Análisis

real para matemáticos

Un enfoque visual y geométrico

A. Peña

TEORÍA, EJERCICIOS Y PERSPECTIVA

Matemática²biertA

MATEMATICAABIERTA.CL

Análisis real para matemáticos
Un enfoque visual y geométrico

A. Peña · Matemática Abierta

A4 para lectura digital.
32 capítulos, prefacio y epílogo; 1.290 ejercicios.

Los 1.290 ejercicios incluyen sus soluciones desarrolladas bajo sus preguntas.

Licencia: GNU Free Documentation License, versión 1.3 o posterior. El proyecto incluye el texto completo de la licencia.
`https://www.gnu.org/licenses/fdl-1.3.html`

Prefacio

Al aprender cálculo descubrimos que podemos estudiar el movimiento en un instante, aproximar una curva por una recta y obtener una cantidad acumulada a partir de contribuciones cada vez más pequeñas. Aprendemos a trabajar con límites, derivadas e integrales; vemos cómo esas ideas se relacionan y cómo permiten resolver problemas que la aritmética y el álgebra elementales no alcanzaban a formular. Pero, junto con ese aprendizaje, aparecen preguntas que merecen un recorrido propio. ¿Por qué existen los límites cuya existencia afirmamos? ¿Qué propiedad de los números reales sostiene nuestros argumentos? ¿Cuándo podemos pasar de una aproximación a una igualdad, o intercambiar un límite con otra operación?

Este libro nace de esas preguntas y continúa el camino de *Cálculo para matemáticos*. La relación entre ambos puede expresarse en una frase: **lo que allí asumimos, aquí lo demostramos**. La frase señala un cambio de profundidad. En el libro de cálculo encontramos explicaciones y demostraciones, pero también aceptamos ciertas propiedades de la recta real como punto de partida y utilizamos resultados cuyo fundamento completo exige detenerse más de lo que conviene en una primera exploración. Aquí hacemos de esos fundamentos un objeto de estudio: reconstruimos las razones que permiten confiar en las herramientas y examinamos las hipótesis bajo las cuales funcionan.

Pensemos en una sucesión creciente que permanece por debajo de una cota. Sus términos avanzan sin retroceder y no pueden crecer indefinidamente. Es natural imaginar que se aproximan a un límite. Sin embargo, esa imagen contiene una pregunta: ¿el punto al que se acercan pertenece necesariamente al sistema numérico en el que estamos trabajando? En los racionales, una sucesión creciente y acotada puede aproximarse a un número que no es racional. En los reales, el teorema de convergencia monótona garantiza la existencia del límite. Comprender esa diferencia nos lleva a la completitud y, finalmente, a preguntar cómo se construye una recta en la que tales límites tengan un lugar.

Por eso comenzamos construyendo los números reales a partir de los racionales. El propósito es que una expresión tan familiar como «la recta real» deje de ocultar una promesa que todavía no hemos examinado. Veremos qué significa completar un sistema numérico, cómo se definen en él el orden y las operaciones, y en qué sentido el resultado es esencialmente único. Después podremos reconocer, dentro de las demostraciones, el momento preciso en que esa construcción entrega algo decisivo: un supremo, un límite o un punto cuya existencia no se desprendía de la sola aritmética.

Una motivación semejante recorre el resto del libro. Cuando una función continua toma valores de signos opuestos en los extremos de un intervalo, queremos entender por qué debe anularse en algún punto intermedio. Cuando alcanza un máximo en un intervalo cerrado y acotado, queremos saber qué aportan la continuidad y el dominio. Cuando una sucesión de funciones converge, necesitamos distinguir el control de cada punto por separado del control simultáneo de toda la función. Las hipótesis adquieren así un papel concreto: cada una permite un paso, y los contraejemplos muestran qué puede ocurrir cuando falta.

La geometría acompañará este trabajo. Una ventana alrededor de un punto ayuda a pensar la proximidad; una barrera permite interpretar una cota; una sucesión de refinamientos hace visible la aproximación; un cambio de escala revela el comportamiento local de una función. Queremos que esas representaciones participen en la comprensión. También aprenderemos a reconocer su alcance: un dibujo puede sugerir una afirmación, mostrar la estrategia de un

argumento o representar una construcción, pero la validez general requiere precisar qué se afirma y justificarlo.

Para que una imagen haga matemática, debemos poder decir qué representa y qué cambia en ella. Una distancia expresa cuánto separa dos puntos; un error compara una aproximación con aquello que queremos aproximar; una escala determina qué diferencias podemos distinguir. Al estudiar un límite, preguntaremos cómo lograr que el error quede por debajo de cualquier tolerancia fijada. Al estudiar una derivada, observaremos qué sucede al ampliar una región cada vez más pequeña. Al estudiar una integral, seguiremos el efecto de refinar una partición. Así, distancia, error, escala, aproximación y control forman un lenguaje que reaparecerá en situaciones distintas.

Ese lenguaje exige traducir en ambas direcciones. De la figura pasamos a la definición: expresamos con precisión la propiedad que intentábamos ver. De la definición regresamos a la figura: interpretamos sus condiciones y reconocemos qué obliga a hacer cada una. Una afirmación sobre todos los puntos de un conjunto no puede verificarse examinando sólo los que aparecen dibujados; una aproximación muy buena todavía requiere un argumento que permita mejorarla cuanto queramos. Aprenderemos a separar lo que una representación muestra en un caso de lo que una demostración establece en general.

Podemos resumir este movimiento en cuatro acciones: **ver, formular, demostrar y volver a ver**. El último paso importa tanto como el primero. Después de una prueba, la misma imagen puede revelar una estructura que al comienzo pasaba inadvertida. La geometría se vuelve entonces una forma de recordar el argumento y de reconocer dónde podría servir de nuevo.

El recorrido irá de la intuición a la formulación y a la demostración, para regresar después a la intuición con una comprensión más rica. Una definición debe responder a una necesidad que el lector pueda reconocer. Una prueba debe dejar ver su estrategia: qué buscamos, qué herramientas tenemos, qué obstáculo aparece y por qué introducimos un objeto auxiliar. Al terminar, conviene volver sobre lo obtenido y preguntarnos qué sabemos ahora que antes sólo podíamos sospechar.

Esta es también una manera de aprender a leer y escribir matemáticas. Seguir una demostración exige atender al orden de las elecciones, distinguir una afirmación local de una global y reconocer qué puede depender de qué. La notación y los cuantificadores expresan esas relaciones. Los ejemplos, las preguntas y los ejercicios con soluciones desarrolladas ayudarán a convertirlas en hábitos de pensamiento. El lector encontrará ocasiones para detenerse, ensayar un argumento y contrastarlo con una explicación completa.

Quien llegue desde *Cálculo para matemáticos* reconocerá muchos de los objetos del recorrido. Esa familiaridad permitirá dirigir la atención hacia sus fundamentos, sus relaciones y sus límites de validez. La práctica de cálculo ya adquirida será un apoyo; aquí la tarea principal consistirá en comprender la estructura que la sostiene. Al avanzar hacia los espacios métricos, veremos además cuáles de esas ideas pueden formularse cuando dejamos de trabajar exclusivamente sobre la recta real.

El análisis comienza a volverse propio cuando podemos explicar por qué una herramienta funciona, decidir si sus hipótesis se cumplen y reconocer cuándo hace falta construir otra. Ese es el propósito de este libro: acompañar el paso desde el uso consciente del cálculo hacia la comprensión de las razones que lo hacen posible.

Índice

Prefacio ii

Capítulo 0. Construir los números reales 1
0.1. ¿Existen los números reales? 1
0.2. Extender sin perder estructura: de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Q}$ 5
0.3. El obstáculo: $\mathbb{Q}$ no está completo 9
0.4. Construir una frontera sin tener el punto 14
0.5. Una copia de $\mathbb{Q}$ dentro del nuevo sistema 21
0.6. Dar aritmética a las cortaduras I: suma y opuesto 26
0.7. Dar aritmética a las cortaduras II: producto e inverso 33
0.8. Sí existen: el supremo como unión 46
0.9. ¿Podría haber otros reales? 51
0.10. Únicos hasta isomorfismo 59
Lectura complementaria 62
Lectura complementaria 62
Lectura complementaria 62

Capítulo 1. La recta real como espacio ordenado y métrico 71
1.1. La misma recta, varias estructuras 71
1.2. Orden: izquierda, derecha y estar entre 74
1.3. Valor absoluto: distancia al origen 77
1.4. Distancia entre dos puntos reales 81
1.5. La desigualdad triangular y la geometría de «estar entre» 85
1.6. Bolas métricas: ventanas alrededor de un punto 90
1.7. Traducir entre orden, distancia y tolerancia 95
1.8. Qué ve el orden y qué ve la distancia 100

Capítulo 2. Cotas, extremos y barreras 108
2.1. Controlar un conjunto desde arriba y desde abajo 108
2.2. Extremos alcanzados: máximo y mínimo 112
2.3. La mejor barrera: supremo e ínfimo 117
2.4. Alcanzado frente a no alcanzado 122
2.5. Acercarse a una barrera sin tocarla 127
2.6. Comparar conjuntos por sus barreras 132
2.7. Definir una barrera no garantiza que exista 140
2.8. De las barreras a la completitud 146

Capítulo 3. Completitud: una recta sin huecos 152
3.1. El problema heredado: definir no basta 152
3.2. El principio del supremo 158
3.3. La cara dual: el principio del ínfimo 162
3.4. Una consecuencia decisiva: la propiedad arquimediana 168
3.5. Intervalos encajados: conservar un punto al refinar 173
3.6. Refinar hasta aislar un único punto 180
3.7. Tres lenguajes para una recta sin huecos 188

3.8. Dónde se gasta la completitud 198

Capítulo 4. Mirar localmente un conjunto 206
4.1. Ventanas alrededor de un punto: vecindades 206
4.2. Interior y exterior: tener margen 210
4.3. Clausura: puntos que no pueden evitar al conjunto 215
4.4. Frontera: toda ventana ve ambos lados 220
4.5. Acumulación: el conjunto reaparece alrededor del punto 225
4.6. Puntos aislados y descomposición local 229
4.7. Abiertos y cerrados: de lo local a lo global 233
4.8. Un diccionario local para leer conjuntos 239

Capítulo 5. Sucesiones y comportamiento eventual 246
5.1. Una sucesión es una función: índice y término 246
5.2. El orden de las visitas importa 250
5.3. Ver una sucesión sin perder el índice 254
5.4. Colas: olvidar un comienzo finito 259
5.5. «A partir de cierto momento»: propiedades eventuales 265
5.6. Eventualmente no significa infinitas veces 270
5.7. Sincronizar colas y olvidar perturbaciones finitas 276
5.8. Captura eventual: la puerta a ε–N 282

Capítulo 6. Convergencia: el juego de ε y N 288
6.1. Una ventana para cada tolerancia 288
6.2. Quién elige qué: leer y negar la definición 290
6.3. Construir el umbral 293
6.4. Un solo destino; el comienzo puede cambiar 296
6.5. Qué control deja una sucesión convergente 299
6.6. Calcular límites sin perder las hipótesis 302
6.7. Orden y captura entre dos sucesiones 307
6.8. Elegir un argumento y comprobar su alcance 311

Capítulo 7. Monotonía, cotas y existencia de límites 314
7.1. Comparar términos: qué significa ser monótona 314
7.2. El conjunto de valores y su mejor barrera 319
7.3. La completitud convierte una barrera en límite 324
7.4. Cambiar la dirección y descartar un prefijo 328
7.5. Qué falla al retirar una hipótesis 334
7.6. Una recurrencia: existir antes de calcular 340
7.7. La misma construcción sobre los racionales 344
7.8. Elegir el argumento y declarar su alcance 349

Capítulo 8. Subsucesiones, acumulación y Bolzano–Weierstrass 353
8.1. Seleccionar términos sin perder el orden 353
8.2. Lo que conserva una subsucesión 355
8.3. Regresar cerca de un punto 357
8.4. Puntos de una sucesión y puntos de un conjunto 359
8.5. Dividir el espacio y conservar índices 362
8.6. Bolzano–Weierstrass: construir la extracción 365
8.7. De la extracción a los conjuntos 367
8.8. Cuándo las extracciones determinan la sucesión 370

Capítulo 9. Límite superior e inferior: las envolventes de una cola 373
9.1. Conservar la cola y olvidar el prefijo 373
9.2. Dos envolventes que sí tienen dirección 375

9.3. Fronteras eventuales y visitas tardías 376
9.4. Alcanzar las fronteras mediante extracciones 378
9.5. Medir la oscilación y reconocer convergencia 381
9.6. Cambiar términos sin cambiar las fronteras 383
9.7. Comparar y combinar comportamientos 384
9.8. Qué describen los extremos y qué dejan abierto 386

Capítulo 10. Cauchy: converger sin conocer el destino 389
10.1. Comparar términos sin nombrar un límite 390
10.2. Del destino común al control interno 393
10.3. Encerrar una cola y recuperar la acotación 395
10.4. La completitud construye el destino 398
10.5. Negar Cauchy: encontrar pares separados 402
10.6. Conservar el control al operar 405
10.7. La distancia permanece; el codominio cambia 407
10.8. Estimar el error antes de conocer la respuesta 411

Capítulo 11. Series como laboratorio de convergencia 416
11.1. De los términos a las sumas parciales 416
11.2. Cauchy mide bloques completos 418
11.3. Fórmulas finitas y restos exactos 421
11.4. Acumulación positiva y barreras 424
11.5. Control absoluto de la acumulación 426
11.6. Alternancia: encerrar sin sumar magnitudes 428
11.7. Agrupar términos y conservar el recorrido 431
11.8. Elegir un control y certificar el error 434

Capítulo 12. Qué hace una función 438
12.1. Una función tiene un tipo 438
12.2. Imagen: transportar un conjunto 441
12.3. Preimagen: seleccionar por la salida 443
12.4. Qué operaciones sobreviven al transporte 445
12.5. Componer, restringir y deshacer 448
12.6. Transportar el orden no rellena los huecos 450
12.7. Distancia y escala: medir la deformación 453
12.8. Representaciones y ventanas de control 455

Capítulo 13. Límites de funciones: control de dos escalas 460
13.1. Aproximarse sin tocar el centro 460
13.2. Diseñar una respuesta para toda la ventana 462
13.3. Un destino, barreras locales y orden 465
13.4. Negar un candidato y construir infracciones 467
13.5. Lo que detectan las sucesiones 469
13.6. Combinar límites con presupuestos de error 472
13.7. Cambiar las rutas disponibles 474
13.8. Componer controles sin perder la perforación 477

Capítulo 14. Continuidad: transportar proximidad 481
14.1. Hacer del valor central el destino 481
14.2. El dominio y la reparación de un hueco 483
14.3. Transportar sucesiones que sí pueden tocar el centro 486
14.4. Preimágenes: de controles locales a conjuntos abiertos 488
14.5. Operar y componer sin perder el dominio 491
14.6. Lo que la continuidad no promete sobre imágenes e inversas 494

14.7. Reunir definiciones locales y piezas cerradas 496
14.8. Certificados de proximidad y límites del control lineal 499

Capítulo 15. Conexidad: por qué un intervalo no se rompe 503
15.1. Qué tendría que hacer una separación 503
15.2. El supremo impide romper un intervalo 506
15.3. Un hueco produce dos lados 508
15.4. La continuidad transporta la imposibilidad de separar 511
15.5. El valor intermedio como consecuencia estructural 513
15.6. Bisección: existencia, localización y alcance del cálculo 515
15.7. Inyectividad, orden y continuidad de la inversa 518
15.8. Componentes: los intervalos máximos dentro de un dominio 521

Capítulo 16. Compacidad: del control local al control finito 525
16.1. Una cubierta dada y una reducción finita 525
16.2. El supremo prolonga los segmentos cubiertos 528
16.3. Heredar compacidad sin perder índices 530
16.4. Heine–Borel: cerrar las dos direcciones 532
16.5. Sucesiones: extraer y seleccionar son tareas distintas 535
16.6. La continuidad lleva compactos a compactos 538
16.7. Por qué los extremos llegan a alcanzarse 540
16.8. Márgenes positivos e inversas sobre compactos 543

Capítulo 17. Continuidad uniforme: una escala que sirve para todo 547
17.1. Un radio antes de conocer los dos puntos 547
17.2. Una cubierta y una escala de protección 550
17.3. Heine–Cantor: reducir antes de tomar el mínimo 552
17.4. Medir la oscilación a cada escala 555
17.5. Transportar tolerancias por operaciones 558
17.6. Pares próximos y rutas dadas 560
17.7. Completar el dominio sin seleccionar aproximantes 563
17.8. Datos finitos y aproximaciones poligonales 566

Capítulo 18. Diferenciabilidad: mirar cada vez más cerca 570
18.1. Pendientes con un centro fijo 570
18.2. El error que desaparece al ampliar 572
18.3. Continuidad, esquinas y alcance del control 575
18.4. Operaciones sobre incrementos 577
18.5. La cadena cuando el incremento interior se anula 579
18.6. Invertir la pendiente exige volver al punto 582
18.7. Una derivada es otra función 584
18.8. Certificar una aproximación local 587

Capítulo 19. De lo local a lo global 591
19.1. Un extremo interior obliga a detenerse 591
19.2. Rolle: volver a la misma altura 593
19.3. Restar la secante para encontrar una tangente 596
19.4. El intervalo convierte signos en orden 598
19.5. De cotas de derivadas a cotas de incrementos 600
19.6. Comparar dos variaciones en el mismo punto 602
19.7. Darboux: discontinuidad sin saltar valores 604
19.8. Certificar ceros y soluciones únicas 606

Capítulo 20. Convexidad y control por tangentes y secantes 609
20.1. Un segmento impone un orden 609

20.2. Tres pendientes y una rigidez 611
20.3. La convexidad fabrica continuidad 614
20.4. Rectas que sostienen y una envolvente 616
20.5. Derivadas ordenadas, curvas convexas 619
20.6. La segunda derivada y sus límites 621
20.7. Jensen: combinar sin perder el control 624
20.8. Bandas cuadráticas y mínimos certificados 626

Capítulo 21. Taylor: modelos locales y error 630
21.1. Un polinomio para los datos de un centro 630
21.2. Rolle se repite sin perder sus hipótesis 632
21.3. Forzar el resto: la fórmula de Lagrange 635
21.4. Un punto desconocido, una cota verificable 637
21.5. Peano: lo que desaparece al cambiar de escala 639
21.6. La primera derivada que no se anula 642
21.7. Aproximantes con certificados racionales 644
21.8. Combinar modelos y elegir la resolución 647

Capítulo 22. Partir, refinar, acumular 650
22.1. Un intervalo convertido en datos finitos 650
22.2. Refinar conservando los cortes 651
22.3. La malla mide el peor intervalo 653
22.4. Etiquetas y acumulación firmada 654
22.5. Lo que un cambio de etiquetas puede alterar 656
22.6. Escalones: exactitud finita y nodos excepcionales 657
22.7. Un límite que todas las etiquetas deben compartir 659
22.8. Certificados antes de fórmulas de integración 661

Capítulo 23. Integral de Riemann y Darboux 663
23.1. Cotas de valores y oscilación 663
23.2. Dos sumas que el refinamiento sí ordena 665
23.3. Completitud y criterio de Darboux 666
23.4. El puente hacia todas las sumas de Riemann 668
23.5. Clases integrables y radios útiles 670
23.6. Álgebra de funciones e integrales 672
23.7. Restringir, pegar y orientar 674
23.8. Certificar un valor y reconocer el alcance 676

Capítulo 24. El teorema fundamental del cálculo 679
24.1. Construir una función de acumulación 679
24.2. Incrementos, cotas y continuidad 681
24.3. La tasa reaparece en un punto 683
24.4. Bordes, saltos y valores aislados 685
24.5. De una primitiva a la integral 687
24.6. Normalización, cálculo y signo 689
24.7. Partes y cambio de variable 690
24.8. Qué invierte el teorema y qué conserva 693

Capítulo 25. La frontera de Riemann 696
25.1. El presupuesto de oscilación 696
25.2. Discontinuidades que caben en collares 698
25.3. La obstrucción densa de Dirichlet 700
25.4. Thomae: alturas pequeñas y picos finitos 702
25.5. Un criterio exacto por niveles 704

25.6. Un soporte infinito de longitud evanescente 706
25.7. Cambiar muchos valores y aproximar 708
25.8. La frontera y el paso que todavía falta 710

Capítulo 26. Sucesiones de funciones: converger punto por punto 713
26.1. Dos índices, dos maneras de mirar 713
26.2. Una cola para cada entrada 715
26.3. Lo que se transporta columna por columna 717
26.4. Potencias y una discontinuidad nueva 719
26.5. Cambiar la entrada mientras cambia el índice 721
26.6. Picos que ninguna entrada fija retiene 723
26.7. Tres intercambios que pueden fallar 725
26.8. Certificados que recuperan control 727

Capítulo 27. Convergencia uniforme: controlar toda la función a la vez 731
27.1. Una cola que sirve para todas las entradas 731
27.2. La envolvente de error y sus fronteras 733
27.3. Calcular la peor discrepancia 735
27.4. Restringir el dominio y seguir rutas 737
27.5. Operar bajo un presupuesto común 739
27.6. Una distancia entre funciones acotadas 741
27.7. Cauchy uniforme y completitud 743
27.8. Certificar una aproximación completa 746

Capítulo 28. Intercambiar límites con operaciones 749
28.1. Fijar una fila para conservar continuidad 749
28.2. Dos límites con un presupuesto común 751
28.3. Compacidad y monotonía: el mecanismo de Dini 753
28.4. La integral soporta un error global pequeño 755
28.5. Acumulaciones, pesos y extremos variables 757
28.6. Derivadas uniformes y un valor de anclaje 759
28.7. Lo que la convergencia de valores no controla 761
28.8. Certificar varias operaciones a la vez 763

Capítulo 29. Series de funciones y series de potencias 766
29.1. Una serie es una sucesión de sumas parciales 766
29.2. El criterio M y lo que no afirma 768
29.3. Operaciones sobre sumas infinitas 770
29.4. Un punto de convergencia abre una región interior 772
29.5. Calcular el radio y examinar los extremos 775
29.6. Derivar e integrar dentro del radio 777
29.7. Coeficientes, funciones y certificados 779
29.8. Productos y el puente hacia análisis complejo 782

Capítulo 30. Espacios métricos 785
30.1. Conservar la distancia, soltar las coordenadas 785
30.2. Bolas y el margen de una ventana 787
30.3. Abiertos, cerrados y ambiente relativo 789
30.4. Convergencia con un destino en el espacio 791
30.5. Cauchy compara toda la cola 794
30.6. Continuidad entre espacios métricos 796
30.7. Una escala común y espacios de funciones 798
30.8. Cambiar la métrica y auditar lo que permanece 801

Capítulo 31. Completitud, compacidad y conexidad en espacios métricos 804

31.1. Dar destino a todas las sucesiones de Cauchy 804
31.2. Encerrar un destino y construirlo por iteración 806
31.3. Cubrir con pocas bolas a cada escala 809
31.4. Compacidad: reducir cualquier cobertura 811
31.5. La equivalencia métrica y sus elecciones 813
31.6. Transportar compacidad por continuidad 815
31.7. Conexidad: impedir una separación 818
31.8. Comparar lo que sobrevive y cerrar la ruta 820

Epílogo. Después de la recta 824
Varias variables: controlar todos los modos de acercarse 824
Análisis complejo: cambiar la geometría del incremento 825
Topología: conservar las ventanas y examinar lo que pierden 825
Medida e integración: revisar cómo se controla la acumulación 825
Espacios normados y análisis funcional: tratar una función como un punto 826
Volver a las preguntas con mejores herramientas 826

Capítulo 0

Construir los números reales

De los racionales a la recta completa Los números racionales permiten aproximar con mucha precisión ciertas cantidades, incluso cuando todavía no sabemos cómo representarlas exactamente. Consideremos, por ejemplo, dos fracciones:

$$\left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{49}{25} < 2, \qquad \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} > 2.$$

La primera tiene un cuadrado demasiado pequeño; la segunda, demasiado grande. Podemos elegir nuevas fracciones entre ambas, comparar sus cuadrados con 2 y estrechar progresivamente el intervalo de búsqueda. Sin embargo, por mucho que afinemos las aproximaciones, hay una cuestión que ese procedimiento no responde por sí solo: **¿existe en nuestro sistema numérico un elemento cuyo cuadrado sea exactamente** 2**?** Saber que podemos aproximar una posición no equivale todavía a demostrar que la posición está ocupada por un número del sistema.

En *Cálculo para matemáticos*, la recta real nos permitía pasar de aproximaciones a resultados exactos al estudiar límites, continuidad e integrales. La pregunta por una cantidad que esas aproximaciones todavía no alcanzan nos obliga a examinar qué sostiene aquel paso: cuando un argumento de cálculo asegura que cierta cantidad existe, ¿qué propiedad de los números hace posible la conclusión y cómo podemos justificarla? La búsqueda de un número cuyo cuadrado sea 2 revela una dificultad que las aproximaciones sucesivas dejan abierta: una familia racional puede estar acotada y carecer dentro de $\mathbb{Q}$ de la mejor de sus cotas superiores. Para representar esa frontera sin dar por existentes los números que faltan, utilizaremos conjuntos de racionales, las *cortaduras de Dedekind*. El desafío consiste en hacer aritmética con esos conjuntos y probar que su orden posee la propiedad que echamos de menos en los racionales: toda familia no vacía y acotada superiormente tiene supremo.

Ése será el problema fundacional de este capítulo y la primera pregunta fundamental del análisis. Sólo después de demostrar que una construcción satisface todas esas propiedades podremos llamarla un modelo de los números reales. Quedará todavía una pregunta: si hubiéramos realizado la construcción de otro modo, ¿habríamos obtenido los mismos números? La comparación se hará mediante una correspondencia que conserve la aritmética y el orden, aunque los elementos de los dos modelos sean objetos conjuntistas diferentes.

0.1. ¿Existen los números reales?

Volvamos a las dos fracciones con las que comenzamos. En su comparación hemos utilizado la suma y el producto racionales, así como el orden que permite afirmar que un cuadrado es menor o mayor que otro. Todo ello funciona dentro de $\mathbb{Q}$. El problema aparece cuando queremos pasar del conjunto de aproximaciones a una frontera que no necesariamente es racional. Antes de construir un sistema más amplio necesitamos saber exactamente qué le vamos a exigir, de modo que podamos reconocer si nuestra construcción lo consigue.

Llamemos F al sistema que buscamos. Por el momento, F es únicamente el nombre de un candidato; no hemos demostrado que exista. Queremos poder realizar en él la aritmética ordinaria: sumar, restar, multiplicar y dividir por elementos no nulos, con leyes que permitan transformar expresiones sin contradicciones. La estructura algebraica que reúne esas exigencias es la de un **cuerpo**. En particular, F debe contar con operaciones $+$ y

$\cdot$, elementos 0 y 1 distintos entre sí, leyes asociativas, conmutativas y distributiva, opuestos aditivos e inversos multiplicativos para todos los elementos no nulos.

Necesitamos asimismo comparar sus elementos. Para cualesquiera $x, y \in F$, debe ocurrir exactamente una de las posibilidades $x < y$, $x = y$ o $y < x$. Ese orden ha de ser compatible con las operaciones, pues, de otro modo, las desigualdades perderían las propiedades que acabamos de usar al comparar cuadrados. Con la notación $\leq$ para el orden no estricto, las dos compatibilidades fundamentales son

$$x \leq y \quad \Longrightarrow \quad x + z \leq y + z,$$

para todo $z \in F$, y

$$0 \leq x, \quad 0 \leq y \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq xy.$$

La primera expresa que una misma traslación conserva el orden; la segunda permite multiplicar cantidades no negativas sin invertir su signo. Un cuerpo con un orden lineal que satisface estas reglas se llama **cuerpo ordenado**. Los racionales ya constituyen uno. Si esas fueran todas nuestras exigencias, la ampliación estaría de más. Consideremos entonces una familia de elementos de F. Diremos que un conjunto $A \subseteq F$ está *acotado superiormente* cuando existe un elemento $u \in F$ situado por encima de todos sus miembros:

$a \leq u$ para todo $a \in A$. Es posible disponer de muchas cotas superiores. La que nos interesa, cuando existe, es la menor de todas ellas. Un elemento $s \in F$ es el **supremo** de A si se cumplen simultáneamente

$$a \leq s \quad \text{para todo } a \in A,$$
$$s \leq u \quad \text{para toda cota superior } u \text{ de } A.$$

La primera línea asegura que s es una cota superior; la segunda, que ninguna cota superior puede quedar por debajo de él. Esta segunda obligación es esencial. Saber que un conjunto está acotado no asegura todavía que la colección de sus cotas tenga un elemento mínimo. Tampoco exigimos que el supremo pertenezca al propio conjunto: en $\mathbb{Q}$, por ejemplo, el conjunto de racionales estrictamente menores que 1 tiene supremo 1, aunque 1 no sea uno de sus elementos.

La propiedad que falta en nuestra especificación puede formularse ahora con precisión: **todo subconjunto no vacío y acotado superiormente de F debe poseer un supremo perteneciente a F**. Se denomina *propiedad del supremo* o *completitud de orden*. Importa la frase «perteneciente a F»: que una familia tenga una frontera en un sistema numérico mayor no basta para que el sistema inicial sea completo.

Reunidas estas exigencias, buscamos un **cuerpo ordenado completo**. Queremos, además, que los racionales se reconozcan en él sin perder sus operaciones ni su orden. Más adelante construiremos una aplicación inyectiva desde $\mathbb{Q}$ a nuestro candidato y comprobaremos esas propiedades; solamente entonces estará justificada la notación abreviada $\mathbb{Q} \subseteq F$.

Enunciar condiciones no garantiza que exista un objeto que las satisfaga. Sería perfectamente posible exigir a un número que cumpliera a la vez $x < 0$ y $x > 1$; el enunciado se entiende, pero sus condiciones son incompatibles. Al describir un cuerpo ordenado completo aún no hemos demostrado que sus axiomas puedan cumplirse simultáneamente. La expresión «sea F un cuerpo ordenado completo» será legítima más adelante como hipótesis de un teorema, pero no puede utilizarse como respuesta a la pregunta de si tales cuerpos existen. Para responderla tendremos que exhibir un modelo concreto y verificar todas las propiedades que acabamos de formular.

Incluso entonces faltará distinguir existencia de unicidad. Podrían construirse dos sistemas cuyos elementos, considerados como conjuntos, no fueran iguales. Lo que habrá que comprobar es si sus estructuras están relacionadas por una correspondencia que preserve exactamente el orden y las operaciones. Ése es un problema posterior: la existencia nos



Figura 0.1. La especificación abre la pregunta de existencia; la comparación estructural sólo aparece después de construir y verificar un modelo.

permitirá hablar de los reales; la comparación de modelos explicará en qué sentido esa estructura es única.

Ejercicios de la sección 0.1.

Ejercicio 1. Auditar una especificación antes de usarla

Sea F un candidato desconocido equipado con dos operaciones y una relación de orden. Considera las cuatro expresiones siguientes, donde $A \subseteq F$:

1. $A \leq u$.
2. Para todo $x \in F$ existe $y \in F$ tal que $xy = 1$.
3. Si $A \neq \emptyset$ y existe $u \in F$ tal que $a \leq u$ para todo $a \in A$, entonces existe $s \in F$ que es menor o igual que toda cota superior de A y que, a la vez, satisface $a \leq s$ para todo $a \in A$.
4. $\sup A \in A$.

Para cada expresión, decide cuál de las siguientes descripciones es la más adecuada:

- está mal tipada o mal cuantificada y necesita reparación;
- está bien formada, pero afirma más de lo que exige la especificación de un cuerpo ordenado completo;
- expresa correctamente una parte de la especificación.

Reescribe correctamente las expresiones 1 y 2. En la expresión 4 no supongas que el supremo deba pertenecer al conjunto sólo porque exista.

Solución. La expresión $A \leq u$ aplica una relación entre elementos de F a un conjunto y un elemento. Debe sustituirse por $\forall a \in A : \ a \leq u$, que expresa que u es cota superior. La segunda afirmación debe excluir cero: $\forall x \in F \setminus \{0\}\ \exists y \in F : \ xy = 1$. En un cuerpo, $0y = 0 \neq 1$ para todo y. La tercera expresión formula correctamente la propiedad del supremo. Bajo no vaciedad y acotación superior, pide $s \in F$ con $a \leq s$ para todo $a \in A$ y $s \leq v$ para toda cota superior v. Son las dos obligaciones de una menor cota superior.

La cuarta, $\sup A \in A$, sólo puede escribirse tras acreditar existencia del supremo y añade una exigencia que no pertenece a su definición. Si se cumple, el supremo es también máximo. Por ejemplo, $\{q \in \mathbb{Q} : q < 1\}$ tiene supremo racional uno, pero no lo contiene: si $u < 1$, el racional $(u+1)/2$ pertenece al conjunto y supera a u. Así, las expresiones primera y segunda necesitan reparación, la tercera es correcta y la cuarta exige más de lo pedido.

Ejercicio 2. Una existencia demostrada suponiendo que ya existe

Un estudiante propone la siguiente demostración:

> «Definimos los números reales como los elementos de un cuerpo ordenado completo. Sea entonces F un cuerpo ordenado completo. Por definición, F es un cuerpo, su orden es compatible con las operaciones y todo subconjunto no vacío acotado superiormente tiene supremo en F. Por tanto, F cumple exactamente las propiedades pedidas. Luego existe al menos un cuerpo ordenado completo.»

Audita el argumento.

1. Localiza la primera presuposición que impide que esto sea una prueba de existencia.
2. Explica qué afirmación condicional sí sería legítimo deducir si se permitiera comenzar con «sea F un cuerpo ordenado completo».
3. Explica qué clase de trabajo matemático faltaría para convertir la especificación en una auténtica prueba de existencia.

No construyas todavía ningún modelo concreto.

Solución. La primera presuposición aparece en «sea F un cuerpo ordenado completo»: ya se ha introducido un objeto cuya existencia es justamente la conclusión buscada. A partir de esa hipótesis es legítimo deducir sus leyes de cuerpo, compatibilidad del orden y propiedad del supremo. El argumento demuestra una afirmación condicional sobre una estructura supuesta, sin proporcionar un modelo. Para demostrar existencia habría que construir un conjunto concreto sin atribuirle de antemano toda la estructura, definir sus operaciones y orden, verificar las leyes de cuerpo y su compatibilidad, y demostrar la propiedad del supremo. El objeto así verificado sería un testigo de $\exists F\,(F$ es un cuerpo ordenado completo). Este ejercicio localiza el trabajo pendiente; todavía no necesita construir ese testigo.

Ejercicio 3. Qué tendría que certificar un modelo

Supón que una construcción futura entrega un objeto concreto M junto con operaciones $+, \cdot$ y una relación $\leq$. Un informe de verificación se divide en cuatro etapas:

- **I. Construcción:** M y sus operaciones están definidos como objetos matemáticos concretos.
- **II. Álgebra:** con esas operaciones, M satisface los axiomas de cuerpo.
- **III. Orden:** $\leq$ es un orden lineal compatible con la suma y el producto.
- **IV. Completitud:** todo subconjunto no vacío de M acotado superiormente posee un supremo en M.

Responde:

1. ¿Por qué la etapa I, por sí sola, no resuelve la pregunta de existencia planteada en §0.1?
2. ¿Por qué las etapas I–III todavía no bastan?
3. Explica por qué completar I–IV sí permite concluir que existe al menos un cuerpo ordenado completo.
4. Si otra construcción produjera después un objeto N que también superara I–IV, ¿qué nueva pregunta quedaría abierta sin volver a poner en duda la existencia?

Tu respuesta debe separar con claridad **construir**, **verificar** y **comparar estructuras**.

Solución. La etapa I construye un candidato M con operaciones y relación, pero una fórmula para esos datos no garantiza las leyes que deben cumplir. Las etapas II y III prueban que M es un cuerpo ordenado. Las etapas II y III todavía no verifican la existencia de supremos. Esa exigencia forma parte de la especificación inicial y requiere la etapa IV. La etapa IV acredita que cada subconjunto no vacío acotado superiormente posee supremo en M. Junto con I–III, hace del candidato construido un cuerpo ordenado completo y proporciona un testigo de existencia.

Si otro objeto N superara las mismas verificaciones, existirían dos modelos de la especificación. La pregunta nueva sería si sus estructuras pueden compararse mediante un isomorfismo de cuerpos ordenados y si esa correspondencia es única. La construcción y verificación de M ya habría resuelto existencia; esa comparación necesita su propia prueba.

0.2. Extender sin perder estructura: de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Q}$

Hay una exigencia que no podemos resolver añadiendo simplemente nuevos símbolos: la aritmética racional debe seguir funcionando en el sistema que construyamos. Ya conocemos dos ampliaciones numéricas que permiten entender lo que esto significa. En los naturales, la ecuación $x + 3 = 1$ no tiene solución. Al pasar a los enteros aparece un elemento nuevo, -2, que la resuelve. En los enteros, en cambio, la ecuación $2x = 1$ sigue sin solución; los racionales incorporan el elemento $1/2$. En ambos casos ganamos la capacidad de resolver una clase de ecuaciones que antes quedaba fuera del sistema, pero conservamos las relaciones y los cálculos que ya eran válidos. El paso de un sistema al siguiente no puede convertir dos números antiguos distintos en uno solo, ni hacer que su suma anterior cambie de valor.

La formulación matemática de esa conservación es una **incrustación estructural**. Si A y B son sistemas dotados de operaciones y relaciones, una aplicación $\iota : A \longrightarrow B$ permite reconocer a A como una copia dentro de B cuando es inyectiva y conserva toda la estructura pertinente. Inyectividad significa que $\iota(a) = \iota(b)$ obliga a $a = b$: la representación no confunde objetos que antes podíamos distinguir. Si ambos sistemas poseen una suma, conservarla significa que los dos caminos disponibles, calcular primero y después trasladar o trasladar primero y después calcular, coinciden:

$\iota(a + b) = \iota(a) + \iota(b)$. Las operaciones de la derecha se realizan en B, mientras que la suma de la izquierda, antes de aplicar ι, se ha efectuado en A. Por eso la igualdad contiene una afirmación matemática, aunque después utilicemos la misma notación para ambas operaciones. En la ampliación de los naturales a los enteros disponemos de una aplicación canónica $\iota_{\mathbb{NZ}} : \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z}$.

Envía cada natural al entero correspondiente y conserva suma, producto, cero, unidad y orden. Para $m, n \in \mathbb{N}$, en particular,

$$\begin{aligned} \iota_{\mathbb{NZ}}(m + n) &= \iota_{\mathbb{NZ}}(m) + \iota_{\mathbb{NZ}}(n), \\ \iota_{\mathbb{NZ}}(mn) &= \iota_{\mathbb{NZ}}(m)\, \iota_{\mathbb{NZ}}(n), \\ m < n \iff \iota_{\mathbb{NZ}}(m) &< \iota_{\mathbb{NZ}}(n). \end{aligned}$$

La existencia de enteros negativos amplía lo que podemos hacer con la resta, sin modificar estas igualdades. No tendría sentido describir la flecha como una incrustación de cuerpos: ni $\mathbb{N}$ ni $\mathbb{Z}$ son cuerpos. Las palabras con las que calificamos una incrustación deben corresponder a la estructura que existe realmente en su dominio. Para incluir los enteros en los racionales utilizamos $\iota_{\mathbb{ZQ}} : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}, \qquad n \longmapsto \frac{n}{1}$.

Aquí el dominio es un anillo ordenado. La aplicación conserva sus operaciones, el cero, la unidad y el orden. Es inyectiva, porque $m/1 = n/1$ implica $m = n$. Así aparece en $\mathbb{Q}$ una copia del anillo ordenado $\mathbb{Z}$; la incorporación de cocientes no altera las sumas ni los productos de los enteros, y hace posible resolver $2x = 1$. Al componer las dos incrustaciones obtenemos una representación fiel de los naturales entre los racionales:

$\mathbb{N} \overset{\iota_{\mathbb{NZ}}}{\hookrightarrow} \mathbb{Z} \overset{\iota_{\mathbb{ZQ}}}{\hookrightarrow} \mathbb{Q}$. Habitualmente sustituimos este diagrama por la escritura $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$. Es una convención muy útil, pero conviene saber sobre qué descansa. Una incrustación $\iota : A \hookrightarrow B$ tiene una imagen $\iota(A)$ que sí es, literalmente, un subconjunto de B. Como ι es inyectiva y conserva la estructura, podemos identificar cada elemento de A con su imagen; después de esa identificación escribimos $A \subseteq B$ y dejamos de mostrar la aplicación. Si, por ejemplo, hemos construido enteros mediante clases de pares de naturales o racionales mediante clases de pares de enteros, las representaciones del número 2 en esos conjuntos no tienen por qué

ser literalmente el mismo objeto conjuntista. Las incrustaciones permiten tratarlo como el mismo número para todo cálculo pertinente.

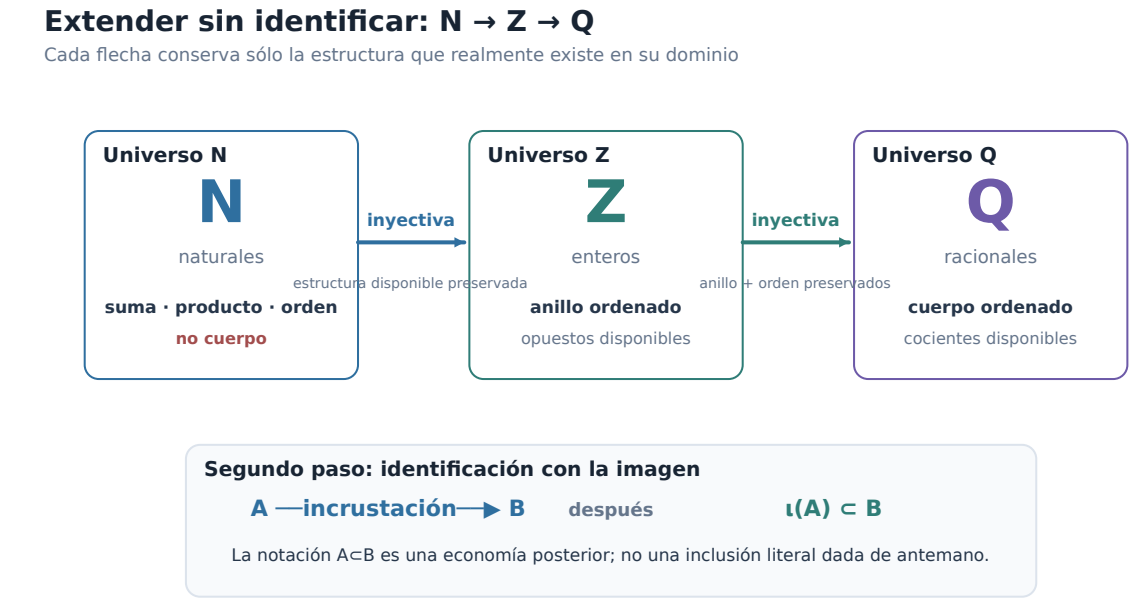


Figura 0.2. Las ampliaciones se realizan mediante incrustaciones tipadas; identificar un sistema con su imagen es un segundo paso, no una inclusión literal previa.

Conservar la aritmética de $\mathbb{Q}$ exige construir una aplicación $\iota_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \hookrightarrow F$ que preserve suma, producto, cero, unidad y orden, y que permita recuperar la aritmética racional dentro de F. Por el momento no podemos exhibir esa aplicación, porque todavía no hemos construido el sistema de llegada. Sí podemos averiguar si hace falta construirlo: $\mathbb{Q}$ ya es un cuerpo ordenado; sólo queda examinar si tiene la propiedad del supremo.

Ejercicios de la sección 0.2.

Ejercicio 4. Qué significa realmente cada flecha

Considera la cadena $\mathbb{N} \xhookrightarrow{\iota_{\mathbb{N}\mathbb{Z}}} \mathbb{Z} \xhookrightarrow{\iota_{\mathbb{Z}\mathbb{Q}}} \mathbb{Q}$. Un informe preliminar describe ambas flechas diciendo simplemente:

> «Son inclusiones de cuerpos que conservan toda la estructura».

Repara esa descripción.

1. Para la flecha $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, enumera qué datos de la estructura disponible en $\mathbb{N}$ deben preservarse según §0.2.
2. Para la flecha $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, enumera qué datos adicionales están disponibles en el dominio y deben preservarse.
3. Explica por qué no está autorizado llamar «inclusión literal» a ninguna de las dos flechas antes de identificar el dominio con su imagen.
4. Explica por qué la expresión «inclusiones de cuerpos» está mal tipada para la cadena completa.

El objetivo es producir una descripción estructuralmente correcta, no sólo corregir vocabulario.

Solución. La frase «inclusiones de cuerpos que conservan toda la estructura» falla por dos razones distintas: atribuye a los dominios más estructura de la que tienen y transforma demasiado pronto una incrustación en una inclusión literal. Para $\iota_{\mathbb{N}\mathbb{Z}} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$, la sección

exige conservar la estructura que ya está disponible en $\mathbb{N}$. En particular: $\iota_{\mathbb{NZ}}(m+n) = \iota_{\mathbb{NZ}}(m) + \iota_{\mathbb{NZ}}(n)$,

$\iota_{\mathbb{NZ}}(mn) = \iota_{\mathbb{NZ}}(m)\,\iota_{\mathbb{NZ}}(n)$, y $m < n \iff \iota_{\mathbb{NZ}}(m) < \iota_{\mathbb{NZ}}(n)$. Además, los elementos distinguidos 0 y 1 se transportan a los correspondientes 0 y 1 de $\mathbb{Z}$. La aplicación debe ser inyectiva para que números naturales distintos no se colapsen.

En cambio, para $\iota_{\mathbb{ZQ}} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$, el dominio ya tiene estructura de anillo ordenado. Por eso deben conservarse suma, producto, 0, 1 y orden, además de la inyectividad. No es correcto comenzar diciendo que las flechas son inclusiones literales. Lo que tenemos primero es una aplicación inyectiva que preserva la estructura pertinente. Su imagen $\iota(A) \subseteq B$ sí es literalmente un subconjunto del codominio. Sólo después de verificar que A y $\iota(A)$ son copias estructurales podemos adoptar la convención de identificar ambos y escribir

$A \subseteq B$. Finalmente, la expresión «inclusiones de cuerpos» está mal tipada porque ni $\mathbb{N}$ ni $\mathbb{Z}$ son cuerpos. La descripción correcta es, esquemáticamente,

$$\boxed{\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}}$$

donde cada flecha preserva exactamente la estructura disponible en su dominio; en particular, la segunda puede describirse como una incrustación de anillos ordenados.

Ejercicio 5. Construir la flecha directa de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Q}$

Usa únicamente las dos incrustaciones canónicas de §0.2 para construir una aplicación $\iota_{\mathbb{NQ}} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$.

1. Defínela como composición de las dos flechas conocidas.
2. Escribe explícitamente las imágenes de $0, 1, 2, 3$.
3. Muestra que, para $m, n \in \mathbb{N}$,

$\iota_{\mathbb{NQ}}(m+n) = \iota_{\mathbb{NQ}}(m) + \iota_{\mathbb{NQ}}(n)$, y $\iota_{\mathbb{NQ}}(mn) = \iota_{\mathbb{NQ}}(m)\,\iota_{\mathbb{NQ}}(n)$.

4. Explica por qué la aplicación es inyectiva y por qué conserva el orden.
5. Indica qué identificación notacional permite, después de estas verificaciones, escribir cómodamente $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$.

No uses inclusión literal como punto de partida: debe aparecer sólo al final como convención sustentada por la construcción.

Solución. Definimos $\iota_{\mathbb{NQ}} = \iota_{\mathbb{ZQ}} \circ \iota_{\mathbb{NZ}}$. Bajo las representaciones canónicas de §0.2, $\iota_{\mathbb{NZ}}(n) = n$ como entero correspondiente, y luego $\iota_{\mathbb{ZQ}}(n) = \frac{n}{1}$. Por tanto,

$$\boxed{\iota_{\mathbb{NQ}}(n) = \frac{n}{1}.}$$

En particular,

$$0 \mapsto \frac{0}{1}, \qquad 1 \mapsto \frac{1}{1}, \qquad 2 \mapsto \frac{2}{1}, \qquad 3 \mapsto \frac{3}{1}.$$

Para la suma,

$$\begin{aligned} \iota_{\mathbb{NQ}}(m+n) &= \iota_{\mathbb{ZQ}}(\iota_{\mathbb{NZ}}(m+n)) \\ &= \iota_{\mathbb{ZQ}}(\iota_{\mathbb{NZ}}(m) + \iota_{\mathbb{NZ}}(n)) \\ &= \iota_{\mathbb{NQ}}(m) + \iota_{\mathbb{NQ}}(n). \end{aligned}$$

El mismo razonamiento produce $\iota_{\mathbb{NQ}}(mn) = \iota_{\mathbb{NQ}}(m)\,\iota_{\mathbb{NQ}}(n)$. La composición de dos aplicaciones inyectivas es inyectiva: si $\iota_{\mathbb{NQ}}(m) = \iota_{\mathbb{NQ}}(n)$, la inyectividad de $\iota_{\mathbb{ZQ}}$ permite concluir $\iota_{\mathbb{NZ}}(m) = \iota_{\mathbb{NZ}}(n)$, y luego la inyectividad de $\iota_{\mathbb{NZ}}$ da $m = n$.

Para el orden, si $m < n$, la primera incrustación produce $\iota_{\mathbb{NZ}}(m) < \iota_{\mathbb{NZ}}(n)$, y la segunda conserva esa relación, de modo que $\iota_{\mathbb{NQ}}(m) < \iota_{\mathbb{NQ}}(n)$. La reflexión del orden se obtiene recorriendo las equivalencias en sentido contrario. Después de estas verificaciones, identificamos $\mathbb{N}$ con la imagen

$\iota_{\mathbb{N}\mathbb{Q}}(\mathbb{N}) = \{\frac{n}{1} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Q}$. Sólo entonces la escritura $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ funciona como una economía notacional sustentada por la incrustación.

Ejercicio 6. La composición de incrustaciones vuelve a ser una incrustación

Sean A, B, C sistemas ordenados con suma y producto, y supón que $\iota : A \hookrightarrow B$, $\kappa : B \hookrightarrow C$ son aplicaciones inyectivas que conservan suma, producto y orden en el sentido de $a < a' \iff \iota(a) < \iota(a')$, y análogamente para κ. Demuestra que la composición $\kappa \circ \iota : A \longrightarrow C$ también es una incrustación al mismo nivel estructural. Tu prueba debe verificar por separado:

1. inyectividad;
2. preservación de la suma;
3. preservación del producto;
4. preservación y reflexión del orden.

Concluye explicando por qué este resultado justifica leer la cadena $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ también como una vía estructural directa de $\mathbb{N}$ hacia $\mathbb{Q}$.

Solución. Sea $\lambda = \kappa \circ \iota$. Primero probemos que λ es inyectiva. Supongamos que $\lambda(a) = \lambda(a')$. Entonces $\kappa(\iota(a)) = \kappa(\iota(a'))$. Como κ es inyectiva, $\iota(a) = \iota(a')$. Y como ι también es inyectiva, $a = a'$. Para la suma,

$$\begin{aligned} \lambda(a + a') &= \kappa(\iota(a + a')) \\ &= \kappa(\iota(a) + \iota(a')) \\ &= \kappa(\iota(a)) + \kappa(\iota(a')) \\ &= \lambda(a) + \lambda(a'). \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} \lambda(aa') &= \kappa(\iota(aa')) \\ &= \kappa(\iota(a)\iota(a')) \\ &= \kappa(\iota(a))\kappa(\iota(a')) \\ &= \lambda(a)\lambda(a'). \end{aligned}$$

Para el orden, encadenamos las equivalencias: $a < a' \iff \iota(a) < \iota(a') \iff \kappa(\iota(a)) < \kappa(\iota(a'))$. Es decir, $a < a' \iff \lambda(a) < \lambda(a')$. Por tanto, λ es inyectiva, conserva suma y producto y preserva y refleja el orden. Es una incrustación al mismo nivel estructural. Aplicado a $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$, el resultado muestra que las dos flechas canónicas determinan una incrustación compuesta

$\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Q}$. La cadena no es sólo una sucesión de inclusiones visuales: las compatibilidades estructurales se transmiten a través de la composición.

Ejercicio 7. Una aplicación inyectiva no basta

Un estudiante propone $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$, $f(n) = 2n$, y afirma:

> «Como f es inyectiva y conserva el orden, podemos usarla para identificar $\mathbb{Z}$ con una copia de sí misma dentro de $\mathbb{Q}$ exactamente del mismo modo que con la incrustación canónica».

Audita la afirmación.

1. Comprueba que f es inyectiva.
2. Determina si conserva el orden.
3. Determina si conserva la suma.
4. Comprueba qué ocurre con 1 y con el producto.
5. Decide con precisión qué parte de la estructura de $\mathbb{Z}$ sí transporta fielmente f y por qué no sirve como la incrustación de anillos ordenados requerida en §0.2.

6. Explica qué error conceptual cometeríamos si, a partir de la mera inyectividad, escribiéramos sin más $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ identificando n con $2n$.

Solución. La aplicación $f(n) = 2n$ es inyectiva: $2m = 2n$ implica $m = n$. También preserva y refleja el orden, porque $m < n$ equivale a $2m < 2n$, y conserva la suma: $f(m+n) = 2m + 2n = f(m) + f(n)$. Por tanto transporta fielmente el grupo aditivo ordenado de los enteros a su imagen. La unidad no se conserva, pues $f(1) = 2 \neq 1$. Tampoco el producto: $f(mn) = 2mn$, mientras $f(m)f(n) = 4mn$. Basta $m = n = 1$ para obtener dos y cuatro. La igualdad puede darse para algunos pares, como los que tienen un factor cero, pero la preservación requerida es universal.

Así no es la incrustación de anillos ordenados que preserva la aritmética entera dentro de $\mathbb{Q}$. Identificar n con $2n$ usando las operaciones ambientales conservaría suma y orden, pero cambiaría unidad y producto. La copia debe declararse respecto de la estructura que realmente conserva.

0.3. El obstáculo: $\mathbb{Q}$ no está completo

Regresemos a las aproximaciones al cuadrado de 2. Nos gustaría reunir todos los racionales no negativos cuyo cuadrado es todavía menor que 2 y preguntar dónde termina ese conjunto. Podemos formular la pregunta sin suponer que exista un número real con cuadrado igual a 2. Todo ocurre, de momento, dentro de los racionales: $S_2 = \{q \in \mathbb{Q} : q \geq 0,\ q^2 < 2\}$. Si queremos utilizar S_2 para poner a prueba la completitud de $\mathbb{Q}$, primero debemos comprobar las hipótesis de la propiedad del supremo. El conjunto no es vacío, porque $1 \in S_2$. También está acotado superiormente: si $q \in S_2$ y tuviéramos $q \geq 2$, se seguiría $q^2 \geq 4 > 2$, una contradicción. Por tanto 2 es una cota superior de S_2, de hecho todos sus elementos son menores que 2.

Supongamos que existiera un racional $s = \sup_{\mathbb{Q}} S_2$. Puesto que $1 \in S_2$ y 2 es una cota superior, debería cumplir $1 \leq s \leq 2$. En particular, $s > 0$, de modo que podemos comparar s^2 con 2 y dividir por expresiones positivas que contengan s. Hay tres posibilidades, y examinarlas permite descubrir qué debería fallar en cualquier candidato racional. Si $s^2 < 2$, el candidato se encuentra todavía del lado permitido por la definición de S_2. Para demostrar que no es una cota superior necesitamos avanzar un poco hacia la derecha **sin salir del conjunto**. ¿Cuánto podemos avanzar? La diferencia $2 - s^2$ mide el margen positivo disponible entre el cuadrado actual y el valor que no queremos alcanzar. Al sustituir s por $s + \delta$, el cuadrado aumenta en $2s\delta + \delta^2$; por eso debemos escoger δ suficientemente pequeño para que ese incremento no consuma todo el margen. Una elección racional conveniente es

$\delta = \frac{2-s^2}{2s+2}$. Como $1 \leq s$ y $s^2 < 2$, tenemos $0 < \delta < 1$. Esta cota permite utilizar $\delta^2 < \delta$ y calcular

$$\begin{aligned}(s+\delta)^2 &= s^2 + 2s\delta + \delta^2 \\ &< s^2 + (2s+1)\delta \\ &= 2 - \frac{2-s^2}{2s+2} < 2.\end{aligned}$$

Por tanto $s + \delta$ es racional, es positivo y pertenece a S_2, aunque $s + \delta > s$. Hemos encontrado un miembro del conjunto situado por encima de su supuesta cota superior: una contradicción. La elección de δ procede del incremento del cuadrado: su denominador deja un margen que las dos desigualdades del cálculo conservan estrictamente positivo. Cuando $s^2 > 2$, la condición que debemos poner a prueba es la minimalidad. Un desplazamiento hacia la izquierda que conserve el cuadrado por encima de dos proporcionaría otra cota superior menor; para construirlo tomemos

$\delta = \frac{s^2-2}{4s}$, $\quad t = s - \delta$. La cantidad δ es racional y positiva. Además $\delta < s$, pues $s^2 - 2 < 4s^2$ para $s > 0$; por ello $t > 0$. Nos interesa que el cuadrado de t permanezca por encima de 2, y la elección permite verificarlo sin aproximaciones:

$$\begin{aligned} t^2 &= s^2 - 2s\delta + \delta^2 \\ &> s^2 - 2s\delta \\ &= \frac{s^2+2}{2} > 2. \end{aligned}$$

Ningún $q \in S_2$ puede satisfacer $q \geq t$, porque ambos números serían no negativos y entonces $q^2 \geq t^2 > 2$, contra la definición de S_2. Todos los elementos del conjunto son, pues, menores que t. Así t es otra cota superior racional, pero $t < s$, lo que contradice la condición de que s fuera la menor. Queda la posibilidad $s^2 = 2$. Aquí basta la aritmética entera. Si un racional escrito en términos mínimos como $s = m/n$, con $m, n \in \mathbb{Z}$ y $n > 0$, satisficiera esa igualdad, obtendríamos $m^2 = 2n^2$. El cuadrado de un entero impar es impar; por tanto, m tendría que ser par, digamos $m = 2k$. Sustituyendo, se sigue $n^2 = 2k^2$, de donde n también es par. Esto contradice que la fracción m/n se haya escrito en términos mínimos. Ningún racional tiene cuadrado igual a 2.

Hemos descartado las tres posibilidades. Si el supuesto supremo tuviera cuadrado menor que 2, no sería cota superior; si su cuadrado fuera mayor que 2, no sería la menor cota superior; y la igualdad no puede darse en $\mathbb{Q}$. Como S_2 es no vacío y está acotado superiormente, concluimos que

$$\boxed{S_2 \text{ no tiene supremo en } \mathbb{Q}.}$$

En consecuencia, $\mathbb{Q}$ **no tiene la propiedad del supremo**. Obsérvese que para alcanzar esta conclusión no bastaba con demostrar que no hay racional cuyo cuadrado sea 2: había que justificar también por qué el supremo, si existiera, estaría obligado a satisfacer esa igualdad. Los dos argumentos de perturbación cumplen precisamente esa función. El resultado tampoco contradice la densidad de los racionales. Entre cualesquiera $p < q$ de $\mathbb{Q}$ hay un racional intermedio, por ejemplo $(p+q)/2$. Esa propiedad habla de lo que ocurre entre *dos números que ya están en el sistema*. La propiedad del supremo exige algo más: que todo conjunto no vacío y acotado superiormente posea dentro del propio sistema la mejor de sus cotas superiores. Puede haber tantos racionales como queramos entre dos posiciones y faltar, aun así, la frontera requerida por un conjunto entero.

La frontera de S_2 falta en un sistema que ya dispone de suma, producto y orden. Podemos intentar prolongar esas estructuras conservando la información que sí tenemos: cuáles son los racionales situados a la izquierda de la frontera buscada. Describir una posición por ese conjunto permitirá construirla sin suponer de antemano el número que debería ocuparla.

Ejercicios de la sección 0.3.

Ejercicio 8. Construir un racional que escape por la derecha

Trabaja únicamente en $\mathbb{Q}$ y considera $S_2 = \{q \in \mathbb{Q} : q \geq 0,\ q^2 < 2\}$.

1. Verifica que S_2 es no vacío y que 2 es una cota superior racional.
2. Sea $s \in \mathbb{Q}$ tal que $1 \leq s$ y $s^2 < 2$. Define

$\delta = \frac{2-s^2}{4s+4}$. Demuestra que $\delta \in \mathbb{Q}$, que $0 < \delta < 1$ y que $u = s + \delta$ satisface $u > s$ y $u \in S_2$.
3. Explica qué propiedad impediría que un racional s con $s^2 < 2$ fuera una cota superior de S_2. La construcción debe justificarse mediante desigualdades racionales; no introduzcas $\sqrt{2}$ ni ningún modelo de $\mathbb{R}$.

Solución. El conjunto $S_2 = \{q \in \mathbb{Q} : q \geq 0,\ q^2 < 2\}$ es no vacío porque $1 \in S_2$. Además, 2 es una cota superior racional. En efecto, si $q \in S_2$ y $q \geq 2$, entonces $q \geq 0$ y $q^2 \geq 4 > 2$, contradicción. Por tanto todo $q \in S_2$ satisface $q < 2$. Ahora sea $s \in \mathbb{Q}$ con $1 \leq s$ y $s^2 < 2$, y definamos

$\delta = \frac{2-s^2}{4s+4}$. Numerador y denominador son racionales, y el denominador es no nulo; luego $\delta \in \mathbb{Q}$. Como $2 - s^2 > 0$ y $4s + 4 > 0$, $\delta > 0$. Además, de $s \geq 1$ y $s^2 < 2$ obtenemos

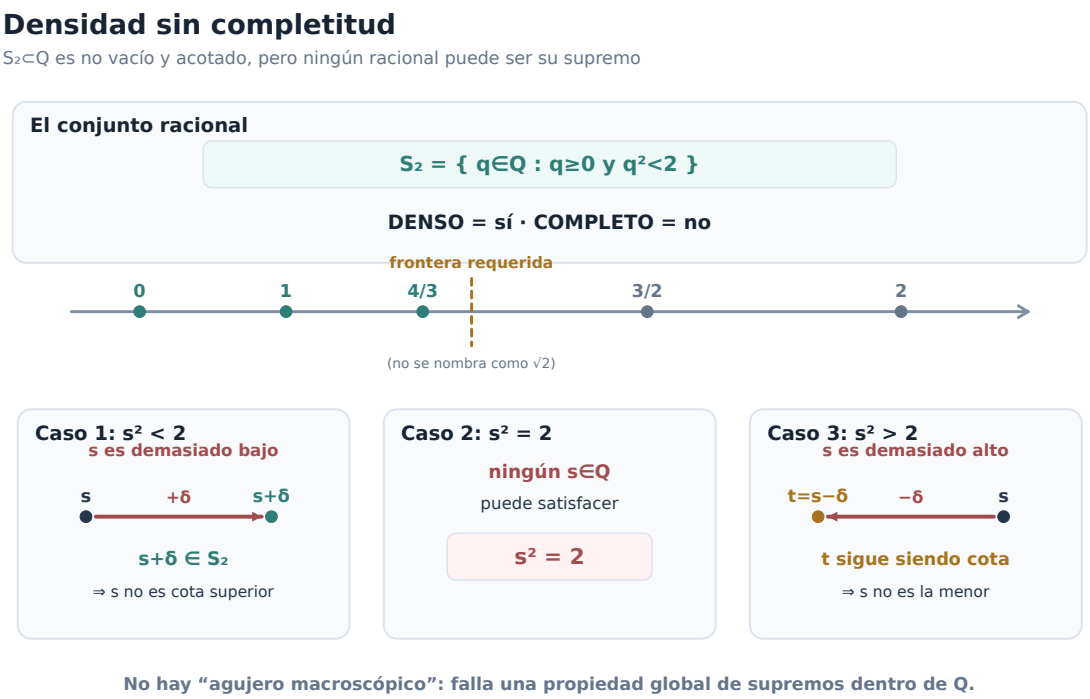


Figura 0.3. S_2 es no vacío y acotado en Q, pero todo candidato racional a supremo falla por uno de tres mecanismos.

$0 < 2 - s^2 \leq 1, \qquad 4s + 4 \geq 8$, de modo que $0 < \delta \leq \frac{1}{8} < 1$. Sea $u = s + \delta$. Claramente $u > s$ y $u \in \mathbb{Q}$. Falta probar que $u^2 < 2$. Como $0 < \delta < 1$,

$\delta^2 < \delta$. Por tanto

$$\begin{aligned} u^2 &= (s+\delta)^2 \\ &= s^2 + 2s\delta + \delta^2 \\ &< s^2 + (2s+1)\delta. \end{aligned}$$

Ahora $(2s+1)\delta = (2-s^2)\frac{2s+1}{4s+4}$. Como $0 < \frac{2s+1}{4s+4} < 1$, se sigue que $(2s+1)\delta < 2 - s^2$. Así, $u^2 < s^2 + (2-s^2) = 2$. Además $u > 0$, de modo que $u \in S_2$. Hemos construido racionalmente

$$\boxed{s < u \in S_2.}$$

Por eso ningún racional s con $s^2 < 2$ puede ser una cota superior de S_2: siempre podemos fabricar un elemento del conjunto que queda estrictamente a su derecha. *Referencia visual.* Véase la figura C00-F03 del texto principal, **Densidad sin completitud**, como síntesis posterior de este argumento.

Ejercicio 9. Mejorar una cota que queda demasiado a la derecha

Sea $s \in \mathbb{Q}$ con $s > 0$ y $s^2 > 2$. Define $\delta = \frac{s^2-2}{4s}, \qquad t = s - \delta$. Demuestra, en este orden, que:

1. $\delta > 0$ y $0 < t < s$;
2. $t^2 > 2$;
3. todo $q \in S_2$ satisface $q < t$;
4. por tanto t es una cota superior racional de S_2 estrictamente menor que s.

Concluye qué propiedad del supremo viola cualquier candidato racional s con $s^2 > 2$.

Solución. Sea $s \in \mathbb{Q}$, $s > 0$ y $s^2 > 2$. Definimos $\delta = \frac{s^2-2}{4s}$, $t = s - \delta$. Como $s^2 - 2 > 0$ y $4s > 0$, $\delta > 0$. También $s^2 - 2 < 4s^2$, pues esto equivale a $0 < 3s^2 + 2$, que es cierto. Al dividir por $4s > 0$ obtenemos $\delta < s$. Por tanto $0 < t = s - \delta < s$. Calculemos:

$$\begin{aligned} t^2 &= (s-\delta)^2 \\ &= s^2 - 2s\delta + \delta^2 \\ &> s^2 - 2s\delta \\ &= s^2 - \frac{s^2-2}{2} \\ &= \frac{s^2+2}{2} \\ &> 2. \end{aligned}$$

Ahora sea $q \in S_2$. Si $q \geq t$, entonces $q \geq 0$ y $t > 0$, de modo que $q^2 \geq t^2 > 2$, contradiciendo la definición de S_2. Por consiguiente, $q < t$ para todo $q \in S_2$. Esto dice exactamente que t es una cota superior racional de S_2. Pero además $t < s$. Así, cualquier supuesto supremo racional s con $s^2 > 2$ dejaría de ser la menor cota superior, porque acabamos de construir otra cota superior estrictamente menor.

Referencia visual. Véase la figura C00-F03 del texto principal, **Densidad sin completitud**, como síntesis posterior de este argumento.

Ejercicio 10. Ningún candidato racional sobrevive

Demuestra que S_2 no posee supremo en $\mathbb{Q}$. Tu demostración debe organizarse como una prueba por contradicción:

1. supón que existe $s = \sup_{\mathbb{Q}} S_2$;
2. deduce de manera explícita que $1 \leq s \leq 2$;
3. separa los tres casos

$$s^2 < 2, \qquad s^2 = 2, \qquad s^2 > 2;$$

4. usa las construcciones de los ejercicios 8 y 9 para descartar los casos estrictos;
5. descarta $s^2 = 2$ mediante un argumento enteramente racional basado en una fracción m/n escrita en términos mínimos;
6. concluye con precisión qué propiedad de $\mathbb{Q}$ falla.

No está permitido invocar la existencia previa de un número real cuyo cuadrado sea 2.

Solución. Supongamos, para obtener una contradicción, que existe $s = \sup_{\mathbb{Q}} S_2$. Como $1 \in S_2$, toda cota superior de S_2 debe satisfacer $s \geq 1$. Y como 2 es una cota superior racional, $s \leq 2$. Luego $1 \leq s \leq 2$. En particular $s > 0$. Por tricotomía, exactamente uno de los tres casos siguientes debe ocurrir. Si $s^2 < 2$, el ejercicio 8 construye un racional u tal que $s < u \in S_2$. Eso contradice que s sea cota superior. Si $s^2 > 2$, el ejercicio 9 construye un racional t tal que $t < s$ y t sigue siendo cota superior de S_2. Eso contradice que s sea la menor cota superior. Queda el caso $s^2 = 2$. Escribamos $s = \frac{m}{n}$ con $m, n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$ y m/n en términos mínimos. Entonces

$m^2 = 2n^2$. Así m^2 es par, luego m es par. Escribamos $m = 2k$. Sustituyendo, $4k^2 = 2n^2$, y por tanto $n^2 = 2k^2$. Entonces n también es par. Esto contradice que m/n estuviera en términos mínimos. Por consiguiente, ningún racional satisface $s^2 = 2$. Los tres casos son imposibles. Por tanto,

$$\boxed{S_2 \text{ no posee supremo en } \mathbb{Q}.}$$

Como S_2 es no vacío y está acotado superiormente, hemos encontrado un contraejemplo directo a la propiedad del supremo dentro de $\mathbb{Q}$. En consecuencia,

$\mathbb{Q}$ no es completo para la propiedad del supremo.

Toda la prueba ha permanecido en aritmética racional. *Referencia visual.* Véase la figura C00-F03 del texto principal, **Densidad sin completitud**, como síntesis posterior de este argumento.

Ejercicio 11. Una prueba que introduce demasiado pronto la frontera

Un estudiante escribe:

> «En $\mathbb{R}$ existe $\sqrt{2}$. Todo $q \in S_2$ cumple $q < \sqrt{2}$, y como los racionales son densos podemos aproximarnos racionalmente a $\sqrt{2}$ tanto como queramos desde abajo. Por tanto $\sqrt{2}$ es el supremo de S_2. Como $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, el conjunto S_2 no tiene supremo racional.»

Audita el argumento dentro del punto del capítulo en que nos encontramos.

1. Identifica la primera afirmación que no está disponible todavía.
2. Explica por qué la apelación a «aproximarse racionalmente a $\sqrt{2}$» también presupone un marco que aún no hemos construido.
3. Distingue qué conclusión matemática sería válida si ya dispusiéramos de $\mathbb{R}$ de la cuestión fundacional que §0.3 está intentando resolver sin circularidad.
4. Repara la estrategia indicando cómo reemplazar la referencia a $\sqrt{2}$ por un análisis puramente racional de un supuesto $s = \sup_{\mathbb{Q}} S_2$.

No basta con decir «es circular»: localiza exactamente qué objeto y qué propiedad se han usado antes de estar disponibles.

Solución. La primera premisa no disponible es «en $\mathbb{R}$ existe $\sqrt{2}$»: el capítulo todavía está construyendo un cuerpo ordenado completo. También la aproximación racional a esa frontera presupone una copia de $\mathbb{Q}$ en un sistema ordenado mayor y densidad allí. La densidad racional disponible sólo inserta racionales entre extremos racionales. Si ese sistema mayor estuviera ya construido, y se hubieran acreditado tanto la raíz positiva de dos como la densidad de su copia racional, el argumento externo podría identificar el supremo de S_2 con esa raíz. Después, su irracionalidad excluiría un supremo racional. Esa conclusión posterior no constituye la justificación racional requerida en §0.3.

La reparación toma un supuesto $s = \sup_{\mathbb{Q}} S_2$, obtiene $1 \le s \le 2$ y separa los casos $s^2 < 2$, $s^2 > 2$ y $s^2 = 2$. Las perturbaciones de los ejercicios 8 y 9 contradicen, respectivamente, que sea cota superior y que sea la menor. La paridad de una fracción irreducible excluye el caso de igualdad. Los tres argumentos permanecen en $\mathbb{Q}$ y no presuponen una frontera externa.

Ejercicio 12. Denso, pero no completo

Refuta la afirmación:

> «Todo cuerpo ordenado denso es completo para la propiedad del supremo.»

Tu contraejemplo debe ser $\mathbb{Q}$ y debe incluir tres piezas.

1. Demuestra directamente que $\mathbb{Q}$ es denso: dados $p < q$ racionales, construye un racional estrictamente entre ambos.
2. Usa S_2 y el resultado del ejercicio 10 para demostrar que $\mathbb{Q}$ no satisface la propiedad del supremo.
3. Considera además

$A = \{q \in \mathbb{Q} : q < 1\}$. Demuestra que A no tiene máximo, pero sí tiene supremo racional, y explica por qué este contraste impide confundir «no tener máximo» con «no tener supremo». Cierra distinguiendo en una frase qué controla la densidad y qué controla la completitud.

Solución. Tomemos dos racionales $p < q$. El punto medio $r = \frac{p+q}{2}$ es racional y satisface $p < r < q$. Por tanto $\mathbb{Q}$ es denso en el sentido pertinente: entre dos racionales distintos siempre hay otro racional. Sin embargo, el ejercicio 10 mostró que $S_2 = \{q \in \mathbb{Q} : q \geq 0,\ q^2 < 2\}$ es no vacío, está acotado superiormente en $\mathbb{Q}$ y no posee supremo racional. Luego $\mathbb{Q}$ no es completo para la propiedad del supremo.

Así, $\mathbb{Q}$ es ya el contraejemplo solicitado a la implicación densidad $\Longrightarrow$ completitud. Conviene separar todavía otra confusión. Consideremos $A = \{q \in \mathbb{Q} : q < 1\}$. El conjunto A no tiene máximo. En efecto, si $q \in A$, entonces $q < \frac{q+1}{2} < 1$, y el número $(q+1)/2$ es racional y pertenece a A. Por tanto ningún elemento de A puede ser el mayor.

No obstante, $\sup_{\mathbb{Q}} A = 1$. El número 1 es una cota superior de A. Además, si $u < 1$ fuera otra cota superior racional, entonces $r = \frac{u+1}{2}$ sería racional y cumpliría $u < r < 1$. Así $r \in A$ y $r > u$, contradiciendo que u fuera cota superior. Luego ninguna cota superior puede ser menor que 1. Tenemos entonces dos fenómenos distintos dentro del mismo sistema:

$$A \text{ no tiene máximo, pero sí supremo racional,}$$

mientras que S_2 no tiene supremo racional. Por eso «no tener máximo» no equivale a «no tener supremo». La distinción final es:

densidad: qué ocurre entre puntos ya presentes; completitud: si existen dentro del sistema las fronteras exigidas.

0.4. Construir una frontera sin tener el punto

El conjunto S_2 está definido mediante condiciones que podemos comprobar para cada racional: ser no negativo y tener cuadrado menor que 2. Esa información no depende de haber encontrado su menor cota superior. La construcción de Dedekind toma el conjunto que describe un lado de la frontera como nuevo objeto matemático; para reconocer qué propiedades deberá tener, empecemos por una frontera que ya conocemos. El primer ejemplo está enteramente a nuestro alcance. Si $c \in \mathbb{Q}$, su lado izquierdo es $L_c = \{q \in \mathbb{Q} : q < c\}$. El conjunto contiene a $c - 1$ y excluye a c; además, con cada racional q contiene todos los racionales menores que q. Tampoco tiene un último elemento: dado $q < c$, el punto medio $(q + c)/2$ es racional y satisface $q < \frac{q+c}{2} < c$. Estas propiedades pueden formularse sin mencionar la frontera c. Eso permite exigirlas a un subconjunto de racionales incluso cuando no disponemos de ningún racional que desempeñe el papel de frontera.

Definición. Una **cortadura de Dedekind** es un subconjunto propio $A \subsetneq \mathbb{Q}$ tal que:

1. $A \neq \emptyset$;
2. para todo $q \in A$ y todo $r \in \mathbb{Q}$, si $r < q$, entonces $r \in A$;
3. para todo $q \in A$ existe $r \in A$ con $q < r$.

La segunda condición dice que A está **cerrado hacia abajo**. La tercera expresa que A **no tiene máximo**: cada uno de sus elementos puede ser superado por otro elemento del mismo conjunto. Junto con la condición de ser propio, son las cuatro propiedades que acabamos de reconocer en L_c, de modo que L_c es una cortadura para todo racional c. La clausura hacia abajo recoge lo que significa registrar un lado izquierdo completo. Un conjunto que contuviera a $3/2$ y omitiera a $1/2$ dejaría un hueco entre los racionales que pretende reunir. Las condiciones de no vaciedad y de ser propio excluyen, respectivamente, a $\emptyset$ y a $\mathbb{Q}$, y hacen que haya racionales dentro y fuera de la cortadura. Ninguna de esas exigencias se deduce de las otras: el conjunto vacío satisface vacíamente las dos últimas cláusulas, y $\mathbb{Q}$ es cerrado hacia abajo y carece de máximo, pues con cada racional q contiene a $q + 1$.

La ausencia de máximo fija una convención donde podría producirse una duplicación. Para un racional c, los conjuntos $\{q \in \mathbb{Q} : q < c\}$, $\{q \in \mathbb{Q} : q \leq c\}$ son propios, no

vacíos y cerrados hacia abajo, pero difieren en un elemento: el segundo contiene a c y el primero lo excluye. Si admitiéramos ambos, tendríamos dos códigos para la misma frontera racional. Exigir que no haya máximo conserva el primero y descarta el segundo. El racional que determina la frontera queda fuera del conjunto que lo representa.

El conjunto S_2 de §0.3 aún no cumple estas condiciones. Contiene a 1, pero omite a $-2 < 1$, porque sólo reúne racionales no negativos. Si queremos registrar todo el lado izquierdo asociado a la dificultad que descubrimos, debemos incorporar también los racionales negativos. Definamos

$$A_2 = \{q \in \mathbb{Q} : q < 0 \text{ o } q^2 < 2\} = \{q \in \mathbb{Q} : q < 0\} \cup S_2.$$

La cláusula $q < 0$ importa: un racional negativo de gran valor absoluto puede tener cuadrado mayor que 2 y, aun así, debe estar incluido en este lado izquierdo. Toda la definición sigue expresada mediante aritmética racional; ningún punto real aparece como parámetro.

Proposición. El conjunto A_2 es una cortadura de Dedekind.

Demostración. Tenemos $0 \in A_2$, mientras que $2 \notin A_2$, porque 2 es positivo y su cuadrado es 4. Así se cumplen la no vaciedad y la condición de ser propio. Para comprobar la clausura hacia abajo, tomemos $q \in A_2$ y $r \in \mathbb{Q}$ con $r < q$. Si $r < 0$, la propia definición ya da $r \in A_2$. En el caso restante, $0 \le r < q$, también $q > 0$, de modo que la pertenencia de q obliga a $q^2 < 2$. Como $q^2 - r^2 = (q - r)(q + r) > 0$, obtenemos $r^2 < q^2 < 2$, y de nuevo $r \in A_2$. El argumento distingue los signos porque elevar al cuadrado conserva el orden entre racionales no negativos; aplicarlo sin esa restricción habría dado una inferencia falsa.

Falta encontrar, por encima de cada $q \in A_2$, otro racional que siga perteneciendo al conjunto. Para $q < 0$ basta tomar $q/2$: se cumple $q < q/2 < 0$. Cuando $q \ge 0$, esa elección ya no avanza hacia la derecha. Disponemos, en cambio, del margen positivo $2 - q^2$, y podemos emplearlo como en §0.3 para controlar cuánto aumenta el cuadrado. Si elegimos $\delta = \frac{2-q^2}{2q+3}$, el numerador es positivo y el denominador es al menos 3, por lo que $0 < \delta \le \frac{2}{3} < 1$. La elección del denominador permite que el aumento $2q\delta + \delta^2$ sea estrictamente menor que el margen disponible. En efecto, $\delta^2 < \delta$ y

$$\begin{aligned}(q+\delta)^2 &= q^2 + 2q\delta + \delta^2 \\ &< q^2 + (2q+1)\delta \\ &= q^2 + (2-q^2)\frac{2q+1}{2q+3} \\ &< q^2 + (2-q^2) = 2.\end{aligned}$$

Las dos desigualdades estrictas tienen razones distintas: la primera usa $0 < \delta < 1$; la última usa $2 - q^2 > 0$ y $(2q+1)/(2q+3) < 1$. Por tanto $q + \delta$ es un racional de A_2 mayor que q. El caso $q = 0$ está incluido en este cálculo. Ningún elemento de A_2 es máximo, y quedan verificadas todas las condiciones. □

Podemos reunir todas las cortaduras en un conjunto:

$$\mathcal{D} = \{A \subseteq \mathbb{Q} : A \text{ es una cortadura de Dedekind}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Q}).$$

En el marco conjuntista clásico del capítulo, el conjunto potencia $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ proporciona el dominio dentro del cual seleccionamos los subconjuntos que satisfacen la definición. Cada elemento de $\mathcal{D}$ es un conjunto de racionales; si $A \in \mathcal{D}$ y $q \in A$, entonces $A \subseteq \mathbb{Q}$ y $q \in \mathbb{Q}$. La pertenencia $q \in A$ y la inclusión $A \subseteq \mathbb{Q}$ relacionan objetos de tipos distintos y no pueden intercambiarse.

La frontera dibujada sirve para interpretar las propiedades del conjunto; la construcción dispone efectivamente de A y de sus racionales. Podemos, por ello, comparar cortaduras sin disponer de puntos frontera externos. Una posición situada más a la derecha debería registrar todos los racionales registrados por una posición anterior y algunos más. La inclusión expresa justamente esa relación. Para $A, B \in \mathcal{D}$ definimos

$$A \le_{\mathcal{D}} B \iff A \subseteq B, \qquad A <_{\mathcal{D}} B \iff A \subsetneq B.$$

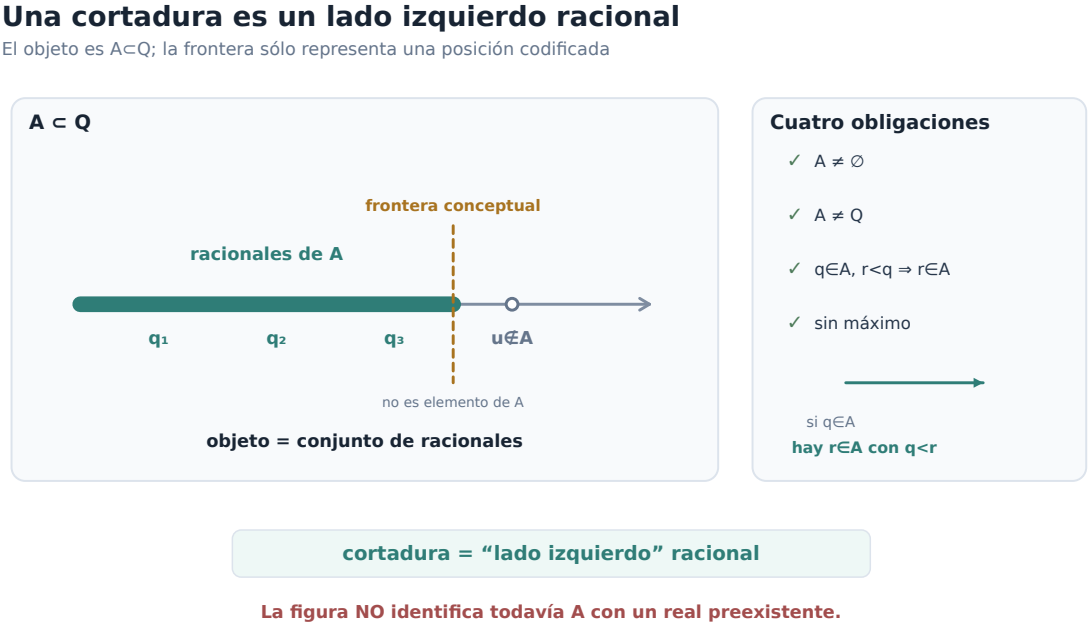


Figura 0.4. La cortadura es un subconjunto de Q; la frontera sólo codifica una posición y no es un punto primitivo del sistema.

La inclusión es reflexiva, antisimétrica y transitiva: $A \subseteq A$; las inclusiones $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ equivalen conjuntamente a $A = B$; y $A \subseteq B \subseteq C$ implica $A \subseteq C$. Para conjuntos arbitrarios puede faltar la comparabilidad. Por ejemplo, $\{0\}$ y $\{1\}$ no están incluidos uno en otro. Entre cortaduras, la clausura hacia abajo impide esa situación. **Proposición.** La inclusión define un orden lineal en $\mathcal{D}$: para cualesquiera $A, B \in \mathcal{D}$ se cumple $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$.

Demostración. Si $A \subseteq B$, ya tenemos una de las comparaciones. En caso contrario existe un racional $a \in A \setminus B$. Ese único testigo permitirá probar que todo B está contenido en A. Sea $b \in B$ arbitrario. Si ocurriera $a < b$, la clausura hacia abajo de B obligaría a $a \in B$, contradiciendo la elección de a. Tampoco puede ocurrir $a = b$, pues b pertenece a B y a no. La tricotomía del orden racional deja entonces $b < a$. Como $a \in A$, la clausura hacia abajo de A da $b \in A$. Hemos probado $B \subseteq A$; junto con las propiedades de la inclusión ya señaladas, esto establece el orden lineal. □

La prueba explica por qué dos lados izquierdos racionales sólo pueden estar anidados. Un racional que pertenece a A y queda fuera de B obliga a que todos los elementos de B sean menores que él, y por ello pertenezcan a A. En particular, una inclusión estricta $A \subsetneq B$ contiene información concreta: hay algún racional en B que todavía no aparece en A. El orden por inclusión permite comparar tanto las cortaduras L_c como A_2, aunque todavía no sepamos sumar ni multiplicar estos objetos. Las cortaduras L_c ofrecen además un vínculo con la aritmética de partida: cada racional tiene ya una representación en $\mathcal{D}$. Falta comprobar que racionales distintos dan representaciones distintas y que la comparación de éstas recupera su orden.

Ejercicios de la sección 0.4.

Ejercicio 13. Auditar las cuatro condiciones de una cortadura

Para un subconjunto $A \subseteq \mathbb{Q}$, considera por separado estas cuatro exigencias:

1. $A \neq \emptyset$;
2. $A \subsetneq \mathbb{Q}$;
3. si $q \in A$ y $r < q$, entonces $r \in A$;
4. A no tiene máximo.

Analiza los siguientes subconjuntos de $\mathbb{Q}$:

$$B_1 = \{q \in \mathbb{Q} : q < 3\},$$
$$B_2 = \{q \in \mathbb{Q} : q \leq 3\},$$
$$B_3 = \mathbb{Q},$$
$$B_4 = \emptyset,$$
$$B_5 = \{q \in \mathbb{Q} : q < 0 \text{ o } 1 < q < 2\}.$$

Para cada A_i:

1. determina cuáles de las cuatro condiciones satisface;
2. cuando una condición falle, exhibe un testigo concreto del fallo;
3. decide cuáles son cortaduras de Dedekind.

Cierra escribiendo correctamente los tipos de los objetos involucrados cuando $A \in \mathcal{D}$ y $q \in A$: distingue entre $A \in \mathcal{D}$, $A \subseteq \mathbb{Q}$, $q \in A$ y $q \in \mathbb{Q}$.

Solución. Recordemos las cuatro condiciones separadas: $A \neq \emptyset$, $A \subsetneq \mathbb{Q}$, clausura hacia abajo y ausencia de máximo. Para $B_1 = \{q \in \mathbb{Q} : q < 3\}$, las cuatro se cumplen. Es no vacío, por ejemplo $0 \in B_1$; es propio porque $3 \notin B_1$; si $q < 3$ y $r < q$, entonces $r < 3$; y si $q < 3$, el racional $r = \frac{q+3}{2}$ satisface

$q < r < 3$. Por tanto $r \in B_1$ y B_1 no tiene máximo. Así, $B_1 \in \mathcal{D}$. Para $B_2 = \{q \in \mathbb{Q} : q \leq 3\}$, las tres primeras condiciones se cumplen, pero la cuarta falla: $3 \in B_2$ y todo $q \in B_2$ satisface $q \leq 3$. Por tanto 3 es máximo de B_2. Luego $B_2 \notin \mathcal{D}$. Para $B_3 = \mathbb{Q}$, fallan la segunda condición y sólo ésa entre las cuatro: B_3 no es un subconjunto propio de $\mathbb{Q}$. Es no vacío, está cerrado hacia abajo y no tiene máximo, porque dado cualquier racional q, también $q+1 \in \mathbb{Q}$ y $q < q+1$. Así $B_3 \notin \mathcal{D}$.

Para $B_4 = \emptyset$, falla la no vaciedad. La clausura hacia abajo y la ausencia de máximo son verdaderas de manera vacía, y $\emptyset \subsetneq \mathbb{Q}$, pero una cortadura debe contener al menos un racional. Por tanto $B_4 \notin \mathcal{D}$. Finalmente, $B_5 = \{q \in \mathbb{Q} : q < 0 \text{ o } 1 < q < 2\}$ es no vacío y propio. Tampoco tiene máximo: si $q < 0$, entonces $q < q/2 < 0$; si $1 < q < 2$, entonces $q < (q+2)/2 < 2$ y el nuevo racional sigue siendo mayor que uno. En ambos casos se obtiene un miembro estrictamente mayor de B_5. Sin embargo, no está cerrado hacia abajo. Por ejemplo,

$\frac{3}{2} \in B_5$, pero $\frac{1}{2} < \frac{3}{2}$ y $\frac{1}{2} \notin B_5$. Luego $B_5 \notin \mathcal{D}$. La clasificación es entonces:

$$\boxed{B_1 \in \mathcal{D}, \qquad B_2, B_3, B_4, B_5 \notin \mathcal{D}.}$$

El control de tipos es igualmente importante. Si $A \in \mathcal{D}$, entonces $A \subseteq \mathbb{Q}$. Si además $q \in A$, entonces necesariamente $q \in \mathbb{Q}$. Pero A mismo no es un racional: es un conjunto de racionales. Por eso las expresiones correctas distinguen

$$A \in \mathcal{D}, \qquad A \subseteq \mathbb{Q}, \qquad q \in A, \qquad q \in \mathbb{Q}.$$

Referencia visual. Véase la figura C00-F04 del texto principal, **Una cortadura es un lado izquierdo racional**, como síntesis posterior de este argumento.

Ejercicio 14. Construir la cortadura determinada por un racional

Sea $c \in \mathbb{Q}$. Define $c^* = \{q \in \mathbb{Q} : q < c\}$. Demuestra directamente que c^* es una cortadura de Dedekind. Tu prueba debe verificar por separado:

1. no vaciedad;
2. que $c^* \subsetneq \mathbb{Q}$;
3. clausura hacia abajo;
4. ausencia de máximo.

Para la última condición, construye a partir de un $q \in c^*$ un racional r tal que $q < r < c$. Explica finalmente por qué $\{q \in \mathbb{Q} : q \leq c\}$ no puede usarse como segundo código admisible

para la misma frontera racional. No demuestres todavía que $c \mapsto c^*$ preserva el orden; eso corresponde a la sección siguiente.

Solución. Sea $c \in \mathbb{Q}$ y definamos $c^* = \{q \in \mathbb{Q} : q < c\}$.

No vaciedad. Como $c - 1 < c$,
$c - 1 \in c^*$. Por tanto $c^* \neq \emptyset$.

Subconjunto propio. Por definición,

$$c \notin c^*.$$

Así, $c^* \subsetneq \mathbb{Q}$.

Clausura hacia abajo. Si $q \in c^*$ y $r < q$, entonces
$q < c$. Por transitividad, $r < q < c$, y por tanto $r < c$. Luego $r \in c^*$.

Ausencia de máximo. Sea $q \in c^*$. Entonces $q < c$. Definimos
$r = \frac{q+c}{2}$. Como $q < c$, $q < \frac{q+c}{2} < c$. Además $r \in \mathbb{Q}$. Por tanto

$$q < r \qquad \text{y} \qquad r \in c^*.$$

Ningún elemento de c^* puede ser máximo. Hemos verificado las cuatro condiciones, así que

$$\boxed{c^* \in \mathcal{D}.}$$

Consideremos ahora $B_c = \{q \in \mathbb{Q} : q \leq c\}$. Este conjunto contiene a c, y c es su máximo. Por ello falla exactamente la condición de ausencia de máximo. Si admitiéramos tanto c^* como B_c, una misma frontera racional quedaría codificada por dos conjuntos distintos. La convención de excluir máximos fuerza un único código del lado izquierdo:

$$\boxed{c^* = \{q \in \mathbb{Q} : q < c\}.}$$

Todavía no hemos probado que la aplicación $c \mapsto c^*$ preserve el orden; aquí sólo hemos construido y verificado que cada racional determina una cortadura.

Ejercicio 15. Reparar S_2 hasta obtener una cortadura

Recuerda el conjunto de §0.3 $S_2 = \{q \in \mathbb{Q} : q \geq 0,\ q^2 < 2\}$.

1. Demuestra que S_2 **no** es una cortadura de Dedekind localizando una condición concreta que falla.
2. Define

$A_2 = \{q \in \mathbb{Q} : q < 0 \text{ o } q^2 < 2\}$. Demuestra que A_2 sí es una cortadura. 3. En la prueba de ausencia de máximo, trata separadamente: - $q < 0$; - $q \geq 0$. En el segundo caso puedes usar $\delta = \frac{2-q^2}{2q+3}$. Debes justificar que $q + \delta \in A_2$ y $q + \delta > q$.

4. Explica por qué esta construcción sigue usando únicamente objetos racionales y no introduce de manera encubierta una frontera real preexistente.

Solución. Partimos de $S_2 = \{q \in \mathbb{Q} : q \geq 0,\ q^2 < 2\}$. El conjunto no es una cortadura porque falla la clausura hacia abajo. En efecto, $1 \in S_2$, pero $-2 < 1$ y $-2 \notin S_2$, ya que -2 no satisface $q \geq 0$. Para reparar ese defecto definimos $A_2 = \{q \in \mathbb{Q} : q < 0 \text{ o } q^2 < 2\}$. Verifiquemos las cuatro condiciones.

No vaciedad. Tenemos
$0 \in A_2$ porque $0^2 < 2$.

Subconjunto propio. El racional 2 no pertenece a A_2, pues

$$2 \not< 0 \qquad \text{y} \qquad 2^2 = 4 \not< 2.$$

Así $A_2 \subsetneq \mathbb{Q}$.

Clausura hacia abajo. Sea $q \in A_2$ y $r < q$.

Si $q < 0$, entonces $r < 0$, de modo que $r \in A_2$. Si $q \geq 0$, la pertenencia $q \in A_2$ implica $q^2 < 2$. Si $r < 0$, nuevamente $r \in A_2$. Si $0 \leq r < q$, entonces $r^2 < q^2 < 2$, y también $r \in A_2$. Por tanto A_2 es cerrado hacia abajo.

Ausencia de máximo. Sea $q \in A_2$.

Si $q < 0$, tomamos $r = \frac{q}{2}$. Como $q < 0$, $q < \frac{q}{2} < 0$, de modo que $r \in A_2$ y $r > q$. Si $q \geq 0$, entonces $q^2 < 2$. Definimos $\delta = \frac{2-q^2}{2q+3}$. El numerador y el denominador son racionales y positivos, por lo que $\delta \in \mathbb{Q}, \qquad \delta > 0$. Además,

$$2 - q^2 \leq 2 \qquad \text{y} \qquad 2q + 3 \geq 3,$$

de donde $0 < \delta < 1$. Así $\delta^2 < \delta$. Entonces

$$\begin{aligned}(q+\delta)^2 &= q^2 + 2q\delta + \delta^2 \\ &< q^2 + (2q+1)\delta \\ &= q^2 + (2-q^2)\frac{2q+1}{2q+3} \\ &< q^2 + (2-q^2) \\ &= 2.\end{aligned}$$

Por tanto

$$q + \delta \in A_2 \qquad \text{y} \qquad q + \delta > q.$$

En ambos casos todo elemento de A_2 admite otro elemento de A_2 estrictamente mayor. Luego A_2 no tiene máximo. Concluimos:

$$\boxed{A_2 \in \mathcal{D}.}$$

La construcción no ha introducido ninguna frontera externa. A_2 es literalmente un subconjunto de $\mathbb{Q}$, definido mediante desigualdades y operaciones racionales. Incluso el avance $q \mapsto q + \delta$ permanece enteramente dentro de $\mathbb{Q}$. *Referencia visual.* Véase la figura C00-F04 del texto principal, **Una cortadura es un lado izquierdo racional**, como síntesis posterior de este argumento.

