos exactos (t_i, y_i), sea $\Theta_* = \{\theta : M_\theta(t_i) = y_i \text{ para todo } i\}$ dentro de los parámetros admisibles. Cuando Θ_* es no vacío, una componente o combinación $H(\theta)$ es identificable respecto de esos datos si es constante en Θ_*. Esta es la definición empleada en el capítulo. En $M_{a,b}(t) = ab\,t$, las lecturas $M(1) = 6$ y $M(2) = 12$ dejan exactamente $\Theta_* = \{(u, 6/u) : u > 0\}$. El producto vale siempre 6 y cada factor cambia con u. La prueba exhibe tanto la combinación identificada como la familia completa de ambigüedad. Datos incompatibles darían $\Theta_* = \emptyset$ y exigirían revisar el modelo o el tratamiento de los errores de medición.

Interpolación, residuos y alcance de un ajuste

Sean dos puntos (t_1, y_1) y (t_2, y_2) con $t_1 \neq t_2$. Si una función afín $L(t) = mt + b$ pasa por ellos, restar las dos igualdades da $m(t_2 - t_1) = y_2 - y_1$, por lo que $m = (y_2 - y_1)/(t_2 - t_1)$ y $b = y_1 - mt_1$. Estos valores construyen la función y la sustitución comprueba ambos puntos. Quedan probadas existencia y unicidad dentro de la familia afín.

Si p pasa por datos de nodos distintos $t_1, \ldots, t_n$ y q está definida en esos nodos, entonces $q(t)\prod_{i=1}^{n}(t - t_i)$ vale cero en cada nodo. Así, $p(t) + q(t)\prod_i (t - t_i)$ conserva todas las observaciones. Tomando q constante se obtienen infinitos polinomios distintos cuando p es un polinomio y el conjunto de nodos es finito. Esto demuestra que la coincidencia en datos finitos, sin restricciones de familia, permite múltiples extensiones; entre nodos también pueden diferir. La prueba identifica exactamente lo que esos datos certifican y justifica la necesidad de supuestos o contrastes adicionales para adoptar una ley.

Para $n \geq 1$ mediciones y_i en una misma escala, sea $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_i y_i$. Como $\sum_i (y_i - \bar{y}) = 0$, expandir cuadrados da

$$\sum_i (y_i - c)^2 = \sum_i (y_i - \bar{y})^2 + n(c - \bar{y})^2.$$

El segundo término es no negativo y sólo se anula en $c = \bar{y}$. Por ello la media es el único ajuste constante que minimiza la suma de cuadrados. La conclusión vale para cualquier colección finita

real y para el criterio especificado, sin supuestos probabilísticos. Si se cambia la unidad de salida mediante $z_i = (y_i - c_0)/d$, $d \neq 0$, y se transforman de igual modo las predicciones, los residuos se dividen por d y sus cuadrados por d^2. Comparar dos modelos en una misma escala conserva el orden de sus sumas; mezclar escalas produciría una comparación sin la misma base.

La distinción entre interpolación y extrapolación se establece por pertenencia de la entrada al intervalo observado. Esa clasificación localiza el uso de la regla; la exactitud futura depende de la adecuación del modelo y de evidencia adicional. Las pruebas anteriores son algebraicas y no asignan por sí mismas una probabilidad de acierto a una predicción.

Relaciones implícitas y reparametrización de curvas

Sea R un conjunto de pares (x, y). Sobre un conjunto de entradas D, la condición de que cada $x \in D$ tenga exactamente un y admitido permite definir $f(x)$ como ese único valor. Recíprocamente, la gráfica de una función tiene por definición una salida única por entrada. Esta equivalencia demuestra el criterio empleado para distinguir una relación general de una gráfica funcional.

Para $r > 0$, la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ equivale a $y^2 = r^2 - x^2$. Existen soluciones reales exactamente cuando $|x| \leq r$. Para esas entradas, las soluciones son $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ e $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$. Sustituirlas recupera la ecuación y el carácter no negativo de la raíz principal muestra que ambas ramas contienen todas las soluciones. En $|x| < r$ son distintas; en los extremos coinciden en cero. La unión da la circunferencia y cada rama define una función sobre $[-r, r]$.

Una parametrización $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ asigna un par a cada $t \in I$. Si una deducción demuestra $F(\gamma(t)) = 0$ para todo $t \in I$, entonces $\gamma(I) \subseteq \{(x, y) : F(x, y) = 0\}$. Para la igualdad de conjuntos hace falta que cada punto del conjunto candidato se recupere mediante algún $t \in I$. Por ejemplo, para $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ en $[-1, 2]$, la eliminación produce $y^2 = x^3$, pero la recuperación exige separar $y = x^{3/2}$ con $x \in [0, 4]$ y $y = -x^{3/2}$ con $x \in [0, 1]$. Elegir $t = \sqrt{x}$ o $t = -\sqrt{x}$ demuestra el recíproco sobre esas ramas y revela los límites que la ecuación sola omitiría.

Sea $\phi : J \to I$ biyectiva. Cada punto $\gamma(\phi(s))$ pertenece a $\gamma(I)$; recíprocamente, cada $\gamma(t)$ se recupera con $s = \phi^{-1}(t)$. Esto prueba la igualdad de imágenes. Recuperar el parámetro desde la posición exige además inyectividad de γ: el recorrido $(\cos t, \sin t)$ sobre $[0, 2\pi]$ repite su posición en los extremos, aunque $t = 2s$ sea una biyección desde $[0, \pi]$. La imagen describe la trayectoria y la parametrización fija su reloj.

Partición de registros y frecuencias

Sea una lista de $n \geq 1$ registros, asignados a clases exhaustivas y disjuntas $C_1, \ldots, C_r$. Exhaustividad significa que cada registro pertenece a alguna clase y disjunción significa que pertenece a una sola. La frecuencia absoluta f_j cuenta los registros de C_j. Al sumar los recuentos, cada registro aporta exactamente una unidad; por tanto $\sum_j f_j = n$. Las frecuencias relativas $h_j = f_j/n$ son no negativas y su suma vale $(\sum_j f_j)/n = 1$. Multiplicarlas por cien da porcentajes exactos de suma cien. Los porcentajes redondeados pueden acumular un error de redondeo y deben conservar esa precisión declarada.

Cuando las clases están ordenadas, $F_j = \sum_{i=1}^{j} f_i$ cuenta la unión de las primeras j clases. Se cumple $F_{j+1} = F_j + f_{j+1} \geq F_j$ y $F_r = n$. La resta $F_j - F_{j-1} = f_j$ recupera cada frecuencia simple para $j \geq 2$; la primera es $F_1 = f_1$. Las diferencias no negativas y el total ofrecen comprobaciones de consistencia. Para intervalos adyacentes, declarar extremos incluidos y excluidos determina la pertenencia de cada dato y permite aplicar esta partición también a los valores de frontera.

Las nociones de población, unidad, muestra y variable fijan qué entidades corresponden a esos registros. Si hay mediciones repetidas, la unidad de recuento debe establecerse antes de aplicar el total. Dos registros de una persona pueden representar dos mediciones y una sola persona; la frecuencia conserva la unidad que se haya declarado.

Escalas gráficas y áreas de histogramas

Si la altura de la barra de una categoría es kf_j, con una misma constante $k > 0$ y una escala que parte de cero, las alturas guardan la misma proporción que las frecuencias: para $f_i > 0$, $kf_j/(kf_i) = f_j/f_i$. Esto justifica representar recuentos mediante longitudes con escala común. El tipo de categoría determina el significado de su orden; una secuencia temporal aporta una relación adicional entre observaciones que puede expresarse con líneas.

En un histograma, la clase j tiene amplitud $a_j > 0$. El área del rectángulo de base a_j y altura f_j/a_j es exactamente $a_j(f_j/a_j) = f_j$. Por ello las áreas suman $\sum_j f_j = n$. Con altura relativa h_j/a_j, el área es h_j y la suma es uno, usando «Partición de registros y frecuencias». Las alturas se expresan en frecuencia por unidad de la variable. Si todas las bases tienen amplitud común a, ordenar por altura equivale a ordenar por frecuencia, pues dividir por $a > 0$ conserva el orden. Si las amplitudes cambian, la razón entre alturas incorpora el cociente de esas amplitudes y debe interpretarse como densidad.

La inclusión o exclusión de un extremo del intervalo determina a qué clase pertenece una observación, mientras que la amplitud usada para el área sigue siendo la diferencia entre extremos. Este convenio permite conservar las frecuencias de frontera y la lectura geométrica del histograma.

Media, ponderaciones y posiciones centrales

Para $n \geq 1$ números reales, $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_i x_i$. Entonces

$$\sum_i (x_i - \bar{x}) = \sum_i x_i - n\bar{x} = 0.$$

Agrupar los términos iguales de la suma da $\sum_i x_i = \sum_j f_j v_j$, donde v_j son los valores distintos y f_j sus frecuencias. Esta igualdad demuestra la fórmula de la media desde una tabla de valores exactos.