Ejercicio 16. La inclusión ordena linealmente todas las cortaduras

Sean $A, B \in \mathcal{D}$. Demuestra que

$$A \subseteq B \qquad \text{o} \qquad B \subseteq A.$$

Organiza la prueba a partir del caso no trivial $A \not\subseteq B$:

1. elige $a \in A \setminus B$;
2. toma un $b \in B$ arbitrario;
3. demuestra que no pueden ocurrir $a < b$ ni $a = b$;
4. usa la tricotomía de $\mathbb{Q}$ para concluir $b < a$;
5. usa la clausura hacia abajo de A para obtener $b \in A$.

Concluye que la relación $A \leq_{\mathcal{D}} B \iff A \subseteq B$ es un orden lineal sobre $\mathcal{D}$, indicando además por qué reflexividad, antisimetría y transitividad provienen de la inclusión de conjuntos.

Solución. Sean $A, B \in \mathcal{D}$. Si $A \subseteq B$, ya tenemos una de las dos comparaciones requeridas. Supongamos entonces $A \not\subseteq B$. Existe algún $a \in A \setminus B$. Tomemos un elemento arbitrario $b \in B$. No puede ocurrir $a < b$. Si ocurriera, como $b \in B$ y B es cerrado hacia abajo, tendríamos $a \in B$, contradiciendo $a \notin B$. Tampoco puede ocurrir

$a = b$, porque $b \in B$ y $a \notin B$. Como el orden de $\mathbb{Q}$ satisface tricotomía, sólo queda $b < a$. Ahora $a \in A$ y A es cerrado hacia abajo. Por tanto $b \in A$. El elemento $b \in B$ era arbitrario, así que $B \subseteq A$. Hemos probado que para cualesquiera $A, B \in \mathcal{D}$,

$$\boxed{A \subseteq B \quad \text{o} \quad B \subseteq A.}$$

Definimos $A \leq_{\mathcal{D}} B \iff A \subseteq B$. La inclusión de conjuntos es reflexiva: $A \subseteq A$; es antisimétrica: $A \subseteq B$ y $B \subseteq A \Longrightarrow A = B$; y es transitiva: $A \subseteq B$ y $B \subseteq C \Longrightarrow A \subseteq C$. La comparabilidad que acabamos de demostrar añade la propiedad que faltaba. Por tanto,

$$\boxed{\leq_{\mathcal{D}} \text{ es un orden lineal sobre } \mathcal{D}.}$$

El paso estructural decisivo es que la clausura hacia abajo convierte un único testigo $a \in A \setminus B$ en información sobre todos los elementos de B. *Referencia visual.* Véase la figura C00-F04 del texto principal, **Una cortadura es un lado izquierdo racional**, como síntesis posterior de este argumento.

Ejercicio 17. Situar A_2 entre dos cortaduras racionales

Usa la notación $c^* = \{q \in \mathbb{Q} : q < c\}$ y la cortadura $A_2 = \{q \in \mathbb{Q} : q < 0 \text{ o } q^2 < 2\}$.

1. Demuestra las inclusiones estrictas

$1^* \subsetneq A_2 \subsetneq 2^*$. Debes exhibir un racional que pruebe la estricta inclusión en cada caso. 2. Supón, para obtener una contradicción, que existe $c \in \mathbb{Q}$ tal que $A_2 = c^*$. Demuestra primero que $c > 0$. Después separa los tres casos

$$c^2 < 2, \qquad c^2 = 2, \qquad c^2 > 2,$$

y usa sólo resultados disponibles hasta §0.4 para descartar cada uno. 3. Concluye que A_2 es una cortadura situada estrictamente entre dos cortaduras racionales, pero no coincide con c^* para ningún racional c. No interpretes todavía esta conclusión como una identificación con un número real previamente existente.

Solución. Recordemos $1^* = \{q \in \mathbb{Q} : q < 1\}$, $2^* = \{q \in \mathbb{Q} : q < 2\}$, y $A_2 = \{q \in \mathbb{Q} : q < 0 \text{ o } q^2 < 2\}$. Primero probemos $1^* \subseteq A_2$. Sea $q < 1$. Si $q < 0$, entonces $q \in A_2$. Si $0 \leq q < 1$, entonces $q^2 < 1 < 2$, así que también $q \in A_2$. La inclusión es estricta. Por ejemplo,

$\frac{4}{3} > 1$ y $\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} < 2$. Por tanto $\frac{4}{3} \in A_2 \setminus 1^*$, y así $1^* \subsetneq A_2$. Ahora probemos $A_2 \subseteq 2^*$. Sea $q \in A_2$. Si $q < 0$, ciertamente $q < 2$. Si $q \geq 0$, entonces $q^2 < 2$. No puede ocurrir $q \geq 2$, pues eso implicaría $q^2 \geq 4 > 2$. Luego $q < 2$, y por tanto $q \in 2^*$. La inclusión también es estricta. En efecto,

$\frac{3}{2} < 2$, de modo que $\frac{3}{2} \in 2^*$, pero $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} > 2$, y $\frac{3}{2} \not< 0$. Así, $\frac{3}{2} \notin A_2$. Concluimos

$$\boxed{1^* \subsetneq A_2 \subsetneq 2^*.}$$

Falta demostrar que A_2 no es una cortadura racional. Supongamos, para obtener una contradicción, que existe $c \in \mathbb{Q}$ tal que $A_2 = c^*$. Como $0 \in A_2 = c^*$, por la definición de c^* tenemos $0 < c$. Ahora aplicamos tricotomía a c^2 y 2. Si $c^2 < 2$, entonces, como $c > 0$, $c \in A_2$. Pero $c \notin c^*$ por definición. Esto contradice $A_2 = c^*$.

Si $c^2 = 2$, contradecimos el resultado de §0.3 según el cual ningún racional tiene cuadrado igual a 2. Finalmente, supongamos $c^2 > 2$. Como $c > 0$, la perturbación racional de §0.3 produce un racional t tal que

$$0 < t < c \qquad \text{y} \qquad t^2 > 2.$$

De $t < c$ obtenemos $t \in c^*$. Pero $t > 0$ y $t^2 > 2$, por lo que $t \notin A_2$. Nuevamente contradicción. Los tres casos son imposibles. Por tanto,

$$\boxed{A_2 \neq c^* \quad \text{para todo } c \in \mathbb{Q}.}$$

La conclusión disponible en §0.4 es estrictamente estructural:

$$\boxed{1^* \subsetneq A_2 \subsetneq 2^* \quad \text{y} \quad A_2 \text{ no es una cortadura racional.}}$$

Esto sitúa a A_2 en el orden por inclusión sin identificarla todavía con ningún número real previamente existente.

0.5. Una copia de $\mathbb{Q}$ dentro del nuevo sistema

Para cada $q \in \mathbb{Q}$, escribamos $q^* = \{r \in \mathbb{Q} : r < q\}$. Es la cortadura que antes llamamos L_q. La verificación hecha en §0.4 da, para todo q, $q^* \in \mathcal{D}$: contiene a $q-1$, excluye a q, es cerrada hacia abajo por transitividad y carece de máximo porque entre $r < q$ y q está $(r+q)/2$. Podemos definir, por tanto, la aplicación $\iota_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathcal{D}, \qquad \iota_{\mathbb{Q}}(q) = q^*$. La estrella distingue al racional de su imagen, que es un conjunto. Por ejemplo, $0^* = \{r \in \mathbb{Q} : r < 0\}$ es un elemento de $\mathcal{D}$, mientras que 0 es un elemento de $\mathbb{Q}$ y no pertenece a 0^*.

Para que la aplicación conserve el orden necesitamos que $p < q$ se traduzca en $p^* \subsetneq q^*$. El significado de ambos conjuntos sugiere esta implicación: todo racional menor que p es menor que q, y el propio p ya queda a la izquierda de q aunque nunca quede a su propia izquierda. También debemos poder recorrer la relación en sentido inverso y recuperar la desigualdad de los racionales a partir de sus imágenes.

Proposición. Para cualesquiera $p, q \in \mathbb{Q}$,

$$p < q \quad \Longleftrightarrow \quad p^* \subsetneq q^*.$$

La aplicación $\iota_{\mathbb{Q}}$ es inyectiva y además satisface

$$p \leq q \quad \Longleftrightarrow \quad p^* \subseteq q^*.$$

Demostración. Supongamos primero $p < q$. Si $r \in p^*$, entonces $r < p < q$, por lo que $r \in q^*$. Esto prueba $p^* \subseteq q^*$. La inclusión es estricta porque $p \in q^*$ y $p \notin p^*$. Para el recíproco, la inclusión estricta proporciona un racional $r \in q^* \setminus p^*$. La pertenencia a q^* dice $r < q$, y la no pertenencia a p^* dice que $r < p$ es falso. Por tricotomía, $p \leq r$; de ahí $p \leq r < q$, y concluimos $p < q$. Este testigo convierte una diferencia entre conjuntos en una desigualdad entre sus parámetros.

Si $p^* = q^*$, no puede ocurrir $p < q$, pues acabamos de probar que produciría una inclusión estricta; por la misma razón tampoco puede ocurrir $q < p$. La tricotomía obliga a $p = q$, lo que demuestra la inyectividad. Para el orden no estricto, $p \leq q$ significa $p < q$ o $p = q$, y ambos casos dan $p^* \subseteq q^*$. Recíprocamente, si $p^* \subseteq q^*$ y tuviéramos $q < p$, la equivalencia estricta daría $q^* \subsetneq p^*$, incompatible con aquella inclusión. Luego $p \leq q$. □

Decimos que $\iota_{\mathbb{Q}}$ **preserva** el orden porque transporta cada desigualdad racional a las imágenes, y que lo **refleja** porque la comparación de las imágenes permite reconstruirla. La equivalencia incluye ambas direcciones; así, el nuevo lenguaje no confunde racionales distintos ni altera su posición relativa. Por ejemplo, $0^* \subsetneq 1^* \subsetneq \left(\frac{3}{2}\right)^*$ reproduce $0 < 1 < 3/2$. También puede leerse directamente una cadena con signos distintos: $(-2)^* \subsetneq 0^* \subsetneq 3^*$. Si $r < -2$, entonces $r < 0$, y $-1 \in 0^* \setminus (-2)^*$ prueba que la primera inclusión es estricta. Si $r < 0$, entonces $r < 3$, y $1 \in 3^* \setminus 0^*$ prueba lo mismo para la segunda. Los signos de los parámetros no exigen cambiar la definición.

La imagen de la aplicación es el subconjunto $\mathcal{Q}^* = \iota_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}) = \{q^* : q \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathcal{D}$. La inyectividad permite recuperar de manera única el racional representado por cada cortadura de $\mathcal{Q}^*$. En efecto, la regla $\rho : \mathcal{Q}^* \longrightarrow \mathbb{Q}, \qquad \rho(q^*) = q$ está bien definida porque una igualdad $p^* = q^*$ implica $p = q$; además,

$$\rho(\iota_{\mathbb{Q}}(q)) = q, \qquad \iota_{\mathbb{Q}}(\rho(A)) = A \quad (A \in \mathcal{Q}^*).$$

La segunda identidad usa $A = q^*$, como permite la definición de la imagen; la equivalencia de la proposición muestra además que ρ conserva el orden: de $p^* <_{\mathcal{D}} q^*$ recuperamos $p < q$. Al restringir el codominio de $\iota_{\mathbb{Q}}$ a $\mathcal{Q}^*$, tenemos por ello dos aplicaciones inversas que conservan el orden. Éste es el sentido preciso en que $\mathcal{Q}^*$ es una copia ordenada de $\mathbb{Q}$.

La copia conserva también la densidad interna del orden racional. Entre $p^* <_{\mathcal{D}} q^*$ podemos tomar $r = (p+q)/2$; como $p < r < q$, resulta $p^* <_{\mathcal{D}} r^* <_{\mathcal{D}} q^*, \qquad r^* \in \mathcal{Q}^*$. El resultado habla

de dos cortaduras racionales. Para saber si $\mathcal{D}$ aporta posiciones nuevas debemos examinar una cortadura que no pertenezca a esa imagen.

Volvamos a A_2. Las inclusiones $1^* \subsetneq A_2 \subsetneq 2^*$ se prueban sin salir de $\mathbb{Q}$. Si $r < 1$, o bien $r < 0$, o bien $0 \leq r < 1$ y $r^2 < 1 < 2$; en ambos casos $r \in A_2$. El racional 1 pertenece a A_2 y no a 1^*, lo que prueba la primera inclusión estricta. A su vez, cualquier $r \in A_2$ es menor que 2: para $r < 0$ es inmediato, y para $r \geq 0$ la alternativa $r \geq 2$ daría $r^2 \geq 4$, contra la pertenencia a A_2. Finalmente, $3/2$ pertenece a 2^* y queda fuera de A_2, pues $(3/2)^2 = 9/4 > 2$. Esto prueba la segunda inclusión estricta.

Entre 1^* y 2^* se encuentra también, por ejemplo, $(4/3)^*$, de modo que aquellas inclusiones aún no distinguen a A_2 de todas las cortaduras racionales. Para demostrar que hemos construido una posición nueva debemos descartar la igualdad $A_2 = c^*$ para **todo** racional c. La dificultad aritmética de §0.3 proporciona el argumento.

Supongamos $A_2 = c^*$ con $c \in \mathbb{Q}$. Como $0 \in A_2$, tendríamos $0 < c$. Si $c^2 < 2$, el propio c pertenecería a A_2, aunque $c \notin c^*$, una contradicción. La igualdad $c^2 = 2$ es imposible por la demostración de paridad de §0.3. Si $c^2 > 2$, podemos retroceder desde c un poco sin que el cuadrado baje hasta 2: tomemos $\delta = \frac{c^2-2}{4c}$, $\qquad t = c - \delta$. Son racionales, y $0 < \delta < c$, porque $0 < c^2 - 2 < 4c^2$. De aquí $0 < t < c$, mientras que $t^2 = c^2 - 2c\delta + \delta^2 > \frac{c^2+2}{2} > 2$. Por tanto $t \in c^*$ y $t \notin A_2$, otra contradicción. Los tres casos quedan descartados y concluimos

$$A_2 \notin \mathcal{Q}^*, \qquad \text{por tanto} \qquad \mathcal{Q}^* \subsetneq \mathcal{D}.$$

La construcción contiene efectivamente un objeto que ningún racional representa. Hemos probado esta afirmación comparando subconjuntos racionales y usando perturbaciones racionales; sigue sin ser necesario invocar un número real cuyo cuadrado sea 2.

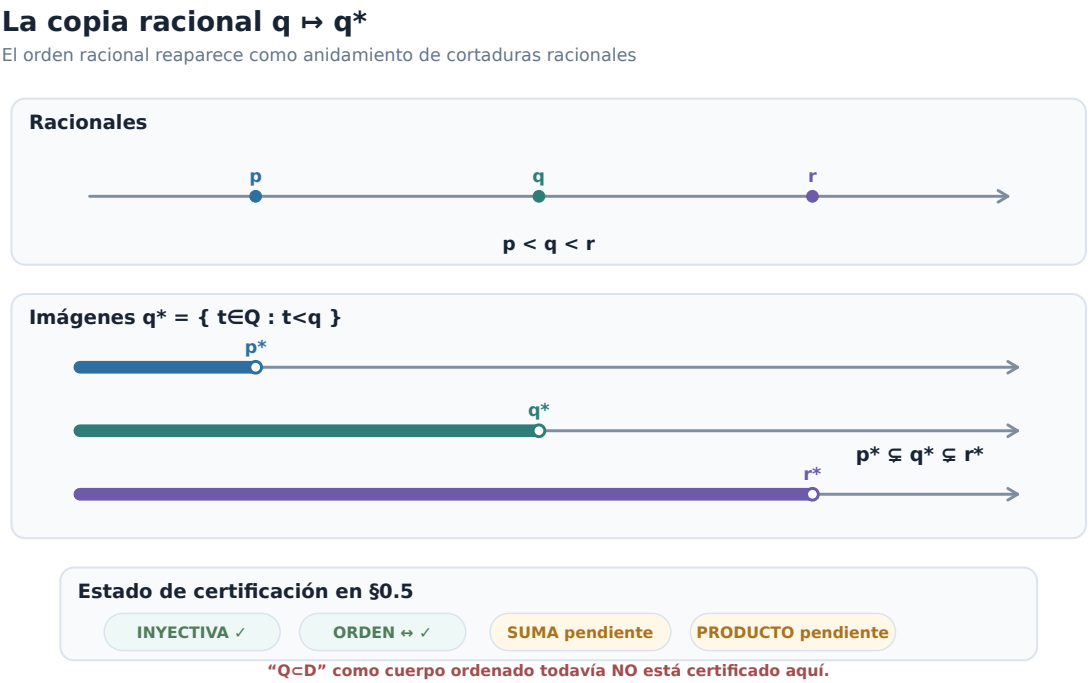


Figura 0.5. El orden p<q<r se recupera como anidamiento p⊊*q*⊊r*, mientras la certificación algebraica permanece pendiente en §0.5.

El isomorfismo de órdenes entre $\mathbb{Q}$ y $\mathcal{Q}^*$ autoriza a identificar sus posiciones ordenadas. La inclusión literal que hemos construido es $\mathcal{Q}^* \subseteq \mathcal{D}$: los elementos de la imagen son conjuntos, y los racionales de partida se corresponden con ellos mediante $\iota_{\mathbb{Q}}$. Mantendremos visible esa correspondencia al introducir las operaciones, pues conservar el orden no acredita por sí mismo ninguna ley aritmética.

La suma y el producto deberán ser aplicaciones de $\mathcal{D}\times\mathcal{D}$ en $\mathcal{D}$, con valores que satisfagan otra vez las condiciones de cortadura. Después habrá que demostrar sus leyes y comprobar que, para todos $p, q \in \mathbb{Q}$, sumar o multiplicar sus imágenes produce las imágenes de $p+q$ y pq: $p^* + q^* = (p+q)^*, \qquad p^*q^* = (pq)^*$. Estas expresiones formulan las identidades que deberán cumplir las operaciones por construir; aún no se usan como igualdades demostradas. También habrá que reconocer el cero y la unidad y justificar los opuestos y los inversos. Al verificar esa estructura completa podremos adoptar la identificación usual de los racionales con una copia de cuerpo ordenado dentro de $\mathcal{D}$. La primera operación exige dar un significado a la suma de dos lados izquierdos racionales y demostrar que el conjunto resultante vuelve a ser una cortadura.

Ejercicios de la sección 0.5.

Ejercicio 18. Construir la aplicación racional hacia $\mathcal{D}$

Para cada $q \in \mathbb{Q}$, recuerda la cortadura racional $q^* = \{r \in \mathbb{Q} : r < q\}$. Usa el resultado de §0.4 según el cual $q^* \in \mathcal{D}$ para construir formalmente $\iota_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathcal{D}, \qquad \iota_{\mathbb{Q}}(q) = q^*$.

1. Explica por qué la fórmula define realmente una aplicación con codominio $\mathcal{D}$.
2. Escribe explícitamente como subconjuntos de $\mathbb{Q}$ las imágenes de $-\frac{3}{2}$, 0 y $\frac{7}{4}$.
3. Para un $q \in \mathbb{Q}$, distingue con tipos correctos los cuatro objetos o relaciones q, q^*, $q \in \mathbb{Q}$ y $q^* \in \mathcal{D}$.
4. Define la imagen

$\mathcal{Q}^* = \iota_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q})$ y expresa correctamente su relación conjuntista con $\mathcal{D}$. En este ejercicio no afirmes todavía que $\mathbb{Q}$ sea literalmente un subconjunto de $\mathcal{D}$: construye primero la aplicación y su imagen.

Solución. Para cada $q \in \mathbb{Q}$ definimos $q^* = \{r \in \mathbb{Q} : r < q\}$. En §0.4 ya se verificó que este subconjunto satisface las cuatro condiciones de una cortadura de Dedekind. Por tanto, $q^* \in \mathcal{D}$ para todo $q \in \mathbb{Q}$. Eso garantiza que la regla $\iota_{\mathbb{Q}}(q) = q^*$ tiene efectivamente valores en $\mathcal{D}$. Luego queda bien definida la aplicación

$$\boxed{\iota_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathcal{D}, \qquad q \longmapsto q^*.}$$

Las tres imágenes pedidas son

$$\iota_{\mathbb{Q}}\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)^* = \left\{r \in \mathbb{Q} : r < -\frac{3}{2}\right\},$$

$\iota_{\mathbb{Q}}(0) = 0^* = \{r \in \mathbb{Q} : r < 0\}$, y

$$\iota_{\mathbb{Q}}\left(\frac{7}{4}\right) = \left(\frac{7}{4}\right)^* = \left\{r \in \mathbb{Q} : r < \frac{7}{4}\right\}.$$

Los tipos deben mantenerse separados. Si $q \in \mathbb{Q}$, entonces q es un racional, mientras que q^* es un subconjunto de $\mathbb{Q}$ que, además, pertenece al nuevo dominio: $q^* \subseteq \mathbb{Q}, \qquad q^* \in \mathcal{D}$. No tendría sentido escribir $q \in \mathcal{D}$ sólo por haber construido q^*, ni confundir la pertenencia $q^* \in \mathcal{D}$ con la inclusión $q^* \subseteq \mathbb{Q}$.

La imagen de la aplicación es $\mathcal{Q}^* = \iota_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}) = \{q^* : q \in \mathbb{Q}\}$. Como todos los q^* son elementos de $\mathcal{D}$,

$$\boxed{\mathcal{Q}^* \subseteq \mathcal{D}.}$$

En este punto hemos construido una aplicación desde $\mathbb{Q}$ hacia $\mathcal{D}$ y un subconjunto concreto $\mathcal{Q}^*$ de $\mathcal{D}$. Todavía no hemos identificado literalmente $\mathbb{Q}$ con esa imagen. *Referencia visual.* Véase la figura C00-F05 del texto principal, **La copia racional q↦q***, como síntesis posterior de este argumento.

Ejercicio 19. Recuperar exactamente el orden racional

Sean $p, q \in \mathbb{Q}$. Demuestra la equivalencia

$$p < q \quad \Longleftrightarrow \quad p^* \subsetneq q^*.$$

Tu prueba debe incluir ambos sentidos.

1. Si $p < q$, demuestra primero $p^* \subseteq q^*$ y exhibe un testigo concreto de que la inclusión es estricta.
2. Si $p^* \subsetneq q^*$, elige un racional $r \in q^* \setminus p^*$ y usa únicamente el orden de $\mathbb{Q}$ para concluir $p < q$.
3. Deduce como corolario que

$$p \leq q \quad \Longleftrightarrow \quad p^* \subseteq q^*.$$

4. Usa la equivalencia estricta para demostrar que $\iota_{\mathbb{Q}}$ es inyectiva.

La conclusión debe dejar claro que la aplicación no sólo preserva el orden: también permite recuperarlo desde las imágenes.

Solución. Supongamos primero $p < q$. Sea $r \in p^*$. Por definición,

$$r < p.$$

Como $p < q$, la transitividad del orden racional da $r < q$. Por tanto $r \in q^*$. Hemos probado $p^* \subseteq q^*$. La inclusión es estricta porque el propio p sirve como testigo: $p < q \Longrightarrow p \in q^*$, mientras que $p \notin p^*$ porque $p < p$ es falso. Así, $p^* \subsetneq q^*$. Probemos ahora el recíproco. Supongamos $p^* \subsetneq q^*$. Entonces existe $r \in q^* \setminus p^*$.

De $r \in q^*$ obtenemos $r < q$. De $r \notin p^*$ sabemos que no ocurre $r < p$. Como el orden de $\mathbb{Q}$ es lineal, $p \leq r$. Por tanto $p \leq r < q$, y de aquí $p < q$. Queda demostrado

$$\boxed{p < q \quad \Longleftrightarrow \quad p^* \subsetneq q^*.}$$

Para el orden no estricto, si $p \leq q$, entonces o bien $p = q$, en cuyo caso $p^* = q^*$, o bien $p < q$, en cuyo caso $p^* \subsetneq q^*$. En ambos casos, $p^* \subseteq q^*$.

Recíprocamente, si $p^* \subseteq q^*$ y fuera $q < p$, la equivalencia estricta ya demostrada produciría $q^* \subsetneq p^*$, incompatible con $p^* \subseteq q^*$. Luego $p \leq q$. Por tanto,

$$\boxed{p \leq q \quad \Longleftrightarrow \quad p^* \subseteq q^*.}$$

Finalmente, supongamos $\iota_{\mathbb{Q}}(p) = \iota_{\mathbb{Q}}(q)$. Esto significa $p^* = q^*$. Si $p < q$, tendríamos $p^* \subsetneq q^*$; si $q < p$, tendríamos $q^* \subsetneq p^*$. Ambas posibilidades contradicen la igualdad. Por tricotomía, $p = q$. Así,

$$\boxed{\iota_{\mathbb{Q}} \text{ es inyectiva.}}$$

La equivalencia de órdenes contiene más que una simple preservación: el orden de los racionales puede reconstruirse mirando únicamente las inclusiones entre sus imágenes. *Referencia visual.* Véase la figura C00-F05 del texto principal, **La copia racional $\mathbf{q \mapsto q^*}$**, como síntesis posterior de este argumento.

Ejercicio 20. Una certificación algebraica demasiado temprana

Un informe afirma:

> «Como $q \mapsto q^*$ es inyectiva y preserva el orden, ya hemos demostrado que $\mathbb{Q}$ está incrustado en $\mathcal{D}$ como cuerpo ordenado. Por tanto, para todos $p, q \in \mathbb{Q}$ podemos usar desde ahora $p^* + q^* = (p+q)^*$ y $p^* q^* = (pq)^*$. En consecuencia, escribiremos sin más $\mathbb{Q} \subseteq \mathcal{D}$.»

Audita el informe en el punto exacto del capítulo en que estamos.

1. Separa las afirmaciones que ya están demostradas de las que todavía no están disponibles.
2. Explica por qué la inyectividad y la preservación/reflexión del orden sólo certifican una **incrustación de órdenes lineales**.
3. Identifica qué operaciones sobre $\mathcal{D}$ tendrían que estar definidas antes de que las dos identidades algebraicas del informe tengan siquiera sentido dentro de la construcción.
4. Explica qué verificaciones adicionales serían necesarias para elevar el certificado a una incrustación de cuerpos ordenados.
5. Formula la certificación en dos tiempos que debe respetar el capítulo.

No refutes las identidades futuras: diagnostica por qué todavía no pueden usarse como resultados.

Solución. Hasta §0.5, la aplicación $q \mapsto q^*$ está bien definida, es inyectiva y cumple $p < q \iff p^* \subsetneq q^*$. Eso acredita una incrustación de órdenes lineales. Todavía no se han definido operaciones internas de suma y producto en $\mathcal{D}$, por lo que $p^* + q^*$ y p^*q^* no pueden usarse como resultados de una aritmética ya construida. Las secciones siguientes tendrán que definir esas operaciones, demostrar que sus valores son cortaduras y verificar las leyes de cuerpo y la compatibilidad con el orden. Para la aplicación racional deberán probarse $(p+q)^* = p^* + q^*$, $(pq)^* = p^*q^*$ y la correspondencia de cero y uno; la preservación de opuestos e inversos seguirá de las leyes correspondientes.

La certificación tiene por ello dos tiempos: primero la copia ordenada $\mathcal{Q}^* \subseteq \mathcal{D}$, y después la copia de cuerpo ordenado con su aritmética acreditada. La notación abreviada $\mathbb{Q} \subseteq \mathcal{D}$ puede adoptarse respecto de la estructura verificada, sin atribuir antes de tiempo operaciones aún pendientes. Las identidades futuras no se refutan: se identifica por qué todavía no están disponibles.

Ejercicio 21. La copia racional como orden, no todavía como cuerpo

Sea $\mathcal{Q}^* = \{q^* : q \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathcal{D}$. Define una aplicación $\rho : \mathcal{Q}^* \longrightarrow \mathbb{Q}, \qquad \rho(q^*) = q$. Demuestra que ρ es el inverso de $\iota_{\mathbb{Q}}$ cuando restringimos el codominio de esta última a $\mathcal{Q}^*$. Tu prueba debe mostrar:

1. que ρ está bien definida;
2. que

$\rho \circ \iota_{\mathbb{Q}} = \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$;

3. que

$\iota_{\mathbb{Q}} \circ \rho = \mathrm{id}_{\mathcal{Q}^*}$;

4. que para $p, q \in \mathbb{Q}$,

$$p < q \quad \iff \quad p^* <_{\mathcal{D}} q^*;$$

5. que, si $p^* <_{\mathcal{D}} q^*$, existe una cortadura racional $r^* \in \mathcal{Q}^*$ tal que

$p^* <_{\mathcal{D}} r^* <_{\mathcal{D}} q^*$. Concluye exactamente en qué sentido $\mathcal{Q}^*$ es una copia de $\mathbb{Q}$ dentro de $\mathcal{D}$ y qué estructura sigue todavía sin certificar.

Solución. Si $p^* = q^*$, la inyectividad ya probada da $p = q$. Por ello $\rho(q^*) = q$ asigna un único racional a cada elemento de $\mathcal{Q}^*$ y define $\rho : \mathcal{Q}^* \to \mathbb{Q}$. Para $q \in \mathbb{Q}$, $(\rho \circ \iota_{\mathbb{Q}})(q) = \rho(q^*) = q$. Para $A = q^* \in \mathcal{Q}^*$, $(\iota_{\mathbb{Q}} \circ \rho)(A) = \iota_{\mathbb{Q}}(q) = q^* = A$. Son las dos identidades de inversas cuando se restringe el codominio de $\iota_{\mathbb{Q}}$ a su imagen.

La equivalencia $p < q \iff p^* \subsetneq q^*$ dice que esa biyección preserva y refleja el orden. Si $p^* <_{\mathcal{D}} q^*$, tome $r = (p+q)/2$. Entonces $p < r < q$ y la equivalencia da $p^* <_{\mathcal{D}} r^* <_{\mathcal{D}} q^*$, con $r^* \in \mathcal{Q}^*$. Así la imagen reproduce el orden racional y su densidad interna. En esta sección aún faltan las operaciones y su preservación para poder concluir una copia de cuerpo ordenado.

0.6. Dar aritmética a las cortaduras I: suma y opuesto

Para sumar dos cortaduras podemos empezar con los racionales que contienen. Si $a \in A$ y $b \in B$, la suma racional $a + b$ debería quedar a la izquierda de la posición que buscamos. Reunamos todas esas sumas: $A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$. Aquí el signo $+$ adquiere un segundo uso: dentro de las llaves es la operación conocida en $\mathbb{Q}$; a la izquierda designa el conjunto que acabamos de definir. Tendremos una suma de cortaduras cuando hayamos comprobado que ese conjunto pertenece a $\mathcal{D}$.

Hay un hecho sencillo que utilizaremos repetidamente. Si $a \in A$ y $u \in \mathbb{Q} \setminus A$, entonces $a < u$. La igualdad daría $u \in A$; la desigualdad $u < a$ daría lo mismo por clausura inferior. La tricotomía racional deja únicamente $a < u$. Así, un racional exterior proporciona una cota estricta para todos los racionales interiores, aunque no sepamos dónde está una supuesta frontera numérica.

Proposición. Para cualesquiera $A, B \in \mathcal{D}$, el conjunto $A + B$ es una cortadura.

Demostración. Podemos elegir $a_0 \in A$ y $b_0 \in B$, por lo que $a_0 + b_0 \in A + B$. También podemos elegir $u \notin A$ y $v \notin B$. El hecho anterior da $a + b < u + v$ para todos $a \in A$, $b \in B$; en particular, $u + v \notin A + B$. El conjunto es no vacío y propio. Si $x = a + b \in A + B$ y $y < x$, necesitamos representar exactamente a y como una suma admisible. Mantengamos b y modifiquemos el otro sumando: $a' = y - b < a$, de modo que $a' \in A$ y $y = a' + b \in A + B$. Finalmente, dado $x = a + b$, la ausencia de máximo en A proporciona $a' \in A$ con $a' > a$. Entonces $a' + b \in A + B$ y $a' + b > x$. El conjunto es cerrado hacia abajo y carece de máximo. □

La definición produce, por tanto, una aplicación $+ : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \to \mathcal{D}$. Para comprobar qué hace con los racionales de partida, sean $p, q \in \mathbb{Q}$. Si $x = a + b$ con $a < p$ y $b < q$, entonces $x < p + q$; por ello $p^* + q^* \subseteq (p + q)^*$. En sentido inverso, un racional $x < p + q$ deja un margen positivo que podemos repartir por igual entre ambos sumandos. Tomemos

$$\varepsilon = \frac{p + q - x}{2}, \qquad a = p - \varepsilon, \qquad b = q - \varepsilon.$$

Se cumplen $a < p$, $b < q$ y $a + b = x$. Esto prueba la inclusión contraria y establece $p^* + q^* = (p + q)^*$. El reparto del margen satisface la igualdad exacta que pide la definición de suma: los testigos recuperan x aunque ambos deban quedar estrictamente por debajo de sus fronteras racionales.

Las leyes asociativa y conmutativa también se leen en los testigos. Para cualquier $x \in \mathbb{Q}$,

$$\begin{aligned} x \in (A + B) + C &\iff \exists a \in A\ \exists b \in B\ \exists c \in C :\ x = (a + b) + c \\ &\iff \exists a \in A\ \exists b \in B\ \exists c \in C :\ x = a + (b + c) \\ &\iff x \in A + (B + C). \end{aligned}$$

La igualdad de los conjuntos sigue de estas equivalencias. Intercambiar a y b en $x = a + b$ da, en ambos sentidos, $A + B = B + A$.

El candidato a cero es $0^* = \{r \in \mathbb{Q} : r < 0\}$. Si $x = a + b$ con $a \in A$ y $b < 0$, entonces $x < a$, así que $x \in A$. Para recuperar cualquier $x \in A$ como elemento de $A + 0^*$, elegimos $a \in A$ mayor que x y ponemos $b = x - a < 0$. Tenemos $x = a + b$, y concluimos $A + 0^* = A = 0^* + A$. La ausencia de máximo permite aquí introducir un sumando estrictamente negativo sin abandonar el conjunto. Es la razón por la que el lado izquierdo abierto se comporta bien con esta suma.

La suma sugiere buscar una manera de deshacerla. Para una cortadura racional queremos recuperar $(-q)^*$ a partir de q^*, y el reflejo parece una primera posibilidad. Pero reflejar los elementos de q^* cambia el lado izquierdo $r < q$ en el lado derecho $-r > -q$, que no está cerrado hacia abajo. Con $q = 0$, por ejemplo, obtenemos los racionales positivos: el conjunto contiene a 1 y excluye a $-1 < 1$. Reflejar el complemento orienta el conjunto correctamente, pero conserva un extremo: para una cortadura racional, $\{-s : s \notin q^*\} = \{t \in \mathbb{Q} : t \leq -q\}$.

Este conjunto tiene máximo. Debemos tomar los racionales estrictamente menores que los puntos reflejados del complemento. Definimos

$$-A = \{x \in \mathbb{Q} : \exists s \in \mathbb{Q} \setminus A \text{ con } x < -s\}.$$

Proposición. Si $A \in \mathcal{D}$, entonces $-A \in \mathcal{D}$.

Demostración. Un exterior $s \notin A$ proporciona $-s-1 \in -A$. Para mostrar que el conjunto es propio, tomemos $a \in A$. Si $-a \in -A$, existiría un exterior s con $-a < -s$, es decir, $s < a$; la clausura inferior de A daría $s \in A$, contradicción. Por tanto $-a \notin -A$. Si $x < -s$ con $s \notin A$, todo $y < x$ satisface también $y < -s$, y pertenece a $-A$. El mismo testigo deja además espacio para aumentar x: el punto medio $(x-s)/2$ cumple $x < \frac{x-s}{2} < -s$. Este racional pertenece a $-A$, de modo que no hay máximo. □

Con esta definición recuperamos el opuesto racional. Si $x \in -(q^*)$, algún $s \geq q$ satisface $x < -s \leq -q$, luego $x \in (-q)^*$. Si $x < -q$, el propio $s = q \notin q^*$ sirve como testigo de $x \in -(q^*)$. Así, $-(q^*) = (-q)^*$. Todavía necesitamos demostrar $A + (-A) = 0^*$ para una cortadura arbitraria. La inclusión hacia 0^* es accesible: si $x = a + b$ con $a \in A$ y $b \in -A$, hay $s \notin A$ con $b < -s$, y entonces $a < s$ obliga a $x < a - s < 0$. Para la inclusión inversa, un racional $x < 0$ fija el margen que podemos permitirnos entre un elemento interior y uno exterior. Si logramos acercarlos lo suficiente, ese margen permitirá escribir x como suma de dos testigos admisibles.

Lema de aproximación racional. Para toda $A \in \mathcal{D}$ y todo $h \in \mathbb{Q}$ con $h > 0$, existe $a \in A$ tal que $a + h \notin A$. **Demostración.** Elijamos $a_0 \in A$ y $u \notin A$. Por la propiedad arquimediana de $\mathbb{Q}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nh > u - a_0$. De aquí $a_0 + nh > u$, y ese término queda fuera de A: si perteneciera, la clausura inferior arrastraría a u dentro de A.

En la lista finita $a_0, a_0 + h, \ldots, a_0 + nh$, el primero está dentro y el último fuera. Sea k el primer índice de salida. Tenemos $1 \leq k \leq n$, de modo que $a = a_0 + (k-1)h \in A$, $\quad a + h = a_0 + kh \notin A$. Esto demuestra el lema. □ La arquimedianidad obliga a salir de la cortadura después de un número finito de pasos de tamaño $h > 0$ desde a_0; el primer índice de salida conserva un racional dentro y el siguiente fuera, a distancia h. Ese par sustituirá a la frontera real de la que aún no disponemos.

Proposición. Para toda $A \in \mathcal{D}$, se cumple $A + (-A) = 0^*$.

Demostración. La inclusión $A + (-A) \subseteq 0^*$ quedó probada antes del lema. Sea $x \in 0^*$ y pongamos $h = -x/2 > 0$. El lema proporciona $a \in A$ con $s = a + h \notin A$. Definamos $b = x - a$. Como $x = -2h$, $b = -2h - a < -h - a = -s$. Por ello $b \in -A$, y $x = a + b \in A + (-A)$. Hemos probado $0^* \subseteq A + (-A)$ y, con ella, la igualdad. □

El factor $1/2$ deja el margen estricto exigido por la definición del opuesto: elegir $h = -x$ daría $b = -s$ y ya no permitiría usar el testigo s. Las propiedades demostradas hacen de $(\mathcal{D}, +, 0^*)$ un grupo abeliano. Podemos justificar desde ellas las reglas que usaremos al restar. Si $A + B = 0^* = A + C$, entonces $B = B + (A + C) = (B + A) + C = C$, por lo que el inverso aditivo es único. En particular, $-0^* = 0^*$ y $-(-A) = A$. Asimismo, $(-A) + (-B)$ es inverso de $A + B$, porque al reagrupar su suma aparecen $A + (-A)$ y $B + (-B)$; luego $-(A + B) = (-A) + (-B)$. Escribiremos $A - B$ para $A + (-B)$. Si $A + C = B + C$, sumar $-C$ y reagrupar da $A = B$; ésta es la cancelación aditiva.

La inclusión interactúa con la suma mediante los mismos testigos: de $A \subseteq B$ se sigue $A + C \subseteq B + C$. La implicación inversa se obtiene aplicando esa monotonía a una inclusión $A + C \subseteq B + C$ y sumando $-C$ a ambos miembros. Las leyes aditivas reducen el resultado a $A \subseteq B$. Tenemos, por tanto, $A \subseteq B \iff A + C \subseteq B + C$. También se conserva y refleja la inclusión estricta. En efecto, la inclusión ya se transporta en ambos sentidos, y una igualdad de las sumas equivaldría, por cancelación, a la igualdad de los sumandos originales. Así, $A \subsetneq B \iff A + C \subsetneq B + C$. El orden lineal de §0.4 convierte a $\mathcal{D}$ en un grupo abeliano linealmente ordenado. En adelante escribiremos $A \leq B$ o $A < B$ para estas inclusiones cuando los objetos sean cortaduras. Al trasladar $A < 0^*$ por $-A$ obtenemos $0^* < -A$; al trasladar $0^* < A$ obtenemos $-A < 0^*$. El opuesto cambia, pues, el signo, y todas estas afirmaciones descansan ya en leyes demostradas.

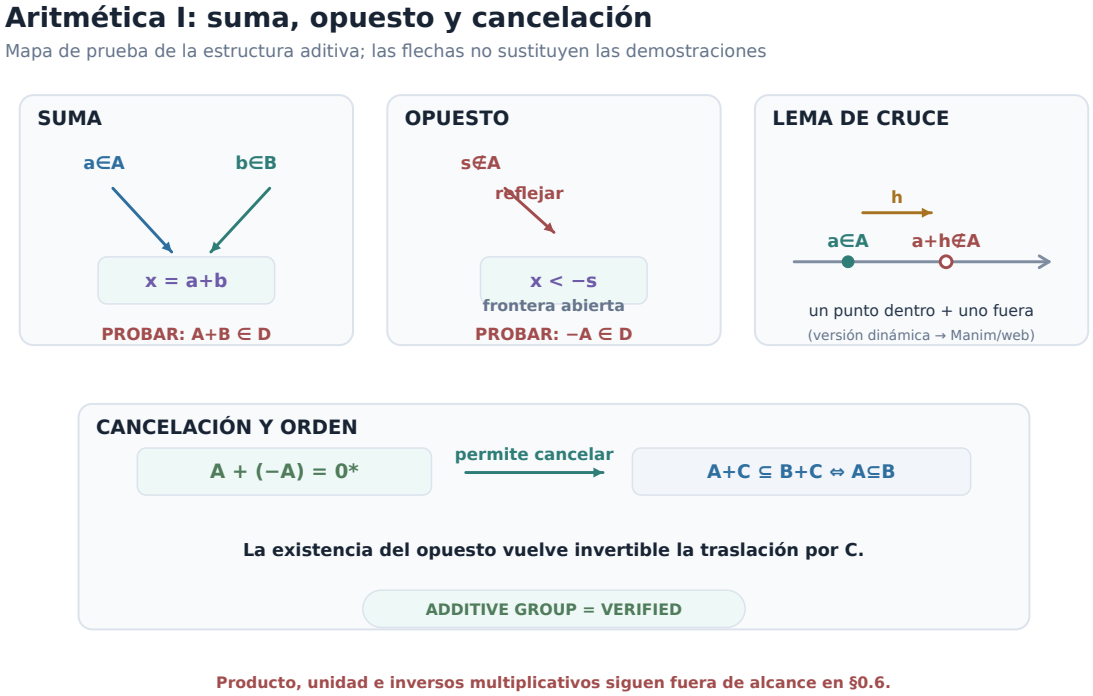


Figura 0.6. La estructura aditiva se construye por testigos racionales, racionales exteriores y el lema de cruce; el opuesto permite cancelar traslaciones.

La aplicación $q \mapsto q^*$ conserva la suma, el cero y los opuestos, además de preservar y reflejar el orden. El producto aún debe construirse. La diferencia se aprecia al intentar repetir la receta de la suma: los testigos negativos, que allí no causaban dificultades, cambian por completo lo que sucede al multiplicarlos.

Ejercicios de la sección 0.6.

Ejercicio 22. Construir una suma que permanezca dentro de $\mathcal{D}$

Sean $A, B \in \mathcal{D}$. Define $A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$. Demuestra que esta fórmula determina una operación interna $+ : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$. Tu demostración debe verificar por separado las cuatro condiciones de cortadura para $A + B$.

1. Prueba que $A + B \neq \emptyset$.
2. Para demostrar que $A + B \neq \mathbb{Q}$, elige $u \notin A$ y $v \notin B$ y demuestra primero el hecho auxiliar $a < u$ para todo $a \in A$ y $b < v$ para todo $b \in B$.
3. Demuestra la clausura hacia abajo de $A+B$ sin apelar a ninguna noción geométrica de frontera.
4. Demuestra que $A + B$ no tiene máximo.

Cierra explicando por qué escribir una fórmula para $A+B$ no habría bastado, por sí solo, para definir una operación en $\mathcal{D}$.

Solución. Sean $A, B \in \mathcal{D}$ y definamos $A+B = \{a+b : a \in A,\ b \in B\}$. Debemos demostrar que $A + B$ vuelve a ser una cortadura.

No vaciedad. Como A y B son no vacíos, existen
$a_0 \in A, \qquad b_0 \in B$. Entonces $a_0 + b_0 \in A + B$, de modo que $A + B \neq \emptyset$.

Propiedad de ser propio. Como $A \subsetneq \mathbb{Q}$ y $B \subsetneq \mathbb{Q}$, podemos elegir
$u \notin A, \qquad v \notin B$. Afirmamos que todo $a \in A$ satisface $a < u$. Si $u = a$, la igualdad daría $u \in A$; si $u < a$, la clausura hacia abajo daría la misma conclusión. Ambas contradicen $u \notin A$. Por tanto $a < u$ para todo $a \in A$. Del mismo modo, $b < v$ para todo $b \in B$. Así, para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$,

$a + b < u + v$. En consecuencia, $u + v \notin A + B$. Luego $A + B \neq \mathbb{Q}$.

Clausura hacia abajo. Sea

$x = a+b \in A+B$ y sea $y < x$. Definamos $a' = y-b$. Como $y < a+b$, $a' < a$. La clausura hacia abajo de A da $a' \in A$, y entonces $y = a' + b \in A + B$.

Ausencia de máximo. Sea

$x = a + b \in A + B$. Como A no tiene máximo, existe $a' \in A$ con $a < a'$. Por tanto $x = a + b < a' + b$, y $a' + b \in A + B$. Ningún elemento de $A + B$ es máximo. Las cuatro condiciones se cumplen. Por tanto

$$\boxed{A + B \in \mathcal{D}.}$$

Así la regla define realmente $+ : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$. La última observación es lógica: una fórmula puede producir un subconjunto de $\mathbb{Q}$ sin producir una cortadura. Para definir una operación interna en $\mathcal{D}$ hacía falta demostrar la clausura del codominio. *Referencia visual.* Véase la figura C00-F06 del texto principal, **Aritmética I: suma, opuesto y cancelación**, como síntesis posterior de este argumento.

Ejercicio 23. Recuperar la suma racional y localizar el cero

Sean $p, q \in \mathbb{Q}$.

1. Demuestra, por doble inclusión, que

$p^* + q^* = (p + q)^*$. En la inclusión difícil, si $x < p + q$, construye explícitamente $a < p$ y $b < q$ tales que $x = a + b$. 2. Deduce que $\iota_{\mathbb{Q}}(p + q) = \iota_{\mathbb{Q}}(p) + \iota_{\mathbb{Q}}(q)$.

3. Demuestra directamente que

$A + 0^* = A$ para toda $A \in \mathcal{D}$. 4. Usando la definición de la suma y la aritmética racional, demuestra que la suma de cortaduras es conmutativa y asociativa. Concluye qué parte de la estructura aditiva racional está ya certificada y qué parte de la estructura de cuerpo sigue pendiente.

Solución. Sean $p, q \in \mathbb{Q}$. Primero probemos $p^* + q^* \subseteq (p + q)^*$. Si $x \in p^* + q^*$, existen $a < p$ y $b < q$ con $x = a + b$. Entonces $x = a + b < p + q$, de modo que $x \in (p + q)^*$. Para la inclusión recíproca, sea $x < p + q$. Definimos $\varepsilon = \frac{p+q-x}{2} > 0$ y $a = p - \varepsilon, \qquad b = q - \varepsilon$.

Entonces $a < p$ y $b < q$, por lo que $a \in p^*, \qquad b \in q^*$. Además, $a + b = p + q - 2\varepsilon = x$. Así $x \in p^* + q^*$. Concluimos

$$\boxed{p^* + q^* = (p + q)^*.}$$

Como $\iota_{\mathbb{Q}}(r) = r^*$,

$$\boxed{\iota_{\mathbb{Q}}(p + q) = \iota_{\mathbb{Q}}(p) + \iota_{\mathbb{Q}}(q).}$$

Ahora probemos que 0^* es neutro aditivo. Si $x \in A + 0^*$, existen $a \in A$ y $b < 0$ con $x = a + b < a$. La clausura hacia abajo de A da $x \in A$. Por tanto $A + 0^* \subseteq A$.

Recíprocamente, sea $x \in A$. Como A no tiene máximo, existe $a \in A$ con $x < a$. Definimos $b = x - a < 0$. Entonces $b \in 0^*$ y $x = a + b \in A + 0^*$. Así

$$\boxed{A + 0^* = A.}$$

Por conmutatividad, también $0^* + A = A$. La conmutatividad se obtiene directamente: si $x = a + b$ con $a \in A$ y $b \in B$, entonces $x = b + a \in B + A$. Intercambiando A y B se obtiene la igualdad

$$\boxed{A + B = B + A.}$$

Para la asociatividad, $x \in (A + B) + C$ si y sólo si existen $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ tales que $x = (a + b) + c$. Por asociatividad en $\mathbb{Q}$, $(a + b) + c = a + (b + c)$, y esta última forma caracteriza la pertenencia a $A + (B + C)$. Por extensionalidad,

$$\boxed{(A+B)+C = A+(B+C).}$$

Al finalizar este ejercicio ya sabemos que la suma de cortaduras es interna, asociativa y conmutativa, que 0^* es su neutro y que la copia racional conserva la suma. Falta todavía construir y verificar los inversos aditivos, y toda la estructura multiplicativa continúa fuera de alcance. *Referencia visual.* Véase la figura C00-F06 del texto principal, **Aritmética I: suma, opuesto y cancelación**, como síntesis posterior de este argumento.

Ejercicio 24. Construir el opuesto sin introducir un punto final

Sea $A \in \mathcal{D}$. Considera primero el conjunto ingenuo $N(A) = \{-s : s \notin A\}$.

1. Examina el caso $A = q^*$ y demuestra que $N(q^*)$ no es una cortadura.
2. Define entonces

$$-A = \{x \in \mathbb{Q} : \exists s \notin A \text{ tal que } x < -s\}.$$

Demuestra que $-A \in \mathcal{D}$ verificando las cuatro condiciones de cortadura. 3. Demuestra que, para todo $q \in \mathbb{Q}$, $-(q^*) = (-q)^*$. Explica por qué la desigualdad estricta en la definición de $-A$ es estructuralmente necesaria y no un detalle notacional.

Solución. Consideremos primero $N(A) = \{-s : s \notin A\}$. Si $A = q^*$, entonces

$$s \notin q^* \quad \Longleftrightarrow \quad s \geq q.$$

Por tanto $N(q^*) = \{-s : s \geq q\} = \{t \in \mathbb{Q} : t \leq -q\}$. Este conjunto tiene máximo, a saber $-q$. Luego no es una cortadura. La reparación consiste en tomar la clausura inferior estricta:

$$-A = \{x \in \mathbb{Q} : \exists s \notin A \text{ tal que } x < -s\}.$$

Verifiquemos las cuatro condiciones.

No vaciedad. Como A es propio, existe $s \notin A$. Entonces

$-s - 1 < -s$, de modo que $-s - 1 \in -A$. **Propiedad de ser propio.** Como A no es vacío, tomemos $a \in A$. Afirmamos que $-a \notin -A$. Si $-a \in -A$, existiría $s \notin A$ con $-a < -s$, equivalentemente $s < a$. La clausura hacia abajo de A implicaría $s \in A$, contradicción.

Clausura hacia abajo. Si $x \in -A$, existe $s \notin A$ con $x < -s$. Si $y < x$, entonces

$y < x < -s$, y el mismo s demuestra que $y \in -A$.

Ausencia de máximo. Sea $x \in -A$. Existe $s \notin A$ con $x < -s$. El racional

$x' = \frac{x-s}{2} = \frac{x+(-s)}{2}$ satisface $x < x' < -s$. Así $x' \in -A$ y $x' > x$. Por tanto

$$\boxed{-A \in \mathcal{D}.}$$

Finalmente, para $A = q^*$, si $x \in -(q^*)$, existe $s \notin q^*$ con $x < -s$. La condición $s \notin q^*$ equivale a $s \geq q$, luego $-s \leq -q$ y por tanto $x < -q$. Así $x \in (-q)^*$.

Recíprocamente, si $x < -q$, tomamos $s = q$. Como $q \notin q^*$ y $x < -q = -s$, obtenemos $x \in -(q^*)$. Luego

$$\boxed{-(q^*) = (-q)^*.}$$

La desigualdad estricta es indispensable: excluye el punto extremo que haría aparecer un máximo. La definición conserva la convención esencial de toda cortadura: lado izquierdo sin punto final. *Referencia visual.* Véase la figura C00-F06 del texto principal, **Aritmética I: suma, opuesto y cancelación**, como síntesis posterior de este argumento.

Ejercicio 25. Trazar la prueba de que el opuesto es un inverso aditivo

Sea $A \in \mathcal{D}$. Primero demuestra el lema siguiente:

Si $h \in \mathbb{Q}$ y $h > 0$, existe $a \in A$ tal que $a + h \notin A$.

Tu prueba debe señalar exactamente dónde se usa la propiedad arquimediana de $\mathbb{Q}$. Después usa ese lema para demostrar $A + (-A) = 0^*$. Organiza la prueba por doble inclusión y, en la inclusión $0^* \subseteq A + (-A)$, explica por qué para $x < 0$ conviene introducir $h = -\frac{x}{2}$. Finalmente demuestra la equivalencia de traslación

$$A \subseteq B \quad \Longleftrightarrow \quad A + C \subseteq B + C$$

para $A, B, C \in \mathcal{D}$, y deduce la versión estricta. Cierra con una lista breve de dependencias: qué parte usa clausura hacia abajo, qué parte usa existencia de racionales exteriores, qué parte usa arquimedianidad y qué parte usa ya la existencia del opuesto.

Solución. Comenzamos con el lema. Sea $h \in \mathbb{Q}$, $h > 0$. Elegimos

$$a_0 \in A \qquad \text{y} \qquad u \notin A.$$

Como $a_0 \in A$ y $u \notin A$, necesariamente $a_0 < u$. La propiedad arquimediana de $\mathbb{Q}$ se usa exactamente ahora: existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nh > u - a_0$. Por tanto $a_0 + nh > u$. Ese racional no puede pertenecer a A, porque si perteneciera, la clausura hacia abajo y $u < a_0 + nh$ obligarían a $u \in A$. En la lista finita $a_0,\ a_0 + h,\ a_0 + 2h, \dots, a_0 + nh$ el primer término pertenece a A y el último no. Sea $k \geq 1$ el primer índice con

$a_0 + kh \notin A$. Entonces, por minimalidad, $a := a_0 + (k-1)h \in A$, mientras que $a + h \notin A$. Queda demostrado el lema. Ahora probemos $A + (-A) = 0^*$. Sea $x \in A + (-A)$. Existen $a \in A$ y $b \in -A$ con $x = a + b$. Por definición de $-A$, existe $s \notin A$ tal que $b < -s$. Como $a \in A$ y $s \notin A$, tenemos $a < s$. Luego

$x = a + b < a - s < 0$. Por tanto $x \in 0^*$, y así $A + (-A) \subseteq 0^*$. Para la otra inclusión, sea $x \in 0^*$, es decir, $x < 0$. Definimos $h = -\frac{x}{2} > 0$. Esta elección hace que $x = -2h$, lo que permitirá fabricar un sumando que quede estrictamente por debajo del negativo de un racional exterior. Por el lema existe $a \in A$ tal que $a + h \notin A$.

Sea $s = a + h$ y definamos $b = x - a$. Como $x = -2h$, $b = -2h - a < -h - a = -s$. Dado que $s \notin A$, la desigualdad $b < -s$ implica $b \in -A$. Finalmente, $x = a + b$ con $a \in A$ y $b \in -A$, por lo que $x \in A + (-A)$. Así, $0^* \subseteq A + (-A)$, y por tanto

$$\boxed{A + (-A) = 0^*.}$$

Pasemos a la traslación del orden. Si $A \subseteq B$, cualquier elemento de $A + C$ tiene forma $a + c$ con $a \in A \subseteq B$ y $c \in C$. Por tanto $A + C \subseteq B + C$.

Recíprocamente, supongamos $A + C \subseteq B + C$. La monotonía recién demostrada permite sumar $-C$ a ambos lados: $(A + C) + (-C) \subseteq (B + C) + (-C)$. Por asociatividad y por $C + (-C) = 0^*$, $A + 0^* \subseteq B + 0^*$. Luego $A \subseteq B$. Así,

$$\boxed{A \subseteq B \quad \Longleftrightarrow \quad A + C \subseteq B + C.}$$

Como la traslación tiene inversa —sumar $-C$— también conserva y refleja desigualdad estricta:

$$\boxed{A \subsetneq B \quad \Longleftrightarrow \quad A + C \subsetneq B + C.}$$

El balance de dependencias es:

- **clausura hacia abajo:** permite comparar elementos interiores con racionales exteriores y justificar pasos del lema;
- **existencia de racionales exteriores:** se usa para elegir $u \notin A$ y para la definición del opuesto;
- **arquimedianidad de $\mathbb{Q}$:** se usa exactamente para elegir n con $nh > u - a_0$;

- **existencia del opuesto ya verificado:** se usa para invertir una traslación y recuperar $A \subseteq B$ desde $A + C \subseteq B + C$.

La prueba no usa producto ni ninguna propiedad de completitud. *Nota visual.* El barrido racional por pasos de tamaño h queda diferido a la versión Manim/web; la figura C00-F06 ofrece únicamente el contexto estático del lema de cruce.

Ejercicio 26. Auditar un cierre aditivo demasiado rápido

Un informe afirma:

> «Definimos $A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$ y $-A = \{-a : a \in A\}$. Como ambas fórmulas usan sólo racionales, sus resultados pertenecen automáticamente a $\mathcal{D}$. Además, como $A + (-A)$ representa intuitivamente cero, ya tenemos un grupo ordenado. Por tanto podemos cancelar C en $A + C \subseteq B + C$ y concluir $A \subseteq B$.»

Audita el informe.

1. Localiza la primera inferencia inválida.
2. Explica por qué una fórmula con valores racionales no garantiza que el resultado sea una cortadura.
3. Demuestra con un ejemplo racional que $\{-a : a \in A\}$ no puede ser la definición correcta del opuesto.
4. Explica qué verificaciones deben preceder a la afirmación $A + (-A) = 0^*$.
5. Explica por qué la cancelación usada al final sólo queda justificada después de construir y verificar el inverso aditivo.
6. Reordena el argumento en una cadena lógica correcta que termine exactamente en

$$(\mathcal{D}, +, \leq_{\mathcal{D}}) \text{ es un grupo abeliano linealmente ordenado.}$$

No uses producto, unidad multiplicativa ni inversos multiplicativos.

Solución. La primera inferencia inválida aparece inmediatamente después de escribir las fórmulas. De que $A + B \subseteq \mathbb{Q}$ o de que un conjunto esté formado por racionales no se sigue que sea una cortadura. Para pertenecer a $\mathcal{D}$ deben verificarse no vaciedad, propiedad de ser propio, clausura hacia abajo y ausencia de máximo. El segundo error está en la fórmula $-A = \{-a : a \in A\}$.

Tomemos, por ejemplo, $A = 0^* = \{a \in \mathbb{Q} : a < 0\}$. Entonces $\{-a : a \in 0^*\} = \{r \in \mathbb{Q} : r > 0\}$. Este conjunto no es cerrado hacia abajo: 1 pertenece a él, pero $-1 < 1$ y -1 no pertenece. Por tanto no es una cortadura. Incluso la variante $\{-s : s \notin A\}$ falla en general: para $A = q^*$ produce $\{t : t \leq -q\}$, que tiene máximo.

La definición correcta es

$$-A = \{x \in \mathbb{Q} : \exists s \notin A \text{ tal que } x < -s\},$$

y antes de usarla algebraicamente hay que demostrar que $-A \in \mathcal{D}$. Tampoco basta la intuición para afirmar $A + (-A) = 0^*$. Antes deben estar disponibles:

1. la clausura de la suma en $\mathcal{D}$;
2. la construcción correcta de $-A$ y su clausura;
3. el lema de aproximación racional;
4. las dos inclusiones $A + (-A) \subseteq 0^*$ y $0^* \subseteq A + (-A)$.

La cancelación del último paso del informe también estaba adelantada. Para pasar de $A + C \subseteq B + C$ a $A \subseteq B$ necesitamos traducir por $-C$. Esa maniobra sólo es legítima después de haber probado que $-C$ existe como cortadura y que $C + (-C) = 0^*$. La cadena lógica correcta es, por tanto,

definir suma
$\Longrightarrow$ probar clausura
$\Longrightarrow$ probar asociatividad y conmutatividad
$\Longrightarrow$ identificar 0^*
$\Longrightarrow$ construir y cerrar $-A$
$\Longrightarrow$ probar $A + (-A) = 0^*$
$\Longrightarrow$ obtener el grupo abeliano
$\Longrightarrow$ probar compatibilidad por traslaciones.

Sólo entonces está justificado concluir

$(\mathcal{D}, +, \leq_{\mathcal{D}})$ es un grupo abeliano linealmente ordenado.

El estado algebraico sigue siendo parcial: la multiplicación, la unidad multiplicativa y los inversos multiplicativos todavía no forman parte del sistema construido.

0.7. Dar aritmética a las cortaduras II: producto e inverso

Toda cortadura contiene racionales negativos de magnitud arbitrariamente grande. Si fijamos $a_0 \in A$, cualquier entero negativo $-n < a_0$ pertenece a A. Para dos cortaduras A, B, podemos elegir n tan grande que $-n$ pertenezca a ambas. El conjunto de productos $\{ab : a \in A, b \in B\}$ contiene entonces valores n^2 arbitrariamente grandes; ningún racional exterior podría dominarlo. Incluso con $A = B = 1^*$, dos testigos situados muy a la izquierda producen valores positivos muy a la derecha.

Para construir la multiplicación conviene empezar por cortaduras positivas y por testigos positivos. El significado de «positiva» ya está fijado por el orden: $A > 0^*$ quiere decir $0^* \subsetneq A$. Esta condición equivale a $0 \in A$ y también a la existencia de algún $a \in A$ con $a > 0$. En efecto, una inclusión estricta proporciona $x \in A$ con $x \geq 0$, y la clausura inferior da $0 \in A$ si $x > 0$. Si $0 \in A$, la ausencia de máximo proporciona un elemento positivo. Y si $a \in A$ es positivo, todos los racionales negativos pertenecen a A, mientras que a atestigua que la inclusión de 0^* es estricta.

Para $A > 0^*$ escribamos $A_{>0} = \{a \in A : a > 0\}$. Es un conjunto no vacío. Además, todo exterior $u \notin A$ es positivo, pues está estrictamente por encima de cualquier elemento de $A_{>0}$. Este hecho nos permitirá controlar los productos con desigualdades racionales orientadas correctamente. **Definición.** Para $A, B > 0^*$ ponemos $A \cdot_+ B = \{x \in \mathbb{Q} : \exists a \in A_{>0}\ \exists b \in B_{>0} : x < ab\}$. La desigualdad estricta reúne todo el lado izquierdo de los productos admisibles y deja espacio por encima de cada elemento. El dominio de $\cdot_+$ consta únicamente de pares de cortaduras estrictamente positivas.

Proposición. Si $A, B > 0^*$, entonces $A \cdot_+ B$ es una cortadura estrictamente positiva.

Demostración. Elijamos $a \in A_{>0}$ y $b \in B_{>0}$. Como $0 < ab$, tenemos $0 \in A \cdot_+ B$, y el conjunto es no vacío. Para exteriores $u \notin A$, $v \notin B$, sabemos $u, v > 0$. Cualesquiera testigos positivos satisfacen $a < u$, $b < v$, y por ello $ab < ub < uv$. En consecuencia, $uv \notin A \cdot_+ B$: el conjunto es propio. Si $x < ab$ y $y < x$, los mismos testigos dan $y < ab$. También el punto medio $z = (x + ab)/2$ cumple $x < z < ab$, así que pertenece al conjunto y supera a x. Quedan probadas la clausura inferior y la ausencia de máximo. Al contener a 0, la cortadura es positiva. □

Para racionales $p, q > 0$, esta regla recupera $(pq)^*$. La inclusión $p^* \cdot_+ q^* \subseteq (pq)^*$ se sigue de $x < ab < pb < pq$ cuando $0 < a < p$ y $0 < b < q$. Para la contraria, sea $x < pq$. Si $x \leq 0$, bastan $a = p/2$ y $b = q/2$. Si $x > 0$, la desigualdad $x/q < p$ deja un intervalo racional en el que elegir $\frac{x}{q} < a < p$. Con ese $a > 0$, tenemos $x/a < q$, y podemos elegir $\frac{x}{a} < b < q$. Entonces $a \in p^*_{>0}$, $b \in q^*_{>0}$ y $x < ab$. Las dos aplicaciones de densidad introducen

testigos estrictamente interiores cuyo producto sigue por encima de x. Por doble inclusión, $p^* \cdot_+ q^* = (pq)^* \qquad (p, q > 0)$.

Los testigos positivos permiten estudiar cómo se comporta esta operación al cambiar el orden o la agrupación de sus factores. La conmutatividad positiva se deduce intercambiando los testigos a, b en $x < ab$. Para la asociatividad hay que insertar un testigo intermedio: el producto definido por una desigualdad no permite usar sin más a ab como elemento de $A \cdot_+ B$.

Proposición. Para $A, B, C > 0^*$, $(A \cdot_+ B) \cdot_+ C = A \cdot_+ (B \cdot_+ C)$.

Demostración. Si $x \in (A \cdot_+ B) \cdot_+ C$, existen $u \in (A \cdot_+ B)_{>0}$ y $c \in C_{>0}$ con $x < uc$, y luego $a \in A_{>0}$, $b \in B_{>0}$ con $u < ab$. Así $x < uc < abc$. Si $x \leq 0$, elijamos $0 < v < bc$; si $x > 0$, elijamos $x/a < v < bc$. En ambos casos $v > 0$, $v \in B \cdot_+ C$ y $x < av$, lo que da $x \in A \cdot_+ (B \cdot_+ C)$.

En la otra dirección, si $x \in A \cdot_+ (B \cdot_+ C)$, hay $a \in A_{>0}$ y $v \in (B \cdot_+ C)_{>0}$ con $x < av$, y $b \in B_{>0}$, $c \in C_{>0}$ con $v < bc$. De nuevo $x < abc$. Si $x \leq 0$, tomamos $0 < u < ab$; si $x > 0$, tomamos $x/c < u < ab$. Entonces $u \in (A \cdot_+ B)_{>0}$ y $x < uc$, como exige la pertenencia a $(A \cdot_+ B) \cdot_+ C$. La densidad racional permite todas las elecciones indicadas. □

La cortadura 1^* será la unidad. Para $A > 0^*$, si $x \in A \cdot_+ 1^*$, hay $a \in A_{>0}$ y $0 < b < 1$ con $x < ab < a$, de donde $x \in A$. Recíprocamente, si $x \in A$ y $x \leq 0$, cualquier $a \in A_{>0}$ junto con $b = 1/2$ sirve. Si $x > 0$, elegimos $a \in A$ con $a > x$ y después un racional $x/a < b < 1$. Así $x < ab$ y $x \in A \cdot_+ 1^*$. Por tanto $A \cdot_+ 1^* = A = 1^* \cdot_+ A$.

La ley que conecta esta multiplicación con la suma necesita su propia demostración. Una suma positiva de dos cortaduras positivas puede representarse mediante sumandos racionales positivos, aunque los testigos iniciales no lo sean. En efecto, sea $u = b_0 + c_0 > 0$, con $b_0 \in B$, $c_0 \in C$. Si ambos son positivos, ya tenemos la representación buscada. Si $b_0 \leq 0$, elijamos $d \in B_{>0}$ y $0 < b < \min\{u, d\}$. Entonces $b \in B_{>0}$, y $c = u - b$ satisface $0 < c < c_0$, por lo que $c \in C_{>0}$. Si $c_0 \leq 0$, intercambiamos los papeles: elegimos $e \in C_{>0}$, $0 < c < \min\{u, e\}$ y ponemos $b = u - c$, que cumple $0 < b < b_0$ y pertenece a B. Los dos testigos originales no pueden ser simultáneamente no positivos porque su suma es $u > 0$.

Proposición. Si $A, B, C > 0^*$, entonces $A \cdot_+ (B + C) = (A \cdot_+ B) + (A \cdot_+ C)$.

Demostración. La cortadura $B + C$ es positiva porque contiene a $0 = 0 + 0$. Sea $x \in A \cdot_+ (B + C)$. Existen $a \in A_{>0}$ y $u \in (B + C)_{>0}$ con $x < au$. Por el argumento anterior podemos escribir $u = b + c$, con $b \in B_{>0}$ y $c \in C_{>0}$. Tenemos $x < ab + ac$. Elijamos un racional y con $x - ac < y < ab$ y pongamos $z = x - y$. La desigualdad superior da $y \in A \cdot_+ B$; la inferior da $z < ac$, y por ello $z \in A \cdot_+ C$. Como $x = y + z$, obtenemos una inclusión.

Para la contraria, sea $x = y + z$ con $y \in A \cdot_+ B$ y $z \in A \cdot_+ C$. Existen $a_1, a_2 \in A_{>0}$, $b \in B_{>0}$ y $c \in C_{>0}$ tales que $y < a_1 b$ y $z < a_2 c$. El máximo $m = \max\{a_1, a_2\}$ pertenece a A, pues es uno de los dos testigos. La ausencia de máximo permite elegir $a \in A$ con $a > m$. Al ser b, c positivos, $x = y + z < a_1 b + a_2 c < ab + ac = a(b + c)$. Además $b + c \in (B + C)_{>0}$. Los testigos $a, b + c$ prueban que $x \in A \cdot_+ (B + C)$. □

Reemplazar los dos testigos de A por uno mayor que ambos permite reunir los productos bajo un factor común; la distributividad racional se aplica a esos testigos y produce la inclusión entre cortaduras.

Podemos extender el producto al conjunto entero. En el grupo ordenado de §0.6, toda cortadura no nula es positiva o tiene opuesto positivo; además $-(-A) = A$. Definimos

$$A \cdot B = \begin{cases} 0^*, & A = 0^* \text{ o } B = 0^*, \\ A \cdot_+ B, & A > 0^*,\ B > 0^*, \\ (-A) \cdot_+ (-B), & A < 0^*,\ B < 0^*, \\ -\big(A \cdot_+ (-B)\big), & A > 0^* > B, \\ -\big((-A) \cdot_+ B\big), & B > 0^* > A. \end{cases}$$

Los casos son disjuntos y exhaustivos por la tricotomía. Cada aparición de $\cdot_+$ recibe cortaduras estrictamente positivas, y tomar un opuesto conserva $\mathcal{D}$. La regla determina así

una operación $\mathcal{D} \times \mathcal{D} \to \mathcal{D}$. El producto de dos factores no nulos es positivo cuando tienen el mismo signo y negativo cuando tienen signos distintos. Esta separación usa el orden lineal clásico; no afirma que el signo de una cortadura arbitrariamente representada pueda decidirse por un algoritmo.

La definición separa en cada factor una parte positiva y la aplicación eventual del opuesto. Toda cortadura no nula se escribe de manera única como P o $-P$, con $P > 0^*$. Esta representación permite seguir el signo y la parte positiva al agrupar tres factores. Si $\epsilon \in \{+1, -1\}$ y $P > 0^*$, escribamos ϵP como abreviatura de P cuando $\epsilon = +1$ y de $-P$ cuando $\epsilon = -1$. Esta notación sólo aplica o deja de aplicar el opuesto; no presupone un producto de cortaduras. Las cuatro ramas no nulas de la definición dicen exactamente

$$(\epsilon P)(\eta Q) = (\epsilon\eta)(P \cdot_+ Q), \qquad \epsilon, \eta \in \{+1, -1\}, \quad P, Q > 0^*.$$

A la derecha, $\epsilon\eta$ es el producto de dos signos racionales. Como $P \cdot_+ Q > 0^*$, podemos aplicar otra vez esta regla al multiplicar por un tercer factor θR. Las dos agrupaciones tienen signos $(\epsilon\eta)\theta$ y $\epsilon(\eta\theta)$ y partes positivas $(P \cdot_+ Q) \cdot_+ R$ y $P \cdot_+ (Q \cdot_+ R)$. Los signos coinciden por aritmética racional y las partes positivas por la proposición de asociatividad. Si hay un factor cero, las dos agrupaciones valen 0^* por definición. Queda probada la asociatividad general.

Intercambiar ϵ, P con η, Q en la misma fórmula y usar la conmutatividad positiva demuestra $AB = BA$ para factores no nulos; si hay un cero, ambos productos son cero. La fórmula también prueba, cambiando un signo y usando la involutividad del opuesto,

$$(-A)B = -(AB), \qquad A(-B) = -(AB), \qquad (-A)(-B) = AB.$$

Si algún factor es cero, estas identidades se reducen a $-0^* = 0^*$. Por su parte, la unidad positiva ya demostrada y las ramas con cero o con un factor negativo dan, para todo A, $A1^* = A = 1^*A$. En el caso negativo la cuenta es $A1^* = -((-A) \cdot_+ 1^*) = -(-A) = A$. Finalmente, $1^* \neq 0^*$ porque la aplicación racional conserva estrictamente $0 < 1$.

Las reglas de signo permiten recuperar el producto racional completo. Si $p, q < 0$, usamos $-(p^*) = (-p)^*$ para obtener $p^*q^* = (-p)^* \cdot_+ (-q)^* = ((-p)(-q))^* = (pq)^*$. Si $p > 0 > q$, resulta $p^*q^* = -(p^* \cdot_+ (-q)^*) = -((p(-q))^*) = (pq)^*$. El caso $q > 0 > p$ se obtiene intercambiando los factores mediante la conmutatividad recién probada. Con un factor cero, ambos miembros son 0^*. Junto con el caso positivo, tenemos $p^*q^* = (pq)^*$ para todos los racionales p, q.

Al distribuir un producto aparece una dificultad que la asociatividad no presentaba. Conocer los signos de B y C no determina el signo de $B + C$ cuando uno es positivo y el otro negativo: también hay que comparar sus magnitudes. Esa comparación nos permitirá expresar el caso mixto mediante una suma de cortaduras positivas, donde la distributividad ya está demostrada.

Fijemos primero $A > 0^*$. Si $B = 0^*$, la igualdad $A(B + C) = AB + AC$ se reduce a $AC = 0^* + AC$; si $C = 0^*$, se reduce a $AB = AB + 0^*$. Para $B, C > 0^*$ ya está demostrada. Si ambos son negativos, pongamos $B = -B_0$, $C = -C_0$, con $B_0, C_0 > 0^*$. La ley aditiva del opuesto y las reglas de signo dan

$$\begin{aligned} A(B + C) &= A(-(B_0 + C_0)) \\ &= -(A(B_0 + C_0)) \\ &= -(AB_0 + AC_0) \\ &= (-AB_0) + (-AC_0) = AB + AC. \end{aligned}$$

La única distributividad empleada en esta cuenta es la positiva.

Supongamos $B > 0^* > C$ y escribamos $C_0 = -C > 0^*$. Debemos comparar B y C_0. Si son iguales, $B + C = 0^*$ y $AB + AC = AB - AB = 0^*$, así que la igualdad se cumple. Si $C_0 < B$, la traslación del orden da $D = B - C_0 > 0^*$, $\quad C_0 + D = B$. Podemos aplicar la distributividad positiva a esta última suma: $AB = AC_0 + AD$. Sumando $-AC_0$ y usando las leyes del grupo, obtenemos $AD = AB - AC_0 = AB + AC$. Como $D = B + C$, es la

igualdad buscada. Si $B < C_0$, pongamos $D = C_0 - B > 0^*$. Entonces $B + D = C_0$, y la distributividad positiva da $AC_0 = AB + AD$. Al sumar $-AC_0$ a ambos miembros y reagrupar resulta $AB - AC_0 = -AD$. Ahora $B + C = -D$ y $AC = -AC_0$; por la regla de signos,

$$A(B + C) = A(-D) = -AD = AB - AC_0 = AB + AC.$$

Si $B < 0^* < C$, intercambiamos B, C: la conmutatividad aditiva transforma $A(C + B) = AC + AB$ en la igualdad requerida. Así se cubren todos los signos de los sumandos con A positivo.

Para $A < 0^*$ pongamos $A_0 = -A > 0^*$. La identidad recién establecida, las reglas de signo y la ley aditiva del opuesto permiten escribir

$$\begin{aligned} A(B + C) &= -(A_0(B + C)) \\ &= -(A_0B + A_0C) \\ &= (-A_0B) + (-A_0C) = AB + AC. \end{aligned}$$

Para $A = 0^*$ ambos miembros son cero. Hemos probado la distributividad para todos $A, B, C \in \mathcal{D}$. La ley por la derecha se obtiene usando la conmutatividad multiplicativa: $A(B + C) = AB + AC, \qquad (B + C)A = BA + CA.$

Para completar la aritmética queda construir el inverso de cada cortadura no nula. Cuando $A > 0^*$, un exterior $s \notin A$ es positivo y queda por encima de todos los racionales positivos interiores. Su recíproco racional $1/s$ proporciona una aproximación desde abajo a la posición inversa. Definimos

$$A^{-1,+} = \{q \in \mathbb{Q} : q \leq 0 \text{ o } \exists s \in \mathbb{Q},\ s > 0,\ s \notin A,\ q < 1/s\}.$$

La cláusula $q \leq 0$ incluye desde el comienzo toda la parte no positiva que deberá contener una cortadura positiva. De hecho, puesto que existe un exterior positivo, estos racionales también satisfacen la segunda cláusula con ese exterior; la primera hace inmediata su pertenencia y evita repetir la elección.

Proposición. Si $A > 0^*$, entonces $A^{-1,+}$ es una cortadura estrictamente positiva y $A \cdot_+ A^{-1,+} = 1^*$. **Demostración.** El conjunto contiene a 0. Para probar que es propio, elijamos $a \in A_{>0}$. El racional $1/a$ no puede pertenecer por la primera cláusula. Si perteneciera por la segunda, algún $s > 0$ exterior satisfaría $1/a < 1/s$, es decir, $s < a$. Eso contradice que todo exterior está por encima de a.

La clausura inferior se conserva en ambas cláusulas: de $r < q \leq 0$ se sigue $r \leq 0$; de $r < q < 1/s$ se sigue $r < 1/s$. Para la ausencia de máximo, si $q < 0$ podemos superarlo con 0. Si $q = 0$, elegimos un exterior $s > 0$ y lo superamos con $1/(2s)$, que pertenece al conjunto. Si $q > 0$ pertenece, hay un exterior $s > 0$ con $q < 1/s$, y el punto medio entre ambos proporciona otro elemento mayor. Es una cortadura y, al contener a 0, es positiva.

Sea ahora $x \in A \cdot_+ A^{-1,+}$. Existen $a \in A_{>0}$ y $b \in (A^{-1,+})_{>0}$ con $x < ab$. La pertenencia de $b > 0$ proporciona $s > 0$, $s \notin A$, con $b < 1/s$. Como $a < s$, $x < ab < a/s < 1$. Así $A \cdot_+ A^{-1,+} \subseteq 1^*$. Para la inclusión contraria tomemos $x < 1$. Si $x \leq 0$, dos testigos positivos cualesquiera, uno de cada cortadura, dan $x < ab$. Supongamos $0 < x < 1$. Necesitamos $a \in A_{>0}$ y un exterior positivo s tales que el intervalo $(x/a, 1/s)$ sea no vacío; dentro de él podremos elegir el testigo b. El lema de aproximación permite acercar un interior y un exterior, pero debemos escoger antes su distancia de modo que la inversión deje abierto ese intervalo.

Fijemos $c \in A_{>0}$ y elijamos un racional $0 < h < (1 - x)c$. El lema de aproximación racional de §0.6 proporciona $a \in A$ con $s = a + h \notin A$. Como $c \in A$ y $s \notin A$, tenemos $c < s = a + h$. Además $h < (1 - x)c < c$, de modo que $a > c - h > 0$ y también $s > 0$. El tamaño elegido para h asegura $(1 - x)(c - h) - xh = (1 - x)c - h > 0$. Al usar $a > c - h$ obtenemos $(1 - x)a > xh$, o equivalentemente $a > x(a + h) = xs$. Como a, s son positivos, esto da $\frac{x}{a} < \frac{1}{s}$. Elijamos un racional b estrictamente entre ambos extremos. Se cumple $b > 0$, $b < 1/s$ y $s \notin A$, luego $b \in A^{-1,+}$. También $x < ab$, por lo que $x \in A \cdot_+ A^{-1,+}$. La doble inclusión prueba la igualdad. $\square$

La condición sobre h conserva, después de invertir, el intervalo donde la densidad de $\mathbb{Q}$ proporciona el segundo testigo. El inverso de la cortadura queda construido con recíprocos racionales, antes de disponer de completitud.

Para $A \neq 0^*$ definimos

$$A^{-1} = \begin{cases} A^{-1,+}, & A > 0^*, \\ -((-A)^{-1,+}), & A < 0^*. \end{cases}$$

En el caso positivo, $AA^{-1} = 1^*$ ya está probado. Si $A < 0^*$, sea $P = -A > 0^*$. Tenemos $A = -P$ y $A^{-1} = -P^{-1,+}$; la rama de dos factores negativos da $AA^{-1} = P \cdot_+ P^{-1,+} = 1^*$. La conmutatividad da también $A^{-1}A = 1^*$. El inverso es único: si $AB = 1^* = AC$, entonces, usando el inverso construido y la asociatividad,

$$B = 1^*B = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1} = A^{-1}(AC) = (A^{-1}A)C = C.$$

Así las cortaduras no nulas forman un grupo abeliano multiplicativo: el producto de dos no nulas nunca es cero por las reglas de signo, y ya disponemos de asociatividad, unidad e inversos.

La compatibilidad multiplicativa del orden se reconoce primero en el cono no negativo. Si $A, B \geq 0^*$ y alguno es cero, $AB = 0^*$. Si ambos son positivos, la construcción da $AB > 0^*$. De ahí resulta $AB \geq 0^*$ para factores no negativos. También recuperamos la monotonía usual: si $A \leq B$ y $C \geq 0^*$, entonces $B - A \geq 0^*$, luego $(B - A)C \geq 0^*$. Por distributividad y las reglas de signo, $(B - A)C = BC - AC$, y al trasladar obtenemos $AC \leq BC$. Si $A < B$ y $C > 0^*$, los dos factores $(B - A), C$ son positivos y el mismo argumento da $AC < BC$.

Podemos reunir las propiedades verificadas en una afirmación estructural:

$$(\mathcal{D}, +, \cdot, \leq) \text{ es un cuerpo ordenado, con cero } 0^* \text{ y unidad } 1^*.$$

Las operaciones y el orden de ese cuerpo se han obtenido mediante racionales interiores y exteriores. Disponemos de las leyes necesarias para calcular con cortaduras; la dificultad inicial de las familias acotadas todavía exige demostrar la propiedad del supremo.

La copia racional adquiere con ello toda su estructura de cuerpo ordenado. La aplicación $\iota_{\mathbb{Q}}(q) = q^*$ es inyectiva, conserva y refleja el orden, y satisface

$$(p + q)^* = p^* + q^*, \qquad (pq)^* = p^*q^*, \qquad \iota_{\mathbb{Q}}(0) = 0^*, \qquad \iota_{\mathbb{Q}}(1) = 1^*.$$

Conserva asimismo opuestos e inversos: la igualdad $-(q^*) = (-q)^*$ se probó directamente en §0.6; si $q \neq 0$, entonces $q^*(q^{-1})^* = (qq^{-1})^* = 1^*$, y la unicidad del inverso da $(q^{-1})^* = (q^*)^{-1}$. Por tanto $\iota_{\mathbb{Q}}$ es una incrustación de cuerpos ordenados. Su imagen $\mathcal{Q}^*$ es un subcuerpo ordenado de $\mathcal{D}$, y la notación usual $\mathbb{Q} \subseteq \mathcal{D}$ abrevia la identificación de los racionales con esa imagen. La inclusión literal sigue siendo $\mathcal{Q}^* \subseteq \mathcal{D}$.

La dificultad que motivó la construcción sigue reclamando una propiedad adicional: toda familia no vacía y acotada superiormente debe tener supremo. Para una familia de cortaduras, reunir sus lados izquierdos sugiere un candidato concreto, la unión de todos sus miembros. Habrá que comprobar que esa unión es una cortadura y que ocupa exactamente la posición de menor cota superior.

Ejercicios de la sección 0.7.

Ejercicio 27. Construir el núcleo positivo del producto

La receta aditiva sugiere primero el conjunto ingenuo $P(A, B) = \{ab : a \in A,\ b \in B\}$.

1. Toma $A = B = 1^*$ y demuestra que $P(1^*, 1^*)$ contiene racionales positivos arbitrariamente grandes. Explica por qué eso impide que esta receta sea, en general, un producto de cortaduras.
2. Para $A \in \mathcal{D}$, demuestra las equivalencias

$$0^* \subsetneq A \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \in A \quad \Longleftrightarrow \quad \exists a \in A \text{ con } a > 0.$$



Figura 0.7. El producto ingenuo falla; la construcción pasa al cono positivo, se extiende a todos los signos y sólo después cierra la estructura de cuerpo ordenado.

3. Si $A, B > 0^*$, define

$A_{>0} = \{a \in A : a > 0\}$, y construye el candidato

$$A \cdot_+ B = \{x \in \mathbb{Q} : \exists a \in A_{>0}\ \exists b \in B_{>0} \text{ con } x < ab\}.$$

4. Demuestra ya, a partir de la definición, que $A \cdot_+ B$ es no vacío, contiene 0 y es cerrado hacia abajo.

No declares todavía que $A \cdot_+ B \in \mathcal{D}$: las dos condiciones restantes deben demostrarse en el ejercicio siguiente.

Solución. La receta ingenua ya falla para la cortadura racional 1^*. Sea $1^* = \{q \in \mathbb{Q} : q < 1\}$. Para cada entero positivo N tenemos $-N \in 1^*$. Por tanto $N^2 = (-N)(-N) \in P(1^*, 1^*)$. Así $P(1^*, 1^*)$ contiene racionales positivos arbitrariamente grandes. Una cortadura propia no puede tener esa propiedad: si $C \in \mathcal{D}$ y $u \notin C$, todo $c \in C$ satisface $c < u$. Por tanto $P(1^*, 1^*)$ no puede ser una cortadura. El problema proviene de multiplicar racionales negativos muy alejados de la frontera.

Pasemos a la positividad. Supongamos primero $0^* \subsetneq A$. Existe entonces $x \in A \setminus 0^*$. Así $x \geq 0$. Si $x = 0$, ya tenemos $0 \in A$; si $x > 0$, como $0 < x$ y A es cerrado hacia abajo, también $0 \in A$. Si $0 \in A$, la ausencia de máximo produce $a \in A$ con $0 < a$. Finalmente, si existe $a \in A$ con $a > 0$, todo $q < 0$ satisface $q < a$, y la clausura hacia abajo da $q \in A$. Por tanto $0^* \subseteq A$. La inclusión es estricta porque $a \in A \setminus 0^*$. Hemos demostrado

$$\boxed{0^* <_{\mathcal{D}} A \iff 0 \in A \iff \exists a \in A \text{ con } a > 0.}$$

Si $A, B > 0^*$, los conjuntos $A_{>0}$ y $B_{>0}$ son no vacíos. Definimos

$$A \cdot_+ B = \{x \in \mathbb{Q} : \exists a \in A_{>0}\ \exists b \in B_{>0} \text{ con } x < ab\}.$$

Elijamos $a \in A_{>0}$ y $b \in B_{>0}$. Como $ab > 0$, $0 < ab$, de modo que $0 \in A \cdot_+ B$. En particular, el conjunto es no vacío y ya contiene el cero racional. Para la clausura hacia abajo, sea $x \in A \cdot_+ B$. Existen $a, b > 0$ con $a \in A$, $b \in B$ y $x < ab$. Si $y < x$, entonces

$y < x < ab$, y los mismos testigos a, b muestran que $y \in A \cdot_+ B$. Hasta aquí tenemos no vaciedad, presencia de 0 y clausura inferior. Aún falta demostrar que el conjunto es propio y que carece de máximo; por eso todavía no declaramos clausura en $\mathcal{D}$. *Referencia visual.* Véase la figura C00-F11 del texto principal, **Aritmética II: producto, inverso y signos**, como síntesis posterior de este argumento.

Ejercicio 28. Cerrar el producto positivo y recuperar el producto racional

Sean $A, B > 0^*$ y usa la operación $A \cdot_+ B$ construida en el ejercicio 27.

1. Demuestra que $A \cdot_+ B$ es propio. Tu prueba debe elegir racionales exteriores $u \notin A$ y $v \notin B$ y justificar por qué necesariamente $u, v > 0$.
2. Demuestra que $A \cdot_+ B$ no tiene máximo.
3. Concluye que

$$A \cdot_+ B \in \mathcal{D} \qquad \text{y} \qquad A \cdot_+ B > 0^*.$$

4. Sean ahora $p, q \in \mathbb{Q}$ con $p, q > 0$. Demuestra por doble inclusión que

$p^* \cdot_+ q^* = (pq)^*$. En la inclusión difícil, separa los casos $x \leq 0$ y $0 < x < pq$, y localiza exactamente dónde interviene la densidad de $\mathbb{Q}$.

Solución. Sean $A, B > 0^*$. Como A y B son cortaduras propias, existen racionales $u \notin A, \qquad v \notin B$. Además $0 \in A$ y $0 \in B$. Si $u \leq 0$, la clausura hacia abajo aplicada a $0 \in A$ obligaría a $u \in A$ cuando $u < 0$, y para $u = 0$ ya sabemos que $0 \in A$. Por tanto $u > 0$. Análogamente, $v > 0$.

Todo $a \in A$ satisface $a < u$, pues de $u \leq a$ y $a \in A$ se seguiría $u \in A$. Del mismo modo, todo $b \in B$ cumple $b < v$. Para $a \in A_{>0}$ y $b \in B_{>0}$, $ab < ub < uv$. Así ningún par de testigos puede satisfacer $uv < ab$. Luego $uv \notin A \cdot_+ B$, y $A \cdot_+ B$ es propio.

Para la ausencia de máximo, sea $x \in A \cdot_+ B$. Existen $a \in A_{>0}$ y $b \in B_{>0}$ con $x < ab$. Por densidad de $\mathbb{Q}$, existe $y \in \mathbb{Q}$ tal que $x < y < ab$. Los mismos a, b prueban $y \in A \cdot_+ B$. Por tanto ningún elemento es máximo. Junto con el ejercicio 27, quedan verificadas las cuatro condiciones de cortadura, y además $0 \in A \cdot_+ B$. Por consiguiente,

$$\boxed{A \cdot_+ B \in \mathcal{D} \quad \text{y} \quad A \cdot_+ B > 0^*.}$$

Ahora sean $p, q > 0$ racionales. Si $x \in p^* \cdot_+ q^*$, existen $0 < a < p$ y $0 < b < q$ tales que $x < ab$. Como $ab < pb < pq$, tenemos $x < pq$, es decir, $x \in (pq)^*$. Así $p^* \cdot_+ q^* \subseteq (pq)^*$. Para la inclusión inversa, sea $x < pq$. Si $x \leq 0$, elegimos cualesquiera racionales a, b con $0 < a < p, \qquad 0 < b < q$.

Entonces $x \leq 0 < ab$, y por tanto $x \in p^* \cdot_+ q^*$. Supongamos ahora $0 < x < pq$. Como $q > 0$, $\frac{x}{q} < p$. Por densidad elegimos $a \in \mathbb{Q}$ con $\frac{x}{q} < a < p$. Entonces $a > 0$ y $x < aq$, de modo que $\frac{x}{a} < q$. Una segunda aplicación de la densidad proporciona b con $\frac{x}{a} < b < q$. Así $0 < a < p$, $0 < b < q$ y $x < ab$. Por tanto

$x \in p^* \cdot_+ q^*$. La doble inclusión da

$$\boxed{p^* \cdot_+ q^* = (pq)^*.}$$

La densidad de $\mathbb{Q}$ se gasta exactamente en la ausencia de máximo del producto y, para la inclusión racional inversa, en la elección sucesiva de a y b. *Referencia visual.* Véase la figura C00-F11 del texto principal, **Aritmética II: producto, inverso y signos**, como síntesis posterior de este argumento.

Ejercicio 29. Trazar el paso del producto positivo a todos los signos

Usa la estructura aditiva de §0.6 y el producto positivo de los ejercicios 27–28.

1. Explica por qué

$-(-A) = A$ y por qué $A < 0^*$ implica $-A > 0^*$. 2. Define un producto $A \cdot B$ para $A, B \in \mathcal{D}$ mediante los cinco casos: cero, dos positivos, dos negativos y los dos órdenes posibles de signos opuestos. Debes escribir explícitamente la definición por casos y verificar que cada aparición de $\cdot_+$ recibe argumentos estrictamente positivos. 3. Demuestra que, para todos $p, q \in \mathbb{Q}$,

$p^* \cdot q^* = (pq)^*$. No omitas los casos de signos negativos ni los casos con cero. 4. Demuestra primero para $A > 0^*$ que $A \cdot_+ 1^* = A$, y extiende después el resultado a todo $A \in \mathcal{D}$ para obtener $A \cdot 1^* = A = 1^* \cdot A$. Cierra con un mapa de dependencias que indique qué parte usa el opuesto de §0.6, qué parte usa la identidad racional positiva del ejercicio 28 y qué parte usa ausencia de máximo.

Solución. En §0.6, el opuesto de una cortadura quedó caracterizado como su inverso aditivo. Como A y $-(-A)$ son ambos inversos aditivos de $-A$, la unicidad del inverso da

$$\boxed{-(-A) = A.}$$

Si $A < 0^*$, sumamos $-A$ a ambos lados. La compatibilidad del orden con traslaciones produce $0^* < -A$. Así una cortadura negativa se transforma en positiva al tomar su opuesto. Definimos el producto general por

$$A \cdot B = \begin{cases} 0^*, & A = 0^* \text{ o } B = 0^*, \\ A \cdot_+ B, & A > 0^*,\ B > 0^*, \\ (-A) \cdot_+ (-B), & A < 0^*,\ B < 0^*, \\ -(A \cdot_+ (-B)), & A > 0^* > B, \\ -((-A) \cdot_+ B), & B > 0^* > A. \end{cases}$$

La tricotomía respecto de 0^* hace que los cinco casos sean exhaustivos y disjuntos. En las ramas con $\cdot_+$, los argumentos son positivos por construcción: los factores ya son positivos o han sido reemplazados por su opuesto. Como $\cdot_+$ produce una cortadura positiva y el opuesto de una cortadura vuelve a pertenecer a $\mathcal{D}$, el producto general es interno. Probemos ahora la compatibilidad racional.

Si $p, q > 0$, el resultado es el ejercicio 28: $p^* \cdot q^* = (pq)^*$. Si $p, q < 0$, entonces $-p, -q > 0$ y, usando $-(p^*) = (-p)^*$,

$$\begin{aligned} p^* \cdot q^* &= (-p)^* \cdot_+ (-q)^* \\ &= ((-p)(-q))^* \\ &= (pq)^*. \end{aligned}$$

Si $p > 0 > q$,

$$\begin{aligned} p^* \cdot q^* &= -(p^* \cdot_+ (-q)^*) \\ &= -\big(p(-q)\big)^* \\ &= (pq)^*. \end{aligned}$$

El caso $q > 0 > p$ es simétrico. Si alguno de los racionales es cero, ambos lados son 0^*. Luego

$$\boxed{p^* \cdot q^* = (pq)^* \qquad (p, q \in \mathbb{Q}).}$$

Veamos la unidad. Supongamos primero $A > 0^*$. Si $x \in A \cdot_+ 1^*$, existen $a \in A$, $a > 0$, y b con $0 < b < 1$ tales que $x < ab < a$. La clausura inferior de A da $x \in A$. Así $A \cdot_+ 1^* \subseteq A$.

Recíprocamente, sea $x \in A$. Si $x \leq 0$, elegimos $a \in A$ positivo y $b \in \mathbb{Q}$ con $0 < b < 1$; entonces $x < ab$. Si $x > 0$, la ausencia de máximo de A proporciona $a \in A$ con $x < a$. Entonces $0 < \frac{x}{a} < 1$. Por densidad elegimos b con $\frac{x}{a} < b < 1$. Así $x < ab$ y $x \in A \cdot_+ 1^*$. Por tanto

$A \cdot_+ 1^* = A$. La igualdad $1^* \cdot_+ A = A$ se obtiene simétricamente. Si $A = 0^*$, la identidad es inmediata por definición. Si $A < 0^*$, entonces $-A > 0^*$ y $A \cdot 1^* = -((-A) \cdot_+ 1^*) = -(-A) = A$. Análogamente por la izquierda. Luego

$$\boxed{A \cdot 1^* = A = 1^* \cdot A.}$$

El mapa de dependencias es:

- **opuesto de §0.6:** permite convertir factores negativos en positivos y volver a colocar el signo;
- **producto racional positivo:** permite extender $p^*q^* = (pq)^*$ a todos los signos;
- **ausencia de máximo:** se usa para aproximar desde dentro un $x > 0$ al demostrar que 1^* actúa como unidad.

Referencia visual. Véase la figura C00-F11 del texto principal, **Aritmética II: producto, inverso y signos**, como síntesis posterior de este argumento.

Ejercicio 30. Construir y verificar el inverso multiplicativo

Sea $A > 0^*$. Define

$$A^{-1,+} = \left\{ q \in \mathbb{Q} : q \leq 0 \text{ o } \exists s > 0 \ (s \notin A \text{ y } q < s^{-1}) \right\}.$$

1. Demuestra que $A^{-1,+}$ es una cortadura estrictamente positiva.
2. Demuestra por doble inclusión que

$A \cdot_+ A^{-1,+} = 1^*$.

3. Para la inclusión $1^* \subseteq A \cdot_+ A^{-1,+}$, trata por separado $x \leq 0$ y $0 < x < 1$. En el segundo caso debes usar el lema de aproximación racional de §0.6 para obtener un par

$a \in A$, $s = a + h \notin A$ suficientemente próximo. 4. Si $A \neq 0^*$, define A^{-1} para ambos signos y demuestra $A \cdot A^{-1} = 1^* = A^{-1} \cdot A$.

> **Pista conceptual.** Para $0 < x < 1$, busca primero un $c \in A$ positivo y elige h tan pequeño que $h < (1-x)c$. El objetivo es forzar $x/a < 1/s$ para poder insertar un racional entre ambos.

Solución. Sea $A > 0^*$. Consideremos

$$A^{-1,+} = \left\{ q \in \mathbb{Q} : q \leq 0 \text{ o } \exists s > 0 \ (s \notin A \text{ y } q < s^{-1}) \right\}.$$

Como $0 \leq 0$, $0 \in A^{-1,+}$. El conjunto es no vacío y, una vez cerrado como cortadura, será positivo. Para demostrar que es propio, tomemos $a \in A$ con $a > 0$. Afirmamos que $a^{-1} \notin A^{-1,+}$. No satisface la cláusula $q \leq 0$. Si satisficiera la segunda, existiría $s > 0$, $s \notin A$, tal que $a^{-1} < s^{-1}$. Como ambos son positivos, invertir revierte el orden y tendríamos

$s < a$. Pero $a \in A$ y A es cerrado hacia abajo, luego $s \in A$, contradicción. La clausura hacia abajo es directa. Si $q \leq 0$ y $r < q$, entonces $r \leq 0$. Si $q < s^{-1}$ para algún exterior positivo s y $r < q$, el mismo s muestra $r < q < s^{-1}$. Para la ausencia de máximo distinguimos tres casos. Si $q < 0$, entonces $q < 0$ y $0 \in A^{-1,+}$. Si $q = 0$, elegimos $s \notin A$; necesariamente $s > 0$ porque $0 \in A$ y todo racional no positivo pertenece a A. Por densidad existe

$0 < r < s^{-1}$, y $r \in A^{-1,+}$. Si $q > 0$, su pertenencia proporciona $s > 0$, $s \notin A$, con $q < s^{-1}$; de nuevo por densidad elegimos $q < r < s^{-1}$. Por tanto $A^{-1,+}$ es una cortadura y, como contiene 0,

$$\boxed{A^{-1,+} > 0^*.}$$

Probemos ahora $A \cdot_+ A^{-1,+} = 1^*$. Sea $x \in A \cdot_+ A^{-1,+}$. Existen $a \in A$, $a > 0$, y $b \in A^{-1,+}$, $b > 0$, con $x < ab$. Como $b > 0$, su pertenencia proviene de un $s > 0$, $s \notin A$, tal que $b < s^{-1}$. Todo elemento de A está por debajo de todo exterior, así que $a < s$. Luego $x < ab < a\,s^{-1} = \frac{a}{s} < 1$.

Por tanto $A \cdot_+ A^{-1,+} \subseteq 1^*$. Para la otra inclusión, sea $x < 1$. Si $x \leq 0$, elegimos $a \in A$ positivo y un $b \in A^{-1,+}$ positivo. Entonces $x < ab$, de modo que x pertenece al producto. Supongamos ahora $0 < x < 1$. Elegimos $c \in A$ con $c > 0$. Como $(1-x)c > 0$, tomamos un racional $0 < h < (1-x)c$. Por el lema de aproximación racional de §0.6 existe $a \in A$ tal que $s := a+h \notin A$. Como $c \in A$ y $s \notin A$, necesariamente $c < s = a+h$. Además $h < (1-x)c < c$, así que $a > c - h > 0$. Tenemos $(1-x)(c-h) - xh = (1-x)c - h > 0$. Como $a > c-h$, $(1-x)a > xh$. Equivalente a $a > x(a+h) = xs$. Por tanto $\frac{x}{a} < \frac{1}{s}$. Por densidad elegimos $b \in \mathbb{Q}$ con $\frac{x}{a} < b < \frac{1}{s}$. Entonces $b > 0$, y como $s > 0$, $s \notin A$ y $b < s^{-1}$, $b \in A^{-1,+}$. Además $x < ab$. Por tanto $x \in A \cdot_+ A^{-1,+}$. Hemos demostrado

$$\boxed{A \cdot_+ A^{-1,+} = 1^*.}$$

La igualdad con los factores intercambiados se obtiene de la simetría de la definición de $\cdot_+$, pues $ab = ba$ en $\mathbb{Q}$. Para $A \neq 0^*$ definimos

$$A^{-1} = \begin{cases} A^{-1,+}, & A > 0^*, \\ -((-A)^{-1,+}), & A < 0^*. \end{cases}$$

Si $A > 0^*$, la ley del inverso ya está probada. Si $A < 0^*$, ponemos $B = -A > 0^*$. Entonces $A^{-1} = -B^{-1,+}$, y, usando la rama de dos factores negativos,

$$\begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= (-A) \cdot_+ (-A^{-1}) \\ &= B \cdot_+ B^{-1,+} \\ &= 1^*. \end{aligned}$$

El mismo argumento en el orden inverso da

$$\boxed{A \cdot A^{-1} = 1^* = A^{-1} \cdot A \qquad (A \neq 0^*).}$$

El lema de aproximación de §0.6 es el mecanismo que fabrica, para un $x < 1$, un interior a y un exterior s suficientemente próximos como para abrir el intervalo racional $\left(\frac{x}{a}, \frac{1}{s}\right)$. *Referencia visual.* Véase la figura C00-F11 del texto principal, **Aritmética II: producto, inverso y signos**, como síntesis posterior de este argumento.

Ejercicio 31. Un producto correcto para positivos que no forma un cuerpo

Para mostrar que el sector positivo no determina por sí solo toda la estructura de cuerpo, define una operación $\star$ sobre $\mathcal{D}$ así:

$$A \star B = \begin{cases} 0^*, & A = 0^* \text{ o } B = 0^*, \\ A \cdot_+ B, & A > 0^*,\ B > 0^*, \\ -((-A) \cdot_+ (-B)), & A < 0^*,\ B < 0^*, \\ -(A \cdot_+ (-B)), & A > 0^* > B, \\ -((-A) \cdot_+ B), & B > 0^* > A. \end{cases}$$

La única rama deliberadamente alterada respecto del producto correcto es la de dos factores negativos.

1. Explica por qué $\star$ sigue siendo una operación interna en $\mathcal{D}$ y coincide con $\cdot_+$ cuando ambos factores son positivos.
2. Calcula

$(-1)^* \star (-1)^*$.

3. Usa los tres elementos $(-1)^*, (-1)^*, 1^*$ para demostrar directamente que $\star$ no es distributiva respecto de la suma ya construida.
4. Explica por qué este ejemplo refuta la inferencia «si el producto funciona para positivos, el resto de las leyes de cuerpo queda automáticamente determinado».

   Pista conceptual. Compara $(-1)^* \star ((-1)^* + 1^*)$ con $((-1)^* \star (-1)^*) + ((-1)^* \star 1^*)$.

Solución. La operación $\star$ es interna. En la rama positiva, $A \cdot_+ B \in \mathcal{D}$ por el ejercicio 28. En las ramas con signo negativo, primero se aplica $\cdot_+$ a cortaduras positivas y luego se toma el opuesto, operación que ya sabemos que conserva $\mathcal{D}$. La rama con cero devuelve 0^*. Además, si $A, B > 0^*$, $A \star B = A \cdot_+ B$. Por tanto $\star$ coincide exactamente con el producto correcto en todo el sector positivo.

Tomemos ahora $A = B = (-1)^*$. Como $(-1)^* < 0^*$ y $-((-1)^*) = 1^*$, la rama deliberadamente alterada da

$$\begin{aligned}(-1)^* \star (-1)^* &= -(1^* \cdot_+ 1^*) \\ &= -1^* \\ &= (-1)^*.\end{aligned}$$

Ya esto contradice el comportamiento racional que debería tener un producto de cuerpos, pues $(-1)(-1) = 1$. Veamos además el fallo directo de distributividad sugerido en la pista. Como la suma racional ya está preservada, $(-1)^* + 1^* = 0^*$. Por tanto $(-1)^* \star ((-1)^* + 1^*) = (-1)^* \star 0^* = 0^*$. En cambio, $(-1)^* \star (-1)^* = (-1)^*$. Para el producto de signos opuestos, la definición de $\star$ coincide con la regla correcta, de modo que

$(-1)^* \star 1^* = (-1)^*$. Así el miembro derecho de la distributividad sería $(-1)^* + (-1)^* = (-2)^*$. Como $(-2)^* \neq 0^*$, obtenemos

$$\boxed{(-1)^* \star ((-1)^* + 1^*) \neq ((-1)^* \star (-1)^*) + ((-1)^* \star 1^*).}$$

Por tanto $\star$ no es distributiva. El contraejemplo aísla exactamente el punto lógico: conocer el producto en el cono positivo no determina por sí solo las reglas de signo ni garantiza que la extensión respete las leyes de anillo. Los casos negativos y mixtos deben definirse y verificarse explícitamente.

Ejercicio 32. Cerrar el cuerpo ordenado sin confundirlo con completitud

Trabaja con el producto correcto $\cdot$ y los inversos construidos en los ejercicios anteriores. Organiza el cierre multiplicativo mediante una estrategia de **núcleo positivo + regla de signos**.

1. Demuestra la conmutatividad y la asociatividad de $\cdot_+$ para cortaduras positivas. En la asociatividad, construye explícitamente el testigo intermedio que permite pasar de una agrupación a la otra.
2. Extiende conmutatividad y asociatividad a todos los signos explicando por qué ambos lados tienen el mismo signo y el mismo núcleo positivo.
3. Demuestra la distributividad positiva

$A \cdot_+ (B + C) = (A \cdot_+ B) + (A \cdot_+ C)$ para $A, B, C > 0^*$. 4. Extiende la distributividad a signos arbitrarios. En el caso $B > 0^* > C$, explica por qué hay que comparar B con $-C$ y cómo la cancelación en el grupo aditivo reduce el problema al caso positivo. 5. Demuestra la compatibilidad multiplicativa del orden:

$$0^* \le A,\ 0^* \le B \quad\Longrightarrow\quad 0^* \le A \cdot B.$$

6. Reúne todo lo demostrado en §§0.6–0.7 y justifica que

$(\mathcal{D}, +, \cdot, \le_{\mathcal{D}})$ es un cuerpo ordenado. 7. Demuestra que $\iota_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathcal{D}, \qquad q \mapsto q^*$, queda ahora certificada como incrustación de cuerpos ordenados. 8. Explica con precisión por qué **todavía no** puede concluirse que la pregunta de existencia de §0.1 está cerrada.

> **Pista conceptual.** Para evitar una explosión de casos, separa cada cortadura no nula en un signo y una parte positiva. Para la distributividad con signos opuestos, compara primero B y $-C$ dentro del orden lineal de $\mathcal{D}$.

Solución. Empecemos por el núcleo positivo. La conmutatividad de $\cdot_+$ es inmediata: para $A, B > 0^*$,

$$x < ab \quad\Longleftrightarrow\quad x < ba,$$

de modo que

$$\boxed{A \cdot_+ B = B \cdot_+ A.}$$

Probemos la asociatividad positiva. Sea $x \in (A \cdot_+ B) \cdot_+ C$. Existen $u > 0$ y $c \in C_{>0}$ tales que $u \in A \cdot_+ B, \qquad x < uc$. A su vez existen $a \in A_{>0}$ y $b \in B_{>0}$ con $u < ab$. Por tanto $x < uc < abc$. Si $x \le 0$, elegimos $v \in \mathbb{Q}$ con $0 < v < bc$. Entonces $v \in B \cdot_+ C$ y $x < 0 < av$, de modo que $x \in A \cdot_+ (B \cdot_+ C)$.

Si $x > 0$, de $x < abc$ obtenemos $\frac{x}{a} < bc$. Por densidad elegimos $\frac{x}{a} < v < bc$. Entonces $v \in B \cdot_+ C$ y $x < av$. Así $(A \cdot_+ B) \cdot_+ C \subseteq A \cdot_+ (B \cdot_+ C)$. La inclusión inversa es simétrica: partiendo de $x < av < abc$, si $x \le 0$ elegimos $0 < u < ab$; si $x > 0$, elegimos $\frac{x}{c} < u < ab$. Entonces $u \in A \cdot_+ B$ y $x < uc$. Concluimos

$$\boxed{(A \cdot_+ B) \cdot_+ C = A \cdot_+ (B \cdot_+ C).}$$

Para extender conmutatividad y asociatividad a todos los signos, observemos que toda cortadura no nula puede escribirse como una parte positiva acompañada de un signo: si $A > 0^*$ usamos A; si $A < 0^*$ usamos $-A > 0^*$. La definición del producto multiplica las partes positivas mediante $\cdot_+$ y coloca un opuesto exterior exactamente cuando aparece un número impar de factores negativos. Por tanto, en cualquiera de las dos agrupaciones de tres factores no nulos, el signo final es el mismo y el núcleo positivo es el mismo por asociatividad de $\cdot_+$. Si aparece un cero, ambos lados son 0^*. Así

$$\boxed{A \cdot B = B \cdot A}$$

y

$$\boxed{(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)}$$

para todos $A, B, C \in \mathcal{D}$. Pasemos a la distributividad positiva. Sean $A, B, C > 0^*$. Entonces $B + C > 0^*$ porque $0 \in B$ y $0 \in C$, luego $0 = 0 + 0 \in B + C$. Sea $x \in A \cdot_+ (B + C)$. Existen $a \in A_{>0}$ y $u \in (B + C)_{>0}$ con $x < au$. Escribimos $u = b_0 + c_0$ con $b_0 \in B$, $c_0 \in C$. Podemos obtener otra representación

$u = b + c$ con $b \in B_{>0}$ y $c \in C_{>0}$. Si ambos testigos originales son positivos, no hay nada que hacer. Si, por ejemplo, $b_0 \le 0$, entonces $c_0 > 0$. Elegimos $d \in B$ positivo y un racional $0 < b < \min\{u, d\}$. Así $b \in B$, $b > b_0$ y, poniendo $c = u - b$, tenemos $c > 0$ y $c = u - b < u - b_0 = c_0$, por lo que $c \in C$. El otro caso es simétrico.

Ahora $x < a(b + c) = ab + ac$. Como $x - ac < ab$, por densidad elegimos y con $x - ac < y < ab$. Sea $z = x - y$. Entonces $y \in A \cdot_+ B, \qquad z < ac$, de modo que $z \in A \cdot_+ C$ y $x = y + z$.

Por tanto $A \cdot_+ (B+C) \subseteq (A \cdot_+ B) + (A \cdot_+ C)$. Para la inclusión inversa, sea $x = y + z$ con $y \in A \cdot_+ B$ y $z \in A \cdot_+ C$. Elegimos

$$a_1, a_2 \in A_{>0}, \qquad b \in B_{>0}, \qquad c \in C_{>0}$$

tales que $y < a_1 b, \qquad z < a_2 c$. Sea $m = \max\{a_1, a_2\}$. Como m es uno de los dos elementos de A y A no tiene máximo, existe $a \in A$ con $m < a$. Entonces

$$\begin{aligned} x &= y + z \\ &< a_1 b + a_2 c \\ &< ab + ac \\ &= a(b+c). \end{aligned}$$

Como $b + c > 0$ y $b + c \in B + C$, $x \in A \cdot_+ (B + C)$. Concluimos

$$\boxed{A \cdot_+ (B+C) = (A \cdot_+ B) + (A \cdot_+ C)}$$

para cortaduras positivas. La definición por signos implica

$$(-A)B = -(AB), \qquad A(-B) = -(AB), \qquad (-A)(-B) = AB.$$

Fijemos primero $A > 0^*$ y permitamos signos arbitrarios para B, C. Si $B, C > 0^*$, ya tenemos distributividad. Si ambos son negativos, escribimos $B = -B_0, \qquad C = -C_0$, con $B_0, C_0 > 0^*$. Entonces $B + C = -(B_0 + C_0)$, y las reglas de signo reducen la igualdad al caso positivo. Supongamos ahora $B > 0^* > C$ y pongamos $C_0 = -C > 0^*$. Por linealidad del orden, exactamente uno de los tres casos

$$B = C_0, \qquad C_0 < B, \qquad B < C_0$$

ocurre. Si $B = C_0$, entonces $B + C = 0^*$ y ambos lados de la distributividad son 0^*. Si $C_0 < B$, definimos $D = B - C_0 > 0^*$. Entonces $C_0 + D = B$. La distributividad positiva da $AB = AC_0 + AD$. Cancelando AC_0 en el grupo aditivo, $AD = AB - AC_0 = AB + AC$. Como $D = B + C$, $A(B + C) = AB + AC$. Si $B < C_0$, ponemos $D = C_0 - B > 0^*$. Entonces $C_0 = B + D$, y la distributividad positiva produce

$AC_0 = AB + AD$. Por cancelación, $AB - AC_0 = -AD$. Pero $B + C = -D$ y $AC = -AC_0$, así que nuevamente $A(B + C) = AB + AC$. El caso $B < 0^* < C$ es simétrico. Por tanto la distributividad vale para $A > 0^*$ y todos B, C. Si $A < 0^*$, escribimos $A = -A_0$ con $A_0 > 0^*$ y usamos las reglas de signo:

$$\begin{aligned} A(B+C) &= -A_0(B+C) \\ &= -(A_0 B + A_0 C) \\ &= AB + AC. \end{aligned}$$

Para $A = 0^*$ es inmediata. Hemos probado

$$\boxed{A(B+C) = AB + AC}$$

para todos $A, B, C \in \mathcal{D}$. La distributividad por la derecha sigue de la conmutatividad del producto. La compatibilidad multiplicativa del orden también queda cerrada. Si $0^* \leq A, \qquad 0^* \leq B$, cada factor es cero o positivo. Si alguno es cero, $AB = 0^*$. Si ambos son positivos, el ejercicio 28 mostró $AB = A \cdot_+ B > 0^*$. Luego

$$\boxed{0^* \leq A,\ 0^* \leq B \Longrightarrow 0^* \leq AB.}$$

Ya podemos reunir las verificaciones. De §0.6 tenemos un grupo abeliano aditivo y un orden lineal compatible con traslaciones. En §0.7 hemos establecido:

- cierre del producto;

- conmutatividad y asociatividad;
- unidad 1^* con $1^* \neq 0^*$;
- inverso multiplicativo para todo $A \neq 0^*$;
- distributividad;
- compatibilidad del orden con productos no negativos.

Por tanto

$$\boxed{(\mathcal{D}, +, \cdot, \leq_{\mathcal{D}}) \text{ es un cuerpo ordenado.}}$$

La copia racional queda ahora certificada al nivel algebraico completo. Ya sabíamos que $q \mapsto q^*$ es inyectiva y preserva y refleja el orden. En §0.6 se probó $(p+q)^* = p^* + q^*$, $0_{\mathcal{D}} = 0^*$, y ahora tenemos $(pq)^* = p^* \cdot q^*$, $1_{\mathcal{D}} = 1^*$. Así

$$\boxed{\iota_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathcal{D} \text{ es una incrustación de cuerpos ordenados.}}$$

Sin embargo, esto todavía no responde por completo la pregunta de existencia de §0.1. Allí se pidió un **cuerpo ordenado completo**. Hasta este punto sólo se ha demostrado que $\mathcal{D}$ es un cuerpo ordenado. Falta probar que toda familia no vacía de cortaduras acotada superiormente posee un supremo en $\mathcal{D}$. Por eso el cierre correcto es En esta etapa se han probado las leyes de cuerpo ordenado. La propiedad del supremo sigue pendiente de la construcción por unión de §0.8.

No es legítimo convertir el primer certificado en el segundo sin una prueba adicional.

0.8. Sí existen: el supremo como unión

Una cota superior de una familia de cortaduras debe contener a cada miembro de la familia, porque el orden es la inclusión. Eso indica qué conjunto deberíamos probar: la unión reúne todos los racionales que estamos obligados a incluir y no añade ninguno más. Sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$ una familia no vacía y acotada superiormente. Existe, pues, $U \in \mathcal{D}$ tal que $A \subseteq U$ para todo $A \in \mathcal{A}$. Pongamos $S = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$. Para que esta fórmula proporcione un supremo dentro de nuestro sistema necesitamos primero $S \in \mathcal{D}$.

Proposición. La unión S es una cortadura.

Demostración. Como la familia es no vacía, podemos elegir un miembro $A_0 \in \mathcal{A}$ y luego un racional $q \in A_0$. Entonces $q \in S$; para obtener ese primer elemento basta un solo miembro de la familia. Además $S \subseteq U$: si $q \in S$, pertenece a algún $A \in \mathcal{A}$, y por ello pertenece a U. Un racional exterior a U queda también fuera de S, de modo que $S \neq \mathbb{Q}$. Éste es el paso que necesita la acotación superior.

Si $q \in S$ y $r < q$ es racional, algún miembro A contiene a q. La clausura inferior de ese mismo miembro da $r \in A \subseteq S$. Finalmente, la ausencia de máximo en A proporciona $t \in A$ con $t > q$; también $t \in S$. Así la unión es cerrada hacia abajo y carece de máximo. □ **Teorema.** Toda familia no vacía y acotada superiormente de cortaduras tiene supremo, dado por $\sup_{\mathcal{D}} \mathcal{A} = \bigcup \mathcal{A}$.

Demostración. La proposición permite considerar S como un elemento de $\mathcal{D}$. Para todo $A \in \mathcal{A}$ se cumple $A \subseteq S$, por definición de unión; luego S es cota superior. Si $V \in \mathcal{D}$ es cualquier otra cota superior, cada $q \in S$ pertenece a algún $A \in \mathcal{A}$ y ese A está contenido en V. Por tanto $q \in V$, y hemos probado $S \subseteq V$. La unión es la menor cota superior. □

Las hipótesis impiden que la unión escape del sistema por alguno de sus dos extremos: para la familia de todas las cortaduras racionales sería $\mathbb{Q}$ y quedaría fuera de $\mathcal{D}$, mientras que para la familia vacía sería $\emptyset$. La no vaciedad y la acotación garantizan que la unión siga siendo una cortadura. Junto con las operaciones de §§0.6–0.7, esta propiedad establece que $(\mathcal{D}, +, \cdot, \leq)$ es un cuerpo ordenado completo. Hemos construido un sistema que satisface la especificación inicial y contiene la copia racional $q \mapsto q^*$. Podemos adoptar $\mathcal{D}$ como un modelo de los números reales. En particular, la cortadura A_2, construida enteramente mediante aritmética

racional y distinta de todas las cortaduras racionales, es un elemento de ese modelo fuera de su subcuerpo racional.

La fórmula del supremo no ha utilizado números reales anteriores: la unión es una operación sobre conjuntos de racionales. Tampoco proporciona, por sí sola, un algoritmo para calcular supremos de familias presentadas arbitrariamente. Lo que prueba es que el objeto requerido existe en el marco clásico en que trabajamos.



Figura 0.8. La unión es candidata a supremo sólo tras verificar por separado que pertenece a D y que es la menor cota superior.

Otra construcción podría producir un cuerpo ordenado completo cuyos elementos fueran objetos diferentes de nuestras cortaduras. Para comparar ambos sistemas necesitaremos describir sus posiciones mediante información común. Los racionales volverán a desempeñar ese papel, pero primero debemos demostrar qué lugar ocupan en un cuerpo ordenado completo cualquiera.

Ejercicios de la sección 0.8.

Ejercicio 33. Demostrar que la unión vuelve a ser una cortadura

Sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$ una familia no vacía y acotada superiormente. Define $S = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$. Demuestra que $S \in \mathcal{D}$ verificando por separado las cuatro condiciones de una cortadura.

1. Para la no vaciedad, usa únicamente que $\mathcal{A} \neq \emptyset$ y que cada miembro de $\mathcal{A}$ es no vacío.
2. Para demostrar que $S \neq \mathbb{Q}$, toma una cota superior $U \in \mathcal{D}$ de $\mathcal{A}$ y prueba primero $S \subseteq U$.
3. Demuestra la clausura hacia abajo de S siguiendo un elemento $q \in S$ hasta alguna cortadura $A \in \mathcal{A}$ que lo contenga.
4. Demuestra que S no tiene máximo usando la ausencia de máximo del mismo miembro A.
5. Cierra indicando con precisión en cuál de las cuatro verificaciones se usa la hipótesis de acotación superior y en cuál se usa que la familia sea no vacía.

No llames todavía a S «supremo»: en este ejercicio sólo debes probar que el candidato pertenece al dominio $\mathcal{D}$.

Solución. Sea $S = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$. Debemos verificar las cuatro condiciones de una cortadura. **No vaciedad.** Como $\mathcal{A} \neq \emptyset$, existe $A_0 \in \mathcal{A}$. Como $A_0 \in \mathcal{D}$, tenemos $A_0 \neq \emptyset$, de modo que existe $q \in A_0$. Entonces $q \in S$. Por tanto $S \neq \emptyset$. Aquí se usa exactamente la no vaciedad de la familia.

Subconjunto propio. Como $\mathcal{A}$ está acotada superiormente, existe $U \in \mathcal{D}$ tal que

$A \subseteq U$ para todo $A \in \mathcal{A}$. Si $q \in S$, existe $A \in \mathcal{A}$ con $q \in A$. Entonces $q \in U$. Por tanto $S \subseteq U$. Pero U es una cortadura y, en particular, $U \subsetneq \mathbb{Q}$. Luego también $S \subsetneq \mathbb{Q}$. Éste es el único punto de las cuatro verificaciones donde necesitamos la hipótesis de acotación superior.

Clausura hacia abajo. Sea $q \in S$ y sea $r < q$. De $q \in S$ se sigue que existe $A \in \mathcal{A}$ con $q \in A$. Como A es cerrada hacia abajo, $r \in A$. Entonces $r \in S$. **Ausencia de máximo.** Sea $q \in S$. Elegimos nuevamente $A \in \mathcal{A}$ con $q \in A$. Como A no tiene máximo, existe $r \in A$ tal que

$q < r$. Como $A \subseteq S$, también $r \in S$. Así ningún elemento de S es máximo. Las cuatro condiciones quedan verificadas:

$$\boxed{S = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A \in \mathcal{D}.}$$

La trazabilidad de hipótesis es precisa:

- $\mathcal{A} \neq \emptyset$ se gasta para obtener un primer elemento de S;
- la acotación superior se gasta para impedir $S = \mathbb{Q}$;
- la clausura hacia abajo y la ausencia de máximo se heredan localmente del miembro de la familia que contiene al racional considerado.

Todavía no hemos demostrado que S sea supremo: sólo que el candidato vive dentro del dominio ordenado correcto. *Referencia visual.* Véase la figura C00-F07 del texto principal, **La unión que cierra la existencia**, como síntesis posterior de este argumento.

Ejercicio 34. Separar «ser cortadura» de «ser supremo»

Mantén las hipótesis del ejercicio 33 y supón ya demostrado que $S = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A \in \mathcal{D}$. Traza ahora, como una segunda prueba independiente, que $S = \sup_{\mathcal{D}} \mathcal{A}$. Tu argumento debe distinguir explícitamente las dos obligaciones de un supremo.

1. Demuestra que S es cota superior de $\mathcal{A}$.
2. Sea $V \in \mathcal{D}$ una cota superior arbitraria de $\mathcal{A}$. Demuestra que $S \subseteq V$.
3. Traduce ambas inclusiones al orden $\leq_{\mathcal{D}}$.
4. Explica por qué la prueba de que S es la menor cota superior no reemplaza la prueba previa de que $S \in \mathcal{D}$.
5. Haz un inventario de hipótesis: señala cuáles se gastaron para garantizar que S fuera un elemento de $\mathcal{D}$ y cuáles se usan directamente en la caracterización de menor cota superior.

El cierre debe ser la identidad

$$\boxed{\sup_{\mathcal{D}} \mathcal{A} = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A.}$$

Solución. Partimos ahora del resultado ya establecido $S = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A \in \mathcal{D}$. Esto permite formular la pregunta de orden: ¿es S la menor cota superior?

Primera obligación: S es cota superior. Sea $A \in \mathcal{A}$. Por definición de unión,

$$A \subseteq S.$$

Como el orden de $\mathcal{D}$ es la inclusión, $A \leq_{\mathcal{D}} S$. Esto vale para todo $A \in \mathcal{A}$. Por tanto S es una cota superior de la familia. **Segunda obligación: S es menor que cualquier otra cota superior.** Sea $V \in \mathcal{D}$ una cota superior de $\mathcal{A}$. Entonces $A \subseteq V$ para todo $A \in \mathcal{A}$.

Tomemos $q \in S$. Por definición de unión existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $q \in A$. Como $A \subseteq V$, $q \in V$. Por tanto $S \subseteq V$, es decir, $S \leq_{\mathcal{D}} V$. Las dos obligaciones prueban

$$\boxed{S = \sup_{\mathcal{D}} \mathcal{A}.}$$

Sustituyendo la definición de S,

$$\boxed{\sup_{\mathcal{D}} \mathcal{A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A.}$$

Las dos pruebas no son intercambiables. Para que S pueda ser un supremo **en** $\mathcal{D}$, primero debe estar demostrado que $S \in \mathcal{D}$. El argumento de menor cota superior compara conjuntos por inclusión, pero por sí solo no certifica que la unión sea una cortadura. El inventario de hipótesis queda así:

- la no vaciedad y la acotación superior de $\mathcal{A}$ son necesarias en el ejercicio 33 para garantizar $S \in \mathcal{D}$;
- una vez que $S \in \mathcal{D}$, la condición $A \subseteq S$ proviene puramente de la definición de unión;
- para demostrar minimalidad se toma una cota superior arbitraria V y se usa exactamente la condición $A \subseteq V$ para todo $A \in \mathcal{A}$.

La arquitectura lógica es, por tanto,

$$\boxed{S \in \mathcal{D} \quad \Longrightarrow \quad \text{podemos preguntar si } S = \sup_{\mathcal{D}} \mathcal{A},}$$

no al revés. *Referencia visual.* Véase la figura C00-F07 del texto principal, **La unión que cierra la existencia**, como síntesis posterior de este argumento.

Ejercicio 35. Localizar exactamente por qué hace falta una cota superior

Para cada $n \in \mathbb{N}$, considera la cortadura racional $n^* = \{q \in \mathbb{Q} : q < n\}$, y la familia $\mathcal{N} = \{n^* : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{D}$.

1. Demuestra que $\mathcal{N}$ es no vacía.
2. Usa la propiedad arquimediana de $\mathbb{Q}$ para demostrar

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} n^* = \mathbb{Q}$.

3. Concluye que esa unión no es una cortadura.
4. Demuestra que $\mathcal{N}$ no puede estar acotada superiormente en $\mathcal{D}$.
5. Vuelve a la demostración del ejercicio 33 y localiza el paso exacto que se rompe para $\mathcal{N}$.

Concluye por qué la afirmación

«la unión de cualquier familia no vacía de cortaduras es otra cortadura»

es falsa, aunque la unión siga siendo no vacía, cerrada hacia abajo y sin máximo en este ejemplo.

Solución. La familia $\mathcal{N} = \{n^* : n \in \mathbb{N}\}$ es no vacía porque, por ejemplo, $0^* \in \mathcal{N}$. Probemos ahora que su unión es todo $\mathbb{Q}$. Sea $q \in \mathbb{Q}$. Por la propiedad arquimediana de $\mathbb{Q}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $q < n$. Entonces, por definición de cortadura racional,

$$q \in n^*.$$

Como n^* es uno de los miembros de $\mathcal{N}$, $q \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} n^*$. Así $\mathbb{Q} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} n^*$. La inclusión inversa es automática porque cada n^* es un subconjunto de $\mathbb{Q}$. Por tanto

$$\boxed{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} n^* = \mathbb{Q}.}$$

Pero $\mathbb{Q}$ no es una cortadura: falla la condición de ser un subconjunto propio de sí mismo. En consecuencia, la unión de una familia no vacía de cortaduras no tiene por qué pertenecer a $\mathcal{D}$. Esto también demuestra que $\mathcal{N}$ no está acotada superiormente en $\mathcal{D}$. Si existiera $U \in \mathcal{D}$ con $n^* \subseteq U$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces, tomando uniones,

$\mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} n^* \subseteq U$. Como siempre $U \subseteq \mathbb{Q}$, seguiría $U = \mathbb{Q}$, contradicción con $U \in \mathcal{D}$. La falla se localiza exactamente en el segundo bloque de la prueba del ejercicio 33. Allí elegíamos una cota superior U y obteníamos $S \subseteq U \subsetneq \mathbb{Q}$. Para $\mathcal{N}$ no existe tal U. Sin ese cerco, la unión crece hasta llenar todos los racionales.

Es instructivo observar que las otras propiedades no son el problema: $\mathbb{Q}$ es no vacío, está cerrado hacia abajo respecto de su propio orden y no tiene máximo. Falla exactamente la propiedad de ser un subconjunto propio de $\mathbb{Q}$. Por tanto,

$$\boxed{\text{UNIÓN DE CORTADURAS} \not\Longrightarrow \text{CORTADURA}}$$

sin la hipótesis de acotación superior. *Referencia visual.* Véase la figura C00-F07 del texto principal, **La unión que cierra la existencia**, como síntesis posterior de este argumento.

Ejercicio 36. Cerrar la pregunta de existencia sin confundir modelo con esencia

Reúne los dos certificados obtenidos hasta ahora: ORDERED FIELD = VERIFIED en §§0.6–0.7, y la propiedad del supremo demostrada en los ejercicios 33–34.

1. Demuestra que

$(\mathcal{D}, +, \cdot, \leq_{\mathcal{D}})$ es un cuerpo ordenado completo. 2. Explica por qué esto constituye una prueba de existencia de al menos un sistema de números reales en el sentido fijado en §0.1. 3. Incorpora la incrustación $\iota_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathcal{D}, \quad q \mapsto q^*$, y precisa qué estructura conserva. 4. Explica en qué sentido está autorizado decir que $\mathcal{D}$ es **un modelo de los números reales** y por qué de ello no se sigue que «un número real sea por esencia una cortadura». 5. Retoma $A_2 = \{q \in \mathbb{Q} : q < 0 \text{ o } q^2 < 2\}$. Explica qué afirmación nueva queda autorizada acerca de A_2 después del cierre de completitud y qué afirmación sobre unicidad de modelos sigue todavía sin demostrarse.

> **Pista conceptual.** La prueba de existencia no requiere identificar una ontología única: basta exhibir una estructura concreta que satisfaga toda la especificación.

Solución. Las leyes verificadas en §§0.6–0.7 hacen de $(\mathcal{D}, +, \cdot, \leq_{\mathcal{D}})$ un cuerpo ordenado. Los ejercicios 33–34 prueban que cada familia no vacía acotada superiormente tiene supremo en él, dado por su unión. Juntas, esas propiedades lo hacen un cuerpo ordenado completo. La existencia queda demostrada porque $\mathcal{D}$ se construyó como un conjunto de subconjuntos de $\mathbb{Q}$, y sus operaciones y orden se definieron y verificaron sobre esos objetos. La aplicación $\iota_{\mathbb{Q}}(q) = q^*$ es inyectiva y conserva suma, producto, cero, uno y orden; por ello el modelo incorpora una copia fiel del cuerpo ordenado racional.

En particular, $A_2 \in \mathcal{D}$ pertenece ya a un sistema de números reales y queda fuera de esa copia racional, pues no coincide con ningún q^*. Antes sólo se había construido y ordenado esa cortadura; ahora el sistema donde vive satisface toda la especificación. La construcción realiza el modelo, sin imponer cortaduras como única representación conjuntista posible. Todavía falta comparar otros cuerpos ordenados completos y demostrar su unicidad estructural.

Referencias visuales. Véanse las figuras C00-F01 (**Existencia antes que unicidad**) y C00-F07 (**La unión que cierra la existencia**) del texto principal para sintetizar, respectivamente, las capas de este cierre.

Ejercicio 37. Auditar un cierre de existencia que mezcla cuatro niveles

Un informe propone:

> «En §0.7 demostramos que $\mathcal{D}$ es un cuerpo ordenado; por tanto ya es completo. Además, la unión de cualquier familia de cortaduras es una cortadura, así que toda familia tiene supremo. En consecuencia $\mathcal{D}$ es literalmente $\mathbb{R}$. Como ya encontramos un modelo, cualquier otro cuerpo ordenado completo debe ser igual a $\mathcal{D}$.»

Audita el informe sin usar resultados de §§0.9–0.10.

1. Localiza la primera inferencia inválida y refútala usando un resultado ya disponible del capítulo.
2. Refuta la segunda inferencia mediante la familia $\mathcal{N} = \{n^* : n \in \mathbb{N}\}$ del ejercicio 35.
3. Formula correctamente el teorema de unión, incluyendo todas sus hipótesis.
4. Explica la diferencia entre las afirmaciones

$$\mathcal{D} \text{ es un modelo de los números reales}$$

y

$$\mathcal{D} \text{ es literalmente el único conjunto posible de números reales.}$$

5. Repara el informe hasta obtener exactamente la conclusión disponible al terminar §0.8: existencia de un cuerpo ordenado completo con una copia ordenada de $\mathbb{Q}$, sin afirmar todavía unicidad estructural.

> **Pista conceptual.** Distingue cuatro puertas: cuerpo ordenado, propiedad del supremo, existencia de un modelo y unicidad del modelo. Ninguna debe sustituirse por la siguiente sin prueba.

Solución. La primera inferencia inválida es que ser cuerpo ordenado implique ser completo. $\mathbb{Q}$ la refuta: es cuerpo ordenado y S_2 no tiene supremo racional, aunque sea no vacío y acotado superiormente. La unión arbitraria tampoco produce siempre una cortadura. Para $\mathcal{N} = \{n^* : n \in \mathbb{N}\}$, arquimedianidad racional da $\bigcup \mathcal{N} = \mathbb{Q}$, que no es un subconjunto propio y no pertenece a $\mathcal{D}$. El teorema correcto exige $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$ no vacía y acotada superiormente; entonces $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{D}$ y es su supremo.

Combinando ese teorema con las leyes de cuerpo ordenado, se concluye que $\mathcal{D}$ es un cuerpo ordenado completo con la incrustación racional $q \mapsto q^*$. Ésa es una prueba de existencia de un modelo. No demuestra igualdad literal con cualquier otra construcción ni demuestra aún un isomorfismo entre modelos. Al cerrar §0.8, la existencia está acreditada y la comparación estructural queda por demostrar en §§0.9–0.10.

0.9. ¿Podría haber otros reales?

Sea F un cuerpo ordenado completo. Ya disponemos de un modelo, así que esta hipótesis no encubre una suposición de existencia. El propósito es estudiar todos los sistemas que satisfacen la misma especificación, utilizando únicamente sus leyes de cuerpo, su orden y la propiedad del supremo. Empecemos por la unidad. En cualquier cuerpo ordenado, el cuadrado de un elemento no nulo es positivo: si el elemento es negativo, su opuesto es positivo y tiene el mismo cuadrado. Los cuadrados son no negativos por compatibilidad multiplicativa y no son cero en un cuerpo salvo que el elemento lo sea. Aplicado a 1_F, esto da $1_F = 1_F^2 > 0_F$. Definamos los numerales por $\nu_F(0) = 0_F, \qquad \nu_F(n+1) = \nu_F(n) + 1_F$. Cada paso aumenta estrictamente el valor, de modo que $m < n$ implica $\nu_F(m) < \nu_F(n)$. Ningún numeral positivo es cero: F tiene característica cero.

Los numerales conservan la suma y el producto. Para la suma, fijado m, la inducción sobre n comienza con $\nu_F(m+0) = \nu_F(m) + 0_F$; el paso usa

$$\nu_F(m+n+1) = \nu_F(m+n) + 1_F = \nu_F(m) + \nu_F(n+1).$$

Para el producto, el caso $n = 0$ es inmediato y el paso se obtiene de la identidad natural $m(n+1) = mn + m$, de la aditividad recién probada y de la distributividad en F:

$$\nu_F(m(n+1)) = \nu_F(mn) + \nu_F(m) = \nu_F(m)(\nu_F(n) + 1_F).$$

Representemos un entero por una diferencia $m-n$ de naturales y pongamos $\jmath_F(m-n) = \nu_F(m) - \nu_F(n)$. Si $m-n = p-q$, entonces $m+q = n+p$. La conservación de la suma da $\nu_F(m) + \nu_F(q) = \nu_F(n) + \nu_F(p)$, y al trasladar términos obtenemos la igualdad entre las dos imágenes propuestas. La regla está bien definida. La fórmula $(m-n)+(p-q) = (m+p)-(n+q)$ demuestra que $\jmath_F$ conserva la suma. Para el producto usamos $(m-n)(p-q) = (mp+nq)-(mq+np)$. Aplicando las leyes de los numerales y distribuyendo en F, el segundo miembro tiene imagen $(\nu_F(m) - \nu_F(n))(\nu_F(p) - \nu_F(q))$. Así se conserva el producto. Se conservan también 0, 1 y los opuestos. Un entero positivo k tiene imagen $\nu_F(k) > 0_F$, mientras que uno negativo tiene imagen negativa. Como $a < b$ equivale a $b - a > 0$, la conservación de diferencias prueba que $\jmath_F$ conserva y refleja el orden; en particular, es inyectiva.

Para $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, definimos $\iota_F(\frac{a}{b}) = \jmath_F(a)\jmath_F(b)^{-1}$. El inverso existe por inyectividad. Si $a/b = c/d$, entonces $ad = bc$, y la multiplicatividad de $\jmath_F$ transporta esa igualdad a F. Multiplicar por las imágenes inversas de los denominadores prueba que la regla no depende del representante racional.

Escribiendo $a_F = \jmath_F(a)$ y análogamente para otros enteros, las identidades $(a_F b_F^{-1}) + (c_F d_F^{-1}) = (a_F d_F + b_F c_F)(b_F d_F)^{-1}$, $(a_F b_F^{-1})(c_F d_F^{-1}) = (a_F c_F)(b_F d_F)^{-1}$ prueban que ι_F conserva suma y producto, además de cero y unidad. Con denominador $b > 0$, el signo de $a_F b_F^{-1}$ es el de a: el inverso de un elemento positivo es positivo, pues un inverso no positivo no podría multiplicarlo para dar $1_F > 0_F$. Aplicado a la diferencia de dos racionales, esto demuestra $p < q \iff \iota_F(p) < \iota_F(q)$. Hemos construido una incrustación de cuerpos ordenados. Es única: toda aplicación que conserve unidad y operaciones debe fijar sucesivamente numerales, enteros e inversos de enteros no nulos y, con ellos, todas las fracciones. Esta copia racional existe en cualquier cuerpo ordenado; aún no hemos utilizado la completitud.

La existencia de la copia racional deja abierta una cuestión sobre su alcance dentro de F: los numerales podrían, en principio, quedar todos por debajo de una misma cota. La completitud permite descartar esa posibilidad. Supongamos que el conjunto $N_F = \{\nu_F(n) : n \in \mathbb{N}\}$ estuviera acotado superiormente. Es no vacío y, por completitud, tendría supremo s. El elemento $s - 1_F < s$ no puede ser otra cota superior; por tanto, algún n satisface $s - 1_F < \nu_F(n)$. Al sumar 1_F resulta $s < \nu_F(n) + 1_F = \nu_F(n+1)$, contradiciendo que s domina a todos los numerales. Concluimos que N_F no está acotado superiormente: para cada $x \in F$ hay $n \in \mathbb{N}$ con $x < \nu_F(n)$. Ésta es la propiedad arquimediana.

Encontrar un entero mayor que x todavía no controla la distancia que los separa. Una pareja de enteros consecutivos dará ese control y permitirá después reducir la escala; elijamos $n > 0$ con $-\nu_F(n) < x < \nu_F(n)$, aplicando arquimedianidad a $\max\{x, -x\}$. El conjunto $K = \{k \in \mathbb{N} : x < -\nu_F(n) + \nu_F(k)\}$ contiene a $2n+1$ y no contiene a 0. Su mínimo k_0 es positivo. La pertenencia de k_0 y la no pertenencia de $k_0 - 1$ dan $-\nu_F(n) + \nu_F(k_0 - 1) \leq x < -\nu_F(n) + \nu_F(k_0)$. Con $m = -n + k_0 \in \mathbb{Z}$, obtenemos $\iota_F(m-1) \leq x < \iota_F(m)$. Aquí y en adelante, al aplicar ι_F a un entero entendemos su imagen racional canónica. La minimalidad es lo que asegura que los dos extremos sean consecutivos.

Teorema de densidad racional. Si $x < y$ en F, existe $q \in \mathbb{Q}$ con $x < \iota_F(q) < y$.

Demostración. Buscamos una malla cuyo paso sea menor que la separación de los dos elementos. Por arquimedianidad, elijamos $n > 0$ con $\nu_F(n) > (y-x)^{-1}$; entonces $0 < \iota_F(1/n) < y - x$. Multiplicar por el numeral convierte la búsqueda en la localización entera que acabamos de demostrar: localicemos $x\nu_F(n)$ entre dos enteros consecutivos: $\iota_F(m-1) \leq$

$x\nu_F(n) < \iota_F(m)$. Al dividir por $\nu_F(n) > 0$ obtenemos $x < \iota_F(m/n) \leq x + \iota_F(1/n) < y$. La desigualdad central procede del extremo inferior de la localización; las dos exteriores aseguran que $q = m/n$ queda estrictamente entre x e y. □

El primer punto de la malla situado a la derecha de x queda a una distancia de a lo sumo un paso y, por ello, también a la izquierda de y. La completitud intervino al demostrar la arquimedianidad; desde ese momento, la localización entera y la densidad sólo necesitaron las leyes de cuerpo ordenado.

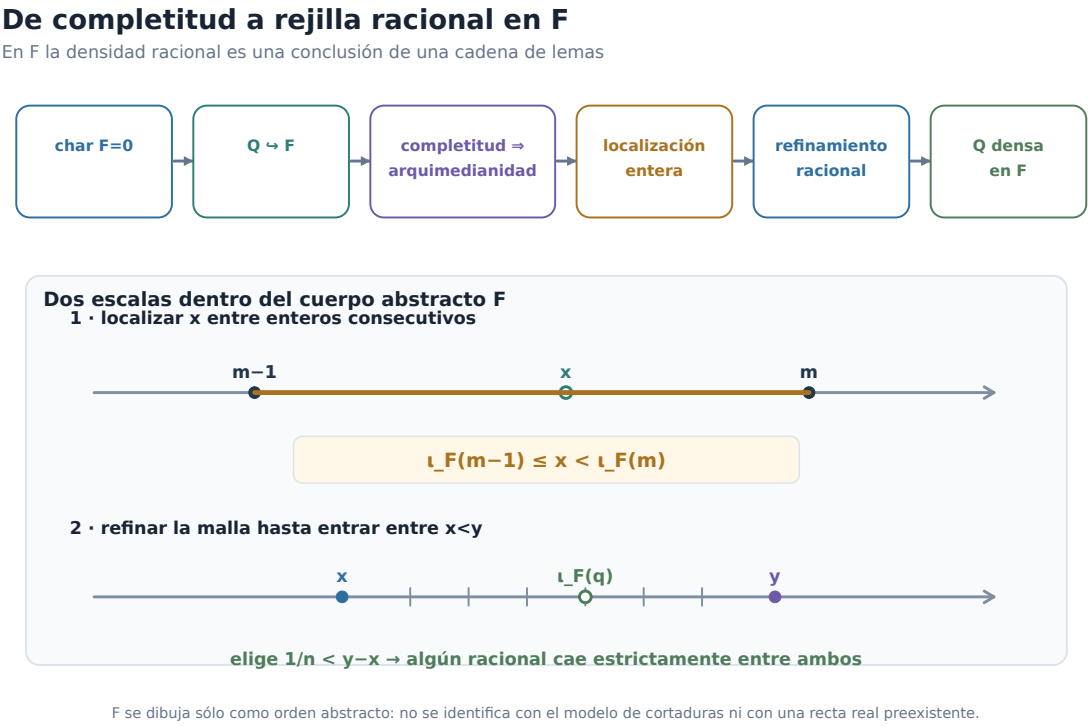


Figura 0.9. La densidad racional en un cuerpo completo es una conclusión de característica cero, copia racional, arquimedianidad y localización.

Podemos describir un elemento de F mediante los racionales que quedan debajo de él. Para $x \in F$, su **traza racional inferior** es $A_x^F = \{q \in \mathbb{Q} : \iota_F(q) < x\}$. El superíndice se omitirá cuando el cuerpo sea inequívoco. El elemento x vive en F; su traza es un subconjunto del conjunto común $\mathbb{Q}$.

Proposición. La traza A_x es una cortadura y determina al elemento mediante $x = \sup_F \iota_F(A_x)$.

Demostración. La densidad proporciona un racional cuya imagen está entre $x - 1_F$ y x, y otro cuya imagen está entre x y $x + 1_F$. El primero pertenece a A_x y el segundo queda fuera: la traza es no vacía y propia. Si $p < q$ y $q \in A_x$, entonces $\iota_F(p) < \iota_F(q) < x$, así que $p \in A_x$. Si $q \in A_x$, la densidad aplicada entre $\iota_F(q)$ y x proporciona $r \in A_x$ con $q < r$. Esto prueba clausura inferior y ausencia de máximo.

La imagen $\iota_F(A_x)$ es no vacía y está acotada por x; por completitud tiene supremo $s \leq x$. Si $s < x$, la densidad daría un racional q con $s < \iota_F(q) < x$. Entonces $q \in A_x$, contradiciendo que s es una cota superior de su imagen. De aquí $s = x$. □ La densidad permite también comprobar directamente que x es la menor cota superior de su traza: cualquier elemento menor deja entre ambos una imagen racional que aún pertenece a la traza. Esa observación no demuestra completitud, pues reconstruye un elemento del que ya disponíamos; realizar una cortadura racional arbitraria será una obligación distinta.

Si $x \leq y$, todo racional debajo de x está debajo de y, y por ello $A_x \subseteq A_y$. Recíprocamente, si $A_x \subseteq A_y$, el elemento y domina a $\iota_F(A_x)$; por la fórmula de reconstrucción, $x \leq y$. Además

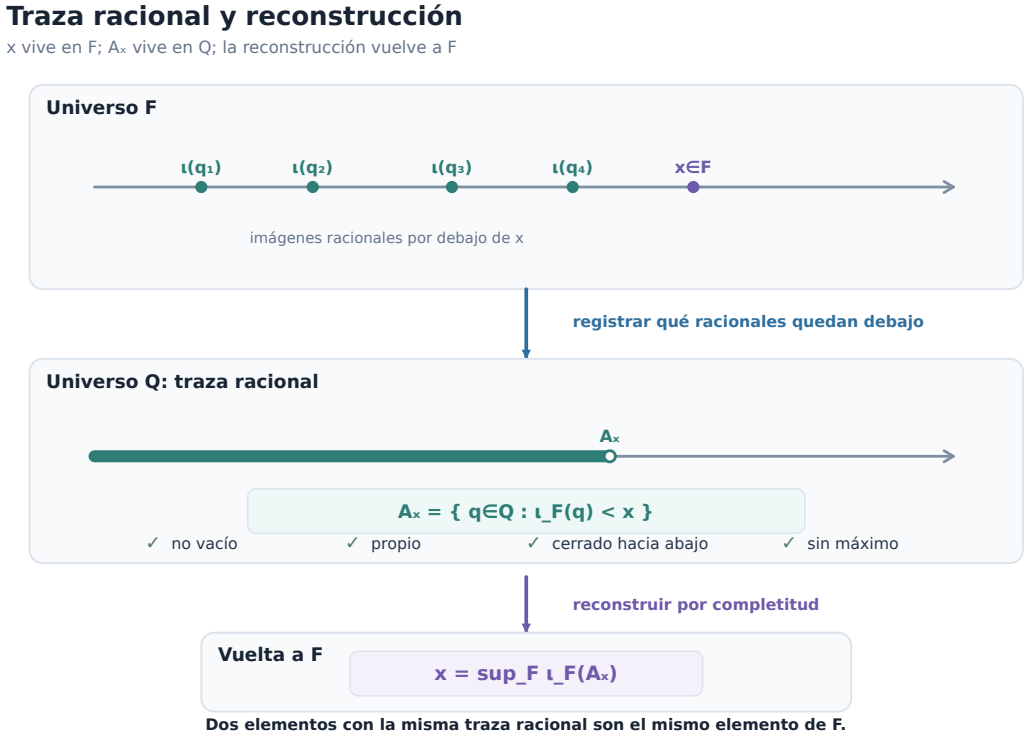


Figura 0.10. x vive en F y A_x vive en Q; la traza racional registra la posición de x y la completitud permite reconstruirlo.

$A_x = A_y$ implica $x = y$. Si $x < y$, un racional con $x < \iota_F(q) < y$ pertenece a $A_y \setminus A_x$, haciendo estricta la inclusión. Así, $x \leq y \iff A_x \subseteq A_y$, $x < y \iff A_x \subsetneq A_y$. Las trazas de elementos de otro cuerpo completo G vivirán también en $\mathbb{Q}$. Podemos comparar esas trazas aunque no exista todavía ninguna correspondencia entre los elementos de F y G. Falta mostrar que al reconstruir en G la traza de un elemento de F obtenemos exactamente la posición que buscamos.

Ejercicios de la sección 0.9.

Ejercicio 38. Separar universos y construir la copia racional canónica

Sea $F = (F, +, \cdot, 0_F, 1_F, \leq_F)$ un cuerpo ordenado arbitrario. No supongas todavía que sea completo.

1. Define los numerales de F mediante

$\nu_F(0) = 0_F$, $\nu_F(n+1) = \nu_F(n) + 1_F$, y demuestra que $m < n$ implica $\nu_F(m) < \nu_F(n)$. Deduce que F tiene característica cero. 2. Escribe correctamente los tipos de las aplicaciones

$$\nu_F, \qquad \jmath_{\mathbb{Z}}^F, \qquad \iota_F,$$

donde la segunda debe representar enteros y la tercera racionales dentro de F. 3. Para $m, n \in \mathbb{N}$, define $\jmath_{\mathbb{Z}}^F(m-n) = \nu_F(m) - \nu_F(n)$ y explica qué debe verificarse para que la definición no dependa de la representación del entero. 4. Para $a, b \in \mathbb{Z}$ con $b \neq 0$, define $\iota_F(\frac{a}{b}) = \jmath_{\mathbb{Z}}^F(a)(\jmath_{\mathbb{Z}}^F(b))^{-1}$.

Justifica por qué el inverso existe y qué igualdad debe usarse para comprobar que el valor no depende del representante a/b. 5. Explica por qué, aun después de estas verificaciones, la escritura $\mathbb{Q} \subseteq F$ es una identificación notacional con la imagen de ι_F y no una igualdad literal impuesta entre conjuntos. Cierra indicando qué parte de esta construcción requiere completitud de F.

Solución. Partimos sólo de que F es un cuerpo ordenado. En particular, $0_F < 1_F$. Definimos $\nu_F(0) = 0_F$, $\nu_F(n+1) = \nu_F(n) + 1_F$. Inducción en el segundo argumento, usando la recurrencia y distributividad, da $\nu_F(m+n) = \nu_F(m) + \nu_F(n)$ y $\nu_F(mn) = \nu_F(m)\nu_F(n)$. Por ejemplo, el paso multiplicativo usa $\nu_F(m(n+1)) = \nu_F(mn+m) = \nu_F(mn) + \nu_F(m)$. Estas identidades justifican las leyes de la copia entera al expandir diferencias de numerales y, después, las igualdades de productos cruzados para las fracciones.

Por inducción, $n > 0$ implica $\nu_F(n) > 0_F$. Si $m < n$, existe $k > 0$ con $n = m + k$, y entonces $\nu_F(n) = \nu_F(m) + \nu_F(k) > \nu_F(m)$. Por tanto los numerales preservan estrictamente el orden. En particular, ningún $n > 0$ satisface $\nu_F(n) = 0_F$, así que

$$\boxed{\operatorname{char} F = 0}.$$

Los tipos son $\nu_F : \mathbb{N} \longrightarrow F$, $\jmath_{\mathbb{Z}}^F : \mathbb{Z} \longrightarrow F$, y $\iota_F : \mathbb{Q} \longrightarrow F$. Para un entero presentado como $m - n$, definimos $\jmath_{\mathbb{Z}}^F(m-n) = \nu_F(m) - \nu_F(n)$. Si $m - n = p - q$, entonces $m + q = n + p$. La aditividad de los numerales da $\nu_F(m) + \nu_F(q) = \nu_F(n) + \nu_F(p)$, y, trasladando términos,

$\nu_F(m) - \nu_F(n) = \nu_F(p) - \nu_F(q)$. Así la definición no depende de la representación. La característica cero impide que enteros distintos colapsen, por lo que $\jmath_{\mathbb{Z}}^F$ es inyectiva. Para $a/b \in \mathbb{Q}$, con $b \neq 0$, definimos $\iota_F(\frac{a}{b}) = \jmath_{\mathbb{Z}}^F(a)\big(\jmath_{\mathbb{Z}}^F(b)\big)^{-1}$. Como $b \neq 0$ y $\jmath_{\mathbb{Z}}^F$ es inyectiva,

$\jmath_{\mathbb{Z}}^F(b) \neq 0_F$, de modo que el inverso existe. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $ad = bc$. Aplicando la multiplicatividad de la copia entera, $\jmath_{\mathbb{Z}}^F(a)\jmath_{\mathbb{Z}}^F(d) = \jmath_{\mathbb{Z}}^F(b)\jmath_{\mathbb{Z}}^F(c)$. Multiplicando por los inversos de las imágenes de b y d, obtenemos el mismo valor para ambas fracciones. Por tanto ι_F está bien definida. Las leyes de cuerpo muestran que conserva suma, producto, 0 y 1, y el orden se conserva y refleja. En consecuencia,

$$\boxed{\iota_F : \mathbb{Q} \hookrightarrow F}$$

es una incrustación de cuerpos ordenados. Después de esta certificación podemos identificar notacionalmente $\mathbb{Q}$ con la imagen $\iota_F(\mathbb{Q})$ cuando resulte cómodo. Eso no afirma una igualdad literal entre los conjuntos subyacentes: la afirmación estructural primaria es la existencia de la incrustación canónica. Nada de esta construcción ha usado completitud. La copia canónica de $\mathbb{Q}$ existe en todo cuerpo ordenado. *Referencia visual.* Véase la figura C00-F08 del texto principal, **De completitud a rejilla racional en F**, como síntesis posterior de este argumento.

Ejercicio 39. La completitud obliga a la arquimedianidad

Supón ahora que F es un cuerpo ordenado completo y considera $N_F = \{\nu_F(n) : n \in \mathbb{N}\}$. Demuestra que F es arquimediano. Organiza la prueba por contradicción.

1. Supón que N_F está acotado superiormente y usa completitud para definir

$s = \sup_F N_F$.

2. Explica por qué $s - 1_F$ no puede ser una cota superior de N_F.
3. Deduce que existe $n \in \mathbb{N}$ con

$s - 1_F < \nu_F(n)$, y obtiene una contradicción sumando 1_F. 4. Concluye que para todo $x \in F$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < \nu_F(n)$.

5. Señala el único paso de la demostración en el que se gasta la completitud y explica por qué el argumento no demuestra que **todo** cuerpo ordenado sea arquimediano.

Solución. Supongamos, para obtener una contradicción, que $N_F = \{\nu_F(n) : n \in \mathbb{N}\}$ está acotado superiormente. Es no vacío porque $0_F = \nu_F(0) \in N_F$. Aquí se gasta la completitud. Existe $s = \sup_F N_F$. Como $1_F > 0_F$, $s - 1_F < s$. El elemento $s - 1_F$ no puede ser una cota superior de N_F: si lo fuera, sería una cota superior estrictamente menor que el supremo. Por tanto existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$s - 1_F < \nu_F(n)$. Sumando 1_F, $s < \nu_F(n) + 1_F = \nu_F(n+1)$. Pero $\nu_F(n+1) \in N_F$, contradicción con que s sea cota superior. Luego N_F no está acotado superiormente. Así, ningún $x \in F$ puede ser cota superior de N_F. Por tanto para todo $x \in F$ existe $n \in \mathbb{N}$ con

$$\boxed{x < \nu_F(n)}.$$

Ésta es la forma arquimediana que usaremos. La completitud intervino exactamente en la existencia de $s = \sup_F N_F$ bajo la hipótesis de acotación. El resto utiliza sólo orden y estructura aditiva. Por ello el resultado correcto es

$$\boxed{\text{cuerpo ordenado completo} \Longrightarrow \text{arquimediano}},$$

no la falsa inferencia «todo cuerpo ordenado es arquimediano». *Referencia visual.* Véase la figura C00-F08 del texto principal, **De completitud a rejilla racional en F**, como síntesis posterior de este argumento.

Ejercicio 40. Trazar el camino desde la arquimedianidad hasta la densidad racional

Sea F un cuerpo ordenado completo y usa su incrustación racional canónica $\iota_F : \mathbb{Q} \hookrightarrow F$. Reconstruye sin saltos la cadena

$$\text{arquimedianidad} \Longrightarrow \text{localización entera} \Longrightarrow \text{localización racional} \Longrightarrow \text{densidad de } \iota_F(\mathbb{Q}).$$

1. Para $x \in F$, demuestra que existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$\iota_F(m-1) \le x < \iota_F(m)$. Debes construir un conjunto $K \subseteq \mathbb{N}$, tomar su mínimo y explicar por qué la minimalidad produce simultáneamente las dos desigualdades. 2. Sean $x < y$ en F. Usa la arquimedianidad aplicada a $(y-x)^{-1}$ para elegir $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, de modo que $0 < \iota_F\big(\frac{1}{n}\big) < y - x$.

3. Aplica la localización entera a $x\,\iota_F(n)$ y construye un entero m para el cual

$$\iota_F\Big(\frac{m-1}{n}\Big) \le x < \iota_F\Big(\frac{m}{n}\Big).$$

4. Demuestra que el mismo $q = m/n$ satisface

$$\boxed{x < \iota_F(q) < y}.$$

5. Cierra con un mapa de dependencias que indique dónde se usa: orden de F, arquimedianidad, buen orden de $\mathbb{N}$, estructura de cuerpo e incrustación racional. No invoques una intuición geométrica de «racionales muy juntos».

   Pista conceptual. La arquimedianidad da escala; el mínimo de K convierte esa escala en una celda entera; dividir una celda suficientemente fina produce la posición racional intermedia.

Solución. Primero localizamos cualquier elemento entre enteros consecutivos. Sea $x \in F$. Por arquimedianidad existen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que $x < \iota_F(n_1)$, $\quad -x < \iota_F(n_2)$. Tomamos, por ejemplo, $n = n_1 + n_2 + 1$. Entonces $n > 0$ y $-\iota_F(n) < x < \iota_F(n)$. Definimos $K = \{k \in \mathbb{N} : x < -\iota_F(n) + \iota_F(k)\}$. El conjunto K no es vacío. Para $k = 2n+1$,

$-\iota_F(n) + \iota_F(2n+1) = \iota_F(n+1) > x$. Por el buen orden de $\mathbb{N}$, K tiene mínimo; llamémoslo k_0. No puede ser 0, porque $-\iota_F(n) < x$. Escribimos $k_0 = k+1$. La minimalidad implica $k \notin K$, de modo que $-\iota_F(n) + \iota_F(k) \le x$. Como $k+1 \in K$, $x < -\iota_F(n) + \iota_F(k+1)$. Definimos $m = -n + (k+1) \in \mathbb{Z}$.

Entonces $m - 1 = -n + k$, y obtenemos

$$\boxed{\iota_F(m-1) \le x < \iota_F(m)}.$$

Ésta es la localización entera. Sean ahora $x < y$. La diferencia $y-x$ es positiva. Aplicamos la arquimedianidad a $(y-x)^{-1}$. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(y-x)^{-1} < \iota_F(n)$. Necesariamente $n > 0$. Al invertir elementos positivos se invierte el orden, así que $0 < \iota_F(n)^{-1} < y-x$. Como ι_F preserva inversos,

$$\boxed{0 < \iota_F\Big(\frac{1}{n}\Big) < y-x}.$$

Aplicamos la localización entera a $x\,\iota_F(n)$. Existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $\iota_F(m-1) \le x\,\iota_F(n) < \iota_F(m)$. Como $\iota_F(n) > 0$, dividimos por ella:

$$\iota_F\Big(\frac{m-1}{n}\Big) \le x < \iota_F\Big(\frac{m}{n}\Big).$$

De la desigualdad izquierda antes de dividir se obtiene también $\iota_F(m) \le x\,\iota_F(n) + 1_F$. Dividiendo otra vez por $\iota_F(n)$,

$$\iota_F\Big(\frac{m}{n}\Big) \le x + \iota_F\Big(\frac{1}{n}\Big) < x + (y-x) = y.$$

Para $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, queda

$$\boxed{x < \iota_F(q) < y}.$$

Así la copia canónica de $\mathbb{Q}$ es densa en F. El mapa de dependencias es preciso:

- el orden permite comparar, trasladar e invertir desigualdades positivas;
- la arquimedianidad proporciona escalas enteras suficientemente grandes;
- el buen orden de $\mathbb{N}$ produce el mínimo de K;
- la estructura de cuerpo permite formar $(y-x)^{-1}$ y dividir por $n > 0$;
- la incrustación racional traduce numerales, enteros, fracciones e inversos entre $\mathbb{Q}$ y F.

No se ha supuesto densidad por analogía geométrica: se la ha deducido estructuralmente. *Referencia visual.* Véase la figura C00-F08 del texto principal, **De completitud a rejilla racional en F**, como síntesis posterior de este argumento.

Ejercicio 41. Convertir una posición abstracta en una cortadura racional

Para $x \in F$, define $A_x = \{q \in \mathbb{Q} : \iota_F(q) < x\}$.

1. Escribe los tipos correctos de x, q, $\iota_F(q)$ y A_x. Explica por qué A_x es un subconjunto de $\mathbb{Q}$ y no un subconjunto de F.
2. Demuestra que A_x es una cortadura de Dedekind verificando las cuatro condiciones: no vaciedad, propiedad de ser subconjunto propio, clausura hacia abajo y ausencia de máximo.
3. En cada una de las cuatro verificaciones, identifica si interviene la densidad racional demostrada en el ejercicio 40 o sólo la preservación del orden por ι_F.
4. Como variación, toma $c \in \mathbb{Q}$ y $x = \iota_F(c)$. Demuestra que

$$\boxed{A_{\iota_F(c)} = c^*}.$$

Explica qué muestra esta identidad acerca de la compatibilidad entre la traza racional de un modelo abstracto y las cortaduras racionales construidas antes.

> **Pista conceptual.** Para probar que A_x es no vacío y propio, busca racionales entre $x - 1_F$ y x, y entre x y $x + 1_F$.

Solución. Sea $x \in F$ y definamos $A_x = \{q \in \mathbb{Q} : \iota_F(q) < x\}$. Los tipos son

$$x \in F, \qquad q \in \mathbb{Q}, \qquad \iota_F(q) \in F, \qquad A_x \subseteq \mathbb{Q}.$$

La desigualdad que define A_x ocurre en F, entre $\iota_F(q)$ y x; pero los objetos registrados son los racionales q. Por eso A_x vive en $\mathbb{Q}$, no en F.

No vaciedad. Como

$x - 1_F < x$, la densidad racional proporciona $q_- \in \mathbb{Q}$ tal que $x - 1_F < \iota_F(q_-) < x$. Entonces $q_- \in A_x$.

Subconjunto propio. Como

$x < x + 1_F$, la densidad racional proporciona $q_+ \in \mathbb{Q}$ con $x < \iota_F(q_+) < x + 1_F$. Por tanto $q_+ \notin A_x$ y $A_x \neq \mathbb{Q}$.

Clausura hacia abajo. Si $q \in A_x$ y $p < q$, entonces

$\iota_F(p) < \iota_F(q) < x$, por preservación estricta del orden. Luego $p \in A_x$. Aquí no se usa densidad. **Ausencia de máximo.** Si $q \in A_x$, entonces $\iota_F(q) < x$. Por densidad racional existe $r \in \mathbb{Q}$ con $\iota_F(q) < \iota_F(r) < x$. Como ι_F refleja el orden, $q < r$, y además $r \in A_x$. Por tanto A_x no tiene máximo. Así,

$$\boxed{A_x \in \mathcal{D}}.$$

La densidad se usa en no vaciedad, propiedad de ser subconjunto propio y ausencia de máximo; la clausura hacia abajo usa sólo preservación del orden. Tomemos ahora $c \in \mathbb{Q}$ y $x = \iota_F(c)$. Entonces

$$\begin{aligned} q \in A_{\iota_F(c)} &\iff \iota_F(q) < \iota_F(c) \\ &\iff q < c. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\boxed{A_{\iota_F(c)} = \{q \in \mathbb{Q} : q < c\} = c^*}.$$

La traza racional de un racional abstractamente incrustado reproduce exactamente la cortadura racional canónica. La compatibilidad aparece sin identificar a F con el modelo concreto de Dedekind. *Referencia visual.* Véase la figura C00-F09 del texto principal, **Traza racional y reconstrucción**, como síntesis posterior de este argumento.

Ejercicio 42. Reconstruir un elemento desde su traza y recuperar el orden

Sea F un cuerpo ordenado completo y, para cada $x \in F$, usa la cortadura $A_x = \{q \in \mathbb{Q} : \iota_F(q) < x\}$.

1. Demuestra que

$\iota_F(A_x) = \{\iota_F(q) : q \in A_x\}$ es no vacío y está acotado superiormente por x. 2. Usa completitud para definir $s = \sup_F \iota_F(A_x)$ y demuestra que

$$\boxed{x = \sup_F \iota_F(A_x)}.$$

En el paso decisivo, si supones $s < x$, debes producir mediante densidad racional un elemento de $\iota_F(A_x)$ estrictamente mayor que s. 3. Deduce que $A_x = A_y \Longrightarrow x = y$.

4. Demuestra la equivalencia

$$\boxed{x \leq y \quad \iff \quad A_x \subseteq A_y}$$

y deduce también

$$\boxed{x < y \quad \iff \quad A_x \subsetneq A_y}.$$

5. Explica por qué estos resultados convierten a $\mathbb{Q}$ en un lenguaje común para registrar posiciones dentro de cualquier cuerpo ordenado completo, pero **no** construyas todavía una aplicación entre dos modelos distintos.

   Pista conceptual. La traza determina a x porque cualquier hueco entre su supremo y x contendría una imagen racional que la propia traza habría tenido que registrar.

Solución. Sea $B_x = \iota_F(A_x) = \{\iota_F(q) : q \in A_x\} \subseteq F$. Como A_x es una cortadura, B_x es no vacío. Además, si $q \in A_x$, entonces $\iota_F(q) < x$, de modo que x es una cota superior de B_x. Aquí se gasta nuevamente la completitud de F: existe $s = \sup_F B_x$. Como x es cota superior, $s \leq x$. Supongamos $s < x$. Por densidad racional existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que

$s < \iota_F(q) < x$. La segunda desigualdad implica $q \in A_x$, de modo que $\iota_F(q) \in B_x$. Pero la primera afirma que un elemento de B_x es mayor que su cota superior s, contradicción. Por tanto $s < x$ es imposible y

$$\boxed{x = \sup_F \iota_F(A_x)}.$$

Si $A_x = A_y$, entonces sus imágenes racionales coinciden y la reconstrucción da $x = \sup_F \iota_F(A_x) = \sup_F \iota_F(A_y) = y$. Así $x \mapsto A_x$ es inyectiva. Si $x \leq y$ y $q \in A_x$, entonces $\iota_F(q) < x \leq y$, y por tanto $q \in A_y$. Luego $x \leq y \Longrightarrow A_x \subseteq A_y$.

Recíprocamente, si $A_x \subseteq A_y$, entonces $\iota_F(A_x) \subseteq \iota_F(A_y)$. Como $y = \sup_F \iota_F(A_y)$, y es una cota superior de $\iota_F(A_x)$. Pero $x = \sup_F \iota_F(A_x)$, así que $x \leq y$. Por tanto

$$\boxed{x \leq y \iff A_x \subseteq A_y}.$$

Si $x < y$, la densidad racional produce q con $x < \iota_F(q) < y$. Entonces $q \in A_y \setminus A_x$, de modo que $A_x \subsetneq A_y$.

Recíprocamente, si $A_x \subsetneq A_y$, la equivalencia no estricta da $x \leq y$, y no puede ocurrir $x = y$ porque entonces las trazas serían iguales. Por tanto

$$\boxed{x < y \iff A_x \subsetneq A_y}.$$

Cada posición $x \in F$ queda así codificada por un subconjunto $A_x \subseteq \mathbb{Q}$, y tanto el elemento como su orden se recuperan desde esa información racional. Ésta es la razón por la que $\mathbb{Q}$ puede servir como lenguaje común entre modelos completos cuyos elementos sean literalmente distintos. El límite de §0.9 debe permanecer visible: todavía no hemos definido ninguna aplicación $F \longrightarrow G$ entre dos modelos completos. Sólo hemos construido el código racional que permitirá ese transporte en §0.10.

0.10. Únicos hasta isomorfismo

Sean F, G cuerpos ordenados completos, con sus incrustaciones racionales canónicas. Dado $x \in F$, la traza A_x^F es no vacía y propia. Su imagen en G es no vacía; además, si $u \in \mathbb{Q} \setminus A_x^F$, todo $q \in A_x^F$ satisface $q < u$, de modo que $\iota_G(u)$ domina esa imagen. Podemos usar la completitud de G para definir $\phi : F \longrightarrow G, \qquad \phi(x) = \sup_G \iota_G(A_x^F)$. El exterior u acredita la acotación; el valor definido es el supremo de la imagen y queda determinado de manera única, cualquiera que haya sido el exterior utilizado.

Proposición. Para cada $x \in F$, se cumple $A_{\phi(x)}^G = A_x^F$.

Demostración. Si $q \in A_x^F$, la ausencia de máximo proporciona $r \in A_x^F$ con $q < r$. Como $\iota_G(r) \leq \phi(x)$, $\iota_G(q) < \iota_G(r) \leq \phi(x)$, y $q \in A_{\phi(x)}^G$. Elegir r por encima del racional inicial aprovecha la ausencia de máximo para obtener la desigualdad estricta que exige una traza; la condición de cota superior por sí sola sería insuficiente.

Si $q \in A^G_{\phi(x)}$ pero $q \notin A^F_x$, todos los miembros de A^F_x son menores que q. Entonces $\iota_G(q)$ sería cota superior de $\iota_G(A^F_x)$, obligando a $\phi(x) \le \iota_G(q)$, contra la pertenencia de q a la traza de $\phi(x)$. Esto prueba la inclusión inversa. □

Las equivalencias de orden de §0.9 y esta identidad dan

$$x \le y \iff \phi(x) \le \phi(y), \qquad x < y \iff \phi(x) < \phi(y).$$

En particular, ϕ es inyectiva. Para probar la sobreyectividad, construyamos simétricamente $\psi : G \longrightarrow F, \qquad \psi(y) = \sup_F \iota_F(A^G_y)$. El mismo argumento verifica su buena definición y prueba $A^F_{\psi(y)} = A^G_y$. Por tanto $A^F_{\psi(\phi(x))} = A^G_{\phi(x)} = A^F_x$. La traza determina al elemento en F, así que $\psi(\phi(x)) = x$. Intercambiando los cuerpos obtenemos $\phi(\psi(y)) = y$. Cada y tiene la preimagen explícita $\psi(y)$ y ambas aplicaciones son inversas. Hemos construido un isomorfismo de órdenes; debemos verificar todavía las operaciones.

La identidad de trazas permite reconocer primero las posiciones racionales dentro de la correspondencia. Para $q \in \mathbb{Q}$, la conservación y reflexión del orden racional dan $A^F_{\iota_F(q)} = q^* = A^G_{\iota_G(q)}$. Como ϕ conserva trazas, la unicidad de reconstrucción en G implica $\phi(\iota_F(q)) = \iota_G(q)$. En particular, conserva cero y unidad.

Para transportar la suma necesitamos reconocer qué racionales quedan debajo de $x + y$ usando sólo los que quedan debajo de cada sumando. El margen de una desigualdad estricta permite elegir dos testigos racionales que aún dejan a q por debajo de su suma. Para cualesquiera $x, y \in F$ y $q \in \mathbb{Q}$, $q \in A^F_{x+y} \iff \exists r \in A^F_x \ \exists s \in A^F_y : \ q < r + s$. Probemos la implicación que requiere construir los testigos. Si $\iota_F(q) < x + y$, entonces $\iota_F(q) - y < x$. Por densidad, elijamos un racional r con $\iota_F(q) - y < \iota_F(r) < x$. Tenemos $r \in A^F_x$ y $\iota_F(q) - \iota_F(r) < y$. Una segunda aplicación de densidad proporciona s tal que $\iota_F(q) - \iota_F(r) < \iota_F(s) < y$. De aquí $s \in A^F_y$ y $q < r + s$, usando la reflexión del orden racional. En el sentido inverso, tales testigos satisfacen $\iota_F(q) < \iota_F(r) + \iota_F(s) < x + y$, y por ello $q \in A^F_{x+y}$.

En este criterio sólo intervienen subconjuntos de $\mathbb{Q}$ y su suma racional, datos que el transporte conserva. Al aplicarlo en G, las igualdades de trazas dan $A^G_{\phi(x+y)} = A^F_{x+y} = A^G_{\phi(x)+\phi(y)}$. La reconstrucción en G obliga a $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$. Como $\phi(0_F) = 0_G$, aplicar esta identidad a $x + (-x) = 0_F$ y usar unicidad del inverso aditivo prueba también $\phi(-x) = -\phi(x)$.

Para el producto trabajemos primero con $x, y \ge 0_F$. Su traza satisface

$$q \in A^F_{xy} \iff q < 0 \text{ o } \exists r, s \in \mathbb{Q} : \ 0 < r, \ 0 < s, \ r \in A^F_x, \ s \in A^F_y, \ q < rs.$$

Si $q < 0$, su imagen está debajo de $0_F \le xy$. Si hay testigos positivos r, s como los indicados, entonces $0_F < \iota_F(r) < x$ y $0_F < \iota_F(s) < y$; multiplicando por cantidades positivas obtenemos $\iota_F(rs) < xy$, y $q < rs$ implica $\iota_F(q) < xy$.

Recíprocamente, supongamos $\iota_F(q) < xy$ y $q \ge 0$. Esto obliga a $x, y > 0_F$. Podemos dividir por y y elegir, mediante densidad, $\iota_F(q)y^{-1} < \iota_F(r) < x$. El extremo izquierdo es no negativo, por lo que $r > 0$ y $r \in A^F_x$. La primera desigualdad permite otra elección racional: $\iota_F(q)\iota_F(r)^{-1} < \iota_F(s) < y$. Entonces $s > 0$, $s \in A^F_y$ y $q < rs$. Esto demuestra el criterio. Si uno de x, y es cero, la segunda alternativa no admite los dos testigos positivos y queda exactamente la traza 0^*, como debe ocurrir.

Dado que ϕ preserva cero y orden, transporta elementos no negativos a elementos no negativos. El criterio del producto y la igualdad de trazas, aplicados en ambos cuerpos, dan $A^G_{\phi(xy)} = A^G_{\phi(x)\phi(y)}$. Por tanto $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ cuando $x, y \ge 0_F$.

Para $x < 0_F \le y$, usamos $xy = -((-x)y)$, la conservación del opuesto y el caso no negativo: $\phi(xy) = -\phi((-x)y) = -(\phi(-x)\phi(y)) = \phi(x)\phi(y)$. Para $x \ge 0_F > y$, intercambiamos los factores y utilizamos la conmutatividad del producto en ambos cuerpos. Si ambos son negativos,

$$\phi(xy) = \phi((-x)(-y)) = \phi(-x)\phi(-y) = (-\phi(x))(-\phi(y)) = \phi(x)\phi(y).$$

Así se conserva el producto para todos los signos. Para $x \neq 0_F$, la inyectividad y la conservación del cero garantizan $\phi(x) \neq 0_G$; al aplicar la multiplicatividad a $xx^{-1} = 1_F$ y usar unicidad del inverso obtenemos $\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1}$.



Figura 0.11. La misma traza racional obliga a que ϕ fije $\mathbb{Q}$ y preserve suma y producto; el producto se demuestra primero en no negativos y luego se cierran los tres casos de signo.

Hemos probado que ϕ es un isomorfismo de cuerpos ordenados. Su construcción parece determinada por los racionales; para demostrar que ningún otro isomorfismo es posible, sea $T : F \to G$ un isomorfismo de cuerpos ordenados cualquiera. La composición $T \circ \iota_F$ es una incrustación racional en G, y la unicidad de esa incrustación impone $T \circ \iota_F = \iota_G$. Para todo $x \in F$ y todo $q \in \mathbb{Q}$,

$$\begin{aligned} q \in A_x^F &\iff \iota_F(q) < x \\ &\iff T(\iota_F(q)) < T(x) \\ &\iff \iota_G(q) < T(x) \\ &\iff q \in A_{T(x)}^G. \end{aligned}$$

Por tanto $A_{T(x)}^G = A_x^F = A_{\phi(x)}^G$, y la reconstrucción en G da $T(x) = \phi(x)$. Como vale para cada x, tenemos $T = \phi$.

Teorema de existencia y unicidad. Existen cuerpos ordenados completos. Entre cualesquiera dos de ellos hay un único isomorfismo de cuerpos ordenados. La existencia procede de las cortaduras y la propiedad del supremo demostrada en §0.8. La unicidad identifica estructuras aunque sus elementos tengan representaciones conjuntistas diferentes. Al tomar $F = G$, la identidad ya es un isomorfismo; por unicidad, todo automorfismo de cuerpo ordenado de F es la identidad.

La fórmula $\phi(x) = \sup_G \iota_G(A_x^F)$ determina un valor único. Calcularlo a partir de una representación concreta exige información adicional sobre cómo se presentan elementos, trazas y supremos; el teorema estructural no suministra automáticamente esos procedimientos. Las cortaduras nos permitieron construir un modelo y comprobar su existencia. La comparación con cualquier otro modelo nos permite trabajar con la

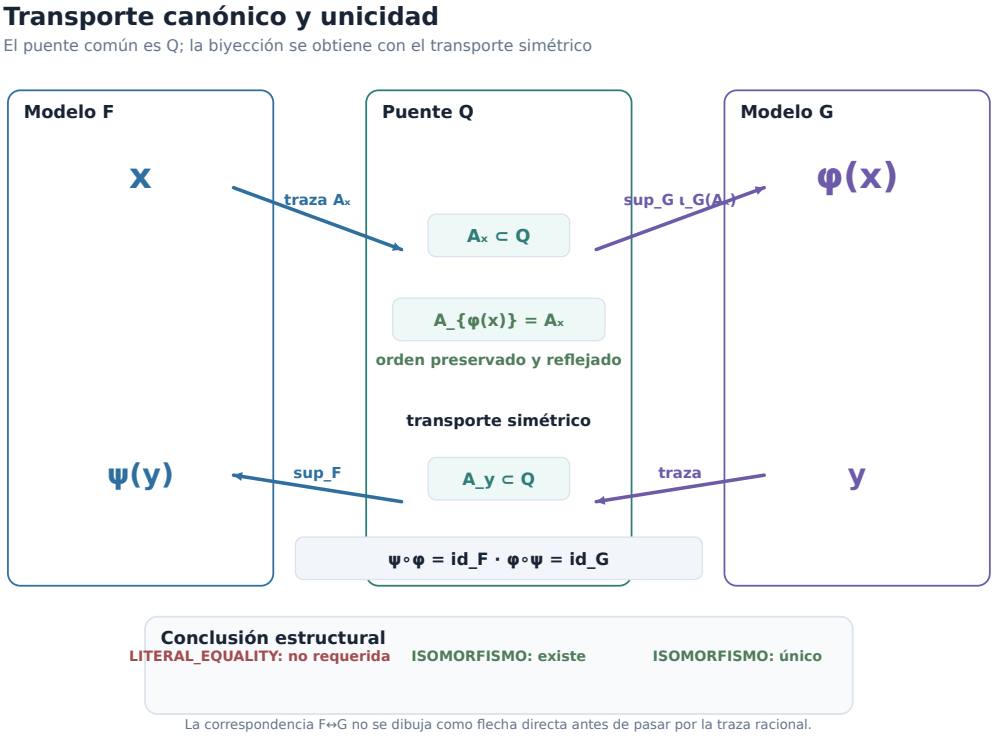


Figura 0.12. El transporte F→G pasa por la traza racional común; el transporte simétrico produce la inversa y fuerza la unicidad del isomorfismo.

estructura común y utilizar el símbolo $\mathbb{R}$ sin tener que fijar para siempre una representación particular de sus elementos.

Lectura complementaria

La construcción de los reales ofrece otra ruta de demostración de la unicidad mediante operaciones con conjuntos y supremos, y desarrolla operaciones sobre cortaduras mediante recintos racionales. Puede leerse después de este capítulo para comparar estrategias y estudiar sus comprobaciones adicionales. La guía de lectura explica la relación entre ambas exposiciones y da acceso al libro completo, con sus 78 ejercicios resueltos.

Lectura complementaria

La construcción de los reales ofrece otra ruta de demostración de la unicidad mediante operaciones con conjuntos y supremos, y desarrolla operaciones sobre cortaduras mediante recintos racionales. Puede leerse después de este capítulo para comparar estrategias y estudiar sus comprobaciones adicionales. La guía de lectura explica la relación entre ambas exposiciones y da acceso al libro completo, con sus 78 ejercicios resueltos.

Lectura complementaria

La construcción de los reales ofrece otra ruta de demostración de la unicidad mediante operaciones con conjuntos y supremos, y desarrolla operaciones sobre cortaduras mediante recintos racionales. Puede leerse después de este capítulo para comparar estrategias y estudiar sus comprobaciones adicionales. La guía de lectura explica la relación entre ambas exposiciones y da acceso al libro completo, con sus 78 ejercicios resueltos.

Ejercicios de la sección 0.10.

Ejercicio 43. Antes del transporte: demostrar que el supremo existe

Sean F y G cuerpos ordenados completos, con incrustaciones racionales canónicas $\iota_F : \mathbb{Q} \hookrightarrow F$, $\iota_G : \mathbb{Q} \hookrightarrow G$. Para $x \in F$, sea $A_x^F = \{q \in \mathbb{Q} : \iota_F(q) < x\}$. Queremos definir $\phi(x) = \sup_G \iota_G(A_x^F)$. No uses esa fórmula hasta haber verificado que el supremo está autorizado.

1. Escribe los tipos correctos de x, A_x^F, $\iota_G(A_x^F)$ y del eventual valor $\phi(x)$.
2. Demuestra que $\iota_G(A_x^F)$ es no vacío.
3. Como A_x^F es una cortadura, elige $u \in \mathbb{Q} \setminus A_x^F$ y demuestra que

$q < u \qquad (q \in A_x^F)$.

4. Deduce que $\iota_G(u)$ es una cota superior de $\iota_G(A_x^F)$.
5. Señala exactamente dónde se usa la completitud de G y, sólo entonces, define

$$\boxed{\phi : F \longrightarrow G, \qquad \phi(x) = \sup_G\{\iota_G(q) : q \in A_x^F\}.}$$

6. Explica por qué la definición no contiene una elección arbitraria de representante ni de cota superior.

Solución. Los universos deben mantenerse separados. Tenemos $x \in F$, $A_x^F \subseteq \mathbb{Q}$, mientras que $\iota_G(A_x^F) = \{\iota_G(q) : q \in A_x^F\} \subseteq G$. Si el supremo existe, entonces $\phi(x) \in G$. La no vaciedad es inmediata porque §0.9 ya demostró que A_x^F es una cortadura. Elijamos $r \in A_x^F$. Entonces $\iota_G(r) \in \iota_G(A_x^F)$, así que la imagen no es vacía.

Para la acotación superior usamos que la cortadura es propia. Elijamos $u \in \mathbb{Q} \setminus A_x^F$. Afirmamos que todo $q \in A_x^F$ satisface $q < u$. Si $q = u$, tendríamos $u \in A_x^F$. Si $u < q$, como $q \in A_x^F$ y la cortadura es cerrada hacia abajo, también tendríamos $u \in A_x^F$. Ambas posibilidades contradicen la elección de u. Por tricotomía,

$q < u$. Como ι_G preserva el orden, $\iota_G(q) < \iota_G(u) \qquad (q \in A_x^F)$. Por tanto $\iota_G(u)$ es una cota superior de $\iota_G(A_x^F)$. Hasta aquí no hemos usado completitud de G. Ahora sí: el conjunto es no vacío y está acotado superiormente, así que la propiedad del supremo de G garantiza la existencia de $\sup_G \iota_G(A_x^F)$. Sólo después de verificar esas hipótesis queda legítimamente definida

$$\boxed{\phi : F \longrightarrow G, \qquad \phi(x) = \sup_G\{\iota_G(q) : q \in A_x^F\}.}$$

No se elige una cota superior especial para definir el valor: una cota sólo certifica la hipótesis de acotación. Tampoco se elige entre varios supremos, porque el supremo de un subconjunto, cuando existe, es único. Así, $\phi(x)$ queda forzado por x y por las estructuras de F y G. *Referencia visual.* Véase la figura C00-F10 del texto principal, **Transporte canónico y unicidad**, como síntesis posterior de este argumento.

Ejercicio 44. El transporte conserva exactamente la traza racional

Mantén la definición de ϕ del ejercicio 43. Para distinguir universos escribe $A_x^F = \{q \in \mathbb{Q} : \iota_F(q) < x\}$, y, para $y \in G$, $A_y^G = \{q \in \mathbb{Q} : \iota_G(q) < y\}$.

1. Demuestra la identidad central

$$\boxed{A_{\phi(x)}^G = A_x^F}$$

por doble inclusión. En la inclusión $A_x^F \subseteq A_{\phi(x)}^G$ debes usar que A_x^F no tiene máximo. 2. Usa la caracterización del orden por inclusión de trazas obtenida en §0.9 para demostrar

$$\boxed{x \le y \iff \phi(x) \le \phi(y)}$$

y

$$\boxed{x < y \iff \phi(x) < \phi(y)}.$$

3. Deduce que ϕ es inyectiva.
4. Explica por qué el argumento demuestra más que monotonicidad: la posición racional de cada elemento queda transportada sin alteración.

   Pista conceptual. Para la inclusión inversa, si $q < \phi(x)$ pero $q \notin A_x^F$, muestra que $\iota_G(q)$ sería una cota superior de $\iota_G(A_x^F)$ menor que su supremo.

Solución. Escribamos $S_x = \iota_G(A_x^F), \qquad \phi(x) = \sup_G S_x$. Primero probemos $A_x^F \subseteq A_{\phi(x)}^G$. Sea $q \in A_x^F$. Como A_x^F no tiene máximo, existe $r \in A_x^F$ con $q < r$. Entonces $\iota_G(q) < \iota_G(r)$. Además $\iota_G(r) \in S_x$, así que $\iota_G(r) \le \sup_G S_x = \phi(x)$. Por tanto $\iota_G(q) < \phi(x)$, y $q \in A_{\phi(x)}^G$.

Para la inclusión inversa, sea $q \in A_{\phi(x)}^G$. Entonces $\iota_G(q) < \phi(x)$. Supongamos, buscando contradicción, que $q \notin A_x^F$. Como A_x^F es una cortadura, para todo $r \in A_x^F$ debe cumplirse $r < q$: no puede ser $r = q$, y tampoco puede ocurrir $q < r$, pues la clausura hacia abajo forzaría $q \in A_x^F$. Luego $\iota_G(r) < \iota_G(q) \qquad (r \in A_x^F)$.

Así $\iota_G(q)$ sería una cota superior de S_x. La minimalidad del supremo daría $\phi(x) = \sup_G S_x \le \iota_G(q)$, contradiciendo $\iota_G(q) < \phi(x)$. Por tanto $q \in A_x^F$. Concluimos

$$\boxed{A_{\phi(x)}^G = A_x^F}.$$

Ahora sean $x, y \in F$. Por §0.9, $x \le y \iff A_x^F \subseteq A_y^F$. Usando la identidad de trazas, $A_x^F \subseteq A_y^F \iff A_{\phi(x)}^G \subseteq A_{\phi(y)}^G \iff \phi(x) \le \phi(y)$. Así,

$$\boxed{x \le y \iff \phi(x) \le \phi(y)}.$$

La misma cadena con inclusiones estrictas produce

$$\boxed{x < y \iff \phi(x) < \phi(y)}.$$

En particular, si $\phi(x) = \phi(y)$, sus trazas son iguales; por la identidad anterior, $A_x^F = A_y^F$. La reconstrucción de §0.9 fuerza $x = y$. Luego ϕ es inyectiva. El resultado es más fuerte que decir que ϕ es creciente: para cada x, el subconjunto de racionales situado debajo de x es exactamente el mismo subconjunto que queda debajo de $\phi(x)$ en G. Se transporta la posición racional completa.

Referencia visual. Véase la figura C00-F10 del texto principal, **Transporte canónico y unicidad**, como síntesis posterior de este argumento.

Ejercicio 45. Construir la inversa sin cardinalidad ni elección de preimágenes

Intercambia ahora los papeles de F y G y define, cuando esté justificado, $\psi : G \longrightarrow F, \qquad \psi(y) = \sup_F\{\iota_F(q) : q \in A_y^G\}$.

1. Traza la buena definición de ψ y señala el gasto de completitud de F.
2. Demuestra

$A_{\psi(y)}^F = A_y^G$.

3. Para $x \in F$, calcula la traza de $\psi(\phi(x))$ y usa la reconstrucción desde trazas para demostrar

$$\boxed{\psi(\phi(x)) = x}.$$

4. Demuestra simétricamente

$$\boxed{\phi(\psi(y)) = y}$$

para todo $y \in G$. 5. Concluye que $\psi = \phi^{-1}$ y que ϕ es biyectiva. 6. Resume en un mapa de dependencias por qué la sobreyectividad obtenida aquí no usa cardinalidad de F y G, ni una elección arbitraria de preimágenes.

Pista conceptual. No busques un preimagen de y por tanteo: reconstruye en F el elemento que tenga exactamente la misma traza racional que y.

Solución. Para $y \in G$, la traza $A_y^G \subseteq \mathbb{Q}$ es una cortadura. Por el mismo argumento del ejercicio 43, $\iota_F(A_y^G)$ es no vacío y está acotado superiormente en F. Aquí se gasta la completitud de F, que permite definir

$$\boxed{\psi(y) = \sup_F\{\iota_F(q) : q \in A_y^G\}.}$$

Repitiendo literalmente el argumento de recuperación de traza del ejercicio 44 con F y G intercambiados, obtenemos

$$\boxed{A^F_{\psi(y)} = A^G_y}.$$

Sea ahora $x \in F$. Entonces

$$\begin{aligned} A^F_{\psi(\phi(x))} &= A^G_{\phi(x)} \\ &= A^F_x. \end{aligned}$$

Dentro de F, la traza racional determina al elemento. Por tanto

$$\boxed{\psi(\phi(x)) = x}.$$

Simétricamente, para $y \in G$,

$$\begin{aligned} A^G_{\phi(\psi(y))} &= A^F_{\psi(y)} \\ &= A^G_y, \end{aligned}$$

y la reconstrucción en G da

$$\boxed{\phi(\psi(y)) = y}.$$

Así,

$$\boxed{\psi = \phi^{-1}}.$$

En particular, ϕ es biyectiva. La dependencia completa es:

$$\begin{array}{ccc} \text{traza en } F & & \text{traza en } G \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{completitud de } G \Rightarrow \phi & & \text{completitud de } F \Rightarrow \psi \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{misma traza en } G & & \text{misma traza en } F. \end{array}$$

La composición recupera las trazas originales y, por tanto, los elementos originales. No se ha contado la cardinalidad de ningún modelo ni se ha escogido un preimagen de cada y entre posibles candidatos: $\psi(y)$ está determinado canónicamente por la traza de y. *Referencia visual.* Véase la figura C00-F10 del texto principal, **Transporte canónico y unicidad**, como síntesis posterior de este argumento.

Ejercicio 46. Tres atajos que no producen un isomorfismo de cuerpos ordenados

Refuta cada uno de los siguientes atajos.