La media ponderada con $w_j \geq 0$ y $W = \sum_j w_j > 0$ se define como $\bar{x}_w = \sum_j w_j x_j / W$. Si $m \leq x_j \leq M$, multiplicar cada desigualdad por w_j, sumar y dividir por $W > 0$ da $m \leq \bar{x}_w \leq M$. Si los datos se reparten en grupos disjuntos de tamaños $n_j > 0$ y medias m_j, cada grupo tiene suma $n_j m_j$. La suma conjunta es $\sum_j n_j m_j$ y el tamaño conjunto es $\sum_j n_j$; dividir demuestra la fórmula de reunión de grupos.

Sean $x_{(1)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$ los datos ordenados. Si $n = 2r + 1$, la mediana es $x_{(r+1)}$, con al menos $r + 1$ datos a cada lado contando igualdades. Si $n = 2r$, se toma $m = (x_{(r)} + x_{(r+1)})/2$. Como $x_{(r)} \leq m \leq x_{(r+1)}$, los primeros r datos son menores o iguales que m y los últimos r son mayores o iguales. Así se prueba la propiedad de posición para ambas paridades, incluidos empates. La elección del promedio en el caso par fija un valor único dentro del intervalo de posiciones centrales.

La moda se define por frecuencia máxima. En una lista finita no vacía de categorías observadas, el conjunto finito de frecuencias tiene un máximo y puede alcanzarse en una o varias categorías. Para clases agrupadas, la clase de mayor frecuencia depende de la partición elegida. Si las amplitudes son distintas, la clase de mayor frecuencia y la de mayor densidad pueden diferir; el criterio debe declararse. Esta precisión conserva el significado del resumen modal.

Cuantiles interpolados y convención de caja

Sean $n \geq 1$ datos ordenados y $0 \leq p \leq 1$. La posición $h = 1 + (n - 1)p$ pertenece a $[1, n]$. Si es entera se define $Q(p) = x_{(h)}$; si $h = j + d$ con $0 < d < 1$, se define $Q(p) = (1 - d)x_{(j)} + d x_{(j+1)}$. Los pesos son positivos y suman uno; la propiedad de media ponderada de «Media, ponderaciones y posiciones centrales» da $x_{(j)} \leq Q(p) \leq x_{(j+1)}$. Para $n = 1$, la posición vale siempre uno y todos los cuantiles son el único dato.

Dentro de un tramo $j \leq h \leq j+1$, el valor interpolado es $x_{(j)} + (h - j)(x_{(j+1)} - x_{(j)})$. El coeficiente de h es no negativo, por lo que el valor aumenta en sentido amplio con h. Los extremos de tramos consecutivos coinciden en el dato compartido. Como h también aumenta con p, se concluye que $p \leq q$ implica $Q(p) \leq Q(q)$, tanto dentro de un tramo como al recorrer varios. Así, $Q_3 - Q_1 \geq 0$.

Para $p = 1/2$, la posición es $(n + 1)/2$. Si $n = 2r + 1$, es la posición entera $r + 1$. Si $n = 2r$, es $r + 1/2$ y la interpolación da $(x_{(r)} + x_{(r+1)})/2$. En ambos casos coincide con la mediana declarada en el capítulo.

La regla de caja adoptada define las cercas $L = Q_1 - 1{,}5(Q_3 - Q_1)$ y $U = Q_3 + 1{,}5(Q_3 - Q_1)$. Como el recorrido intercuartílico es no negativo, $L \leq Q_1 \leq Q_3 \leq U$. Los bigotes se sitúan en las observaciones extremas de la lista incluidas en $[L, U]$ y los demás datos se dibujan aparte. Existe al menos una observación dentro de las cercas. Para $n = 1$ es el único dato. Para $n = 2$, sean $a \leq b$ los datos: los cuartiles son $a + (b - a)/4$ y $a + 3(b - a)/4$, y las cercas valen $a - (b - a)/2$ y $b + (b - a)/2$, que incluyen ambos. Para $n \geq 3$, la separación entre las posiciones de los cuartiles es $(n - 1)/2 \geq 1$, así que contiene alguna posición entera. El dato de esa posición pertenece a $[Q_1, Q_3]$ y, por tanto, a las cercas. Queda justificada la existencia de bigotes también en listas pequeñas.

La convención de rango próximo superior usa $x_{(\lceil np \rceil)}$ para $0 < p \leq 1$; al menos $\lceil np \rceil$ observaciones quedan por debajo o igual a ese valor. Los cuantiles interpolados se definen por su posición lineal y su frecuencia empírica se calcula contando. El ejemplo $0, 10, 20, 100$ con $p = 0{,}9$ da 76 y sólo tres observaciones menores o iguales; muestra por qué la propiedad del rango próximo superior exige su propia convención.

Dispersión, divisores y cambios de escala

Sea una lista de $n \geq 1$ números reales, con media $\bar{x}$ y varianza descriptiva $v = \frac{1}{n}\sum_i (x_i - \bar{x})^2$. Cada sumando es no negativo, así que $v \geq 0$. La suma vale cero exactamente cuando cada cuadrado vale cero, lo que equivale a $x_i = \bar{x}$ para todo i. Esto demuestra la caracterización de dispersión nula.

Expandir los cuadrados y usar $\sum_i x_i = n\bar{x}$ produce

$$\sum_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_i x_i^2 - 2\bar{x}\sum_i x_i + n\bar{x}^2 = \sum_i x_i^2 - n\bar{x}^2.$$

Al dividir por n se obtiene $v = \frac{1}{n}\sum_i x_i^2 - \bar{x}^2$. La igualdad es exacta; con números redondeados, restar cantidades grandes y próximas puede amplificar el error relativo. La forma de diferencias cuadradas conserva una interpretación directa de cada contribución y permite comprobar el cálculo.

Para $y_i = a x_i + b$, con a, b reales, la linealidad de sumas da $\bar{y} = a\bar{x} + b$. Luego $y_i - \bar{y} = a(x_i - \bar{x})$, de donde $v_y = a^2 v_x$. Tomar raíces no negativas produce $\sigma_y = |a|\sigma_x$, incluso para $a = 0$. Esta demostración incluye traslaciones, inversiones de orden y cambios de unidad.

Para $n \geq 2$, la definición muestral con divisor $n - 1$ da $s^2 = \sum_i (x_i - \bar{x})^2/(n-1) = nv/(n-1)$. Para $n = 1$, el numerador es cero, $v = 0$ y la expresión de s^2 tiene denominador cero, por lo que queda fuera de su dominio declarado. La transformación afín también multiplica s^2 por a^2, por la misma igualdad de diferencias. El capítulo establece estas relaciones algebraicas; la motivación probabilística del divisor requiere un modelo de muestreo que se estudiará posteriormente.

Si cada x_i tiene unidad U, cada diferencia respecto de la media tiene unidad U, su cuadrado tiene unidad U^2 y dividir por un recuento adimensional conserva esa unidad. La raíz cuadrada recupera U. Así se justifican las unidades de varianzas y desviaciones.

Suma, producto y orden en el conteo

Para conjuntos finitos disjuntos A y B, cada elemento de su unión aparece en uno de los dos recuentos exactamente una vez. Por ello $|A \cup B| = |A| + |B|$. Si tienen intersección, sumar sus tamaños cuenta los elementos de $A \cap B$ dos veces, y se obtiene $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. La regla disjunta se extiende a cualquier familia finita de clases disjuntas.

Si hay a primeras elecciones y cada una admite b continuaciones, los resultados se particionan en a clases de tamaño b, una por primera elección. Sumar da ab. Si la elección inicial i tiene b_i continuaciones, el total es $\sum_i b_i$. Aplicar el producto sucesivamente a etapas de tamaños constantes $n_1, \ldots, n_k$ da $n_1 \cdots n_k$ resultados completos.

Para un alfabeto de $n \geq 1$ elementos y $k \geq 0$ posiciones con repetición, cada etapa admite n elecciones y existen n^k secuencias. Con $k = 0$ hay una secuencia vacía, en acuerdo con $n^0 = 1$. Para $n = 0$, la longitud cero también tiene una secuencia vacía y cada longitud positiva tiene cero secuencias; se declaran estos casos por separado para evitar ambigüedad de notación.

Sin repetición y para $0 \leq k \leq n$, las sucesivas cantidades disponibles son $n, n-1, \ldots, n-k+1$. Su producto es $n!/(n-k)!$, con el convenio $0! = 1$. Para $k = 0$ el producto vacío vale uno. Para $k = n$ se obtienen $n!$ permutaciones. Cada subconjunto de k elementos admite exactamente $k!$ ordenaciones, por lo que dividir las variaciones ordenadas por esa multiplicidad constante da $\binom{n}{k} = n!/[k!(n-k)!]$. El caso $k = 0$ corresponde al subconjunto vacío y el caso $k = n$ al conjunto completo, ambos de cuenta uno.

Para multiplicidades $m_1, \dots, m_r$ de objetos indistinguibles, cuya suma es n, etiquétese primero cada copia. Existen $n!$ órdenes etiquetados. Fijado un arreglo visible, sus posiciones de tipo j admiten $m_j!$ asignaciones de etiquetas. El producto $\prod_j m_j!$ es el mismo para todo arreglo visible. Dividir por él cuenta una vez cada resultado y demuestra la fórmula de permutaciones con repeticiones indistinguibles.

Finalmente, la aplicación que asocia a un subconjunto su complemento es una biyección entre los subconjuntos de tamaño k y los de tamaño $n-k$. Aplicarla dos veces recupera el subconjunto inicial. Así se prueba $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ mediante una correspondencia de elecciones.

Marcos, estratos y datos agrupados

Una muestra sin orden de tamaño fijo k en una población finita de N unidades distintas es un subconjunto de ese tamaño. El resultado de «Suma, producto y orden en el conteo» da exactamente $\binom{N}{k}$ muestras, para $0 \le k \le N$. El muestreo aleatorio simple adopta un mecanismo que da la misma oportunidad a cada uno de esos subconjuntos. Otros mecanismos pueden tener otro conjunto de resultados accesibles, como las cuatro parejas cíclicas entre cuatro unidades del capítulo. La condición de igualdad de oportunidades de unidades individuales por sí sola permite esos diseños distintos.

El marco vincula los registros accesibles con las unidades de la población objetivo. Una omisión deja a una unidad fuera del acceso previsto; una duplicación puede ofrecer varias vías de selección a una misma unidad. Estos efectos se comprueban comparando marco y población antes de interpretar los resultados. Son condiciones del diseño y del alcance de la observación. Un recuento grande de respuestas conserva el marco y el mecanismo que las generaron.

Sean estratos disjuntos que cubren la población, con tamaños $N_j > 0$ y medias reales μ_j. Cada estrato tiene suma $N_j \mu_j$ y el total poblacional es la suma de esas cantidades. Por «Media, ponderaciones y posiciones centrales», la media poblacional es $\mu = \sum_j N_j \mu_j / \sum_j N_j$. Sustituir μ_j por medias de muestras define una estimación ponderada. La igualdad con la media verdadera exige información adicional sobre esas medias; el cálculo de los pesos establece la agregación y su precisión requiere estudiar la obtención de los datos.

Para clases de límites a_j, b_j y frecuencias f_j, cada dato de la clase satisface $a_j \le x_i \le b_j$, con desigualdad estricta en cualquier extremo abierto. Al sumar dentro de cada clase y luego entre clases se obtiene

$$\frac{\sum_j f_j a_j}{n} \le \bar{x} \le \frac{\sum_j f_j b_j}{n}.$$

Si una clase de frecuencia positiva tiene extremo superior abierto, la desigualdad superior es estricta; el argumento es análogo para la inferior. Reemplazar cada dato por su punto medio $m_j = (a_j + b_j)/2$ define la estimación $\hat{x} = \sum_j f_j m_j / n$. Como $|x_i - m_j| \le (b_j - a_j)/2$, la desigualdad triangular da la cota

$$|\bar{x} - \hat{x}| \le \frac{1}{2n} \sum_j f_j (b_j - a_j).$$

Las frecuencias acumuladas localizan las posiciones centrales. Si ambas pertenecen a una misma clase, su promedio permanece en ella, como corresponde a una media de valores del intervalo. Recuperar los resúmenes exactos requiere los datos individuales. El alcance poblacional depende del diseño de observación.

Pesos y sucesos en espacios finitos

Sea Ω un conjunto finito no vacío y sean pesos $p_\omega \geq 0$ de suma uno. Se define $P(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$ para cada subconjunto A. El espacio completo tiene probabilidad uno por la suma adoptada; el vacío tiene probabilidad cero por el convenio de suma vacía. Para sucesos disjuntos, sumar sus probabilidades reúne términos diferentes de la misma suma y da la probabilidad de su unión.

Todo suceso tiene probabilidad no negativa. Como su complemento aporta los demás términos de una suma de valor uno, su probabilidad también es a lo sumo uno. Si $A \subseteq B$, la descomposición disjunta $B = A \cup (B \setminus A)$ da $P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A)$. Queda probada la monotonía por inclusión.

Si los N resultados tienen un peso común p, la normalización da $Np = 1$ y p=$1/N$. Sumar los pesos de los $|A|$ resultados de A produce $P(A) = |A|/N$. La demostración identifica la equiprobabilidad como hipótesis necesaria para ese procedimiento de recuento. Una frecuencia relativa de observaciones se define por otra suma: cuenta ocurrencias reales en una lista finita. Vincular sus valores con un parámetro de probabilidad requiere un modelo de repetición y resultados adicionales sobre su variación.

Uniones, complementos y diferencias de sucesos

La partición disjunta $\Omega = A \cup A^c$ da $1 = P(A) + P(A^c)$ y demuestra la fórmula de complemento. La descomposición $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ prueba $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$. A su vez, $A \cup B$ es la unión disjunta de A y $B \setminus A$, por lo que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Si la intersección es vacía, su probabilidad cero deja la regla aditiva simple. La exclusión mutua se define mediante esa intersección vacía. Para pesos finitos, una intersección de probabilidad cero también puede contener resultados de peso cero; distinguir ambas afirmaciones conserva el significado de la definición. Las fórmulas se apoyan en particiones y aditividad y mantienen su validez para probabilidades por áreas con esas mismas propiedades.

Condición, producto, probabilidad total y Bayes

Para $P(B) > 0$, se define $P(A \mid B) = P(A \cap B)/P(B)$. En un modelo finito, puede asignarse a cada resultado de B el peso condicional $p_\omega/P(B)$. Los pesos son no negativos y su suma es uno. La suma sobre los resultados que también pertenecen a A da exactamente el cociente definido. Así, condicionar construye un nuevo modelo sobre la información disponible. En modelos de áreas, restringir el área a B y dividir por su área positiva produce la misma renormalización.

Multiplicar la definición por $P(B)$ demuestra $P(A \cap B) = P(B)P(A \mid B)$. Intercambiar A y B da la otra forma cuando $P(A) > 0$. Para tres etapas con denominadores positivos, repetir la descomposición produce $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B \mid A)P(C \mid A \cap B)$. Si una rama inicial tiene probabilidad cero, el evento conjunto de esa rama tiene probabilidad cero y su contribución se trata directamente, conservando el dominio de los cocientes.

Sea $B_1, \ldots, B_r$ una partición de Ω, con todas sus probabilidades positivas. Los sucesos $A \cap B_j$ son disjuntos y su unión es A. Por aditividad y producto,

$$P(A) = \sum_j P(A \cap B_j) = \sum_j P(B_j)P(A \mid B_j).$$

Si $P(A) > 0$, dividir cada término conjunto por $P(A)$ da

$$P(B_j \mid A) = \frac{P(B_j)P(A \mid B_j)}{\sum_i P(B_i)P(A \mid B_i)}.$$

Es la fórmula de Bayes con sus condiciones de existencia. Las expresiones $P(A \mid B)$ y $P(B \mid A)$ tienen el mismo numerador conjunto y denominadores diferentes; por ello cada inversión conserva expresamente su base.

Independencia, exclusión y familias de ensayos

La independencia de A y B se define por $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Si $P(B) > 0$, dividir por $P(B)$ demuestra la equivalencia con $P(A \mid B) = P(A)$. Recíprocamente, multiplicar esa igualdad condicional recupera la definición.

Usando la diferencia de sucesos,

$$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = (1 - P(A))P(B) = P(A^c)P(B).$$

Esto prueba independencia de A^c y B. Intercambiar los papeles prueba la de A y B^c, y aplicar la misma propiedad una vez más prueba la de los dos complementos. Estas igualdades también valen cuando alguna probabilidad es cero; la forma condicional se usa sólo para denominadores positivos.

Si A y B son excluyentes y tienen probabilidades positivas, la probabilidad conjunta es cero y $P(A)P(B) > 0$. Así, la igualdad de independencia falla. Si alguno tiene probabilidad cero, el producto también vale cero; ese caso de frontera muestra el papel de la hipótesis de positividad.

La independencia mutua de una familia finita exige que la probabilidad de la intersección de cada subfamilia sea el producto de sus marginales. Las parejas forman sólo parte de esas condiciones. Los sucesos del ejemplo de bits tienen marginales 1/2, intersecciones por pares 1/4 e intersección triple 1/4; esta última difiere de 1/8 y demuestra que las comprobaciones por parejas dejan condiciones adicionales.