1. **«Biyectiva y ordenada basta».** En un cuerpo ordenado completo F, considera

$\tau : F \longrightarrow F, \qquad \tau(x) = x + 1_F$. Demuestra que τ es biyectiva y preserva y refleja el orden, pero no es un homomorfismo de cuerpos. 2. **«Misma cardinalidad da sobreyectividad».** Explica por qué, aun si dos conjuntos tienen la misma cardinalidad, una aplicación inyectiva concreta entre ellos no tiene por qué ser sobreyectiva. Exhibe un ejemplo elemental explícito. 3. **«Multiplicatividad para no negativos basta».** Explica por qué demostrar

$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y) \qquad (x, y \geq 0)$ no cubre los casos con uno o dos factores negativos. 4. Para cada atajo, indica cuál es la obligación correcta que debe reemplazarlo dentro de la prueba de unicidad de §0.10.

> **Pista conceptual.** Un isomorfismo de cuerpos ordenados debe conservar simultáneamente estructura algebraica, orden y elementos distinguidos; ninguna de esas capas se recupera automáticamente de las otras.

Solución. Consideremos primero $\tau(x) = x + 1_F$. Su inversa es $\tau^{-1}(y) = y - 1_F$, así que τ es biyectiva. Además, $x < y \iff x + 1_F < y + 1_F$, por compatibilidad del orden con traslaciones. Por tanto preserva y refleja el orden. Sin embargo, $\tau(0_F) = 1_F \neq 0_F$, y también $\tau(x + y) = x + y + 1_F$, mientras que $\tau(x) + \tau(y) = x + y + 2_F$. Por tanto no preserva cero ni suma. Mucho menos es un isomorfismo de cuerpos. La lección es

$$\boxed{\text{isomorfismo de órdenes} \not\Rightarrow \text{isomorfismo de cuerpos ordenados.}}$$

El segundo atajo confunde una propiedad de los conjuntos con una propiedad de una aplicación concreta. Por ejemplo, $\mathbb{N}$ tiene la misma cardinalidad que sí mismo, pero $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \qquad f(n) = n + 1$ es inyectiva y no es sobreyectiva, porque 0 no pertenece a su imagen. Por tanto, aun con igual cardinalidad, la sobreyectividad de una aplicación concreta necesita una prueba propia.

En §0.10 esa obligación se satisface construyendo explícitamente $\psi : G \to F$ y demostrando que es inversa de ϕ. El tercer atajo deja casos lógicos abiertos. La afirmación $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y) \qquad (x, y \geq 0)$ sólo controla el cono no negativo. No contiene los casos

$$x < 0 \leq y, \qquad x \geq 0 > y, \qquad x < 0,\ y < 0.$$

Para cerrarlos se necesita primero la preservación del opuesto y luego la regla de signos. Por ejemplo, si $x < 0 \leq y$, $xy = -((-x)y)$, y el caso se reduce al producto de dos elementos no negativos sólo después de saber que $\phi(-x) = -\phi(x)$. Las obligaciones correctas son, por tanto:

- para la biyectividad: construir y verificar una inversa;
- para la estructura de cuerpo: demostrar preservación de 0, 1, suma y producto;
- para la multiplicación: cerrar explícitamente todos los signos;
- para el orden: preservarlo y reflejarlo, sin confundir esa capa con la algebraica.

Ningún atajo sustituye esas verificaciones.

Ejercicio 47. Recuperar toda la aritmética desde las trazas

Trabaja con el transporte canónico biyectivo $\phi : F \to G$ de los ejercicios 43–45.

1. Demuestra primero que, para todo $q \in \mathbb{Q}$,

$$\boxed{\phi(\iota_F(q)) = \iota_G(q)}.$$

Deduce $\phi(0_F) = 0_G, \qquad \phi(1_F) = 1_G$.

2. Demuestra la caracterización racional de la suma:

$$\boxed{q \in A^F_{x+y} \iff \exists r \in A^F_x \; \exists s \in A^F_y : q < r + s.}$$

Usa densidad racional en los dos pasos necesarios de la implicación directa. 3. Como ϕ conserva trazas, deduce de esa caracterización

$$\boxed{\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)}$$

y luego $\phi(-x) = -\phi(x)$.

4. Para $x, y \geq 0$, demuestra la caracterización

$$\boxed{q \in A^F_{xy} \iff q < 0 \text{ o } \exists r, s > 0 : (r \in A^F_x,\ s \in A^F_y,\ q < rs).}$$

5. Deduce

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y) \qquad (x, y \geq 0).$$

6. Cierra **todos** los casos de signo y demuestra

$$\boxed{\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)}$$

para $x, y \in F$ arbitrarios. 7. Deduce finalmente la preservación de inversos para $x \neq 0_F$.

> **Pista conceptual.** No calcules directamente los supremos de A_{x+y} o A_{xy}. Caracteriza primero esas trazas por racionales; después usa que igualdad de trazas implica igualdad de elementos.

Solución. Primero fijamos la copia racional. Sea $q \in \mathbb{Q}$. Por §0.9, $A^F_{\iota_F(q)} = q^*$, $A^G_{\iota_G(q)} = q^*$. Como ϕ conserva trazas, $A^G_{\phi(\iota_F(q))} = A^F_{\iota_F(q)} = q^* = A^G_{\iota_G(q)}$. La traza determina al elemento de G, así que

$$\boxed{\phi(\iota_F(q)) = \iota_G(q)}.$$

En particular,

$$\boxed{\phi(0_F) = 0_G, \qquad \phi(1_F) = 1_G.}$$

Ahora caractericemos la suma. Supongamos $q \in A^F_{x+y}$. Entonces $\iota_F(q) < x + y$, y al trasladar $-y$, $\iota_F(q) - y < x$. Por densidad racional existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $\iota_F(q) - y < \iota_F(r) < x$. La segunda desigualdad dice $r \in A^F_x$. La primera equivale a $\iota_F(q) - \iota_F(r) < y$. Aplicando de nuevo densidad, elegimos $s \in \mathbb{Q}$ con

$\iota_F(q) - \iota_F(r) < \iota_F(s) < y$. Entonces $s \in A^F_y$ y $\iota_F(q) < \iota_F(r + s)$. La reflexión del orden da $q < r + s$.

Recíprocamente, si $r \in A^F_x$, $s \in A^F_y$ y $q < r + s$, entonces $\iota_F(r) < x$, $\iota_F(s) < y$. Sumando, $\iota_F(r + s) < x + y$. Además $\iota_F(q) < \iota_F(r + s)$, de modo que $\iota_F(q) < x + y$ y $q \in A^F_{x+y}$. Por tanto

$$\boxed{q \in A^F_{x+y} \iff \exists r \in A^F_x \; \exists s \in A^F_y : q < r + s.}$$

El lado derecho depende sólo de A^F_x y A^F_y. Como $A^G_{\phi(x)} = A^F_x$, $A^G_{\phi(y)} = A^F_y$, la misma caracterización en G da $A^G_{\phi(x+y)} = A^F_{x+y} = A^G_{\phi(x)+\phi(y)}$. La traza determina al elemento, luego

$$\boxed{\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)}.$$

Aplicando esto a $x + (-x) = 0_F$, $\phi(x) + \phi(-x) = 0_G$, y por unicidad del inverso aditivo,

$$\boxed{\phi(-x) = -\phi(x)}.$$

Pasemos al producto. Supongamos $x, y \geq 0_F$. Si $q \in A_{xy}^F$ y $q < 0$, estamos en la primera alternativa. Supongamos $q \geq 0$. Entonces $0 \leq \iota_F(q) < xy$, por lo que $x > 0$ y $y > 0$. Multiplicando por $y^{-1} > 0$, $\iota_F(q)y^{-1} < x$. Por densidad elegimos $r \in \mathbb{Q}$ con $\iota_F(q)y^{-1} < \iota_F(r) < x$. Como el extremo izquierdo es no negativo, $r > 0$; además $r \in A_x^F$. La primera desigualdad da

$\iota_F(q) < \iota_F(r)y$. Multiplicando por $\iota_F(r)^{-1} > 0$, $\iota_F(q)\iota_F(r)^{-1} < y$. Por densidad elegimos $s \in \mathbb{Q}$ con $\iota_F(q)\iota_F(r)^{-1} < \iota_F(s) < y$. Entonces $s > 0$, $s \in A_y^F$ y $\iota_F(q) < \iota_F(rs)$, de donde $q < rs$.

Recíprocamente, si $q < 0$, entonces $\iota_F(q) < 0_F \leq xy$, y $q \in A_{xy}^F$. Si existen $r, s > 0$ con $r \in A_x^F$, $s \in A_y^F$ y $q < rs$, entonces $0 < \iota_F(r) < x$, $\quad 0 < \iota_F(s) < y$. La compatibilidad del producto con el orden da $\iota_F(r)\iota_F(s) < xy$, y como $\iota_F(q) < \iota_F(rs) = \iota_F(r)\iota_F(s)$, obtenemos $q \in A_{xy}^F$.

Así,

$$\boxed{q \in A_{xy}^F \iff q < 0 \text{ o } \exists r, s > 0 : (r \in A_x^F,\ s \in A_y^F,\ q < rs).}$$

Este criterio depende sólo de las trazas. Por tanto, para $x, y \geq 0$, $A_{\phi(xy)}^G = A_{\phi(x)\phi(y)}^G$, y

$$\boxed{\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)}.$$

Quedan los signos. Si $x < 0 \leq y$, entonces $xy = -((-x)y)$. Como $-x > 0$,

$$\begin{aligned}\phi(xy) &= -\phi((-x)y)\\ &= -(\phi(-x)\phi(y))\\ &= -((-\phi(x))\phi(y))\\ &= \phi(x)\phi(y).\end{aligned}$$

El caso $x \geq 0 > y$ es simétrico. Si $x < 0$ y $y < 0$, entonces $xy = (-x)(-y)$, y

$$\begin{aligned}\phi(xy) &= \phi((-x)(-y))\\ &= \phi(-x)\phi(-y)\\ &= (-\phi(x))(-\phi(y))\\ &= \phi(x)\phi(y).\end{aligned}$$

Por tanto

$$\boxed{\phi(xy) = \phi(x)\phi(y) \qquad (x, y \in F).}$$

Finalmente, si $x \neq 0_F$, entonces $xx^{-1} = 1_F$. Aplicando ϕ, $\phi(x)\phi(x^{-1}) = 1_G$. Como ϕ es inyectiva y preserva cero, $\phi(x) \neq 0_G$. Por unicidad del inverso,

$$\boxed{\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1}}.$$

Toda la aritmética queda así transportada desde la información racional, sin calcular directamente los supremos que definen las imágenes. *Referencia visual.* Véase la figura C00-F12 del texto principal, **La aritmética viaja con la traza**, como síntesis posterior de este argumento.

Ejercicio 48. Cerrar la unicidad estructural de los números reales

Sean F y G cuerpos ordenados completos y sea $\phi : F \longrightarrow G$ el transporte canónico construido en esta sección.

1. Reúne los resultados anteriores para demostrar que ϕ es un isomorfismo de cuerpos ordenados.
2. Sea ahora

$T : F \longrightarrow G$ un isomorfismo de cuerpos ordenados arbitrario. Demuestra que $T \circ \iota_F = \iota_G$.

3. Para $x \in F$, prueba que

$A^G_{T(x)} = A^F_x$.

4. Compara esa identidad con $A^G_{\phi(x)} = A^F_x$ y demuestra que

$$\boxed{T(x) = \phi(x)}$$

para todo $x \in F$. Concluye

$$\boxed{T = \phi}.$$

5. Formula el teorema final: entre cualesquiera dos cuerpos ordenados completos existe un **único** isomorfismo de cuerpos ordenados. Deduce que todo automorfismo de cuerpo ordenado de un cuerpo ordenado completo es la identidad.
6. Distingue con precisión:
   - igualdad literal $F = G$;
   - existencia de algún isomorfismo $F \cong G$;
   - existencia de un único isomorfismo de cuerpos ordenados.
7. Explica por qué «canónico por unicidad» no significa automáticamente «computable».
8. Cierra el arco del capítulo explicando cómo

$$\boxed{\text{EXISTENCIA + UNICIDAD HASTA ÚNICO ISOMORFISMO}}$$

justifica estructuralmente hablar de **los números reales** sin imponer una codificación conjuntista particular.

> **Pista conceptual.** Todo isomorfismo ordenado debe fijar la copia racional canónica; una vez fijados los racionales, las trazas racionales fuerzan punto por punto la imagen de cada elemento.

Solución. Por los ejercicios 43–47, $\phi : F \to G$ es biyectiva, preserva y refleja el orden, satisface $\phi(0_F) = 0_G$, $\phi(1_F) = 1_G$, preserva suma y producto, y por tanto es un isomorfismo de cuerpos ordenados:

$$\boxed{\phi : F \xrightarrow{\sim} G}.$$

Falta demostrar que es el único. Sea $T : F \longrightarrow G$ un isomorfismo de cuerpos ordenados cualquiera. La composición $T \circ \iota_F : \mathbb{Q} \longrightarrow G$ es una incrustación de cuerpos ordenados: preserva 0, 1, suma, producto y orden. Pero §0.9 demostró que la incrustación racional en un cuerpo ordenado es canónica y única. Por tanto

$$\boxed{T \circ \iota_F = \iota_G}.$$

Sea $x \in F$ y $q \in \mathbb{Q}$. Entonces

$$\begin{aligned} q \in A^F_x &\iff \iota_F(q) < x \\ &\iff T(\iota_F(q)) < T(x) \\ &\iff \iota_G(q) < T(x) \\ &\iff q \in A^G_{T(x)}. \end{aligned}$$

Así,

$$\boxed{A^G_{T(x)} = A^F_x}.$$

Por construcción del transporte canónico, $A^G_{\phi(x)} = A^F_x$. Luego $A^G_{T(x)} = A^G_{\phi(x)}$. La traza racional determina al elemento de G, de modo que $T(x) = \phi(x)$. Como x era arbitrario,

$$\boxed{T = \phi}.$$

Por tanto:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{si } F \text{ y } G \text{ son cuerpos ordenados completos,}\\ \text{existe un único isomorfismo de cuerpos ordenados } F \to G.\end{array}}$$

Tomando $F = G$, todo automorfismo de cuerpo ordenado de F debe coincidir con el transporte canónico de F a sí mismo. La identidad es uno de esos isomorfismos, luego por unicidad

$$\boxed{\mathrm{Aut}_{\text{ord-field}}(F) = \{\mathrm{id}_F\}}.$$

Ahora separamos las tres afirmaciones.

Igualdad literal.

$F = G$ significa que ambos son el mismo conjunto equipado con exactamente las mismas operaciones y relación. El capítulo no exige ni demuestra esto para dos realizaciones arbitrarias.

Existencia de isomorfismo.

$F \cong G$ significa que existe una biyección que conserva la estructura de cuerpo ordenado. Esto ya dice que las dos realizaciones tienen la misma estructura abstracta. **Único isomorfismo de cuerpos ordenados.** Aquí hemos demostrado algo más fuerte: la estructura obliga a una sola correspondencia posible, determinada por la copia racional y por las trazas. Por eso el transporte es **canónico por unicidad**: no depende de elegir coordenadas, representantes o una biyección conveniente. Sin embargo, canonicidad no es sinónimo de computabilidad. La definición

$\phi(x) = \sup_G \iota_G(A^F_x)$ determina matemáticamente un único elemento, pero no proporciona por sí sola un algoritmo efectivo para calcularlo a partir de cualquier codificación imaginable de F y G. El arco del capítulo queda entonces cerrado en dos etapas. Primero, las cortaduras de Dedekind construyeron un testigo concreto:

$$\boxed{\text{existe un cuerpo ordenado completo.}}$$

Después, el argumento abstracto con trazas racionales demuestra:

$$\boxed{\text{cualesquiera dos cuerpos ordenados completos son únicamente isomorfos.}}$$

En conjunto, La existencia del modelo de cortaduras y la unicidad del isomorfismo ordenado justifican conjuntamente la estructura que llamamos $\mathbb{R}$. Las cortaduras son una realización concreta. Lo que autoriza a hablar de **los números reales** sin imponer esa realización como ontología obligatoria es la estructura compartida: cuerpo ordenado completo, determinada hasta único isomorfismo. *Referencias visuales.* Véanse las figuras C00-F10 (**Transporte canónico y unicidad**) y C00-F12 (**La aritmética viaja con la traza**) del texto principal para sintetizar, respectivamente, las capas de este cierre.

Capítulo 1

La recta real como espacio ordenado y métrico

En la configuración $0 < 1 < 4$, el punto intermedio está a una unidad del extremo izquierdo y a tres del derecho. En $0 < 2 < 4$, las dos separaciones son iguales. El patrón de orden es el mismo, aunque las distancias difieren; si reflejamos cualquiera de las dos configuraciones respecto del origen, ocurre algo complementario: todas sus separaciones se conservan y la orientación se invierte. Estos ejemplos permiten distinguir dos preguntas que el dibujo habitual de la recta reúne con tanta facilidad que a menudo dejamos de advertir la diferencia: dónde está un punto respecto de otro y cuánto los separa.

La construcción del capítulo anterior nos proporciona un cuerpo ordenado completo. Sobre esa estructura definiremos una distancia mediante el valor absoluto y estudiaremos cómo se relaciona con el orden. Una condición de cercanía acabará describiendo un intervalo, y la igualdad en una estimación de distancias permitirá reconocer cuándo un punto está entre otros dos. Cada traducción tendrá una justificación propia; la familiaridad de la recta ayudará a encontrarla, pero las conclusiones descansarán en las propiedades demostradas.

1.1. La misma recta, varias estructuras

La afirmación $x < y$ compara posiciones en el orden real; una igualdad como $x + y = z$ relaciona los mismos números mediante una operación algebraica. Si preguntamos si la separación de x e y coincide con la de otros dos puntos u y v, estamos pidiendo información métrica. Un argumento puede necesitar las tres estructuras, pero la presencia de los mismos símbolos no permite sustituir una clase de información por otra.

Consideremos $x < y < z$. Sabemos cuál de los puntos aparece primero y que y queda entre los extremos. La desigualdad no fija las separaciones: podemos mover el punto intermedio sin abandonar ese patrón, como muestran las dos configuraciones de la apertura. Tampoco una separación determina una orientación. Al reflejar los tres puntos respecto del origen, obtenemos $-z < -y < -x$. Las restas que describen los desplazamientos cambian de signo, mientras que sus magnitudes permanecen iguales. Esta conservación puede comprobarse en ejemplos numéricos; cuando definamos la distancia, la expresaremos como una identidad válida para cualquier par.

La reflexión combina, por tanto, una operación algebraica con dos efectos diferentes sobre la configuración: invierte las desigualdades estrictas y conserva las separaciones. Permite reconocer el alcance de cada descripción sin exigir que las estructuras actúen aisladas. Una desigualdad que contiene una suma ya utiliza álgebra y orden; al interpretar su conjunto de soluciones como una región de cercanía añadiremos una lectura métrica. «Izquierda» y «derecha» son los nombres que damos al representar el orden en una recta orientada. Un dibujo puede mostrar de inmediato cómo cambia una configuración bajo reflexión, pero un resultado universal requiere comprobarlo para puntos arbitrarios. Esa será también la función de las figuras de este capítulo: hacer visibles relaciones que después podamos expresar y justificar con las operaciones y el orden de los reales.

Ejercicios de la sección 1.1.

Ejercicio 1. Lo que el orden no dice

Un estudiante afirma:

> Si $x < y < z$, entonces y está a la misma distancia de x que de z.

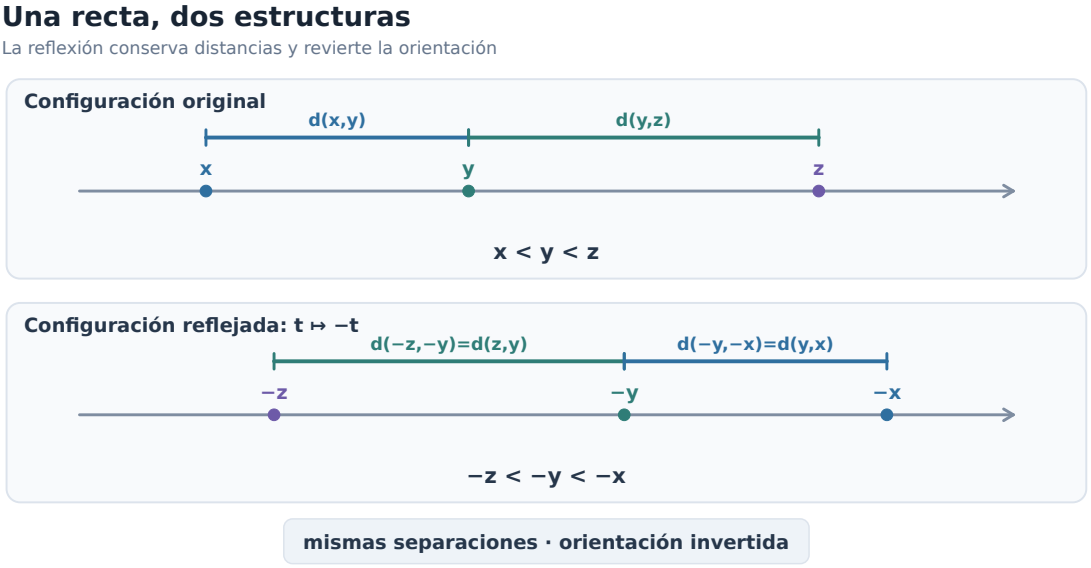


Figura 1.1. La reflexión conserva todas las separaciones pero invierte la orientación; orden y métrica interactúan sin contener exactamente la misma información.

Decide si la afirmación es correcta. Si es falsa, da dos ternas numéricas con el mismo patrón de orden $x < y < z$: una en la que las dos separaciones sean iguales y otra en la que no lo sean. Explica qué información proporciona realmente el orden.

Solución. La afirmación es falsa. Saber que $x < y < z$ nos informa de la posición relativa de los tres puntos: x está a la izquierda de y, y está a la izquierda de z y, por tanto, y queda entre los extremos. No nos dice cuánto separa a cada par. Por ejemplo, con

$$x = 0, \qquad y = 2, \qquad z = 4,$$

se cumple $0 < 2 < 4$ y las separaciones desde y a los extremos son ambas 2. En cambio, con

$$x = 0, \qquad y = 1, \qquad z = 4,$$

seguimos teniendo $0 < 1 < 4$, pero ahora y está a 1 unidad de x y a 3 unidades de z. El patrón de orden es idéntico en las dos ternas; las separaciones no. **El orden determina quién está antes, después o entre quiénes, pero no determina por sí solo las distancias.**

Ejercicio 2. Reflejar no destruye toda la información

Considera los tres puntos -2, 1 y 5 sobre la recta real y después su imagen al reflejarlos respecto del origen.

1. Escribe los tres puntos reflejados y ordénalos de menor a mayor.
2. Compara, antes y después de la reflexión, las separaciones entre cada par de puntos.
3. Un estudiante concluye: «Como cambió el orden izquierda–derecha, cambió también toda la información geométrica». Diagnostica con precisión qué parte de esa conclusión es falsa.

No basta con responder «la reflexión conserva distancias»: muestra la comparación numérica que sostiene tu diagnóstico.

Solución. Al reflejar respecto del origen, cada número cambia de signo:

$$-2 \mapsto 2, \qquad 1 \mapsto -1, \qquad 5 \mapsto -5.$$

Antes de la reflexión el orden es $-2 < 1 < 5$, mientras que, después de reflejar, los puntos ordenados de menor a mayor son $-5 < -1 < 2$. La orientación de la configuración se ha invertido. Comparemos ahora las separaciones entre pares:

$$|1-(-2)| = 3, \qquad |5-1| = 4, \qquad |5-(-2)| = 7.$$

Después de reflejar:

$$|-1-2| = 3, \qquad |-5-(-1)| = 4, \qquad |-5-2| = 7.$$

Las tres separaciones permanecen exactamente iguales. Por tanto, la conclusión del estudiante mezcla dos clases de información. Es correcto decir que cambió la información de **orientación**: izquierda y derecha se intercambiaron. Es falso concluir que cambió toda la información geométrica: las **separaciones entre los puntos** se conservaron. La lección es precisamente la de §1.1: una transformación puede alterar lo que ve el orden sin alterar lo que ve la distancia.

Ejercicio 3. Un orden fijo, separaciones variables

Fija los extremos 0 y 1, y coloca entre ellos un punto t con $0 < t < 1$.

1. Explica por qué el patrón de orden $0 < t < 1$ no cambia al variar t dentro de $(0, 1)$.
2. Compara la separación de t respecto de 0 con su separación respecto de 1 en los tres casos $0 < t < \frac{1}{2}$, $t = \frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2} < t < 1$.
3. Resume qué permanece y qué cambia cuando t recorre el intervalo $(0, 1)$.

El objetivo no es resolver una desigualdad aislada, sino usar una familia completa para distinguir información de orden e información métrica.

Solución. Mientras t satisfaga $0 < t < 1$, su posición de orden no cambia: permanece estrictamente entre 0 y 1. Variar t dentro del intervalo no altera ese patrón. Las separaciones a los extremos son $t - 0 = t$ y $1 - t$. Ahora comparamos esas dos cantidades. Si $0 < t < \frac{1}{2}$, entonces $t < 1 - t$, así que t está más cerca de 0 que de 1. Si $t = \frac{1}{2}$, entonces

$t = 1 - t = \frac{1}{2}$, y las separaciones son iguales. Si $\frac{1}{2} < t < 1$, entonces $1 - t < t$, por lo que t está más cerca de 1 que de 0. Así, al variar t permanece la información de orden $0 < t < 1$, pero cambia la información métrica: las dos separaciones varían continuamente y puede cambiar incluso cuál de los dos extremos está más cerca. Este ejemplo muestra por qué no debemos leer una relación de orden como si contuviera automáticamente información cuantitativa sobre distancias.

Ejercicio 4. Tres capas sobre los mismos números

Supón que tres números reales a, b, c satisfacen simultáneamente $a+b = c$ y $a < b$. Alguien sostiene que esos dos datos bastan para decidir cuál de a o b está más cerca de c.

1. Construye un ejemplo que satisfaga las dos condiciones y en el que b esté más cerca de c que a.
2. Construye otro ejemplo que satisfaga las mismas dos condiciones y en el que a esté más cerca de c que b.
3. Identifica qué parte de la información usada en el problema es algebraica, cuál pertenece al orden y cuál es métrica.
4. Explica por qué los dos primeros datos, aun tomados conjuntamente, no determinan por sí solos la tercera clase de información.

Solución. Necesitamos conservar simultáneamente las dos condiciones $a+b=c, \qquad a<b$, pero hacer que cambie cuál de a o b queda más cerca de c. Esto probará que la información algebraica y de orden dada no determina por sí sola la comparación métrica. Para el primer caso podemos tomar

$$a=1, \qquad b=2, \qquad c=3.$$

Se cumple $a+b=1+2=3=c$ y también $a<b$. Las separaciones respecto de c son $|c-a|=|3-1|=2$, mientras que $|c-b|=|3-2|=1$. Por tanto, b está más cerca de c que a. Para invertir la comparación, tomemos

$$a=-5, \qquad b=-2, \qquad c=-7.$$

De nuevo, $a+b=-5+(-2)=-7=c$ y $a<b$. Pero ahora $|c-a|=|-7-(-5)|=2$, y $|c-b|=|-7-(-2)|=5$. Así que en esta segunda configuración a está más cerca de c que b. Podemos separar ahora las tres capas del problema:

- $a+b=c$ es información **algebraica**, porque relaciona los números mediante una operación;
- $a<b$ es información de **orden**, porque decide su posición relativa;
- comparar $|c-a|$ y $|c-b|$ es información **métrica**, porque pregunta por separaciones.

Los dos ejemplos satisfacen exactamente la misma clase de condición algebraica y la misma relación de orden, pero producen respuestas métricas opuestas. Por eso aquellas dos capas no bastan para determinar ésta. La idea transferible es que **usar los mismos números no convierte en equivalentes las estructuras que colocamos sobre ellos**. Antes de concluir algo, conviene identificar qué clase de información tenemos y qué clase de información estamos intentando obtener.

1.2. Orden: izquierda, derecha y estar entre

En la representación habitual, $x<y$ sitúa a x a la izquierda de y; la relación $x\le y$ admite además que coincidan. Comparar tres puntos permite hablar de uno situado entre otros dos, siempre que cuidemos una cuestión de orientación: los extremos pueden haberse nombrado en cualquiera de los dos órdenes. Diremos que y **está entre** x **y** z cuando $\min\{x,z\}\le y\le \max\{x,z\}$.

Si $x\le z$, la condición se lee $x\le y\le z$; si $z\le x$, se lee $z\le y\le x$. La totalidad del orden asegura que esos casos cubren todas las posibilidades, incluido $x=z$, cuando la condición obliga a que los tres puntos coincidan. Los extremos están admitidos: «estar entre» tendrá aquí el sentido de pertenecer al tramo cerrado que determinan.

Cuando fijamos $a<b$, podemos reunir los puntos que cumplen una condición de orden entre ambos extremos. El **intervalo abierto** es $(a,b)=\{x\in\mathbb{R}:a<x<b\}$, y el **intervalo cerrado** es $[a,b]=\{x\in\mathbb{R}:a\le x\le b\}$. En el primero, ninguno de los extremos satisface las dos desigualdades estrictas; en el segundo, ambos pertenecen. Podemos decidir su inclusión por separado y obtener los intervalos mixtos

$$[a,b)=\{x\in\mathbb{R}:a\le x<b\}, \qquad (a,b]=\{x\in\mathbb{R}:a<x\le b\}.$$

Cada paréntesis excluye el extremo correspondiente y cada corchete lo incluye. Las palabras «abierto» y «cerrado» nombran aquí estos tipos de intervalo; la teoría de conjuntos abiertos y cerrados en sentido topológico se desarrollará más adelante.

Esta notación nombra conjuntos, mientras que las desigualdades expresan condiciones de pertenencia. Así, $x\in(-2,5]$ equivale a $-2<x\le 5$, y $3\le x<7$ equivale a $x\in[3,7)$. En el mismo sentido, $x\in(-3,2)$ se lee $-3<x<2$, $x\in[0,5)$ se lee $0\le x<5$, y $-1<x\le 4$ selecciona el intervalo $(-1,4]$. Traducir conserva tanto los puntos interiores como la decisión sobre cada extremo.

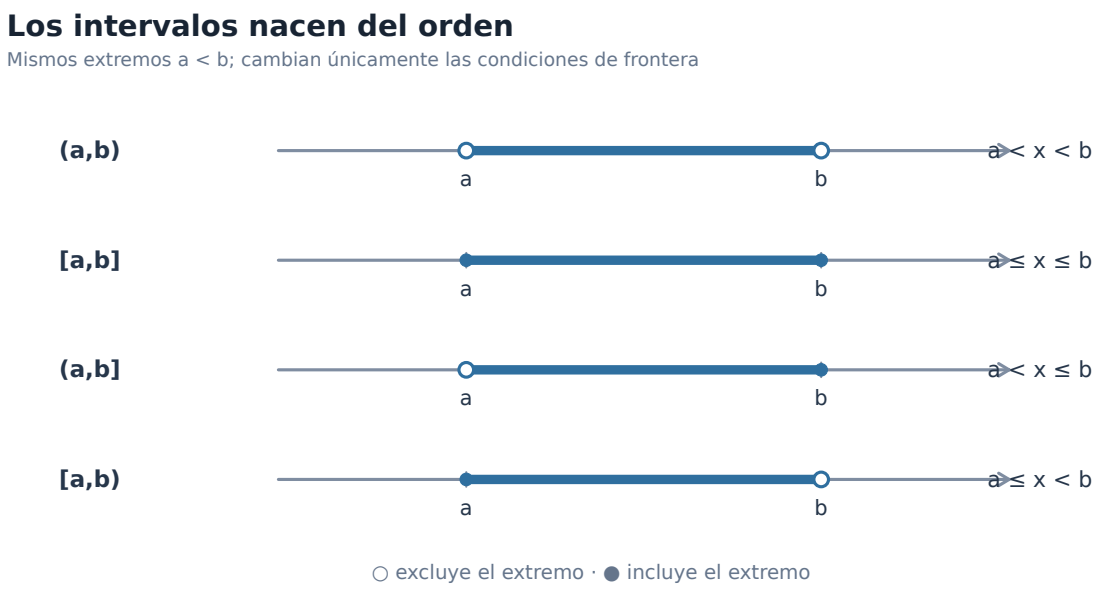


Figura 1.2. Paréntesis y corchetes registran exactamente si cada frontera satisface una desigualdad estricta o no estricta.

Una condición puede imponer sólo una frontera. Los reales que satisfacen $x < 4$ forman $(-\infty, 4)$, y los que satisfacen $x \geq -1$ forman $[-1, \infty)$. Del mismo modo, $x > 6$ describe $(6, \infty)$ y $x \leq 0$ describe $(-\infty, 0]$. Los símbolos $-\infty$ y ∞ indican que falta una frontera real en esa dirección; no son puntos reales que podamos incluir en el conjunto. Por eso llevan paréntesis.

El orden permite describir estas regiones sin asignar todavía un tamaño a sus separaciones. Para expresar un margen alrededor de un punto necesitamos una cantidad no negativa que mida la magnitud de un desplazamiento.

Ejercicios de la sección 1.2.

Ejercicio 5. Una condición, tres escrituras

Sea $-4 \leq x < 3$.

1. Escribe el conjunto de valores posibles de x en notación de intervalo.
2. Describe la misma región con palabras, indicando qué ocurre en cada extremo.
3. Decide si cada uno de los puntos -4, 0 y 3 pertenece al conjunto y justifica tu respuesta a partir de la desigualdad original, no sólo de la notación del intervalo.

Solución. La desigualdad $-4 \leq x < 3$ selecciona todos los reales situados desde -4 hasta 3, incluyendo el extremo izquierdo pero excluyendo el derecho. Por tanto, $x \in [-4, 3)$. En palabras: tomamos todos los puntos entre -4 y 3; -4 pertenece al conjunto porque se permite la igualdad $x = -4$, mientras que 3 no pertenece porque la condición exige $x < 3$. Comprobemos los tres puntos pedidos directamente en la desigualdad:

- para $x = -4$, se cumple $-4 \leq -4 < 3$, así que -4 pertenece;
- para $x = 0$, se cumple $-4 \leq 0 < 3$, así que 0 pertenece;
- para $x = 3$, la segunda desigualdad se convierte en $3 < 3$, que es falsa; por tanto, 3 no pertenece.

La notación de intervalo no añade información nueva: comprime exactamente las mismas decisiones de inclusión y exclusión que ya estaban en los signos de desigualdad.

Ejercicio 6. Dos fronteras, cuatro regiones

Fija números reales $a < b$. Para cada una de las condiciones siguientes:

1. escríbela como pertenencia a un intervalo;
2. indica qué extremos quedan incluidos;
3. explica qué cambia —y qué no cambia— al pasar de una línea a la siguiente.

$a < x < b$, $a \leq x < b$, $a < x \leq b$, $a \leq x \leq b$. No trates los cuatro casos como reglas independientes: organiza tu respuesta a partir de la información que codifican $<$ y $\leq$ en cada frontera.

Solución. Las cuatro traducciones son $a < x < b \iff x \in (a, b)$, $a \leq x < b \iff x \in [a, b)$, $a < x \leq b \iff x \in (a, b]$, $a \leq x \leq b \iff x \in [a, b]$. El centro de la descripción no cambia: en los cuatro casos estamos seleccionando puntos situados entre las mismas dos fronteras a y b. Lo único que cambia es si admitimos o no cada frontera.

En el extremo izquierdo:

- $a < x$ excluye a;
- $a \leq x$ incluye a.

En el extremo derecho:

- $x < b$ excluye b;
- $x \leq b$ incluye b.

Así, paréntesis y corchetes no son cuatro convenciones desconectadas. Cada símbolo registra localmente la decisión que ya tomó la desigualdad correspondiente.

Ejercicio 7. ¿Puede incluirse el infinito?

Un estudiante escribe $[2, \infty]$ para representar todos los números reales x tales que $x \geq 2$, y explica: «Uso corchete en ∞ porque quiero incluir todos los valores hacia la derecha».

1. Diagnostica el error.
2. Escribe la notación correcta.
3. Explica por qué el símbolo ∞ no se comporta como un extremo real ordinario del intervalo.
4. Da la notación correcta para la condición $x < 2$ y compárala con la anterior.

Solución. La escritura $[2, \infty]$ es incorrecta en la notación usual de intervalos reales. El problema no está en querer «incluir todos los valores hacia la derecha», sino en tratar ∞ como si fuera un número real situado al final de la recta. La condición $x \geq 2$ se escribe correctamente como $[2, \infty)$. El corchete en 2 indica que 2 pertenece al conjunto. En cambio, ∞ no es un punto de $\mathbb{R}$ que pueda pertenecer o no pertenecer al intervalo; es un símbolo que expresa que la región no tiene una frontera real superior. Por eso se escribe siempre paréntesis junto a ∞ o $-\infty$.

De manera análoga, $x < 2$ se representa por $(-\infty, 2)$. Aquí 2 queda excluido por la desigualdad estricta y, nuevamente, $-\infty$ no es un número real que pueda incluirse. La idea que corrige el error es ésta: **los corchetes deciden si pertenece un extremo real; $\pm\infty$ no son extremos reales del conjunto.**

Ejercicio 8. El mismo tramo sin elegir orientación

Sean $p, q \in \mathbb{R}$, sin suponer cuál de los dos es menor, y considera la condición $\min\{p, q\} \leq x \leq \max\{p, q\}$.

1. Describe verbalmente qué región de la recta selecciona.
2. Escribe esa región como intervalo usando sólo $\min\{p, q\}$ y $\max\{p, q\}$.
3. Reescribe la condición en los dos casos posibles: $p \leq q$ y $q \leq p$.
4. Explica por qué la formulación con mínimo y máximo permite hablar del tramo entre p y q sin decidir de antemano cuál está a la izquierda.

Solución. La condición $\min\{p,q\} \le x \le \max\{p,q\}$ selecciona todos los puntos del tramo cerrado comprendido entre p y q, incluyendo ambos extremos. Sin decidir cuál de los dos está a la izquierda, podemos escribirlo como $x \in [\min\{p,q\}, \max\{p,q\}]$. Ahora separemos los dos órdenes posibles. Si $p \le q$, entonces $\min\{p,q\} = p, \quad \max\{p,q\} = q$, y la condición se reduce a

$p \le x \le q$. Si, en cambio, $q \le p$, entonces $\min\{p,q\} = q, \quad \max\{p,q\} = p$, y obtenemos $q \le x \le p$. Por tanto, la formulación con mínimo y máximo encapsula en una sola expresión los dos órdenes posibles de los extremos. Su ventaja no es meramente abreviar: permite hablar del tramo entre p y q de una forma que no depende del orden en que hayamos nombrado esos puntos.

Ejercicio 9. Dos formas equivalentes de «estar entre»

Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$. Demuestra que $\min\{x,z\} \le y \le \max\{x,z\}$ si y sólo si se cumple al menos una de las dos cadenas $x \le y \le z$ o $z \le y \le x$. Tu demostración debe cubrir explícitamente los dos órdenes posibles entre x y z y explicar por qué no hace falta una tercera posibilidad.
Solución. La expresión con mínimo y máximo está diseñada precisamente para evitar elegir una orientación. Para demostrar la equivalencia, basta separar los dos órdenes posibles entre los extremos x y z. Supongamos primero que $\min\{x,z\} \le y \le \max\{x,z\}$. Como el orden de los reales es total, entre x y z sólo pueden darse dos posibilidades: $x \le z$ o $z \le x$.

Si $x \le z$, entonces $\min\{x,z\} = x, \quad \max\{x,z\} = z$, de modo que nuestra hipótesis se convierte en $x \le y \le z$. Si $z \le x$, obtenemos en cambio $\min\{x,z\} = z, \quad \max\{x,z\} = x$, y por tanto $z \le y \le x$. Esto prueba una dirección. Para la conversa, supongamos primero que $x \le y \le z$.

Entonces necesariamente $x \le z$, por lo que $\min\{x,z\} = x, \quad \max\{x,z\} = z$. Así, $\min\{x,z\} \le y \le \max\{x,z\}$. El caso $z \le y \le x$ es análogo: ahora $z \le x$, de modo que el mínimo es z y el máximo es x, y se obtiene la misma desigualdad con mínimo y máximo. Hemos demostrado, por tanto,

$$\boxed{\min\{x,z\} \le y \le \max\{x,z\} \iff (x \le y \le z) \text{ o } (z \le y \le x).}$$

No hace falta una tercera posibilidad porque el orden de $\mathbb{R}$ compara siempre dos números reales: para x y z, uno satisface $x \le z$ o el otro satisface $z \le x$ —y si son iguales, ambos casos son compatibles. La idea transferible es que la fórmula con min y max no introduce una nueva noción de «estar entre»: comprime en una expresión simétrica los dos órdenes posibles de los extremos.

1.3. Valor absoluto: distancia al origen

Los números 5 y -5 se encuentran en lados opuestos del origen, pero sus separaciones respecto de él coinciden: $|5| = 5, \quad |-5| = 5$. La definición del **valor absoluto** conserva la magnitud y elimina el signo del desplazamiento:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Si el número es no negativo, ya tiene el signo adecuado para representar una longitud. Si es negativo, su opuesto es positivo. De aquí se obtiene $|x| \ge 0$ y también $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$. La misma definición da $|-x| = |x|$: cambiar la orientación no cambia la magnitud. Leeremos $|x|$ como la distancia de x al origen; la función de distancia entre puntos se precisará en §1.4.

Para $r > 0$, la igualdad $|x| = r$ admite las dos soluciones $x = r$ y $x = -r$, una a cada lado. Por ejemplo, $|x| = 6$ determina los puntos 6 y -6, sin distinguir cuál de ellos se ha elegido. Una desigualdad reúne una región completa. Si $x \ge 0$, la condición $|x| < r$ se reduce a $x < r$ y la desigualdad $-r < x$ ya es automática; si $x < 0$, se reduce a $-x < r$, es decir,

$-r < x$, mientras que $x < r$ es automática. Ambos casos, recorridos también en sentido inverso, prueban

$|x| < r \iff -r < x < r$. Así, $|x| < 2$ describe $(-2, 2)$ y excluye sus dos extremos. Si pedimos una magnitud mayor que el umbral, los mismos casos dan $|x| > r \iff x < -r$ o $x > r$. El primer conjunto queda entre dos fronteras; el segundo reúne las dos regiones exteriores. La disyunción es necesaria porque podemos alejarnos del origen en cualquiera de las dos direcciones.

Para medir respecto de otro punto a, la resta $x - a$ registra el desplazamiento orientado desde a hasta x: es positiva a su derecha, negativa a su izquierda y cero si coinciden. Tomar su valor absoluto produce $|x - a|$ = distancia de x al punto a. Por ejemplo, respecto del centro 3, los puntos 7 y -1 tienen desplazamientos $7 - 3 = 4$ y $-1 - 3 = -4$, pero

$|7 - 3| = 4, \qquad |-1 - 3| = 4$. Restar el centro cambia la referencia del cálculo; aplicar el valor absoluto retiene el tamaño de la separación. En particular, $|x - a| = 0$ equivale a $x - a = 0$ y, por tanto, a $x = a$.

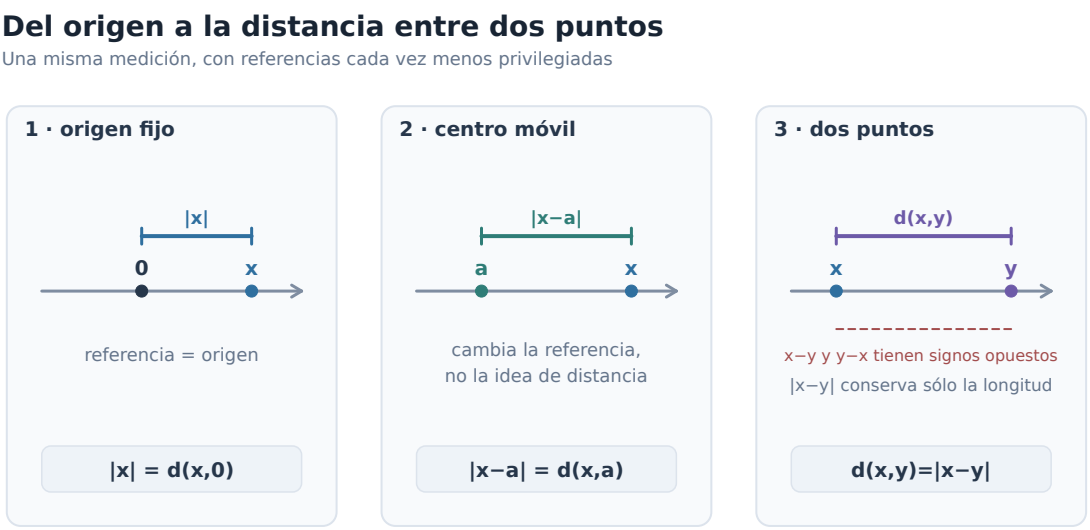


Figura 1.3. El paso |x| → |x−a| → d(x,y)=|x−y| elimina gradualmente una referencia privilegiada y conserva la idea de medir separación.

La condición $|x - a| < r$ puede leerse como «la separación respecto de a es menor que r». La misma interpretación sirve para cualquier centro: el origen corresponde al caso particular $a = 0$. Para comparar dos puntos sin fijar de antemano cuál desempeña el papel de referencia, hagamos variar ambos argumentos.

Ejercicios de la sección 1.3.

Ejercicio 10. Una distancia con centro desplazado

Interpreta geométricamente la ecuación $|x - 3| = 5$.

1. Exprésala en palabras como una condición de distancia respecto de un centro.
2. Determina todos los valores de x.
3. Explica por qué aparecen exactamente dos soluciones y qué relación geométrica tienen con el centro 3.

No empieces resolviendo por casos: comienza identificando qué está midiendo $|x - 3|$.

Solución. La expresión $|x-3|$ mide la separación entre x y el centro 3. Por tanto, $|x-3|=5$ significa: «x está exactamente a 5 unidades de 3». En una recta hay dos puntos a esa distancia del centro: uno a la derecha y otro a la izquierda. Son $x=3+5=8$ y $x=3-5=-2$. Podemos comprobarlo directamente: $|8-3|=5, \qquad |-2-3|=|-5|=5.$

Aparecen exactamente dos soluciones porque una distancia positiva no registra orientación. Los desplazamientos 5 y -5 son distintos, pero sus valores absolutos coinciden.

Ejercicio 11. Del valor absoluto a una región de la recta

Considera la condición $|x+2|<4$.

1. Identifica el centro respecto del cual se está midiendo la separación.
2. Describe la condición en palabras.
3. Determina la región de la recta que satisface la desigualdad y escríbela mediante desigualdades de orden.
4. Comprueba directamente si $x=-6$, $x=-2$ y $x=2$ satisfacen la condición original.

La verificación final debe hacerse sustituyendo en $|x+2|<4$, no sólo mirando la región obtenida.

Solución. Primero reescribimos $|x+2|=|x-(-2)|$. Así vemos que el centro es -2. La condición $|x+2|<4$ significa que x está a menos de 4 unidades de -2. Los puntos situados exactamente a 4 unidades del centro son $-2-4=-6$ y $-2+4=2$. Como la desigualdad es estricta, la región buscada queda entre esas dos fronteras sin incluirlas: $-6<x<2$. Comprobemos ahora los tres puntos pedidos en la condición original.

Para $x=-6$, $|-6+2|=|-4|=4$, que no es menor que 4. Por tanto, -6 no pertenece. Para $x=-2$, $|-2+2|=0<4$, así que -2 sí pertenece. Para $x=2$, $|2+2|=4$, y tampoco pertenece. La lectura geométrica y la desigualdad de orden describen la misma región, pero la comprobación directa confirma que no hemos perdido la información sobre la frontera.

Ejercicio 12. Desplazamiento no es lo mismo que distancia

Un estudiante afirma:

> Como $|x-a|$ es la distancia entre x y a, podemos quitar siempre las barras y escribir $|x-a|=x-a$.

1. Explica qué confusión conceptual contiene la afirmación.
2. Da un ejemplo con $x<a$ en el que la igualdad propuesta falle.
3. Indica qué información conserva $x-a$ que desaparece al pasar a $|x-a|$.
4. Formula una condición precisa bajo la cual sí se cumple $|x-a|=x-a$.

Solución. La afirmación confunde **desplazamiento orientado** con **distancia**. La cantidad $x-a$ puede ser positiva, negativa o cero: su signo indica a qué lado de a se encuentra x. En cambio, $|x-a|$ es siempre no negativa y conserva sólo el tamaño del desplazamiento. Tomemos, por ejemplo, $x=1, \qquad a=4$. Entonces $x<a$ y $x-a=1-4=-3$, mientras que $|x-a|=|-3|=3$.

Por tanto, $|x-a|\neq x-a$. Al pasar de $x-a$ a $|x-a|$ perdemos la orientación: ya no sabemos si x está a la izquierda o a la derecha de a. La igualdad $|x-a|=x-a$ sí se cumple exactamente cuando $x-a\geq 0$, es decir, cuando $x\geq a$. El valor absoluto no «se quita» por costumbre; se elimina sólo después de controlar el signo de la expresión interior.

Ejercicio 13. Dos puntos simétricos respecto de un centro

Fija un centro $a\in\mathbb{R}$ y un número $t>0$. Considera los puntos $x_+=a+t, \qquad x_-=a-t.$

1. Calcula x_+-a y x_--a.
2. Calcula $|x_+-a|$ y $|x_--a|$.
3. Explica qué cambia y qué permanece al sustituir t por otro número positivo.
4. Explica por qué conocer sólo la distancia al centro no permite decidir a qué lado de a se encuentra el punto.

Tu respuesta debe distinguir explícitamente **desplazamiento orientado** y **separación**.
Solución. Tenemos $x_+ - a = (a+t) - a = t$ y $x_- - a = (a-t) - a = -t$. Los desplazamientos tienen el mismo tamaño y signos opuestos. Al tomar valor absoluto, $|x_+ - a| = |t| = t$ y $|x_- - a| = |-t| = t$, porque $t > 0$. Así, ambos puntos están exactamente a distancia t del centro a, aunque uno se encuentre a la derecha y el otro a la izquierda. Si sustituimos t por otro número positivo s, las posiciones pasan a ser

$$a + s \qquad \text{y} \qquad a - s,$$

y la distancia común al centro pasa de t a s. Lo que permanece es la simetría respecto de a: los desplazamientos siguen siendo opuestos y las separaciones siguen siendo iguales. Por eso conocer únicamente $|x - a| = t$ no permite decidir de qué lado del centro está x. La distancia conserva el tamaño; el signo del desplazamiento conserva la orientación.

Ejercicio 14. Un centro común para dos puntos equidistantes

Sean $x, y, a \in \mathbb{R}$ y supón que $|x - a| = |y - a|$.

1. Muestra que necesariamente ocurre una de estas dos posibilidades:

$x = y$ o $x + y = 2a$.

2. Si además $x \neq y$, concluye que

$a = \frac{x+y}{2}$.

3. Interpreta geométricamente el resultado: ¿qué papel desempeña a cuando dos puntos distintos están a la misma distancia de él?

No uses resultados posteriores del capítulo: basta trabajar con la definición del valor absoluto y álgebra elemental.
Solución. La igualdad de valores absolutos puede ocurrir porque las cantidades interiores son iguales o porque son opuestas. Eso corresponde exactamente a las dos posibilidades geométricas: los puntos coinciden o quedan a lados opuestos del centro con la misma separación. Partimos de $|x - a| = |y - a|$. Para justificar ese paso sin usar resultados posteriores, sean $u, v \in \mathbb{R}$ con $|u| = |v|$. Al elevar al cuadrado obtenemos
$u^2 = v^2$, y por tanto $(u - v)(u + v) = 0$. Así, necesariamente

$$u = v \qquad \text{o} \qquad u = -v.$$

Aplicamos esto a $u = x - a, \qquad v = y - a$. En el primer caso, $x - a = y - a$, y por tanto $x = y$. En el segundo caso, $x - a = -(y - a)$. Desarrollando, $x - a = -y + a$, de donde $x + y = 2a$. Hemos probado que necesariamente

$$x = y \qquad \text{o} \qquad x + y = 2a.$$

Si además sabemos que $x \neq y$, el primer caso queda excluido y sólo puede ocurrir $x+y = 2a$. Dividiendo por 2,

$$\boxed{a = \frac{x + y}{2}}.$$

Geométricamente, a es el punto medio entre x e y: los dos puntos distintos se encuentran a lados opuestos de a y a la misma separación de él. Este problema conecta tres lenguajes del capítulo. La igualdad de valores absolutos expresa información métrica; la ecuación $x+y = 2a$ la traduce algebraicamente; y la interpretación final sitúa a a entre los dos puntos de manera simétrica.

1.4. Distancia entre dos puntos reales

Definimos la **distancia estándar** de la recta real mediante $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$, $\quad d(x, y) = |x - y|$. Por ejemplo, $d(2, 7) = |-5| = 5$ y $d(7, 2) = |5| = 5$: intercambiar los puntos invierte el desplazamiento y conserva su longitud. Verificaremos que la función tiene las propiedades que utilizaremos al razonar con distancias.

Proposición. Para cualesquiera $x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$d(x, y) \geq 0, \qquad d(x, y) = 0 \iff x = y,$$
$$d(x, y) = d(y, x), \qquad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Demostración. La no negatividad sigue de la del valor absoluto. Además,

$$d(x, y) = 0 \iff |x - y| = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y.$$

Como $y - x = -(x - y)$ y el valor absoluto no cambia al tomar el opuesto, $d(x, y) = |x-y| = |y-x| = d(y, x)$. Para la última desigualdad necesitamos controlar el valor absoluto de una suma. La definición por casos asegura $-|u| \leq u \leq |u|$ para todo real u. Al escribir lo mismo para v y sumar miembro a miembro obtenemos $-(|u| + |v|) \leq u + v \leq |u| + |v|$.

Si $u + v$ es no negativo, la cota superior controla su valor absoluto; si es negativo, la cota inferior, cambiada de signo, da el mismo control. Por tanto, $|u + v| \leq |u| + |v|$. El desplazamiento total se descompone como $x - z = (x - y) + (y - z)$. Aplicar la desigualdad con $u = x - y$ y $v = y - z$ da

$$d(x, z) = |x - z| \leq |x - y| + |y - z| = d(x, y) + d(y, z).$$

Quedan probadas las cuatro propiedades. □ La última es la **desigualdad triangular**: introducir un punto de paso no puede acortar la distancia directa entre los extremos. Hemos obtenido esa lectura geométrica a partir de una estimación algebraica; para saber cuándo el recorrido tiene exactamente la misma longitud necesitaremos examinar la posición del punto intermedio. La triangular permite también controlar cuánto cambian las distancias al origen. Escribimos $x = (x - y) + y$ para que aparezca la separación entre los puntos y aplicamos la desigualdad:

$|x| \leq |x - y| + |y|$, $\quad |x| - |y| \leq |x - y|$. Intercambiar los puntos y usar $|y - x| = |x - y|$ proporciona la otra dirección, $|y| - |x| \leq |x - y|$. Las dos cotas equivalen a

$$\boxed{\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|.}$$

Ésta es la **desigualdad triangular inversa**. Si dos puntos están separados por 0.01, sus distancias al origen pueden diferir a lo sumo en 0.01. El argumento muestra cómo obtener una estimación para una diferencia: aislarla en la triangular y repetir el cálculo con los puntos intercambiados. Este control no requiere conocer cuál está a la izquierda; los problemas 19–21 lo desarrollan para otro centro y para la propagación de cotas.

Ejercicios de la sección 1.4.

Ejercicio 15. Tres propiedades que salen de la definición

Sea $d(x, y) = |x - y|$. Demuestra directamente, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$, las tres propiedades siguientes:

1. $d(x, y) \geq 0$;
2. $d(x, y) = 0 \iff x = y$;
3. $d(x, y) = d(y, x)$.

En cada caso indica qué propiedad elemental del valor absoluto estás usando. No cites estas afirmaciones como propiedades ya conocidas de una métrica: el objetivo es recuperarlas desde la definición concreta de d.

Solución. Partimos siempre de $d(x,y) = |x-y|$. Para la **no negatividad**, usamos que el valor absoluto de cualquier número real es no negativo. Como $x-y \in \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y| \geq 0$. Para la **identidad de los puntos a distancia cero**, recordamos que $|u| = 0 \iff u = 0$. Aplicándolo a $u = x - y$,

$$\begin{aligned} d(x,y) = 0 &\iff |x-y| = 0 \\ &\iff x - y = 0 \\ &\iff x = y. \end{aligned}$$

Finalmente, para la **simetría**, usamos que $|-u| = |u|$:

$$\begin{aligned} d(y,x) &= |y-x| \\ &= |-(x-y)| \\ &= |x-y| \\ &= d(x,y). \end{aligned}$$

Las tres propiedades no se han supuesto a partir de una teoría abstracta de métricas: se han derivado de propiedades elementales del valor absoluto y de la definición concreta de d sobre $\mathbb{R}$.

Ejercicio 16. Reconstruir la desigualdad triangular

Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$. Sin comenzar citando la desigualdad triangular para d, demuestra $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$. Puedes usar el hecho elemental $-|u| \leq u \leq |u|$ para todo $u \in \mathbb{R}$. Tu argumento debe mostrar explícitamente:

1. cómo obtener $|u+v| \leq |u| + |v|$;
2. qué elecciones de u y v producen $x - z$;
3. cómo se traduce el resultado final al lenguaje de d.

Solución. Queremos controlar $|x-z|$. La identidad $x - z = (x-y) + (y-z)$ sugiere que primero necesitamos una desigualdad para el valor absoluto de una suma. Para cualquier $u \in \mathbb{R}$, $-|u| \leq u \leq |u|$, y para cualquier $v \in \mathbb{R}$, $-|v| \leq v \leq |v|$. Sumando miembro a miembro, $-(|u| + |v|) \leq u + v \leq |u| + |v|$. Como $|u| + |v| \geq 0$, esta doble desigualdad equivale a $|u+v| \leq |u|+|v|$. Elegimos ahora $u = x-y$, $v = y-z$. Entonces $u+v = (x-y)+(y-z) = x-z$. Sustituyendo en la desigualdad anterior, $|x-z| \leq |x-y| + |y-z|$. Por definición de d,

$$\boxed{d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)}.$$

La idea transferible es que la desigualdad triangular aparece al **descomponer un desplazamiento total en dos desplazamientos parciales** y controlar el valor absoluto de su suma.

Ejercicio 17. De la desigualdad triangular a una cota inversa

Demuestra que, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$, $\big||x| - |y|\big| \leq d(x,y)$. No uses la desigualdad triangular inversa como un resultado ya disponible. Parte de la desigualdad triangular ordinaria y obtén primero dos desigualdades de una sola dirección. Después explica por qué ambas pueden condensarse en una sola expresión con valor absoluto.

Solución. Partimos de la identidad $x = (x-y) + y$. Aplicando la desigualdad triangular al valor absoluto, $|x| \leq |x-y| + |y|$. Restamos $|y|$ en ambos lados: $|x| - |y| \leq |x-y|$. Ahora intercambiamos x e y. Del mismo argumento obtenemos $|y| - |x| \leq |y-x|$. Como $|y-x| = |x-y|$, $|y| - |x| \leq |x-y|$. Las dos desigualdades dicen que la diferencia $|x| - |y|$ está acotada por $|x-y|$ tanto por arriba como por abajo: $-|x-y| \leq |x|-|y| \leq |x-y|$. Esto equivale a $\big||x|-|y|\big| \leq |x-y|$. Finalmente, $|x-y| = d(x,y)$, de modo que

$$\boxed{\big||x|-|y|\big| \le d(x,y)}.$$

La desigualdad controla cuánto pueden diferir las distancias de dos puntos al origen a partir de la distancia que hay entre esos mismos puntos.

Ejercicio 18. Una igualdad demasiado fuerte

Un estudiante razona así: $x-z=(x-y)+(y-z)$, por lo tanto $|x-z|=|x-y|+|y-z|$, y concluye que $d(x,z)=d(x,y)+d(y,z)$ para todos los reales x,y,z.

1. Identifica exactamente qué paso no está justificado.
2. Sustituye la igualdad falsa por la afirmación correcta que sí vale siempre.
3. Da un contraejemplo numérico a la igualdad propuesta y verifica ambos lados.
4. Explica por qué el contraejemplo no contradice la desigualdad correcta.

No intentes todavía caracterizar cuándo sí hay igualdad; esa pregunta pertenece a la sección siguiente.

Solución. El primer paso $x-z=(x-y)+(y-z)$ es correcto. El error aparece al pasar de ahí a $|(x-y)+(y-z)|=|x-y|+|y-z|$. Para números reales u y v, no vale en general $|u+v|=|u|+|v|$. Lo que siempre vale es la desigualdad $|u+v|\le|u|+|v|$. Por tanto, la afirmación universal correcta es

$$\boxed{d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)}.$$

Como contraejemplo a la igualdad tomemos

$$x=0, \qquad y=3, \qquad z=1.$$

Entonces $d(x,z)=|0-1|=1$, mientras que $d(x,y)+d(y,z)=|0-3|+|3-1|=3+2=5$. Así, $1\neq 5$, pero sí se cumple $1\le 5$. El contraejemplo destruye la igualdad universal, no la desigualdad triangular. Determinar exactamente cuándo aparece igualdad requiere una pregunta adicional que se estudiará en la sección siguiente.

Ejercicio 19. Mover el punto de referencia en la desigualdad inversa

Fija $x,y,a\in\mathbb{R}$.

1. Aplica la desigualdad triangular inversa a los números $x-a$ e $y-a$ y demuestra $\big||x-a|-|y-a|\big|\le|x-y|$.
2. Toma ahora $x=1$ y $y=5$. Calcula el lado izquierdo para $a=-2$, $a=3$ y $a=8$.
3. Compara los tres resultados con $|x-y|$.
4. Explica qué cantidad cambia al mover a y qué cota permanece inalterada.

El objetivo es ver que cambiar el punto de referencia modifica las dos distancias individuales, pero no la cota universal que controla cuánto pueden diferir.

Solución. Aplicamos la desigualdad triangular inversa a los números $u=x-a, \qquad v=y-a$. Obtenemos $\big||u|-|v|\big|\le|u-v|$. Sustituyendo, $\big||x-a|-|y-a|\big|\le|(x-a)-(y-a)|$. El lado derecho se simplifica a $|x-y|$, por lo que

$$\boxed{\big||x-a|-|y-a|\big|\le|x-y|}.$$

Tomemos ahora $x=1$ y $y=5$. La cota derecha es siempre $|x-y|=|1-5|=4$. Si $a=-2$, $\big||1-(-2)|-|5-(-2)|\big|=|3-7|=4$. Si $a=3$, $\big||1-3|-|5-3|\big|=|2-2|=0$. Si $a=8$, $\big||1-8|-|5-8|\big|=|7-3|=4$. Al variar a, cambian las distancias individuales $|x-a|$ y $|y-a|$, y también puede cambiar la diferencia entre ellas. Lo que no cambia es la cota universal $\big||x-a|-|y-a|\big|\le 4$. El punto de referencia puede desplazarse, pero la separación fija entre x e y sigue controlando cuánto pueden diferir sus distancias a ese punto.

Ejercicio 20. Encadenar estimaciones de distancia

Sean $x, y, z, w \in \mathbb{R}$. Demuestra que $d(x, w) \leq d(x, y) + d(y, z) + d(z, w)$. Tu prueba debe usar la desigualdad triangular dos veces y mostrar con claridad dónde se aplica cada vez. Después deduce que, si para cierto $r \geq 0$ se cumplen

$$d(x, y) \leq r, \qquad d(y, z) \leq r, \qquad d(z, w) \leq r,$$

entonces $d(x, w) \leq 3r$. Explica qué enseña este resultado sobre la acumulación de varios errores o desplazamientos pequeños.

Solución. Aplicamos primero la desigualdad triangular pasando por z: $d(x, w) \leq d(x, z) + d(z, w)$. Ahora controlamos $d(x, z)$ pasando por y: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. Sustituyendo esta segunda cota en la primera,

$$\begin{aligned} d(x, w) &\leq d(x, z) + d(z, w) \\ &\leq d(x, y) + d(y, z) + d(z, w). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\boxed{d(x, w) \leq d(x, y) + d(y, z) + d(z, w)}.$$

Si además

$$d(x, y) \leq r, \qquad d(y, z) \leq r, \qquad d(z, w) \leq r,$$

entonces

$$\begin{aligned} d(x, w) &\leq d(x, y) + d(y, z) + d(z, w) \\ &\leq r + r + r \\ &= 3r. \end{aligned}$$

Así,

$$\boxed{d(x, w) \leq 3r}.$$

La idea importante es que los errores parciales pueden **acumularse por suma**. Si cada tramo introduce como máximo un error r, tres tramos producen una cota global de $3r$. La desigualdad triangular permite pasar de controles locales a un control total sin conocer la orientación de cada desplazamiento.

Ejercicio 21. Transportar una cota a un punto cercano

Sean $m, M, \varepsilon \geq 0$ con $m \leq M$. Supón que dos números reales x e y satisfacen $m \leq |x| \leq M$ y $d(x, y) \leq \varepsilon$. Demuestra que $\max\{0, m - \varepsilon\} \leq |y| \leq M + \varepsilon$. Tu argumento debe indicar qué parte proviene de la desigualdad triangular y qué parte de la desigualdad triangular inversa. Después analiza si las dos cotas pueden alcanzarse exactamente:

1. construye un ejemplo que alcance la cota superior;
2. si $m \geq \varepsilon$, construye un ejemplo que alcance $m - \varepsilon$;
3. si $m < \varepsilon$, explica por qué la cota inferior se convierte en 0 y da un ejemplo que la alcance.

Interpreta el resultado como una regla de propagación de error: conocer cuánto puede cambiar un punto permite controlar cuánto puede cambiar su distancia al origen.

Solución. Sabemos dos cosas diferentes: $|x|$ está controlado entre m y M, y y está a distancia a lo sumo ε de x. La desigualdad triangular permitirá obtener la cota superior para $|y|$; la triangular inversa permitirá obtener la inferior. Como $y = (y - x) + x$, la desigualdad triangular da $|y| \leq |y - x| + |x|$. Usando $|y - x| = d(x, y) \leq \varepsilon$ y $|x| \leq M$, obtenemos

$|y| \leq \varepsilon + M$. Así, $|y| \leq M + \varepsilon$. Para la cota inferior usamos la desigualdad triangular inversa: $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y| \leq \varepsilon$. En particular, $|x| - |y| \leq \varepsilon$, de donde $|y| \geq |x| - \varepsilon$. Como

$|x| \geq m$, $|y| \geq m - \varepsilon$. Además $|y| \geq 0$. Juntando ambas cotas inferiores, $|y| \geq \max\{0, m - \varepsilon\}$. Por tanto,

$$\boxed{\max\{0, m - \varepsilon\} \leq |y| \leq M + \varepsilon}.$$

Veamos ahora que las cotas pueden ser exactas. Para alcanzar la cota superior, tomemos $x = M, \quad y = M + \varepsilon$. Entonces $|x| = M$ y $d(x, y) = \varepsilon$, mientras que $|y| = M + \varepsilon$. Si $m \geq \varepsilon$, tomemos $x = m, \quad y = m - \varepsilon$. Entonces $|x| = m$, $d(x, y) = \varepsilon$ y $|y| = m - \varepsilon$. Si $m < \varepsilon$, la expresión $m - \varepsilon$ es negativa, pero una distancia al origen nunca puede ser negativa; por eso la mejor cota uniforme que obtenemos es 0. Esta cota se alcanza, por ejemplo, tomando $x = m, \quad y = 0$. En ese caso $d(x, y) = m < \varepsilon$ y $|y| = 0$. El resultado expresa una regla de propagación de error: si y está a lo sumo ε de x, entonces su distancia al origen puede diferir de la de x en no más de ε. A partir de una banda conocida para $|x|$ obtenemos automáticamente una banda ampliada, y óptima en general, para $|y|$.

1.5. La desigualdad triangular y la geometría de «estar entre»

Entre 1 y 7, pasar por 4 no añade longitud: $d(1, 7) = 6 = d(1, 4) + d(4, 7) = 3 + 3$. Pasar por 10, en cambio, produce $d(1, 10) + d(10, 7) = 9 + 3 = 12$: debemos sobrepasar el destino y regresar. La diferencia sugiere que la igualdad triangular reconoce precisamente los puntos situados entre los extremos.

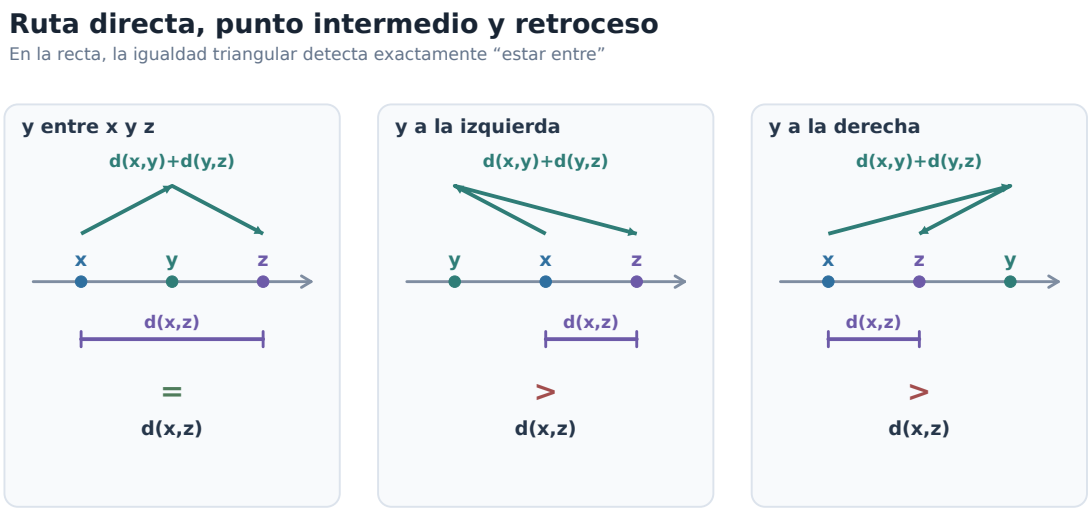


Figura 1.4. En la recta hay igualdad triangular exactamente cuando y está entre los extremos; fuera del segmento aparece recorrido redundante.

Proposición. Para cualesquiera $x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{d(x, z) = d(x, y) + d(y, z) \iff \min\{x, z\} \leq y \leq \max\{x, z\}.}$$

Demostración. Si $x \leq y \leq z$, las diferencias sucesivas son no negativas, de modo que

$$d(x, y) + d(y, z) = (y - x) + (z - y) = z - x = d(x, z).$$

Si $z \leq y \leq x$, intercambiamos los extremos y utilizamos la simetría de la distancia para obtener la misma igualdad. Esto prueba la implicación desde «estar entre», incluyendo los casos $y = x$ o $y = z$, cuando uno de los sumandos es cero. Para la conversa, la simetría permite suponer $x \leq z$. Fuera del tramo cerrado, el cálculo exhibe una cantidad adicional estrictamente positiva. Si $y < x$,

$$\begin{aligned} d(x,y)+d(y,z) &= (x-y)+(z-y) \\ &= (z-x)+2(x-y) > z-x = d(x,z). \end{aligned}$$

Si $y > z$,

$$\begin{aligned} d(x,y)+d(y,z) &= (y-x)+(y-z) \\ &= (z-x)+2(y-z) > z-x = d(x,z). \end{aligned}$$

Ninguna región exterior permite la igualdad. Debe cumplirse $x \le y \le z$, y al restituir los dos órdenes posibles de los extremos obtenemos la condición con mínimo y máximo. El caso $x = z$ está cubierto: cualquier punto distinto del extremo común cae en una de las regiones exteriores. □ El exceso es el doble de la distancia recorrida más allá de un extremo, porque debemos recorrer ese tramo al salir y al regresar. Por ejemplo, entre -2 y 5, pasar por 1 da $3+4=7$, la longitud directa; pasar por 8 da $10+3=13$, con un exceso $13-7=6=2(8-5)$. El problema 25 estudia ese exceso como función del punto de paso.

La igualdad reconoce que el punto está entre los extremos, pero permite que coincida con cualquiera de ellos y no exige que sea el punto medio. Hemos expresado una relación de orden mediante distancias sin elegir una orientación. Para esta equivalencia usamos el orden lineal y la distancia concreta de la recta; su validez no se extiende por el solo nombre de «distancia» a una geometría métrica arbitraria.

Ejercicios de la sección 1.5.

Ejercicio 22. Igualdad sin retroceso

Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$. Demuestra directamente que, si y está entre x y z, entonces $d(x,z) = d(x,y) + d(y,z)$. Tu prueba debe cubrir explícitamente los dos órdenes posibles $x \le y \le z$ y $z \le y \le x$, incluyendo los casos en que y coincide con uno de los extremos. Explica al final por qué la suma de las dos distancias parciales no contiene recorrido redundante.

Solución. Supongamos primero que $x \le y \le z$. Entonces $y - x \ge 0$ y $z - y \ge 0$, así que $d(x,y) = |x-y| = y - x$ y $d(y,z) = |y-z| = z - y$. Al sumar,

$$\begin{aligned} d(x,y)+d(y,z) &= (y-x)+(z-y) \\ &= z-x. \end{aligned}$$

Como $x \le z$, $d(x,z) = |x-z| = z-x$, y por tanto $d(x,z) = d(x,y)+d(y,z)$. Ahora supongamos el orden contrario, $z \le y \le x$. Entonces $d(x,y) = x-y, \qquad d(y,z) = y-z$, y

$$d(x,y)+d(y,z) = (x-y)+(y-z) = x-z = d(x,z).$$

Los casos $y = x$ o $y = z$ están incluidos: una de las dos distancias parciales se vuelve 0 y la otra coincide con $d(x,z)$. Geométricamente, cuando y está entre los extremos, la ruta $x \to y \to z$ avanza a lo largo del mismo segmento sin sobrepasar ningún extremo y sin desandar ningún tramo. Por eso la suma de las longitudes parciales coincide exactamente con la longitud directa.

Ejercicio 23. La igualdad obliga al punto intermedio

Supón que $x, y, z \in \mathbb{R}$ satisfacen $d(x,z) = d(x,y)+d(y,z)$. Demuestra que $\min\{x,z\} \le y \le \max\{x,z\}$. Organiza la prueba suponiendo primero $x \le z$ y examinando las tres regiones posibles para y: $y < x$, $x \le y \le z$ y $y > z$. En los dos casos exteriores debes exhibir explícitamente la longitud extra que hace imposible la igualdad.

Solución. Supongamos $d(x,z) = d(x,y)+d(y,z)$. Como la situación es simétrica en x y z, podemos estudiar primero el caso $x \le z$. Hay tres regiones posibles para y. Si $y < x$, entonces $d(x,y) = x-y, \qquad d(y,z) = z-y$. Por tanto,

$$\begin{aligned} d(x,y)+d(y,z) &= (x-y)+(z-y) \\ &= (z-x)+2(x-y). \end{aligned}$$

Como $y < x$, tenemos $x - y > 0$, luego $d(x,y) + d(y,z) > z - x = d(x,z)$, lo que contradice la igualdad supuesta. Si $y > z$, de manera análoga, $d(x,y) = y - x, \qquad d(y,z) = y - z$, y

$$\begin{aligned} d(x,y) + d(y,z) &= (y-x) + (y-z) \\ &= (z-x) + 2(y-z) \\ &> z - x = d(x,z). \end{aligned}$$

También es imposible. La única región restante es $x \le y \le z$. Si inicialmente $z \le x$, el mismo razonamiento con los extremos intercambiados produce $z \le y \le x$. En ambos casos,

$$\boxed{\min\{x,z\} \le y \le \max\{x,z\}}.$$

La igualdad triangular excluye exactamente los puntos que obligarían a salir del segmento y regresar.

Ejercicio 24. Estar entre no significa ser el punto medio

Un estudiante afirma:

> Si $d(x,z) = d(x,y) + d(y,z)$, entonces y es necesariamente el punto medio entre x y z.

1. Diagnostica el error y da un contraejemplo numérico.
2. Formula la conclusión correcta que sí se deduce de la igualdad triangular en $\mathbb{R}$.
3. Añade una condición métrica que, junto con la igualdad triangular, sí obligue a que y sea el punto medio de x y z.
4. Justifica esa afirmación sin usar resultados posteriores del capítulo.

Solución. La afirmación es falsa. La igualdad $d(x,z) = d(x,y) + d(y,z)$ sólo obliga a que y esté entre x y z; no obliga a que divida el segmento en dos partes iguales. Por ejemplo, tomemos

$$x = 0, \qquad y = 1, \qquad z = 4.$$

Entonces $d(0,4) = 4$ y $d(0,1) + d(1,4) = 1 + 3 = 4$, así que hay igualdad triangular. Sin embargo, el punto medio de 0 y 4 es 2, no 1. La conclusión correcta es

$$\boxed{d(x,z) = d(x,y) + d(y,z) \iff \min\{x,z\} \le y \le \max\{x,z\}}.$$

Para obligar además a que y sea el punto medio, basta exigir $d(x,y) = d(y,z)$. Veamos por qué. Supongamos, por ejemplo, que $x \le y \le z$. Entonces $d(x,y) = y - x$ y $d(y,z) = z - y$. La igualdad de ambas distancias da $y - x = z - y$, de donde $2y = x + z$ y por tanto

$$\boxed{y = \frac{x+z}{2}}.$$

Si $z \le y \le x$, el mismo cálculo conduce a la misma fórmula. Así, **estar entre** significa ausencia de retroceso; **ser punto medio** añade una segunda condición: las dos partes del recorrido deben tener la misma longitud.

Ejercicio 25. Medir exactamente el retroceso

Fija dos puntos $x < z$ y define, para $y \in \mathbb{R}$, $E(y) = d(x,y) + d(y,z) - d(x,z)$.

1. Demuestra que

$$E(y) = \begin{cases} 2(x-y), & y < x, \\ 0, & x \le y \le z, \\ 2(y-z), & y > z. \end{cases}$$

2. Explica por qué $E(y) \ge 0$ para todo y.

3. Determina exactamente para qué valores de y se cumple $E(y) = 0$.
4. Interpreta geométricamente el factor 2 que aparece cuando y queda fuera del segmento $[x, z]$.

Solución. Como $x < z$, tenemos $d(x, z) = z - x$. Estudiemos los tres lugares posibles de y. Si $y < x$, entonces $d(x, y) = x - y$ y $d(y, z) = z - y$. Por tanto,

$$\begin{aligned} E(y) &= (x - y) + (z - y) - (z - x) \\ &= 2x - 2y \\ &= 2(x - y). \end{aligned}$$

Si $x \leq y \leq z$, entonces $d(x, y) = y - x$, $\quad d(y, z) = z - y$, y $E(y) = (y - x) + (z - y) - (z - x) = 0$. Finalmente, si $y > z$, entonces $d(x, y) = y - x$, $\quad d(y, z) = y - z$, y

$$\begin{aligned} E(y) &= (y - x) + (y - z) - (z - x) \\ &= 2y - 2z \\ &= 2(y - z). \end{aligned}$$

Así,

$$\boxed{E(y) = \begin{cases} 2(x - y), & y < x, \\ 0, & x \leq y \leq z, \\ 2(y - z), & y > z. \end{cases}}$$

Cada expresión es no negativa en la región donde se utiliza, de modo que $E(y) \geq 0$ para todo y. Además, $E(y) = 0 \iff x \leq y \leq z$. El factor 2 tiene una interpretación precisa. Si $y < x$, para visitar y desde x recorremos una distancia $x - y$ hacia la izquierda y luego debemos recorrer de nuevo esa misma distancia para regresar hasta x antes de continuar hacia z. Ese desvío se paga dos veces. Lo mismo ocurre, simétricamente, cuando $y > z$.

Por eso $E(y)$ mide exactamente la longitud adicional causada por el retroceso. La figura C01-F11 concentra esta lectura en una sola comparación.

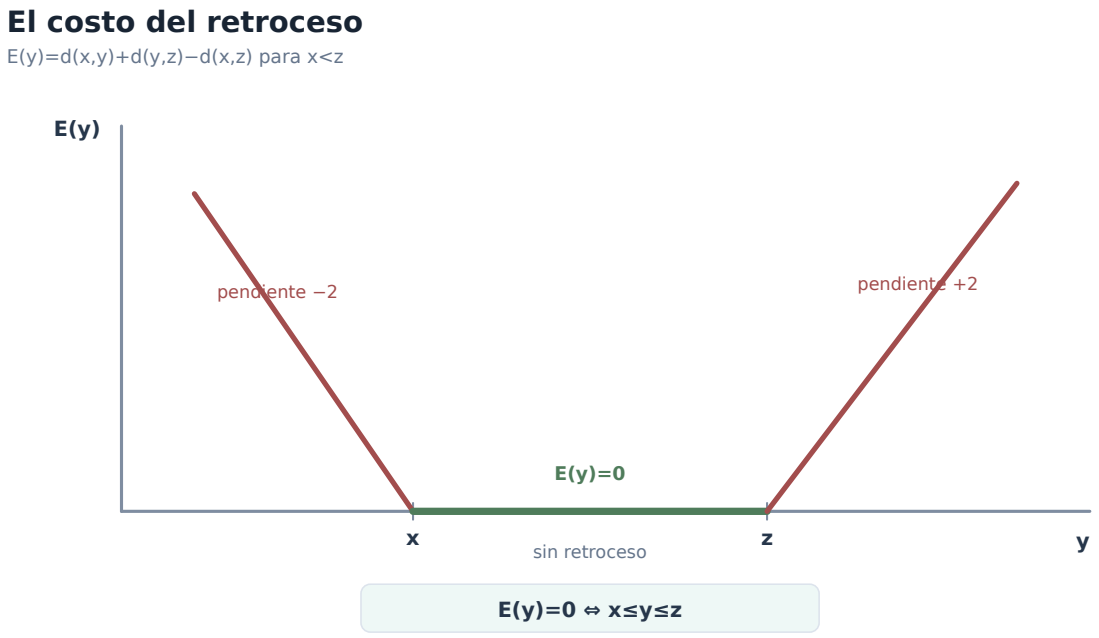


Figura 1.5. El exceso $E(y)$ es cero sobre $[x, z]$ y crece linealmente con pendiente de magnitud 2 cuando y sale del segmento.

Ejercicio 26. Cuatro puntos y una ruta sin retroceso

Supón que $x, z \in \mathbb{R}$ satisfacen $x \leq z$. Demuestra que $d(x,z) = d(x,y)+d(y,w)+d(w,z)$ si y sólo si $x \leq y \leq w \leq z$. Tu prueba debe explicar por qué, si la igualdad total se cumple, las dos desigualdades $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ y $d(y,z) \leq d(y,w) + d(w,z)$ han de convertirse simultáneamente en igualdades. Interpreta el resultado como una extensión del principio «igualdad triangular = ausencia de retroceso».

Solución. La igualdad total compara la ruta directa $x \to z$ con una ruta que visita dos puntos intermedios. Conviene insertar primero una ruta menos refinada y formar una cadena de desigualdades. Si el primer y el último término terminan siendo iguales, ninguna desigualdad intermedia puede haber sido estricta. Supongamos primero que $x \leq y \leq w \leq z$. Entonces todos los desplazamientos sucesivos son no negativos y

$$\begin{aligned} d(x,y) + d(y,w) + d(w,z) &= (y-x) + (w-y) + (z-w) \\ &= z - x \\ &= d(x,z). \end{aligned}$$

Esto prueba una dirección. Para la conversa, supongamos que $d(x,z) = d(x,y)+d(y,w)+d(w,z)$. Por desigualdad triangular, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$. Y aplicando otra vez la desigualdad triangular, ahora entre y y z pasando por w, $d(y,z) \leq d(y,w)+d(w,z)$. Sumando $d(x,y)$ a esta última desigualdad obtenemos

$d(x,y) + d(y,z) \leq d(x,y) + d(y,w) + d(w,z)$. Por tanto,

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \leq d(x,y) + d(y,w) + d(w,z).$$

Pero el primer y el último término son iguales por hipótesis. Luego las dos desigualdades intermedias deben ser igualdades: $d(x,z) = d(x,y) + d(y,z)$ y $d(y,z) = d(y,w) + d(w,z)$. La caracterización de igualdad triangular de §1.5 nos dice entonces que y está entre x y z, y que w está entre y y z. Como además $x \leq z$, la primera condición implica

$x \leq y \leq z$. Y, dado que $y \leq z$, la segunda implica $y \leq w \leq z$. Juntando ambas,

$$\boxed{x \leq y \leq w \leq z}.$$

La igualdad total caracteriza exactamente una ruta cuyos puntos visitados aparecen en orden monotónico: nunca hay que retroceder para alcanzar el siguiente punto.

Ejercicio 27. Lo que las distancias revelan —y lo que no

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tres puntos distintos. Supón que sólo conocemos las tres distancias

$$d(a,b), \qquad d(b,c), \qquad d(a,c).$$

1. Demuestra que uno de los tres puntos está entre los otros dos y que la distancia entre los dos extremos es la suma de las otras dos distancias.
2. Explica cómo determinar, a partir de las tres distancias etiquetadas, cuál de a, b, c es el punto intermedio.
3. Para

$$d(a,b) = 2, \qquad d(a,c) = 3, \qquad d(b,c) = 5,$$

identifica el punto intermedio y justifica la respuesta. 4. Demuestra que, aun conociendo las tres distancias, no podemos decidir qué extremo está a la izquierda y cuál a la derecha: construye a partir de una realización cualquiera otra realización con las mismas distancias y orientación opuesta. El objetivo es precisar hasta dónde la información métrica permite recuperar la estructura de orden y qué parte de la orientación sigue perdiéndose.

Solución. En una recta, entre tres puntos distintos uno y sólo uno queda entre los otros dos. La igualdad triangular permite reconocer ese punto usando únicamente distancias. Pero las distancias son insensibles a una reflexión, de modo que no pueden decidir la orientación izquierda–derecha completa. Ordenemos temporalmente los tres valores reales. Como son distintos, existe un orden estricto de la forma $r < s < t$, donde r, s, t son los tres puntos a, b, c en algún orden.

Como s está entre r y t, la igualdad triangular da $d(r,t) = d(r,s) + d(s,t)$. Además, $d(r,t)$ es la mayor de las tres distancias, porque $d(r,t) = t - r$, mientras que $d(r,s) = s - r < t - r$ y $d(s,t) = t - s < t - r$. Así, para tres puntos distintos, la mayor distancia es exactamente la suma de las otras dos.

Esto también permite identificar el punto intermedio a partir de las distancias etiquetadas. Por ejemplo, $d(a,c) = d(a,b) + d(b,c)$ si y sólo si b está entre a y c. Análogamente, $d(a,b) = d(a,c) + d(c,b)$ identifica a c como punto intermedio, y $d(b,c) = d(b,a) + d(a,c)$ identifica a a como punto intermedio.

En el ejemplo

$$d(a,b) = 2, \qquad d(a,c) = 3, \qquad d(b,c) = 5,$$

la mayor distancia es $d(b,c) = 5$, y $5 = 2 + 3 = d(b,a) + d(a,c)$. Por tanto,

$$\boxed{a \text{ está entre } b \text{ y } c}.$$

Queda la orientación. Supongamos que (a,b,c) es una realización concreta de esas distancias. Consideremos la configuración reflejada $(-a,-b,-c)$. Para cualquier par $u, v \in \{a,b,c\}$,

$$\begin{aligned} d(-u,-v) &= |-u-(-v)| \\ &= |-(u-v)| \\ &= |u-v| \\ &= d(u,v). \end{aligned}$$

Todas las distancias etiquetadas se conservan. Sin embargo, si por ejemplo $a < b < c$, entonces $-a > -b > -c$, de modo que la orientación se invierte. La conclusión es doble. Las distancias sí permiten recuperar **qué punto está entre los otros dos**; pero no permiten decidir **qué extremo está a la izquierda y cuál a la derecha**. La métrica permite recuperar la relación de estar entre; la elección de izquierda y derecha sigue abierta.

1.6. Bolas métricas: ventanas alrededor de un punto

Fijemos un punto a y un margen $r > 0$. Los puntos cuya separación respecto de a es menor que ese margen forman la **bola abierta de centro a y radio r**: $B(a,r) = \{x \in \mathbb{R} : d(x,a) < r\}$. El nombre no determina la forma del conjunto: debemos encontrarla usando la distancia del espacio donde trabajamos. En la recta, la definición da

$$\begin{aligned} x \in B(a,r) &\iff |x-a| < r \\ &\iff -r < x-a < r \\ &\iff a-r < x < a+r. \end{aligned}$$

La equivalencia del valor absoluto, demostrada en §1.3 para un real cualquiera, se aplica al desplazamiento $x - a$; sumar el centro conserva las desigualdades. Como todos los pasos son reversibles, obtenemos la igualdad de conjuntos

$$\boxed{B(a,r) = (a-r, a+r).}$$

Los extremos satisfacen $d(a-r,a) = |-r| = r$ y $d(a+r,a) = |r| = r$. Quedan fuera porque la definición exige una distancia estrictamente menor. El centro, en cambio, pertenece, pues

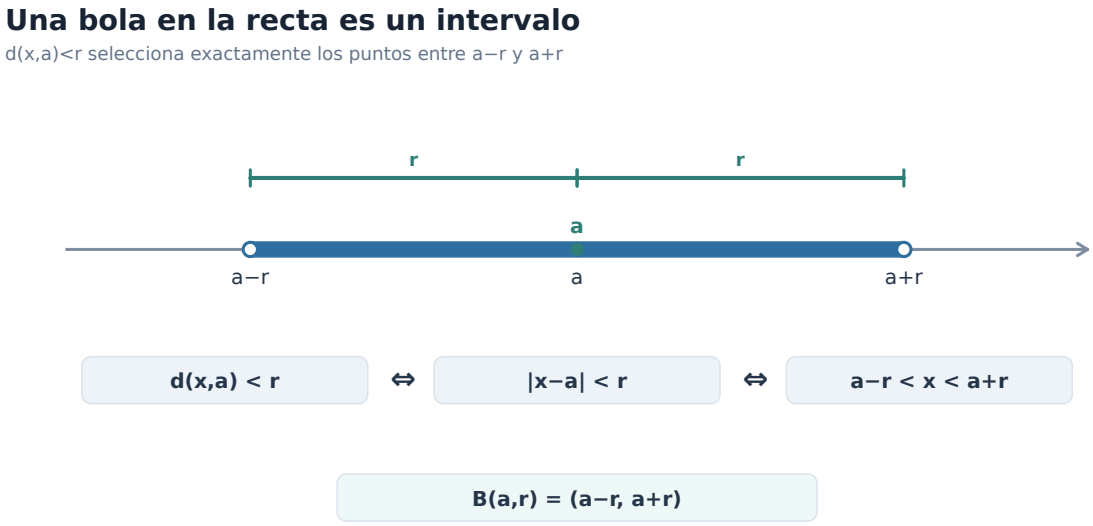


Figura 1.6. En $\mathbb{R}$, d(x,a)<r selecciona exactamente los puntos del intervalo abierto (a−r,a+r); las fronteras quedan fuera porque están a distancia r.

su distancia a sí mismo es cero y el radio es positivo. El centro y el radio controlan aspectos distintos. Mantener el radio y cambiar el centro traslada los dos extremos: $B(0,2) = (-2,2)$ y $B(5,2) = (3,7)$ tienen la misma anchura. En general,

$B(a+3,r) = (a-r+3, a+r+3)$. Si mantenemos el centro y duplicamos el radio, obtenemos $B(a,2r) = (a-2r, a+2r)$. Las dos fronteras se alejan del mismo centro y el intervalo contiene al anterior. Esta inclusión se prueba directamente desde la condición métrica: si $0 < r < s$ y $d(x,a) < r$, entonces también $d(x,a) < s$. Para comprobar que es estricta, el punto $x = a + (r+s)/2$ tiene distancia $(r+s)/2$, comprendida estrictamente entre los radios.



Figura 1.7. Mover el centro traslada la bola sin cambiar su anchura; aumentar el radio ensancha la región simétricamente alrededor del mismo centro.

Si extendiéramos la fórmula a radio cero, exigiríamos $d(x,a) < 0$, que ningún punto satisface. La misma dificultad aparece con radios negativos, de modo que esa extensión daría el conjunto vacío y excluiría incluso al centro. La definición usada aquí mantiene $r > 0$ para expresar un margen de cercanía alrededor de a. Una bola puede interpretarse así como una

tolerancia: si aceptamos un error menor que r respecto del valor de referencia a, los valores admitidos son sus puntos. Para usar esa interpretación sin perder información debemos conservar tanto el lado de la comparación como la decisión de admitir o excluir la frontera.

Ejercicios de la sección 1.6.

Ejercicio 28. Leer una bola en cuatro lenguajes

Considera la bola $B(2,3)$.

1. Escríbela usando la definición $d(x,2)<3$.
2. Reescribe la condición mediante valor absoluto.
3. Exprésala como una doble desigualdad de orden.
4. Escríbela como intervalo.
5. Decide si pertenecen a la bola los puntos -1, 2 y 5, justificando cada caso desde la condición de distancia.

El objetivo es seguir una misma región a través de varias representaciones, no memorizar el intervalo final.

Solución. Por definición,

$$B(2,3)=\{x\in\mathbb{R}:d(x,2)<3\}.$$

Como $d(x,2)=|x-2|$, la misma condición es $|x-2|<3$. Esto equivale a $-3<x-2<3$, y sumando 2 en los tres miembros obtenemos $-1<x<5$. Por tanto,

$$\boxed{B(2,3)=(-1,5)}.$$

Ahora comprobamos los puntos desde la condición métrica:

- para $x=-1$, $d(-1,2)=|-1-2|=3$, y como necesitamos una distancia estrictamente menor que 3, $-1\notin B(2,3)$;
- para $x=2$, $d(2,2)=0<3$, luego $2\in B(2,3)$;
- para $x=5$, $d(5,2)=|5-2|=3$, así que $5\notin B(2,3)$.

Los extremos del intervalo quedan fuera precisamente porque la bola usa la desigualdad estricta $d(x,2)<3$.

Ejercicio 29. Recuperar centro y radio desde un intervalo

Sea $u<v$. Demuestra que el intervalo abierto (u,v) puede escribirse como una bola $B(a,r)$ con $a=\frac{u+v}{2}$, $\quad r=\frac{v-u}{2}$. Después:

1. verifica la fórmula para el intervalo $(-5,1)$;
2. explica geométricamente por qué a es el centro del intervalo;
3. explica por qué $r>0$ se deduce de $u<v$.

No basta con sustituir en una fórmula: muestra que $a-r=u$ y $a+r=v$.

Solución. Queremos elegir a y r de modo que $B(a,r)=(a-r,a+r)=(u,v)$. Esto exige $a-r=u$, $\quad a+r=v$. Sumando ambas ecuaciones, $2a=u+v$, de donde

$$\boxed{a=\frac{u+v}{2}}.$$

Restando la primera ecuación de la segunda, $2r=v-u$, y por tanto

$$\boxed{r=\frac{v-u}{2}}.$$

Podemos verificar directamente:

$$a - r = \frac{u+v}{2} - \frac{v-u}{2}$$
$$= \frac{2u}{2} = u,$$

y

$$a + r = \frac{u+v}{2} + \frac{v-u}{2}$$
$$= \frac{2v}{2} = v.$$

Así,

$$\boxed{(u,v) = B\Big(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\Big)}.$$

Para $(-5,1)$, $a = \frac{-5+1}{2} = -2$, $r = \frac{1-(-5)}{2} = 3$, de modo que $(-5,1) = B(-2,3)$. Geométricamente, a es el punto medio entre los extremos y r es la mitad de la longitud total del intervalo. Finalmente, como $u < v$, tenemos $v - u > 0$, y por tanto $r = \frac{v-u}{2} > 0$. La positividad del radio no es una condición añadida después: está contenida en el hecho de que el intervalo tenga dos extremos distintos con $u < v$.

Ejercicio 30. Mismo centro, radios distintos

Fija $a \in \mathbb{R}$ y números $0 < r < s$.

1. Demuestra que

$B(a,r) \subset B(a,s)$.

2. Prueba que la inclusión es estricta construyendo explícitamente un punto que pertenezca a $B(a,s)$ pero no a $B(a,r)$.
3. Interpreta el resultado usando la imagen de una ventana centrada en a: ¿qué permanece y qué cambia cuando aumenta el radio?

Tu prueba de la inclusión debe partir de la condición de distancia, no sólo de un dibujo.
Solución. Supongamos $0 < r < s$. Sea $x \in B(a,r)$. Entonces, por definición,

$$d(x,a) < r.$$

Como $r < s$, $d(x,a) < r < s$, y por tanto $d(x,a) < s$. Así, $x \in B(a,s)$. Hemos probado $B(a,r) \subseteq B(a,s)$. Para ver que la inclusión es estricta, tomemos $x = a + \frac{r+s}{2}$. Como $r < s$, $r < \frac{r+s}{2} < s$. Además, $d(x,a) = \big|a + \frac{r+s}{2} - a\big| = \frac{r+s}{2}$.
Por tanto, $x \notin B(a,r)$ pero $x \in B(a,s)$. Luego

$$\boxed{B(a,r) \subsetneq B(a,s)}.$$

El centro no ha cambiado: ambas bolas están organizadas alrededor del mismo punto a. Lo que cambia es el margen admitido. Aumentar el radio ensancha simétricamente la ventana en ambos lados del centro.

Ejercicio 31. Mover el centro: cuándo dos bolas se encuentran

Fija $r > 0$ y sean $a, b \in \mathbb{R}$. Considera las dos bolas de igual radio

$$B(a,r) \qquad \text{y} \qquad B(b,r).$$

Demuestra que $B(a,r) \cap B(b,r) \neq \emptyset \iff d(a,b) < 2r$. Después analiza por separado los casos $d(a,b) = 2r$ y $d(a,b) > 2r$. Explica qué ocurre geométricamente con los dos intervalos cuando desplazamos uno de los centros alejándolo del otro, manteniendo fijo el radio.

Solución. Como ambas bolas tienen radio r, $B(a,r) = (a-r, a+r)$ y $B(b,r) = (b-r, b+r)$. Supongamos primero, sin pérdida de generalidad, que $a \leq b$. Entonces $d(a,b) = b-a$. Los dos intervalos tienen intersección no vacía exactamente cuando el extremo izquierdo de la segunda bola queda estrictamente a la izquierda del extremo derecho de la primera: $b - r < a + r$.

Reordenando, $b - a < 2r$. Como $b - a = d(a,b)$, $B(a,r) \cap B(b,r) \neq \emptyset \iff d(a,b) < 2r$. Si $b \leq a$, el mismo argumento intercambiando los centros produce la misma condición, ahora con $a - b = d(a,b)$. Por tanto, en todos los casos,

$$\boxed{B(a,r) \cap B(b,r) \neq \emptyset \iff d(a,b) < 2r}.$$

Si $d(a,b) = 2r$, los dos intervalos llegan exactamente hasta un mismo punto fronterizo, pero ese punto no pertenece a ninguna de las dos bolas en el lado correspondiente porque ambas son abiertas. Por eso la intersección sigue siendo vacía. Si $d(a,b) > 2r$, queda un espacio positivo entre los dos intervalos y también son disjuntos. Geométricamente, mantener fijo r conserva el ancho de ambas ventanas; mover los centros sólo modifica su posición relativa. Se solapan cuando la separación entre centros es menor que la suma de los dos radios, que aquí vale $2r$.

La figura C01-F12 concentra esta lectura en una sola comparación.

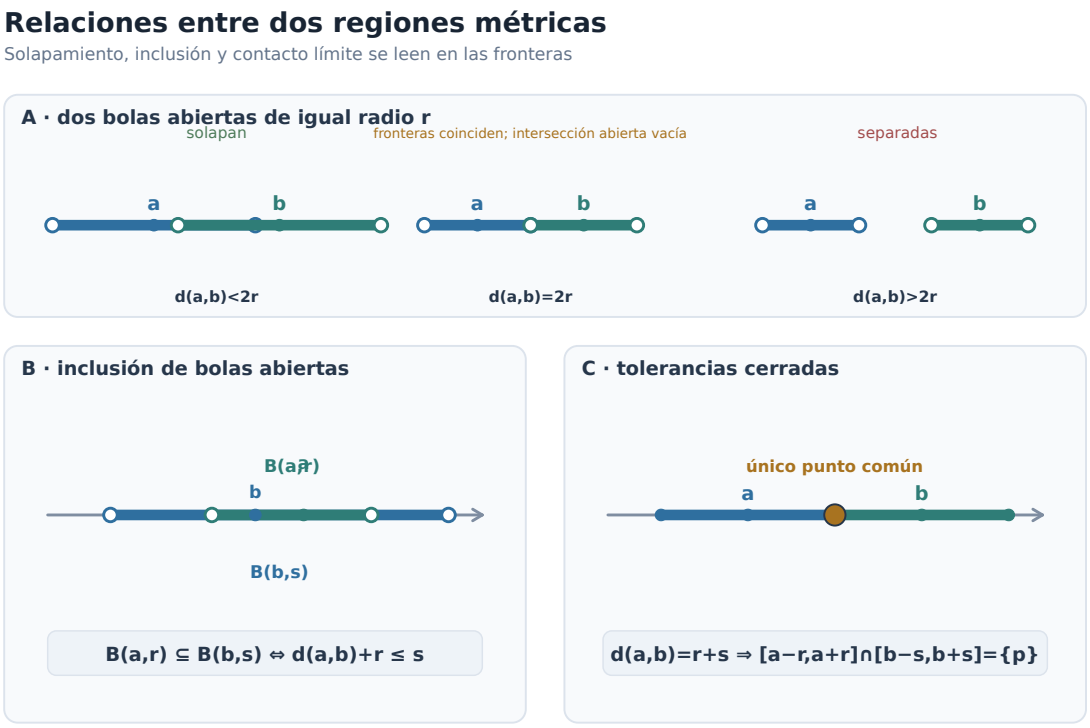


Figura 1.8. La posición relativa de las fronteras controla solapamiento, inclusión y contacto límite de bolas y tolerancias.

Ejercicio 32. Cuándo una bola cabe dentro de otra

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $r, s > 0$. Demuestra que $B(a,r) \subseteq B(b,s) \iff d(a,b) + r \leq s$. Tu prueba debe conectar dos perspectivas:

1. la representación por intervalos

$$B(a,r) = (a-r, a+r), \qquad B(b,s) = (b-s, b+s);$$

2. la interpretación métrica de $d(a,b)$ como separación entre los centros.

Explica al final por qué la condición dice exactamente que el radio de la bola grande debe alcanzar desde b hasta el punto más lejano de la bola pequeña. No uses conceptos topológicos posteriores: trabaja sólo con distancia, valor absoluto, orden e intervalos.

Solución. La inclusión de dos bolas en la recta puede leerse primero como inclusión de intervalos. Eso convierte una afirmación sobre todos los puntos de una bola en dos comparaciones entre extremos. Después esas dos comparaciones se condensan en una sola condición sobre la distancia entre los centros. Tenemos $B(a,r) = (a-r, a+r)$ y $B(b,s) = (b-s, b+s)$. La inclusión

$(a-r, a+r) \subseteq (b-s, b+s)$ se cumple si y sólo si el extremo izquierdo de la bola pequeña no queda a la izquierda del extremo izquierdo de la grande y su extremo derecho no queda a la derecha del extremo derecho de la grande. Es decir, $b-s \leq a-r$ y $a+r \leq b+s$. Para justificar la necesidad sin incluir los extremos en la bola, supongamos que $a-r < b-s$. El punto medio entre $a-r$ y $\min\{b-s, a+r\}$ queda dentro de $(a-r, a+r)$ y estrictamente a la izquierda de $b-s$, contradiciendo la inclusión. Si $a+r > b+s$, el punto medio entre $\max\{a-r, b+s\}$ y $a+r$ produce la contradicción a la derecha. Recíprocamente, las dos comparaciones de extremos dan $b-s \leq a-r < x < a+r \leq b+s$ para todo punto de la bola pequeña. También se permite que las fronteras coincidan, pues el punto x queda estrictamente entre ellas.

Reescribimos la primera desigualdad como $b-a \leq s-r$, y la segunda como $a-b \leq s-r$. Tener ambas simultáneamente equivale a $|a-b| \leq s-r$. Como $d(a,b) = |a-b|$, obtenemos $d(a,b) \leq s-r$, que es lo mismo que

$$\boxed{d(a,b) + r \leq s}.$$

Esto prueba la necesidad. Para la suficiencia, supongamos ahora que $d(a,b) + r \leq s$. Entonces $|a-b| \leq s-r$. En particular, $a-b \leq s-r$ y $b-a \leq s-r$. Estas dos desigualdades equivalen a $a+r \leq b+s$ y $b-s \leq a-r$. Por tanto, $(a-r, a+r) \subseteq (b-s, b+s)$, y así $B(a,r) \subseteq B(b,s)$.

Hemos demostrado

$$\boxed{B(a,r) \subseteq B(b,s) \iff d(a,b) + r \leq s}.$$

La suma $d(a,b)+r$ es la distancia desde b hasta la frontera más lejana de la bola pequeña. Esa frontera está excluida: las distancias de los puntos interiores se aproximan a ese valor, pero ninguno lo alcanza. Por eso la inclusión admite $d(a,b)+r = s$: cada punto interior sigue estando a distancia estrictamente menor que s de b. El panel de inclusión de la figura C01-F12 muestra esta misma condición como comparación de fronteras: el alcance total desde b hasta el extremo más lejano de la bola pequeña no puede sobrepasar el radio s.

1.7. Traducir entre orden, distancia y tolerancia

Para $a, x \in \mathbb{R}$ y $r > 0$, la descripción de la bola proporciona cuatro formas de una misma condición:

$$\boxed{\begin{aligned} |x-a| < r &\iff d(x,a) < r \\ &\iff a-r < x < a+r \\ &\iff x \in (a-r, a+r). \end{aligned}}$$

Cada forma destaca algo que puede necesitar un argumento: el valor absoluto permite calcular, la distancia expresa el margen y las desigualdades sitúan los puntos admitidos. La pertenencia nombra esa región como conjunto. Podemos recorrer la cadena en cualquiera de los dos sentidos: partiendo del intervalo, restar a da $-r < x-a < r$, y la definición por casos recupera el valor absoluto. Si admitimos la frontera, la misma discusión de signos con desigualdades no estrictas da

$$\begin{aligned} |x-a| \le r &\iff d(x,a) \le r \\ &\iff a-r \le x \le a+r \\ &\iff x \in [a-r, a+r]. \end{aligned}$$

Los puntos $a-r$ y $a+r$ están a distancia exactamente r y ahora pertenecen. El centro y el umbral son los mismos; cambia la condición de pertenencia en dos puntos concretos. Pedir una separación mayor selecciona las regiones exteriores. Si el desplazamiento es no negativo, debe ser mayor que r; si es negativo, su opuesto debe serlo. Por tanto,

$$\begin{aligned} |x-a| > r &\iff d(x,a) > r \\ &\iff x < a-r \text{ o } x > a+r \\ &\iff x \in (-\infty, a-r) \cup (a+r, \infty). \end{aligned}$$

Al admitir también los puntos a distancia igual al umbral obtenemos

$$\begin{aligned} |x-a| \ge r &\iff d(x,a) \ge r \\ &\iff x \le a-r \text{ o } x \ge a+r \\ &\iff x \in (-\infty, a-r] \cup [a+r, \infty). \end{aligned}$$

La unión de dos semirrectas registra las dos maneras de alejarse del centro. Conservar sólo una rama excluiría puntos que satisfacen la condición original; el problema 35 diagnostica ese error.

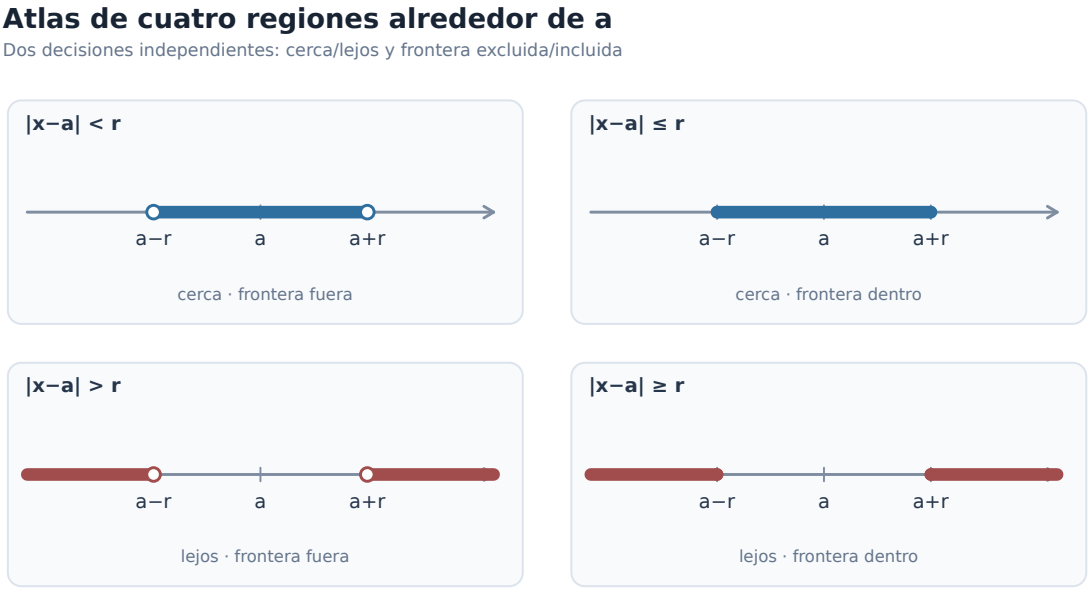


Figura 1.9. Las condiciones $<$, $\le$, $>$ y $\ge$ combinan dos decisiones: cerca o lejos del centro y frontera excluida o incluida.

Aumentar el umbral tiene efectos opuestos según la condición. Si $0 < r < s$, todo punto con $d(x,a) < r$ también cumple $d(x,a) < s$, mientras que $d(x,a) > s$ implica $d(x,a) > r$. La región interior crece y la exterior se contrae. Las dos inclusiones son estrictas: el punto $a + (r+s)/2$ tiene distancia entre ambos umbrales y permite distinguir los conjuntos en cada caso.

En una condición de tolerancia, cambiar $<$ por $\le$ puede decidir si un valor es admisible; cambiar $<$ por $>$ cambia la región entera. Mantener esas decisiones durante la traducción permite pasar de una estimación a un conjunto y volver a la estimación sin alterar el problema.

Los ejercicios finales estudian cómo se combinan dos márgenes y qué ocurre al imponer a la vez un umbral inferior y otro superior.

Ejercicios de la sección 1.7.

Ejercicio 33. Una tolerancia escondida dentro de una expresión lineal

Considera la condición $|2x - 5| < 3$.

1. Reescríbela en la forma $|x - a| < r$, identificando el centro a y el radio r.
2. Exprésala como una desigualdad de distancia $d(x, a) < r$.
3. Tradúcela a una doble desigualdad de orden.
4. Escribe el conjunto solución como intervalo.
5. Explica por qué dividir toda la desigualdad por 2 no cambia el sentido de la comparación.

El objetivo es reconocer primero la estructura de tolerancia y sólo después resolver la desigualdad.

Solución. Partimos de $|2x - 5| < 3$. Factorizamos 2 dentro del valor absoluto:

$$|2x - 5| = \left|2\left(x - \frac{5}{2}\right)\right| = 2\left|x - \frac{5}{2}\right|.$$

Como $2 > 0$, dividir ambos lados de la desigualdad por 2 conserva el sentido de la comparación. Obtenemos $\left|x - \frac{5}{2}\right| < \frac{3}{2}$. Así, el centro es $a = \frac{5}{2}$ y el radio es $r = \frac{3}{2}$. En lenguaje de distancia, $d\left(x, \frac{5}{2}\right) < \frac{3}{2}$. Traducimos ahora a orden: $\frac{5}{2} - \frac{3}{2} < x < \frac{5}{2} + \frac{3}{2}$, es decir, $1 < x < 4$. Por tanto,

$$\boxed{x \in (1, 4)}.$$

El paso decisivo no fue «resolver una desigualdad con valor absoluto» de forma mecánica, sino reconocer que la expresión escondía una condición de tolerancia alrededor del centro $5/2$.

Ejercicio 34. Estar lejos de un centro

Traduce completamente la condición $|3x + 6| \geq 9$ hasta obtener:

1. una condición de distancia respecto de un centro;
2. una disyunción de desigualdades de orden;
3. una unión de regiones de la recta.

Después decide si los puntos -5, -2 y 1 pertenecen al conjunto solución, justificando cada respuesta desde la condición original.

Solución. Comenzamos con $|3x + 6| \geq 9$. Factorizamos 3: $|3(x + 2)| \geq 9$. Como $|3| = 3$, $3|x + 2| \geq 9$, y dividiendo por $3 > 0$, $|x + 2| \geq 3$. Esto es $|x - (-2)| \geq 3$, de modo que, en lenguaje métrico,

$$\boxed{d(x, -2) \geq 3}.$$

Estar al menos a 3 unidades de -2 significa quedar en una de las dos regiones exteriores:

$$x \leq -2 - 3 \qquad \text{o} \qquad x \geq -2 + 3.$$

Por tanto,

$$\boxed{x \leq -5 \quad \text{o} \quad x \geq 1}.$$

En notación de regiones,

$$\boxed{(-\infty, -5] \cup [1, \infty)}.$$

Comprobemos los tres puntos en la condición original. Para $x = -5$, $|3(-5)+6| = |-9| = 9$, así que -5 pertenece. Para $x = -2$, $|3(-2) + 6| = 0 < 9$, por lo que -2 no pertenece. Para $x = 1$, $|3(1)+6| = 9$, así que 1 pertenece. Los dos extremos se incluyen porque la comparación original es $\geq$, no $>$.

Ejercicio 35. Una rama desaparecida

Un estudiante afirma que, para $r > 0$, $|x - a| > r \iff x > a + r$.

1. Explica qué parte de la región solución ha desaparecido.
2. Da un contraejemplo numérico a la equivalencia propuesta.
3. Escribe la equivalencia correcta en lenguaje de orden.
4. Exprésala como unión de intervalos.
5. Explica por qué el error es fácil de cometer si se piensa en $x-a$ como desplazamiento orientado y no en $|x - a|$ como distancia.

Solución. La equivalencia propuesta es falsa porque conserva sólo la región situada a la derecha del centro. La condición $|x-a| > r$ no pregunta si el desplazamiento $x-a$ es grande y positivo, sino si su **tamaño** es mayor que r. Eso puede ocurrir a cualquiera de los dos lados de a. Por ejemplo, tomemos

$$a = 0, \qquad r = 2, \qquad x = -3.$$

Entonces $|x - a| = |-3| = 3 > 2$, pero $x = -3 \not> 2 = a + r$. Así, el punto satisface la condición original y queda excluido por la supuesta equivalencia. La traducción correcta es

$$|x - a| > r \iff x < a - r \quad \text{o} \quad x > a + r.$$

Como unión de intervalos,

$$\boxed{x \in (-\infty, a - r) \cup (a + r, \infty)}.$$

El error proviene de tratar $x-a$ como si sólo importara su signo positivo. El valor absoluto elimina la orientación y conserva la separación: una distancia mayor que r puede alcanzarse alejándose hacia la derecha o hacia la izquierda.

Ejercicio 36. Entre dos umbrales de distancia

Sean $a \in \mathbb{R}$ y $0 < r < s$. Considera la condición $r < d(x, a) \leq s$.

1. Reescríbela mediante valor absoluto.
2. Traduce la condición a desigualdades de orden.
3. Describe el conjunto solución como unión de intervalos.
4. Indica cuáles de los cuatro puntos $a - s$, $a - r$, $a + r$ y $a + s$ pertenecen al conjunto.
5. Explica por qué la región obtenida tiene dos componentes separadas por una zona central excluida.

Solución. La condición es $r < d(x, a) \leq s$, con $0 < r < s$. Como $d(x, a) = |x - a|$, $r < |x - a| \leq s$. Podemos leerla como la intersección de dos requisitos: $|x - a| > r$ y $|x - a| \leq s$. El primero exige

$$x < a - r \qquad \text{o} \qquad x > a + r,$$

mientras que el segundo exige $a-s \leq x \leq a+s$. Al combinar ambas condiciones obtenemos dos regiones: $a - s \leq x < a - r$ o $a + r < x \leq a + s$. Por tanto,

$$\boxed{\{x : r < d(x, a) \leq s\} = [a - s, a - r) \cup (a + r, a + s]}.$$

Revisemos las cuatro fronteras:

- $a - s$ pertenece, porque su distancia a a es exactamente s y se permite $\leq s$;
- $a - r$ no pertenece, porque su distancia es exactamente r y se exige $> r$;

- $a + r$ tampoco pertenece por la misma razón;
- $a + s$ sí pertenece.

La zona central $[a - r, a + r]$ queda excluida porque allí la distancia al centro no supera r. Por eso el conjunto solución se parte en dos componentes: estamos seleccionando puntos que están **suficientemente lejos** de a, pero no **demasiado lejos**.

Ejercicio 37. Dos tolerancias simultáneas

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $r, s > 0$. Estudia el conjunto de puntos que satisfacen simultáneamente $d(x, a) \leq r$ y $d(x, b) \leq s$.

1. Traduce ambas condiciones a intervalos cerrados.
2. Escribe su intersección usando max y min.
3. Demuestra que existe al menos un punto que satisface ambas tolerancias si y sólo si $d(a, b) \leq r + s$.
4. Interpreta la condición final como comparación entre la separación de los centros y los márgenes de tolerancia disponibles.

Pista conceptual. Antes de manipular valores absolutos, piensa qué significa que dos intervalos cerrados centrados en a y b tengan un punto común.

Solución. Cada desigualdad de distancia describe un intervalo cerrado. Pedir que ambas se cumplan a la vez significa tomar la intersección de esos dos intervalos. La cuestión de existencia se convierte entonces en preguntar cuándo esos intervalos alcanzan a tocarse. Las dos condiciones equivalen a $a - r \leq x \leq a + r$ y $b - s \leq x \leq b + s$. Por tanto, los puntos que satisfacen ambas son

$[a - r, a + r] \cap [b - s, b + s]$. Cuando la intersección no es vacía, puede escribirse como

$$\boxed{[\max\{a - r, b - s\}, \min\{a + r, b + s\}]}.$$

Esta expresión representa un intervalo no vacío exactamente cuando $\max\{a - r, b - s\} \leq \min\{a + r, b + s\}$. Equivalente y geométricamente más transparente es exigir que ninguno de los intervalos quede completamente a un lado del otro: $a - r \leq b + s$ y $b - s \leq a + r$. Estas desigualdades se reescriben como $a - b \leq r + s$ y $b - a \leq r + s$.

Tener ambas simultáneamente equivale a $|a - b| \leq r + s$. Como $d(a, b) = |a - b|$,

$$\boxed{[a - r, a + r] \cap [b - s, b + s] \neq \emptyset \iff d(a, b) \leq r + s}.$$

La interpretación es inmediata: los dos márgenes disponibles, r desde a y s desde b, deben alcanzar conjuntamente a cubrir la separación entre los centros. Si $d(a, b) = r + s$, los intervalos se tocan en un solo punto, que pertenece a ambos porque las dos tolerancias usan $\leq$. El panel de contacto cerrado de la figura C01-F12 contrasta este caso con el contacto de bolas abiertas: aquí el punto de tangencia sí pertenece a ambas regiones porque las desigualdades no son estrictas.

Ejercicio 38. Una familia que no crece por inclusión

Fija $a \in \mathbb{R}$ y, para cada $t > 0$, define $A_t = \{x \in \mathbb{R} : t < d(x, a) \leq 2t\}$.

1. Traduce A_t a una unión de intervalos.
2. Sean $0 < t < s$. Demuestra que, en general, ni $A_t \subseteq A_s$ ni $A_s \subseteq A_t$.
3. Caracteriza exactamente cuándo $A_t \cap A_s$ es vacío y cuándo no lo es.
4. Si la intersección es no vacía, descríbela mediante una condición sobre $d(x, a)$.
5. Explica por qué aquí «aumentar el parámetro» no produce una familia anidada como ocurría con las bolas $B(a, r)$.

Pista conceptual. En vez de mirar primero los puntos x, mira los valores posibles de la distancia $d(x, a)$. Para A_t esos valores forman un intervalo de tolerancias, no una región del tipo $d(x, a) < t$.

Solución. La condición no selecciona todos los puntos hasta una distancia máxima, como una bola. Selecciona una **banda de distancias**: demasiado cerca queda fuera y demasiado lejos también. Por eso mover t desplaza simultáneamente los dos umbrales y destruye la monotonía por inclusión. Por definición,

$$A_t = \{x : t < d(x,a) \leq 2t\}.$$

Aplicando la traducción del ejercicio anterior con umbral interior t y exterior $2t$,

$$\boxed{A_t = [a-2t, a-t) \cup (a+t, a+2t]}.$$

Ahora sean $0 < t < s$. Para ver que $A_t \not\subseteq A_s$, elegimos una distancia q tal que $t < q < \min\{s, 2t\}$. Podemos elegir explícitamente $q = (t + \min\{s, 2t\})/2$, porque tanto s como $2t$ son mayores que t. Tomemos $x = a + q$. Entonces $t < d(x,a) = q \leq 2t$, por lo que $x \in A_t$, pero $q < s$, de modo que $x \notin A_s$.

Para ver que $A_s \not\subseteq A_t$, basta tomar $x = a + 2s$. Entonces $s < 2s \leq 2s$, así que $x \in A_s$. Como $s > t$, $2s > 2t$, de modo que $x \notin A_t$. Por tanto, para todo $0 < t < s$,

$$\boxed{A_t \not\subseteq A_s \quad \text{y} \quad A_s \not\subseteq A_t}.$$

Para estudiar la intersección conviene mirar las **distancias posibles**. Un punto pertenece a $A_t \cap A_s$ exactamente cuando su distancia $\rho = d(x,a)$ satisface a la vez $t < \rho \leq 2t$ y $s < \rho \leq 2s$. Como $t < s$, la condición conjunta se reduce a $s < \rho \leq 2t$. Existe tal ρ si y sólo si $s < 2t$. Así,

$$\boxed{A_t \cap A_s = \emptyset \iff s \geq 2t}.$$

Y cuando $s < 2t$,

$$\boxed{A_t \cap A_s = \{x : s < d(x,a) \leq 2t\}}.$$

Si se desea volver al lenguaje de regiones de la recta, $A_t \cap A_s = [a-2t, a-s) \cup (a+s, a+2t]$. La diferencia con las bolas es estructural. En una bola $B(a,r)$ sólo hay un umbral superior: aumentar r admite todos los puntos anteriores y algunos nuevos. En A_t, en cambio, aumentar t mueve hacia afuera tanto el umbral interior como el exterior. Algunos puntos nuevos entran por fuera, mientras otros que antes eran admisibles quedan demasiado cerca y salen por dentro. Por eso la familia no es anidada.

La figura C01-F13 concentra esta lectura en una sola comparación.

1.8. Qué ve el orden y qué ve la distancia

Las traducciones anteriores coordinan orden y distancia, pero no identifican su información. Podemos precisar la diferencia transformando simultáneamente todos los puntos y comprobando qué relaciones se conservan. Una **traslación** suma un mismo real c a cada punto, $x \mapsto x + c$. De $x < y$ se obtiene $x + c < y + c$, y al comparar las imágenes la constante se cancela:

$$\begin{aligned} d(x+c, y+c) &= |(x+c) - (y+c)| \\ &= |x - y| = d(x,y). \end{aligned}$$

La traslación conserva el orden y todas las distancias. Las separaciones de una configuración, por sí solas, no fijan una posición absoluta sobre la recta. Para una **escala** $x \mapsto \lambda x$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, utilizamos la identidad $|uv| = |u||v|$. La definición por casos la justifica separando los signos de los factores: si alguno es cero, ambos miembros son cero; para factores no nulos, las magnitudes se multiplican y el valor absoluto elimina el signo del producto. Así,



Figura 1.10. En A_t={x: t<d(x,a)≤2t}, aumentar t mueve los dos umbrales; por eso la familia no es monótona por inclusión y A_t∩A_s es vacía exactamente cuando s≥2t.

$$\begin{aligned} d(\lambda x, \lambda y) &= |\lambda(x-y)| \\ &= |\lambda|\,|x-y| \\ &= |\lambda|\,d(x,y). \end{aligned}$$

Todas las distancias se multiplican por el mismo factor no negativo. Si $\lambda > 0$, se conserva el orden estricto; si $\lambda < 0$, se invierte. Por ejemplo, los factores 3 y -3 convierten ambos una separación de longitud 2 en una de longitud 6, aunque el primero conserva la orientación y el segundo la invierte. Una aplicación que conserva todas las distancias se llama **isometría**. Entre las escalas, eso ocurre exactamente cuando $|\lambda| = 1$: la suficiencia se lee en la fórmula, y la necesidad se obtiene aplicándola a los puntos 0 y 1, cuya distancia es uno. La elección $\lambda = -1$ produce la reflexión

$x \mapsto -x, \qquad d(-x,-y) = d(x,y)$, que invierte toda desigualdad estricta: $x < y \iff -x > -y$. Una configuración y su reflejo tienen las mismas distancias etiquetadas, pero orientaciones opuestas. Las distancias sí permiten recuperar la relación no orientada de estar entre, gracias a la igualdad triangular de §1.5; la elección de izquierda y derecha queda abierta.

El caso $\lambda = 0$ exige otra interpretación. Todos los puntos se envían a cero y la ley de escala sigue siendo válida: $d(0,0) = 0 = |0|\,d(x,y)$. Sin embargo, dos puntos distintos adquieren la misma imagen. La transformación no conserva ni invierte el orden **estricto**, porque ninguna de las desigualdades $0 < 0$ o $0 > 0$ es verdadera. Es un colapso de las distancias y de la distinción entre puntos, diferente de una reflexión.

Hemos visto que la distancia puede conservarse mientras cambia la orientación, y que el orden puede conservarse mientras cambian las distancias. En la recta estándar podemos traducir las regiones de cercanía a intervalos y reconocer la posición intermedia mediante una igualdad métrica, pero esas traducciones no eliminan la elección de orientación. El problema 42 completa esta observación: al clasificar todas las isometrías, mostrará que una vez elegidos la imagen del origen y un sentido global, las distancias fuerzan todas las demás imágenes.



Figura 1.11. Traslación, escala positiva, reflexión y $\lambda=0$ afectan de manera distinta orden y métrica; preservar distancia exacta no es lo mismo que escalarla uniformemente.

Ejercicios de la sección 1.8.

Ejercicio 39. Preservar distancias no significa preservar orientación

Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una aplicación que preserva todas las distancias: $d(F(x), F(y)) = d(x, y)$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$. Un estudiante concluye:

> Si $x < y$, entonces necesariamente $F(x) < F(y)$, porque una aplicación que preserva distancias conserva toda la geometría de la recta.

1. Diagnostica la afirmación mediante un contraejemplo explícito.
2. Demuestra, sin embargo, que F sí preserva la relación «estar entre»: si y está entre x y z, entonces $F(y)$ está entre $F(x)$ y $F(z)$.
3. Explica con precisión qué información métrica se conserva y qué información de orientación puede perderse.

No supongas que F es lineal o afín.

Solución. La conclusión del estudiante es falsa. Basta considerar la reflexión $F(x) = -x$. Para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} d(F(x), F(y)) &= d(-x, -y) \\ &= |-x - (-y)| \\ &= |-(x - y)| \\ &= |x - y| \\ &= d(x, y). \end{aligned}$$

Así, F preserva todas las distancias. Sin embargo, si $x < y$, entonces $-x > -y$, por lo que la orientación se invierte. Veamos ahora qué estructura sí queda forzada por las distancias. Supongamos que y está entre x y z. Por la caracterización de §1.5, $d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)$. Como F preserva todas las distancias,

$$\begin{aligned} d(F(x), F(z)) &= d(x, z) \\ &= d(x, y) + d(y, z) \\ &= d(F(x), F(y)) + d(F(y), F(z)). \end{aligned}$$

Aplicando de nuevo la caracterización de igualdad triangular en $\mathbb{R}$, concluimos que $F(y)$ está entre $F(x)$ y $F(z)$. Por tanto, una isometría conserva separaciones y también la relación no orientada de estar entre. Lo que las distancias no determinan es **qué dirección llamamos izquierda y cuál derecha**. Una reflexión conserva toda la información métrica y la relación de estar entre, pero cambia globalmente la orientación.

Ejercicio 40. Trasladar y escalar en una sola transformación

Para $\lambda, c \in \mathbb{R}$, define $T_{\lambda,c}(x) = \lambda x + c$.

1. Demuestra que

$d(T_{\lambda,c}(x), T_{\lambda,c}(y)) = |\lambda|\, d(x, y)$.

2. Clasifica completamente los valores de λ para los cuales $T_{\lambda,c}$:
   - preserva exactamente todas las distancias;
   - preserva el orden estricto;
   - invierte el orden estricto;
   - colapsa puntos distintos.
3. Determina todas las transformaciones de esta familia que preservan simultáneamente todas las distancias y el orden.
4. Determina todas las que preservan todas las distancias e invierten el orden.
5. Explica por qué el parámetro c no interviene ni en el factor de escala de las distancias ni en el sentido de la orientación.

Pista conceptual. Separa el efecto de sumar c del efecto de multiplicar por λ.

Solución. La transformación combina dos operaciones ya conocidas: primero multiplicamos por λ y después trasladamos por c. La traslación no altera ni las distancias ni el sentido del orden; toda la clasificación dependerá, por tanto, de λ. Para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} d(T_{\lambda,c}(x), T_{\lambda,c}(y)) &= |\lambda x + c - (\lambda y + c)| \\ &= |\lambda(x - y)| \\ &= |\lambda|\, |x - y| \\ &= |\lambda|\, d(x, y). \end{aligned}$$

Si se preservan todas las distancias, aplicar la fórmula a $x = 0$ e $y = 1$ obliga a $|\lambda| = 1$. Recíprocamente, ese valor hace que el factor de escala sea uno para cualquier par. Por tanto, las distancias se preservan exactamente si y sólo si $|\lambda| = 1$, es decir,

$$\lambda = 1 \qquad \text{o} \qquad \lambda = -1.$$

Ahora examinemos el orden. Si $x < y$:

- cuando $\lambda > 0$, multiplicar por λ conserva la desigualdad y sumar c tampoco la altera, de modo que $T_{\lambda,c}(x) < T_{\lambda,c}(y)$;
- cuando $\lambda < 0$, la multiplicación invierte la desigualdad y la traslación conserva esa nueva orientación: $T_{\lambda,c}(x) > T_{\lambda,c}(y)$;
- cuando $\lambda = 0$, $T_{0,c}(x) = c$ para todo x, de modo que todos los puntos colapsan en uno solo.

La clasificación completa es entonces:

condición sobre λ	distancias	orden estricto
$\lambda > 0$	$\times\lambda$	preservado
$\lambda < 0$	$\times\lvert\lambda\rvert$	invertido
$\lambda = 0$	colapsan a 0	ni preservado ni invertido

Para preservar **simultáneamente todas las distancias y el orden**, necesitamos $|\lambda| = 1$ y $\lambda > 0$. Luego necesariamente

$$\boxed{\lambda = 1},$$

por lo que las transformaciones buscadas son exactamente

$$\boxed{T(x) = x + c}.$$

Para preservar todas las distancias e invertir el orden necesitamos $|\lambda| = 1$ y $\lambda < 0$, así que

$$\boxed{\lambda = -1}$$

y las transformaciones son

$$\boxed{T(x) = -x + c}.$$

El parámetro c desaparece al restar dos imágenes: $(\lambda x + c) - (\lambda y + c) = \lambda(x - y)$. Por eso no modifica la separación relativa ni el sentido de la orientación: sólo desplaza toda la configuración rígidamente.

Ejercicio 41. Componer transformaciones: escala y orientación

Sean $S(x) = \lambda x + c, \qquad T(x) = \mu x + d$, con $\lambda, \mu \neq 0$.

1. Calcula $T \circ S$ y demuestra que su factor de escala métrica es $|\mu\lambda|$.
2. Prueba que $T \circ S$ preserva el orden si $\mu\lambda > 0$ y lo invierte si $\mu\lambda < 0$.
3. Explica por qué dos transformaciones que invierten la orientación producen, al componerse, una transformación que la preserva.
4. Para $p \in \mathbb{R}$, define la reflexión respecto del punto p por

$R_p(x) = 2p - x$. Demuestra que $R_q \circ R_p(x) = x + 2(q - p)$.

5. Interpreta el resultado: ¿por qué la composición de dos reflexiones de la recta es una traslación? ¿Qué ocurre cuando $p = q$?

Pista conceptual. En la composición, los factores de escala se multiplican y los signos registran cuántas inversiones de orientación se han acumulado.

Solución. Cada transformación lleva dos datos estructurales: un factor métrico positivo, $|\lambda|$ o $|\mu|$, y un signo que decide la orientación. Al componer, ambos datos se multiplican. Calculamos primero:

$$\begin{aligned}(T \circ S)(x) &= T(\lambda x + c)\\ &= \mu(\lambda x + c) + d\\ &= \mu\lambda x + (\mu c + d).\end{aligned}$$

Así, $T \circ S$ vuelve a ser una transformación afín y su coeficiente lineal es $\mu\lambda$. Para las distancias,

$$\begin{aligned}d((T \circ S)(x), (T \circ S)(y)) &= |\mu\lambda|\, d(x, y)\\ &= |\mu|\,|\lambda|\, d(x, y).\end{aligned}$$

Por tanto, el factor total de escala métrica es el producto de los factores individuales. Como λ y μ son no nulos, el signo de $\mu\lambda$ decide la orientación:

$$\mu\lambda > 0 \quad \Longrightarrow \quad T \circ S \text{ preserva el orden,}$$

mientras que

$$\mu\lambda < 0 \quad \Longrightarrow \quad T \circ S \text{ invierte el orden.}$$

Si ambas transformaciones invierten orientación, entonces $\lambda < 0$ y $\mu < 0$, de modo que $\mu\lambda > 0$. Dos inversiones sucesivas restauran, por tanto, la orientación original. Pasemos a las reflexiones respecto de puntos. Para $R_p(x) = 2p - x$ y $R_q(x) = 2q - x$, obtenemos

$$\begin{aligned}(R_q \circ R_p)(x) &= R_q(2p - x) \\ &= 2q - (2p - x) \\ &= x + 2(q - p).\end{aligned}$$

Luego

$$\boxed{R_q \circ R_p(x) = x + 2(q - p)}.$$

La composición de dos reflexiones es, por tanto, una traslación. Cada reflexión invierte la orientación, pero las dos inversiones se cancelan. Métricamente, cada una tiene factor 1, así que la composición también preserva exactamente las distancias. Si $p = q$, entonces $2(q - p) = 0$, y obtenemos $R_p \circ R_p(x) = x$. Reflejar dos veces respecto del mismo punto devuelve cada punto a su posición original.

La conclusión transferible es que la orientación se comporta multiplicativamente mediante el signo, mientras que el cambio de escala métrica se comporta multiplicativamente mediante el valor absoluto.

Ejercicio 42. Clasificar todas las isometrías de la recta

Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una aplicación que preserva todas las distancias: $d(F(x), F(y)) = d(x, y)$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$. Demuestra que existe un número $c \in \mathbb{R}$ tal que necesariamente ocurre exactamente una de las dos formas $F(x) = x+c$ para todo x, o bien $F(x) = -x+c$ para todo x. En otras palabras: demuestra que **toda isometría de la recta es una traslación o una reflexión seguida de una traslación**.

Después deduce que toda isometría de $\mathbb{R}$ o bien preserva todas las desigualdades estrictas, o bien las invierte todas. *Pista conceptual.* Empieza eliminando $F(0)$ mediante una traslación. Si consigues una isometría G con $G(0) = 0$, entonces $|G(x)| = |x|$ para todo x. El paso difícil es demostrar que la elección del signo no puede cambiar de un punto a otro.

Solución. No sabemos que F sea lineal, afín, continua ni monótona. Sólo conocemos todas sus distancias. El primer paso es normalizarla para que fije el origen; después veremos que cada punto sólo puede ir a una de dos posiciones, y finalmente habrá que demostrar que esas elecciones no pueden hacerse de manera independiente. Sea $c = F(0)$ y definamos $G(x) = F(x) - c$. Restar la misma constante a todas las imágenes no cambia sus distancias, de modo que G sigue siendo una isometría. Además,

$G(0) = F(0) - c = 0$. Como G preserva la distancia al origen, $|G(x)| = d(G(x), 0) = d(G(x), G(0)) = d(x, 0) = |x|$. Por tanto, para cada x individualmente,

$$G(x) = x \qquad \text{o} \qquad G(x) = -x.$$

Hasta aquí parecería posible elegir el signo de forma distinta en puntos diferentes. Vamos a demostrar que no. Tomemos un punto $a > 0$. Como $|G(a)| = a$, sólo hay dos casos.

Caso 1: $G(a) = a$

Sea $x > 0$. Si ocurriera $G(x) = -x$, entonces, usando que G preserva distancias,

$$|x - a| = d(x, a) = d(G(x), G(a)) = |-x - a| = x + a.$$

Como $x, a > 0$, tenemos $x + a - |x - a| = 2\min\{x, a\} > 0$. En particular, $|x - a| < x + a$, contradicción. Por tanto, $G(x) = x$ para todo $x > 0$. Sea ahora $x < 0$ y escribamos $u = -x > 0$. Ya sabemos que $G(u) = u$. Además $|G(x)| = u$, así que $G(x)$ es u o $-u$. Si $G(x) = u$, entonces $d(G(x), G(u)) = 0$, mientras que

$d(x, u) = |-u - u| = 2u > 0$, lo cual contradice la preservación de distancias. Así, $G(x) = -u = x$. Junto con $G(0) = 0$, concluimos $G(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por consiguiente, $F(x) = G(x) + c = x + c$.

Caso 2: $G(a) = -a$

El argumento es simétrico. Si $x > 0$ y supusiéramos $G(x) = x$, entonces $d(G(x), G(a)) = |x - (-a)| = x + a$, mientras que $d(x, a) = |x - a| < x + a$, contradicción. Luego $G(x) = -x$ para todo $x > 0$. Si $x < 0$, escribimos otra vez $u = -x > 0$. Como $G(u) = -u$, y $G(x)$ sólo puede ser u o $-u$, la posibilidad $G(x) = -u$ haría

$d(G(x), G(u)) = 0$ aunque $d(x, u) = 2u > 0$. Por tanto, $G(x) = u = -x$. También en $x = 0$ vale $G(0) = -0$. Así, $G(x) = -x$ para todo real x, y por consiguiente $F(x) = -x + c$. Las dos formas obtenidas preservan todas las distancias, como muestra $|(x + c) - (y + c)| = |x - y|$ y $|(-x + c) - (-y + c)| = |x - y|$. Son familias excluyentes: si una aplicación tuviera ambas formas, evaluar en cero igualaría las constantes y evaluar en uno exigiría $1 = -1$. Hemos demostrado la clasificación completa:

$$\boxed{F(x) = x + c \quad \text{o} \quad F(x) = -x + c}$$

con una sola de las dos formas válida globalmente. La primera familia preserva el orden estricto: $x < y \Longrightarrow x + c < y + c$. La segunda lo invierte: $x < y \Longrightarrow -x + c > -y + c$. Por tanto, toda isometría de la recta posee una orientación global coherente: o preserva todas las desigualdades estrictas o las invierte todas. Este resultado cierra el hilo conceptual del capítulo. Las distancias determinan la geometría de la recta **hasta una elección global de orientación**. Una vez fijado dónde está el origen de la imagen y cuál de las dos orientaciones elegimos, no queda libertad adicional.

La figura C01-F14 concentra esta lectura en una sola comparación.

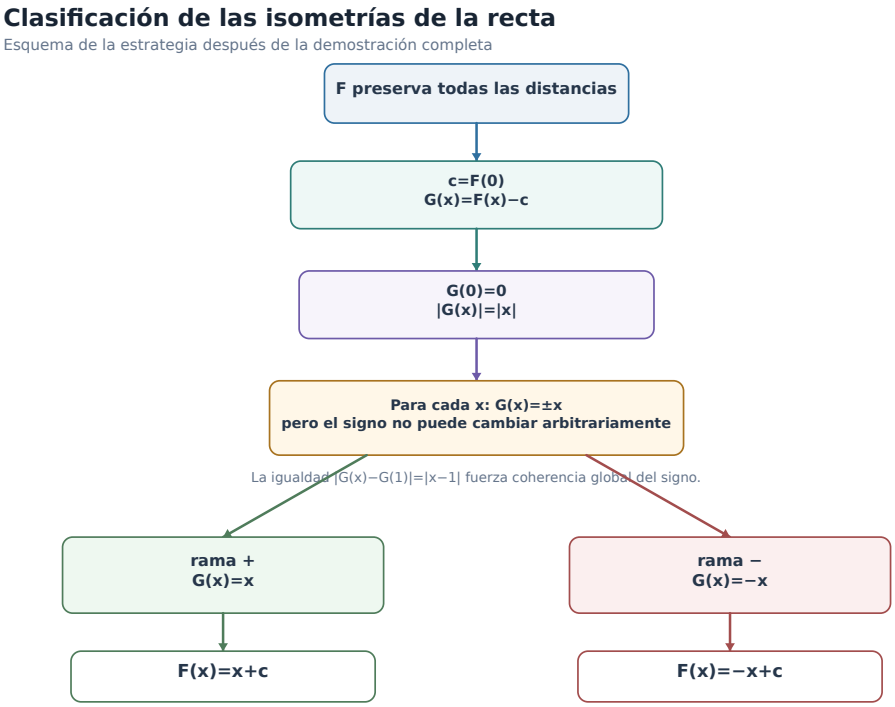


Figura 1.12. Tras normalizar $F(0)$, toda isometría fija el origen y sólo puede elegir un signo global: las dos ramas finales son traslación o reflexión seguida de traslación.

Capítulo 2

Cotas, extremos y barreras

Un conjunto puede contener muchos números y, aun así, admitir una descripción sencilla de hasta dónde llegan. Para $A = \{-2, 0, 1, 3\}$, por ejemplo, sabemos que ningún elemento supera 3. También podríamos decir que ninguno supera 5, aunque ese dato deja más espacio entre el conjunto y la barrera elegida. Con el intervalo $(0, 1)$ ocurre algo parecido: todos sus puntos quedan por debajo de 1, pero esta vez la barrera no pertenece al conjunto. La relación de orden permite describir ambas situaciones y separar dos preguntas que el dibujo de la recta tiende a confundir: cuál es la barrera más ajustada y si algún elemento del conjunto la alcanza.

En C00 construimos los números reales y establecimos su completitud. Aquí desarrollaremos el lenguaje que permite reconocer y comparar sus extremos, procurando identificar qué argumentos usan sólo el orden y cuáles necesitan aquella propiedad de existencia. Esta distinción resulta útil incluso cuando ya conocemos la completitud: nos permite transportar una prueba a otros sistemas ordenados y localizar el punto preciso en que ese transporte deja de funcionar.

2.1. Controlar un conjunto desde arriba y desde abajo

Para el conjunto finito de la apertura, tanto 3 como 5 controlan todos los elementos desde arriba. El número 2 falla, porque el elemento 3 lo sobrepasa. Lo que decide cada respuesta es una comparación con **todos** los elementos del conjunto. Dado $A \subseteq \mathbb{R}$, llamamos **cota superior** de A a un número $u \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq u$ para todo $a \in A$. Una **cota inferior** es un número $l \in \mathbb{R}$ que satisface $l \leq a$ para todo $a \in A$. Reuniremos esas cotas en los conjuntos

$$U(A) = \{u \in \mathbb{R} : \forall a \in A,\ a \leq u\}, \qquad L(A) = \{l \in \mathbb{R} : \forall a \in A,\ l \leq a\}.$$

La definición permite que una cota pertenezca a A, pero no lo exige. En el ejemplo finito, 3 pertenece a A y 5 no; ambos son cotas superiores. Para $B = (0, 1)$, los números 0 y 1 son, respectivamente, cota inferior y superior, aunque ninguno pertenece a B. El control depende de las desigualdades y sigue siendo válido cuando el conjunto no incluye la barrera.

Una vez encontrada una cota superior, cualquier número mayor también sirve: si $a \leq u$ para todo $a \in A$ y $v \geq u$, la transitividad da $a \leq u \leq v$. Del mismo modo, si l es cota inferior y $m \leq l$, entonces $m \leq l \leq a$ para todo $a \in A$, de modo que m también es cota inferior. Esto explica que las cotas del conjunto finito formen las semirrectas $U(A) = [3, \infty)$ y $L(A) = (-\infty, -2]$. No hay otras: una cota superior menor que 3 quedaría desmentida por el propio elemento 3, y una cota inferior mayor que -2 por el elemento -2.

Decimos que A está **acotado superiormente** si $U(A) \neq \emptyset$, y **acotado inferiormente** si $L(A) \neq \emptyset$. Cuando cumple ambas condiciones, está **acotado**. Para un conjunto no vacío, elegir una cota inferior l y una superior u nos da $l \leq a \leq u$ para todo $a \in A$; tomando uno de esos elementos comprobamos además que $l \leq u$. Por tanto, estar acotado equivale a quedar contenido en algún intervalo $[l, u]$. La equivalencia también vale para el vacío, que está contenido, por ejemplo, en $[0, 0]$; examinaremos sus familias de cotas en §2.7.

La acotación no cuenta elementos. El intervalo $(0, 1)$ es infinito y está acotado, mientras que $(0, \infty)$ sólo está acotado inferiormente. En efecto, para cualquier candidato u a cota superior, el número $\max\{1, u + 1\}$ es positivo y mayor que u. Dualmente, $(-\infty, 5)$ está acotado superiormente, pero el número $\min\{4, l - 1\}$ descarta cualquier candidato l a cota

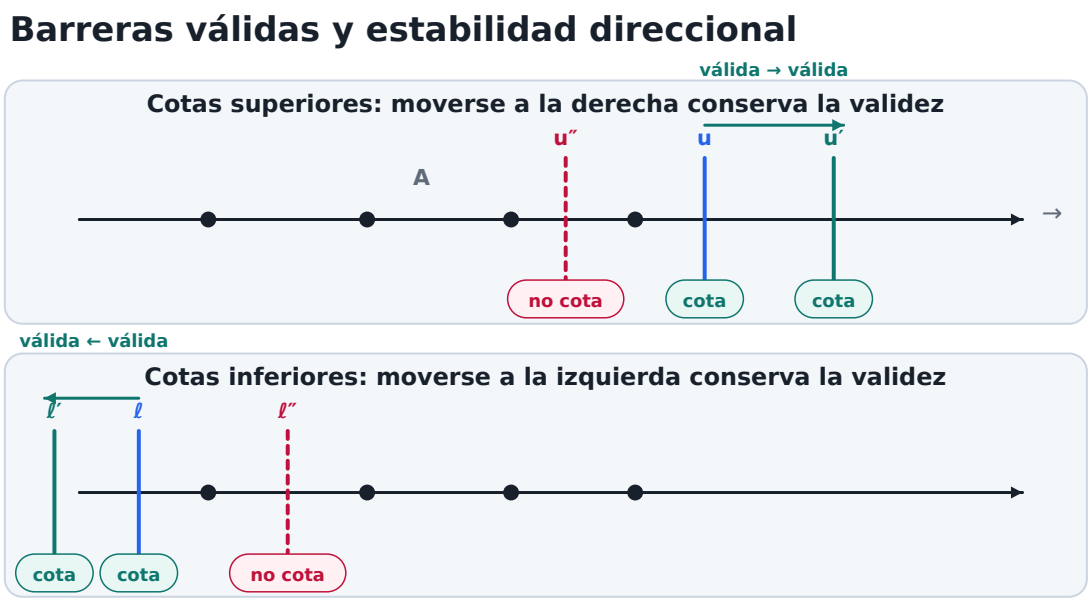


Figura 2.1. La validez de una barrera depende de su posición respecto del conjunto: una cota superior sigue siéndolo al desplazarse a la derecha y una inferior al desplazarse a la izquierda.

inferior. La recta $\mathbb{R}$ no tiene cotas en ninguna dirección, pues a cada x le acompañan $x+1$ y $x-1$.

Estos argumentos emplean la negación de una afirmación universal. Para probar que u falla como cota superior basta encontrar **un** elemento que lo sobrepase; para descartar una cota inferior basta encontrar uno que quede por debajo. En símbolos,

$$u \notin U(A) \iff \exists a \in A : \ a > u, \qquad l \notin L(A) \iff \exists a \in A : \ a < l.$$

Así, para $A = (-2, 4)$, los números 4 y 5 son cotas superiores, pero 3 queda descartado por $7/2 \in A$; los números -2 y -3 son cotas inferiores, pero 0 queda descartado por $-1 \in A$. No necesitamos revisar uno por uno todos los puntos para refutar una cota. Encontrar un testigo basta, mientras que verificarla exige un argumento que abarque el conjunto entero.

Ejercicios de la sección 2.1.

Ejercicio 1. Barreras válidas e inválidas

Sea $A = (-2, 3)$. Para cada uno de los números

$$-2, \qquad 3, \qquad 0, \qquad 4,$$

decide si es:

- cota superior de A;
- cota inferior de A;
- ambas cosas;
- ninguna de las dos.

Justifica cada respuesta directamente desde las definiciones. En particular, explica por qué la pertenencia o no pertenencia del número a A no decide por sí sola si es cota.

Solución. Tenemos $A = (-2, 3)$. El número -2 es una cota inferior, porque todo $a \in A$ satisface $-2 < a$, y por tanto también $-2 \leq a$. No es cota superior, pues por ejemplo $0 \in A$ y $0 > -2$. El número 3 es una cota superior, porque todo $a \in A$ satisface $a < 3$, y por tanto $a \leq 3$. No es cota inferior, pues $0 \in A$ y

$0 < 3$. El número 0 no es cota superior ni inferior. Por ejemplo,

$$1 \in A \quad \text{y} \quad 1 > 0,$$

de modo que 0 falla como cota superior; además,

$$-1 \in A \quad \text{y} \quad -1 < 0,$$

así que falla como cota inferior. Finalmente, 4 es una cota superior, porque para todo $a \in A$, $a < 3 < 4$. No es cota inferior, ya que $0 \in A$ y $0 < 4$. La clasificación es, por tanto:

- -2: cota inferior solamente;
- 3: cota superior solamente;
- 0: ninguna;
- 4: cota superior solamente.

Obsérvese que -2 y 3 no pertenecen a A y, sin embargo, sí son cotas. La definición exige una relación de orden con todos los elementos del conjunto, no pertenencia.

Ejercicio 2. Cuatro formas de estar acotado

Considera los conjuntos $A = (-1, 2)$, $B = [3, \infty)$, $C = (-\infty, 5)$, y $D = \mathbb{R}$. Para cada conjunto:

1. decide si está acotado superiormente;
2. decide si está acotado inferiormente;
3. decide si está acotado;
4. cuando exista una cota en una dirección, exhibe una concreta;
5. cuando no exista, explica cómo producir un elemento del conjunto que destruya cualquier candidato propuesto.

No uses máximo, mínimo, supremo ni ínfimo.

Solución. Para $A = (-1, 2)$, el número 2 es cota superior y -1 es cota inferior. Por tanto, A está acotado superior e inferiormente y, en consecuencia, está acotado. Para $B = [3, \infty)$, el número 3 es cota inferior. También lo es cualquier número menor que 3. En cambio, B no está acotado superiormente. Dado cualquier candidato $u \in \mathbb{R}$, podemos elegir $b = \max\{3, u + 1\}$.

Entonces $b \in B$ y $b > u$, de modo que u no es cota superior. Así, B está acotado inferiormente, pero no superiormente. Para $C = (-\infty, 5)$, el número 5 es cota superior. No existe cota inferior: dado cualquier candidato $l \in \mathbb{R}$, el número $c = \min\{4, l - 1\}$ pertenece a C y satisface $c < l$. Por tanto, l no puede ser cota inferior. Así, C está acotado superiormente, pero no inferiormente.

Finalmente, $D = \mathbb{R}$ no está acotado en ninguna dirección. Si $u \in \mathbb{R}$ fuese un candidato a cota superior, entonces $u + 1 \in \mathbb{R}$ y $u + 1 > u$. Si $l \in \mathbb{R}$ fuese un candidato a cota inferior, entonces $l - 1 \in \mathbb{R}$ y $l - 1 < l$. Por tanto, $\mathbb{R}$ no posee cotas superiores ni inferiores. En resumen:

- A: acotado;
- B: sólo acotado inferiormente;
- C: sólo acotado superiormente;
- D: no acotado en ninguna dirección.

Ejercicio 3. Del conjunto a todas sus cotas

Sea $A = \{x \in \mathbb{R} : -4 < x \leq 7\}$. Determina exactamente los conjuntos $U(A)$ y $L(A)$. Tu respuesta debe justificar las dos inclusiones en cada caso. Es decir, no basta con proponer una

semirrecta: debes explicar por qué todos sus elementos son cotas y por qué ningún número exterior a ella puede serlo.

Solución. El conjunto puede escribirse como $A = (-4, 7]$. Afirmamos primero que $U(A) = [7, \infty)$. Si $u \geq 7$, entonces para todo $a \in A$ tenemos $a \leq 7 \leq u$, por lo que u es cota superior. Así, $[7, \infty) \subseteq U(A)$.

Recíprocamente, si $u < 7$, el propio número 7 pertenece a A y satisface $7 > u$. Por tanto, u no puede ser cota superior. De aquí, $U(A) \subseteq [7, \infty)$. Las dos inclusiones dan

$$\boxed{U(A) = [7, \infty).}$$

Ahora afirmamos que $L(A) = (-\infty, -4]$. Si $l \leq -4$, entonces todo $a \in A$ satisface $l \leq -4 < a$, así que l es cota inferior. Por tanto, $(-\infty, -4] \subseteq L(A)$. Para la inclusión contraria, sea $l > -4$. Necesitamos encontrar un elemento de A menor que l. Si $l \leq 7$, tomemos $a = \frac{l-4}{2}$. Como $l > -4$, $-4 < \frac{l-4}{2} < l$, y además, puesto que $l \leq 7$,

$a = \frac{l-4}{2} \leq \frac{3}{2} < 7$. Por tanto $a \in A$ y $a < l$, de modo que l no es cota inferior. Si $l > 7$, basta tomar $a = 0$, pues $0 \in A$ y $0 < l$. Así, ningún $l > -4$ pertenece a $L(A)$, y obtenemos

$$\boxed{L(A) = (-\infty, -4].}$$

El extremo -4 no pertenece a A, pero sí es cota inferior. Esto vuelve a mostrar que la condición de ser cota no exige pertenencia.

Ejercicio 4. Mover una barrera en la dirección equivocada

Un estudiante afirma:

> Si u es una cota superior de A y $v < u$, entonces v ya no puede ser una cota superior de A.

1. Decide si la afirmación es correcta.
2. Si es falsa, construye un contraejemplo explícito.
3. Formula la afirmación correcta sobre lo que ocurre cuando una cota superior se desplaza hacia la derecha.
4. Escribe y justifica la versión dual para cotas inferiores.

El diagnóstico debe distinguir cuidadosamente lo que se deduce de que u sea **una** cota superior de lo que no se deduce.

Solución. La afirmación es falsa. Tomemos, por ejemplo, $A = (0, 1)$. El número $u = 5$ es una cota superior de A. Si elegimos $v = 2$, entonces $v < u$, pero 2 sigue siendo cota superior, porque todo $a \in (0, 1)$ satisface $a < 1 < 2$. Por tanto, de

$$u \in U(A) \quad \text{y} \quad v < u$$

no se puede concluir que $v \notin U(A)$. El error consiste en tratar una cota superior cualquiera como si fuese una frontera que ya no pudiera desplazarse hacia la izquierda. La definición de cota superior no dice eso. La afirmación correcta es:

> si u es cota superior de A y $v \geq u$, entonces v también es cota superior de A.

En efecto, para todo $a \in A$, $a \leq u \leq v$, y por transitividad, $a \leq v$. Dualmente, si l es cota inferior de A y $m \leq l$, entonces m también es cota inferior. Para todo $a \in A$, $m \leq l \leq a$, de donde $m \leq a$. La dirección importa: una cota superior puede desplazarse con seguridad hacia la derecha; una cota inferior, hacia la izquierda. En la dirección contraria puede seguir siendo válida o puede dejar de serlo, y la información disponible no basta para decidirlo.

Ejercicio 5. Trasladar un conjunto traslada sus barreras

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea $c \in \mathbb{R}$. Define $A + c = \{a + c : a \in A\}$. Para cualquier conjunto $S \subseteq \mathbb{R}$, usa también la notación $S + c = \{s + c : s \in S\}$.

1. Demuestra, usando sólo la definición de cota, que
   $U(A + c) = U(A) + c$.
2. Demuestra de manera dual que
   $L(A + c) = L(A) + c$.
3. Aplica ambas identidades a
   $A = (-2, 5]$
   y $c = 3$, determinando explícitamente $U(A)$, $L(A)$, $U(A + 3)$ y $L(A + 3)$.

El objetivo es identificar qué parte del lenguaje de cotas cambia y qué parte conserva su estructura cuando trasladamos todo el conjunto.

Solución. Una traslación suma la misma constante a todos los elementos del conjunto y a la barrera. Como sumar la misma cantidad a ambos lados de una desigualdad preserva el orden, esperamos que la familia completa de cotas se traslade rígidamente. Demostremos primero que $U(A + c) = U(A) + c$. Sea $u \in U(A)$. Entonces $a \leq u$ para todo $a \in A$.

Al sumar c, $a + c \leq u + c$ para todo $a \in A$. Pero los números $a + c$ son precisamente los elementos de $A + c$. Por tanto, $u + c \in U(A + c)$. Esto demuestra $U(A) + c \subseteq U(A + c)$. Para la inclusión contraria, sea $v \in U(A + c)$. Entonces $a + c \leq v$ para todo $a \in A$.

Restando c, $a \leq v - c$ para todo $a \in A$, de modo que $v - c \in U(A)$. Así, $v = (v - c) + c \in U(A) + c$. Por tanto, $U(A + c) \subseteq U(A) + c$. Concluimos que

$$\boxed{U(A + c) = U(A) + c.}$$

El argumento inferior es dual. Si $l \in L(A)$, entonces $l \leq a$ para todo $a \in A$. Sumando c, $l + c \leq a + c$, por lo que $l + c \in L(A + c)$. Esto da una inclusión. Recíprocamente, si $m \in L(A + c)$, entonces $m \leq a + c$ para todo $a \in A$, y al restar c obtenemos $m - c \leq a$.

Así, $m - c \in L(A)$ y $m \in L(A) + c$. En consecuencia,

$$\boxed{L(A + c) = L(A) + c.}$$

Apliquemos ahora estas identidades a $A = (-2, 5]$. Como $5 \in A$ y todos los elementos de A son menores o iguales que 5, $U(A) = [5, \infty)$. Además, $L(A) = (-\infty, -2]$. Aunque $-2 \notin A$, sigue siendo cota inferior. Con $c = 3$, $A + 3 = (1, 8]$. Por las identidades demostradas, $U(A + 3) = U(A) + 3 = [8, \infty)$ y $L(A + 3) = L(A) + 3 = (-\infty, 1]$.

La estructura no cambia: las familias de cotas siguen siendo semirrectas del mismo tipo; sólo se desplazan exactamente la misma cantidad que el conjunto.

2.2. Extremos alcanzados: máximo y mínimo

El número 3 tiene una relación con $\{-2, 0, 1, 3\}$ que no comparte la cota superior 5: es uno de sus elementos. Llamamos **máximo** de A a un número M que pertenece a A y satisface $a \leq M$ para todo $a \in A$. Dualmente, un **mínimo** es un número $m \in A$ tal que $m \leq a$ para todo $a \in A$. Las dos condiciones de cada definición se reúnen en

$$M = \max A \iff M \in A \cap U(A), \qquad m = \min A \iff m \in A \cap L(A).$$

En nuestro ejemplo, $\max A = 3$ y $\min A = -2$. La cota 5 no es máximo porque no pertenece a A, y el elemento 1 tampoco lo es porque $3 > 1$. Pertenecer y ser cota son exigencias distintas; un extremo alcanzado las cumple simultáneamente. Para $\{-3, -1, 2, 7\}$, las mismas comprobaciones dan mínimo -3 y máximo 7. Máximo y mínimo, cuando existen, son únicos. Si M y N fueran máximos de un mismo conjunto, de $M \in A$ y de que N es cota superior obtendríamos $M \leq N$; intercambiando sus papeles obtendríamos $N \leq M$. La antisimetría obliga a que $M = N$. Para dos mínimos m, n, las condiciones de cota inferior dan $m \leq n$ y $n \leq m$, de nuevo con igualdad. Esto justifica que hablemos de *el* máximo y *el* mínimo, sin afirmar todavía que todo conjunto los tenga.

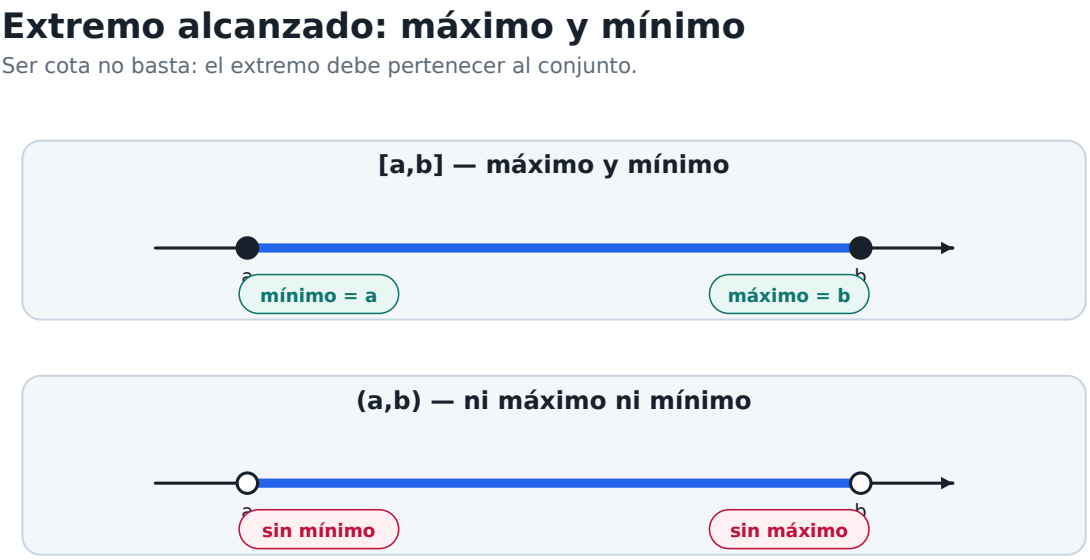


Figura 2.2. Máximo y mínimo combinan dos condiciones: ser barrera y pertenecer al conjunto; los puntos llenos y huecos separan visualmente ambas condiciones.

Para $[0,1]$, los extremos son 0 y 1. El intervalo $(0,1)$ tiene las mismas cotas 0 y 1, pero carece de mínimo y de máximo. Podemos demostrarlo sin limitarnos a observar que los extremos dibujados están abiertos. Dado cualquier $x \in (0,1)$, el número $(x+1)/2$ sigue en $(0,1)$ y es mayor que x; por tanto, x no es máximo. El número $x/2$ sigue en el intervalo y es menor que x, por lo que tampoco puede ser mínimo. Como el argumento sirve para cualquier elemento, quedan descartados todos los candidatos.

El punto medio realiza la misma tarea en un intervalo cualquiera con $a < b$. Si $x < b$, entonces $x < (x+b)/2 < b$; si $x > a$, entonces $a < (a+x)/2 < x$. Por eso $[a,b]$ tiene ambos extremos alcanzados, $[a,b)$ tiene mínimo a y carece de máximo, $(a,b]$ tiene máximo b y carece de mínimo, y (a,b) carece de ambos. En particular, $[-2,5)$ tiene mínimo -2 y ningún máximo, mientras que $(2,4)$ no tiene máximo porque a cada x le sigue el punto $(x+4)/2$ del mismo intervalo.

En estos ejemplos, la acotación permanece cuando retiramos un extremo, aunque puede desaparecer el máximo o el mínimo correspondiente. Necesitamos una noción que describa la posición de la barrera sin exigir que el conjunto la contenga.

Ejercicios de la sección 2.2.

Ejercicio 6. Cota, pertenencia y extremo

Sea $A = (-3,2] \cup \{5\}$. Para cada uno de los números

$$-3, \qquad 2, \qquad 5, \qquad 6,$$

decide:

1. si pertenece a A;
2. si es cota superior de A;
3. si es cota inferior de A;
4. si es máximo o mínimo de A, cuando corresponda.

Justifica cada clasificación usando las dos condiciones de las definiciones de máximo y mínimo. Al final, indica si A posee máximo y si posee mínimo.

Solución. Tenemos $A = (-3, 2] \cup \{5\}$. El número -3 no pertenece a A, pero es cota inferior: todo $a \in A$ satisface $-3 < a$ y, por tanto, $-3 \leq a$. Como no pertenece al conjunto, no puede ser mínimo. El número 2 sí pertenece a A. También cumple $-3 < 2$, pero no es cota superior porque

$$5 \in A \qquad \text{y} \qquad 5 > 2.$$

Tampoco es cota inferior, pues por ejemplo $0 \in A$ y $0 < 2$. Por tanto, 2 no es máximo ni mínimo. El número 5 pertenece a A y domina a todos sus elementos. En efecto, los elementos de $(-3, 2]$ son menores o iguales que $2 < 5$, y el único punto adicional es el propio 5. Así,

$$5 \in A \qquad \text{y} \qquad \forall a \in A,\ a \leq 5.$$

Por definición,

$$\boxed{\max A = 5}.$$

El número 6 es cota superior de A, porque todo $a \in A$ satisface $a \leq 5 < 6$, pero $6 \notin A$. Por tanto, 6 no es máximo. Finalmente, A no tiene mínimo. El único candidato natural a barrera inferior extrema sería -3, pero $-3 \notin A$. Más directamente, dado cualquier $x \in (-3, 2] \subseteq A$, el número $y = \frac{x-3}{2}$ satisface $-3 < y < x$, de modo que $y \in A$ y x no puede ser mínimo. El punto 5 tampoco puede serlo porque hay elementos menores en A.

En resumen:

- $\max A = 5$;
- A no tiene mínimo;
- una cota puede no pertenecer al conjunto;
- pertenecer al conjunto no basta para ser máximo o mínimo.

Ejercicio 7. Quitar un extremo cambia la respuesta

Parte del intervalo $A = [-2, 3]$. Define

$$B = A \setminus \{3\}, \qquad C = A \setminus \{-2\}, \qquad D = A \setminus \{-2, 3\}.$$

Para cada uno de los cuatro conjuntos A, B, C, D:

1. decide si existe máximo;
2. decide si existe mínimo;
3. cuando exista, identifícalo;
4. cuando no exista, demuestra directamente que ningún elemento del conjunto puede desempeñar ese papel.

No uses supremo ni ínfimo. El objetivo es aislar exactamente qué efecto tiene eliminar uno o ambos extremos alcanzados.

Solución. Partimos de $A = [-2, 3]$. Como ambos extremos pertenecen al conjunto,

$$\boxed{\min A = -2, \qquad \max A = 3}.$$

Ahora, $B = A \setminus \{3\} = [-2, 3)$. El número -2 sigue perteneciendo a B y está por debajo de todos sus elementos, así que

$$\boxed{\min B = -2}.$$

En cambio, B no tiene máximo. Si $x \in B$, entonces $x < 3$ y el número $y = \frac{x+3}{2}$ satisface $x < y < 3$. Por tanto $y \in B$ y es mayor que x. Ningún elemento de B puede ser máximo. De manera dual, $C = A \setminus \{-2\} = (-2, 3]$. El número 3 pertenece a C y domina a todos sus elementos, de modo que

$$\boxed{\max C = 3}.$$

Pero C no tiene mínimo. Dado $x \in C$, tenemos $x > -2$. Si tomamos $y = \frac{x-2}{2}$, entonces $-2 < y < x$. Así, $y \in C$ y ningún $x \in C$ puede ser mínimo. Finalmente, $D = A \setminus \{-2, 3\} = (-2, 3)$. El argumento usado para B muestra que D no tiene máximo: para cada $x \in D$, $(x + 3)/2$ sigue en D y es mayor que x.

El argumento usado para C muestra que D no tiene mínimo: para cada $x \in D$, $(x - 2)/2$ sigue en D y es menor que x. Por tanto:

conjunto	mínimo	máximo
$A = [-2, 3]$	-2	3
$B = [-2, 3)$	-2	no existe
$C = (-2, 3]$	no existe	3
$D = (-2, 3)$	no existe	no existe

Eliminar un extremo alcanzado puede destruir exactamente el extremo correspondiente sin alterar por ello la existencia del otro.

Ejercicio 8. La intersección que contiene al máximo

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$.

1. Demuestra que, si $A \cap U(A) \neq \emptyset$, entonces todo elemento de $A \cap U(A)$ es un máximo de A.
2. Demuestra que $A \cap U(A)$ no puede contener dos elementos distintos.
3. Concluye que, si $A \cap U(A) \neq \emptyset$, entonces existe un único número M tal que $A \cap U(A) = \{M\}$, y ese número es $\max A$.
4. Formula y demuestra el resultado dual usando $A \cap L(A)$ y el mínimo.

La prueba debe salir exclusivamente de pertenencia, definición de cota y antisimetría del orden.

Solución. Supongamos que $A \cap U(A) \neq \emptyset$. Sea $M \in A \cap U(A)$. Entonces se cumplen simultáneamente $M \in A$ y $M \in U(A)$. La segunda condición significa que $a \leq M$ para todo $a \in A$. Por tanto, M pertenece a A y es cota superior de A. Ésas son exactamente las dos condiciones que definen al máximo. Luego

$M = \max A$. Veamos ahora que la intersección no puede contener dos elementos distintos. Supongamos que $M, N \in A \cap U(A)$. Como $M \in U(A)$ y $N \in A$, $N \leq M$. Como $N \in U(A)$ y $M \in A$, $M \leq N$. Por antisimetría, $M = N$. Así, $A \cap U(A)$ contiene a lo sumo un elemento. Como por hipótesis es no vacío, contiene exactamente uno. En consecuencia,

$$\boxed{A \cap U(A) = \{\max A\}}.$$

El argumento inferior es dual. Si $m \in A \cap L(A)$, entonces $m \in A$ y m es cota inferior, de modo que $m = \min A$. Si $m, n \in A \cap L(A)$, como $m \in L(A)$ y $n \in A$ tenemos $m \leq n$, mientras que $n \in L(A)$ y $m \in A$ implican $n \leq m$. Por antisimetría, $m = n$.

Por tanto, si $A \cap L(A)$ es no vacío,

$$\boxed{A \cap L(A) = \{\min A\}}.$$

La unicidad de máximo y mínimo aparece aquí como consecuencia directa de la interacción entre **pertenencia**, **cota** y **antisimetría**.

Ejercicio 9. Dos conjuntos no vacíos no tienen por qué encontrarse

Un estudiante argumenta:

> Si A es no vacío y está acotado superiormente, entonces $A \neq \emptyset$ y $U(A) \neq \emptyset$.
> Por tanto, $A \cap U(A) \neq \emptyset$, así que A tiene máximo.

Diagnostica el razonamiento.

1. Identifica con precisión el paso lógico inválido.
2. Usa $A = (-\infty, 0)$ para calcular $U(A)$ directamente.

3. Determina $A \cap U(A)$.
4. Explica por qué este ejemplo destruye la conclusión del estudiante sin negar que A esté acotado superiormente.

No uses supremo para el diagnóstico.

Solución. El paso inválido es

$$A \neq \emptyset, \qquad U(A) \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad A \cap U(A) \neq \emptyset.$$

Dos subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ pueden ser disjuntos. La no vaciedad de cada uno no garantiza que compartan elementos. Consideremos $A = (-\infty, 0)$. El conjunto es no vacío y está acotado superiormente; por ejemplo, 0 es una cota superior. Calculemos $U(A)$. Si $u \geq 0$, entonces todo $a < 0$ satisface $a < 0 \leq u$, así que u es cota superior. Por tanto, $[0, \infty) \subseteq U(A)$.

Recíprocamente, si $u < 0$, el número $a = \frac{u}{2}$ satisface $u < a < 0$. Luego $a \in A$ y $a > u$, de modo que u no es cota superior. Por consiguiente,

$$\boxed{U(A) = [0, \infty)}.$$

Ahora

$$A = (-\infty, 0) \qquad \text{y} \qquad U(A) = [0, \infty),$$

por lo que

$$\boxed{A \cap U(A) = \emptyset}.$$

Así, A está acotado superiormente pero no tiene máximo. El ejemplo no contradice ninguna definición: simplemente muestra que

> **tener alguna cota superior no obliga a que una de esas cotas pertenezca al conjunto.**

Ésa es precisamente la información adicional que exigiría un máximo.

Ejercicio 10. Qué hacen las transformaciones afines con máximo y mínimo

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto que posee máximo M y mínimo m. Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, define $T(A) = \{\alpha a + \beta : a \in A\}$. Determina y demuestra, usando las definiciones de máximo y mínimo, cuáles son $\max T(A)$ y $\min T(A)$ en los tres casos:

1. $\alpha > 0$;
2. $\alpha < 0$;
3. $\alpha = 0$.

Tu demostración debe explicar por qué el signo de α decide si los papeles de máximo y mínimo se conservan o se intercambian. No uses supremo ni ínfimo.

Solución. Un máximo o un mínimo combina dos datos: el candidato debe pertenecer al conjunto transformado y debe dominar —o quedar por debajo de— todos sus elementos. La pertenencia se obtiene transformando M o m; la desigualdad depende del signo de α. Sabemos que $m \leq a \leq M \qquad$ para todo $a \in A$, con $m, M \in A$.

Caso 1: $\alpha > 0$

Multiplicar por α preserva el orden: $\alpha m \leq \alpha a \leq \alpha M$. Al sumar β, $\alpha m + \beta \leq \alpha a + \beta \leq \alpha M + \beta$. Todo elemento de $T(A)$ tiene la forma $\alpha a + \beta$. Además, como $m, M \in A$, $\alpha m + \beta \in T(A), \qquad \alpha M + \beta \in T(A)$. Por definición,

$$\boxed{\min T(A) = \alpha m + \beta, \qquad \max T(A) = \alpha M + \beta}.$$

Caso 2: $\alpha < 0$

Multiplicar por un número negativo invierte el orden: $\alpha M \leq \alpha a \leq \alpha m$. Después de sumar β, $\alpha M + \beta \leq \alpha a + \beta \leq \alpha m + \beta$. Los dos extremos transformados pertenecen a $T(A)$. Por tanto,

$$\boxed{\min T(A) = \alpha M + \beta, \qquad \max T(A) = \alpha m + \beta}.$$

El máximo original se convierte en mínimo y el mínimo original se convierte en máximo porque la multiplicación por $\alpha < 0$ invierte el orden.

Caso 3: $\alpha = 0$

Entonces, para todo $a \in A$, $\alpha a + \beta = \beta$. Así, $T(A) = \{\beta\}$. El único elemento es simultáneamente mínimo y máximo:

$$\boxed{\min T(A) = \max T(A) = \beta}.$$

En conjunto, la clasificación es:

	$\min T(A)$	$\max T(A)$
$\alpha > 0$	$\alpha m + \beta$	$\alpha M + \beta$
$\alpha < 0$	$\alpha M + \beta$	$\alpha m + \beta$
$\alpha = 0$	β	β

No hemos usado ninguna noción posterior. Todo depende de pertenencia al conjunto transformado y de cómo una transformación afín afecta las desigualdades que definen máximo y mínimo.

2.3. La mejor barrera: supremo e ínfimo

Entre las cotas superiores de $(0, 1)$, el número 1 tiene una propiedad que no comparte 2: ninguna cota superior es menor que él. Esta propiedad define el **c02-supremo**. Un número s es el supremo de A si es cota superior de A y satisface $s \leq u$ para toda cota superior u de A. El **ínfimo** es una cota inferior i tal que $l \leq i$ para toda cota inferior l de A. Así,

$$s = \sup A \iff s = \min U(A), \qquad i = \inf A \iff i = \max L(A).$$

La minimalidad se refiere a $U(A)$, y la maximalidad a $L(A)$. Ninguna de esas condiciones exige que s o i pertenezcan al conjunto original. Para comprobar un supremo hay que atender a sus dos obligaciones: controlar a A desde arriba y quedar por debajo de todas las demás cotas superiores. Verifiquémoslas para $(0, 1)$. Todo $u \geq 1$ es cota superior, porque $a < 1 \leq u$ para todo $a \in (0, 1)$. Si $u < 1$, buscamos un elemento del intervalo mayor que u. Cuando $u < 0$ sirve $1/2$; cuando $0 \leq u < 1$ sirve $(u + 1)/2$, que está entre u y 1. Hemos probado que $U((0, 1)) = [1, \infty)$ y, por tanto, que $\sup(0, 1) = 1$.

Para el lado inferior, todo $l \leq 0$ es cota inferior. Si $l > 0$, entonces $l/2$ descarta la cota cuando $l \leq 1$, mientras que $1/2$ la descarta cuando $l > 1$. En ambos casos encontramos un punto de $(0, 1)$ menor que l. Así, $L((0, 1)) = (-\infty, 0]$ y $\inf(0, 1) = 0$. La prueba se obtiene de las definiciones y de la posibilidad de tomar puntos medios; la completitud no interviene en esta identificación particular.

La forma de esas familias de cotas es general. Si $s = \sup A$, entonces toda cota superior u satisface $s \leq u$, de modo que $U(A) \subseteq [s, \infty)$. Recíprocamente, como s es cota superior, cualquier $u \geq s$ también lo es por transitividad. Dualmente, cuando $i = \inf A$, las cotas inferiores son exactamente los números menores o iguales que i. Obtenemos $U(A) = [s, \infty)$, $\quad L(A) = (-\infty, i]$, cada igualdad bajo la hipótesis de existencia de su extremo correspondiente. Para $A = (2, 5)$ resultan $U(A) = [5, \infty)$ y $L(A) = (-\infty, 2]$, con supremo 5 e ínfimo 2. Para $B = \{-4, 1, 7\}$ resultan $U(B) = [7, \infty)$ y $L(B) = (-\infty, -4]$, cuyos extremos sí pertenecen a B.

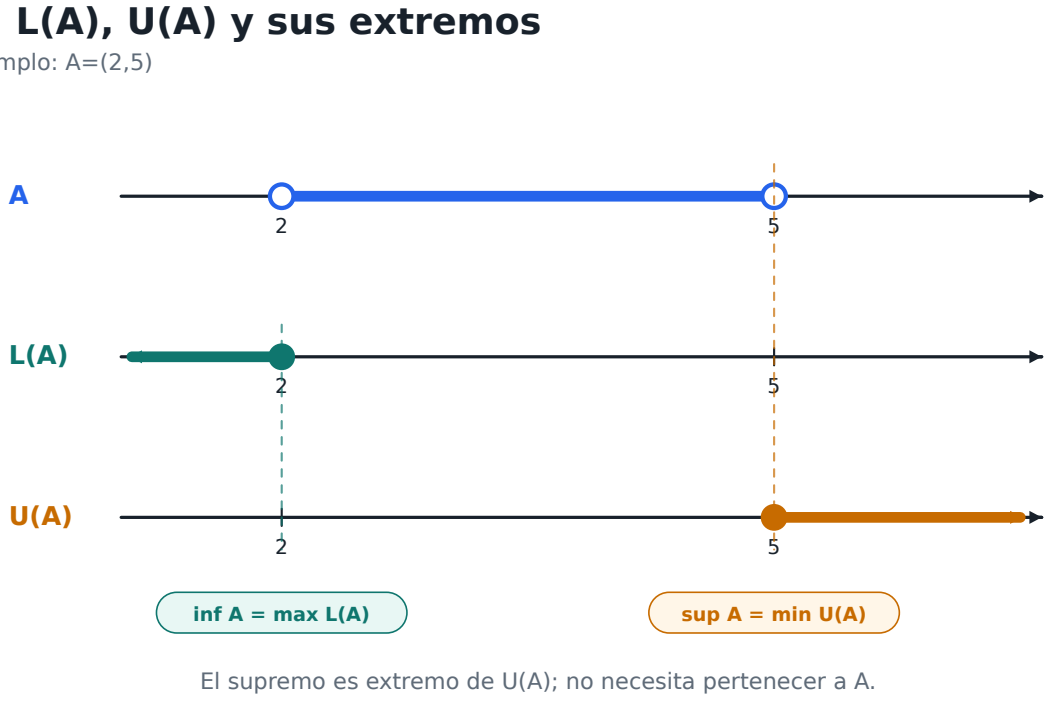


Figura 2.3. El supremo y el ínfimo son extremos de las familias de cotas U(A) y L(A), no condiciones de pertenencia al conjunto original.

También aquí hay unicidad. Si s, t fueran supremos de A, cada uno sería cota superior y la minimalidad del otro daría $s \leq t$ y $t \leq s$; por antisimetría, $s = t$. Si i, j fueran ínfimos, cada uno sería cota inferior y la maximalidad del otro daría $j \leq i$ e $i \leq j$, luego $i = j$. La notación $\sup A$ o $\inf A$ designa, pues, un número determinado cuando hemos asegurado su existencia. Puede asegurarse mediante una comprobación como las anteriores o mediante la completitud de $\mathbb{R}$, con sus hipótesis de no vaciedad y acotación en la dirección apropiada. Son justificaciones diferentes y conviene reconocer cuál usamos.

Ejercicios de la sección 2.3.

Ejercicio 11. Cota no significa barrera extremal

Sea $A = (-2, 3) \cup \{6\}$. Analiza los seis números

$$8, \qquad 6, \qquad 5, \qquad -4, \qquad -2, \qquad -1.$$

1. Decide cuáles son cotas superiores de A.
2. Entre las cotas superiores propuestas, determina si alguna es $\sup A$.
3. Decide cuáles son cotas inferiores de A.
4. Entre las cotas inferiores propuestas, determina si alguna es $\inf A$.
5. Para cada candidato rechazado como supremo o ínfimo, indica exactamente qué condición de la definición falla.

No basta con identificar una cota: debes distinguir entre **controlar** al conjunto y ser la **barrera extremal**.

Solución. Tenemos $A = (-2, 3) \cup \{6\}$. Todo elemento de A es menor o igual que 6, y $6 \in A$. Por tanto, cualquier número $u \geq 6$ es cota superior. En particular, $6, 8 \in U(A)$. En cambio, 5 no es cota superior, porque

$$6 \in A \qquad \text{y} \qquad 6 > 5.$$

Así, entre los tres candidatos superiores:

- 8 es cota superior, pero no es supremo, porque existe una cota superior menor, a saber 6;
- 6 es cota superior y además toda cota superior u debe satisfacer $6 \leq u$, pues $6 \in A$;
- 5 ni siquiera es cota superior.

Luego

$$\boxed{\sup A = 6}.$$

Para las cotas inferiores, todo elemento de A es estrictamente mayor que -2. Por tanto, cualquier $l \leq -2$ es cota inferior; en particular, $-4, -2 \in L(A)$. El número -1 no es cota inferior. Por ejemplo, $-\frac{3}{2} \in (-2, 3) \subseteq A$ y $-\frac{3}{2} < -1$. Entre los candidatos inferiores:

- -4 es cota inferior, pero no es ínfimo, porque existe una cota inferior mayor, a saber -2;
- -2 es cota inferior;
- todo $l > -2$ deja de ser cota inferior, pues existe un elemento de $(-2, 3)$ situado entre -2 y l si $l \leq 3$, y si $l > 3$ basta elegir, por ejemplo, $0 \in A$.

Por tanto,

$$\boxed{\inf A = -2}.$$

El punto decisivo es que una cota cualquiera sólo satisface la condición de **control**. Para ser supremo debe ser, además, la menor de todas las cotas superiores; para ser ínfimo, la mayor de todas las cotas inferiores.

Ejercicio 12. Distintos conjuntos, las mismas familias de cotas

Supón que un conjunto no vacío $A \subseteq \mathbb{R}$ satisface $U(A) = [4, \infty)$ y $L(A) = (-\infty, -2]$.

1. Determina $\sup A$ e $\inf A$ directamente a partir de estas dos familias de cotas.
2. Construye al menos tres conjuntos distintos $A_1, A_2, A_3 \subseteq \mathbb{R}$ que tengan exactamente esas mismas familias $U(A_k)$ y $L(A_k)$.
3. Haz que, entre tus ejemplos, aparezcan distintas decisiones de pertenencia de -2 y 4.
4. Explica qué información queda determinada por $U(A)$ y $L(A)$ y qué información sobre la pertenencia de las barreras no queda determinada.

No uses todavía la relación entre supremo y máximo.

Solución. Sabemos que $U(A) = [4, \infty)$. El mínimo de $U(A)$ es 4. Por la caracterización estructural del supremo como extremo del conjunto de cotas,

$$\boxed{\sup A = 4}.$$

Asimismo, $L(A) = (-\infty, -2]$ tiene máximo -2, de modo que

$$\boxed{\inf A = -2}.$$

Ahora construyamos conjuntos distintos con las mismas familias de cotas. Por ejemplo, $A_1 = (-2, 4)$, $A_2 = [-2, 4]$, y $A_3 = (-2, 4]$. También podríamos usar $A_4 = [-2, 4)$. Verifiquemos la estructura común. En cualquiera de estos conjuntos, todo elemento satisface $-2 \leq a \leq 4$. Así, todo $u \geq 4$ es cota superior y todo $l \leq -2$ es cota inferior. Para $u < 4$, el punto $(\max\{-2, u\} + 4)/2$ pertenece a los cuatro intervalos y es mayor que u. Para $l > -2$, el punto $(-2 + \min\{l, 4\})/2$ pertenece a los cuatro y es menor que l. Estos testigos descartan todas las cotas exteriores propuestas.

Por tanto, para cada uno de los cuatro ejemplos, $U(A_k) = [4, \infty)$ y $L(A_k) = (-\infty, -2]$. Sin embargo, la pertenencia de las barreras cambia:

- en A_1, ni -2 ni 4 pertenecen;

- en A_2, ambos pertenecen;
- en A_3, 4 pertenece y -2 no;
- en A_4, -2 pertenece y 4 no.

Así, las familias $U(A)$ y $L(A)$ determinan la posición de las barreras extremales y, por tanto, el supremo y el ínfimo. **No determinan por sí solas si esas barreras pertenecen al conjunto original.**

Ejercicio 13. Por qué no puede haber dos supremos

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$.

1. Supón que s y t satisfacen ambos la definición de supremo de A. Demuestra, sin citar un teorema de unicidad ya establecido, que $s = t$.
2. Identifica con precisión dónde utilizas que cada candidato es una **cota superior** y dónde utilizas que es la **menor** de las cotas superiores.
3. Repite el argumento para dos candidatos i y j que satisfagan ambos la definición de ínfimo.

La prueba debe reducir la unicidad a dos desigualdades opuestas y a la antisimetría del orden.

Solución. Supongamos que s y t son ambos supremos de A. Como t es supremo, en particular es una cota superior de A. Como s es la **menor** cota superior, debe satisfacer $s \leq t$. Simétricamente, s es una cota superior de A y t es la menor cota superior. Por tanto, $t \leq s$. Las dos desigualdades dan

$$s \leq t \qquad \text{y} \qquad t \leq s.$$

Por antisimetría del orden,

$$\boxed{s = t}.$$

La prueba usa las dos piezas de la definición de manera distinta:

- necesitamos que cada candidato sea **cota superior** para que el otro pueda compararse con él;
- necesitamos la **minimalidad** para obtener cada desigualdad.

Para el ínfimo, supongamos que i y j satisfacen ambos la definición. Como j es cota inferior e i es la **mayor** cota inferior, $j \leq i$. Como i es cota inferior y j es la mayor de ellas, $i \leq j$. Por antisimetría,

$$\boxed{i = j}.$$

Así, supremo e ínfimo, cuando existen, son necesariamente únicos.

Ejercicio 14. Una condición necesaria no basta

Un estudiante afirma:

> Sea $A = (0, 1)$. Como 2 es una cota superior de A y el supremo no tiene por qué pertenecer al conjunto, entonces $2 = \sup A$.

Diagnostica el razonamiento.

1. Señala qué parte de la definición de supremo sí verifica el estudiante.
2. Identifica la condición que falta.
3. Determina directamente $U(A)$.
4. Usa esa descripción para explicar por qué 2 no puede ser el supremo.
5. Formula una versión corregida del argumento que sí permita identificar $\sup A$.

Tu respuesta debe distinguir entre «ser una cota superior» y «ser la menor cota superior».

Solución. El estudiante ha verificado sólo la primera condición de la definición de supremo: que 2 es una cota superior de $A = (0, 1)$. En efecto, todo $a \in A$ satisface $a < 1 < 2$. Pero falta comprobar que 2 sea la **menor** de todas las cotas superiores. Calculemos directamente $U(A)$. Si $u \geq 1$, entonces para todo $a \in (0, 1)$, $a < 1 \leq u$, de modo que u es cota superior. Por tanto,

$[1, \infty) \subseteq U(A)$. Si $u < 1$, entonces u no puede ser cota superior. Si $u < 0$, por ejemplo $\frac{1}{2} \in A$ y $\frac{1}{2} > u$. Si $0 \leq u < 1$, tomemos $a = \frac{u+1}{2}$. Entonces $u < a < 1$, así que $a \in A$ y u falla como cota superior. Por consiguiente,

$$\boxed{U(A) = [1, \infty)}.$$

El mínimo de $U(A)$ es 1, no 2. Por tanto,

$$\boxed{\sup A = 1}.$$

La frase «el supremo no tiene por qué pertenecer al conjunto» es verdadera, pero no convierte en supremo a cualquier cota exterior. La versión correcta del argumento es:

> primero se verifica que el candidato es cota superior; después se demuestra que ninguna cota superior puede ser menor.

Sólo cuando ambas condiciones se cumplen hemos identificado el supremo.

Ejercicio 15. El intervalo de control más ajustado

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío. Supón que existen

$$i = \inf A \qquad \text{y} \qquad s = \sup A.$$

Demuestra que:

1. $A \subseteq [i, s]$;
2. si $l, u \in \mathbb{R}$ satisfacen $A \subseteq [l, u]$, entonces $l \leq i \leq s \leq u$;
3. en consecuencia, $[i, s] \subseteq [l, u]$.

Interpreta el resultado: entre todos los intervalos de la forma $[l, u]$ que contienen a A, el intervalo $[i, s]$ es el más ajustado por inclusión. No supongas que i o s pertenecen a A.

Solución. El supremo y el ínfimo son, respectivamente, una cota superior y una cota inferior. Esto sitúa inmediatamente a A dentro de $[i, s]$. Después compararemos esas barreras extremales con cualquier otro par de barreras l, u que también contenga a A. Como $i = \inf A$, el número i es cota inferior de A. Por tanto, $i \leq a \qquad$ para todo $a \in A$.

Como $s = \sup A$, el número s es cota superior, así que $a \leq s \qquad$ para todo $a \in A$. Juntando ambas desigualdades, $i \leq a \leq s \qquad$ para todo $a \in A$. Luego

$$\boxed{A \subseteq [i, s]}.$$

Ahora supongamos que $A \subseteq [l, u]$. Entonces l es una cota inferior de A y u es una cota superior de A. Como i es la **mayor** cota inferior, $l \leq i$. Como s es la **menor** cota superior, $s \leq u$. Además, como A es no vacío, podemos tomar algún $a \in A$. Puesto que i es cota inferior y s es cota superior,

$i \leq a \leq s$, de donde $i \leq s$. Así obtenemos la cadena completa

$$\boxed{l \leq i \leq s \leq u}.$$

Ahora, si $x \in [i, s]$, entonces $i \leq x \leq s$. Usando $l \leq i$ y $s \leq u$, $l \leq x \leq u$. Por tanto, $x \in [l, u]$. Hemos demostrado

$$\boxed{[i, s] \subseteq [l, u]}.$$

El resultado no afirma que las barreras extremales pertenezcan a A. Afirma algo diferente: cualquier intervalo $[l, u]$ que controle a todo el conjunto debe ser al menos tan amplio como $[i, s]$.

Ejercicio 16. Trasladar y escalar una barrera extremal

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y supón que existen $s = \sup A, \qquad i = \inf A$. Fija $\alpha > 0$ y $\beta \in \mathbb{R}$, y define $T(A) = \{\alpha a + \beta : a \in A\}$. Demuestra directamente desde las definiciones que $\sup T(A) = \alpha s + \beta$ y $\inf T(A) = \alpha i + \beta$. Tu prueba debe verificar por separado:

1. que $\alpha s + \beta$ es cota superior de $T(A)$;
2. que ninguna cota superior de $T(A)$ puede ser menor que $\alpha s + \beta$;
3. las dos afirmaciones duales para $\alpha i + \beta$.

No uses caracterizaciones con ε, sucesiones ni completitud.