Un modelo producto de ensayos finitos asigna a cada cadena completa el producto de los pesos de sus coordenadas. Es un modelo normalizado: sumar sucesivamente sobre cada coordenada multiplica sumas de valor uno. Al fijar sucesos en algunas coordenadas y sumar las restantes, se obtiene el producto de los pesos de los sucesos fijados. Así se demuestra la independencia mutua de coordenadas de ese modelo. Para ensayos binarios también puede partirse de sucesos de éxito mutuamente independientes: reemplazar uno por su complemento mediante la diferencia de intersecciones conserva el producto; repetir el argumento produce los pesos de cualquier cadena de éxitos y fracasos.

Distribuciones finitas, esperanza y varianza

Una variable real X asigna un número a cada resultado de un espacio finito. Los conjuntos $\{\omega : X(\omega) = x\}$, para valores distintos de X, son una partición. Sus probabilidades son no

negativas y suman uno, por «Pesos y sucesos en espacios finitos». Agrupar los términos iguales permite escribir

$$E(X) = \sum_x xP(X = x) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) p_\omega.$$

La segunda expresión usa un único espacio para varias variables. Distribuir las sumas prueba $E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$, pues $\sum p_\omega = 1$. La demostración vale con cualquier relación entre las variables.

Al expandir $(X - E(X))^2$ y usar linealidad se obtiene

$$\operatorname{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

La forma inicial es una suma de cuadrados con pesos no negativos, de modo que la varianza es no negativa. Para $aX + b$, la diferencia respecto de su esperanza es $a(X - E(X))$ y su cuadrado multiplica la varianza por a^2.

Las variables finitas X e Y son independientes cuando $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$ para cada pareja de valores. Entonces

$$E(XY) = \sum_{x,y} xyP(X = x)P(Y = y) = E(X)E(Y).$$

Expandir el cuadrado de la suma da, en general,

$$\operatorname{Var}(X + Y) = \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y) + 2\big(E(XY) - E(X)E(Y)\big).$$

Para variables independientes se anula el término entre paréntesis y se obtiene la propiedad del cuadro. El ejemplo Y=1 − X produce una suma constante y conserva un término cruzado que compensa las varianzas individuales. Para una familia mutuamente independiente se aplica la misma expansión: todos los términos cruzados se anulan y las varianzas de la suma se suman.

Ensayos de Bernoulli y conteos binomiales

Un indicador de éxito I vale uno con probabilidad p y cero con $1-p$. Por la suma finita, $E(I) = p$ y $E(I^2) = p$, de donde $\operatorname{Var}(I) = p(1 - p)$. Para n ensayos mutuamente independientes con el mismo p, el recuento es $X = I_1 + \cdots + I_n$.

Para $0 < p < 1$, cada cadena concreta con k éxitos tiene peso $p^k(1 - p)^{n-k}$ por el modelo producto de «Independencia, exclusión y familias de ensayos». Las posiciones de los éxitos forman un subconjunto de tamaño k de las n posiciones. Hay $\binom{n}{k}$ elecciones por «Suma, producto y orden en el conteo». Las cadenas son disjuntas, por lo que sumar sus pesos da la masa binomial.

Las cadenas completas particionan el espacio y sus probabilidades suman uno. Algebraicamente, expandir el producto de n factores $p + (1 - p)$ y agrupar por número de elecciones de p da

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} = 1.$$

Para p=0, todos los indicadores valen cero con probabilidad uno; para p=1, todos valen uno con probabilidad uno. Para n=0 hay una cadena vacía y el recuento es cero. Estos casos se definen directamente y conservan las fórmulas de momentos.

La linealidad de esperanza prueba $E(X) = np$. La independencia de indicadores y la suma de varianzas dan $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$. La probabilidad de cero éxitos es $(1-p)^n$ para $n \geq 1$, incluidos los extremos de p. Tomar el complemento prueba la fórmula de al menos uno. Si un mecanismo cambia la probabilidad después de una selección, se conservan sus condicionales y se estudia su distribución propia, como en las urnas sin devolución.

Áreas normales y estandarización

Se adopta la medida geométrica de áreas para regiones bajo curvas continuas no negativas: es aditiva sobre intervalos disjuntos, conserva inclusiones, multiplica por el factor de un cambio vertical y por el factor positivo de una escala horizontal. En un intervalo compacto, las sumas de rectángulos inferiores y superiores encierran el área y convergen a ella para funciones continuas. Este es el significado de área usado aquí; su construcción general por integración se desarrollará en el capítulo de cálculo.

Sea $k(z) = e^{-z^2/2}$. Es continua, positiva y par, y decrece en $[0, \infty)$ por el orden de la exponencial. Para $m \geq 1$ y $z \in [m, m+1]$, $k(z) \leq e^{-m^2/2} \leq e^{-m/2}$. Las áreas de esas franjas están acotadas por una serie geométrica convergente. Por tanto, las áreas sobre intervalos crecientes son crecientes y acotadas y tienen un límite finito por completitud de los reales. El área total J del núcleo es positiva y finita. Fijar c=$1/J$ da una curva $\varphi = ck$ de área total uno. Así se construye la normalización sin presuponer una expresión cerrada para J.

La probabilidad de un intervalo se define como el área bajo la densidad entre sus límites. La aditividad y positividad dan las propiedades de probabilidad usadas en el capítulo. Un punto puede encerrarse en intervalos de ancho arbitrariamente pequeño; la continuidad acota la altura cerca de ese punto, así que sus áreas se hacen arbitrariamente pequeñas y su probabilidad es cero. Por ello incluir o excluir un extremo aislado conserva la probabilidad de un intervalo. En modelos discretos, cada punto mantiene el peso que le asigne su masa y debe conservarse la distinción.

Como el núcleo es par, cada mitad de la curva normalizada tiene área $1/2$. La reflexión $z \mapsto -z$ conserva áreas y transforma la región a la izquierda de -z en la región a la derecha de z. De ahí $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ y $\Phi(0) = 1/2$.

Sea $X = \mu + \sigma Z$ con $\sigma > 0$. El suceso $a \leq X \leq b$ equivale exactamente a $(a-\mu)/\sigma \leq Z \leq (b-\mu)/\sigma$. La resta de áreas acumuladas prueba la fórmula de intervalo normal. Una escala horizontal de factor σ multiplica las áreas por σ; dividir las alturas por ese factor conserva las áreas. Así se obtiene $f_X(x) = \varphi((x-\mu)/\sigma)/\sigma$ y se demuestra que su área total vuelve a ser uno. La presente construcción trata μ como centro y σ como escala. La identificación mediante momentos continuos y la evaluación cerrada de J requieren herramientas analíticas adicionales; esas afirmaciones no se usan para las probabilidades demostradas aquí.

Para justificar los encierros numéricos, basta trabajar con el núcleo y dividir áreas. Para $z \geq 0$, si $A(z)$ es el área del núcleo en $[0, z]$ y H su área en $[0, \infty)$, entonces $\Phi(z) = 1/2 + A(z)/(2H)$. En una malla de paso h sobre $[0, R]$, la monotonía da

$$h \sum_{j=1}^{N} k(jh) \leq H_R \leq h \sum_{j=0}^{N-1} k(jh), \qquad R = Nh.$$

La diferencia entre ambas sumas es $h(1 - k(R)) \leq h$. Para controlar la cola, sea $R \geq 1$ entero. En $[m, m+1]$, $m \geq R$, se cumple $k(z) \leq e^{-Rm/2}$. Sumando una geométrica,

$$0 \le H - H_R \le \frac{e^{-R^2/2}}{1 - e^{-R/2}}.$$

El cálculo de control usa R=10 y h=10^{-5}. Las sumas inferiores, superiores y la cota de cola proporcionan un intervalo $[L_H, U_H]$ con $L_H > 0$. Para cada numerador se calculan límites L_A, U_A sobre su propio intervalo y se obtiene

$$\frac{1}{2} + \frac{L_A}{2U_H} \le \Phi(z) \le \frac{1}{2} + \frac{U_A}{2L_H}.$$

Las evaluaciones exponenciales se realizan con aritmética decimal de cuarenta cifras y redondeo controlado; se amplía cada área en 10^{-20} para cubrir el error acumulado de las operaciones. Los valores del núcleo pertenecen a [0,1], se realizan menos de diez millones de operaciones y las sumas parciales son menores que un millón: con esa precisión, el presupuesto adoptado excede la suma de las cotas de redondeo de evaluaciones y sumas. En los límites con raíces se encierran primero las raíces entre decimales consecutivos y se usan inclusiones de intervalos. El registro numérico conserva todos los límites utilizados y comprueba los encierros del capítulo. Las propiedades de áreas y las cotas generales anteriores son las justificaciones matemáticas del método; el registro de ejecución documenta su aplicación.

Si una cantidad queda estrictamente entre l y u, su punto medio tiene error menor que $(u-l)/2$. Sumar o restar dos cantidades suma sus cotas absolutas de error, y multiplicar por un factor a multiplica la cota por $|a|$. Esto prueba las garantías de aproximación que acompañan los ejercicios normales. Al reemplazar una distribución discreta por una continua aparece además una diferencia entre modelos, que se calcula por comparación con el resultado exacto en P24 y E24.