Solución. Para demostrar que un número es supremo debemos verificar dos cosas: que es cota superior y que es menor o igual que cualquier otra cota superior. La transformación $x \mapsto \alpha x + \beta$ con $\alpha > 0$ preserva el orden, de modo que podemos transportar ambas condiciones. Sea $s = \sup A$. Primero probemos que $\alpha s + \beta$ es cota superior de $T(A)$. Para todo $a \in A$,

$a \leq s$. Como $\alpha > 0$, $\alpha a \leq \alpha s$. Sumando β, $\alpha a + \beta \leq \alpha s + \beta$. Todo elemento de $T(A)$ tiene la forma $\alpha a + \beta$. Por tanto, $\alpha s + \beta \in U(T(A))$. Falta demostrar minimalidad. Sea v una cota superior cualquiera de $T(A)$. Entonces, para todo $a \in A$, $\alpha a + \beta \leq v$. Restando β y dividiendo por $\alpha > 0$,

$a \leq \frac{v-\beta}{\alpha}$. Así, $\frac{v-\beta}{\alpha}$ es cota superior de A. Como s es la menor cota superior, $s \leq \frac{v-\beta}{\alpha}$. Multiplicando por $\alpha > 0$ y sumando β, $\alpha s + \beta \leq v$. Por tanto, $\alpha s + \beta$ es menor o igual que toda cota superior de $T(A)$. Concluimos

$$\boxed{\sup T(A) = \alpha s + \beta}.$$

El argumento para el ínfimo es dual. Como $i = \inf A$, para todo $a \in A$ tenemos $i \leq a$. Multiplicando por $\alpha > 0$ y sumando β, $\alpha i + \beta \leq \alpha a + \beta$. Así, $\alpha i + \beta$ es cota inferior de $T(A)$. Sea ahora w una cota inferior cualquiera de $T(A)$. Entonces $w \leq \alpha a + \beta \qquad$ para todo $a \in A$.

Restando β y dividiendo por $\alpha > 0$, $\frac{w-\beta}{\alpha} \leq a \qquad$ para todo $a \in A$. Por tanto, $\frac{w-\beta}{\alpha}$ es cota inferior de A. Como i es la mayor cota inferior, $\frac{w-\beta}{\alpha} \leq i$. Multiplicando por α y sumando β, $w \leq \alpha i + \beta$. Entonces $\alpha i + \beta$ es la mayor cota inferior de $T(A)$. Por consiguiente,

$$\boxed{\inf T(A) = \alpha i + \beta}.$$

Todo el argumento usa únicamente las definiciones de cota, supremo e ínfimo y el hecho de que $\alpha > 0$ preserva el orden. No se ha utilizado ninguna garantía general de existencia.

2.4. Alcanzado frente a no alcanzado

Supongamos que $s = \sup A$. Si además $s \in A$, entonces s es una cota superior que pertenece al conjunto, de modo que $s = \max A$. En sentido inverso, si $M = \max A$, sabemos ya que M es cota superior. Para demostrar que es la menor, basta tomar cualquier otra cota superior u: como $M \in A$, la condición que define a u obliga a que $M \leq u$. Por tanto, todo máximo es también supremo, y su existencia queda justificada sin recurrir a la completitud.

El razonamiento inferior puede reconstruirse con las desigualdades correspondientes. Si $i = \inf A$ pertenece a A, es mínimo por definición. Si $m = \min A$, entonces m es cota inferior y toda otra cota inferior l satisface $l \leq m$, porque $m \in A$. Luego m es la mayor cota inferior. En consecuencia,

$$\max A \text{ existe} \iff \sup A \in A, \qquad \min A \text{ existe} \iff \inf A \in A,$$

siempre que exista la barrera extremal mencionada en cada equivalencia. Cuando existe el máximo se cumple $\max A = \sup A$; cuando existe el mínimo, $\min A = \inf A$. Podemos describirlos como supremo e ínfimo **alcanzados**. Comparemos $A = [a, s]$ y $B = [a, s)$, con

$a < s$. Ambos tienen supremo s. Para A, basta que s sea su máximo; para B, además de comprobar que s es cota, hay que descartar todas las cotas menores. Si $u < s$, el punto $x = \frac{\max\{a,u\}+s}{2}$ pertenece a B y es mayor que u: la elección de $\max\{a,u\}$ asegura simultáneamente que $x > a$ y $x > u$, y el punto medio conserva $x < s$. Así, ninguna barrera menor funciona. Sin embargo, s pertenece a A y queda fuera de B. El primero tiene máximo s y el segundo no tiene máximo, aunque sus familias de cotas superiores coinciden.

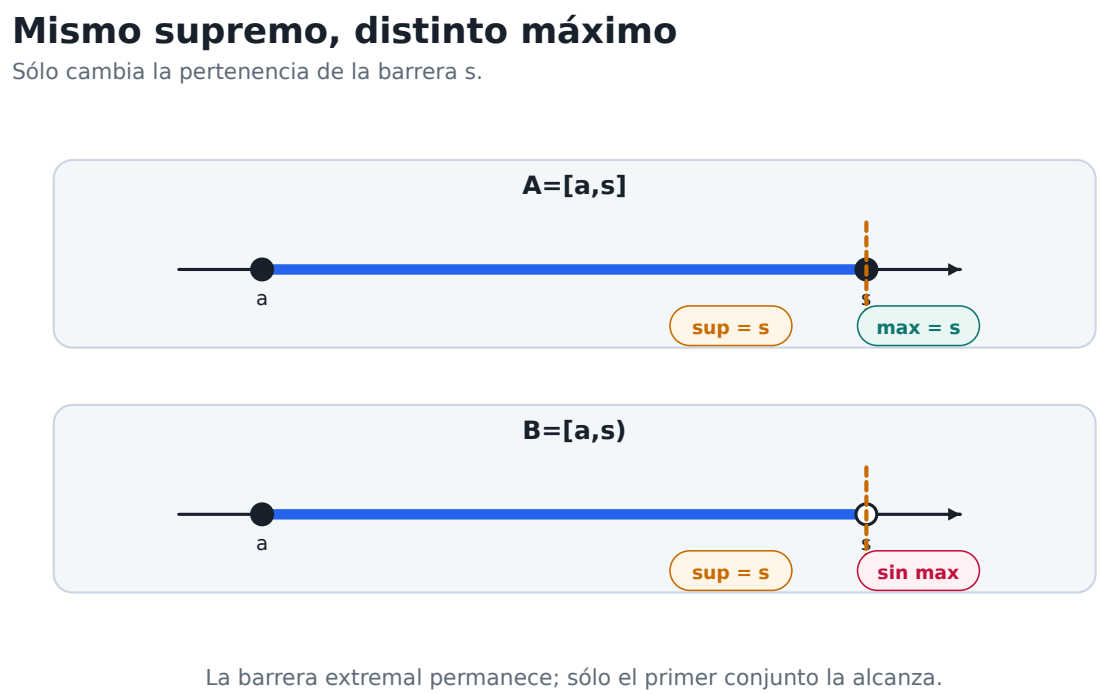


Figura 2.4. Cerrar o abrir la barrera extremal puede cambiar la existencia del máximo sin cambiar el supremo.

Los intervalos con extremos $a < b$ reúnen todas las combinaciones de alcanzamiento:

Conjunto	Ínfimo	Supremo	Mínimo	Máximo
$[a, b]$	a	b	a	b
$[a, b)$	a	b	a	No existe
$(a, b]$	a	b	No existe	b
(a, b)	a	b	No existe	No existe

Por ejemplo, $[-1, 3)$ tiene ínfimo y mínimo -1, supremo 3 y ningún máximo; en $(-2, 4]$ está alcanzado el supremo 4 y no está alcanzado el ínfimo -2. Ninguna de estas conclusiones requiere todavía interpretar los intervalos mediante nociones topológicas. También debemos distinguir la falta de alcanzamiento de la falta de acotación. Para $(0, 1)$, el número 2 es una cota superior que puede mejorarse, mientras que 1 es la barrera extremal y no se alcanza. Para $(0, 1]$, esa misma barrera sí se alcanza. En cambio, $(0, \infty)$ no tiene ninguna cota superior real, por lo que carece de supremo real. La semirrecta $[0, \infty)$ tiene mínimo e ínfimo 0, pero no supremo real; $(-\infty, 5]$ tiene máximo y supremo 5, pero no ínfimo real. Usaremos supremos e ínfimos con valores en $\mathbb{R}$; los símbolos de infinito de la notación de intervalos no son valores admisibles para esos extremos en este capítulo.

Ejercicios de la sección 2.4.

Ejercicio 17. Cinco afirmaciones sobre alcanzar la barrera

Para cada una de las afirmaciones siguientes, decide si es siempre verdadera o falsa. Cuando sea verdadera, justifica desde las definiciones; cuando sea falsa, da un contraejemplo explícito.

1. Si $s = \sup A$ y $s \in A$, entonces A tiene máximo.
2. Si $s = \sup A$ y $s \notin A$, entonces A no tiene máximo.
3. Si A tiene máximo M, entonces existe $\sup A$ y vale M.
4. Si A no tiene máximo, entonces A no tiene supremo.
5. Si A tiene supremo, entonces tiene máximo.

En cada caso distingue con precisión la **existencia de la barrera extremal** de su **pertenencia al conjunto**.

Solución. 1. Verdadera. Si $s = \sup A$, entonces s es cota superior de A. Si además $s \in A$, se cumplen exactamente las dos condiciones de la definición de máximo:

$$s \in A \qquad \text{y} \qquad \forall a \in A,\ a \leq s.$$

Por tanto,

$$\boxed{\max A = s}.$$

2. Verdadera. Supongamos que $s = \sup A$ y $s \notin A$. Si A tuviera máximo M, entonces M sería una cota superior y, por pertenecer a A, toda cota superior u satisfaría $M \leq u$. Así M sería la menor cota superior, es decir, $M = \sup A = s$. Pero $M \in A$, de donde $s \in A$, contradicción. Luego A no tiene máximo. **3. Verdadera.** Si $M = \max A$, entonces M es cota superior. Sea u cualquier cota superior de A. Como $M \in A$, la definición de cota superior obliga a que

$M \leq u$. Por tanto, M es la menor cota superior y

$$\boxed{\sup A = M}.$$

4. Falsa. Un contraejemplo es

$A = (0, 1)$. El conjunto no tiene máximo, pero $\sup A = 1$.

5. Falsa. El mismo conjunto sirve: $(0, 1)$ tiene supremo 1, pero $1 \notin A$, así que no tiene máximo.

La diferencia decisiva es, por tanto:

> el supremo responde a dónde está la menor cota superior; el máximo exige además que esa barrera pertenezca al conjunto.

Ejercicio 18. El criterio de alcanzamiento

Demuestra directamente desde las definiciones las dos equivalencias siguientes.

1. En el lado superior:
   - si $s = \sup A$ y $s \in A$, entonces $\max A = s$;
   - si $M = \max A$, entonces $M = \sup A$.
2. En el lado inferior:
   - si $i = \inf A$ y $i \in A$, entonces $\min A = i$;
   - si $m = \min A$, entonces $m = \inf A$.

Concluye que, siempre que el supremo exista,

$$\max A \text{ existe} \quad \Longleftrightarrow \quad \sup A \in A,$$

y formula la equivalencia dual para el mínimo. No cites el resultado como teorema ya conocido: reconstruye cada dirección a partir de **cota + pertenencia + extremalidad**.

Solución.

Lado superior

Supongamos primero que $s = \sup A$ y que $s \in A$. Por ser supremo, s es cota superior, de modo que $a \leq s \qquad$ para todo $a \in A$. Junto con $s \in A$, esto es exactamente la definición de máximo. Por tanto,

$$\boxed{\max A = s}.$$

Recíprocamente, supongamos que $M = \max A$. Entonces M es cota superior. Sea $u \in U(A)$ una cota superior cualquiera. Como $M \in A$, necesariamente $M \leq u$. Así, M es menor o igual que toda cota superior. Por tanto es la menor cota superior y

$$\boxed{M = \sup A}.$$

Hemos demostrado que, siempre que el supremo exista,

$$\boxed{\max A \text{ existe} \quad \Longleftrightarrow \quad \sup A \in A}$$

y, cuando ocurre,

$$\boxed{\max A = \sup A}.$$

Lado inferior

Si $i = \inf A$ y $i \in A$, entonces i es cota inferior y pertenece a A. Luego

$$\boxed{\min A = i}.$$

Recíprocamente, si $m = \min A$, entonces m es cota inferior. Para cualquier $l \in L(A)$, como $m \in A$ tenemos $l \leq m$. Así, m es la mayor cota inferior y

$$\boxed{m = \inf A}.$$

En consecuencia, siempre que el ínfimo exista,

$$\boxed{\min A \text{ existe} \quad \Longleftrightarrow \quad \inf A \in A}.$$

Ejercicio 19. Misma barrera no significa mismo máximo

Un estudiante afirma:

> Si dos conjuntos tienen el mismo supremo, entonces o bien ambos tienen máximo o bien ninguno lo tiene.

1. Diagnostica la afirmación usando $A = [0, 1], \qquad B = [0, 1)$.
2. Determina $\sup A$, $\sup B$, $\max A$ y decide si $\max B$ existe.
3. Explica qué dato permanece igual entre A y B y qué dato cambia.
4. Formula una versión verdadera que relacione «tener el mismo máximo» con «tener el mismo supremo».

El objetivo es separar **posición de la barrera extremal** de **pertenencia de esa barrera**.

Solución. La afirmación del estudiante es falsa. Tomemos $A = [0, 1]$ y $B = [0, 1)$. En ambos casos, $U(A) = U(B) = [1, \infty)$, por lo que

$$\boxed{\sup A = \sup B = 1}.$$

Sin embargo, $1 \in A$ y, como 1 domina a todos los elementos de A,

$$\boxed{\max A = 1}.$$

En cambio, $1 \notin B$. Además, si $x \in B$, entonces $x < 1$ y $y = \frac{x+1}{2}$ satisface $x < y < 1$. Así $y \in B$ y x no puede ser máximo. Por tanto, B no tiene máximo. El dato que permanece igual es la **posición de la barrera extremal superior**. El dato que cambia es la **pertenencia de esa barrera al conjunto**.

Una versión verdadera es la siguiente:

> si dos conjuntos tienen el mismo máximo M, entonces ambos tienen supremo y ese supremo común es M.

En efecto, todo máximo es también el supremo del conjunto correspondiente.

Ejercicio 20. Añadir la barrera o rebasarla

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y supón que existe $s = \sup A$ con $s \notin A$. Define $B = A \cup \{s\}$ y, para un número fijo $c > s$, $C = A \cup \{c\}$. Demuestra que:

1. $\sup B = s$ y $\max B = s$;
2. $\sup C = c$ y $\max C = c$;
3. $U(B) = U(A)$;
4. $U(C) = [c, \infty)$.

Interpreta la diferencia: **añadir la barrera extremal** cambia el alcanzamiento sin mover la barrera, mientras que **añadir un punto más allá de ella** obliga a desplazarla.

Solución. Tenemos $s = \sup A, \qquad s \notin A$. Por §2.3, $U(A) = [s, \infty)$. Definamos $B = A \cup \{s\}$. Como s ya era cota superior de A y el nuevo punto añadido es precisamente s, sigue siendo cota superior de B. Toda cota superior de B es también cota superior de A, porque $A \subseteq B$. Por tanto ninguna puede ser menor que s. Así,

$$\boxed{\sup B = s}.$$

Pero ahora $s \in B$, de modo que la barrera extremal está alcanzada y

$$\boxed{\max B = s}.$$

Además, una cota superior de B debe dominar a s, así que $U(B) = [s, \infty) = U(A)$. Ahora tomemos $c > s$ y definamos $C = A \cup \{c\}$. Como $c \in C$ y todos los elementos de A satisfacen $a \leq s < c$, el número c domina a todo C. Por tanto,

$$\boxed{\max C = c}.$$

Todo máximo es supremo, luego

$$\boxed{\sup C = c}.$$

Finalmente, un número u es cota superior de C exactamente cuando domina al punto c, es decir, cuando $u \geq c$. Por tanto,

$$\boxed{U(C) = [c, \infty)}.$$

Las dos modificaciones tienen efectos distintos:

- añadir s no cambia la posición de la barrera extremal; sólo hace que quede alcanzada;
- añadir $c > s$ obliga a mover la barrera extremal hasta c.

Ejercicio 21. Intersecar el conjunto con sus propias cotas

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y supón que existen $i = \inf A, \qquad s = \sup A$.

1. Demuestra que $A \cap U(A)$ sólo puede ser $\emptyset$ o $\{s\}$, y determina exactamente cuándo ocurre cada caso.
2. Demuestra de manera dual que $A \cap L(A)$ sólo puede ser $\emptyset$ o $\{i\}$.
3. Deduce de estas dos identidades los criterios de existencia de máximo y mínimo.

4. Construye cuatro conjuntos con $\inf A = 0$, $\sup A = 1$, que realicen respectivamente las cuatro posibilidades:
   - máximo y mínimo;
   - máximo pero no mínimo;
   - mínimo pero no máximo;
   - ni máximo ni mínimo.

Este ejercicio debe conectar las tres capas ya construidas: **conjunto original, conjuntos de cotas y barreras extremales**.

Solución. Como $s = \sup A$, tenemos $U(A) = [s, \infty)$. Pero todo elemento de A satisface $a \leq s$. Por tanto, un número que pertenezca simultáneamente a A y a $U(A)$ tendría que satisfacer

$$a \leq s \qquad \text{y} \qquad a \geq s.$$

Luego necesariamente $a = s$. Así, $A \cap U(A) \subseteq \{s\}$. Si $s \in A$, entonces además $s \in U(A)$, por lo que

$$\boxed{A \cap U(A) = \{s\}}.$$

Si $s \notin A$, la única posible intersección desaparece y

$$\boxed{A \cap U(A) = \emptyset}.$$

En resumen,

$$\boxed{A \cap U(A) = \begin{cases} \{s\}, & s \in A, \\ \emptyset, & s \notin A. \end{cases}}$$

La versión inferior es dual. Como $i = \inf A$, tenemos $L(A) = (-\infty, i]$, mientras que todo $a \in A$ cumple $i \leq a$. Por tanto, $A \cap L(A) \subseteq \{i\}$, y exactamente

$$\boxed{A \cap L(A) = \begin{cases} \{i\}, & i \in A, \\ \emptyset, & i \notin A. \end{cases}}$$

Ahora, §2.2 nos dice que $A \cap U(A)$ es no vacío exactamente cuando existe máximo, y que $A \cap L(A)$ es no vacío exactamente cuando existe mínimo. Así recuperamos

$$\max A \text{ existe} \quad \Longleftrightarrow \quad s \in A$$

y

$$\min A \text{ existe} \quad \Longleftrightarrow \quad i \in A.$$

Para realizar las cuatro posibilidades con $\inf A = 0$, $\sup A = 1$, podemos tomar: $A_1 = [0, 1]$, que tiene mínimo y máximo; $A_2 = (0, 1]$, que tiene máximo pero no mínimo; $A_3 = [0, 1)$, que tiene mínimo pero no máximo; $A_4 = (0, 1)$, que no tiene ni mínimo ni máximo. Los cuatro conjuntos comparten las mismas barreras extremales 0 y 1. Lo único que cambia es cuáles de esas barreras pertenecen al conjunto original.

2.5. Acercarse a una barrera sin tocarla

La minimalidad del supremo contiene una información sobre los propios elementos de A. Si $s = \sup A$ y elegimos $\varepsilon > 0$, el número $s - \varepsilon$ es menor que la menor cota superior, por lo que deja de ser cota. Al negar su condición de cota obtenemos un elemento $a \in A$ con $a > s - \varepsilon$. Además, $a \leq s$ porque s sí es cota superior. Hemos demostrado que

$\forall \varepsilon > 0\ \exists a \in A:\qquad s - \varepsilon < a \leq s$. La franja $(s-\varepsilon, s]$ contiene, por tanto, algún elemento de A, cualquiera que sea su anchura positiva. Si existiera un margen $\varepsilon_0 > 0$ cuya franja quedara vacía, como todos los elementos están por debajo de s, todos tendrían que satisfacer $a \leq s - \varepsilon_0$. Esa barrera más baja seguiría siendo cota y desmentiría la minimalidad de s.



Figura 2.5. La caracterización epsilon dice que ninguna franja positiva inmediatamente bajo el supremo puede quedar vacía de puntos del conjunto.

El orden de los cuantificadores permite que el elemento elegido dependa de la anchura: primero fijamos ε y después encontramos a. Cuando $s \in A$, podemos usar siempre $a = s$; cuando $s \notin A$, esa elección está prohibida, pero cada franja sigue conteniendo un punto del conjunto. La afirmación no necesita introducir una sucesión ni elegir de antemano una lista de testigos. La condición local también permite reconocer el supremo, siempre que sepamos de antemano que el candidato es cota superior. En efecto, supongamos que s es cota y que cada franja $(s-\varepsilon, s]$ contiene algún elemento de A. Para probar la minimalidad, tomemos una cota superior cualquiera u. Si fuera $u < s$, querríamos que la franja empezara exactamente en u, de modo que elegimos $\varepsilon = s - u > 0$. La hipótesis da entonces $a \in A$ con $u = s - \varepsilon < a$, contradiciendo que u sea cota superior. Así $s \leq u$ para toda cota superior u, y $s = \sup A$.

Para $A \neq \emptyset$, queda probada la **caracterización** ε:

$$s = \sup A \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} s \text{ es cota superior de } A, \\ \forall \varepsilon > 0\ \exists a \in A:\ \ s - \varepsilon < a \leq s. \end{cases}$$

La condición de cota no debe perderse al usar este criterio. La aproximación por la izquierda, por sí sola, no controla los elementos que pudieran quedar por encima de s. La condición con un testigo, por su parte, exige que A sea no vacío: ningún elemento puede elegirse en el vacío. Para $A = (0,1)$ podemos ver la elección del testigo directamente. Si $0 < \varepsilon < 2$, sirve $a = 1 - \varepsilon/2$, pues está en $(0,1)$ y cumple $1 - \varepsilon < a < 1$. Si $\varepsilon \geq 2$, sirve $a = 1/2$. Para $A = (2,5)$, sirve $a = 5 - \varepsilon/2$ cuando $0 < \varepsilon < 6$, y $a = 7/2$ cuando $\varepsilon \geq 6$. La división en casos asegura que el testigo permanezca dentro del intervalo aun cuando la anchura elegida sea grande.

La versión inferior se obtiene atendiendo al lado por el que una cota puede mejorarse. Si $i = \inf A$, el número $i + \varepsilon$ no es cota inferior; existe, por tanto, $a \in A$ con $a < i + \varepsilon$, y la

condición de cota i da $i \leq a$. Recíprocamente, supongamos que i es cota inferior y que cada franja $[i, i+\varepsilon)$ contiene un elemento de A. Si hubiera una cota inferior $l > i$, elegiríamos $\varepsilon = l - i$ y obtendríamos $a < l$, contradiciendo esa condición de cota. Luego

$$i = \inf A \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} i \text{ es cota inferior de } A, \\ \forall \varepsilon > 0 \; \exists a \in A : \; i \leq a < i + \varepsilon, \end{cases} \qquad A \neq \emptyset.$$

Podemos prescindir de la letra ε sin cambiar el contenido. Para el supremo, la condición dice que todo $r < s$ deja de ser cota superior: existe $a \in A$ con $r < a \leq s$. Basta sustituir $\varepsilon = s - r$; en sentido inverso, se toma $r = s - \varepsilon$. Para el ínfimo, todo $r > i$ admite $a \in A$ con $i \leq a < r$, mediante las sustituciones $\varepsilon = r - i$ y $r = i + \varepsilon$. Estas formulaciones describen la misma imposibilidad de mejorar positivamente una barrera extremal.

Ejercicios de la sección 2.5.

Ejercicio 22. Franjas pegadas a la barrera

Considera los conjuntos

$$A = (0, 1) \qquad \text{y} \qquad B = (0, 1].$$

En ambos casos la barrera superior extremal es $s = 1$. Para cada uno de los valores

$$\varepsilon = 1, \qquad \varepsilon = \frac{1}{2}, \qquad \varepsilon = \frac{1}{10},$$

haz lo siguiente por separado para A y para B:

1. escribe explícitamente la franja $(1 - \varepsilon, 1]$;
2. exhibe un elemento del conjunto que pertenezca a esa franja;
3. indica si puedes usar el mismo punto $a = 1$ como testigo;
4. explica qué parte de la representación cambia entre A y B y qué parte permanece igual.

No organices los testigos como una sucesión. Cada valor de ε representa una verificación independiente de la condición $1 - \varepsilon < a \leq 1$.

Solución. Para ambos conjuntos la barrera superior extremal es $s = 1$, de modo que las franjas dependen únicamente de ε. Si $\varepsilon = 1$, la franja es $(0, 1]$. En $A = (0, 1)$ podemos elegir, por ejemplo, $a = \frac{1}{2}$. En $B = (0, 1]$ podemos elegir igualmente $1/2$, pero también podemos tomar $a = 1$. Si $\varepsilon = \frac{1}{2}$, la franja es $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$. En A sirve, por ejemplo,

$a = \frac{3}{4}$, mientras que en B podemos usar $3/4$ o nuevamente $a = 1$. Si $\varepsilon = \frac{1}{10}$, la franja es $\left(\frac{9}{10}, 1\right]$. En A podemos elegir $a = \frac{19}{20}$, y en B sirven tanto $19/20$ como 1. La geometría de las franjas no cambia: siempre están pegadas por la izquierda a la misma barrera $s = 1$. Lo que cambia es la pertenencia de esa barrera:

$1 \notin A$, $\quad 1 \in B$. Por eso $a = 1$ nunca puede ser testigo para A, pero funciona para **todo** $\varepsilon > 0$ en B. En A, en cambio, el testigo debe elegirse dentro del intervalo abierto y puede depender del valor de ε. Las tres elecciones anteriores son verificaciones independientes; no constituyen una sucesión.

Ejercicio 23. Del supremo a la condición ε

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y supón que $s = \sup A$. Demuestra directamente desde la definición de supremo que

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists a \in A \quad \text{tal que} \quad s - \varepsilon < a \leq s.$$

Tu demostración debe hacer explícitos estos tres pasos:

1. por qué $s - \varepsilon < s$;
2. por qué $s - \varepsilon$ no puede ser cota superior;

3. cómo la negación de «ser cota superior» produce el elemento a.

No uses sucesiones, límites ni completitud.

Solución. Sea $s = \sup A$ y fijemos un $\varepsilon > 0$ arbitrario. Como $\varepsilon > 0$, $s - \varepsilon < s$. Ahora usamos la minimalidad del supremo. Si $s - \varepsilon$ fuera también cota superior de A, tendríamos una cota superior estrictamente menor que s, contradiciendo que s es la menor cota superior. Por tanto, $s-\varepsilon \notin U(A)$. Negar que $s-\varepsilon$ sea cota superior significa negar $\forall a \in A, \quad a \leq s-\varepsilon$.

La negación correcta es

$$\exists a \in A \quad \text{tal que} \quad a > s - \varepsilon.$$

Así existe $a \in A$ con $s - \varepsilon < a$. Además, como s sí es cota superior, $a \leq s$. Juntando ambas desigualdades, $s - \varepsilon < a \leq s$. Como $\varepsilon > 0$ fue arbitrario,

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \; \exists a \in A : s - \varepsilon < a \leq s}.$$

El argumento no construye una lista de puntos. Para cada margen positivo se afirma independientemente la existencia de un testigo adecuado.

Ejercicio 24. De la condición ε al supremo

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío. Supón que s es una cota superior de A y que

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists a \in A \quad \text{tal que} \quad s - \varepsilon < a \leq s.$$

Demuestra que $s = \sup A$. La prueba debe partir de una cota superior arbitraria u y mostrar que $u < s$ lleva a contradicción mediante la elección $\varepsilon = s - u$. Indica con precisión dónde utilizas que s ya es una cota superior.

Solución. Sabemos ya que s es una cota superior de A. Falta probar que es la **menor** cota superior. Sea u una cota superior arbitraria de A. Queremos demostrar $s \leq u$. Supongamos, buscando una contradicción, que $u < s$. Entonces $\varepsilon = s-u > 0$. Por la hipótesis existe $a \in A$ tal que $s - \varepsilon < a \leq s$. Pero $s - \varepsilon = s - (s - u) = u$.

Así, $u < a$. Esto contradice que u sea cota superior de A, pues una cota superior debe satisfacer $a \leq u \qquad$ para todo $a \in A$. Por tanto no puede ocurrir $u < s$. Como u era una cota superior arbitraria, $s \leq u \qquad$ para toda $u \in U(A)$. Junto con la hipótesis previa de que s mismo es cota superior, obtenemos exactamente la definición de supremo:

$$\boxed{s = \sup A}.$$

La condición ε por sí sola no reemplaza la primera parte de la definición: hemos usado explícitamente que s ya era cota superior.

Ejercicio 25. Cambiar el orden de los cuantificadores cambia la afirmación

Para $A = (0, 1)$ y $s = 1$, compara las dos afirmaciones: (I) $\qquad \forall \varepsilon > 0 \; \exists a \in A : 1 - \varepsilon < a \leq 1$, y

$$\text{(II)} \qquad \exists a \in A \; \forall \varepsilon > 0 : 1 - \varepsilon < a \leq 1.$$

1. Decide cuál de las dos es verdadera.
2. Explica por qué la otra falla.
3. Identifica el error conceptual de interpretar (I) como si exigiera un único punto fijo de A que funcionara para todos los ε.
4. Da un ejemplo de un conjunto para el cual ambas afirmaciones sean verdaderas con la misma barrera s.

El objetivo es controlar el orden lógico $\forall \varepsilon \; \exists a$ sin convertirlo en $\exists a \; \forall \varepsilon$.

Solución. Para $A = (0,1)$, $s = 1$, la afirmación (I) es verdadera: $\forall \varepsilon > 0\ \exists a \in A : 1 - \varepsilon < a \leq 1$. En efecto, si $0 < \varepsilon < 2$, podemos tomar $a = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$, y si $\varepsilon \geq 2$ basta elegir $a = 1/2$. En cambio, (II) es falsa: $\exists a \in A\ \forall \varepsilon > 0 : 1 - \varepsilon < a \leq 1$. Supongamos que existiera un punto fijo $a \in (0,1)$ que funcionara para todo $\varepsilon > 0$. Como $a < 1$, el número

$\varepsilon = \frac{1-a}{2}$ es positivo. Entonces $1 - \varepsilon = 1 - \frac{1-a}{2} = \frac{1+a}{2}$. Pero, como $a < 1$, $a < \frac{1+a}{2} = 1 - \varepsilon$. Esto contradice la desigualdad requerida $1 - \varepsilon < a$. El error conceptual consiste en confundir $\forall \varepsilon > 0\ \exists a \in A$ con $\exists a \in A\ \forall \varepsilon > 0$. En la primera afirmación, el testigo a puede depender de ε. La segunda exige un único punto que funcione para todos los márgenes.

Ahora tomemos $B = (0,1]$. Para $s = 1$, ambas afirmaciones son verdaderas, porque el mismo punto $a = 1 \in B$ satisface, para todo $\varepsilon > 0$, $1 - \varepsilon < 1 \leq 1$. De hecho, (II) exige que la barrera pertenezca al conjunto. Si un testigo fijo a satisface $s - \varepsilon < a \leq s$ para todo $\varepsilon > 0$ y ocurriera $a < s$, elegir $\varepsilon = (s - a)/2$ daría una contradicción. Luego necesariamente $a = s$. La condición (I), junto con que s sea cota superior, también permite reconocer supremos no alcanzados.

Ejercicio 26. La caracterización dual del ínfimo

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío. Demuestra la equivalencia

$$i = \inf A \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} i \text{ es cota inferior de } A, \\ \forall \varepsilon > 0\ \exists a \in A : i \leq a < i + \varepsilon. \end{cases}$$

Debes probar las dos direcciones. Después demuestra que esta formulación es equivalente a la siguiente:

para todo $r > i$ existe $a \in A$ tal que $i \leq a < r$.

No cites la versión superior como una «regla automática»: reconstruye el argumento dual.
Solución.

Del ínfimo a la condición local

Supongamos que $i = \inf A$. Entonces i es cota inferior. Sea $\varepsilon > 0$. Como $i + \varepsilon > i$, el número $i + \varepsilon$ no puede seguir siendo cota inferior: si lo fuera, sería una cota inferior estrictamente mayor que el ínfimo. Por tanto existe $a \in A$ tal que $a < i + \varepsilon$. Como i sí es cota inferior, $i \leq a$. Luego

$$\boxed{i \leq a < i + \varepsilon}.$$

Así, $\forall \varepsilon > 0\ \exists a \in A : i \leq a < i + \varepsilon$.

De la condición local al ínfimo

Supongamos ahora que i es cota inferior y que la condición anterior se cumple para todo $\varepsilon > 0$. Sea l una cota inferior cualquiera. Queremos probar $l \leq i$. Si ocurriera $l > i$, entonces $\varepsilon = l - i > 0$. La hipótesis daría un elemento $a \in A$ tal que $i \leq a < i + \varepsilon = l$. Así, $a < l$, lo que contradice que l sea cota inferior.

Por tanto toda cota inferior satisface $l \leq i$, y como i mismo es cota inferior,

$$\boxed{i = \inf A}.$$

Formulación con un punto $r > i$

Supongamos primero la condición con ε. Dado cualquier $r > i$, tomamos $\varepsilon = r - i > 0$. Entonces existe $a \in A$ con $i \leq a < i + \varepsilon = r$.

Recíprocamente, supongamos que para todo $r > i$ existe $a \in A$ con $i \leq a < r$. Dado $\varepsilon > 0$, elegimos $r = i + \varepsilon$. Entonces $i \leq a < i + \varepsilon$. Las dos formulaciones son, por tanto, equivalentes.

Ejercicio 27. Sumar conjuntos suma sus barreras extremales

Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ no vacíos y supón que existen $s_A = \sup A, \quad s_B = \sup B$, así como $i_A = \inf A, \quad i_B = \inf B$. Define la suma de conjuntos $A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$. Demuestra, usando la caracterización ε y sin invocar completitud, que

$$\boxed{\sup(A + B) = s_A + s_B}$$

y

$$\boxed{\inf(A + B) = i_A + i_B}.$$

Para la igualdad de supremos, organiza la prueba en dos partes:

1. demostrar que $s_A + s_B$ es cota superior de $A + B$;
2. para un $\varepsilon > 0$ arbitrario, elegir separadamente $a \in A$ y $b \in B$ a una distancia menor que $\varepsilon/2$ de sus respectivas barreras superiores y combinar ambas desigualdades.

Haz el argumento dual para los ínfimos. No introduzcas sucesiones.

Solución. La igualdad de supremos tiene dos partes distintas. Primero debemos mostrar que la suma de las dos barreras superiores sigue siendo una barrera superior para todas las sumas posibles. Después debemos mostrar que esa barrera no puede bajarse ni siquiera una cantidad positiva arbitraria. La caracterización ε está diseñada precisamente para esa segunda tarea. Definamos $S = A + B$.

Supremo

Sean $s_A = \sup A, \quad s_B = \sup B$. Para todo $a \in A$ y todo $b \in B$, $a \le s_A, \quad b \le s_B$. Sumando, $a + b \le s_A + s_B$. Como todo elemento de S tiene la forma $a + b$, concluimos que $s_A + s_B$ es cota superior de S. Ahora sea $\varepsilon > 0$. Por la caracterización ε del supremo aplicada a A con margen $\varepsilon/2$, existe $a \in A$ tal que

$s_A - \frac{\varepsilon}{2} < a \le s_A$. Análogamente, existe $b \in B$ tal que $s_B - \frac{\varepsilon}{2} < b \le s_B$. Al sumar, $s_A + s_B - \varepsilon < a + b \le s_A + s_B$. Además, $a + b \in A + B = S$. Por tanto, para todo $\varepsilon > 0$ existe un elemento de S en la franja $(s_A + s_B - \varepsilon,\ s_A + s_B]$. Como $s_A + s_B$ ya es cota superior, la conversa de la caracterización ε da

$$\boxed{\sup(A + B) = s_A + s_B}.$$

Ínfimo

Sean ahora $i_A = \inf A, \quad i_B = \inf B$. Para todo $a \in A$ y $b \in B$, $i_A \le a, \quad i_B \le b$, de modo que $i_A + i_B \le a + b$. Así, $i_A + i_B$ es cota inferior de $A + B$. Sea $\varepsilon > 0$. Aplicando la caracterización dual con margen $\varepsilon/2$, existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $i_A \le a < i_A + \frac{\varepsilon}{2}$ y

$i_B \le b < i_B + \frac{\varepsilon}{2}$. Sumando, $i_A + i_B \le a + b < i_A + i_B + \varepsilon$. Por tanto, cada franja $[i_A + i_B,\ i_A + i_B + \varepsilon)$ contiene algún elemento de $A + B$. Como $i_A + i_B$ ya es cota inferior, la caracterización dual implica

$$\boxed{\inf(A + B) = i_A + i_B}.$$

No se ha invocado completitud: las existencias de s_A, s_B, i_A, i_B estaban dadas como hipótesis, y la prueba sólo transporta sus propiedades extremales a la suma de conjuntos. La figura C02-F09 sintetiza las dos mitades de la prueba del supremo y hace visible por qué se reparte el margen ε en dos franjas de anchura $\varepsilon/2$.

2.6. Comparar conjuntos por sus barreras

Si $A \subseteq B$, cualquier cota que controle a todo B controla también a A, porque los elementos de A están entre los de B. Para una cota superior u esto significa que $b \le u$ para todo $b \in B$

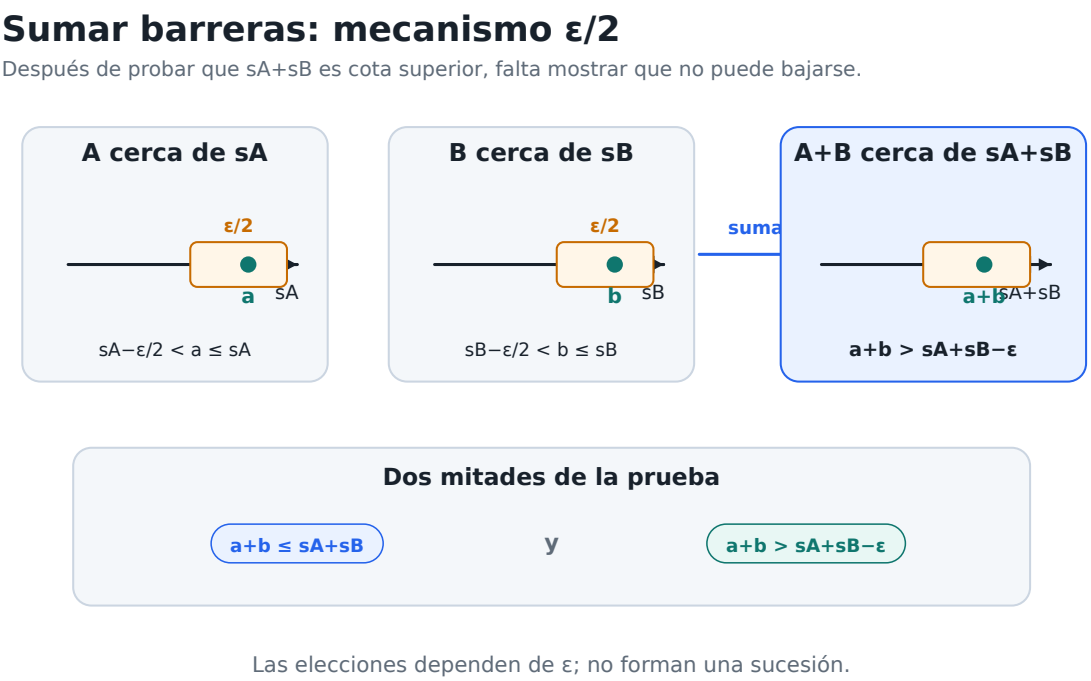


Figura 2.6. La prueba de sup(A+B)=sup A+sup B combina una cota superior obvia con testigos a y b elegidos dentro de franjas epsilon sobre dos.

implica $a \le u$ para todo $a \in A$; para una cota inferior l, que $l \le b$ para todo $b \in B$ implica $l \le a$ para todo $a \in A$. Así,

$U(B) \subseteq U(A), \qquad L(B) \subseteq L(A)$. Al ampliar el conjunto original imponemos más condiciones a sus cotas, y por eso ambas inclusiones se invierten. Si además existen los supremos, $\sup B$ es una de las cotas superiores de A, por lo que la minimalidad de $\sup A$ obliga a que $\sup A \le \sup B$. Si existen los ínfimos, $\inf B$ es cota inferior de A, y la maximalidad de $\inf A$ obliga a que $\inf B \le \inf A$. Hemos probado

$$A \subseteq B \quad \Longrightarrow \quad \sup A \le \sup B, \qquad \inf B \le \inf A,$$

bajo las hipótesis de existencia correspondientes. Primero comparamos familias de cotas; las desigualdades entre sus extremos se desprenden después de la misma comparación.

Una inclusión estricta no fuerza desigualdades estrictas entre las barreras. Para $(0,1) \subsetneq [0,1]$, los supremos coinciden en 1 y los ínfimos en 0. Añadir los extremos los vuelve alcanzados sin moverlos. En cambio, para $[0,1] \subsetneq [-2,3]$, obtenemos $\sup[0,1] = 1 < 3 = \sup[-2,3]$ e $\inf[-2,3] = -2 < 0 = \inf[0,1]$. Lo que importa es dónde están los puntos añadidos respecto de las barreras anteriores; el mero hecho de añadirlos no decide si habrá desplazamiento.

La reflexión respecto del origen proporciona una comparación de otro tipo. Definamos $-A = \{-a : a \in A\}$. Si l es cota inferior de A, tenemos $l \le a$ para todo $a \in A$, y al cambiar de signo obtenemos $-a \le -l$. Por tanto, $-l$ es cota superior de $-A$. Recíprocamente, si u es cota superior de $-A$, entonces $-a \le u$ para todo $a \in A$, lo que equivale a $-u \le a$; así $-u$ es cota inferior de A. Estas dos direcciones dan $U(-A) = -L(A)$. El mismo cálculo, partiendo de $l \le -a$, da $L(-A) = -U(A)$:

$U(-A) = -L(A), \qquad L(-A) = -U(A)$. Si existe $\inf A$, es el mayor elemento de $L(A)$. La reflexión convierte ese mayor elemento en el menor de $-L(A) = U(-A)$, con lo que asegura a la vez la existencia y el valor del supremo reflejado. Dualmente, el menor elemento de $U(A)$ se convierte en el mayor de $L(-A)$. Obtenemos

$\sup(-A) = -\inf A, \qquad \inf(-A) = -\sup A$, cada identidad cuando existe el extremo de A que aparece a la derecha. Por ejemplo, para $A = [-1,4)$ tenemos $-A = (-4,1]$; el ínfimo -1 se transforma en el supremo 1 y el supremo 4 en el ínfimo -4. La pertenencia también

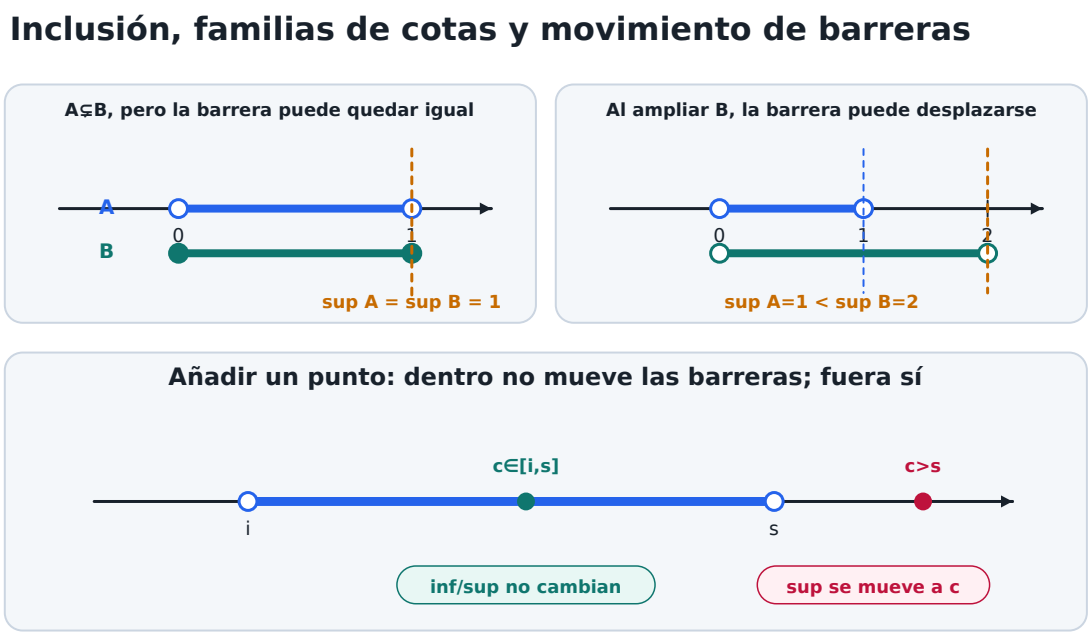


Figura 2.7. Al ampliar un conjunto, las familias de cotas se restringen; las barreras extremales pueden permanecer o desplazarse según dónde aparezcan los nuevos puntos.

se transporta: el mínimo de A se transforma en máximo de $-A$, mientras que el ínfimo -4 del reflejo sigue sin alcanzarse.

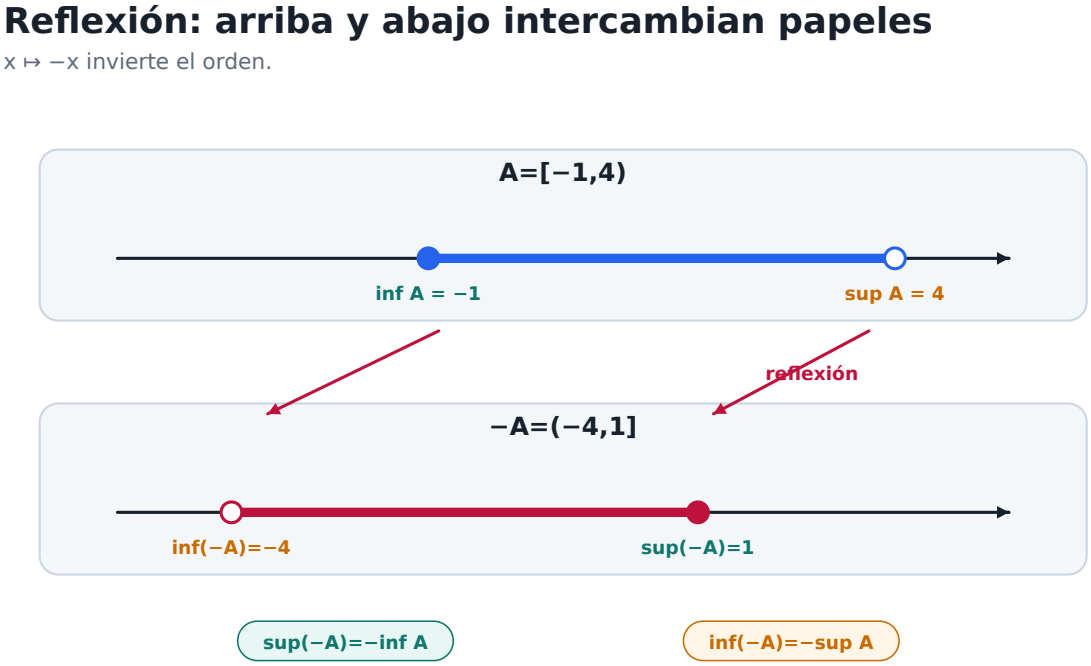


Figura 2.8. La reflexión x↦−x invierte el orden y convierte cotas inferiores en superiores, intercambiando ínfimo y supremo con cambio de signo.

Las pruebas de monotonía y reflexión han utilizado las definiciones y las propiedades del orden. No necesitan una garantía general de existencia porque los extremos de partida

figuraban entre sus hipótesis. Esta economía de dependencias será útil al examinar por qué la existencia general sí requiere una propiedad adicional.

Ejercicios de la sección 2.6.

Ejercicio 28. Dos conjuntos, cuatro familias de cotas

Considera

$$A = (-1, 1) \qquad \text{y} \qquad B = [-2, 3).$$

1. Verifica que $A \subseteq B$.
2. Determina exactamente $U(A)$, $L(A)$, $U(B)$ y $L(B)$.
3. Representa las cuatro familias como semirrectas sobre una misma escala.
4. Comprueba visual y algebraicamente que
$$U(B) \subseteq U(A) \qquad \text{y} \qquad L(B) \subseteq L(A).$$
5. Identifica $\sup A$, $\sup B$, $\inf A$ e $\inf B$ y relaciona sus posiciones con las inclusiones anteriores.

El objetivo es hacer visible que **agrandar el conjunto original reduce las familias de cotas admisibles**.

Solución. Tenemos

$$A = (-1, 1) \qquad \text{y} \qquad B = [-2, 3).$$

Todo elemento de A pertenece a B, pues

$$-1 < a < 1 \quad \Longrightarrow \quad -2 \leq a < 3.$$

Por tanto, $A \subseteq B$. Para A, las cotas superiores son exactamente los números $u \geq 1$. En efecto, todo $a \in A$ satisface $a < 1 \leq u$, mientras que si $u < 1$ existe un punto de $(-1, 1)$ mayor que u. Así,

$$\boxed{U(A) = [1, \infty)}.$$

Dualmente,

$$\boxed{L(A) = (-\infty, -1]}.$$

Para $B = [-2, 3)$, todo $u \geq 3$ es cota superior y ningún $u < 3$ puede serlo, porque hay puntos de B entre u y 3. Luego

$$\boxed{U(B) = [3, \infty)}.$$

Además, como $-2 \in B$ y es su extremo inferior alcanzado,

$$\boxed{L(B) = (-\infty, -2]}.$$

Ahora se ve inmediatamente que $[3, \infty) \subseteq [1, \infty)$, es decir,

$$\boxed{U(B) \subseteq U(A)}.$$

En el lado inferior, $(-\infty, -2] \subseteq (-\infty, -1]$, por lo que

$$\boxed{L(B) \subseteq L(A)}.$$

Los extremos correspondientes son $\sup A = 1$, $\sup B = 3$, y $\inf A = -1$, $\inf B = -2$. Así,

$$\sup A < \sup B \qquad \text{e} \qquad \inf B < \inf A.$$

La representación en una misma escala muestra el fenómeno central: al pasar del conjunto pequeño al grande, las semirrectas de cotas se hacen más restrictivas y sus extremos pueden desplazarse hacia afuera.

Ejercicio 29. De la inclusión de conjuntos a la monotonía de sus barreras

Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ con $A \subseteq B$.

1. Demuestra directamente desde la definición de cota que $U(B) \subseteq U(A)$.
2. Demuestra de manera dual que $L(B) \subseteq L(A)$.
3. Suponiendo que existen $\sup A$ y $\sup B$, deduce que $\sup A \leq \sup B$.
4. Suponiendo que existen $\inf A$ y $\inf B$, deduce que $\inf B \leq \inf A$.

La prueba debe mostrar la secuencia lógica completa: **primero se comparan las familias de cotas; después sus extremos**.
Solución. Supongamos $A \subseteq B$.

Cotas superiores

Sea $u \in U(B)$. Entonces $b \leq u$ para todo $b \in B$. Como cada $a \in A$ pertenece también a B, se cumple $a \leq u$ para todo $a \in A$. Por tanto $u \in U(A)$ y hemos probado

$$\boxed{U(B) \subseteq U(A)}.$$

Cotas inferiores

Sea $l \in L(B)$. Entonces $l \leq b$ para todo $b \in B$. En particular, $l \leq a$ para todo $a \in A$, de modo que $l \in L(A)$. Luego

$$\boxed{L(B) \subseteq L(A)}.$$

Supremos

Supongamos que existen $\sup A$ y $\sup B$. Escribamos $s_A = \sup A$, $s_B = \sup B$. Como $s_B \in U(B)$ y $U(B) \subseteq U(A)$, tenemos $s_B \in U(A)$. Pero s_A es la menor cota superior de A. Por tanto,

$$\boxed{s_A \leq s_B},$$

es decir,

$$\boxed{\sup A \leq \sup B}.$$

Ínfimos

Si $i_A = \inf A$, $i_B = \inf B$, entonces $i_B \in L(B) \subseteq L(A)$. Como i_A es la mayor cota inferior de A, $i_B \leq i_A$. Así,

$$\boxed{\inf B \leq \inf A}.$$

La lógica es, por tanto,

$$A \subseteq B \Longrightarrow \begin{cases} U(B) \subseteq U(A), \\ L(B) \subseteq L(A), \end{cases}$$

y sólo después, bajo las hipótesis de existencia de los extremos, $\sup A \leq \sup B$, $\inf B \leq \inf A$.

Ejercicio 30. Reflejar un conjunto intercambia arriba y abajo

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y define $-A = \{-a : a \in A\}$. Demuestra que $U(-A) = -L(A)$ y $L(-A) = -U(A)$, donde, para cualquier conjunto $S \subseteq \mathbb{R}$, $-S = \{-s : s \in S\}$. A partir de estas identidades, prueba que:

1. si $\inf A$ existe, entonces $\sup(-A)$ existe y $\sup(-A) = -\inf A$;
2. si $\sup A$ existe, entonces $\inf(-A)$ existe y $\inf(-A) = -\sup A$.

No trates estas fórmulas como reglas memorizadas: la prueba debe pasar por la inversión del orden al multiplicar por -1.

Solución. Definimos $-A = \{-a : a \in A\}$.

Primera identidad

Sea $u \in U(-A)$. Entonces para todo $a \in A$, $-a \leq u$. Multiplicando por -1 e invirtiendo la desigualdad, $-u \leq a$ para todo $a \in A$. Por tanto, $-u \in L(A)$, y de aquí $u \in -L(A)$. Hemos demostrado $U(-A) \subseteq -L(A)$.

Recíprocamente, sea $u \in -L(A)$. Entonces existe $l \in L(A)$ tal que $u = -l$. Como $l \leq a$ para todo $a \in A$, al multiplicar por -1 obtenemos $-a \leq -l = u$ para todo $a \in A$. Así $u \in U(-A)$ y concluimos

$$\boxed{U(-A) = -L(A)}.$$

Segunda identidad

El argumento dual da

$$\boxed{L(-A) = -U(A)}.$$

En efecto, $l \in L(-A)$ equivale a $l \leq -a$ para todo $a \in A$, lo que equivale a $a \leq -l$ para todo $a \in A$, es decir, a $-l \in U(A)$.

Extremos

Supongamos que $i = \inf A$. Entonces $i = \max L(A)$. Al cambiar de signo, el mayor elemento de $L(A)$ se convierte en el menor elemento de $-L(A)$. Como $-L(A) = U(-A)$, obtenemos

$$\boxed{\sup(-A) = -i = -\inf A}.$$

Análogamente, si $s = \sup A$, entonces $s = \min U(A)$. Al reflejar, $-U(A) = L(-A)$, y el menor elemento de $U(A)$ se convierte en el mayor de $L(-A)$. Por tanto,

$$\boxed{\inf(-A) = -s = -\sup A}.$$

Las fórmulas son una consecuencia de la inversión del orden, no una convención algebraica independiente.

Ejercicio 31. Inclusión estricta no obliga a desigualdad estricta

Un estudiante afirma:

> Si $A \subsetneq B$, entonces necesariamente $\sup A < \sup B$ y $\inf B < \inf A$.

1. Diagnostica la afirmación usando $A = (0, 1)$, $B = [0, 1]$.
2. Calcula los cuatro extremos y explica por qué la inclusión es estricta aunque ambas desigualdades entre barreras sean igualdades.
3. Da un segundo ejemplo $C \subsetneq D$ en el que sí sean estrictas simultáneamente
$$\sup C < \sup D \qquad \text{y} \qquad \inf D < \inf C.$$
4. Formula la conclusión general correcta que puede deducirse de $A \subseteq B$.

El diagnóstico debe distinguir **inclusión estricta de conjuntos** de **desplazamiento estricto de barreras**.

Solución. La afirmación es falsa. Tomemos

$$A = (0,1) \qquad \text{y} \qquad B = [0,1].$$

Claramente, $A \subsetneq B$, porque $0,1 \in B$ pero $0,1 \notin A$. Sin embargo, $\sup A = \sup B = 1$ y $\inf A = \inf B = 0$. Por tanto, $\sup A < \sup B$ y $\inf B < \inf A$ son ambas falsas en este ejemplo. La razón es que los puntos nuevos de B no quedan más allá de las barreras extremales que ya controlaban a A; simplemente hacen que esas barreras pasen a pertenecer al conjunto.

Para obtener desigualdades estrictas podemos tomar

$$C = [0,1] \qquad \text{y} \qquad D = [-2,3].$$

Entonces $C \subsetneq D$, y además $\sup C = 1 < 3 = \sup D$ y $\inf D = -2 < 0 = \inf C$. La conclusión general correcta es sólo

$$\boxed{\sup A \leq \sup B}$$

y

$$\boxed{\inf B \leq \inf A},$$

cuando los extremos correspondientes existen. La inclusión estricta del conjunto no decide si estas desigualdades serán estrictas o no.

Ejercicio 32. Dónde añadir un punto determina qué barrera se mueve

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y supón que existen $i = \inf A, \qquad s = \sup A$. Para $c \in \mathbb{R}$, define $B_c = A \cup \{c\}$. Determina y demuestra $\inf B_c$ y $\sup B_c$ en los tres casos:

1. $i \leq c \leq s$;
2. $c > s$;
3. $c < i$.

Tu respuesta debe explicar por qué un punto añadido **dentro del intervalo de control** $[i, s]$ no mueve ninguna barrera extremal, mientras que un punto añadido fuera de él desplaza exactamente la barrera correspondiente. No uses ninguna garantía general de existencia: trabaja sólo con los extremos ya dados para A y con el punto añadido.

Solución. Escribamos $B_c = A \cup \{c\}$. Un número u es cota superior de B_c exactamente cuando controla a todos los puntos de A y también al punto añadido. Por tanto, $u \in U(B_c) \iff u \in U(A)$ y $c \leq u$. Como $s = \sup A$, sabemos que $U(A) = [s, \infty)$. Así, $U(B_c) = [s, \infty) \cap [c, \infty) = [\max\{s, c\}, \infty)$.

Esta familia tiene mínimo, que es $\max\{s, c\}$. Hemos demostrado tanto la existencia como el valor del nuevo supremo: $\sup B_c = \max\{s, c\}$. Para las cotas inferiores, l debe quedar por debajo de todos los puntos de A y del punto c. Como $L(A) = (-\infty, i]$, $L(B_c) = L(A) \cap (-\infty, c] = (-\infty, \min\{i, c\}]$. Su máximo es $\min\{i, c\}$, por lo que el ínfimo también existe y vale

$\inf B_c = \min\{i, c\}$. Los tres casos se leen de estas fórmulas. Si $i \leq c \leq s$, obtenemos $\inf B_c = i$ y $\sup B_c = s$. Si $c > s$, obtenemos $\inf B_c = i$ y $\sup B_c = c$; además, $c \in B_c$ y domina al conjunto, de modo que es su máximo. Si $c < i$, obtenemos $\inf B_c = c$ y $\sup B_c = s$, y c es el mínimo.

Un punto añadido dentro de $[i, s]$ satisface las dos barreras ya existentes. Fuera de ese intervalo obliga a desplazar la barrera del lado que rebasa. La existencia de los nuevos extremos procede de las familias de cotas calculadas, sin recurrir a una garantía general de completitud.

Ejercicio 33. Cuándo la inclusión deja intactas todas las cotas

Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ no vacíos con $A \subseteq B$, y supón que existen $\sup A$, $\sup B$, $\inf A$ e $\inf B$. Demuestra las equivalencias

$$\sup A = \sup B \quad \iff \quad U(A) = U(B)$$

y

$$\inf A = \inf B \quad \iff \quad L(A) = L(B).$$

Deduce que

$$\sup A = \sup B \quad \text{e} \quad \inf A = \inf B$$

si y sólo si

$$U(A) = U(B) \quad \text{y} \quad L(A) = L(B).$$

Finalmente, construye un ejemplo con $A \subsetneq B$ para el cual se cumplan simultáneamente estas igualdades, y explica qué información sobre los conjuntos **no** queda determinada por sus familias de cotas. El ejercicio conecta tres niveles: **inclusión de conjuntos, familias completas de cotas y barreras extremales**.

Solución. Supongamos $A \subseteq B$ y que existen los extremos indicados.

Lado superior

Escribamos $s_A = \sup A, \qquad s_B = \sup B$. Por §2.3, $U(A) = [s_A, \infty)$ y $U(B) = [s_B, \infty)$. Si $s_A = s_B$, entonces las dos semirrectas tienen el mismo extremo y, por tanto,

$$\boxed{U(A) = U(B)}.$$

Recíprocamente, si $U(A) = U(B)$, sus mínimos coinciden. Pero $\min U(A) = \sup A$ y $\min U(B) = \sup B$. Así,

$$\boxed{\sup A = \sup B}.$$

Hemos probado

$$\boxed{\sup A = \sup B \quad \iff \quad U(A) = U(B)}.$$

Lado inferior

Del mismo modo, $L(A) = (-\infty, \inf A]$ y $L(B) = (-\infty, \inf B]$. Por tanto,

$$\boxed{\inf A = \inf B \quad \iff \quad L(A) = L(B)}.$$

Combinando ambas equivalencias,

$$\sup A = \sup B \quad \text{e} \quad \inf A = \inf B$$

si y sólo si

$$U(A) = U(B) \quad \text{y} \quad L(A) = L(B).$$

Un ejemplo de inclusión estricta con igualdad completa de familias de cotas es

$$A = \{0, 1\} \qquad \text{y} \qquad B = [0, 1].$$

Tenemos $A \subsetneq B$, pero $\sup A = \sup B = 1$ y $\inf A = \inf B = 0$. En consecuencia, $U(A) = U(B) = [1, \infty)$ y $L(A) = L(B) = (-\infty, 0]$. Sin embargo, A contiene sólo dos puntos y B contiene todo el intervalo entre ellos. Las familias de cotas registran las barreras extremales, pero **no reconstruyen la estructura interna del conjunto**.

2.7. Definir una barrera no garantiza que exista

La igualdad $\sup A = \min U(A)$ precisa qué buscamos, pero no construye por sí sola ese mínimo. Para que exista un supremo real, $U(A)$ debe ser no vacío y debe tener un menor elemento. Son exigencias distintas. Para $A = (0, \infty)$ falla ya la primera: dado $u \in \mathbb{R}$, el punto $\max\{1, u+1\}$ pertenece a A y lo sobrepasa, luego $U(A) = \emptyset$. Para $(0, 1)$, en cambio, hemos calculado $U((0,1)) = [1, \infty)$; esta familia tiene mínimo y el cálculo justifica directamente el supremo.

El vacío permite observar la segunda exigencia con especial claridad. Si $A = \emptyset$, todo número real es cota superior, porque no hay ningún $a \in A$ que pueda violar $a \leq u$. La misma verdad vacía hace que todos los reales sean cotas inferiores. Por tanto, $U(\emptyset) = L(\emptyset) = \mathbb{R}$. Estas familias tienen muchos elementos, pero ninguna posee el extremo que necesitamos: $\mathbb{R}$ no tiene mínimo, pues a cualquier x le precede $x - 1$, y no tiene máximo, pues le sigue $x + 1$. Así, $\emptyset$ carece de supremo e ínfimo reales. Para $(0, \infty)$ no había cotas superiores; para el vacío están todas y no hay una menor. La ausencia de supremo tiene razones diferentes en cada caso.

Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es **no vacío y acotado superiormente**, la completitud establecida en C00 garantiza que $U(A)$ posee mínimo. Debemos distinguir esa garantía de la definición: no basta razonar que $U(A)$ es no vacío y, por ello, tiene mínimo, porque un subconjunto no vacío como $(0, 1)$ puede carecer de mínimo. En el caso de una familia de cotas de un conjunto no vacío, el paso se justifica mediante una propiedad específica de los reales. C03 estudiará esa propiedad de manera sistemática y relacionará sus formulaciones.

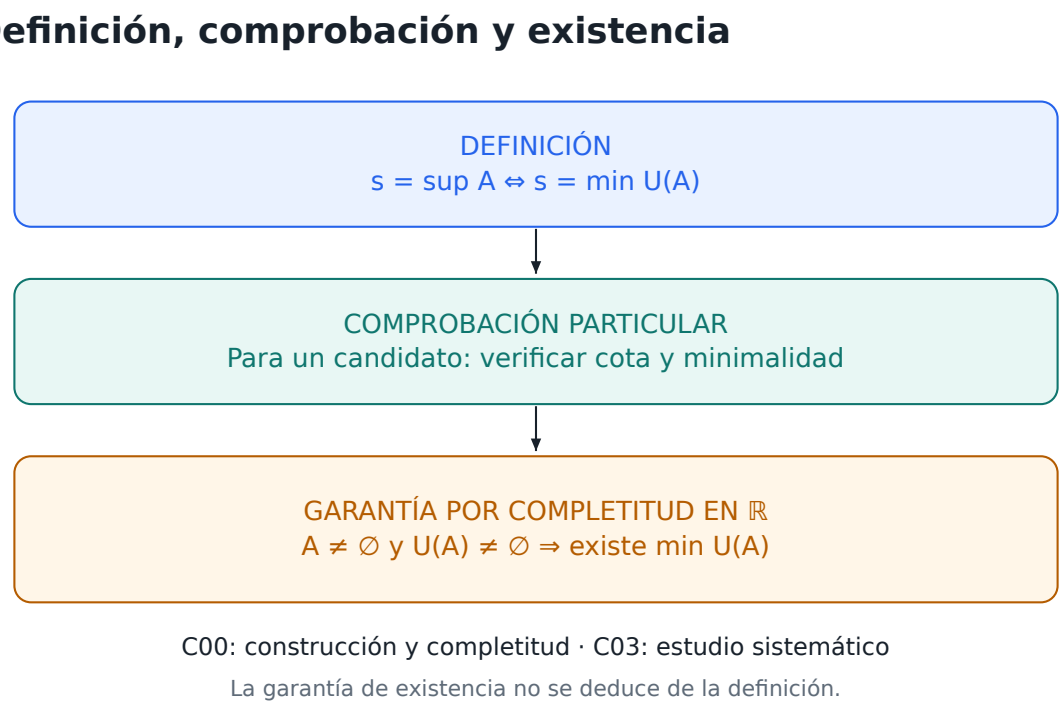


Figura 2.9. La definición y la comprobación particular tienen funciones distintas de la garantía por completitud, establecida en C00 y estudiada sistemáticamente en C03.

El contraste con $\mathbb{Q}$ permite comprobar que el orden por sí solo no alcanza. Dentro de los racionales, consideremos $S = \{q \in \mathbb{Q} : q > 0 \text{ y } q^2 < 2\}$. El conjunto es no vacío porque $1 \in S$, y 2 es cota superior racional: si $q \geq 2$, entonces $q^2 \geq 4 > 2$. Sin embargo, no hay supremo de S **dentro de** $\mathbb{Q}$. La solución del problema 38 demuestra el hecho mediante perturbaciones racionales: si un candidato positivo tiene cuadrado menor que 2, todavía hay un elemento

de S mayor que él; si tiene cuadrado mayor que 2, hay una cota superior racional menor; y ningún racional tiene cuadrado igual a 2.

La referencia al sistema en que buscamos la cota es esencial. Podemos considerar el mismo S como subconjunto de $\mathbb{R}$, donde la completitud sí garantiza su supremo. Esto no contradice su falta de supremo racional: ahora permitimos cotas en un conjunto numérico mayor. Haber demostrado que un conjunto tiene cotas dentro de un sistema ordenado no asegura que la barrera extremal se encuentre dentro de ese mismo sistema.

Podemos, pues, reconocer tres tareas. La definición establece las condiciones que debe cumplir un supremo; una verificación particular comprueba que cierto número las cumple para un conjunto dado; una garantía general afirma que, bajo hipótesis precisas, siempre existe un número que las cumple. Las pruebas de los intervalos realizan la segunda tarea. La completitud realiza la tercera y aporta algo que el orden de $\mathbb{Q}$ no posee. Conservar esa separación permite entender el contenido de una demostración incluso cuando su conclusión ya nos resulta conocida.

Ejercicios de la sección 2.7.

Ejercicio 34. Definir no es garantizar

Decide cuáles de las afirmaciones siguientes se deducen **sólo de las definiciones** desarrolladas en C02 y cuáles requieren una hipótesis o un resultado adicional. Justifica cada respuesta.

1. Si $s = \sup A$, entonces $s \in U(A)$.
2. Si $s = \sup A$, entonces $s = \min U(A)$.
3. Si $U(A) = \emptyset$, entonces A no posee supremo real.
4. Si $U(A) \neq \emptyset$, entonces $\min U(A)$ existe automáticamente.
5. Haber definido $\sup A$ como la menor cota superior demuestra que todo conjunto acotado superiormente posee supremo.
6. Si $A = \emptyset$, entonces $U(A) = \mathbb{R}$.

En las afirmaciones 4 y 5 no debes invocar completitud. El objetivo es separar **significado de una definición** de **garantía de existencia**.

Solución. 1. Se deduce de la definición. Si
$s = \sup A$, entonces s es una cota superior de A. Por tanto, $s \in U(A)$.

2. Se deduce de la definición. La escritura estructural del supremo es
$\sup A = \min U(A)$ cuando el supremo existe. Así,

$$\boxed{s = \min U(A)}.$$

3. Se deduce inmediatamente. Si
$U(A) = \emptyset$, no existe ninguna cota superior real. En particular, no puede existir una menor cota superior. Por tanto A no posee supremo real en el marco de C02.

4. No se deduce de las definiciones. De
$U(A) \neq \emptyset$ sólo sabemos que existen cotas superiores. Para identificar un supremo todavía necesitamos que $U(A)$ posea un mínimo. La no vaciedad y la existencia de mínimo son propiedades distintas. **5. Es una inferencia inválida.** Una definición especifica qué condiciones tendría que cumplir un objeto. No demuestra que exista un objeto que las satisfaga. Definir $\sup A = \min U(A)$ no demuestra por sí mismo que $\min U(A)$ exista.

6. Es verdadera. Para cualquier $u \in \mathbb{R}$, la afirmación
$\forall a \in \emptyset, \quad a \leq u$ es verdadera porque no existe ningún $a \in \emptyset$ que pueda violarla. Así,

$$\boxed{U(\emptyset) = \mathbb{R}}.$$

El ejercicio separa dos preguntas:

- **qué significa** ser supremo;

- **si existe** un número que satisfaga esa definición.

C02 resuelve completamente la primera y deja abierta la garantía general de la segunda.

Ejercicio 35. Un mapa de los dos obstáculos

Para cada uno de los conjuntos

$$A = (0, \infty), \qquad B = (0, 1), \qquad C = \emptyset,$$

completa una tabla con las columnas siguientes:

1. $U(X)$;
2. ¿$U(X)$ es vacío?;
3. si $U(X) \neq \emptyset$, ¿posee mínimo?;
4. ¿existe un supremo real de X en el marco de C02?;
5. si falla la existencia, indica si falla el **primer obstáculo** ($U(X) = \emptyset$) o el **segundo** (no existe $\min U(X)$).

Después representa el proceso mediante el esquema lógico

$$X \longrightarrow U(X) \longrightarrow \text{¿}U(X) \neq \emptyset\text{?} \longrightarrow \text{¿}\min U(X) \text{ existe?}$$

y ubica A, B, C en las ramas correspondientes. No uses $+\infty$ como valor del supremo.

Solución.

Caso $A = (0, \infty)$

No existe ninguna cota superior real. Dado $u \in \mathbb{R}$, podemos tomar, por ejemplo, $a = \max\{1, u + 1\} \in A$, y entonces $a > u$. Por tanto,

$$\boxed{U(A) = \emptyset}.$$

La falla ocurre en el **primer obstáculo**: no hay cotas superiores de las cuales buscar una menor.

Caso $B = (0, 1)$

Sabemos que

$$\boxed{U(B) = [1, \infty)}.$$

Este conjunto es no vacío y posee mínimo: $\min U(B) = 1$. Por tanto,

$$\boxed{\sup B = 1}.$$

Aquí se superan ambos obstáculos mediante una verificación concreta.

Caso $C = \emptyset$

Para todo $u \in \mathbb{R}$, la condición universal que define una cota superior es verdadera vacíamente. Así,

$$\boxed{U(C) = \mathbb{R}}.$$

Por tanto $U(C)$ es no vacío, pero $\mathbb{R}$ no posee mínimo. La falla ocurre en el **segundo obstáculo**. La tabla queda:

X	$U(X)$	$U(X) = \emptyset$?	$\min U(X)$	$\sup X$ real
$(0, \infty)$	$\emptyset$	sí	no aplica	no
$(0, 1)$	$[1, \infty)$	no	1	1
$\emptyset$	$\mathbb{R}$	no	no existe	no

El esquema lógico es entonces:

$$X \longrightarrow U(X) \longrightarrow \begin{cases} U(X) = \emptyset & \Rightarrow \text{falla 1,} \\ U(X) \neq \emptyset & \Rightarrow \text{preguntar por } \min U(X). \end{cases}$$

Y, en la segunda rama,

$$\begin{cases} \min U(X) \text{ existe} & \Rightarrow \sup X = \min U(X), \\ \min U(X) \text{ no existe} & \Rightarrow \text{falla 2.} \end{cases}$$

No se necesita introducir $+\infty$ para describir ninguno de los tres casos.

Ejercicio 36. Una conclusión correcta con una prueba incompleta

Un estudiante razona así:

> Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente. Entonces $U(A) \neq \emptyset$. Como $U(A)$ es un conjunto no vacío de números reales, debe tener mínimo. Por tanto $\sup A = \min U(A)$ existe.

Analiza el argumento.

1. Identifica el paso que no se deduce de las definiciones ni del orden por sí solo.
2. Explica por qué la no vaciedad de un subconjunto de $\mathbb{R}$ no basta, en general, para garantizar que tenga mínimo.
3. Aclara por qué el diagnóstico no consiste en afirmar que la conclusión final sea falsa para $\mathbb{R}$, sino en señalar que todavía falta una **garantía general de existencia**.
4. Indica qué tipo de resultado tendría que incorporarse para convertir el argumento en una demostración válida.

No enuncies ni demuestres todavía el teorema de completitud de C03.

Solución. El argumento comienza correctamente. Si A está acotado superiormente, entonces por definición existe al menos una cota superior, de modo que $U(A) \neq \emptyset$. El paso problemático es el siguiente:

> $U(A)$ es no vacío, luego $U(A)$ tiene mínimo.

La no vaciedad de un subconjunto de $\mathbb{R}$ no implica en general que posea mínimo. Por ejemplo, $(0, 1)$ es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ y no tiene mínimo: dado $x \in (0, 1)$, el número $x/2$ sigue perteneciendo al conjunto y satisface $0 < \frac{x}{2} < x$. Por tanto, del mero hecho de que $U(A) \neq \emptyset$ no podemos obtener por definición

$\min U(A)$. El diagnóstico exige una precisión importante. No estamos demostrando que la conclusión

> todo subconjunto no vacío y acotado superiormente de $\mathbb{R}$ posee supremo

sea falsa. Estamos mostrando que **el razonamiento propuesto no la demuestra**. Para justificar el paso faltante se necesita una propiedad adicional de $\mathbb{R}$ que garantice la existencia de la barrera extremal bajo las hipótesis apropiadas. En C02 esa garantía general todavía no está disponible. La prueba, por tanto, queda lógicamente incompleta aunque apunte hacia la afirmación que motivará C03.

Ejercicio 37. El vacío tiene todas las cotas, pero ningún extremo real

Un estudiante afirma:

> Como todo número real es cota superior e inferior de $\emptyset$, cualquier real puede elegirse como $\sup \emptyset$ y como $\inf \emptyset$.

Diagnostica la afirmación desde las definiciones.

1. Demuestra que $U(\emptyset) = L(\emptyset) = \mathbb{R}$.
2. Explica por qué la verdad vacía de las desigualdades universales produce todas esas cotas.
3. Demuestra que $\mathbb{R}$ no tiene mínimo ni máximo.

4. Concluye por qué, bajo las convenciones de C02, no definimos $\sup\emptyset$ ni $\inf\emptyset$ como números reales.
5. Compara esta falla con la de $A = (0, \infty)$, donde $U(A) = \emptyset$.

El diagnóstico debe distinguir **tener muchas cotas** de **tener una cota extremal**.

Solución. Sea $A = \emptyset$. Un número u es cota superior de A si $\forall a \in A, \quad a \leq u$. Como A no contiene elementos, no existe ningún contraejemplo a esa desigualdad. La afirmación universal es, por tanto, verdadera para todo $u \in \mathbb{R}$. Luego

$$\boxed{U(\emptyset) = \mathbb{R}}.$$

Exactamente el mismo argumento da

$$\boxed{L(\emptyset) = \mathbb{R}}.$$

Esto explica la **verdad vacía**: no se está verificando la desigualdad sobre algún punto especial del conjunto, sino constatando que no existe ningún punto que pueda hacerla falsa. Ahora bien, para que existiera un supremo real necesitaríamos $\min U(\emptyset) = \min \mathbb{R}$. Pero $\mathbb{R}$ no tiene mínimo. Dado cualquier $x \in \mathbb{R}$,

$$x - 1 \in \mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad x - 1 < x.$$

De manera dual, $\mathbb{R}$ no tiene máximo porque $x + 1 > x$. Por tanto, $U(\emptyset) = \mathbb{R}$ no tiene mínimo y $L(\emptyset) = \mathbb{R}$ no tiene máximo. Bajo las convenciones de C02,

$$\boxed{\sup\emptyset \text{ no se define como número real}}$$

y

$$\boxed{\inf\emptyset \text{ no se define como número real}}.$$

Comparemos con $B = (0, \infty)$. Allí ocurre $U(B) = \emptyset$. Las fallas son distintas:

- para B, no existe ninguna cota superior;
- para $\emptyset$, existen **todas** las cotas superiores, pero el conjunto de cotas no tiene una menor.

Tener muchas cotas —incluso todas— no equivale a tener una cota extremal.

Ejercicio 38. El hueco racional: cotas sin supremo en $\mathbb{Q}$

Trabaja ahora en el sistema ordenado $\mathbb{Q}$ y considera $S = \{q \in \mathbb{Q} : q > 0 \text{ y } q^2 < 2\}$. Demuestra que S posee cotas superiores racionales pero no posee supremo **dentro de** $\mathbb{Q}$. Organiza la prueba así:

1. verifica que S es no vacío y que 2 es una cota superior racional;
2. demuestra que no existe $r \in \mathbb{Q}$ con $r^2 = 2$;
3. muestra que, si $r \in \mathbb{Q}$ y $r > 0$ satisface $r^2 < 2$, entonces existe un racional $r' > r$ con $(r')^2 < 2$;
4. muestra que, si $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$ y $r^2 > 2$, entonces existe una cota superior racional $u < r$ de S;
5. concluye que ningún racional puede ser la menor cota superior de S.

Puedes usar, en los pasos 3 y 4, perturbaciones racionales construidas explícitamente a partir de r. Explica al final qué muestra este ejemplo sobre la diferencia entre **orden**, **existencia de cotas** y **completitud**, sin atribuir todavía a $\mathbb{R}$ ningún teorema no demostrado en C02.

Solución. Consideremos $S = \{q \in \mathbb{Q} : q > 0 \text{ y } q^2 < 2\}$.

1. No vaciedad y una cota superior racional

Tenemos $1 \in S$, pues $1 > 0$ y $1^2 < 2$. Así S es no vacío. Además, 2 es cota superior de S. En efecto, si $q \in S$ y $q \geq 2$, entonces $q^2 \geq 4 > 2$, contradicción. Por tanto todo $q \in S$ satisface $q < 2$.

2. No existe un racional cuyo cuadrado sea 2

Supongamos que $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ está escrito en términos irreducibles, con $n > 0$, y que $r^2 = 2$. Entonces $m^2 = 2n^2$. Así m^2 es par, luego m es par. Escribamos $m = 2k$. Sustituyendo, $4k^2 = 2n^2$, de donde $n^2 = 2k^2$. Entonces n también es par. Esto contradice que m/n estuviera en términos irreducibles. Por tanto,

$$\boxed{r^2 \neq 2 \quad \text{para todo } r \in \mathbb{Q}}.$$

3. Si $r^2 < 2$, todavía podemos subir dentro de S

Sea $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$, con $r^2 < 2$. Definamos $h = \frac{2-r^2}{2r+2}$. Como r es racional, h es racional; además $h > 0$. También $h < 1$, porque $2 - r^2 < 2 < 2r + 2$. Tomemos $r' = r + h$. Entonces $r' > r$ y $r' \in \mathbb{Q}$. Calculemos: $(r+h)^2 = r^2 + 2rh + h^2$. Como $0 < h < 1$, $h^2 < h$, de modo que

$2rh + h^2 < h(2r + 1)$. Pero $h(2r + 1) = (2 - r^2)\frac{2r+1}{2r+2} < 2 - r^2$. Por tanto, $(r + h)^2 < r^2 + (2 - r^2) = 2$. Así

$$\boxed{r' = r + h \in S \quad \text{y} \quad r' > r}.$$

En consecuencia, ningún racional con cuadrado menor que 2 puede ser cota superior de S.

4. Si $r > 0$ y $r^2 > 2$, existe una cota superior racional menor

Sea ahora $r \in \mathbb{Q}$ con $r > 0$ y $r^2 > 2$. La positividad permite comparar cuadrados sin invertir el orden y dividir por $2r$. Si partimos de un candidato a supremo, se cumple automáticamente: toda cota superior de S debe ser al menos 1, porque $1 \in S$. Definamos $h = \frac{r^2-2}{2r} > 0$ y $u = r - h$. Los números h y u son racionales. Además,

$u = r - \frac{r^2-2}{2r} = \frac{r^2+2}{2r} > 0$. Y $u^2 = (r - h)^2 = r^2 - 2rh + h^2 = 2 + h^2 > 2$. Afirmamos que u es cota superior de S. Si existiera $q \in S$ con $q \geq u$, como $q > 0$ y $u > 0$ tendríamos $q^2 \geq u^2 > 2$, contradicción con $q \in S$. Por tanto todo $q \in S$ satisface

$q < u$. Luego u es una cota superior racional de S. Como $h > 0$, $u = r - h < r$. Así, ningún racional con cuadrado mayor que 2 puede ser la **menor** cota superior.

5. No existe supremo racional

Supongamos que existiera $s = \sup_{\mathbb{Q}} S \in \mathbb{Q}$. Como $1 \in S$ y s sería cota superior, tenemos $s \geq 1 > 0$. Por el paso 2, $s^2 \neq 2$. Entonces sólo hay dos posibilidades:

- si $s^2 < 2$, el paso 3 produce un elemento de S mayor que s, contradiciendo que s sea cota superior;
- si $s^2 > 2$, el paso 4 produce una cota superior racional menor que s, contradiciendo que s sea la menor cota superior.

Ambos casos son imposibles. Por tanto,

$$\boxed{S \text{ no posee supremo dentro de } \mathbb{Q}}.$$

Este ejemplo separa tres niveles:

1. $\mathbb{Q}$ posee un orden;
2. S posee cotas superiores dentro de $\mathbb{Q}$;
3. aun así, esas cotas superiores no poseen una menor dentro de $\mathbb{Q}$.

El orden y la acotación, por sí solos, no garantizan la existencia de la barrera extremal en el mismo sistema numérico. Ésa es exactamente la clase de problema de existencia que C02 deja identificada antes de pasar a la completitud.

2.8. De las barreras a la completitud

La completitud de los reales puede formularse en el lenguaje de este capítulo: **todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ que esté acotado superiormente posee un supremo en $\mathbb{R}$**. En términos de familias de cotas, afirma que

$$A \neq \emptyset \quad \text{y} \quad U(A) \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \min U(A) \text{ existe en } \mathbb{R}.$$

El contenido de esta afirmación está en la existencia del mínimo. La definición ya nos dice que, si existe, será el supremo; la completitud asegura que las hipótesis indicadas bastan para encontrarlo. El ejemplo del vacío muestra por qué no podemos omitir la no vaciedad, y la semirrecta $(0, \infty)$ muestra por qué no podemos omitir la acotación superior. La figura C02-F08 separa esta garantía de la definición y de la verificación de un caso particular.

La existencia del supremo tampoco asegura que el conjunto lo alcance. Para $(0, 1)$ tenemos supremo 1 y ningún máximo; para $(0, 1]$, el mismo supremo pertenece al conjunto y es máximo. La diferencia se decide por la pertenencia. Por eso la completitud permite asegurar que existe la mejor cota, pero no convierte todo conjunto no vacío y acotado superiormente en un conjunto con máximo.

La condición con ε describe lo que sigue siendo cierto aunque la barrera no se alcance. Si $s = \sup A$, cualquier intento de bajarla en una cantidad positiva deja fuera algún punto del conjunto. Ese punto satisface $s - \varepsilon < a \leq s$ y puede depender de ε. Para verificar un candidato necesitamos, además, saber que controla a todos los elementos desde arriba. La condición de cota y la imposibilidad de mejorarla recuperan juntas la definición de supremo; ninguna de las dos debe desaparecer al abreviar la prueba.

Por su parte, un máximo proporciona su propia garantía de existencia del supremo: si $M \in A$ domina al conjunto, cualquier cota superior debe dominar también al propio M, y así M es la menor. Esta prueba y las de monotonía, reflexión y caracterización ε aclaran por qué hemos conservado hipótesis como «supongamos que existe el supremo». Su función es mostrar exactamente qué utiliza cada argumento. La completitud permite verificar esas hipótesis para todos los conjuntos reales no vacíos y acotados en la dirección requerida; las pruebas condicionales explican después cómo se comportan los extremos obtenidos.

C03 retomará la completitud que ya conocimos en la construcción de $\mathbb{R}$ y estudiará cómo se expresa mediante barreras, separaciones e intervalos compatibles. El trabajo de este capítulo permite entrar en esa discusión con una pregunta precisa: qué afirmación de existencia hace falta en cada paso y qué parte del razonamiento sigue siendo válida en un sistema ordenado que no disponga de ella.

Cierre. Comenzamos preguntando cómo controlar un conjunto mediante barreras. Terminamos descubriendo que la pregunta verdaderamente profunda no era sólo cómo definir la mejor barrera, sino por qué esa barrera debería existir. C02 nos entrega ahora el lenguaje necesario:

- cota superior e inferior;
- acotación;
- conjuntos $U(A)$ y $L(A)$;
- máximo y mínimo;
- supremo e ínfimo;
- extremos alcanzados y no alcanzados;
- caracterizaciones ε;
- monotonía bajo inclusión;
- dualidad por reflexión;

- separación entre definición y existencia.

Pero deja abierta, deliberadamente, una sola necesidad central:

> **¿qué propiedad distingue a $\mathbb{R}$ de sistemas ordenados incompletos y garantiza la existencia de las barreras extremales que el análisis necesita?**

Ésa es la puerta de C03. C02 termina aquí. La respuesta comienza en el capítulo siguiente.

Ejercicios de la sección 2.8.

Ejercicio 39. Un mapa de equivalencias alrededor de una barrera

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y sea $s \in \mathbb{R}$. Compara las tres descripciones siguientes: (I) $s = \min U(A)$, (II) $s = \sup A$, y

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} s \in U(A), \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A : \ s - \varepsilon < a \leq s. \end{cases}$$

1. Explica por qué (I) y (II) expresan exactamente la misma situación.
2. Demuestra que (II) y (III) son equivalentes usando únicamente los resultados ya establecidos en C02.
3. Añade ahora la condición $s \in A$. Demuestra que, bajo cualquiera de las tres descripciones anteriores,
$$s \in A \iff s = \max A.$$
4. Dibuja un mapa lógico que conecte las cuatro ideas: **conjunto de cotas**, **c02-supremo**, **caracterización ε** y **máximo**.
5. Explica por qué todas estas equivalencias sirven para **reconocer** una barrera extremal pero no demuestran que, para un conjunto arbitrario acotado superiormente, exista necesariamente algún s que las satisfaga.

No uses completitud ni ningún resultado de C03.

Solución. Partimos de un conjunto no vacío $A \subseteq \mathbb{R}$ y un número real s.

1. Conjunto de cotas y supremo

Por definición, decir $s = \sup A$ significa que s es la menor cota superior de A. Pero las cotas superiores de A son precisamente los elementos de $U(A)$. Por tanto,

$$\boxed{s = \sup A \iff s = \min U(A)}.$$

Así, (I) y (II) no son dos teoremas distintos: son dos escrituras de la misma definición estructural.

2. Supremo y caracterización ε

Supongamos primero que $s = \sup A$. Entonces s es cota superior, de modo que $s \in U(A)$. Además, para todo $\varepsilon > 0$, el número $s - \varepsilon$ es estrictamente menor que s. Si fuera todavía una cota superior, tendríamos una cota superior menor que la menor cota superior, contradicción. Por tanto $s - \varepsilon \notin U(A)$. Negar que $s - \varepsilon$ sea cota superior significa que existe $a \in A$ con $a > s - \varepsilon$. Como s sí es cota superior, $a \leq s$. Luego $\forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A : \quad s - \varepsilon < a \leq s$. Así, (II) implica (III).

Recíprocamente, supongamos (III). Ya sabemos que s es cota superior. Sea u cualquier otra cota superior. Si ocurriera $u < s$, podríamos tomar $\varepsilon = s - u > 0$. La condición local produciría $a \in A$ con $s - \varepsilon < a \leq s$. Pero $s - \varepsilon = u$, así que $u < a$, contradiciendo que u sea cota superior. Por tanto $s \leq u \quad$ para toda $u \in U(A)$.

Como $s \in U(A)$, resulta

$$\boxed{s = \min U(A) = \sup A}.$$

Hemos probado

$$\boxed{\text{(I)} \iff \text{(II)} \iff \text{(III)}}.$$

3. Añadir pertenencia produce el máximo

Supongamos cualquiera de las tres descripciones equivalentes anteriores. Entonces s es una cota superior de A. Si además $s \in A$, se cumplen exactamente las dos condiciones de la definición de máximo: s pertenece a A y domina a todos sus elementos. Por tanto, $s = \max A$.

Recíprocamente, si $s = \max A$, entonces $s \in A$. Además, todo máximo es supremo, de modo que la descripción superior sigue siendo coherente con (I)–(III). Así,

$$\boxed{s \in A \quad \iff \quad s = \max A}$$

una vez fijado que s es el supremo.

4. Mapa lógico

La arquitectura puede escribirse como

$$\boxed{\min U(A) \iff \sup A \iff \big[\text{cota superior} + \text{condición } \varepsilon\big]}$$

y, añadiendo pertenencia,

$$\boxed{\sup A + s \in A \iff \max A = s}.$$

La familia $U(A)$ reúne todos los candidatos a cota. Su mínimo, cuando existe, es el supremo; la condición ε comprueba que ninguna cota menor puede funcionar. Añadir $s \in A$ convierte esa barrera en máximo. El mapa de la figura C02-F10 representa estas relaciones y distingue la cuestión adicional de existencia.

5. Reconocer no es garantizar existencia

Todas las equivalencias anteriores comienzan con un candidato s o con la hipótesis de que el supremo ya existe. Nos permiten:

- verificar que un número concreto es supremo;
- cambiar entre formulaciones equivalentes;
- decidir cuándo ese supremo es además máximo.

Pero ninguna de esas equivalencias produce por sí sola un número s para un conjunto arbitrario acotado superiormente. La diferencia lógica es ésta: "si existe s, entonces…" no equivale a "existe s". Por eso el capítulo puede haber agotado la teoría de **reconocimiento** del supremo sin haber demostrado todavía una garantía general de **existencia**. La figura C02-F10 reúne estas dependencias en un único mapa lógico y deja la garantía general de existencia como una puerta discontinua hacia C03.

Ejercicio 40. Diseñar con precisión la pieza que falta

Considera la siguiente afirmación, que **no debes demostrar** en este ejercicio:

> **(S)** Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es no vacío y está acotado superiormente, entonces existe un número real s tal que $s = \sup A$.

Trabaja con (S) únicamente como una proposición hipotética cuya función es cerrar el hueco lógico detectado en C02.

1. Reescribe (S) usando $U(A)$ y la operación min.
2. Explica por qué la hipótesis de acotación superior no puede simplemente eliminarse dentro de las convenciones de C02. Usa un contraejemplo explícito.
3. Explica por qué la hipótesis de no vaciedad tampoco puede eliminarse dentro de esas mismas convenciones. Usa el conjunto vacío y describe $U(\emptyset)$.

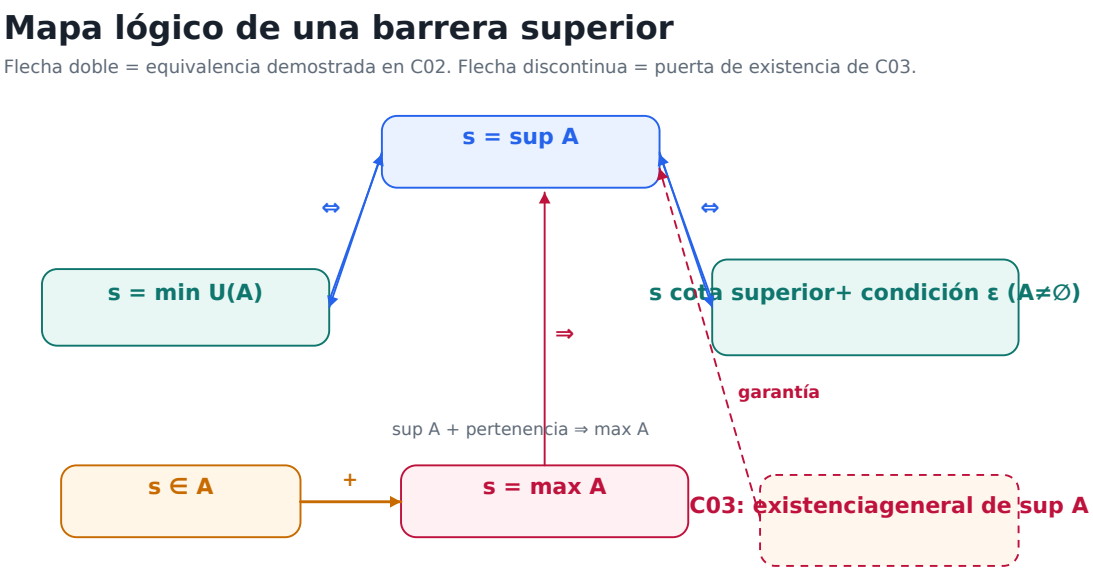


Figura 2.10. Las relaciones de C02 forman un grafo: varias caracterizaciones del supremo son equivalentes; la pertenencia produce máximo; la garantía general de existencia pertenece a C03.

4. Formula la afirmación dual que correspondería a subconjuntos no vacíos y acotados inferiormente, **sin demostrarla ni derivarla de (S)**.
5. Supón, sólo para esta parte, que (S) estuviera disponible como una caja negra. Explica cuáles de las siguientes frases pasarían de ser condicionales a quedar automáticamente habilitadas bajo las hipótesis adecuadas y cuáles seguirían necesitando información adicional:
   - «$\sup A$ existe»;
   - «$\sup A = \max A$»;
   - «$\sup A$ satisface la caracterización ε»;
   - «si $A \subseteq B$, entonces $\sup A \leq \sup B$».
6. Explica por qué el ejemplo racional $S_{\mathbb{Q}} = \{q \in \mathbb{Q} : q > 0 \text{ y } q^2 < 2\}$ impide atribuir una afirmación análoga a **todo** sistema numérico ordenado sólo por poseer orden y cotas.
7. Cierra con una frase que distinga, sin ambigüedad, las dos funciones siguientes:
   - **definir** qué es un supremo;
   - **garantizar** que un supremo exista.

El objetivo no es probar completitud, sino formular exactamente qué debe aportar C03 y por qué esa aportación es lógicamente independiente de las definiciones de C02.

Solución. La afirmación hipotética es:

> si $A \subseteq \mathbb{R}$ es no vacío y está acotado superiormente, entonces existe $\sup A \in \mathbb{R}$.

No la probaremos. Sólo analizaremos su forma lógica y su relación con C02.

1. Escritura mediante $U(A)$

Estar acotado superiormente significa $U(A) \neq \emptyset$. Decir que existe el supremo significa que el conjunto de cotas superiores posee un mínimo real. Por tanto (S) puede escribirse como

$$\boxed{A \neq \emptyset \quad \text{y} \quad U(A) \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \min U(A) \text{ existe en } \mathbb{R}}.$$

Cuando ese mínimo existe, $\sup A = \min U(A)$. La conclusión de (S) no redefine el supremo: garantiza la existencia del objeto que la definición exige.

2. Por qué hace falta acotación superior

Si retiramos la hipótesis de acotación superior, podemos tomar $A = (0, \infty)$. Para cualquier $u \in \mathbb{R}$ existe $a \in A$ con $a > u$. Por tanto, $U(A) = \emptyset$. No existe una cota superior real y, bajo las convenciones de C02, tampoco existe un supremo real de A. Así, una afirmación que pretendiera garantizar un supremo real para **todo** subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ sería incompatible con este ejemplo.

3. Por qué hace falta no vaciedad

Tomemos ahora $A = \emptyset$. Por verdad vacía, $U(\emptyset) = \mathbb{R}$. El conjunto de cotas superiores no es vacío; de hecho contiene todos los reales. Pero $\mathbb{R}$ no tiene mínimo. Por tanto, con las convenciones de C02, $\sup \emptyset$ no se define como número real. Así, la no vaciedad evita precisamente este caso límite.

4. Formulación dual

La afirmación inferior correspondiente sería:

> **(I)** Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es no vacío y está acotado inferiormente, entonces existe un número real i tal que $i = \inf A$.

En términos de conjuntos de cotas:

$$\boxed{A \neq \emptyset \quad \text{y} \quad L(A) \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \max L(A) \text{ existe en } \mathbb{R}}.$$

Aquí sólo formulamos la versión dual. No demostramos (I), ni la derivamos de (S).

5. Qué habilitaría (S) como caja negra

Supongamos ahora, únicamente para analizar dependencias, que (S) estuviera disponible.

a. "$\sup A$ existe".

Quedaría automáticamente habilitada siempre que se verificaran las dos hipótesis de (S):

$$A \neq \emptyset \qquad \text{y} \qquad A \text{ acotado superiormente.}$$

b. "$\sup A = \max A$".

No quedaría automáticamente habilitada. (S) garantizaría el supremo, pero para tener máximo todavía hace falta $\sup A \in A$. La pertenencia es información adicional.

c. "$\sup A$ satisface la caracterización ε".

Sí quedaría habilitada para un conjunto no vacío una vez obtenido el supremo, porque C02 ya demostró que todo supremo de un conjunto no vacío satisface $\forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A : \sup A - \varepsilon < a \leq \sup A$.

(S) aportaría existencia; C02 aportaría la caracterización.

d. "Si $A \subseteq B$, entonces $\sup A \leq \sup B$".

El resultado de monotonía seguiría requiriendo que ambos supremos existan. Con (S), esa existencia quedaría garantizada cuando A y B fueran no vacíos y acotados superiormente. Una vez cumplidas esas hipótesis, la desigualdad ya está demostrada en C02. Así, (S) no reemplazaría los teoremas de C02. Actuaría como una **fuente de existencia** que permitiría aplicar muchos de ellos sin tener que añadir cada vez "supongamos que el supremo existe".

6. Por qué el orden no basta

En $\mathbb{Q}$ consideramos $S_{\mathbb{Q}} = \{q \in \mathbb{Q} : q > 0 \text{ y } q^2 < 2\}$. §2.7 mostró que:

- $S_{\mathbb{Q}}$ es no vacío;
- posee cotas superiores racionales;
- no posee una menor cota superior dentro de $\mathbb{Q}$.

Por tanto, el esquema

$$A \neq \emptyset \quad + \quad A \text{ acotado superiormente} \quad \Longrightarrow \quad \sup A \text{ existe en el mismo sistema}$$

no puede deducirse del mero hecho de trabajar en un sistema ordenado. Hace falta una propiedad adicional del sistema numérico. C02 ha identificado la necesidad; C03 estudiará esa propiedad para $\mathbb{R}$.

7. Definición frente a garantía

La separación final puede expresarse así:

> **Definir el supremo dice qué condiciones debe satisfacer una menor cota superior; garantizar su existencia exige una propiedad adicional que asegure que, bajo las hipótesis apropiadas, tal menor cota superior está realmente presente en $\mathbb{R}$.**

Ésta es la frontera exacta entre C02 y C03. La figura C02-F10, integrada tras la solución 39, puede releerse aquí como mapa de dependencias: las equivalencias de C02 permanecen activas, mientras la flecha discontinua hacia C03 representa únicamente la garantía de existencia que todavía falta.

Capítulo 3

Completitud: una recta sin huecos

El intervalo $(0, 1)$ tiene una menor cota superior aunque no contenga ningún elemento máximo. En $\mathbb{R}$, la existencia de una barrera así está garantizada para cualquier conjunto no vacío y acotado superiormente; dentro de $\mathbb{Q}$, las mismas hipótesis pueden dejar el problema sin solución. La diferencia persiste aunque entre dos racionales distintos siempre haya otro racional. Insertar un punto entre dos ya dados y satisfacer simultáneamente toda una familia de restricciones de orden son problemas distintos.

C00 construyó los reales y estableció su completitud. C02 desarrolló el lenguaje de cotas y extremos que permite usarla con precisión. Estudiaremos aquí sus consecuencias y sus distintas formulaciones: una menor cota superior, un número que separa dos conjuntos ordenados y un punto que pertenece a todos los intervalos de una familia compatible. Las pruebas mostrarán cómo se pasa de un objeto a otro y qué inferencia necesita realmente una garantía de existencia.

3.1. El problema heredado: definir no basta

Para $A \subseteq \mathbb{R}$, la familia $U(A) = \{u \in \mathbb{R} : \forall a \in A,\ a \leq u\}$ reúne sus cotas superiores. La igualdad $\sup A = \min U(A)$ expresa qué objeto buscamos, pero su definición no demuestra por sí sola que ese mínimo exista. La no vaciedad de un conjunto tampoco asegura que tenga mínimo: $(0, 1)$ es un contraejemplo inmediato. Cuando aplicamos la completitud a una familia de cotas debemos reconocer esa propiedad adicional, incluso si ya la hemos establecido y la utilizamos con familiaridad.

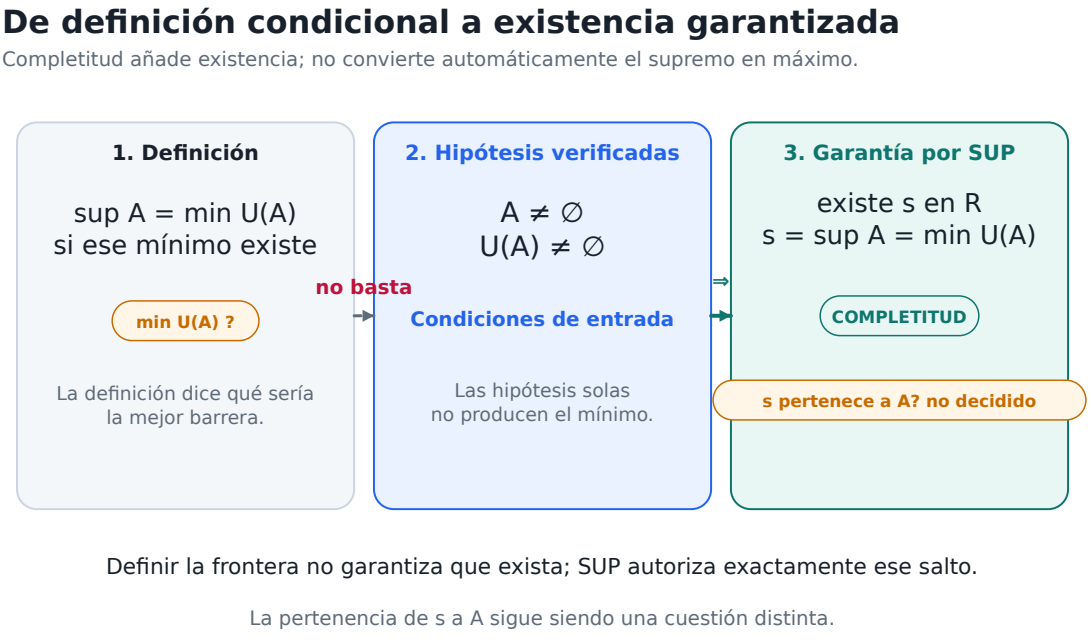


Figura 3.1. La definición describe la mejor barrera; completitud garantiza su existencia bajo las hipótesis, sin decidir si pertenece a A.

El sistema numérico en que buscamos la barrera forma parte de la pregunta. Consideremos $S_2 = \{q \in \mathbb{Q} : 0 \leq q,\ q^2 < 2\}$. El conjunto es no vacío, pues $1 \in S_2$, y tiene cotas superiores racionales; por ejemplo, 2 es una, porque $q \geq 2$ implicaría $q^2 \geq 4 > 2$. Sin embargo, $U_{\mathbb{Q}}(S_2)$ no posee mínimo racional. La notación recuerda que ahora sólo admitimos cotas en $\mathbb{Q}$.

Podemos comprobar el fallo sin identificar previamente la frontera mediante un número irracional. Si existiera un supremo racional s, tendríamos $s \geq 1$, porque $1 \in S_2$. Para modificar ese candidato dentro de los racionales usamos

$$T(s) = \frac{2(s+1)}{s+2}, \qquad T(s) - s = \frac{2 - s^2}{s+2}, \qquad 2 - T(s)^2 = \frac{2(2-s^2)}{(s+2)^2}.$$

Como $s+2 > 0$, las dos últimas expresiones tienen el signo de $2-s^2$. Si $s^2 < 2$, obtenemos $T(s) > s$ y $T(s)^2 < 2$; además $T(s) > s \geq 1$, por lo que $T(s) \in S_2$. Esto contradice que s sea cota superior. Si $s^2 > 2$, obtenemos $0 < T(s) < s$ y $T(s)^2 > 2$. Este nuevo racional sigue siendo cota superior: un $q \in S_2$ con $q \geq T(s) > 0$ tendría $q^2 \geq T(s)^2 > 2$, imposible. Hemos encontrado entonces una cota superior menor que el supuesto supremo.

El caso $s^2 = 2$ tampoco puede ocurrir en $\mathbb{Q}$. Escribiendo $s = m/n$ con enteros positivos coprimos, la igualdad $m^2 = 2n^2$ obliga a que m sea par. Al sustituir $m = 2k$ resulta $n^2 = 2k^2$, y también n es par, contra la elección de la fracción irreducible. Quedan excluidas las tres posibilidades para el cuadrado del candidato. El conjunto tiene cotas superiores racionales, pero ninguna es la menor.

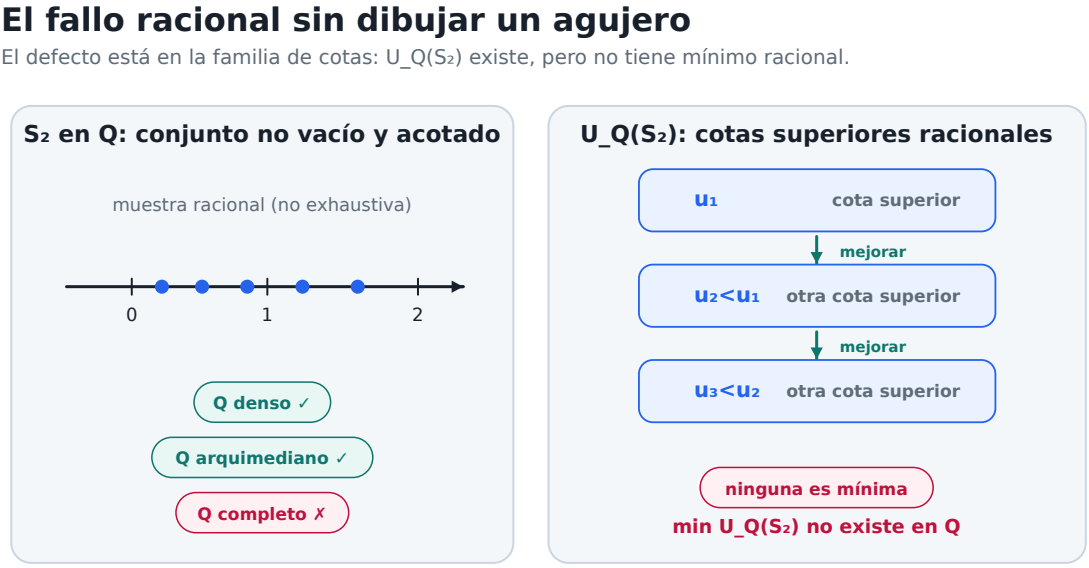


Figura 3.2. En Q pueden existir cotas superiores racionales sin una menor cota superior racional; densidad y arquimedianidad no reparan ese defecto.

La densidad de $\mathbb{Q}$ permanece intacta: dados racionales $p < q$, su punto medio $(p+q)/2$ es otro racional situado entre ambos. Esa propiedad produce puntos intermedios a partir de dos puntos disponibles; no produce un racional que domine a todo S_2 y quede por debajo de todas sus cotas superiores. Tampoco basta imaginar cotas cada vez más ajustadas: la posibilidad de mejorar cualquier candidato puede ser precisamente la razón por la que no haya un mínimo.

El ejemplo admite una comprobación útil al cambiar el umbral. Para $S_4^{<} = \{q \in \mathbb{Q} : 0 \leq q,\ q^2 < 4\}$, el supremo racional sí es 2, aunque no se alcanza; para $S_4^{\leq} = \{q \in \mathbb{Q} : 0 \leq q,\ q^2 \leq 4\}$, el mismo número es máximo. En el primer caso, todo racional $u < 2$ deja por encima algún elemento del conjunto: sirve 0 si $u < 0$, y $(u+2)/2$ si $0 \leq u < 2$. En el segundo, el

propio 2 pertenece al conjunto y lo domina. Los tres ejemplos viven en el mismo sistema denso. Cambian la existencia de la barrera y su pertenencia, no la densidad del sistema.

La etiqueta «arquimediano» de la figura C03-F02 se justificará internamente para $\mathbb{Q}$ en §3.4. No interviene en la prueba racional que acabamos de dar. La falta de supremo interno ya queda demostrada mediante aritmética y orden.

Ejercicios de la sección 3.1.

Ejercicio 1. Qué permiten concluir las hipótesis

Sea X un sistema ordenado y sea $A \subseteq X$. Supón únicamente que

$$A \neq \emptyset \qquad \text{y} \qquad U_X(A) \neq \emptyset,$$

donde $U_X(A) = \{u \in X : \forall a \in A,\ a \leq u\}$. Clasifica cada afirmación como **forzada por las hipótesis**, **no forzada** o **condicional**:

1. A posee al menos una cota superior en X.
2. $U_X(A)$ posee un mínimo.
3. La expresión $\sup_X A$ designa necesariamente un elemento existente de X.
4. Si existe $s = \min U_X(A)$, entonces $s = \sup_X A$.
5. Si $\sup_X A$ existe, entonces necesariamente $\sup_X A \in A$.
6. Si A es no vacío y está acotado superiormente, entonces A posee máximo.

Para cada afirmación que no esté forzada, indica qué información adicional faltaría o da un ejemplo que muestre el fallo. No uses el principio del supremo de §3.2.

Solución. Partimos únicamente de

$$A \neq \emptyset \qquad \text{y} \qquad U_X(A) \neq \emptyset.$$

La primera afirmación está **forzada**. Decir que $U_X(A) \neq \emptyset$ significa precisamente que existe algún $u \in X$ tal que $a \leq u$ para todo $a \in A$. Por tanto, A posee al menos una cota superior. La segunda afirmación **no está forzada**. Que $U_X(A)$ tenga elementos no implica que posea un elemento mínimo. El conjunto $S_2 \subseteq \mathbb{Q}$ estudiado en §3.1 proporciona exactamente ese diagnóstico: tiene cotas superiores racionales, pero la familia de esas cotas no tiene mínimo racional.

La tercera afirmación tampoco está forzada. Bajo la convención del libro, escribir $\sup_X A$ como un objeto existente exige haber establecido que $U_X(A)$ posee mínimo. Las hipótesis sólo garantizan que $U_X(A)$ no es vacío. La cuarta afirmación es **condicional y correcta**. Si existe $s = \min U_X(A)$, entonces s es una cota superior de A y satisface $s \leq u$ para toda $u \in U_X(A)$.

Ésa es justamente la definición de menor cota superior. Por tanto, $s = \sup_X A$. La quinta afirmación **no está forzada**. Por ejemplo, en $\mathbb{Q}$ consideremos $B = \{q \in \mathbb{Q} : 0 < q < 1\}$. El número 1 es su supremo racional, pero $1 \notin B$. Así que la existencia de supremo no implica que la barrera sea alcanzada. La sexta afirmación tampoco está forzada. El mismo conjunto B es no vacío y está acotado superiormente, pero no tiene máximo: dado $q \in B$,

$r = \frac{q+1}{2}$ es racional y satisface $q < r < 1$, de modo que $r \in B$ y q no puede ser máximo. La separación lógica es, por tanto: $A \neq \emptyset$, $U_X(A) \neq \emptyset$ garantiza la existencia de elementos de A y de cotas superiores, pero no garantiza por sí sola ni $\min U_X(A)$, ni un supremo existente, ni un máximo.

El ejercicio distingue precisamente lo que puede concluirse antes de disponer de una garantía de completitud.

Ejercicio 2. Densidad no fabrica una frontera

Un estudiante razona así sobre $S_2 = \{q \in \mathbb{Q} : 0 \leq q,\ q^2 < 2\}$:

> Como $\mathbb{Q}$ es denso y S_2 tiene cotas superiores racionales, podemos tomar cotas cada vez más ajustadas. Entre racionales siempre hay racionales, así

que al final debe aparecer una cota racional que sea la menor. Por tanto, S_2 tiene supremo en $\mathbb{Q}$.

Diagnostica el argumento.

1. Escribe con cuantificadores qué afirma realmente la densidad de $\mathbb{Q}$.
2. Identifica el salto lógico que pretende pasar de «hay racionales intermedios» a «existe una menor cota superior racional».
3. Explica por qué disponer de cotas superiores cada vez menores no implica que la familia de cotas superiores tenga mínimo.
4. Reescribe la conclusión correcta que sí puede obtenerse de la densidad, sin atribuirle una propiedad de completitud.

No invoques todavía ningún principio de completitud de $\mathbb{R}$.

Solución. La densidad de $\mathbb{Q}$ afirma $\forall p, q \in \mathbb{Q}, \quad p < q \Longrightarrow \exists r \in \mathbb{Q} : p < r < q$. Es una afirmación sobre **dos racionales ya dados**: si existe un intervalo no degenerado entre ellos, podemos insertar otro racional. El argumento del estudiante cambia de problema sin justificarlo. De $p < q$ y la densidad podemos obtener un racional intermedio. Pero la existencia de una menor cota superior exigiría un racional s que satisficiera simultáneamente dos condiciones globales:

1. todo elemento de S_2 debe quedar por debajo de s;
2. toda cota superior racional debe quedar por encima de s.

La densidad no produce un número con esas dos propiedades. Tampoco basta imaginar una cadena de cotas superiores $u_1 > u_2 > u_3 > \cdots$. Incluso si cada u_n puede mejorarse, de ello no se sigue que la familia completa posea un mínimo. De hecho, la posibilidad de mejorar **toda** cota candidata es compatible con que no exista una menor cota superior. El segundo salto ilegítimo es la frase «al final debe aparecer». No se ha definido ningún proceso con una etapa final, ni se ha demostrado que el supuesto refinamiento produzca un elemento perteneciente a $\mathbb{Q}$. La expresión introduce precisamente la existencia que debía probarse.

La conclusión correcta derivada de la densidad es sólo local: entre dos racionales distintos hay otro racional. En particular, podemos refinar posiciones entre racionales ya conocidos. No podemos concluir por ello que todo subconjunto racional no vacío y acotado superiormente posea una frontera extremal racional. El objetivo es diagnosticar por qué densidad y completitud responden preguntas lógicamente distintas.

Ejercicio 3. Probar el fallo racional sin nombrar la frontera

Demuestra directamente que $S_2 = \{q \in \mathbb{Q} : 0 \leq q,\ q^2 < 2\}$ no posee supremo en $\mathbb{Q}$. Supón, buscando una contradicción, que existe $s = \sup_{\mathbb{Q}} S_2$. Como $1 \in S_2$, sabemos que $s \geq 1$. Define $T(s) = \frac{2(s+1)}{s+2}$.

1. Demuestra las identidades $T(s) - s = \frac{2-s^2}{s+2}$ y $2 - T(s)^2 = \frac{2(2-s^2)}{(s+2)^2}$.
2. Si $s^2 < 2$, demuestra que $T(s) \in S_2$ y $T(s) > s$, contradiciendo que s sea cota superior.
3. Si $s^2 > 2$, demuestra que $0 < T(s) < s$, que $T(s)^2 > 2$ y que $T(s)$ sigue siendo una cota superior racional de S_2, contradiciendo la minimalidad de s.
4. Excluye el caso $s^2 = 2$ mediante un argumento de divisibilidad para racionales escritos en términos irreducibles.
5. Concluye que $U_{\mathbb{Q}}(S_2)$ es no vacío pero no posee mínimo.

La demostración debe permanecer enteramente dentro de $\mathbb{Q}$ y no debe identificar la frontera ausente con un número real ya nombrado.

Solución. Si existiera un supremo racional s, cualquier modificación racional de s que produjera o bien un elemento de S_2 mayor que s, o bien una cota superior menor que s, destruiría una de las dos propiedades que definen al supremo. La transformación $T(s) = \frac{2(s+1)}{s+2}$ hace exactamente eso según el signo de $2 - s^2$. Supongamos $s = \sup_{\mathbb{Q}} S_2$.

Como $1 \in S_2$, toda cota superior de S_2 satisface $s \geq 1$. En particular, $s + 2 > 0$. Primero calculamos $T(s) - s = \frac{2(s+1) - s(s+2)}{s+2} = \frac{2 - s^2}{s+2}$. Además, $T(s)^2 = \frac{4(s+1)^2}{(s+2)^2}$, de modo que $2 - T(s)^2 = \frac{2(s+2)^2 - 4(s+1)^2}{(s+2)^2}$.

El numerador es

$$2(s^2 + 4s + 4) - 4(s^2 + 2s + 1) = 4 - 2s^2 = 2(2 - s^2).$$

Por tanto,

$$\boxed{2 - T(s)^2 = \frac{2(2 - s^2)}{(s+2)^2}.}$$

Caso 1: $s^2 < 2$

Entonces $2 - s^2 > 0$. Como $s + 2 > 0$, $T(s) - s > 0$, por lo que $T(s) > s$. La segunda identidad da $2 - T(s)^2 > 0$, así que $T(s)^2 < 2$. Además $T(s) > s \geq 1$, por lo que $T(s) \geq 0$. Como $T(s)$ es racional, $T(s) \in S_2$. Pero $T(s) > s$, contradiciendo que s sea cota superior de S_2.

Caso 2: $s^2 > 2$

Ahora $2 - s^2 < 0$. La primera identidad da $T(s) < s$. Como $s \geq 1$, $T(s) = \frac{2(s+1)}{s+2} > 0$. La segunda identidad produce $2 - T(s)^2 < 0$, y por tanto $T(s)^2 > 2$. Mostremos que $T(s)$ sigue siendo cota superior de S_2. Sea $q \in S_2$. Si ocurriera $q \geq T(s)$, como ambos números son no negativos tendríamos

$q^2 \geq T(s)^2 > 2$, contradiciendo $q^2 < 2$. Luego $q < T(s)$ para todo $q \in S_2$. Así, $T(s)$ es una cota superior racional de S_2 y satisface $T(s) < s$, lo cual contradice que s sea la **menor** cota superior.

Caso 3: $s^2 = 2$

Como $s \in \mathbb{Q}$ y $s > 0$, escribamos $s = \frac{m}{n}$ con $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$ coprimos. La igualdad $s^2 = 2$ implica $m^2 = 2n^2$. Entonces m^2 es par, y por tanto m es par. Escribamos $m = 2k$. Sustituyendo, $4k^2 = 2n^2$, de donde $n^2 = 2k^2$. Así, n^2 también es par y, por tanto, n es par. Esto contradice que m y n fueran coprimos.

Los tres casos son imposibles. Por tanto no existe ningún racional s tal que $s = \sup_{\mathbb{Q}} S_2$. Como 2 es una cota superior racional, sabemos que $U_{\mathbb{Q}}(S_2) \neq \emptyset$. Pero acabamos de demostrar que ese conjunto de cotas superiores no posee mínimo racional:

$$\boxed{U_{\mathbb{Q}}(S_2) \neq \emptyset, \qquad \min U_{\mathbb{Q}}(S_2) \text{ no existe en } \mathbb{Q}.}$$

Toda la prueba ocurre dentro de $\mathbb{Q}$ y exhibe precisamente el fracaso de la garantía de existencia que C03 estudiará después.

Ejercicio 4. Cambiar el umbral cambia la existencia, no la densidad

Compara los tres conjuntos racionales $S_2 = \{q \in \mathbb{Q} : 0 \leq q,\ q^2 < 2\}$, $S_4^{<} = \{q \in \mathbb{Q} : 0 \leq q,\ q^2 < 4\}$, y $S_4^{\leq} = \{q \in \mathbb{Q} : 0 \leq q,\ q^2 \leq 4\}$.

1. Verifica que los tres conjuntos son no vacíos y están acotados superiormente en $\mathbb{Q}$.
2. Usa el ejercicio anterior para recordar por qué S_2 no posee supremo racional.
3. Demuestra directamente, desde la definición, que $\sup_{\mathbb{Q}} S_4^{<} = 2$, aunque $S_4^{<}$ no tenga máximo.

4. Demuestra que $\max S_4^{\leq} = \sup_{\mathbb{Q}} S_4^{\leq} = 2$.
5. Determina $U_{\mathbb{Q}}(S_4^{<})$ y $U_{\mathbb{Q}}(S_4^{\leq})$.
6. Explica por qué estos tres ejemplos impiden atribuir a la densidad de $\mathbb{Q}$ la existencia o inexistencia del supremo: la densidad es la misma en los tres casos, mientras que el comportamiento de la barrera extremal cambia.

No uses resultados de §3.2 o posteriores.

Solución. Los tres conjuntos viven en el mismo sistema ordenado y denso, $\mathbb{Q}$. Por tanto, cualquier diferencia en la existencia o pertenencia de la barrera no puede explicarse por un cambio de densidad. Debemos examinar la familia de cotas y si la barrera relevante está disponible como racional. Los tres conjuntos son no vacíos porque 0 pertenece a todos ellos. También están acotados superiormente: 2 es cota superior de S_2, y también lo es de $S_4^{<}$ y $S_4^{\leq}$.

Para S_2, el ejercicio anterior demostró que $\sup_{\mathbb{Q}} S_2$ no existe. Estudiemos ahora $S_4^{<} = \{q \in \mathbb{Q} : 0 \leq q,\ q^2 < 4\}$. Primero, 2 es cota superior. Si $q \in S_4^{<}$ y $q \geq 2$, entonces $q^2 \geq 4$, contradicción. Por tanto, $q < 2$ para todo $q \in S_4^{<}$. Falta probar que ninguna cota superior puede ser menor que 2. Sea $u \in \mathbb{Q}$ con $u < 2$.

Si $u < 0$, entonces $0 \in S_4^{<}$ y $0 > u$, de modo que u no es cota superior. Si $0 \leq u < 2$, tomemos $q = \frac{u+2}{2}$. Entonces $q \in \mathbb{Q}$ y $u < q < 2$. Como $q \geq 0$ y $q < 2$, $q^2 < 4$, por lo que $q \in S_4^{<}$. De nuevo u no es cota superior. Así, 2 es la menor cota superior racional:

$$\boxed{\sup_{\mathbb{Q}} S_4^{<} = 2.}$$

Sin embargo, $2 \notin S_4^{<}$ porque $2^2 = 4$ y la desigualdad definitoria es estricta. Más aún, ningún elemento de $S_4^{<}$ es máximo. Si $q \in S_4^{<}$, entonces $q < 2$ y $r = \frac{q+2}{2}$ satisface $q < r < 2$. Por tanto $r \in S_4^{<}$ y es mayor que q. Consideremos ahora $S_4^{\leq} = \{q \in \mathbb{Q} : 0 \leq q,\ q^2 \leq 4\}$. El número 2 pertenece al conjunto y todo elemento q satisface $q \leq 2$. Luego

$$\boxed{\max S_4^{\leq} = 2.}$$

Todo máximo es, en particular, la menor cota superior, así que

$$\boxed{\sup_{\mathbb{Q}} S_4^{\leq} = 2.}$$

En ambos conjuntos con umbral 4 las cotas superiores son exactamente

$$\boxed{U_{\mathbb{Q}}(S_4^{<}) = U_{\mathbb{Q}}(S_4^{\leq}) = \{u \in \mathbb{Q} : u \geq 2\}.}$$

En efecto, todo $u \geq 2$ domina a ambos conjuntos, mientras que acabamos de demostrar que cualquier racional $u < 2$ deja algún elemento del conjunto por encima de él. La comparación final es:

conjunto	supremo en $\mathbb{Q}$	máximo
S_2	no existe	no existe
$S_4^{<}$	2	no existe
$S_4^{\leq}$	2	2

Los tres conjuntos viven en el mismo sistema denso $\mathbb{Q}$. Por tanto, la densidad no decide ninguno de los dos cambios observados. Entre S_2 y $S_4^{<}$ cambia la disponibilidad racional de una barrera extremal; entre $S_4^{<}$ y $S_4^{\leq}$ cambia si esa misma barrera pertenece al conjunto. Todas las conclusiones se obtienen desde el orden racional, las definiciones de cota, supremo y máximo, y el resultado racional del ejercicio anterior.

3.2. El principio del supremo

La propiedad de completitud establecida en C00 toma, con el lenguaje de C02, la siguiente forma. La llamaremos **SUP** y la usaremos como punto de partida para las equivalencias de este capítulo.

> **Principio del supremo.** Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es no vacío y está acotado superiormente, entonces existe un número real s tal que
> $s = \sup A$.

La afirmación comprende dos obligaciones previas: exhibir un elemento del conjunto y una cota superior real. Verificadas ambas, garantiza un número $s \in \mathbb{R}$ que satisface $\forall a \in A,\ a \le s, \qquad \forall u \in U(A),\ s \le u$. La primera condición asegura el control; la segunda, que la barrera es la menor. La unicidad ya se deduce de esas condiciones por antisimetría, como probamos en C02. La aportación específica de SUP consiste en asegurar que hay un número que las cumple. En este capítulo no volvemos a construir $\mathbb{R}$ ni añadimos un axioma a su construcción: estudiamos las consecuencias de aquella propiedad, tomando SUP como formulación de referencia.

Las hipótesis conservan su dirección. Para $(-2, 5)$ hay un elemento, por ejemplo 0, y una cota superior, 5, de modo que SUP garantiza un supremo. Para $[0, \infty)$ falta acotación superior, y para $\emptyset$ falta no vaciedad; no podemos aplicar el principio. El caso vacío es especialmente revelador: todos los reales son vacíamente cotas superiores suyas y, aun así, la familia $U(\emptyset) = \mathbb{R}$ carece de mínimo. En $\{3\}$ sí se cumplen ambas hipótesis y el supremo es, además, máximo. En $(-2, 5)$ el punto medio entre cualquier elemento y 5 descarta que ese elemento sea máximo. SUP garantiza una barrera, pero deja abierta la cuestión de si pertenece al conjunto.

Volvamos a S_2. Al considerarlo como subconjunto de $\mathbb{R}$, las verificaciones $1 \in S_2$ y $q < 2$ para todo $q \in S_2$ siguen siendo válidas. Por completitud existe entonces $s = \sup_{\mathbb{R}} S_2$. Este s no es racional: si lo fuera, sería una cota superior racional y estaría por debajo de todas las cotas superiores racionales, por estar por debajo de todas las reales. Sería así el supremo racional que §3.1 acaba de excluir. La completitud del sistema mayor proporciona una barrera que puede quedar fuera del subsistema; no vuelve completo a $\mathbb{Q}$.

Una vez existente $s = \sup A$, las propiedades demostradas en C02 quedan disponibles sin otra aplicación de completitud. Por ejemplo, si $r < s$, el número r no puede seguir siendo cota superior, porque sería una menor que la menor. Negando la condición de cota obtenemos $a \in A$ con $r < a \le s$. Si tomamos $r = s - \varepsilon$, resulta $\forall \varepsilon > 0\ \exists a \in A : \quad s - \varepsilon < a \le s$.

En este razonamiento, SUP produjo el supremo; la minimalidad y la negación de una afirmación universal produjeron el testigo. Separar esas inferencias permite reconocer qué perderíamos en un sistema incompleto. Después de la existencia, podemos usar la definición del objeto sin volver a justificarla mediante completitud en cada línea.

Ejercicios de la sección 3.2.

Ejercicio 5. Antes de invocar el principio

Para cada conjunto siguiente, decide si el **principio del supremo** puede aplicarse directamente en $\mathbb{R}$:

$$A = (-2, 5), \qquad B = [0, \infty), \qquad C = \emptyset, \qquad D = \{3\}.$$

En cada caso:

1. verifica explícitamente si el conjunto es no vacío;
2. verifica explícitamente si está acotado superiormente en $\mathbb{R}$;
3. sólo cuando ambas hipótesis estén satisfechas, escribe la conclusión de existencia autorizada por completitud;
4. distingue esa conclusión de la afirmación más fuerte de que el conjunto tenga máximo.

No calcules supremos mediante resultados posteriores: el objetivo es entrenar la lectura exacta de las hipótesis del principio.

Solución. El principio del supremo exige simultáneamente que el conjunto sea no vacío y esté acotado superiormente en $\mathbb{R}$. Para $A = (-2, 5)$, tenemos $0 \in A$, así que $A \neq \emptyset$. Además, 5 es una cota superior porque todo $a \in A$ satisface $a < 5$. Por tanto, el principio se aplica y garantiza que existe $\sup A \in \mathbb{R}$. Esta conclusión no afirma que exista máximo. De hecho, $5 \notin A$ y, dado cualquier $a \in A$, el número

$\frac{a+5}{2}$ pertenece a A y es mayor que a. Así, A no tiene máximo. Para $B = [0, \infty)$, tenemos $0 \in B$, de modo que B es no vacío. Pero no está acotado superiormente: dado cualquier $u \in \mathbb{R}$, el número $b = \max\{0, u + 1\}$ pertenece a B y satisface $b > u$. Por tanto, el principio del supremo no se aplica.

Para $C = \emptyset$, falla la hipótesis de no vaciedad. Aunque bajo las convenciones de C02 todo real es vacíamente una cota superior de $\emptyset$, el principio adoptado en C03 exige expresamente $A \neq \emptyset$. Por tanto, tampoco se aplica a C. Finalmente, $D = \{3\}$ es no vacío y está acotado superiormente, por ejemplo por 3. El principio garantiza la existencia de $\sup D$. En este caso, además, $3 \in D$ y domina a todos los elementos de D, por lo que D sí tiene máximo.

La lectura correcta es:

conjunto	$\neq \emptyset$	acotado sup.	SUP aplicable
$A = (-2, 5)$	sí	sí	sí
$B = [0, \infty)$	sí	no	no
$C = \emptyset$	no	sí, vacíamente	no
$D = \{3\}$	sí	sí	sí

Ejercicio 6. El mismo conjunto, dos universos distintos

Considera de nuevo $S_2 = \{q \in \mathbb{Q} : 0 \leq q,\ q^2 < 2\}$. Podemos leerlo como subconjunto de $\mathbb{Q}$ o, usando $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, como subconjunto de $\mathbb{R}$.

1. Verifica que S_2 es no vacío y posee una cota superior racional; concluye que también es no vacío y está acotado superiormente como subconjunto de $\mathbb{R}$.
2. Explica por qué el principio del supremo adoptado en §3.2 puede invocarse para $S_2 \subseteq \mathbb{R}$, pero no puede invocarse como si fuese un axioma válido en $\mathbb{Q}$.
3. Concluye, sin calcularlo, que existe $s = \sup_{\mathbb{R}} S_2$.
4. Usa el resultado del ejercicio 3 para demostrar que ese s no puede ser racional.
5. Explica por qué la frase «S_2 tiene supremo» es incompleta si no se especifica el sistema ordenado en el que se busca la menor cota superior.

No identifiques s con ningún número real concreto.

Solución. Tenemos $S_2 = \{q \in \mathbb{Q} : 0 \leq q,\ q^2 < 2\}$. El conjunto es no vacío porque $1 \in S_2$. Además, 2 es una cota superior racional: si $q \in S_2$ y $q \geq 2$, entonces $q^2 \geq 4 > 2$, contradicción. Por tanto,

$$S_2 \neq \emptyset \qquad \text{y} \qquad U_{\mathbb{Q}}(S_2) \neq \emptyset.$$

Como $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, el mismo conjunto puede verse como subconjunto de $\mathbb{R}$. Las dos verificaciones anteriores siguen siendo válidas: 1 sigue perteneciendo al conjunto y 2 sigue siendo una cota superior. Así,

$$S_2 \subseteq \mathbb{R}, \qquad S_2 \neq \emptyset, \qquad S_2 \text{ está acotado superiormente en } \mathbb{R}.$$

Ahora importa el universo. El principio adoptado en §3.2 es una propiedad estructural de $\mathbb{R}$:

$$A \subseteq \mathbb{R},\ A \neq \emptyset,\ A \text{ acotado superiormente} \Longrightarrow \exists \sup_{\mathbb{R}} A \in \mathbb{R}.$$

Por tanto podemos aplicarlo a S_2 considerado como subconjunto real y concluir que existe un número $s = \sup_{\mathbb{R}} S_2$. En cambio, no hemos postulado el principio del supremo para $\mathbb{Q}$. De hecho, el ejercicio 3 demostró que $\sup_{\mathbb{Q}} S_2$ no existe. Mostremos ahora que el supremo real s no puede ser racional. Si ocurriera $s \in \mathbb{Q}$, entonces, como s es cota superior real de S_2, también sería una cota superior racional. Además, por ser el menor entre **todas** las cotas superiores reales, satisfaría

$s \leq u$ para toda cota superior racional $u \in U_{\mathbb{Q}}(S_2)$. Por tanto, s sería la menor cota superior racional de S_2, contradiciendo el ejercicio 3. Luego

$$\boxed{s \notin \mathbb{Q}.}$$

La frase «S_2 tiene supremo» es, por tanto, incompleta si no se especifica el universo:

$$\sup_{\mathbb{Q}} S_2 \text{ no existe en } \mathbb{Q}, \qquad \sup_{\mathbb{R}} S_2 \text{ sí existe en } \mathbb{R}.$$

Ejercicio 7. La inclusión produce una desigualdad entre supremos existentes

Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tales que

$$A \neq \emptyset, \qquad A \subseteq B, \qquad B \text{ está acotado superiormente.}$$

Demuestra que existen $\sup A$ y $\sup B$ y que $\sup A \leq \sup B$. La prueba debe separar explícitamente estas etapas:

1. demostrar que $B \neq \emptyset$;
2. demostrar que A está acotado superiormente;
3. indicar cada aplicación del principio del supremo;
4. explicar por qué $\sup B$ es una cota superior de A;
5. usar la minimalidad de $\sup A$ para obtener la desigualdad final.

No cites simplemente «monotonía del supremo»: reconstruye la demostración desde las definiciones y el principio de existencia.

Solución. Antes de comparar supremos debemos justificar que ambos existen. Sólo después podremos usar la propiedad de menor cota superior. Tenemos

$$A \neq \emptyset \qquad \text{y} \qquad A \subseteq B.$$

Como A contiene algún elemento y todo elemento de A pertenece a B, se sigue que $B \neq \emptyset$. Por hipótesis, B está acotado superiormente. Sea u una cota superior de B. Entonces $b \leq u$ para todo $b \in B$. Como $A \subseteq B$, para todo $a \in A$ también tenemos $a \leq u$. Así, el mismo u es cota superior de A, y por tanto A también está acotado superiormente.

Paso de completitud 1. Como A es no vacío y está acotado superiormente, por el principio del supremo existe
$s = \sup A$.

Paso de completitud 2. Como B es no vacío y está acotado superiormente, por el principio del supremo existe
$t = \sup B$.

Ahora usamos sólo las propiedades definitorias de los supremos ya existentes. Como $t = \sup B$, el número t es cota superior de B. Puesto que $A \subseteq B$, también es cota superior de A. Pero $s = \sup A$ es la **menor** cota superior de A. Como t es una de esas cotas, $s \leq t$. Por tanto,

$$\boxed{\sup A \leq \sup B.}$$

Ejercicio 8. Trasladar un conjunto sin gastar completitud dos veces

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente, y sea $c \in \mathbb{R}$. Define $A + c = \{a + c : a \in A\}$. Demuestra que $\sup(A + c) = \sup A + c$. Tu demostración debe organizarse de modo que el principio del supremo se use **una sola vez**:

1. aplica completitud a A y escribe $s = \sup A$;
2. demuestra directamente que $s + c$ es una cota superior de $A + c$;
3. demuestra directamente que cualquier cota superior v de $A + c$ satisface $s + c \leq v$;
4. concluye, por la definición de supremo, que $s + c = \sup(A + c)$, sin volver a invocar el principio del supremo;
5. usando la caracterización ε de C02, deduce que para todo $\varepsilon > 0$ existe $y \in A + c$ tal que $s + c - \varepsilon < y \leq s + c$.

Al final, identifica qué paso usa completitud y cuáles usan sólo orden, álgebra y resultados ya demostrados en C02.

Solución. Usaremos completitud para obtener una sola frontera, $s = \sup A$. Después trasladaremos las dos propiedades que caracterizan a esa frontera. De ese modo, la existencia del supremo del conjunto trasladado quedará demostrada directamente, sin una segunda invocación del principio. Como A es no vacío y está acotado superiormente, podemos escribir:

Paso de completitud. Por el principio del supremo existe
$s = \sup A$.

Sea $A + c = \{a + c : a \in A\}$. Mostremos primero que $s + c$ es cota superior de $A + c$. Si $y \in A + c$, entonces existe $a \in A$ tal que $y = a + c$. Como s es cota superior de A, $a \leq s$. Sumando c, $y = a + c \leq s + c$. Por tanto, $s + c$ es cota superior de $A + c$. Ahora sea v cualquier cota superior de $A + c$. Entonces para todo $a \in A$ tenemos

$a + c \leq v$. Restando c, $a \leq v - c$ para todo $a \in A$. Así, $v - c$ es una cota superior de A. Como $s = \sup A$ es la menor cota superior de A, $s \leq v - c$. Sumando c, $s + c \leq v$. Hemos demostrado que $s + c$ es una cota superior de $A + c$ y que está por debajo de toda cota superior de $A + c$. Por definición,

$$\boxed{s + c = \sup(A + c).}$$

No fue necesario aplicar de nuevo el principio del supremo: la existencia del nuevo supremo quedó establecida exhibiendo directamente un número que satisface su definición. Finalmente, la caracterización ε de C02 aplicada al supremo ya identificado de $A + c$ dice que para todo $\varepsilon > 0$ existe $y \in A + c$ tal que $(s + c) - \varepsilon < y \leq s + c$. Esto es exactamente

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \; \exists y \in A + c : \quad s + c - \varepsilon < y \leq s + c.}$$

La anatomía lógica queda así: completitud $\Longrightarrow s = \sup A$ existe y después

$$\text{orden + traslación + definición de supremo} \Longrightarrow \sup(A + c) = s + c,$$

seguido de

$$\text{caracterización de C02} \Longrightarrow \text{aproximación } \varepsilon.$$

Ejercicio 9. Un supremo real no vuelve completo a $\mathbb{Q}$

Un estudiante afirma:

> Todo conjunto $A \subseteq \mathbb{Q}$ no vacío y acotado superiormente en $\mathbb{Q}$ también es un subconjunto no vacío y acotado superiormente de $\mathbb{R}$. Por el principio del supremo, A tiene un supremo real. Por tanto, $\mathbb{Q}$ satisface el principio del supremo y es completo.

Diagnostica el razonamiento.

1. Determina qué parte del argumento es correcta.
2. Formula exactamente qué tendría que garantizar el principio del supremo **interno a** $\mathbb{Q}$.
3. Explica por qué la existencia de $\sup_{\mathbb{R}} A$ no implica que exista $\sup_{\mathbb{Q}} A$.
4. Usa S_2 como contraejemplo decisivo.
5. Reescribe la conclusión correcta: ¿qué sí proporciona la completitud de $\mathbb{R}$ a un subconjunto racional no vacío y racionalmente acotado superiormente?
6. Identifica el paso en el que el estudiante cambia ilegítimamente el universo al que debe pertenecer el objeto cuya existencia se reclama.

La respuesta debe distinguir **existencia externa en** $\mathbb{R}$ de **existencia interna en** $\mathbb{Q}$.

Solución. La primera parte del argumento del estudiante es correcta. Sea $A \subseteq \mathbb{Q}$ no vacío y acotado superiormente en $\mathbb{Q}$. Como existe alguna cota superior racional $u \in \mathbb{Q}$, el mismo número u pertenece a $\mathbb{R}$ y sigue satisfaciendo $a \leq u$ para todo $a \in A$. Por tanto, al considerar A como subconjunto de $\mathbb{R}$, sigue siendo no vacío y acotado superiormente.

Así, por la completitud de $\mathbb{R}$, existe $s = \sup_{\mathbb{R}} A \in \mathbb{R}$. Hasta aquí no hay error. El error aparece en la conclusión «por tanto, $\mathbb{Q}$ satisface el principio del supremo». Para que $\mathbb{Q}$ satisficiera internamente ese principio, tendría que cumplirse:

$$A \subseteq \mathbb{Q}, \quad A \neq \emptyset, \quad A \text{ acotado superiormente en } \mathbb{Q}$$

implica $\exists s \in \mathbb{Q} : \quad s = \sup_{\mathbb{Q}} A$. La pertenencia $s \in \mathbb{Q}$ es parte esencial de la afirmación interna. La completitud de $\mathbb{R}$ sólo entrega $s \in \mathbb{R}$. No hay ninguna razón para que ese número pertenezca al subsistema racional. El conjunto $S_2 = \{q \in \mathbb{Q} : 0 \leq q,\ q^2 < 2\}$ es el contraejemplo decisivo. Es no vacío y está acotado superiormente en $\mathbb{Q}$. La completitud de $\mathbb{R}$ garantiza que existe

$\sup_{\mathbb{R}} S_2$. Pero el ejercicio 3 demostró que $\sup_{\mathbb{Q}} S_2$ no existe. De hecho, el ejercicio 6 mostró que el supremo real de S_2 no puede ser racional. Por tanto, la conclusión correcta es:

> todo subconjunto no vacío de $\mathbb{Q}$ que esté acotado superiormente por algún racional posee una menor cota superior **en** $\mathbb{R}$ cuando se lo considera como subconjunto real; pero esa cota extremal no tiene por qué pertenecer a $\mathbb{Q}$.

El cambio ilegítimo ocurre al pasar de $\exists s \in \mathbb{R}$ a $\exists s \in \mathbb{Q}$. Ese paso no está justificado.

3.3. La cara dual: el principio del ínfimo

Para obtener una garantía inferior podemos reflejar el conjunto y emplear SUP. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y acotado inferiormente. Su reflejo $-A = \{-a : a \in A\}$ es no vacío; si l es cota inferior de A, de $l \leq a$ se sigue $-a \leq -l$, de modo que $-l$ es cota superior del reflejo. Las hipótesis de SUP se cumplen para $-A$, y por completitud existe $s = \sup(-A)$.

Definamos $i = -s$. Para cada $a \in A$, la desigualdad $-a \leq s$ da $i = -s \leq a$, así que i es cota inferior. Si l es cualquier otra cota inferior de A, entonces $-l$ es cota superior de $-A$; por minimalidad, $s \leq -l$, y al cambiar de signo obtenemos $l \leq -s = i$. Por tanto, i es la mayor cota inferior y $\inf A = -\sup(-A)$.

> **Principio del ínfimo derivado.** Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es no vacío y está acotado inferiormente, entonces existe un número real i tal que
> $i = \inf A$.

La garantía inferior, que llamaremos **INF**, procede de SUP aplicado una vez al reflejo. La reflexión realiza el resto del argumento: invierte el orden y transporta cotas y extremalidad. Como identidades de familias completas tenemos $U(-A) = -L(A)$ y $L(-A) = -U(A)$, ya justificadas en C02. La existencia garantizada permite usarlas para obtener un extremo a partir del otro. La relación puede recorrerse en sentido contrario. Supongamos INF y sea A no vacío y acotado superiormente. El reflejo $-A$ está acotado inferiormente, por lo que existe $j = \inf(-A)$. El número $-j$ es cota superior de A, porque $j \leq -a$ para todo $a \in A$. Si u es

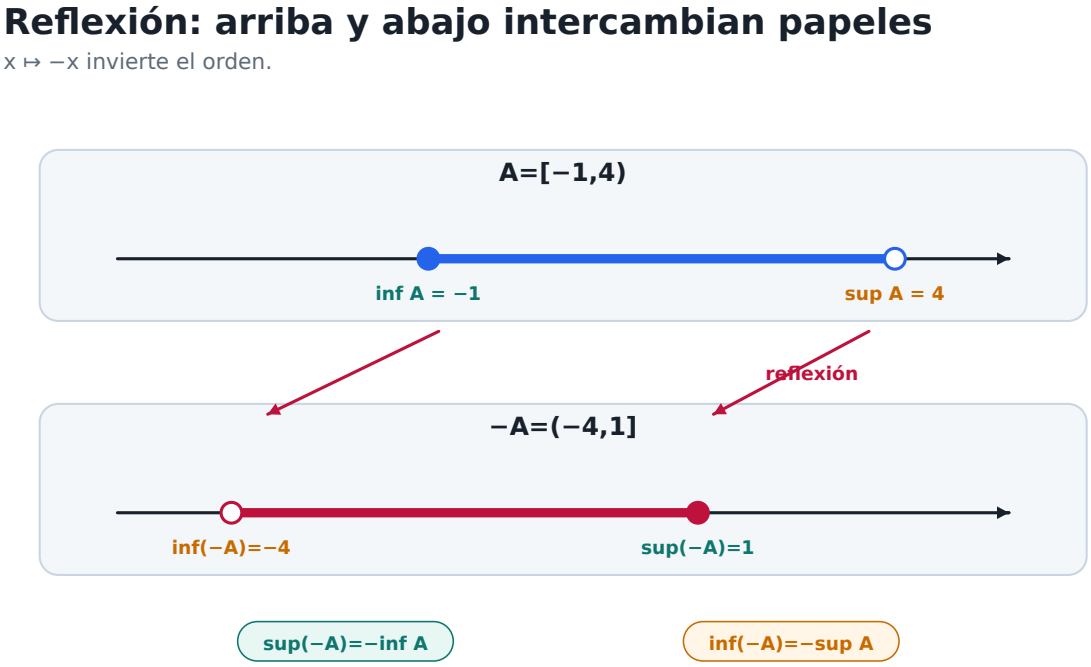


Figura 3.3. La reflexión x↦−x invierte el orden y, en C03, transporta también la garantía de existencia: de sup(-A) existente obtenemos inf A=-sup(-A) sin un segundo principio de completitud.

cota superior de A, entonces $-u$ es cota inferior de $-A$ y $-u \le j$, de donde $-j \le u$. Así, $-j$ es la menor cota superior. Queda demostrada la equivalencia

$$\text{SUP} \iff \text{INF}, \qquad \sup A = -\inf(-A), \qquad \inf A = -\sup(-A),$$

con las hipótesis apropiadas para cada extremo. Podemos escoger una de las formulaciones como base y deducir la otra; la equivalencia no exige dos principios independientes. La acotación necesaria puede ser unilateral. Para $A = (2, \infty)$ no hay cotas superiores, pero sí una inferior, 2. El reflejo $(-\infty, -2)$ tiene supremo -2, y por la identidad anterior $\inf A = 2$. No necesitamos acotar A también por arriba para garantizar su ínfimo.

Si $i = \inf A$ y $r > i$, la maximalidad implica que r ya no es cota inferior; existe, pues, $a \in A$ con $i \le a < r$. Tomando $r = i + \varepsilon$ recuperamos la caracterización inferior $\forall \varepsilon > 0\ \exists a \in A : \quad i \le a < i + \varepsilon$. La existencia del ínfimo proviene de completitud a través del reflejo; la localización del testigo procede de su maximalidad. Es la misma división de tareas que encontramos para el supremo.

Ejercicios de la sección 3.3.

Ejercicio 10. Traducir una prueba superior a lenguaje inferior

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y acotado inferiormente, y define $B = -A = \{-a : a \in A\}$. Construye un **diccionario de reflexión** que traduzca, línea por línea, las siguientes afirmaciones sobre B a afirmaciones equivalentes sobre A:

1. u es una cota superior de B;
2. $s = \sup B$;
3. $b \le s$ para todo $b \in B$;
4. si u es cota superior de B, entonces $s \le u$;
5. para todo $\varepsilon > 0$ existe $b \in B$ tal que $s - \varepsilon < b \le s$.

En cada traducción debes sustituir explícitamente $b = -a$, indicar cuándo una desigualdad cambia de sentido al multiplicar por -1 y expresar el resultado final en términos de A y de

$i = -s$. Concluye qué papel desempeña la reflexión en el paso de supremo a ínfimo. No invoques todavía ningún resultado de §3.4 o posteriores.

Solución. La reflexión $x \mapsto -x$ es una biyección de $\mathbb{R}$ que invierte el orden. Ésa es la única regla de traducción que necesitamos, pero debe aplicarse sin saltos. Sea $B = -A$ y escribamos $i = -s$.

1. Cota superior de B. Decir que u es cota superior de B significa

$\forall b \in B, \quad b \leq u$. Cada $b \in B$ tiene la forma $b = -a$ con $a \in A$. Por tanto, $-a \leq u \quad$ para todo $a \in A$. Multiplicando por -1 se invierte el sentido: $-u \leq a \quad$ para todo $a \in A$. Así,

$$\boxed{u \in U(B) \quad \Longleftrightarrow \quad -u \in L(A).}$$

2. Supremo de B. Si

$s = \sup B$, entonces s es la menor cota superior de B. Reflejando esa afirmación, $-s$ será la mayor cota inferior de A. Es decir,

$$\boxed{i = -s = \inf A.}$$

Los dos apartados siguientes verifican las dos mitades de esa afirmación.

3. La condición de cota. Como $b \leq s$ para todo $b \in B$, sustituyendo $b = -a$ obtenemos

$-a \leq s$. Al multiplicar por -1, $-s \leq a$. Por tanto, $i = -s \leq a \quad$ para todo $a \in A$, de modo que i es cota inferior de A.

4. La optimalidad. Si u es cota superior de B, la minimalidad de s dice

$s \leq u$. Multiplicando por -1, $-u \leq -s = i$. Pero, por el primer apartado, $-u$ es una cota inferior de A. Así, toda cota inferior obtenida por reflexión queda por debajo de i; como toda cota inferior de A surge de esta manera, i es la mayor cota inferior.

5. Caracterización ε. Supongamos

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists b \in B : \quad s - \varepsilon < b \leq s$. Escribimos $b = -a$. Entonces $s - \varepsilon < -a \leq s$. Multiplicar toda la cadena por -1 invierte ambos signos: $-s \leq a < -s + \varepsilon$. Como $i = -s$,

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \; \exists a \in A : \quad i \leq a < i + \varepsilon.}$$

Hemos traducido la caracterización ε del supremo en la caracterización ε del ínfimo. El diccionario esencial es

lenguaje superior de $-A$	lenguaje inferior de A
$u \in U(-A)$	$-u \in L(A)$
$s = \sup(-A)$	$-s = \inf A$
$b \leq s$	$-s \leq a$
$s \leq u$	$-u \leq -s$
$s - \varepsilon < b \leq s$	$-s \leq a < -s + \varepsilon$

La reflexión no aporta una segunda completitud. Su papel es transportar, con inversión de orden, la información superior hacia la inferior.

Ejercicio 11. Las familias completas de cotas también se reflejan

Para un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, define $L(A) = \{l \in \mathbb{R} : \forall a \in A, \; l \leq a\}$ y, para cualquier conjunto $E \subseteq \mathbb{R}$, $-E = \{-x : x \in E\}$. Supón que A es no vacío y está acotado inferiormente.

1. Demuestra la igualdad de conjuntos $U(-A) = -L(A)$.
2. Verifica, antes de usar completitud, que $-A$ es no vacío y está acotado superiormente.
3. Aplica el principio del supremo a $-A$ y escribe $s = \sup(-A)$.
4. Usa la igualdad del apartado 1 para demostrar que $-s = \max L(A)$.
5. Concluye que $\inf A = -\sup(-A)$.

La prueba debe localizar exactamente el único paso de completitud y separar la existencia de s de las manipulaciones de las familias de cotas.

Solución. Queremos probar $U(-A) = -L(A)$. Hagamos las dos inclusiones. Sea primero $u \in U(-A)$. Entonces $-a \le u$ para todo $a \in A$. Al multiplicar por -1, $-u \le a$ para todo $a \in A$. Por definición,

$$-u \in L(A).$$

Entonces $u = -(-u)$ pertenece a $-L(A)$. Así, $U(-A) \subseteq -L(A)$.

Recíprocamente, sea $u \in -L(A)$. Por definición de conjunto reflejado, existe $l \in L(A)$ tal que $u = -l$. Como l es cota inferior de A, $l \le a$ para todo $a \in A$. Multiplicando por -1, $-a \le -l = u$ para todo $a \in A$. Esto dice que u es cota superior de $-A$. Por tanto, $-L(A) \subseteq U(-A)$.

Concluimos

$$\boxed{U(-A) = -L(A).}$$

Ahora verifiquemos las hipótesis de completitud. Como $A \neq \emptyset$, existe $a_0 \in A$, y entonces $-a_0 \in -A$, de modo que $-A \neq \emptyset$. Como A está acotado inferiormente, existe $l_0 \in \mathbb{R}$ tal que $l_0 \le a$ para todo $a \in A$. Reflejando, $-a \le -l_0$ para todo $a \in A$, así que $-l_0$ es cota superior de $-A$.

> **Paso de completitud.** El conjunto $-A$ es no vacío y está acotado superiormente. Por el principio del supremo existe
> $s = \sup(-A)$.

Por definición de supremo,

$$s = \min U(-A).$$

Usando la igualdad ya demostrada, $s = \min(-L(A))$. Queremos reflejar ahora esta minimalidad. Como $s \in -L(A)$, existe $l_* \in L(A)$ con $s = -l_*$. Por tanto, $l_* = -s$. Sea $l \in L(A)$ cualquiera. Entonces $-l \in -L(A) = U(-A)$. Como s es el mínimo de ese conjunto, $s \le -l$. Multiplicando por -1, $l \le -s = l_*$. Así, l_* pertenece a $L(A)$ y domina a toda cota inferior. Por definición,

$$\boxed{-s = \max L(A).}$$

Pero la mayor cota inferior es precisamente el ínfimo. Luego

$$\boxed{\inf A = -\sup(-A).}$$

Ejercicio 12. El ínfimo de una unión

Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ conjuntos no vacíos y acotados inferiormente. Demuestra que $A \cup B$ es no vacío y está acotado inferiormente y prueba que

$$\boxed{\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}.}$$

La demostración debe incluir:

1. una construcción explícita de una cota inferior de $A \cup B$ a partir de cotas inferiores de A y de B;
2. la justificación de existencia de los tres ínfimos que aparecen;
3. la prueba de que $m = \min\{\inf A, \inf B\}$ es cota inferior de $A \cup B$;
4. la prueba de que cualquier cota inferior de $A \cup B$ es menor o igual que m.

No cites una fórmula conocida para uniones: deriva la igualdad desde las definiciones y el principio del ínfimo ya obtenido en §3.3.

Solución. Como A y B son no vacíos, existen $a_0 \in A, \qquad b_0 \in B$. En particular, $A \cup B \neq \emptyset$. Como A está acotado inferiormente, existe una cota inferior l_A de A; como B está acotado inferiormente, existe una cota inferior l_B de B. Definamos $l = \min\{l_A, l_B\}$. Si $x \in A \cup B$, entonces ocurre una de dos cosas. Si $x \in A$, tenemos

$l \leq l_A \leq x$. Si $x \in B$, tenemos $l \leq l_B \leq x$. Por tanto, $l \leq x \qquad$ para todo $x \in A \cup B$, así que $A \cup B$ está acotado inferiormente. Ahora usamos el principio del ínfimo derivado de §3.3. Como los tres conjuntos son no vacíos y están acotados inferiormente, existen

$$i_A = \inf A, \qquad i_B = \inf B, \qquad i = \inf(A \cup B).$$

Esta existencia hereda completitud del principio del supremo mediante la reflexión demostrada en §3.3. Definamos $m = \min\{i_A, i_B\}$. Mostremos que m es una cota inferior de $A \cup B$. Si $x \in A$, entonces $i_A \leq x$. Como $m \leq i_A$, $m \leq x$. Si $x \in B$, análogamente $m \leq i_B \leq x$. Así, $m \in L(A \cup B)$. Falta demostrar que es la **mayor** cota inferior. Sea l' una cota inferior cualquiera de $A \cup B$. Entonces, como

$A \subseteq A \cup B, \qquad B \subseteq A \cup B$, el mismo l' es cota inferior de A y de B. Por la maximalidad de los ínfimos,

$$l' \leq i_A \qquad \text{y} \qquad l' \leq i_B.$$

Por tanto, $l' \leq \min\{i_A, i_B\} = m$. Hemos demostrado que m es cota inferior de $A \cup B$ y que toda otra cota inferior queda por debajo de m. Luego

$$\boxed{\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}.}$$

Ejercicio 13. Trasladar un ínfimo abriendo la caja negra

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y acotado inferiormente, y sea $c \in \mathbb{R}$. Define $A + c = \{a + c : a \in A\}$. Demuestra $\inf(A + c) = \inf A + c$, pero con la siguiente restricción de trazabilidad:

- no puedes invocar el principio del ínfimo como una caja negra;
- debes abrir su demostración y usar el **principio del supremo exactamente una vez**, aplicado a $-A$;
- después de obtener $s = \sup(-A)$ y $i = -s$, todo el resto debe probarse directamente mediante orden y álgebra.

En particular:

1. verifica las hipótesis sobre $-A$;
2. señala el único `Paso de completitud`;
3. demuestra que $i = \inf A$;
4. demuestra directamente que $i + c$ es la mayor cota inferior de $A + c$;
5. explica por qué no fue necesario gastar completitud una segunda vez para $A + c$.

Solución. No invocaremos `INF` como una regla independiente. Reconstruiremos el ínfimo desde `SUP`. Como $A \neq \emptyset$, también $-A \neq \emptyset$. Como A está acotado inferiormente, existe $l \in \mathbb{R}$ tal que $l \leq a \qquad$ para todo $a \in A$. Reflejando, $-a \leq -l \qquad$ para todo $a \in A$, de modo que $-A$ está acotado superiormente.

> **Único Paso de completitud.** Por el principio del supremo existe $s = \sup(-A)$.

Definimos $i = -s$. Demostremos brevemente, sin otra aplicación de completitud, que $i = \inf A$. Si $a \in A$, entonces $-a \in -A$. Como s es cota superior de $-A$, $-a \leq s$, y al reflejar, $i = -s \leq a$. Así, i es cota inferior de A. Si q es cualquier cota inferior de A, entonces $q \leq a \qquad$ para todo $a \in A$.

Reflejando, $-a \leq -q$, de modo que $-q$ es cota superior de $-A$. La minimalidad de s da $s \leq -q$, y por reflexión $q \leq -s = i$. Por tanto, $i = \inf A$. Ahora estudiemos $A + c$. Primero

probemos que $i+c$ es cota inferior. Si $y \in A+c$, existe $a \in A$ tal que $y = a+c$. Como $i \le a$, $i+c \le a+c = y$.

Así, $i+c$ es cota inferior de $A+c$. Sea ahora v cualquier cota inferior de $A+c$. Para todo $a \in A$ tenemos $v \le a+c$. Restando c, $v-c \le a$ para todo $a \in A$. Por tanto, $v-c$ es una cota inferior de A. Como $i = \inf A$ es la mayor cota inferior, $v-c \le i$. Sumando c,

$v \le i+c$. Así, $i+c$ es la mayor cota inferior de $A+c$. En consecuencia,

$$\boxed{\inf(A+c) = i+c = \inf A + c.}$$

No fue necesario aplicar completitud a $A+c$. Una vez construido i mediante la única aplicación de SUP a $-A$, la nueva frontera se obtuvo transportando directamente las dos propiedades definitorias del ínfimo. La trazabilidad exacta es

$$A \text{ inferiormente acotado} \Longrightarrow -A \text{ superiormente acotado} \Longrightarrow_{\text{SUP}} \sup(-A) \Longrightarrow \inf A \Longrightarrow \inf(A+c).$$

Sólo la flecha marcada SUP consume completitud.

Ejercicio 14. Una transformación afín decreciente intercambia las fronteras

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y acotado tanto superior como inferiormente. Sean $\lambda < 0$, $c \in \mathbb{R}$, y define $\lambda A + c = \{\lambda a + c : a \in A\}$. Demuestra las dos identidades

$$\boxed{\sup(\lambda A + c) = \lambda \inf A + c,}$$

y

$$\boxed{\inf(\lambda A + c) = \lambda \sup A + c.}$$

Tu prueba debe:

1. justificar la existencia de $\sup A$ e $\inf A$ a partir de §3.2–§3.3;
2. demostrar directamente que $\lambda \inf A + c$ es cota superior del conjunto transformado y es menor o igual que toda otra cota superior;
3. demostrar de manera dual la segunda identidad;
4. indicar en qué pasos se invierte el sentido de las desigualdades por ser $\lambda < 0$;
5. explicar conceptualmente por qué una transformación afín **decreciente** intercambia supremo e ínfimo, mientras que una traslación no los intercambia.

No uses propiedad arquimediana, sucesiones ni resultados de §3.4 o posteriores.

Solución. Como A es no vacío y está acotado superior e inferiormente, §3.2 y §3.3 garantizan la existencia de $S = \sup A$, $i = \inf A$. Sea $T(A) = \lambda A + c$ con $\lambda < 0$.

Primera identidad: el supremo de la imagen

Queremos demostrar $\sup T(A) = \lambda i + c$. Sea $y \in T(A)$. Entonces existe $a \in A$ tal que $y = \lambda a + c$. Como $i = \inf A$, $i \le a$. Al multiplicar por $\lambda < 0$, la desigualdad **se invierte**: $\lambda a \le \lambda i$. Sumando c, $y = \lambda a + c \le \lambda i + c$. Por tanto, $\lambda i + c$ es una cota superior de $T(A)$.

Ahora sea u cualquier cota superior de $T(A)$. Para todo $a \in A$, $\lambda a + c \le u$. Restando c, $\lambda a \le u - c$. Al dividir por $\lambda < 0$, la desigualdad vuelve a **invertirse**: $a \ge \frac{u-c}{\lambda}$. Así, $\frac{u-c}{\lambda}$ es una cota inferior de A. Como i es la mayor cota inferior, $\frac{u-c}{\lambda} \le i$.

Multiplicar esta desigualdad por $\lambda < 0$ invierte nuevamente el sentido: $u - c \ge \lambda i$. Por tanto, $u \ge \lambda i + c$. Hemos mostrado que $\lambda i + c$ es cota superior y que queda por debajo de toda cota superior. Luego

$$\boxed{\sup(\lambda A + c) = \lambda \inf A + c.}$$

Segunda identidad: el ínfimo de la imagen

Ahora partimos de $a \leq S$ para todo $a \in A$. Multiplicando por $\lambda < 0$, $\lambda a \geq \lambda S$. Sumando c, $\lambda a + c \geq \lambda S + c$. Así, $\lambda S + c$ es una cota inferior de $T(A)$. Sea v cualquier cota inferior de $T(A)$. Entonces $v \leq \lambda a + c$ para todo $a \in A$. Restando c,

$v - c \leq \lambda a$. Dividiendo por $\lambda < 0$ se invierte el sentido: $\frac{v-c}{\lambda} \geq a$ para todo $a \in A$. Por tanto, $\frac{v-c}{\lambda}$ es una cota superior de A. Como $S = \sup A$ es la menor cota superior, $S \leq \frac{v-c}{\lambda}$. Multiplicando por $\lambda < 0$ se invierte la desigualdad: $\lambda S \geq v - c$, y entonces

$\lambda S + c \geq v$. Es decir, $v \leq \lambda S + c$. Así, $\lambda S + c$ es la mayor cota inferior de $T(A)$. Por tanto,

$$\boxed{\inf(\lambda A + c) = \lambda \sup A + c.}$$

La explicación conceptual es que una traslación $x \mapsto x + c$ preserva el orden, mientras que una transformación con pendiente negativa $x \mapsto \lambda x + c$, $\lambda < 0$, lo invierte. Lo que estaba abajo pasa arriba y lo que estaba arriba pasa abajo. Por eso el ínfimo origina el supremo de la imagen y el supremo origina su ínfimo.

3.4. Una consecuencia decisiva: la propiedad arquimediana

La construcción de C00 ya permitió superar cualquier barrera real mediante algún natural. Podemos reconstruir esa propiedad a partir de SUP para ver cuánto de la estructura de los reales contiene por sí sola la completitud de orden.

Teorema. El conjunto $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente en $\mathbb{R}$.

Supongamos, por contradicción, que $\mathbb{N}$ estuviera acotado superiormente. Como es no vacío, SUP garantizaría la existencia de $s = \sup \mathbb{N}$. La elección de $s - 1$ busca aprovechar que el sucesor de un natural vuelve a ser natural: si encontramos un natural a menos de una unidad por debajo de s, su sucesor romperá la cota. Por minimalidad, $s - 1 < s$ no es cota superior. Existe entonces $n \in \mathbb{N}$ con $n > s-1$, y al sumar una unidad resulta $n+1 > s$. Pero $n+1 \in \mathbb{N}$, en contradicción con que s dominara a todos los naturales. SUP se usó al producir el supuesto supremo; los pasos posteriores emplearon su definición, el orden y la operación de sucesor.

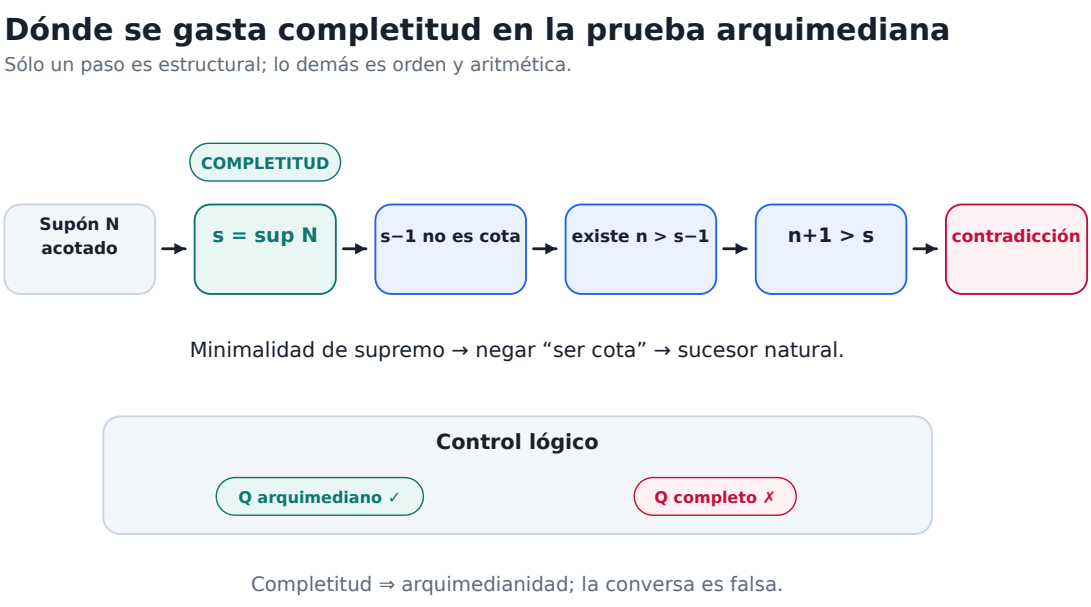


Figura 3.4. La completitud se usa una sola vez para producir s=sup N bajo la hipótesis contradictoria; el resto es orden y aritmética.

La negación de estar acotado superiormente nos da la **propiedad arquimediana** en forma cuantificada: $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N} : \quad n > x$. Esta propiedad equivale a disponer de recíprocos naturales arbitrariamente pequeños. Si $\varepsilon > 0$, elegimos $n > 1/\varepsilon$; el natural es

positivo y, al invertir la desigualdad entre positivos, obtenemos $1/n < \varepsilon$. Recíprocamente, si para todo $\varepsilon > 0$ hay un natural positivo con $1/n < \varepsilon$, dado $x > 0$ podemos usar $\varepsilon = 1/x$ y concluir $n > x$. Para $x \leq 0$ basta cualquier natural positivo. Así,

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}_{>0} :\quad \frac{1}{n} < \varepsilon$ expresa la misma propiedad sin introducir una noción de convergencia. Para una longitud fija $L > 0$, elegir $n > L/\varepsilon$ da también $L/n < \varepsilon$. Una tolerancia positiva determina una elección finita, aunque no hayamos fijado de antemano cuántos pasos necesitaremos. La completitud implica arquimedianidad, pero la conversa falla. Podemos probar directamente la propiedad arquimediana de $\mathbb{Q}$ sin usar SUP: si $q = m/k$ con $m \in \mathbb{Z}$ y $k \geq 1$, sirve $n = 1$ cuando $m \leq 0$; cuando $m > 0$, tenemos $q \leq m < m + 1$ y sirve $n = m + 1$. Para una tolerancia racional positiva p/r, el natural $n = r + 1$ satisface $1/n < 1/r \leq p/r$. Los racionales permiten, pues, superar sus barreras y obtener escalas tan pequeñas como cualquier tolerancia racional; aun así, S_2 carece de supremo racional.

También es insuficiente argumentar que $\mathbb{N}$ no tiene máximo porque cada n tiene un sucesor mayor. Esa observación excluye un máximo, pero no una posible cota exterior: $(0, 1)$ muestra que un conjunto sin máximo puede estar acotado. En la prueba con SUP, el sucesor hace algo más preciso: transforma un testigo situado por encima de $s - 1$ en un elemento situado por encima de la supuesta cota s. Ésa es la contradicción que elimina todas las cotas posibles.

Ejercicios de la sección 3.4.

Ejercicio 15. Un paso positivo repetido supera cualquier barrera

Sean $h > 0$, $\quad M \in \mathbb{R}$. Demuestra que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nh > M$. Tu prueba debe:

1. identificar el número real al que conviene aplicar la propiedad arquimediana;
2. explicar por qué multiplicar la desigualdad obtenida por h no cambia su sentido;
3. distinguir el uso **directo** de completitud del uso **indirecto** de una consecuencia ya demostrada de completitud;
4. explicar por qué el resultado sigue siendo válido aunque $M < 0$.

No vuelvas a demostrar desde cero la propiedad arquimediana: úsala como el resultado ya obtenido en §3.4.

Solución. Como $h > 0$, el cociente $\frac{M}{h}$ es un número real. Por la propiedad arquimediana existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{M}{h}$. Ahora multiplicamos por h. Como h es positivo, el sentido de la desigualdad se conserva: $nh > M$. Por tanto,

$$\boxed{\forall h > 0\ \forall M \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N} :\quad nh > M.}$$

La elección de n usa la propiedad arquimediana demostrada a partir de completitud en §3.4. Si $M < 0$, el argumento sigue siendo válido sin cambio alguno: M/h continúa siendo un real y arquimedianidad proporciona un natural mayor. De hecho, en ese caso cualquier natural positivo ya produce $nh > 0 > M$, pero no necesitamos separar el caso para que la prueba general funcione. La anatomía lógica es

$$M/h \in \mathbb{R} \Longrightarrow_{\text{arquimedianidad}} \exists n :\ n > M/h \Longrightarrow_{h>0} nh > M.$$

Ejercicio 16. Construir una malla finita más fina que una tolerancia

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y sea $\varepsilon > 0$. Demuestra que existe $N \in \mathbb{N}_{>0}$ tal que, al definir $x_k = a + k\frac{b-a}{N}$, $\quad k = 0, 1, \ldots, N$, se cumple $x_0 = a$, $\quad x_N = b$, y, para cada $k = 0, 1, \ldots, N - 1$, $0 < x_{k+1} - x_k < \varepsilon$. La demostración debe justificar explícitamente:

1. por qué $(b - a)/\varepsilon$ es un real positivo;
2. cómo elegir N mediante arquimedianidad;
3. por qué esa elección implica $(b - a)/N < \varepsilon$;
4. por qué la construcción usa sólo una familia **finita** de puntos y no necesita sucesiones ni límites.

No uses resultados de §3.5 o posteriores.

Solución. Como $a < b$, $b - a > 0$. Además $\varepsilon > 0$, de modo que $\frac{b-a}{\varepsilon} > 0$. Por la propiedad arquimediana existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > \frac{b-a}{\varepsilon}$. Como el lado derecho es positivo, necesariamente $N > 0$; por tanto, $N \in \mathbb{N}_{>0}$. Multiplicando la desigualdad por $\varepsilon > 0$ obtenemos $N\varepsilon > b - a$. Como $N > 0$, dividir por N conserva el sentido:

$\varepsilon > \frac{b-a}{N}$. Es decir, $0 < \frac{b-a}{N} < \varepsilon$. Definamos ahora, para los enteros $k = 0, 1, \dots, N$, $x_k = a + k\frac{b-a}{N}$. En los extremos, $x_0 = a$ y $x_N = a + N\frac{b-a}{N} = a + (b - a) = b$. Para $k = 0, 1, \dots, N - 1$,

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x_k &= \left(a + (k+1)\frac{b-a}{N}\right) - \left(a + k\frac{b-a}{N}\right) \\ &= \frac{b-a}{N}. \end{aligned}$$

Por la elección de N,

$$\boxed{0 < x_{k+1} - x_k < \varepsilon.}$$

Elegir N usa la propiedad arquimediana, cuya demostración en §3.4 dependió de completitud. La construcción contiene exactamente $N + 1$ puntos. Es una subdivisión finita de $[a, b]$; no se ha definido una sucesión infinita ni se ha formulado ningún límite.

Ejercicio 17. Abrir toda la cadena: de SUP a una escala $L/N < \varepsilon$

Sean $L > 0$, $\varepsilon > 0$. Partiendo del **principio del supremo** y sin citar la propiedad arquimediana como una caja negra, demuestra que existe $N \in \mathbb{N}_{>0}$ tal que $\frac{L}{N} < \varepsilon$. Organiza la prueba en dos capas. **Capa A — obtener arquimedianidad desde completitud.** Supón por contradicción que $\mathbb{N}$ está acotado superiormente, usa exactamente una vez el principio del supremo para producir $s = \sup \mathbb{N}$ y completa la contradicción mediante $s - 1$ y $n + 1$.

Capa B — producir la escala. Aplica el resultado de la capa A a L/ε y deduce la desigualdad requerida. Al final clasifica cada paso como:

- uso directo de completitud;
- orden y aritmética;
- uso posterior de un resultado ya derivado.

La respuesta debe dejar visible por qué la existencia de N depende estructuralmente de completitud aunque la desigualdad final no invoque de nuevo el supremo.

Solución. Queremos partir del principio del supremo y mantener visible cada dependencia.

Capa A. Derivar arquimedianidad

Supongamos, buscando una contradicción, que $\mathbb{N}$ está acotado superiormente en $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{N} \neq \emptyset$, quedan satisfechas las hipótesis de SUP.

> **Único Paso directo de completitud.** Por el principio del supremo existe $s = \sup \mathbb{N}$.

A partir de aquí no usamos de nuevo completitud. Como $s - 1 < s$, el número $s - 1$ no puede ser una cota superior de $\mathbb{N}$: si lo fuera, sería una cota superior estrictamente menor que el supremo. Negar que $s-1$ sea cota superior significa que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > s-1$. Sumando 1, $n + 1 > s$. Pero $n + 1 \in \mathbb{N}$, lo que contradice que s sea cota superior de $\mathbb{N}$.

Por tanto, $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente. Equivalentemente, $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N} : \quad n > x$.

Capa B. Producir la escala

Como $L > 0$ y $\varepsilon > 0$, $\frac{L}{\varepsilon} > 0$. Aplicando la propiedad recién derivada, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > \frac{L}{\varepsilon}$. El lado derecho es positivo, de modo que $N > 0$. Entonces $N\varepsilon > L$, y al dividir por $N > 0$,

$$\boxed{\frac{L}{N} < \varepsilon.}$$

La cadena completa es

$$\text{SUP} \Longrightarrow \mathbb{N} \text{ no acotado} \Longrightarrow \exists N > \frac{L}{\varepsilon} \Longrightarrow \frac{L}{N} < \varepsilon.$$

Clasificación:

- **uso directo de completitud:** únicamente la existencia de $s = \sup \mathbb{N}$ bajo la hipótesis contradictoria de acotación;
- **orden y aritmética:** $s - 1$ no es cota, la negación de ser cota, $n + 1 > s$ y las manipulaciones con L, ε, N;
- **uso posterior de un resultado derivado:** una vez cerrada la capa A, escoger $N > L/\varepsilon$ usa arquimedianidad como consecuencia ya establecida.

Así, la desigualdad final no contiene un símbolo de supremo, pero su disponibilidad dentro de este desarrollo tiene una dependencia estructural precisa en completitud.

Ejercicio 18. «No tiene máximo» no significa «no está acotado»

Un estudiante propone esta prueba de la propiedad arquimediana:

> Los naturales no tienen máximo, porque para cada $n \in \mathbb{N}$ también $n+1 \in \mathbb{N}$ y $n + 1 > n$. Todo conjunto sin máximo es no acotado superiormente. Por tanto, $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente y no necesitamos completitud.

Diagnostica el argumento.

1. Identifica exactamente la afirmación falsa.
2. Da un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ que esté acotado superiormente y no tenga máximo.
3. Explica por qué $n + 1 > n$ sólo demuestra que $\mathbb{N}$ no tiene máximo, pero por sí solo no excluye una cota superior no alcanzada.
4. Repara la prueba suponiendo que $\mathbb{N}$ está acotado superiormente y señalando el punto exacto donde el principio del supremo elimina la posibilidad de una barrera no alcanzada.
5. Explica por qué la prueba reparada no contradice el contraejemplo del apartado 2.

Solución. La afirmación falsa del argumento es:

> todo conjunto sin máximo es no acotado superiormente.

No es cierto. Por ejemplo, $A = (0, 1)$ es no vacío y está acotado superiormente —1 es una cota superior—, pero no tiene máximo. Si $x \in (0, 1)$, entonces $y = \frac{x+1}{2}$ satisface $x < y < 1$, de modo que ningún x puede ser máximo. Volvamos a $\mathbb{N}$. El hecho de que $n+1 \in \mathbb{N}, \quad n+1 > n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ prueba correctamente que $\mathbb{N}$ no tiene máximo. Pero eso sólo excluye una cota superior **alcanzada como mayor elemento**. No excluye una posible cota superior exterior o no alcanzada.

Para eliminar esa posibilidad necesitamos una información adicional. Supongamos, buscando una contradicción, que $\mathbb{N}$ está acotado superiormente. Como es no vacío, el principio del supremo autoriza

> **Paso de completitud.** Existe
> $s = \sup \mathbb{N}$.

El número $s - 1 < s$ no puede ser cota superior. Por tanto existe $n \in \mathbb{N}$ con $n > s - 1$. Entonces $n + 1 > s$, pero $n + 1 \in \mathbb{N}$, contradiciendo que s sea cota superior. La prueba reparada no contradice el ejemplo $(0, 1)$. En ese conjunto, la existencia del supremo no genera un nuevo elemento del conjunto que cruce la barrera: de $s = 1$ y $s - 1 = 0$ sólo obtenemos algún elemento de $(0, 1)$ mayor que 0, lo cual no contradice que 1 sea cota superior. En $\mathbb{N}$, en

cambio, la estabilidad bajo $n \mapsto n+1$ transforma el testigo $n > s-1$ en un nuevo elemento $n+1 > s$ que sí rompe la barrera.

Ejercicio 19. Arquimediano no implica completo

Usa $\mathbb{Q}$ para refutar la conversa arquimediano $\Longrightarrow$ completo. La demostración debe ser autosuficiente en los siguientes puntos:

1. demuestra directamente que para todo $q \in \mathbb{Q}$ existe $n \in \mathbb{N}$ con $n > q$;
2. deduce también que para todo $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ con $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}_{>0}$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$;
3. recuerda el conjunto $S_2 = \{q \in \mathbb{Q} : 0 \leq q,\ q^2 < 2\}$ y usa el ejercicio 3 para justificar que es no vacío, está acotado superiormente en $\mathbb{Q}$ y no posee supremo racional;
4. concluye con una separación lógica explícita entre completitud $\Longrightarrow$ arquimedianidad y la conversa, que es falsa.

No identifiques el hueco de S_2 con ningún número real concreto: utiliza únicamente el fallo interno del supremo racional ya demostrado.

Solución. Debemos verificar dos propiedades distintas de $\mathbb{Q}$.

1. $\mathbb{Q}$ es arquimediano

Sea $q \in \mathbb{Q}$. Escribamos

$$q = \frac{m}{k}, \qquad m \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{N}_{>0}.$$

Si $m \leq 0$, basta tomar $n = 1$, pues $1 > q$. Supongamos ahora $m > 0$. Como $k \geq 1$, $\frac{m}{k} \leq m$. Tomando $n = m+1 \in \mathbb{N}$, obtenemos $n = m+1 > m \geq \frac{m}{k} = q$. Por tanto,

$$\boxed{\forall q \in \mathbb{Q}\ \exists n \in \mathbb{N} : \quad n > q.}$$

Esta demostración es interna a la aritmética racional; no necesita el principio del supremo de $\mathbb{R}$.

2. Recíprocos racionales arbitrariamente pequeños

Sea $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ con $\varepsilon > 0$. Escribamos $\varepsilon = \frac{p}{r}, \qquad p, r \in \mathbb{N}_{>0}$. Tomemos $n = r+1$. Entonces $\frac{1}{n} = \frac{1}{r+1} < \frac{1}{r}$. Como $p \geq 1$, $\frac{1}{r} \leq \frac{p}{r} = \varepsilon$. Luego

$$\boxed{\frac{1}{n} < \varepsilon.}$$

Así, $\mathbb{Q}$ satisface también la formulación de escalas recíprocas de la propiedad arquimediana.

3. $\mathbb{Q}$ no es completo

Consideremos $S_2 = \{q \in \mathbb{Q} : 0 \leq q,\ q^2 < 2\}$. El ejercicio 3 estableció dentro de $\mathbb{Q}$ que:

- $S_2 \neq \emptyset$;
- S_2 está acotado superiormente en $\mathbb{Q}$;
- no existe $\sup_{\mathbb{Q}} S_2$.

Por tanto, $\mathbb{Q}$ no satisface el principio del supremo y no es completo en el sentido de orden usado en C03. Tenemos entonces un sistema que cumple arquimedianidad pero falla completitud. En consecuencia,

$$\boxed{\text{completitud} \Longrightarrow \text{arquimedianidad}, \qquad \text{arquimedianidad} \not\Longrightarrow \text{completitud}.}$$

3.5. Intervalos encajados: conservar un punto al refinar

Consideremos una familia $I_n = [a_n, b_n]$ de intervalos cerrados no vacíos, indexada por $n \in \mathbb{N}_{>0}$, y supongamos $I_{n+1} \subseteq I_n$ para todo n. Cada intervalo impone una restricción más fuerte que la anterior. Buscamos un número que cumpla todas, sin suponer que los anchos se hagan pequeños. El encajamiento da $a_n \leq a_{n+1}$ y $b_{n+1} \leq b_n$, porque ambos extremos del intervalo menor pertenecen al mayor. La información decisiva relaciona extremos de índices distintos.

Compatibilidad cruzada. Para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$, $a_m \leq b_n$.

Si $m \leq n$, la monotonía da $a_m \leq a_n \leq b_n$. Si $m > n$, el encajamiento iterado da $I_m \subseteq I_n$ y, como $a_m \in I_m$, resulta de nuevo $a_m \leq b_n$. Por tanto, cada extremo derecho domina a **todos** los extremos izquierdos. Reunamos los extremos izquierdos en $A = \{a_n : n \geq 1\}$. Este conjunto es no vacío, pues contiene a_1, y está acotado superiormente por b_1. En realidad, la compatibilidad cruzada muestra que cada b_n es una cota superior de A. Por completitud existe $x = \sup A$. La elección del conjunto auxiliar permite utilizar las dos condiciones de ese supremo: como $a_n \in A$, tenemos $a_n \leq x$; como b_n es cota superior de A, la minimalidad da $x \leq b_n$. Así,

$a_n \leq x \leq b_n \qquad (n \geq 1)$, y el cierre de cada intervalo permite concluir $x \in I_n$ para todo n.

Teorema de intervalos cerrados encajados — forma numerable. Si $I_n = [a_n, b_n]$ es una familia numerable de intervalos cerrados no vacíos y $I_{n+1} \subseteq I_n$ para todo n, entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$.

La prueba usa completitud una vez para producir x. Las desigualdades que lo sitúan en cada intervalo proceden después de la condición de cota y de la minimalidad del mismo supremo. No necesitamos haber demostrado que los extremos convergen: las relaciones de orden bastan para colocar el punto en todas las restricciones. El cierre importa porque sólo obtuvimos desigualdades no estrictas. Para $J_n = (0, 1/n)$, los intervalos son no vacíos y están encajados, pero no hay un punto común. Si lo hubiera, sería un $x > 0$; la propiedad arquimediana proporciona un natural positivo con $1/n < x$, incompatible con $x \in J_n$. El mismo razonamiento funciona para los semiabiertos $(0, 1/n]$. Por otra parte, si retiramos el encajamiento, los intervalos cerrados $[n, n+1]$ pueden tener intersección vacía: ya $[1, 2]$ y $[3, 4]$ son disjuntos. Cada ejemplo muestra que retirar una hipótesis puede destruir la garantía, sin afirmar que siempre la destruya.

La existencia tampoco implica unicidad. Para la familia constante $I_n = [0, 1]$, la intersección es todo $[0, 1]$. Incluso si los extremos se mueven, puede conservarse un segmento: los intervalos $[0, 1 + 1/n]$ tienen intersección $[0, 1]$. La inclusión de este último intervalo en todos ellos es inmediata; si $x > 1$, elegimos n con $1/n < x - 1$ y descartamos que x pertenezca a todos.

Podemos precisar toda la intersección mediante las dos barreras de los conjuntos de extremos. Sea $A = \{a_n : n \geq 1\}$ y $B = \{b_n : n \geq 1\}$. La compatibilidad cruzada permite obtener $s = \sup A$ y $t = \inf B$. Como $s \leq b_n$ para todo n, el número s es cota inferior de B y $s \leq t$. Si x pertenece a todos los intervalos, es cota superior de A e inferior de B, por lo que $s \leq x \leq t$. Recíprocamente, si $s \leq x \leq t$, entonces $a_n \leq s \leq x \leq t \leq b_n$ para todo n. Queda demostrada la identidad

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = [s, t] = [\sup\{a_n : n \geq 1\}, \inf\{b_n : n \geq 1\}] .$$

El punto s de la primera prueba es, en particular, un punto común; también lo es t, obtenido desde la versión inferior. La igualdad entre ambos requiere información adicional.

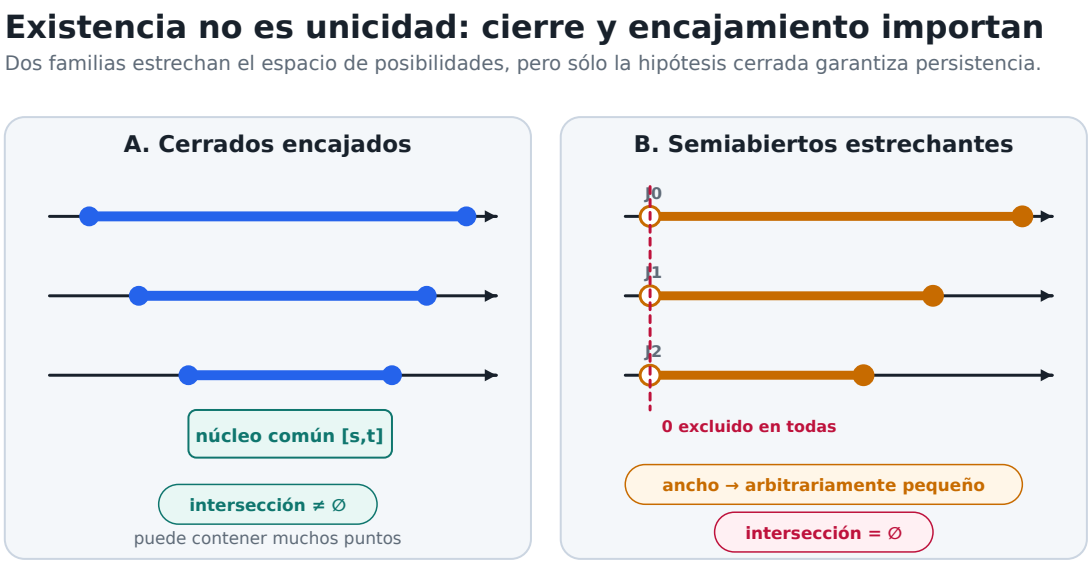


Figura 3.5. Los intervalos cerrados encajados garantizan existencia pero no unicidad; una familia semiabierta puede estrecharse y aun así perder todo punto común.

Ejercicios de la sección 3.5.

Ejercicio 20. Antes de aplicar el teorema de intervalos encajados

Para cada una de las siguientes familias, decide si el **teorema numerable de intervalos cerrados encajados** de §3.5 puede aplicarse directamente: $I_n = \left[0, 1 + \frac{1}{n}\right]$, $J_n = \left(0, \frac{1}{n}\right]$, $K_n = [n, n+1]$, y $L_n = [-1, 1]$, $\quad n \in \mathbb{N}_{>0}$. En cada caso verifica por separado:

1. que cada intervalo sea no vacío;
2. que sea un intervalo **cerrado** de $\mathbb{R}$;
3. que la familia esté encajada, es decir, $I_{n+1} \subseteq I_n$ con la letra correspondiente;
4. sólo si se cumplen las tres condiciones, escribe la conclusión de existencia autorizada por el teorema.

No calcules todavía la intersección cuando no sea necesario. El objetivo es entrenar la lectura exacta de hipótesis antes de invocar una consecuencia de completitud.

Solución. El teorema de §3.5 exige simultáneamente, para cada n: $I_n = [a_n, b_n] \neq \emptyset$ y $I_{n+1} \subseteq I_n$. Además, los intervalos deben ser cerrados.

Familia $I_n = [0, 1 + 1/n]$

Cada intervalo es no vacío porque $0 \leq 1 + \frac{1}{n}$. Es cerrado por tener la forma $[a, b]$. Para el encajamiento observamos que $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, y por tanto $1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{n}$. El extremo izquierdo permanece fijo en 0 y el derecho se desplaza hacia la izquierda. Luego $I_{n+1} \subseteq I_n$. Las tres hipótesis están satisfechas. El teorema autoriza concluir

$$\boxed{\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset.}$$

No es necesario calcular la intersección para obtener esta existencia.

Familia $J_n = (0, 1/n]$

Cada J_n es no vacío. Por ejemplo, $\frac{1}{2n} \in J_n$. También está encajada, pues $0 < x \leq \frac{1}{n+1} \Longrightarrow 0 < x \leq \frac{1}{n}$. Sin embargo, J_n no es un intervalo cerrado de $\mathbb{R}$: el extremo 0 está excluido.

Por tanto el teorema de §3.5 **no** puede invocarse directamente. La lectura correcta no es "la intersección es vacía porque el teorema no se aplica". La única conclusión lógica es que este teorema no decide el caso a partir de sus hipótesis, porque una de ellas falla.

Familia $K_n = [n, n+1]$

Cada K_n es cerrado y no vacío. Pero no hay encajamiento. Por ejemplo, $K_1 = [1,2]$, $K_2 = [2,3]$, y $K_2 \not\subseteq K_1$ porque, por ejemplo, $3 \in K_2$ y $3 \notin K_1$. Así, el teorema tampoco es aplicable a esta familia.

Familia $L_n = [-1, 1]$

Cada intervalo es cerrado y no vacío. Además, $L_{n+1} = L_n$ para todo n, de modo que ciertamente $L_{n+1} \subseteq L_n$. El teorema se aplica y garantiza

$$\boxed{\bigcap_{n=1}^{\infty} L_n \neq \emptyset.}$$

En este ejemplo la intersección es incluso el intervalo completo $[-1,1]$, lo que recuerda que §3.5 garantiza existencia, no unicidad. La clasificación final es

familia	no vacía	cerrada	encajada	teorema aplicable
I_n	sí	sí	sí	sí
J_n	sí	no	sí	no
K_n	sí	sí	no	no
L_n	sí	sí	sí	sí

Ejercicio 21. La misma existencia vista desde los extremos derechos

Sean $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}_{>0}$, intervalos cerrados no vacíos tales que $I_{n+1} \subseteq I_n$ para todo n. En §3.5 se construyó un punto común usando el supremo de los extremos izquierdos. Da una demostración **dual** usando los extremos derechos. Define $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}_{>0}\}$. Debes demostrar, en este orden:

1. $B \neq \emptyset$;
2. cada a_m es una cota inferior de B;
3. existe $y = \inf B$;
4. para cada n, $a_n \leq y \leq b_n$;
5. por tanto, $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

Localiza el paso que hereda completitud a través del principio del ínfimo de §3.3 y explica por qué las desigualdades posteriores no consumen una nueva aplicación de completitud.

Solución. Tenemos intervalos $I_n = [a_n, b_n]$ cerrados, no vacíos y encajados. La compatibilidad cruzada demostrada en §3.5 afirma $a_m \leq b_n$ para todos $m, n \geq 1$. Definamos $B = \{b_n : n \geq 1\}$. El conjunto B es no vacío porque $b_1 \in B$. Fijemos ahora un índice m. Por compatibilidad cruzada, $a_m \leq b_n$ para todo n. Por definición, esto significa que a_m es una cota inferior de B.