Incrementos, tasas y unidades

Para valores reales f(a), f(b) y f(c), insertar y cancelar f(b) da $f(c)-f(a)=[f(b)-f(a)]+[f(c)-f(b)]$. Cuando a<b, dividir el incremento por la duración b-a define la tasa media. Multiplicarla por b-a recupera el incremento. La regla de unidades se deduce del cociente: si el valor se expresa en una unidad U y el argumento en una unidad T, la tasa se expresa en U/T.

Para a<b<c, escribir los incrementos como $m_1(b-a)$ y $m_2(c-b)$ y dividir su suma por c-a da la media ponderada de las tasas. Los pesos $(b-a)/(c-a)$ y $(c-b)/(c-a)$ son positivos y suman uno. La ecuación de la recta por dos puntos, $y=f(a)+m(x-a)$, exige $f(b)=f(a)+m(b-a)$; como b-a es distinto de cero, su pendiente queda determinada por el mismo cociente. Los desplazamientos conservan signos; en un movimiento monótono por tramos, las distancias de los tramos son las magnitudes de sus desplazamientos y se suman para obtener la distancia total.

Límites, continuidad y operaciones

Se adopta la completitud del cuerpo ordenado de los reales, como en la apertura de este apéndice. El dominio de un límite debe tener puntos arbitrariamente próximos al punto considerado y distintos de él. Para h tendiendo a cero, el límite L se define por el control: para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que $0<|h|<\delta$ dentro del dominio implica $|q(h)-L|<\varepsilon$. El límite de f en a se obtiene reemplazando h por x-a. La continuidad exige que el valor del punto exista y coincida con ese límite; en extremos de intervalos se usa el acercamiento relativo al intervalo.

Si L y M fueran dos límites distintos, tomar $\varepsilon=|L-M|/3$ y un punto admisible dentro de ambas distancias daría, por desigualdad triangular, $|L-M|\le|L-q|+|q-M|<2|L-M|/3$, una contradicción. El punto existe por la condición de acumulación del dominio. Esto prueba unicidad.

Para una combinación lineal, basta la desigualdad

$$|\alpha u+\beta v-(\alpha L+\beta M)|\le|\alpha|\,|u-L|+|\beta|\,|v-M|.$$

Si ambos coeficientes son cero, la expresión es constante. En general, exigir que cada error sea menor que $\varepsilon/[2(1+|\alpha|+|\beta|)]$ y elegir la menor distancia proporcionada por los dos límites prueba la afirmación.

Un límite finito de u da una cota local: exigir $|u-L|<1$ asegura $|u|<|L|+1$. Para el producto usamos

$$|uv-LM|\le|u|\,|v-M|+|M|\,|u-L|.$$

Dentro de la distancia que da la cota local de u, pedir a ambos errores una tolerancia menor que $\varepsilon/[2(1+|L|+|M|)]$ hace que la suma sea menor que ε. Si $v\to M\neq0$, exigir $|v-M|<|M|/2$ da $|v|>|M|/2$ y

$$\left|\frac{1}{v}-\frac{1}{M}\right|=\frac{|v-M|}{|v||M|}\le\frac{2|v-M|}{|M|^2}.$$

Esto prueba el límite del recíproco; el producto con u prueba el del cociente. Las distancias se eligen conjuntamente con la que separa el denominador de cero.

La función identidad es continua porque $|x-a|$ controla exactamente su cambio. Las constantes son continuas. Productos y combinaciones lineales finitas de funciones continuas conservan la

continuidad por las reglas anteriores. Cada monomio de exponente entero no negativo y todo polinomio son de esa forma. El valor asignado en un punto aislado de una fórmula cercana entra en la condición de continuidad mediante la igualdad entre límite y valor del punto.

Cocientes incrementales y derivadas de polinomios

En un punto interior a, la derivada se define como límite real del cociente incremental con h distinto de cero. Para una constante, el numerador es cero y el cociente vale cero. Para $mx + b$, el numerador es mh y el cociente vale m. Por unicidad, sus derivadas son las indicadas.

Al multiplicar n factores a+h, el término que usa h en k posiciones aparece tantas veces como subconjuntos de k posiciones, según «Suma, producto y orden en el conteo». Esto justifica la expansión por distributividad.

Para n entero positivo, la identidad binomial da

$$\frac{(a+h)^n - a^n}{h} = n a^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} h^{k-1}, \qquad h \neq 0.$$

La suma es vacía para n=1. Todos los exponentes de h de la suma son positivos, de modo que sus términos tienden a cero por las reglas de productos y sumas. El primer término es constante. Así, la derivada de x^n es $n a^{n-1}$ en a. Para n=1, el factor a^0 representa la constante uno también en a=0, como corresponde al polinomio identidad. El polinomio constante se trata con su cociente cero.

El cociente de $\alpha f + \beta g$ es la misma combinación de los cocientes de f y g. La regla de límites prueba la regla de combinación lineal. Se obtienen así las derivadas de todos los polinomios mediante un número finito de operaciones. Para demostrar continuidad a partir de derivabilidad, usamos $f(a+h) - f(a) = h q(h)$ para h distinto de cero. El cociente q tiene límite finito y está acotado cerca de cero; multiplicarlo por h hace tender el cambio a cero. El valor en h=0 ya coincide con f(a), de modo que queda probada la continuidad en a.

Aproximación local, extremos y valor medio

Definir $r(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a)h$ da, para h distinto de cero, $r(h)/h = q(h) - f'(a)$. Su límite es cero por definición de derivada. Esta identidad justifica la aproximación de primer orden y señala exactamente el resto que debe controlarse. En el cuadrado, el resto es h^2; en el cubo alrededor de a, es $3ah^2 + h^3$. Estas identidades dan cotas concretas para los ejemplos del capítulo.

Si a es un máximo local interior y la derivada existe, para h positivo suficientemente pequeño el cociente es no positivo y para h negativo es no negativo. El límite debe ser a la vez no positivo y no negativo: si fuera positivo, una tolerancia de la mitad de su valor obligaría a los cocientes con h positivo a ser positivos, contra su signo no positivo; si fuera negativo, el argumento con h negativo daría la contradicción correspondiente. Por tanto, la derivada es cero. En un mínimo se invierten las desigualdades y la misma conclusión se conserva. La implicación tiene la dirección indicada: x^3 tiene derivada cero en el origen y valores de ambos signos arbitrariamente cerca.

Para fundamentar la existencia de extremos de una función continua en un intervalo cerrado, probamos primero una consecuencia de completitud. Toda sucesión de puntos de $[a, b]$ tiene una subsucesión convergente a un punto del intervalo. Si a=b es inmediato. Para a<b, dividimos el intervalo en dos mitades cerradas y conservamos una que contenga infinitos términos de la sucesión.

Repetimos el proceso dentro de la mitad conservada. Los extremos izquierdos son crecientes y acotados; su supremo c pertenece a todos los intervalos cerrados, porque sus extremos derechos los acotan superiormente. Las longitudes son $(b-a)/2^n$ y tienden a cero. En cada intervalo elegimos un término con índice mayor que el anterior; su distancia a c es como máximo esa longitud. La subsucesión converge a c.

Una función continua f en $[a,b]$ está acotada. Si sus valores absolutos fueran ilimitados, podríamos elegir x_n con $|f(x_n)| > n$. La subsucesión anterior tendría límite c. La continuidad hace que los valores de esa subsucesión tiendan a f(c): para cada tolerancia, la distancia dada por continuidad contiene todos los términos de la subsucesión suficientemente avanzados. Por ello sus valores quedan acotados, en contradicción con $|f(x_{n_k})| > n_k$. Sea M el supremo de f. Elegir x_n con $M - 1/n < f(x_n) \le M$ y extraer una subsucesión convergente da f(c)=M por continuidad y unicidad del límite. Aplicar el mismo argumento a -f demuestra que también se alcanza el mínimo.

Si $a < b$ y f es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y f(a)=f(b), o es constante, en cuyo caso su derivada es cero en todo punto interior, o alguno de sus extremos globales tiene valor diferente del de los extremos del intervalo. Ese extremo se alcanza en un punto interior y allí la derivada es cero. Esta es la afirmación de Rolle, obtenida con las condiciones indicadas.

La secante tiene una pendiente que podemos calcular usando los extremos del intervalo. Para encontrar un punto donde la derivada tenga esa misma pendiente, podemos restar la secante a la función: así la diferencia valdrá cero en ambos extremos y podremos aplicar Rolle. Definimos por ello

$$g(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \right].$$

La función g es continua en el intervalo cerrado, derivable en el abierto y vale cero en ambos extremos. Rolle da un punto c interior con $g'(c) = 0$, es decir, $f'(c) = [f(b)-f(a)]/(b-a)$. Esto prueba el teorema del valor medio.

Si $|f'| \le L$ en el interior, aplicarlo entre cualesquiera s<t del intervalo da $|f(t)-f(s)| = |f'(c)||t-s| \le L|t-s|$. El caso s=t es inmediato y el intercambio de s y t conserva la desigualdad. Si la derivada es positiva en el interior, el cambio es positivo para s<t y f es estrictamente creciente. Si la derivada es cero en todo el interior, cualesquiera dos valores coinciden. La continuidad en los extremos permite aplicar también estas conclusiones al intervalo cerrado.

Particiones, áreas orientadas e integrabilidad

Para una tasa constante c durante una duración positiva d, cd define la contribución orientada. La aditividad de incrementos justifica sumar las contribuciones de tramos. Subdividir un tramo conserva la suma porque $c(d_1 + d_2) = cd_1 + cd_2$. En un movimiento monótono por tramos, la distancia de cada tramo es la magnitud de su desplazamiento. De ahí la suma de magnitudes que aparece en los ejemplos.

Para una función acotada v en $[a,b]$, con a<b, sea P una partición. Cada subintervalo tiene ínfimo m_i y supremo M_i por completitud. Se definen $L(v,P) = \sum_i m_i \Delta x_i$ y $U(v,P) = \sum_i M_i \Delta x_i$. Toda suma que use una altura de v elegida en cada pieza queda entre L y U. Al dividir una pieza, cada ínfimo nuevo es mayor o igual que el anterior y cada supremo nuevo menor o igual. Distribuir el ancho prueba que un refinamiento aumenta L y disminuye U.

Dos particiones tienen un refinamiento común formado por la unión de sus puntos. Por ello toda suma inferior de cualquier partición es menor o igual que toda suma superior de cualquier otra. Las sumas están acotadas por las cotas globales de v multiplicadas por b-a. Sus supremos e ínfimos existen y cumplen $\sup_P L(v,P) \le \inf_P U(v,P)$. Se define integrabilidad de Darboux por la igualdad de esos números, cuyo valor común es la integral I. Equivale a que para cada $\varepsilon > 0$ haya una partición con $U - L < \varepsilon$: una partición así encierra ambos números en un intervalo de longitud menor que cualquier tolerancia; recíprocamente, si ambos coinciden en I, se eligen una suma inferior mayor que $I - \varepsilon/2$ y una superior menor que $I + \varepsilon/2$ y se toma un refinamiento común.

Si v es Lipschitz con constante L, está acotada por $|v(a)| + L(b-a)$. En una pieza de ancho d, cualesquiera dos valores difieren en a lo sumo Ld. Tomando supremos e ínfimos se obtiene $M_i - m_i \le L\Delta x_i$. Para una malla h,

$$U - L \le L\sum_i (\Delta x_i)^2 \le Lh\sum_i \Delta x_i = L(b-a)h.$$

Las particiones uniformes hacen tender h a cero. El criterio anterior prueba integrabilidad. Como I y cualquier suma de alturas elegidas están entre L y U, su diferencia tiene magnitud a lo sumo $L(b-a)h$. Esto demuestra tanto la existencia como la garantía de aproximación usada en el capítulo.

Para justificar las operaciones de integrales, observemos que la oscilación de $\alpha u + \beta v$ en una pieza es a lo sumo $|\alpha|$ veces la oscilación de u más $|\beta|$ veces la de v. Si ambas funciones son integrables, elegir particiones con separaciones arbitrariamente pequeñas y refinarlas conjuntamente prueba integrabilidad de la combinación lineal. En esas particiones, una suma de alturas de la combinación es exactamente la combinación de las sumas respectivas; cada suma está a distancia arbitrariamente pequeña de su integral. Por unicidad del límite, la integral es la combinación de las integrales.

Para un punto c entre a y b, refinar una partición incluyendo c separa sus sumas en dos sumas sobre $[a,c]$ y $[c,b]$. Una función integrable en $[a,b]$ lo es en cada parte, porque las separaciones de sumas son no negativas y cada una queda acotada por la separación total. Recíprocamente, si es integrable en ambas partes, unir particiones de separación pequeña prueba integrabilidad en todo el intervalo. Sumar las cotas y hacerlas arbitrariamente próximas a sus valores comunes prueba aditividad. Si $u \le v$, para una misma selección de puntos cada suma de u es menor o igual que la de v. Usar particiones que aproximen ambas integrales prueba conservación del orden. Estas demostraciones tratan funciones acotadas e integrables; la condición Lipschitz es una hipótesis suficiente que ya las proporciona en nuestros ejemplos continuos.

Las funciones constantes por un número finito de tramos también son integrables. Si su magnitud está acotada por B, la oscilación es cero en las piezas que quedan dentro de un tramo constante. Sólo contribuyen a U-L las piezas que contienen puntos de salto o valores excepcionales de frontera. Con una cantidad finita k de tales puntos y malla h, esas piezas tienen longitud total a lo sumo 2kh; su contribución a U-L es a lo sumo 4Bkh. Hacer tender h a cero prueba el criterio. Las sumas restantes son los valores constantes multiplicados por sus duraciones, y las piezas excepcionales aportan una cantidad que tiende a cero. La integral es la suma de las contribuciones de los tramos. Cambiar un número finito de valores conserva el mismo argumento y la misma integral.

Para una función lineal $v(t) = \alpha t + \beta$ en $[a,b]$, una partición uniforme de n piezas tiene ancho $d = (b-a)/n$. La suma izquierda es

$$d\sum_{j=0}^{n-1}[\alpha(a+jd)+\beta] = (b-a)(\alpha a+\beta)+\frac{\alpha}{2}(b-a)^2\frac{n-1}{n}.$$

La función es Lipschitz con constante $|\alpha|$, así que la suma converge a su integral. Su límite es $(b-a)[v(a)+v(b)]/2$. Esta es la fórmula del trapecio orientado. Si la recta cambia de signo, la aditividad en su cero separa los dos triángulos. La suma orientada da el desplazamiento y la integral de su valor absoluto suma las magnitudes que dan la distancia.

Primitivas polinómicas y condiciones iniciales

Una primitiva de v en un intervalo es una función continua en ese intervalo y derivable en su interior, con derivada v allí. En un intervalo abierto, los puntos del intervalo son interiores; en uno cerrado se exige además continuidad en sus extremos. Si F y G son primitivas de v, su diferencia tiene derivada cero en el interior. El teorema del valor medio entre cualesquiera dos puntos demuestra que esa diferencia es constante. Las hipótesis de intervalo y continuidad conservan la posibilidad de comparar todos sus puntos.

La derivación polinómica comprueba directamente que $kt+C$ tiene derivada k y que $\alpha t^2/2+\beta t+C$ tiene derivada $\alpha t+\beta$. Cualquier otra primitiva difiere de ellas por una constante, por el argumento anterior. Prescribir $F(t_0)=y_0$ en la segunda familia da $C=y_0-\alpha t_0^2/2-\beta t_0$. Sustituir este valor verifica el dato inicial; la constancia de la diferencia asegura unicidad en el intervalo.

También la derivación de potencias demuestra que $t^{n+1}/(n+1)$ tiene derivada t^n para n entero no negativo. Dividir por n+1 es válido porque ese entero es positivo. Las combinaciones lineales permiten construir primitivas de polinomios. Los ejemplos $t^3/3$ y t^3-2t se comprueban mediante esa regla. Su utilización para evaluar integrales requiere además la conexión de la sección siguiente.

Acumulación y teorema fundamental elemental

Para una función integrable en un intervalo, se define la integral de a a a como cero y la integral de b a a como la opuesta de la de a a b. Esta convención extiende la aditividad a extremos en cualquier orden. La integral sobre un intervalo con orientación positiva de la constante c es c multiplicado por su longitud, como se probó mediante sumas; con orientación inversa, la misma identidad conserva el signo.

Sea v Lipschitz en $[a,b]$ con constante L. Sus restricciones a subintervalos también lo son y sus integrales existen. Definimos $F(x)=\int_a^x v(t)\,dt$. La cota global B de $|v|$ y la conservación del orden dan $|F(y)-F(x)|\le B|y-x|$, por lo que F es continua también en los extremos. Para x interior y h distinto de cero suficientemente pequeño, la aditividad da

$$F(x+h)-F(x)=\int_x^{x+h} v(t)\,dt.$$

En el intervalo entre x y x+h, $|v(t)-v(x)|\le L|h|$. La linealidad, el orden y la orientación dan

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-v(x)\right|\le L|h|.$$

La desigualdad vale para h de ambos signos: la magnitud de la integral del error está acotada por $L|h|^2$, y dividir por $|h|$ da la expresión anterior. Para L>0 se elige $\delta=\min(d,\varepsilon/L)$, donde d

es una distancia positiva que mantiene x+h dentro del intervalo. Si L=0, el error es cero y basta esa distancia d. Así queda demostrado $F'(x) = v(x)$ en el interior con un control explícito.

Si G es una primitiva continua en $[a, b]$, entonces G-F es continua en el intervalo cerrado y tiene derivada cero en su interior. Valor medio prueba que es constante. Como F(a)=0, evaluar la diferencia en los extremos da

$$\int_a^b v(t)\,dt = F(b) = G(b) - G(a).$$

Los polinomios cumplen las hipótesis sobre cualquier intervalo cerrado: su derivada es continua y alcanza una cota finita por el teorema de extremos demostrado en «Aproximación local, extremos y valor medio». La cota de la derivada proporciona una constante Lipschitz por valor medio. Así quedan justificadas las evaluaciones polinómicas de este capítulo. El teorema se ha probado bajo las hipótesis aquí enunciadas; las extensiones a clases más generales de funciones e integrales forman parte del desarrollo posterior del cálculo.

La cota de error de una suma de alturas elegidas se demostró en «Particiones, áreas orientadas e integrabilidad». Para n piezas iguales de $[a, b]$, la malla es $(b - a)/n$ y la garantía queda en $L(b-a)^2/n$. Elegir n para que esta expresión sea menor o igual que el margen pedido produce las garantías de los problemas finales. Las sumas de cuadrados empleadas allí pueden comprobarse por inducción: $\sum_{j=0}^{n-1} j^2 = n(n-1)(2n-1)/6$ es cierta para n=1 y la diferencia entre las expresiones consecutivas es n^2. Las fracciones exactas del texto contrastan el error efectivo con esa garantía general.

GNU Free Documentation License

Version 1.3, 3 November 2008

Copyright (C) 2000, 2001, 2002, 2007, 2008 Free Software Foundation, Inc. <https://fsf.org/> Everyone is permitted to copy and distribute verbatim copies of this license document, but changing it is not allowed.

0. PREAMBLE

The purpose of this License is to make a manual, textbook, or other functional and useful document "free" in the sense of freedom: to assure everyone the effective freedom to copy and redistribute it, with or without modifying it, either commercially or noncommercially. Secondarily, this License preserves for the author and publisher a way to get credit for their work, while not being considered responsible for modifications made by others.

This License is a kind of "copyleft", which means that derivative works of the document must themselves be free in the same sense. It complements the GNU General Public License, which is a copyleft license designed for free software.

We have designed this License in order to use it for manuals for free software, because free software needs free documentation: a free program should come with manuals providing the same freedoms that the software does. But this License is not limited to software manuals; it can be used for any textual work, regardless of subject matter or whether it is published as a printed book. We recommend this License principally for works whose purpose is instruction or reference.

1. APPLICABILITY AND DEFINITIONS

This License applies to any manual or other work, in any medium, that contains a notice placed by the copyright holder saying it can be distributed under the terms of this License. Such a notice grants a world-wide, royalty-free license, unlimited in duration, to use that work under the conditions stated herein. The "Document", below, refers to any such manual or work. Any member of the public is a licensee, and is addressed as "you". You accept the license if you copy, modify or distribute the work in a way requiring permission under copyright law.

A "Modified Version" of the Document means any work containing the Document or a portion of it, either copied verbatim, or with modifications and/or translated into another language.

A "Secondary Section" is a named appendix or a front-matter section of the Document that deals exclusively with the relationship of the publishers or authors of the Document to the Document's overall subject (or to related matters) and contains nothing that could fall directly within that overall subject. (Thus, if the Document is in part a textbook of mathematics, a Secondary Section may not explain any mathematics.) The relationship could be a matter of historical connection with the subject or with related matters, or of legal, commercial, philosophical, ethical or political position regarding them.

The "Invariant Sections" are certain Secondary Sections whose titles are designated, as being those of Invariant Sections, in the notice that says that the Document is released under this License. If a section does not fit the above definition of Secondary then it is not allowed to be designated as Invariant. The Document may contain zero Invariant Sections. If the Document does not identify any Invariant Sections then there are none.

The ”Cover Texts” are certain short passages of text that are listed, as Front-Cover Texts or Back-Cover Texts, in the notice that says that the Document is released under this License. A Front-Cover Text may be at most 5 words, and a Back-Cover Text may be at most 25 words.

A ”Transparent” copy of the Document means a machine-readable copy, represented in a format whose specification is available to the general public, that is suitable for revising the document straightforwardly with generic text editors or (for images composed of pixels) generic paint programs or (for drawings) some widely available drawing editor, and that is suitable for input to text formatters or for automatic translation to a variety of formats suitable for input to text formatters. A copy made in an otherwise Transparent file format whose markup, or absence of markup, has been arranged to thwart or discourage subsequent modification by readers is not Transparent. An image format is not Transparent if used for any substantial amount of text. A copy that is not ”Transparent” is called ”Opaque”.

Examples of suitable formats for Transparent copies include plain ASCII without markup, Texinfo input format, LaTeX input format, SGML or XML using a publicly available DTD, and standard-conforming simple HTML, PostScript or PDF designed for human modification. Examples of transparent image formats include PNG, XCF and JPG. Opaque formats include proprietary formats that can be read and edited only by proprietary word processors, SGML or XML for which the DTD and/or processing tools are not generally available, and the machine-generated HTML, PostScript or PDF produced by some word processors for output purposes only.

The ”Title Page” means, for a printed book, the title page itself, plus such following pages as are needed to hold, legibly, the material this License requires to appear in the title page. For works in formats which do not have any title page as such, ”Title Page” means the text near the most prominent appearance of the work’s title, preceding the beginning of the body of the text.

The ”publisher” means any person or entity that distributes copies of the Document to the public.

A section ”Entitled XYZ” means a named subunit of the Document whose title either is precisely XYZ or contains XYZ in parentheses following text that translates XYZ in another language. (Here XYZ stands for a specific section name mentioned below, such as ”Acknowledgements”, ”Dedications”, ”Endorsements”, or ”History”.) To ”Preserve the Title” of such a section when you modify the Document means that it remains a section ”Entitled XYZ” according to this definition.

The Document may include Warranty Disclaimers next to the notice which states that this License applies to the Document. These Warranty Disclaimers are considered to be included by reference in this License, but only as regards disclaiming warranties: any other implication that these Warranty Disclaimers may have is void and has no effect on the meaning of this License.

2. VERBATIM COPYING

You may copy and distribute the Document in any medium, either commercially or noncommercially, provided that this License, the copyright notices, and the license notice saying this License applies to the Document are reproduced in all copies, and that you add no other conditions whatsoever to those of this License. You may not use technical measures to obstruct or control the reading or further copying of the copies you make or distribute. However, you may accept compensation in exchange for copies. If you distribute a large enough number of copies you must also follow the conditions in section 3.

You may also lend copies, under the same conditions stated above, and you may publicly display copies.

3. COPYING IN QUANTITY

If you publish printed copies (or copies in media that commonly have printed covers) of the Document, numbering more than 100, and the Document’s license notice requires Cover Texts, you must enclose the copies in covers that carry, clearly and legibly, all these Cover Texts: Front-Cover Texts on the front cover, and Back-Cover Texts on the back cover. Both covers must also clearly and legibly identify you as the publisher of these copies. The front cover must present the full title with all words of the title equally prominent and visible. You may add other material on the covers in addition. Copying with changes limited to the covers, as long as they preserve the title of the Document and satisfy these conditions, can be treated as verbatim copying in other respects.

If the required texts for either cover are too voluminous to fit legibly, you should put the first ones listed (as many as fit reasonably) on the actual cover, and continue the rest onto adjacent pages.

If you publish or distribute Opaque copies of the Document numbering more than 100, you must either include a machine-readable Transparent copy along with each Opaque copy, or state in or with each Opaque copy a computer-network location from which the general network-using public has access to download using public-standard network protocols a complete Transparent copy of the Document, free of added material. If you use the latter option, you must take reasonably prudent steps, when you begin distribution of Opaque copies in quantity, to ensure that this Transparent copy will remain thus accessible at the stated location until at least one year after the last time you distribute an Opaque copy (directly or through your agents or retailers) of that edition to the public.

It is requested, but not required, that you contact the authors of the Document well before redistributing any large number of copies, to give them a chance to provide you with an updated version of the Document.

4. MODIFICATIONS

You may copy and distribute a Modified Version of the Document under the conditions of sections 2 and 3 above, provided that you release the Modified Version under precisely this License, with the Modified Version filling the role of the Document, thus licensing distribution and modification of the Modified Version to whoever possesses a copy of it. In addition, you must do these things in the Modified Version:

A. Use in the Title Page (and on the covers, if any) a title distinct from that of the Document, and from those of previous versions (which should, if there were any, be listed in the History section of the Document). You may use the same title as a previous version if the original publisher of that version gives permission. B. List on the Title Page, as authors, one or more persons or entities responsible for authorship of the modifications in the Modified Version, together with at least five of the principal authors of the Document (all of its principal authors, if it has fewer than five), unless they release you from this requirement. C. State on the Title page the name of the publisher of the Modified Version, as the publisher. D. Preserve all the copyright notices of the Document. E. Add an appropriate copyright notice for your modifications adjacent to the other copyright notices. F. Include, immediately after the copyright notices, a license notice giving the public permission to use the Modified Version under the terms of this License, in the form shown in the Addendum below. G. Preserve in that license notice the full lists of Invariant Sections and required Cover Texts given in the Document's license notice. H. Include an unaltered copy of this License. I. Preserve the section Entitled "History", Preserve its Title, and add to it an item stating at least the title, year, new authors, and publisher of the Modified Version as given on the Title Page. If there is no section Entitled "History" in the Document, create one stating the title, year, authors, and publisher of the Document as given on its Title Page, then add an item describing the Modified Version as stated in the previous sentence. J. Preserve the network location, if any, given in the Document for public access to a Transparent copy of the Document, and likewise the network locations given in the Document for previous versions it was based on. These may be placed in the "History" section. You may omit a network location for a work that was published at least four years before the Document itself, or if the original publisher of the version it refers to gives permission. K. For any section Entitled "Acknowledgements" or "Dedications", Preserve the Title of the section, and preserve in the section all the substance and tone of each of the contributor acknowledgements and/or dedications given therein. L. Preserve all the Invariant Sections of the Document, unaltered in their text and in their titles. Section numbers or the equivalent are not considered part of the section titles. M. Delete any section Entitled "Endorsements". Such a section may not be included in the Modified Version. N. Do not retitle any existing section to be Entitled "Endorsements" or to conflict in title with any Invariant Section. O. Preserve any Warranty Disclaimers.

If the Modified Version includes new front-matter sections or appendices that qualify as Secondary Sections and contain no material copied from the Document, you may at your option designate some or all of these sections as invariant. To do this, add their titles to the list of Invariant Sections in the Modified Version's license notice. These titles must be distinct from any other section titles.

You may add a section Entitled ”Endorsements”, provided it contains nothing but endorsements of your Modified Version by various parties–for example, statements of peer review or that the text has been approved by an organization as the authoritative definition of a standard.

You may add a passage of up to five words as a Front-Cover Text, and a passage of up to 25 words as a Back-Cover Text, to the end of the list of Cover Texts in the Modified Version. Only one passage of Front-Cover Text and one of Back-Cover Text may be added by (or through arrangements made by) any one entity. If the Document already includes a cover text for the same cover, previously added by you or by arrangement made by the same entity you are acting on behalf of, you may not add another; but you may replace the old one, on explicit permission from the previous publisher that added the old one.

The author(s) and publisher(s) of the Document do not by this License give permission to use their names for publicity for or to assert or imply endorsement of any Modified Version.

5. COMBINING DOCUMENTS

You may combine the Document with other documents released under this License, under the terms defined in section 4 above for modified versions, provided that you include in the combination all of the Invariant Sections of all of the original documents, unmodified, and list them all as Invariant Sections of your combined work in its license notice, and that you preserve all their Warranty Disclaimers.

The combined work need only contain one copy of this License, and multiple identical Invariant Sections may be replaced with a single copy. If there are multiple Invariant Sections with the same name but different contents, make the title of each such section unique by adding at the end of it, in parentheses, the name of the original author or publisher of that section if known, or else a unique number. Make the same adjustment to the section titles in the list of Invariant Sections in the license notice of the combined work.

In the combination, you must combine any sections Entitled ”History” in the various original documents, forming one section Entitled ”History”; likewise combine any sections Entitled ”Acknowledgements”, and any sections Entitled ”Dedications”. You must delete all sections Entitled ”Endorsements”.

6. COLLECTIONS OF DOCUMENTS

You may make a collection consisting of the Document and other documents released under this License, and replace the individual copies of this License in the various documents with a single copy that is included in the collection, provided that you follow the rules of this License for verbatim copying of each of the documents in all other respects.

You may extract a single document from such a collection, and distribute it individually under this License, provided you insert a copy of this License into the extracted document, and follow this License in all other respects regarding verbatim copying of that document.

7. AGGREGATION WITH INDEPENDENT WORKS

A compilation of the Document or its derivatives with other separate and independent documents or works, in or on a volume of a storage or distribution medium, is called an ”aggregate” if the copyright resulting from the compilation is not used to limit the legal rights of the compilation’s users beyond what the individual works permit. When the Document is included in an aggregate, this License does not apply to the other works in the aggregate which are not themselves derivative works of the Document.

If the Cover Text requirement of section 3 is applicable to these copies of the Document, then if the Document is less than one half of the entire aggregate, the Document’s Cover Texts may be placed on covers that bracket the Document within the aggregate, or the electronic equivalent of covers if the Document is in electronic form. Otherwise they must appear on printed covers that bracket the whole aggregate.

8. TRANSLATION

Translation is considered a kind of modification, so you may distribute translations of the Document under the terms of section 4. Replacing Invariant Sections with translations requires special permission

from their copyright holders, but you may include translations of some or all Invariant Sections in addition to the original versions of these Invariant Sections. You may include a translation of this License, and all the license notices in the Document, and any Warranty Disclaimers, provided that you also include the original English version of this License and the original versions of those notices and disclaimers. In case of a disagreement between the translation and the original version of this License or a notice or disclaimer, the original version will prevail.

If a section in the Document is Entitled "Acknowledgements", "Dedications", or "History", the requirement (section 4) to Preserve its Title (section 1) will typically require changing the actual title.

9. TERMINATION

You may not copy, modify, sublicense, or distribute the Document except as expressly provided under this License. Any attempt otherwise to copy, modify, sublicense, or distribute it is void, and will automatically terminate your rights under this License.

However, if you cease all violation of this License, then your license from a particular copyright holder is reinstated (a) provisionally, unless and until the copyright holder explicitly and finally terminates your license, and (b) permanently, if the copyright holder fails to notify you of the violation by some reasonable means prior to 60 days after the cessation.

Moreover, your license from a particular copyright holder is reinstated permanently if the copyright holder notifies you of the violation by some reasonable means, this is the first time you have received notice of violation of this License (for any work) from that copyright holder, and you cure the violation prior to 30 days after your receipt of the notice.

Termination of your rights under this section does not terminate the licenses of parties who have received copies or rights from you under this License. If your rights have been terminated and not permanently reinstated, receipt of a copy of some or all of the same material does not give you any rights to use it.

10. FUTURE REVISIONS OF THIS LICENSE

The Free Software Foundation may publish new, revised versions of the GNU Free Documentation License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns. See https://www.gnu.org/licenses/.

Each version of the License is given a distinguishing version number. If the Document specifies that a particular numbered version of this License "or any later version" applies to it, you have the option of following the terms and conditions either of that specified version or of any later version that has been published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document does not specify a version number of this License, you may choose any version ever published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document specifies that a proxy can decide which future versions of this License can be used, that proxy's public statement of acceptance of a version permanently authorizes you to choose that version for the Document.

11. RELICENSING

"Massive Multiauthor Collaboration Site" (or "MMC Site") means any World Wide Web server that publishes copyrightable works and also provides prominent facilities for anybody to edit those works. A public wiki that anybody can edit is an example of such a server. A "Massive Multiauthor Collaboration" (or "MMC") contained in the site means any set of copyrightable works thus published on the MMC site.

"CC-BY-SA" means the Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 license published by Creative Commons Corporation, a not-for-profit corporation with a principal place of business in San Francisco, California, as well as future copyleft versions of that license published by that same organization.

"Incorporate" means to publish or republish a Document, in whole or in part, as part of another Document.

An MMC is "eligible for relicensing" if it is licensed under this License, and if all works that were first published under this License somewhere other than this MMC, and subsequently incorporated in whole

or in part into the MMC, (1) had no cover texts or invariant sections, and (2) were thus incorporated prior to November 1, 2008.

The operator of an MMC Site may republish an MMC contained in the site under CC-BY-SA on the same site at any time before August 1, 2009, provided the MMC is eligible for relicensing.

ADDENDUM: How to use this License for your documents

To use this License in a document you have written, include a copy of the License in the document and put the following copyright and license notices just after the title page:

Copyright (c) YEAR YOUR NAME. Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.3 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled ”GNU Free Documentation License”.

If you have Invariant Sections, Front-Cover Texts and Back-Cover Texts, replace the ”with...Texts.” line with this:

with the Invariant Sections being LIST THEIR TITLES, with the Front-Cover Texts being LIST, and with the Back-Cover Texts being LIST.

If you have Invariant Sections without Cover Texts, or some other combination of the three, merge those two alternatives to suit the situation.

If your document contains nontrivial examples of program code, we recommend releasing these examples in parallel under your choice of free software license, such as the GNU General Public License, to permit their use in free software.