En particular, tomando $m = 1$, obtenemos al menos una cota inferior de B. Así,

$$B \neq \emptyset \qquad \text{y} \qquad B \text{ está acotado inferiormente.}$$

Paso de completitud heredado por INF. El principio del ínfimo de §3.3, derivado del principio del supremo, garantiza que existe $y = \inf B$.

A partir de aquí no necesitamos una nueva aplicación de completitud. Fijemos n. Como a_n es una cota inferior de B y $y = \inf B$ es la **mayor** cota inferior, $a_n \leq y$.

Por otra parte, $b_n \in B$. Como el ínfimo es una cota inferior de B, $y \leq b_n$. Por tanto, $a_n \leq y \leq b_n$, lo que equivale a $y \in [a_n, b_n] = I_n$. Como n era arbitrario,

$$\boxed{y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.}$$

La anatomía lógica es dual a la prueba con supremos:

$$\begin{aligned} &\text{encajamiento} \Longrightarrow \text{compatibilidad cruzada} \\ &\Longrightarrow B \text{ no vacío y acotado inferiormente} \\ &\Longrightarrow_{\text{INF}} y = \inf B \Longrightarrow \forall n : \ a_n \le y \le b_n. \end{aligned}$$

Ejercicio 22. Describir toda la intersección, no sólo encontrar un punto

Bajo las mismas hipótesis del ejercicio anterior, define $A = \{a_n : n \ge 1\}$, $B = \{b_n : n \ge 1\}$, y escribe $s = \sup A$, $t = \inf B$. Demuestra que ambos extremos existen y prueba la identidad

$$\boxed{\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = [s, t].}$$

La prueba debe incluir:

1. la compatibilidad cruzada $a_m \le b_n$ para todos m, n;
2. la deducción $s \le t$;
3. la inclusión $\bigcap_n I_n \subseteq [s, t]$;
4. la inclusión recíproca $[s, t] \subseteq \bigcap_n I_n$.

No añadas ninguna hipótesis de estrechamiento. El resultado debe dejar abierta la posibilidad de que $s < t$ y la intersección contenga más de un punto.

Solución. Definimos $A = \{a_n : n \ge 1\}$, $B = \{b_n : n \ge 1\}$. Por el encajamiento y la no vaciedad de los intervalos tenemos la compatibilidad cruzada

$$\boxed{a_m \le b_n \qquad \text{para todos } m, n \ge 1.}$$

Existencia de s y t

El conjunto A es no vacío porque $a_1 \in A$. Para cualquier n fijo, b_n es cota superior de A, pues $a_m \le b_n$ para todo m. Así, por completitud, existe $s = \sup A$. Análogamente, B es no vacío porque $b_1 \in B$, y cualquier a_m es cota inferior de B. Por el principio del ínfimo existe $t = \inf B$.

Probar $s \le t$

Fijemos n. Ya sabemos que b_n es cota superior de A. Como s es la menor cota superior, $s \le b_n$ para todo n. Esto significa que s es una cota inferior del conjunto B. Como $t = \inf B$ es la mayor cota inferior de B,

$$\boxed{s \le t.}$$

Por tanto, el intervalo $[s, t]$ es no vacío.

Primera inclusión

Sea $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Entonces para todo n, $a_n \le x \le b_n$. La desigualdad izquierda para todos los n dice que x es una cota superior de A. Por la minimalidad de s, $s \le x$. La desigualdad derecha para todos los n dice que x es una cota inferior de B. Por la maximalidad de t, $x \le t$.

Así, $x \in [s, t]$, y por tanto $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \subseteq [s, t]$.

Inclusión recíproca

Sea ahora $x \in [s,t]$. Entonces $s \le x \le t$. Como $s = \sup A$ es cota superior de A, $a_n \le s$ para todo n. Por tanto, $a_n \le s \le x$. Como $t = \inf B$ es cota inferior de B, $t \le b_n$ para todo n. Entonces $x \le t \le b_n$. Juntando ambas cadenas, $a_n \le x \le b_n$ para todo n. Así,

$x \in I_n$ para todo n, y por consiguiente $[s,t] \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Concluimos

$$\boxed{\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = [\sup_n a_n, \inf_n b_n].}$$

La fórmula no fuerza $s = t$. Si $s < t$, la intersección contiene todo el intervalo no degenerado $[s,t]$.

Ejercicio 23. Un solo gasto de completitud, tres usos del supremo

Considera la prueba estándar de §3.5 y el conjunto $A = \{a_n : n \ge 1\}$. Un lector marca como "uso de completitud" las tres líneas siguientes:

1. existe $x = \sup A$;
2. como $a_n \in A$, entonces $a_n \le x$;
3. como b_n es cota superior de A, entonces $x \le b_n$.

Audita esas marcas. Tu respuesta debe:

1. justificar antes de la línea 1 que A es no vacío y está acotado superiormente;
2. clasificar cada una de las tres líneas como **uso directo de completitud** o **uso de propiedades de un supremo ya existente**;
3. identificar en la línea 2 qué parte de la definición de supremo se usa;
4. identificar en la línea 3 qué parte de la definición de supremo se usa;
5. explicar por qué concluir $x \in [a_n, b_n]$ depende además de que los extremos pertenezcan al intervalo cerrado;
6. escribir la cadena completa de dependencias desde el encajamiento hasta el punto común, marcando exactamente una sola flecha con `COMPLETITUD`.

No introduzcas convergencia, compactidad ni resultados de §3.6 o posteriores.

Solución. Partimos de una familia cerrada, no vacía y encajada $I_n = [a_n, b_n]$. El encajamiento produce la compatibilidad cruzada $a_m \le b_n$ para todos m, n. Formamos $A = \{a_n : n \ge 1\}$. El conjunto A es no vacío porque $a_1 \in A$. Además, por ejemplo b_1 es una cota superior de A, pues $a_m \le b_1$ para todo m. Sólo ahora aparece el paso estructural de existencia:

> **Único Paso directo de completitud.** Como A es no vacío y está acotado superiormente, por el principio del supremo existe
> $x = \sup A$.

Examinemos las otras dos líneas.

Línea 2: $a_n \le x$

Como $a_n \in A$ y $x = \sup A$, usamos la parte de la definición que afirma que el supremo es una **cota superior**:

$$a_n \le x.$$

No se produce aquí ningún objeto nuevo. Completitud ya hizo su trabajo al garantizar la existencia de x.

Línea 3: $x \le b_n$

La compatibilidad cruzada muestra que b_n es una cota superior de A. Como $x = \sup A$ es la **menor** cota superior, $x \le b_n$. De nuevo, esto es una propiedad definitoria del supremo

ya existente, no una segunda aplicación de completitud. Juntando ambas desigualdades, $a_n \le x \le b_n$. Para concluir $x \in I_n$ usamos que $I_n = [a_n, b_n]$ incluye sus extremos. Si tuviéramos un intervalo abierto, las desigualdades no estrictas no bastarían por sí solas para garantizar pertenencia.

La cadena completa es

$$\begin{aligned} I_{n+1} \subseteq I_n &\Longrightarrow \forall m, n : \ a_m \le b_n \\ &\Longrightarrow A = \{a_n\} \neq \emptyset \text{ y } A \text{ acotado superiormente} \\ &\Longrightarrow_{\text{COMPLETITUD}} \exists x = \sup A \\ &\Longrightarrow \forall n : \ a_n \le x \le b_n \\ &\Longrightarrow x \in \bigcap_n I_n. \end{aligned}$$

Sólo una flecha está marcada con COMPLETITUD.

Ejercicio 24. Qué ocurre al retirar una hipótesis

Construye y analiza dos familias que muestren que las hipótesis del teorema de §3.5 no son decorativas.

A. Encajamiento sin cierre. Considera

$J_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$. Demuestra, sin lenguaje de límites, que cada J_n es no vacío, que $J_{n+1} \subseteq J_n$, pero que $\bigcap_{n=1}^{\infty} J_n = \emptyset$. Señala exactamente qué hipótesis del teorema falla.

B. Cierre sin encajamiento. Considera

$K_n = [n, n+1]$. Demuestra que cada K_n es cerrado y no vacío, pero que la familia no está encajada y que $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$. Concluye qué muestran estos ejemplos —y qué **no** muestran— acerca del papel de las hipótesis de cierre y encajamiento.

Solución.

A. Encajamiento sin cierre

Consideremos $J_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$. Cada intervalo es no vacío. Por ejemplo, $\frac{1}{2n}$ satisface $0 < \frac{1}{2n} < \frac{1}{n}$. Además, $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$. Por tanto, si $x \in J_{n+1}$, entonces $0 < x < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, de modo que $x \in J_n$. Así, $J_{n+1} \subseteq J_n$. Mostremos que la intersección es vacía. Supongamos que existe $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$.

Entonces, en particular, $x > 0$. Por la formulación arquimediana de §3.4 aplicada a la tolerancia $x > 0$, existe $n \in \mathbb{N}_{>0}$ tal que $\frac{1}{n} < x$. Pero pertenecer a J_n exigiría $x < \frac{1}{n}$, contradicción. Por tanto,

$$\boxed{\bigcap_{n=1}^{\infty} J_n = \emptyset.}$$

La hipótesis que falla es el **cierre**: J_n es abierto y no contiene ninguno de sus extremos.

B. Cierre sin encajamiento

Consideremos $K_n = [n, n+1]$. Cada K_n es cerrado y no vacío. Sin embargo, la familia no está encajada. Por ejemplo, $K_1 = [1, 2]$ y $K_3 = [3, 4]$ son disjuntos. En particular, $K_3 \not\subseteq K_1$. Si existiera un punto $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$, entonces tendría que pertenecer simultáneamente a K_1 y a K_3, lo cual es imposible. Luego

$$\boxed{\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset.}$$

Estos dos ejemplos muestran que, si retiramos el cierre o si retiramos el encajamiento, la conclusión de no vaciedad **puede** fallar. No muestran que toda familia no cerrada tenga intersección vacía ni que toda familia no encajada la tenga. Las hipótesis del teorema son

condiciones suficientes para garantizar la conclusión; los contraejemplos muestran que no podemos simplemente eliminarlas del enunciado y conservar una garantía universal.

Ejercicio 25. Transportar intervalos encajados por una transformación afín

Sea $T(x) = \lambda x + c, \qquad \lambda \neq 0$, y sea $I_n = [a_n, b_n]$ una familia de intervalos cerrados no vacíos con $I_{n+1} \subseteq I_n \qquad$ para todo n. Define $J_n = T(I_n) = \{T(x) : x \in I_n\}$. Demuestra que:

1. si $\lambda > 0$, entonces $J_n = [\lambda a_n + c, \lambda b_n + c]$;
2. si $\lambda < 0$, entonces $J_n = [\lambda b_n + c, \lambda a_n + c]$;
3. en ambos casos, cada J_n es cerrado y no vacío y $J_{n+1} \subseteq J_n$;
4. como T es biyectiva, $T\big(\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n\big) = \bigcap_{n=1}^{\infty} T(I_n)$;
5. el teorema de §3.5 aplicado a cualquiera de las dos familias da una conclusión equivalente de no vaciedad de la intersección.

Explica conceptualmente por qué una transformación afín biyectiva puede invertir el orden cuando $\lambda < 0$ y, sin embargo, preservar el fenómeno de "restricciones cerradas encajadas con punto común". No uses la hipótesis de estrechamiento de §3.6.

Solución. Sea $T(x) = \lambda x + c, \qquad \lambda \neq 0$. Como $\lambda \neq 0$, T es biyectiva, con inversa $T^{-1}(y) = \frac{y-c}{\lambda}$.

Caso $\lambda > 0$

La transformación preserva el orden. Si $a_n \leq x \leq b_n$, entonces $\lambda a_n + c \leq \lambda x + c \leq \lambda b_n + c$.

Recíprocamente, cualquier número entre esos dos extremos tiene una preimagen entre a_n y b_n. Por tanto,

$$\boxed{T(I_n) = [\lambda a_n + c, \lambda b_n + c].}$$

Caso $\lambda < 0$

Ahora la multiplicación por λ invierte ambas desigualdades. De $a_n \leq x \leq b_n$ obtenemos $\lambda a_n \geq \lambda x \geq \lambda b_n$, y, sumando c, $\lambda b_n + c \leq T(x) \leq \lambda a_n + c$. Así,

$$\boxed{T(I_n) = [\lambda b_n + c, \lambda a_n + c].}$$

En ambos casos $J_n = T(I_n)$ es un intervalo cerrado. También es no vacío, porque si $x_n \in I_n$, entonces $T(x_n) \in J_n$. El encajamiento se preserva por imagen de conjuntos: si $I_{n+1} \subseteq I_n$, entonces toda imagen de un elemento de I_{n+1} es también imagen de un elemento de I_n. Por tanto,

$$\boxed{J_{n+1} \subseteq J_n.}$$

La intersección y la biyección

Para cualquier función se tiene siempre $T\big(\bigcap_n I_n\big) \subseteq \bigcap_n T(I_n)$. En nuestro caso podemos probar la inclusión recíproca porque T es inyectiva y, de hecho, biyectiva. Sea $y \in \bigcap_n T(I_n)$. Como T es biyectiva, existe un único $x = T^{-1}(y)$. Para cada n, la pertenencia $y \in T(I_n)$ implica que existe $x_n \in I_n$ con $T(x_n) = y$.

Por inyectividad, $x_n = x$. Así, $x \in I_n$ para todo n, y por tanto $x \in \bigcap_n I_n$. Entonces $y = T(x) \in T\big(\bigcap_n I_n\big)$. Concluimos

$$\boxed{T\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} T(I_n).}$$

El teorema de §3.5 garantiza que $\bigcap_n I_n \neq \emptyset$. Aplicar T a un punto común produce un punto común de todos los J_n. Recíprocamente, cualquier punto común de los J_n tiene por la biyección una única preimagen común a todos los I_n. Así, la afirmación de no vaciedad de la

intersección es transportada exactamente por T. Conceptualmente, el signo de λ modifica la **orientación** del intervalo: si $\lambda < 0$, izquierda y derecha se intercambian. Pero una biyección no destruye la relación de inclusión entre conjuntos ni la existencia de un elemento común. Por eso el fenómeno de restricciones cerradas encajadas con punto común es estable bajo estas transformaciones afines.

3.6. Refinar hasta aislar un único punto

Si dos puntos distintos x, y pertenecen a un mismo intervalo $[a_n, b_n]$, su distancia satisface $|x - y| \leq b_n - a_n$. Esto sugiere cómo excluir dos candidatos a punto común: basta disponer de un intervalo cuyo ancho sea menor que la distancia positiva entre ellos.

> **Lema de unicidad por estrechamiento.** Si una familia de intervalos $I_n = [a_n, b_n]$ satisface $\forall \varepsilon > 0\ \exists n : b_n - a_n < \varepsilon$, entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ contiene **a lo sumo un punto**.

En efecto, si $x \neq y$ pertenecieran a la intersección, podríamos aplicar la hipótesis con $\varepsilon = \delta = |x - y| > 0$. Obtendríamos un índice n tal que $b_n - a_n < \delta$. Si $x < y$, la pertenencia a I_n da $a_n \leq x < y \leq b_n$ y, restando, $\delta = y - x \leq b_n - a_n$; el caso $y < x$ se obtiene intercambiando los nombres. Resultaría $\delta \leq b_n - a_n < \delta$, contradicción.

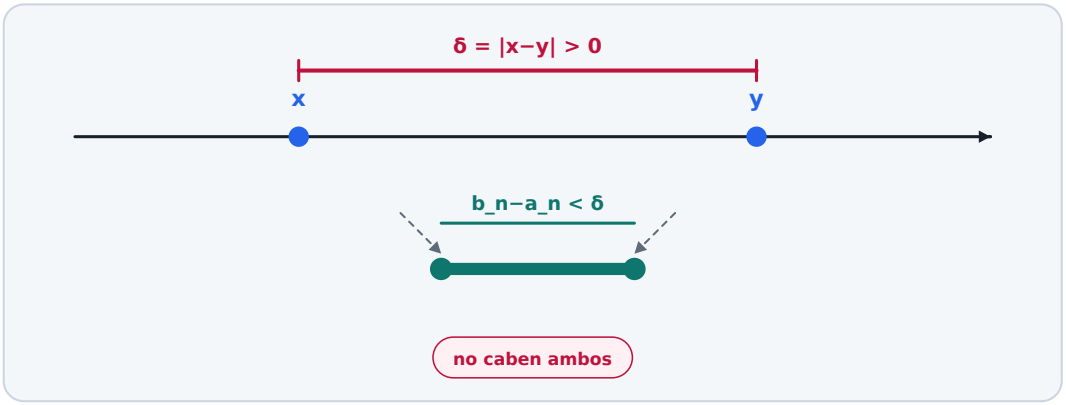


Figura 3.6. Dos puntos distintos no pueden permanecer en intervalos cuyo ancho puede hacerse menor que su distancia positiva.

Este argumento de unicidad no usa encajamiento ni una aplicación de completitud. Sólo compara la distancia de dos hipotéticos puntos comunes con un ancho disponible menor. Tampoco produciría por sí solo un punto común: los intervalos $(0, 1/n)$ se estrechan arbitrariamente y su intersección es vacía. Al recuperar las hipótesis del teorema anterior, la completitud asegura existencia y el estrechamiento asegura que no hay dos puntos distintos.

> **Teorema de unicidad por estrechamiento.** Sea $I_n = [a_n, b_n] \neq \emptyset$ una familia numerable de intervalos cerrados encajados. Si además $\forall \varepsilon > 0\ \exists n : b_n - a_n < \varepsilon$, entonces existe un único $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \in I_n$ para todo n. Equivalentemente, $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x\}$.

La familia constante $[0, 1]$ muestra exactamente qué falta sin estrechamiento: para $\varepsilon = 1/2$ ninguno de sus anchos queda por debajo de la tolerancia. Una manera concreta de obtenerlo

es la **bisección**. Partimos de $J_0 = [a, b]$. Si $a = b$, ya hay un único punto; supongamos $a < b$ y escribamos $L = b - a > 0$. Dividimos en el punto medio $(a + b)/2$ y retenemos una de las dos mitades cerradas. Repitiendo la operación sobre el intervalo retenido obtenemos una familia cerrada no vacía y encajada. Por inducción, después de k pasos su ancho es

$\operatorname{anch}(J_k) = \frac{L}{2^k}$. Para demostrar estrechamiento no basta observar que cada ancho es menor que el anterior. Dada una tolerancia $\varepsilon > 0$, necesitamos encontrar un índice finito cuyo ancho quede por debajo de ella. La propiedad arquimediana permite elegir $m \in \mathbb{N}_{>0}$ con $m > L/\varepsilon$. Por inducción, $2^r \geq r + 1$ para todo $r \geq 1$: vale para $r = 1$, y de $2^r \geq r + 1$ se sigue $2^{r+1} \geq 2(r + 1) \geq r + 2$. Tomando $k = m$ obtenemos

$$2^k \geq k + 1 > k = m > \frac{L}{\varepsilon}, \qquad \text{y, por tanto,} \qquad \frac{L}{2^k} < \varepsilon.$$

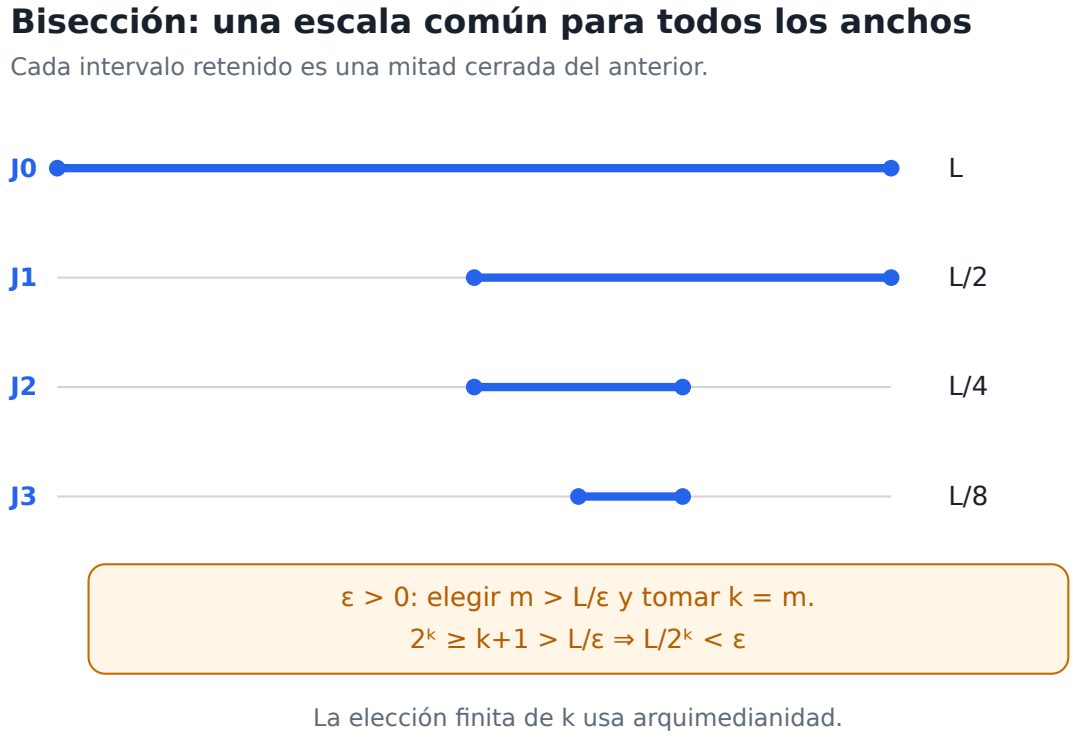


Figura 3.7. Dada una tolerancia positiva, arquimedianidad permite elegir un número finito de bisecciones con L/2^k menor que epsilon, sin lenguaje de límites.

La elección del índice usa arquimedianidad, derivada de completitud en §3.4; la existencia del punto común usa el teorema de intervalos cerrados encajados; la unicidad usa la contradicción métrica anterior. Las tres tareas se encuentran en la misma construcción, pero tienen justificaciones distintas. La conclusión es $\bigcap_{k=0}^{\infty} J_k = \{x\}$ para un único real x, sin necesidad de introducir todavía convergencia de sucesiones.

En una familia cerrada encajada, la descripción de §3.5 permite otra lectura. Si los anchos se estrechan arbitrariamente, $0 \leq t - s \leq b_n - a_n$ fuerza $s = t$. Recíprocamente, si $s = t$ y $\varepsilon > 0$, las caracterizaciones de C02 proporcionan índices m, n con $a_m > s - \varepsilon/2$ y $b_n < s + \varepsilon/2$. Para $r = \max\{m, n\}$, el encajamiento da $a_r \geq a_m$ y $b_r \leq b_n$, de modo que $b_r - a_r < \varepsilon$. Así, bajo estas hipótesis, el estrechamiento, la igualdad de barreras y la intersección puntual se reconocen mutuamente. La solución 31 desarrolla las tres equivalencias y su figura mantiene visibles las hipótesis de la familia.

Ejercicios de la sección 3.6.

Ejercicio 26. El estrechamiento controla la cardinalidad sin usar encajamiento

Sea $I_n = [a_n, b_n], \quad n \in \mathbb{N}_{>0}$, una familia de intervalos no vacíos. No supongas que está encajada. Supón únicamente que $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N}_{>0} : \quad b_n - a_n < \varepsilon$. Demuestra que $\left|\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n\right| \leq 1$. La prueba debe:

1. comenzar suponiendo que existen dos puntos distintos $x, y \in \bigcap_n I_n$;
2. definir $\delta = |x - y| > 0$;
3. usar la hipótesis de estrechamiento con $\varepsilon = \delta$;
4. demostrar directamente que, si $x, y \in [a_n, b_n]$, entonces $|x - y| \leq b_n - a_n$;
5. obtener la contradicción $\delta \leq b_n - a_n < \delta$.

Al final, identifica cuáles de las hipótesis habituales de §3.5 —cierre, encajamiento y completitud— no son necesarias para esta afirmación de **a lo sumo un punto**.

Solución. Supongamos que existen dos puntos distintos $x, y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Como $x \neq y$, $\delta = |x - y| > 0$. La hipótesis de estrechamiento puede aplicarse con la tolerancia positiva $\varepsilon = \delta$. Existe entonces un índice n tal que $b_n - a_n < \delta$. Como x, y pertenecen a la intersección, ambos pertenecen en particular a $I_n = [a_n, b_n]$. Por tanto, $a_n \leq x \leq b_n, \qquad a_n \leq y \leq b_n$.

Si $x \leq y$, entonces $0 \leq y - x \leq b_n - a_n$, y como en este caso $|x-y| = y-x$, $|x-y| \leq b_n - a_n$. Si $y \leq x$, el mismo argumento con los nombres intercambiados da $|x - y| = x - y \leq b_n - a_n$. En ambos casos, $\delta = |x-y| \leq b_n - a_n$. Junto con la elección de n obtenemos $\delta \leq b_n - a_n < \delta$, contradicción.

Así no pueden existir dos puntos distintos en la intersección:

$$\boxed{\left|\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n\right| \leq 1.}$$

Es importante notar qué **no** se usó. No usamos que la familia estuviera encajada. Tampoco usamos completitud ni el principio del supremo. El argumento sólo necesita que los dos candidatos hipotéticos pertenezcan simultáneamente a cada intervalo y que exista algún intervalo más estrecho que su distancia. El cierre tampoco participa en la contradicción de unicidad en sí misma: incluso para intervalos abiertos o semiabiertos, si dos puntos pertenecen a un mismo intervalo de extremos $a_n < b_n$, su distancia no puede superar $b_n - a_n$. El cierre es crucial en §3.5 para la **garantía de existencia**, no para esta afirmación de cardinalidad máxima.

Es una prueba puramente métrica y de orden.

Ejercicio 27. Desmontar el teorema del singleton en piezas lógicas

Sean $I_n = [a_n, b_n] \neq \emptyset$ intervalos cerrados encajados que satisfacen $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n : \quad b_n - a_n < \varepsilon$. Reconstruye la afirmación $\bigcap_n I_n = \{x\}$ como una cadena de dependencias y clasifica cada paso en una de estas categorías:

- **completitud directa**;
- **consecuencia ya demostrada de completitud**;
- **orden / distancia / teoría elemental de conjuntos**;
- **hipótesis adicional de estrechamiento**.

Tu auditoría debe separar explícitamente:

1. la existencia de algún punto común mediante §3.5;
2. el paso de §3.5 donde se produce $x = \sup\{a_n : n \geq 1\}$;
3. la prueba de que dos puntos distintos no pueden sobrevivir al estrechamiento;
4. la inferencia

$$\text{al menos uno} + \text{a lo sumo uno} \Longrightarrow \text{exactamente uno};$$

5. el caso especial en que el estrechamiento se obtiene por bisección y se usa la propiedad arquimediana para elegir un número finito de refinamientos.

Dibuja al final, en texto matemático, dos rutas de dependencia: una para **existencia** y otra para **unicidad**, y explica por qué no deben fusionarse en una sola apelación vaga a "completitud".

Solución. La conclusión $\bigcap_n I_n = \{x\}$ combina dos afirmaciones diferentes: $\bigcap_n I_n \neq \emptyset$ y $\left|\bigcap_n I_n\right| \leq 1$.

Ruta de existencia

Como los intervalos son cerrados, no vacíos y encajados, §3.5 forma $A = \{a_n : n \geq 1\}$. El encajamiento produce la compatibilidad cruzada $a_m \leq b_n$ para todos m, n, de modo que A es no vacío y está acotado superiormente.

Entonces aparece el único paso **directo** de completitud de esta ruta:

$$\boxed{A \neq \emptyset,\ A \text{ acotado superiormente} \Longrightarrow_{\text{SUP}} \exists x = \sup A.}$$

Después, $a_n \leq x \leq b_n$ se deduce de que x es cota superior de A y de que es la menor de esas cotas. El cierre permite transformar esas desigualdades en $x \in [a_n, b_n]$. Por tanto, $x \in \bigcap_n I_n$.

Clasificación:

- compatibilidad cruzada: orden e inclusión;
- no vaciedad y acotación de A: teoría elemental de conjuntos y orden;
- existencia de $x = \sup A$: **completitud directa**;
- $a_n \leq x \leq b_n$: propiedades del supremo ya existente;
- $x \in I_n$: definición de intervalo cerrado.

Ruta de unicidad

Supongamos que $x, y \in \bigcap_n I_n$ y que $x \neq y$. Entonces $\delta = |x - y| > 0$. La **hipótesis adicional de estrechamiento** produce un índice n con $b_n - a_n < \delta$. Pero la pertenencia simultánea de x e y a I_n da $\delta = |x - y| \leq b_n - a_n$, contradicción. Esta ruta usa sólo:

- distancia;
- orden;
- pertenencia a intervalos;
- la hipótesis cuantificada de estrechamiento.

No hay una nueva aplicación de completitud.

Combinar las rutas

La primera ruta da $\left|\bigcap_n I_n\right| \geq 1$. La segunda da $\left|\bigcap_n I_n\right| \leq 1$. Por tanto,

$$\boxed{\left|\bigcap_n I_n\right| = 1.}$$

Si el estrechamiento proviene de bisección

En una bisección, $\text{anch}(J_k) = \frac{L}{2^k}$. Para una tolerancia dada $\varepsilon > 0$, la propiedad arquimediana permite escoger un natural $m > L/\varepsilon$. Junto con $2^m \geq m + 1 > m$ obtenemos $2^m > \frac{L}{\varepsilon}$, y por tanto $\frac{L}{2^m} < \varepsilon$. Aquí la propiedad arquimediana es una **consecuencia ya demostrada de completitud** en §3.4. Por eso la bisección tiene una dependencia indirecta adicional:

$$\text{completitud} \Longrightarrow \text{arquimedianidad} \Longrightarrow \text{estrechamiento de bisección}.$$

Las dos rutas básicas quedan así:

$$\boxed{\text{completitud} \Longrightarrow \text{existencia en intervalos cerrados encajados},}$$

y

$$\boxed{\text{estrechamiento arbitrario} \Longrightarrow \text{unicidad.}}$$

Fusionarlas en la frase "por completitud queda un único punto" borra una diferencia lógica importante: completitud produce aquí el **objeto existente**; el estrechamiento elimina la posibilidad de que haya dos objetos distintos.

Ejercicio 28. «Se hace cada vez más pequeño» no es todavía una prueba

Un estudiante parte de un intervalo de ancho $L > 0$, lo biseca repetidamente y escribe:

> Después de k bisecciones el ancho es $L/2^k$. Como cada vez es más pequeño, para cualquier $\varepsilon > 0$ llegará un momento en que $L/2^k < \varepsilon$. Por tanto la intersección contiene exactamente un punto.

Diagnostica el argumento.

1. Explica por qué la frase «cada vez es más pequeño» no demuestra por sí sola la afirmación cuantificada $\forall \varepsilon > 0\ \exists k : \quad \frac{L}{2^k} < \varepsilon$.
2. Repara ese paso sin usar límites: parte de la propiedad arquimediana y de $2^r \geq r + 1 \qquad (r \geq 1)$ para producir explícitamente un k finito adecuado.
3. Identifica un segundo salto lógico en la frase «por tanto la intersección contiene exactamente un punto»: ¿qué argumento adicional garantiza **existencia**?
4. Separa finalmente qué parte usa arquimedianidad, qué parte hereda completitud de §3.5 y qué parte es la prueba elemental de unicidad.

No escribas $\lim_{k\to\infty} L/2^k$ ni cites resultados sobre sucesiones.

Solución. La frase "cada vez es más pequeño" sólo afirma, en el mejor de los casos, que $\frac{L}{2^{k+1}} < \frac{L}{2^k}$. Eso es una comparación entre etapas consecutivas. La afirmación que necesitamos es mucho más fuerte: $\forall \varepsilon > 0\ \exists k : \quad \frac{L}{2^k} < \varepsilon$. La primera proposición no contiene por sí sola la cuantificación sobre **toda** tolerancia positiva.

Reparemos el argumento sin límites.

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\frac{L}{\varepsilon} > 0$, la propiedad arquimediana proporciona $m \in \mathbb{N}_{>0}$ tal que $m > \frac{L}{\varepsilon}$. Por inducción elemental sabemos que $2^r \geq r + 1 \qquad (r \geq 1)$. Tomando $k = m$, $2^k = 2^m \geq m+1 > m > \frac{L}{\varepsilon}$. Todos los términos son positivos, así que $\frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{L}$, y multiplicando por $L > 0$,

$$\boxed{\frac{L}{2^k} < \varepsilon.}$$

Éste es un argumento **finito**: dada la tolerancia, produce un índice concreto cuya existencia está justificada por arquimedianidad. Queda un segundo problema en el razonamiento del estudiante. Del estrechamiento sólo se deduce que la intersección contiene **a lo sumo un punto**. Para afirmar que contiene exactamente uno necesitamos antes una garantía de existencia. En la construcción por bisección, los intervalos retenidos son:

- cerrados;
- no vacíos;
- encajados.

Por §3.5, $\bigcap_k J_k \neq \emptyset$. Esa existencia hereda el uso directo de completitud presente en la prueba de §3.5.

Una vez existe algún punto común, el estrechamiento demostrado arriba da unicidad: $\left|\bigcap_k J_k\right| \leq 1$. Combinando ambas afirmaciones,

$$\boxed{\left|\bigcap_k J_k\right| = 1.}$$

La trazabilidad correcta es:

- **arquimedianidad:** produce un número finito de refinamientos suficiente para una tolerancia dada;
- **completitud vía §3.5:** garantiza que la intersección cerrada y encajada no es vacía;
- **orden y distancia:** prueban que el estrechamiento impide dos puntos distintos.

No se necesita ninguna afirmación sobre convergencia.

Ejercicio 29. Estrechamiento arbitrario sin punto común

Considera la familia semiabierta $J_k = \left(0, \frac{1}{2^k}\right], \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$. Demuestra que:

1. cada J_k es no vacío;
2. la familia está encajada: $J_{k+1} \subseteq J_k$;
3. para toda $\varepsilon > 0$ existe un k finito tal que $\frac{1}{2^k} < \varepsilon$;
4. sin embargo, $\bigcap_{k=0}^{\infty} J_k = \emptyset$.

En los apartados 3 y 4 no uses lenguaje de límites. Puedes usar la propiedad arquimediana y la desigualdad elemental $2^r \geq r + 1$.

Concluye con precisión qué demuestra este ejemplo acerca de la afirmación

$$\text{estrechamiento arbitrario} \Longrightarrow \text{existencia de un punto común.}$$

Solución. Consideremos $J_k = \left(0, \frac{1}{2^k}\right]$. Cada intervalo es no vacío porque, por ejemplo, $\frac{1}{2^{k+1}} \in J_k$: en efecto, $0 < \frac{1}{2^{k+1}} < \frac{1}{2^k}$.

Además, $\frac{1}{2^{k+1}} < \frac{1}{2^k}$, de modo que $0 < x \leq \frac{1}{2^{k+1}} \Longrightarrow 0 < x \leq \frac{1}{2^k}$. Por tanto,

$$\boxed{J_{k+1} \subseteq J_k.}$$

Ahora sea $\varepsilon > 0$. Por arquimedianidad existe $m \in \mathbb{N}_{>0}$ tal que $m > \frac{1}{\varepsilon}$. Como $2^m \geq m+1 > m > \frac{1}{\varepsilon}$, al invertir obtenemos

$$\boxed{\frac{1}{2^m} < \varepsilon.}$$

Así la familia posee estrechamiento arbitrario.

Falta estudiar la intersección. Supongamos que $x \in \bigcap_{k=0}^{\infty} J_k$. Entonces, por pertenecer a todos los J_k, $x > 0$. Aplicamos el argumento anterior con $\varepsilon = x$. Existe k tal que $\frac{1}{2^k} < x$. Pero pertenecer a J_k exigiría $x \leq \frac{1}{2^k}$, contradicción.

Luego

$$\boxed{\bigcap_{k=0}^{\infty} J_k = \emptyset.}$$

La familia es no vacía etapa por etapa, está encajada y puede hacerse arbitrariamente estrecha, pero excluye el punto fronterizo que sería necesario para conservar una intersección.

Por tanto es falsa la implicación universal

$$\text{estrechamiento arbitrario} \Longrightarrow \text{existencia de punto común.}$$

El estrechamiento controla **cuántos** puntos pueden sobrevivir, no garantiza que sobreviva alguno.

Ejercicio 30. Refinar en p partes en vez de bisecar

Sea $p \in \mathbb{N}, \qquad p \geq 2$, y sea

$$J_0 = [a, b], \qquad a < b, \qquad L = b - a.$$

En cada etapa divide el intervalo retenido en p subintervalos cerrados de igual ancho y conserva uno de ellos. Así se obtiene una cadena $J_0 \supseteq J_1 \supseteq J_2 \supseteq \cdots$. Demuestra que:

1. después de k refinamientos, $\text{anch}(J_k) = \frac{L}{p^k}$;
2. para todo $r \geq 1$, $p^r \geq 2^r \geq r + 1$;

3. dado $\varepsilon > 0$, la propiedad arquimediana permite elegir un k finito con $\frac{L}{p^k} < \varepsilon$;
4. la familia satisface las hipótesis de existencia de §3.5 y la hipótesis de unicidad de §3.6;
5. por tanto existe un único $x \in \mathbb{R}$ tal que $\bigcap_{k=0}^{\infty} J_k = \{x\}$.

Explica qué parte del argumento cambia respecto de la bisección y qué parte permanece idéntica. No uses teoría de convergencia.

Solución. Partimos de $J_0 = [a, b]$, $L = b - a > 0$. En cada paso el intervalo retenido se divide en p partes de igual ancho y se conserva una de ellas. Por tanto, cada refinamiento divide el ancho por p. Demostremos por inducción que $\operatorname{anch}(J_k) = \frac{L}{p^k}$. Para $k = 0$, $\operatorname{anch}(J_0) = L = \frac{L}{p^0}$. Si $\operatorname{anch}(J_k) = \frac{L}{p^k}$, cada uno de los p subintervalos tiene ancho $\frac{1}{p}\frac{L}{p^k} = \frac{L}{p^{k+1}}$. Así la fórmula vale para todo k.

Como $p \geq 2$, $p^r \geq 2^r$ para todo $r \geq 1$. Además, por la inducción ya usada en §3.6, $2^r \geq r + 1$. Luego

$$\boxed{p^r \geq 2^r \geq r + 1.}$$

Sea ahora $\varepsilon > 0$. La propiedad arquimediana da un natural positivo m con $m > \frac{L}{\varepsilon}$. Tomemos $k = m$. Entonces $p^k \geq 2^k \geq k + 1 > k = m > \frac{L}{\varepsilon}$. Al invertir y multiplicar por $L > 0$,

$$\boxed{\frac{L}{p^k} < \varepsilon.}$$

Por tanto la familia se estrecha por debajo de cualquier tolerancia positiva.

Además, en cada etapa el intervalo retenido es uno de los subintervalos cerrados de J_k. Por construcción:

- J_k es cerrado;
- $J_k \neq \emptyset$;
- $J_{k+1} \subseteq J_k$.

El teorema de §3.5 garantiza $\bigcap_{k=0}^{\infty} J_k \neq \emptyset$. El estrechamiento demostrado arriba garantiza $\left|\bigcap_{k=0}^{\infty} J_k\right| \leq 1$. En consecuencia existe un único real x con

$$\boxed{\bigcap_{k=0}^{\infty} J_k = \{x\}.}$$

Respecto de la bisección sólo cambia la razón de reducción del ancho:

$$\frac{1}{2} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{p}.$$

Permanece idéntica la arquitectura lógica:

$$\text{familia cerrada y encajada} \Longrightarrow_{\S 3.5} \text{existencia},$$

y

$$\text{ancho arbitrariamente pequeño} \Longrightarrow \text{unicidad}.$$

Ejercicio 31. Tres formas de reconocer que el núcleo es un solo punto

Sea $I_n = [a_n, b_n] \neq \emptyset$ una familia numerable de intervalos cerrados encajados. Define $A = \{a_n : n \geq 1\}$, $B = \{b_n : n \geq 1\}$, y, usando §3.5, $s = \sup A$, $t = \inf B$. Demuestra la equivalencia entre las siguientes afirmaciones:

1. **estrechamiento arbitrario** $\forall \varepsilon > 0\ \exists n : \quad b_n - a_n < \varepsilon$;
2. **coincidencia de las barreras** $s = t$;

3. **intersección puntual**

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \text{ contiene exactamente un punto.}$$

Para probar $1 \Rightarrow 2$, no uses convergencia: demuestra que $0 \le t - s \le b_n - a_n$ para todo n y aplica el estrechamiento a la tolerancia $t - s$ si fuera positiva. Para probar $2 \Rightarrow 1$, usa las caracterizaciones ε del supremo y del ínfimo de C02: para una tolerancia dada, encuentra índices m, n que acerquen a_m a s y b_n a t, y usa el encajamiento con un índice posterior común.

Para relacionar 2 y 3, puedes usar el resultado de §3.5 $\bigcap_n I_n = [s, t]$. Cierra el ejercicio indicando exactamente dónde se requiere completitud para disponer de s y t, y por qué las equivalencias posteriores no constituyen nuevas aplicaciones del principio del supremo.

Solución. Por §3.5, para la familia cerrada, no vacía y encajada existen $s = \sup A, \quad t = \inf B$, y además

$$\boxed{\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [s, t].}$$

En particular, $s \le t$.

Demostraremos $1 \iff 2 \iff 3$.

$1 \Rightarrow 2$: estrechamiento implica coincidencia de barreras

Para cada n, $a_n \le s \le t \le b_n$. La primera desigualdad usa que s es cota superior de A; la última, que t es cota inferior de B. Restando, $0 \le t - s \le b_n - a_n$ para todo n.

Supongamos que $t - s > 0$. Podemos usar la hipótesis de estrechamiento con $\varepsilon = t - s$. Existe entonces n tal que $b_n - a_n < t - s$. Pero ya sabemos que $t - s \le b_n - a_n$. Contradicción. Por tanto,

$$\boxed{s = t.}$$

$2 \Rightarrow 1$: coincidencia de barreras implica estrechamiento

Supongamos ahora $s = t$ y sea $\varepsilon > 0$. Por la caracterización ε del supremo de C02, existe un índice m tal que $s - \frac{\varepsilon}{2} < a_m \le s$. Por la caracterización ε del ínfimo, existe un índice n tal que $t \le b_n < t + \frac{\varepsilon}{2}$. Como $s = t$, obtenemos $a_m > s - \frac{\varepsilon}{2}, \quad b_n < s + \frac{\varepsilon}{2}$.

Tomemos $r = \max\{m, n\}$. El encajamiento implica que los extremos izquierdos no retroceden y los derechos no avanzan: $a_m \le a_r, \quad b_r \le b_n$. Por tanto, $a_r > s - \frac{\varepsilon}{2}$ y $b_r < s + \frac{\varepsilon}{2}$. Restando,

$$b_r - a_r < \left(s + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(s - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon.$$

Así,

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \; \exists r : \quad b_r - a_r < \varepsilon.}$$

No hemos usado convergencia: sólo las caracterizaciones ε del supremo e ínfimo y el encajamiento.

$2 \iff 3$: barreras coincidentes e intersección puntual

Como $\bigcap_n I_n = [s, t]$, si $s = t$ entonces $\bigcap_n I_n = [s, s] = \{s\}$, de modo que la intersección contiene exactamente un punto.

Recíprocamente, si la intersección contiene exactamente un punto, el intervalo $[s, t]$ contiene exactamente un punto. Como $s \le t$, esto sólo puede ocurrir si $s = t$.

Concluimos la equivalencia completa:

$$\boxed{\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0 \; \exists n : \; b_n - a_n < \varepsilon \\ &\qquad \iff \quad \sup_n a_n = \inf_n b_n \\ &\qquad \iff \quad \bigcap_n [a_n, b_n] \text{ es un singleton.} \end{aligned}}$$

La trazabilidad es importante. La completitud se usa para garantizar que existen

$$s = \sup A \qquad \text{y} \qquad t = \inf B$$

bajo las hipótesis correspondientes. Una vez disponibles esas barreras, las implicaciones anteriores usan únicamente:

- orden;
- encajamiento;
- caracterizaciones ε ya demostradas;
- teoría elemental de intervalos.

Por tanto, las equivalencias posteriores no son nuevas aplicaciones del principio del supremo. La figura C03-F11 comprime estas tres descripciones equivalentes y mantiene fuera del triángulo el único antecedente estructural: la existencia previa de s y t.

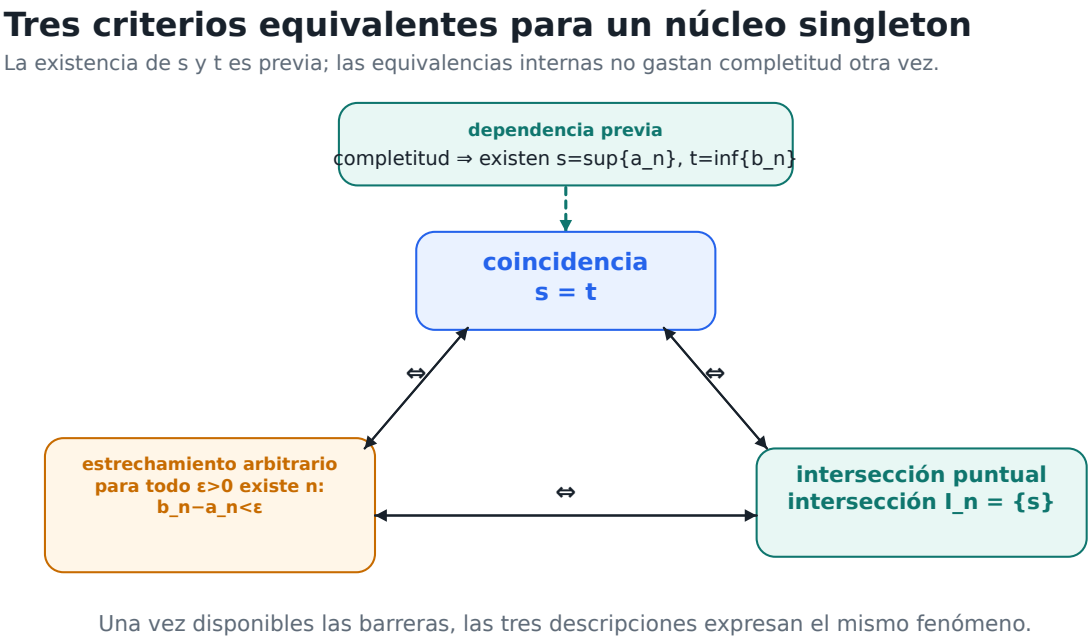


Figura 3.8. Una vez existentes s y t, estrechamiento arbitrario, s=t e intersección puntual son tres descripciones equivalentes.

3.7. Tres lenguajes para una recta sin huecos

La prueba de intervalos encajados construyó un punto entre todos los extremos izquierdos y todos los derechos. Ese mecanismo puede estudiarse directamente con dos conjuntos. La **propiedad de separación**, que abreviaremos **SEP**, afirma que si $A, B \subseteq \mathbb{R}$ son no vacíos y $a \leq b$ para todo $a \in A$, $b \in B$, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq c \leq b$ para todo ese par de elementos. No se exige una distancia positiva entre los conjuntos ni que el separador quede fuera de ellos. Puede incluso pertenecer a ambos.

Para obtener SEP a partir de SUP, usamos que algún $b_0 \in B$ es cota superior de A. Como A es no vacío, por completitud existe $s = \sup A$. La condición de cota da $a \leq s$ para todo $a \in A$, y cada $b \in B$ es otra cota superior, así que la minimalidad da $s \leq b$. El propio s separa las dos clases.

La conversa revela por qué la separación tiene tanta fuerza. Sea A no vacío y acotado superiormente. Las clases A y $U(A)$ son no vacías y satisfacen $a \leq u$ para todo $a \in A$ y $u \in U(A)$. Si SEP produce c entre ambas, la desigualdad $a \leq c$ para todos los elementos hace de c una cota superior, mientras que $c \leq u$ para todas las cotas asegura su minimalidad. Por tanto, $c = \sup A$ y

SUP $\iff$ SEP.

Familias generales de intervalos cerrados. Consideremos una familia $([a_i, b_i])_{i\in I}$, con $I \neq \emptyset$, que satisface la **condición cruzada** $a_i \leq b_j$ para todos $i, j \in I$. Al tomar índices iguales se obtiene $a_i \leq b_i$, de modo que cada intervalo es no vacío. El **principio general de intersección de intervalos cerrados**, abreviado **GCI**, afirma que bajo esa condición hay un real c que pertenece a todos los intervalos:

$\bigcap_{i\in I}[a_i, b_i] \neq \emptyset$. El conjunto de índices puede ser arbitrario; no suponemos numerabilidad ni encajamiento. Para deducir GCI de SEP, formamos $A_L = \{a_i : i \in I\}$ y $A_R = \{b_i : i \in I\}$. Son no vacíos y la condición cruzada dice que cada elemento de A_L es menor o igual que cada elemento de A_R. SEP produce c con $a_i \leq c \leq b_j$ para todos los índices; tomando $j = i$, ese mismo c pertenece a cada intervalo.

Para deducir SEP de GCI, partimos de dos clases no vacías A, B con $a \leq b$ para todo par. Tomamos la familia de intervalos $[a, b]$ indexada por $A \times B$. Si (a, b) y (a', b') son índices cualesquiera, la hipótesis da $a \leq b'$, que es la condición cruzada requerida. GCI proporciona un punto c común a todos. Fijando $b_0 \in B$ y dejando variar a, obtenemos $a \leq c$ para todo $a \in A$; fijando $a_0 \in A$ y dejando variar b, obtenemos $c \leq b$ para todo $b \in B$. La no vaciedad de ambas clases permite esas elecciones y completa la prueba de separación.

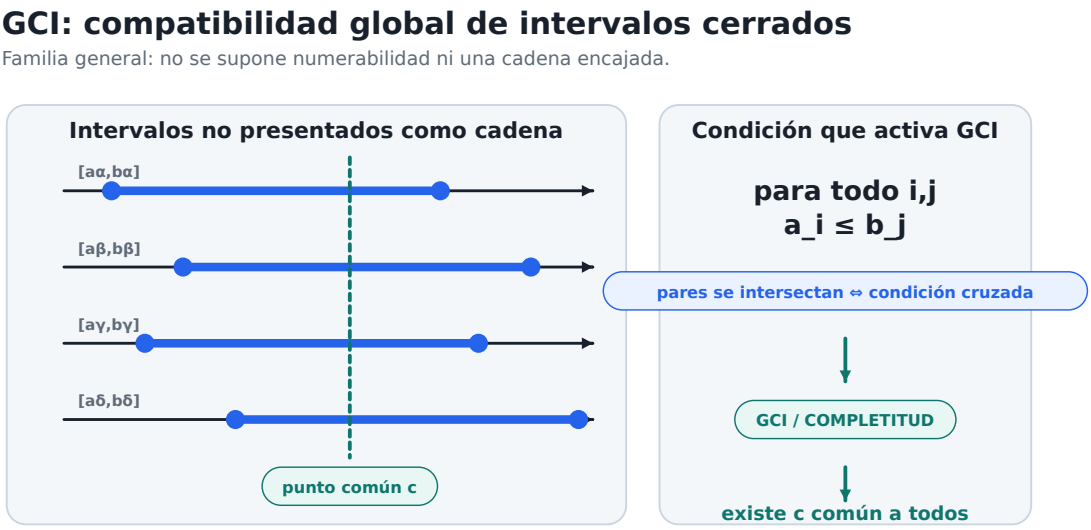


Figura 3.9. La condición cruzada de una familia general de intervalos cerrados permite, mediante GCI, obtener un punto común; en la recta equivale a intersección por pares.

La condición cruzada equivale, para estos intervalos en una recta ordenada, a que se intersecten por pares. Si un punto x pertenece a $[a_i, b_i]\cap[a_j, b_j]$, entonces $a_i \leq x \leq b_j$ y $a_i \leq b_j$. En sentido inverso, supongamos la condición cruzada y fijemos i, j. El punto $l = \max\{a_i, a_j\}$ es mayor o igual que ambos extremos izquierdos y menor o igual que ambos derechos, pues cada extremo izquierdo está por debajo de cada extremo derecho. Así l pertenece a los dos intervalos. Esta equivalencia usa sólo el orden y la definición de intervalo; el paso de intersecciones por pares a un punto común a **toda** la familia es el que requiere GCI.

Combinando las demostraciones con la reflexión de §3.3 obtenemos SUP $\iff$ INF $\iff$ SEP $\iff$ GCI. Podemos expresar la misma completitud mediante una barrera extremal, un separador o un punto común. Las equivalencias convierten los objetos que cada formulación produce; por eso no necesitamos acumular cuatro principios independientes.

Recuperar una barrera desde intervalos. La familia $\{[a,u] : (a,u) \in A \times U(A)\}$ permite ver directamente cómo GCI recupera SUP. Si A es no vacío y acotado superiormente, también lo es el conjunto de índices $A \times U(A)$. Para dos índices (a,u) y (a',u'), tenemos $a \leq u'$ porque u' domina a todo A. Un punto común c satisface $a \leq c \leq u$ para cada par: es cota superior de A y menor o igual que todas sus cotas superiores, luego es su supremo. En sentido inverso, cualquier supremo de A pertenece a todos esos intervalos. La barrera, el separador y el punto común son aquí el mismo número.

También podemos obtener GCI directamente de SUP: los extremos izquierdos forman un conjunto no vacío acotado superiormente por cada extremo derecho. Su supremo queda por encima de todos los primeros y por debajo de todos los segundos. La prueba de §3.5 es la misma construcción aplicada a una familia cuya condición cruzada proviene del encajamiento.

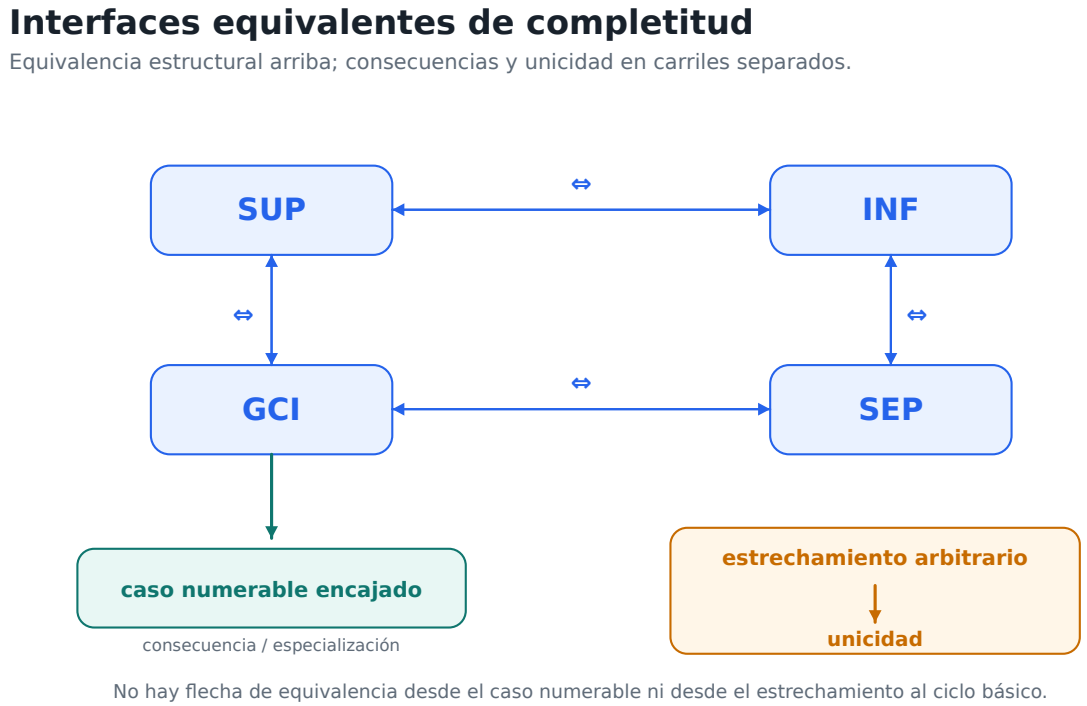


Figura 3.10. SUP, INF, SEP y GCI forman un ciclo de equivalencias; el caso numerable encajado es una consecuencia y el estrechamiento pertenece a la capa de unicidad.

El teorema numerable encajado queda así como una especialización de GCI. La dirección demostrada es GCI $\Rightarrow$ NESTED_INTERVALS$_{\mathbb{N}}$. No invertimos esa flecha sin demostrar la conversa y precisar las hipótesis del sistema ordenado en que se formula. En particular, una frase informal sobre «intervalos encajados» no permite identificar versiones distintas del principio. La condición de estrechamiento añade otra conclusión: garantiza unicidad una vez asegurada existencia y no es una hipótesis de GCI.

El fallo racional de §3.1 se expresa en los tres lenguajes. Tomemos $A = S_2$ y $B = U_{\mathbb{Q}}(S_2)$. Ambas clases son no vacías y todo elemento de A es menor o igual que todo elemento de B. Si hubiera un separador racional c, sería cota superior racional y quedaría por debajo de todas las demás: sería el supremo racional inexistente. Tampoco puede haber un punto racional común a todos los intervalos $[a,b]_{\mathbb{Q}} = \{q \in \mathbb{Q} : a \leq q \leq b\}$, indexados por $A \times B$, porque ese punto sería un separador. Los intervalos satisfacen la condición cruzada y se intersectan por pares; lo que falla dentro de $\mathbb{Q}$ es la intersección global. La densidad no resuelve esa exigencia simultánea.

Ejercicios de la sección 3.7.

Ejercicio 32. El mismo objeto en tres lenguajes

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente, y sea $U(A) = \{u \in \mathbb{R} : \forall a \in A,\ a \leq u\}$. Traduce la búsqueda de $\sup A$ a los otros dos lenguajes equivalentes de §3.7.

1. En lenguaje **SUP**, escribe las dos propiedades que debe satisfacer un número s para ser $\sup A$.
2. En lenguaje **SEP**, considera las clases A y $U(A)$. Demuestra que un número c las separa, $a \leq c \leq u \qquad \forall a \in A,\ \forall u \in U(A)$, si y sólo si $c = \sup A$.
3. En lenguaje **GCI**, considera la familia $\mathcal{J}_A = \{[a, u] : (a, u) \in A \times U(A)\}$. Verifica su condición cruzada y demuestra que un punto común c a todos los intervalos de $\mathcal{J}_A$ existe exactamente cuando existe un separador entre A y $U(A)$.
4. Concluye que, para este conjunto A, los tres vocabularios no producen tres objetos distintos: cualquier testigo válido debe ser el mismo real.

Indica qué parte del argumento es una mera **traducción lógica** y qué parte necesita una hipótesis estructural de existencia si todavía no sabemos que el objeto existe.

Solución. Partimos de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}, \qquad A \neq \emptyset$, acotado superiormente. Por tanto, $U(A) \neq \emptyset$. La traducción debe conservar exactamente las dos propiedades que caracterizan a la menor cota superior.

Lenguaje SUP

Un número s es el supremo de A si y sólo si satisface simultáneamente:

1. **condición de cota superior** $a \leq s \qquad \forall a \in A$;
2. **minimalidad entre las cotas superiores** $s \leq u \qquad \forall u \in U(A)$.

Juntas,

$$\boxed{\forall a \in A\ \forall u \in U(A) : \quad a \leq s \leq u.}$$

Lenguaje SEP

Un separador c entre A y $U(A)$ satisface, por definición,

$$a \leq c \leq u \qquad \forall a \in A,\ \forall u \in U(A).$$

La desigualdad izquierda dice que c es cota superior de A: $c \in U(A)$. La desigualdad derecha dice que c queda por debajo de **toda** cota superior de A. Por tanto, c es la menor cota superior:

$$\boxed{c = \sup A.}$$

Recíprocamente, si $s = \sup A$, entonces por las dos propiedades definitorias anteriores $a \leq s \leq u \qquad \forall a \in A,\ \forall u \in U(A)$, de modo que s separa A y $U(A)$. Así,

$$\boxed{c \text{ separa } A \text{ y } U(A) \iff c = \sup A.}$$

Lenguaje GCI

Consideremos $\mathcal{J}_A = \{[a, u] : (a, u) \in A \times U(A)\}$. Como $A \neq \emptyset$ y $U(A) \neq \emptyset$, $A \times U(A) \neq \emptyset$. Verifiquemos la condición cruzada. Tomemos dos índices cualesquiera $(a, u),\ (a', u') \in A \times U(A)$. Como u' es cota superior de A y $a \in A$, $a \leq u'$. Ésta es precisamente la condición cruzada entre el extremo izquierdo del primer intervalo y el extremo derecho del segundo.

Ahora sea c un punto común a toda la familia. Entonces $c \in [a, u] \qquad \forall (a, u) \in A \times U(A)$. Esto significa $a \leq c \leq u \qquad \forall a \in A,\ \forall u \in U(A)$, porque, para fijar un a cualquiera, podemos combinarlo con alguna cota superior $u_0 \in U(A)$, y para fijar un u cualquiera podemos combinarlo con algún $a_0 \in A$.

Por tanto, un punto común de $\mathcal{I}_A$ es exactamente un separador entre A y $U(A)$.

Recíprocamente, si c separa A y $U(A)$, entonces para todo par (a,u) tenemos $a \le c \le u$, y por tanto $c \in [a,u]$. Así,

$$\boxed{c \in \bigcap_{(a,u)\in A\times U(A)} [a,u] \iff c \text{ separa } A \text{ y } U(A).}$$

Combinando las traducciones,

$$\boxed{\begin{aligned} c = \sup A &\iff c \text{ separa } A \text{ y } U(A) \\ &\iff c \in \bigcap_{(a,u)\in A\times U(A)} [a,u]. \end{aligned}}$$

No aparecen tres objetos distintos. Aparecen tres descripciones del mismo testigo. La **traducción** entre las descripciones usa sólo definiciones, cuantificadores y orden. Otra cuestión es la **existencia** del testigo. Si no sabemos todavía que existe, necesitamos alguna formulación estructural de completitud —SUP, SEP o GCI— para producirlo.

Ejercicio 33. De SUP a GCI sin pasar por SEP

Supón válido el principio del supremo **SUP**. Sea $([a_i,b_i])_{i\in I}$ una familia no vacía de intervalos cerrados que satisface la condición cruzada $a_i \le b_j \quad \forall i,j \in I$. Demuestra **directamente**, sin invocar SEP como lema intermedio, que $\bigcap_{i\in I}[a_i,b_i] \neq \emptyset$. Tu prueba debe:

1. definir $L = \{a_i : i \in I\}$;
2. justificar que $L \neq \emptyset$;
3. demostrar que cualquier extremo derecho b_j es una cota superior de L;
4. localizar el único `Paso de completitud` al producir $s = \sup L$;
5. demostrar para cada $i \in I$ que $a_i \le s \le b_i$;
6. concluir que s pertenece a todos los intervalos.

Cierra comparando esta ruta directa con la ruta `SUP` ⇒ `SEP` ⇒ `GCI`: ¿qué parte matemática es la misma aunque cambie el vocabulario intermedio?

Solución. Sea $([a_i,b_i])_{i\in I}$ una familia no vacía que satisface $a_i \le b_j \quad \forall i,j \in I$. Definamos el conjunto de extremos izquierdos $L = \{a_i : i \in I\}$.

No vaciedad de L

Como la familia es no vacía, $I \neq \emptyset$. Elegimos algún índice $i_0 \in I$. Entonces $a_{i_0} \in L$, de modo que $L \neq \emptyset$.

Acotación superior de L

Fijemos cualquier índice $j \in I$. La condición cruzada afirma que $a_i \le b_j \quad \forall i \in I$. Por definición, eso significa que b_j es una cota superior de L. Como al menos existe un índice j, hemos demostrado que L está acotado superiormente.

> **Único Paso de completitud.** Como L es no vacío y está acotado superiormente, SUP garantiza que existe
> $s = \sup L$.

A partir de aquí usamos sólo las propiedades definitorias del supremo ya existente.

El punto s pertenece a todos los intervalos

Fijemos $i \in I$. Como $a_i \in L$ y s es cota superior de L, $a_i \le s$.

Por otra parte, acabamos de demostrar que **cada** b_i es una cota superior de L. Como $s = \sup L$ es la menor cota superior, $s \le b_i$. Por tanto, $a_i \le s \le b_i$, y así $s \in [a_i,b_i]$. Como i era arbitrario,

$$\boxed{s \in \bigcap_{i \in I} [a_i, b_i].}$$

En particular,

$$\boxed{\bigcap_{i \in I} [a_i, b_i] \neq \emptyset.}$$

Hemos probado directamente SUP $\Longrightarrow$ GCI. La ruta `SUP ⇒ SEP ⇒ GCI` y esta ruta directa comparten la misma estructura profunda. En ambas:

1. los extremos izquierdos forman una clase no vacía;
2. los extremos derechos proporcionan cotas superiores;
3. completitud produce una frontera real;
4. la minimalidad de esa frontera la coloca por debajo de todos los extremos derechos.

La ruta con SEP hace visible un vocabulario intermedio; la ruta directa comprime esas dos últimas lecturas en el conjunto L de extremos izquierdos.

Ejercicio 34. «Intervalos encajados» no basta para decir «equivalente»

Un estudiante resume §3.7 así:

> GCI es equivalente a SUP. El teorema de §3.5 también habla de intervalos cerrados y dice que una familia encajada tiene intersección no vacía. Por tanto, el teorema numerable de intervalos encajados de §3.5 es automáticamente equivalente a completitud.

Diagnostica esta conclusión.

1. Escribe con precisión las hipótesis de **GCI**: tipo de familia, conjunto de índices y condición cruzada.
2. Escribe con precisión las hipótesis del teorema numerable encajado de §3.5.
3. Demuestra la dirección que sí está establecida en el capítulo: GCI $\Longrightarrow$ $\text{NESTED_INTERVALS}_{\mathbb{N}}$.
4. Explica por qué esta implicación, por sí sola, no autoriza a invertir la flecha.
5. Señala dos diferencias estructurales que impiden identificar sin prueba ambos enunciados: la generalidad del conjunto de índices y la sustitución de la condición cruzada general por una cadena encajada.
6. Explica por qué la hipótesis de estrechamiento de §3.6 tampoco debe incorporarse al ciclo básico de equivalencias.

La respuesta debe distinguir cuidadosamente **equivalencia demostrada**, **consecuencia** y **especialización**.

Solución. El argumento del estudiante mezcla dos enunciados distintos sólo porque ambos están formulados con intervalos cerrados.

GCI

GCI parte de una familia no vacía $([a_i, b_i])_{i \in I}$ con un conjunto de índices I **arbitrario y no vacío**. No exige que $I = \mathbb{N}$ ni que los intervalos formen una cadena. Su hipótesis estructural es

$$\boxed{a_i \leq b_j \qquad \forall i, j \in I.}$$

Su conclusión es $\bigcap_{i \in I} [a_i, b_i] \neq \emptyset$.

Teorema numerable encajado de §3.5

Allí tenemos una familia $I_n = [a_n, b_n], \qquad n \in \mathbb{N}_{>0}$, con tres rasgos explícitos:

1. cada intervalo es cerrado;
2. cada intervalo es no vacío;
3. existe una cadena de inclusiones $I_{n+1} \subseteq I_n$.

La conclusión es igualmente la no vaciedad de la intersección.

La dirección demostrada

Del encajamiento se deduce la compatibilidad cruzada. En efecto, dados m, n, si $m \geq n$, entonces $I_m \subseteq I_n$, y como $a_m \in I_m \subseteq I_n$, $a_m \leq b_n$. Si $m < n$, entonces $I_n \subseteq I_m$, y como $a_m \leq a_n \leq b_n$, obtenemos otra vez $a_m \leq b_n$. Por tanto, $a_m \leq b_n \qquad \forall m, n$. Así la familia numerable encajada satisface las hipótesis de GCI. En consecuencia,

$$\boxed{\text{GCI} \Longrightarrow \text{NESTED_INTERVALS}_{\mathbb{N}}.}$$

Por qué no podemos invertir automáticamente la flecha

De una implicación $P \Longrightarrow Q$ no se deduce $Q \Longrightarrow P$. Para afirmar equivalencia necesitamos una demostración independiente de la conversa. Aquí, además, el enunciado numerable encajado está restringido en dos sentidos:

- sólo trata una familia indexada por $\mathbb{N}$;
- sólo trata familias organizadas como una cadena por inclusión.

GCI permite un conjunto de índices arbitrario y familias que no tienen por qué estar linealmente organizadas por inclusión; sólo exige compatibilidad cruzada entre todos los extremos izquierdos y derechos. Por eso el caso de §3.5 es una **especialización** del patrón general, no algo que pueda identificarse sin más con él.

El estrechamiento pertenece a otra capa

La condición $\forall \varepsilon > 0\ \exists n : \quad b_n - a_n < \varepsilon$ no se necesita para la existencia de un punto común en §3.5 ni para GCI. Su función en §3.6 es producir **unicidad** una vez que la existencia ya está garantizada. Incorporarla al ciclo SUP $\iff$ INF $\iff$ SEP $\iff$ GCI mezclaría dos cuestiones distintas: existencia estructural y control cuantitativo suficiente para unicidad.

La clasificación correcta es:

SUP, INF, SEP, GCI	:	formulaciones equivalentes;
$\text{NESTED_INTERVALS}_{\mathbb{N}}$	:	especialización/consecuencia de GCI;
estrechamiento	:	hipótesis adicional de unicidad.

Ejercicio 35. El mismo fallo racional en tres idiomas

Trabaja enteramente dentro de $\mathbb{Q}$. Sea $A = S_2 = \{q \in \mathbb{Q} : 0 \leq q,\ q^2 < 2\}$ y sea $B = U_{\mathbb{Q}}(A)$ el conjunto de cotas superiores racionales de A. Sabemos por el ejercicio 3 que A es no vacío, B es no vacío y A no posee supremo en $\mathbb{Q}$.

1. Demuestra que $a \leq b \qquad \forall a \in A,\ \forall b \in B$.
2. Demuestra que un racional c separa A y B si y sólo si $c = \sup_{\mathbb{Q}} A$.
3. Para cada $(a, b) \in A \times B$, define el intervalo racional $[a, b]_{\mathbb{Q}} = \{q \in \mathbb{Q} : a \leq q \leq b\}$. Demuestra que la familia satisface la condición cruzada racional.
4. Demuestra que un racional c pertenece a **todos** esos intervalos si y sólo si separa A y B.
5. Concluye que el mismo defecto puede expresarse como:

   $$\text{fallo de SUP} \iff \text{fallo de SEP} \iff \text{fallo de GCI}$$

   para esta instancia concreta dentro de $\mathbb{Q}$.

No nombres la frontera real ausente ni uses la completitud de $\mathbb{R}$ para resolver el problema.
Solución. Trabajamos únicamente en $\mathbb{Q}$. Definimos $A = S_2$ y $B = U_{\mathbb{Q}}(A)$. Por los ejercicios anteriores, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, pero $\sup_{\mathbb{Q}} A$ no existe.

Condición cruzada entre A y B

Por definición, $b \in B$ significa que b es una cota superior racional de A. Por tanto, $a \leq b \quad \forall a \in A$. Como b era arbitrario,

$$\boxed{a \leq b \qquad \forall a \in A,\ \forall b \in B.}$$

Separador racional y supremo racional

Supongamos que existe $c \in \mathbb{Q}$ tal que $a \leq c \leq b \quad \forall a \in A,\ \forall b \in B$. La primera desigualdad dice que c es una cota superior racional de A: $c \in B$. La segunda dice que c es menor o igual que toda cota superior racional. Por tanto, $c = \min B = \sup_{\mathbb{Q}} A$.

Recíprocamente, si existiera $s = \sup_{\mathbb{Q}} A$, entonces $a \leq s \quad \forall a \in A$ y $s \leq b \quad \forall b \in B$, de modo que s sería un separador racional. Así,

$$\boxed{\exists c \in \mathbb{Q} \text{ separador de } A, B \iff \exists \sup_{\mathbb{Q}} A.}$$

Como el miembro derecho es falso, tampoco existe separador racional.

La familia de intervalos racionales

Para cada $(a, b) \in A \times B$ definimos $[a, b]_{\mathbb{Q}} = \{q \in \mathbb{Q} : a \leq q \leq b\}$. La familia es no vacía porque A y B son no vacíos. Tomemos dos índices $(a, b),\ (a', b') \in A \times B$. Como b' es cota superior de A y $a \in A$, $a \leq b'$. Por tanto se satisface la condición cruzada racional.

Supongamos ahora que existe un punto común racional $c \in \bigcap_{(a,b)\in A\times B} [a, b]_{\mathbb{Q}}$. Entonces, para todo par (a, b), $a \leq c \leq b$. Como A y B son no vacíos, podemos fijar un elemento de una clase mientras dejamos variar la otra. Así obtenemos $a \leq c \quad \forall a \in A$ y $c \leq b \quad \forall b \in B$.

Es decir, c separa A y B.

Recíprocamente, cualquier separador racional satisface $a \leq c \leq b$ para todo (a, b), y por tanto pertenece a todos los intervalos racionales. Luego

$$\boxed{\bigcap_{(a,b)\in A\times B} [a, b]_{\mathbb{Q}} \neq \emptyset \iff \exists c \in \mathbb{Q} \text{ separador de } A, B.}$$

Como no existe separador racional, la intersección general racional falla para esta familia. La misma instancia queda entonces expresada en tres lenguajes:

$$\boxed{\begin{array}{c} \sup_{\mathbb{Q}} A \text{ no existe} \\ \Updownarrow \\ \text{no existe separador racional entre } A \text{ y } B \\ \Updownarrow \\ \displaystyle\bigcap_{(a,b)\in A\times B} [a, b]_{\mathbb{Q}} = \emptyset. \end{array}}$$

No hemos identificado ninguna frontera real externa. El argumento describe exclusivamente el fallo interno de $\mathbb{Q}$. El ejercicio traduce un contraejemplo de incompletitud ya establecido dentro de $\mathbb{Q}$.

Ejercicio 36. De intersecciones por pares a una intersección global

Sea $([a_i, b_i])_{i\in I}$ una familia no vacía de intervalos cerrados de $\mathbb{R}$. Demuestra que las siguientes condiciones son equivalentes:

1. todos los pares de intervalos se intersectan: $[a_i, b_i] \cap [a_j, b_j] \neq \emptyset \qquad \forall i, j \in I$;
2. se cumple la condición cruzada de GCI: $a_i \leq b_j \qquad \forall i, j \in I$.

Después usa **GCI** para deducir

$$\boxed{\bigcap_{i\in I} [a_i, b_i] \neq \emptyset.}$$

La solución debe separar dos capas:

- la equivalencia «intersección por pares $\Leftrightarrow$ condición cruzada», que debe probarse sólo con orden e intervalos;
- el paso de compatibilidad por pares a **un punto común para toda la familia**, que usa la formulación GCI de completitud.

Explica por qué, en esta prueba, el hecho de trabajar en la recta ordenada es esencial para convertir la intersección por pares en desigualdades entre extremos.

Solución. Sea $([a_i, b_i])_{i\in I}$ una familia no vacía de intervalos cerrados.

Intersección por pares implica condición cruzada

Supongamos que $[a_i, b_i] \cap [a_j, b_j] \neq \emptyset \qquad \forall i, j \in I$. Fijemos i, j. Existe algún real x tal que $x \in [a_i, b_i] \cap [a_j, b_j]$. Entonces $a_i \leq x \leq b_i$ y $a_j \leq x \leq b_j$. De la primera desigualdad izquierda y la segunda desigualdad derecha obtenemos $a_i \leq x \leq b_j$, y por transitividad $a_i \leq b_j$.

Como i, j eran arbitrarios,

$$\boxed{a_i \leq b_j \qquad \forall i, j \in I.}$$

Condición cruzada implica intersección por pares

Supongamos ahora $a_i \leq b_j \qquad \forall i, j \in I$. Fijemos i, j. Tenemos simultáneamente $a_i \leq b_j$ y, intercambiando los índices, $a_j \leq b_i$. Definamos $l = \max\{a_i, a_j\}$. Queremos mostrar que l pertenece a ambos intervalos. Por definición,

$$a_i \leq l, \qquad a_j \leq l.$$

Además, como $a_i \leq b_i$ y $a_j \leq b_i$, ambos extremos izquierdos son menores o iguales que b_i, de modo que $l \leq b_i$. Análogamente, de $a_i \leq b_j$ y $a_j \leq b_j$ obtenemos $l \leq b_j$. Por tanto, $l \in [a_i, b_i] \cap [a_j, b_j]$. Así,

$$\boxed{[a_i, b_i] \cap [a_j, b_j] \neq \emptyset \qquad \forall i, j.}$$

Hemos demostrado la equivalencia elemental

$$\boxed{\text{intersección por pares} \Longleftrightarrow \text{condición cruzada.}}$$

De la compatibilidad por pares al punto común global

Ahora sí usamos la infraestructura de completitud. La condición cruzada es exactamente la hipótesis de GCI. Por tanto,

> **Paso de completitud en lenguaje GCI.** Existe un real c tal que $c \in [a_i, b_i] \qquad \forall i \in I$.

En consecuencia,

$$\boxed{\bigcap_{i\in I}[a_i, b_i] \neq \emptyset.}$$

La separación de capas es esencial:

1. `intersección por pares` ⇔ `condición cruzada` usa sólo la geometría de intervalos en una recta ordenada;
2. `condición cruzada` ⇒ `intersección global` es GCI y, por §3.7, contiene toda la fuerza de completitud de orden.

¿Por qué importa la recta? Porque cada intervalo está determinado por dos extremos comparables. Un punto común a dos intervalos fuerza desigualdades entre el extremo izquierdo de uno y el extremo derecho del otro, y esas desigualdades cruzadas son suficientes para describir compatibilidad global. Esa reducción depende fuertemente del orden lineal de los intervalos reales.

Ejercicio 37. GCI más estrechamiento: unicidad sin numerabilidad ni encajamiento

Sea $([a_i, b_i])_{i\in I}$ una familia no vacía de intervalos cerrados de $\mathbb{R}$ que satisface la condición cruzada $a_i \leq b_j \qquad \forall i, j \in I$. No supongas que I es numerable ni que la familia está encajada. Supón además la condición cuantitativa $\forall \varepsilon > 0\ \exists i \in I : \quad b_i - a_i < \varepsilon$. Demuestra que existe un único real x tal que

$$\boxed{\bigcap_{i\in I}[a_i, b_i] = \{x\}.}$$

Organiza la demostración en dos rutas:

1. **existencia:** usa GCI y localiza qué infraestructura de completitud está siendo invocada;
2. **unicidad:** si $x \neq y$ fueran dos puntos comunes, toma $\delta = |x - y| > 0$ y usa un intervalo de ancho menor que δ para obtener una contradicción.

Concluye comparando este resultado con §3.6: determina exactamente qué hipótesis de la versión numerable encajada eran necesarias para **obtener existencia allí**, pero no son necesarias una vez que la existencia es proporcionada directamente por GCI.

Solución. Tenemos una familia no vacía $([a_i, b_i])_{i\in I}$ que satisface la condición cruzada $a_i \leq b_j \qquad \forall i, j \in I$, y además $\forall \varepsilon > 0\ \exists i \in I : \quad b_i - a_i < \varepsilon$. No suponemos que I sea numerable ni que exista una cadena de inclusiones.

Ruta 1: existencia

La condición cruzada es exactamente la hipótesis de GCI. Por tanto,

> **Paso de completitud en lenguaje GCI.** Existe al menos un real x tal que $x \in [a_i, b_i] \qquad \forall i \in I$.

Así, $\bigcap_{i\in I}[a_i, b_i] \neq \emptyset$. Ésta es toda la ruta de existencia. No necesitamos reconstruir una familia numerable encajada porque GCI proporciona directamente el objeto común bajo la compatibilidad general.

Ruta 2: unicidad

Supongamos, buscando una contradicción, que existen dos puntos distintos $x, y \in \bigcap_{i\in I}[a_i, b_i]$. Como $x \neq y$, $\delta = |x - y| > 0$. Aplicamos la hipótesis de estrechamiento a esta tolerancia positiva. Existe un índice $i_0 \in I$ tal que $b_{i_0} - a_{i_0} < \delta$. Pero x e y pertenecen a **todos** los intervalos, en particular a $[a_{i_0}, b_{i_0}]$.

Por tanto, $a_{i_0} \le x, y \le b_{i_0}$. Si $x \le y$, entonces $|x-y| = y - x \le b_{i_0} - a_{i_0}$. Si $y \le x$, análogamente $|x-y| = x - y \le b_{i_0} - a_{i_0}$. En cualquier caso, $\delta = |x-y| \le b_{i_0} - a_{i_0} < \delta$, contradicción. Por tanto la intersección contiene a lo sumo un punto. Como GCI ya garantizó que contiene al menos uno,

$$\boxed{\left|\bigcap_{i\in I}[a_i, b_i]\right| = 1.}$$

Existe entonces un único real x con

$$\boxed{\bigcap_{i\in I}[a_i, b_i] = \{x\}.}$$

Comparación con §3.6

En §3.6 trabajábamos con una familia numerable, cerrada y encajada. Allí esas hipótesis servían para activar el teorema de §3.5 y obtener **existencia** de un punto común. Después, el estrechamiento producía **unicidad**. Aquí la existencia llega por otra interfaz:

$$\text{condición cruzada} \Longrightarrow_{\text{GCI}} \text{punto común.}$$

Por eso ya no necesitamos:

- numerabilidad;
- una cadena encajada.

Sí mantenemos intervalos cerrados porque forman parte de la formulación GCI adoptada en §3.7, y mantenemos la condición cuantitativa de estrechamiento porque es la pieza que elimina la posibilidad de dos puntos distintos. La arquitectura lógica general queda:

$$\boxed{\begin{aligned} \text{GCI} &\Longrightarrow \text{existencia},\\ \text{estrechamiento arbitrario} &\Longrightarrow \text{unicidad}. \end{aligned}}$$

Este ejercicio conecta §3.6 y §3.7 sin confundir sus papeles: cambiar la interfaz de existencia no modifica la prueba elemental de unicidad.

3.8. Dónde se gasta la completitud

En la prueba de intervalos encajados, la información de orden prepara un conjunto auxiliar, la completitud produce su supremo y la definición de supremo sitúa el punto en todos los intervalos. Las tres operaciones se enlazan en una sola demostración, pero podemos examinarlas por separado. Si después usamos ese teorema como resultado conocido, su garantía de existencia conserva la dependencia que acabamos de localizar. La misma distinción aparece en la bisección. Obtener un punto común a los intervalos cerrados encajados usa completitud a través de §3.5. Elegir un número finito de refinamientos que reduzca el ancho por debajo de una tolerancia usa arquimedianidad, demostrada desde SUP en §3.4. Excluir dos puntos distintos compara su distancia con el ancho y usa sólo orden y métrica. Cuando el estrechamiento figura directamente como hipótesis, la prueba de unicidad no necesita derivarlo de arquimedianidad.

Operación de la prueba	Justificación
Deducir compatibilidad cruzada del encajamiento	Inclusión y orden
Verificar no vaciedad y acotación de los extremos izquierdos	Definiciones y condición cruzada
Producir su supremo	Aplicación directa de completitud

Operación de la prueba	Justificación
Probar que el supremo pertenece a todos los intervalos	Condición de cota, minimalidad y cierre
Obtener bisecciones suficientemente finas	Arquimedianidad, derivada de completitud
Probar unicidad bajo estrechamiento dado	Distancia y orden

La existencia del ínfimo ofrece otra dependencia que podemos abrir cuando haga falta: procede de un supremo del reflejo. Las equivalencias de §3.7 permiten invocar SEP o GCI con el mismo contenido de existencia. Cambiar la formulación utilizada no añade una fuente independiente ni convierte la conclusión en una consecuencia de las definiciones. Por otra parte, las propiedades condicionales de C02 —unicidad, monotonía, reflexión y caracterizaciones epsilon de extremos existentes— siguen siendo argumentos de orden y álgebra, también válidos en $\mathbb{Q}$ bajo sus hipótesis locales.

Los racionales permiten comprobar el alcance de estas distinciones. Conservan el orden, la densidad y la propiedad arquimediana, y podemos definir sus cotas y hablar de extremos cuando existen. Lo que no satisfacen es la garantía universal de SUP, SEP o GCI. El conjunto S_2 y sus cotas racionales proporcionan el mismo contraejemplo en los tres lenguajes; no hace falta atribuir su fallo a la falta de puntos intermedios ni a una incapacidad de obtener escalas pequeñas.

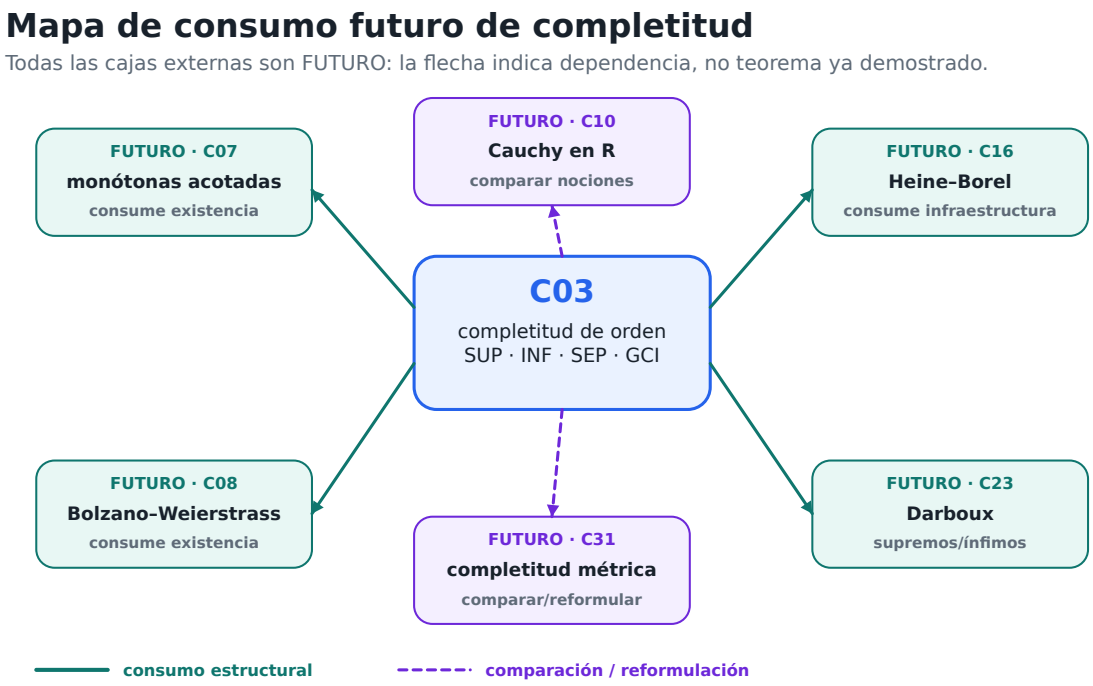


Figura 3.11. C03 exporta infraestructura de existencia a capítulos futuros y sirve de referencia para comparaciones posteriores de completitud.

En capítulos posteriores, estas garantías permitirán construir candidatos que después habrá que estudiar con nuevas herramientas. C07 usará la barrera de los valores de una sucesión monótona acotada como candidato a límite; C08 desarrollará la extracción de Bolzano–Weierstrass; C16 estudiará Heine–Borel; C23 necesitará supremos e ínfimos para las construcciones de Darboux. C10 y C31 compararán la completitud de orden con las formulaciones mediante Cauchy y con la completitud métrica. Las conexiones señalan dependencias previstas: no sustituyen las definiciones ni las demostraciones propias de esos capítulos.

La expresión «una recta sin huecos» adquiere aquí un contenido que podemos usar dentro de las pruebas: todo subconjunto real no vacío y acotado superiormente tiene una menor cota superior real. Las demostraciones de equivalencia muestran que esa misma propiedad asegura separadores para clases globalmente ordenadas y puntos comunes para familias compatibles de intervalos cerrados. Al emplearla, podremos reconocer qué objeto proporciona y qué parte del argumento debe hacerse todavía una vez que ese objeto existe.

Ejercicios de la sección 3.8.

Ejercicio 38. Auditar una prueba con tres capas de dependencia

Sea $I_n = [a_n, b_n], \qquad n \in \mathbb{N}_{>0}$, una familia de intervalos cerrados, no vacíos y encajados. Supón además que el estrechamiento se verifica mediante una construcción de refinamiento para la cual, dado todo $\varepsilon > 0$, la propiedad arquimediana permite elegir un índice k con $b_k - a_k < \varepsilon$. Queremos justificar que la intersección contiene exactamente un punto. Audita la siguiente cadena, clasificando cada paso como **elemental**, **uso directo de completitud** o **uso indirecto/heredado de completitud**:

1. del encajamiento se obtiene $a_m \le b_n \qquad \forall m, n$;
2. el conjunto $A = \{a_n : n \ge 1\}$ es no vacío y está acotado superiormente;
3. existe $x = \sup A$;
4. para todo n, $a_n \le x \le b_n$, y por tanto $x \in I_n$;
5. si x, y son dos puntos comunes distintos, se define $\delta = |x - y| > 0$;
6. se elige un índice k con $b_k - a_k < \delta$;
7. de $x, y \in I_k$ se deduce $|x - y| \le b_k - a_k < |x - y|$, contradicción.

Tu respuesta debe:

- señalar la **única línea** en la que se invoca directamente el principio del supremo;
- explicar por qué las líneas 1, 2, 4, 5 y 7 no gastan completitud de nuevo;
- explicar por qué la línea 6 puede constituir una dependencia **indirecta** cuando la elección de k usa arquimedianidad;
- dibujar al final un grafo de dependencias que distinga la ruta de **existencia** de la ruta de **unicidad**.

No resumas todo diciendo simplemente «la prueba usa completitud».

Solución. La prueba combina tres tipos de dependencia distintos. Conviene clasificarlos línea por línea.

Línea 1: compatibilidad cruzada

Del encajamiento $I_{n+1} \subseteq I_n$ se deduce que los extremos izquierdos no retroceden y los derechos no avanzan. En particular, para cualesquiera m, n, $a_m \le b_n$. Esta línea usa sólo inclusión de intervalos y orden.

Clasificación: elemental.

Línea 2: no vaciedad y acotación de A

Definimos $A = \{a_n : n \ge 1\}$. Como $a_1 \in A$, $A \neq \emptyset$. Además, fijado cualquier n, la compatibilidad cruzada da $a_m \le b_n \qquad \forall m$, de modo que b_n es una cota superior de A. No se ha producido todavía ninguna menor cota superior; sólo se verificaron las hipótesis que permitirán pedirla.

Clasificación: elemental.

Línea 3: producir $x = \sup A$

Ahora sí aparece la transición estructural: $A \neq \emptyset$, $\qquad A$ acotado superiormente implica

$$\boxed{\exists x = \sup A.}$$

Ésta no es una consecuencia de la definición de supremo. Es la garantía de existencia proporcionada por el principio del supremo.

Clasificación: uso directo de completitud.

Ésta es la única línea de la prueba donde se invoca directamente SUP.

Línea 4: poner el punto dentro de todos los intervalos

Como $a_n \in A$, y x es una cota superior de A, $a_n \leq x$. Por compatibilidad cruzada, b_n es una cota superior de A. Como x es la menor cota superior, $x \leq b_n$. Así, $a_n \leq x \leq b_n$. Como $I_n = [a_n, b_n]$ contiene sus extremos, $x \in I_n$. Aquí no se produce un objeto nuevo. Se usan las propiedades definitorias del supremo ya existente y la definición de intervalo cerrado.

Clasificación: elemental una vez disponible x.

Línea 5: fijar la distancia entre dos candidatos

Si hubiera dos puntos comunes distintos x e y, entonces $\delta = |x - y| > 0$. Esta afirmación usa la métrica de la recta y la positividad de la distancia entre puntos distintos.

Clasificación: elemental.

Línea 6: encontrar un intervalo más estrecho que δ

Por hipótesis sabemos que el procedimiento de refinamiento permite, dada una tolerancia positiva, elegir un índice k con $b_k - a_k < \delta$. Si esa disponibilidad ha sido demostrada mediante la propiedad arquimediana, entonces la cadena histórica es

$$\text{completitud} \Longrightarrow \text{arquimedianidad} \Longrightarrow \exists k : \; b_k - a_k < \delta.$$

No se invoca aquí SUP de nuevo, pero se usa un resultado cuya demostración fundacional sí dependió de SUP.

Clasificación: uso indirecto o heredado de completitud.

Si, en otro contexto, el estrechamiento fuese una hipótesis dada directamente, esta línea sería simplemente una aplicación de esa hipótesis y no tendría por sí misma dependencia adicional de completitud.

Línea 7: contradicción métrica

Como $x, y \in I_k = [a_k, b_k]$, $|x - y| \leq b_k - a_k$. Pero la elección de k da $b_k - a_k < \delta = |x - y|$. Por tanto, $|x - y| \leq b_k - a_k < |x - y|$, contradicción.

Clasificación: elemental, una vez elegido k.

Grafo de dependencias

La ruta de existencia es

$$\boxed{\text{encajamiento} \Longrightarrow \text{compatibilidad cruzada} \Longrightarrow A \neq \emptyset \text{ y acotado} \Longrightarrow_{\text{SUP}} \exists x \Longrightarrow x \in \bigcap_n I_n.}$$

Sólo la flecha marcada SUP es uso directo de completitud. En la ruta de unicidad primero se suponen dos puntos comunes distintos y se fija $\delta = |x - y| > 0$. La construcción de refinamiento, apoyada en arquimedianidad, produce entonces un intervalo de ancho menor que δ. La pertenencia de ambos puntos a ese intervalo contradice $|x - y| \leq b_k - a_k < |x - y|$. La definición de δ es elemental; la elección del intervalo es el paso que hereda la dependencia de arquimedianidad.

Cuando la disponibilidad del estrechamiento procede de arquimedianidad, hay una dependencia heredada completitud $\Longrightarrow$ arquimedianidad. Finalmente,

$$\text{existencia} + \text{a lo sumo un punto} \Longrightarrow \text{exactamente un punto.}$$

Esta última inferencia es lógica elemental.

Ejercicio 39. Recompilar la prueba usando separación en lugar de SUP

En §3.5, la existencia de un punto común para una familia numerable de intervalos cerrados encajados se demostró usando $x = \sup\{a_n : n \geq 1\}$. Reescribe esa demostración usando como interfaz de completitud únicamente la propiedad de separación **SEP**:

> si $A, B \subseteq \mathbb{R}$ son no vacíos y $a \leq b \qquad \forall a \in A,\ b \in B$, entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq c \leq b \qquad \forall a \in A,\ b \in B$.

Sea $I_n = [a_n, b_n] \neq \emptyset, \qquad I_{n+1} \subseteq I_n$. Debes:

1. definir $A_L = \{a_n : n \geq 1\}, \qquad A_R = \{b_n : n \geq 1\}$;
2. demostrar que ambos conjuntos son no vacíos;
3. deducir del encajamiento la condición cruzada $a_m \leq b_n \qquad \forall m, n$;
4. aplicar **SEP** para producir un real c con $a_n \leq c \leq b_n \qquad \forall n$;
5. concluir $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$;
6. explicar por qué esta prueba no usa una «segunda» completitud distinta de SUP, sino una interfaz equivalente ya establecida en §3.7;
7. comparar el punto exacto de gasto estructural en la versión con SUP y en la versión con SEP.

No introduzcas supremos ni ínfimos en la prueba recompilada.

Solución. Queremos probar la no vaciedad de $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ sin introducir ningún supremo o ínfimo. Partimos de $I_n = [a_n, b_n] \neq \emptyset$ y $I_{n+1} \subseteq I_n$.

1. Formar las dos clases de extremos

Definimos $A_L = \{a_n : n \geq 1\}, \qquad A_R = \{b_n : n \geq 1\}$. Como existe al menos un intervalo, tenemos $a_1 \in A_L, \qquad b_1 \in A_R$. Por tanto, $A_L \neq \emptyset, \qquad A_R \neq \emptyset$.

2. Obtener la condición cruzada

El encajamiento implica, como se demostró en §3.5,

$$\boxed{a_m \leq b_n \qquad \forall m, n \geq 1.}$$

En el nuevo lenguaje esto dice exactamente $l \leq r \qquad \forall l \in A_L,\ r \in A_R$. Las dos clases satisfacen las hipótesis de SEP.

3. El gasto estructural expresado con SEP

Aplicamos la propiedad de separación:

> **Paso de completitud, interfaz SEP.** Existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $l \leq c \leq r \qquad \forall l \in A_L,\ r \in A_R$.

En particular, tomando $l = a_n, \qquad r = b_n$, obtenemos para cada n $a_n \leq c \leq b_n$. Por la definición de intervalo cerrado,

$$c \in [a_n, b_n] = I_n$$

para todo n. Por tanto,

$$\boxed{c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.}$$

Así,

$$\boxed{\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset.}$$

Comparación con la versión basada en SUP

La prueba original seguía el esquema

$$\text{compatibilidad cruzada} \Longrightarrow A_L \text{ acotado superiormente} \Longrightarrow_{\text{SUP}} \sup A_L \Longrightarrow \text{punto común}.$$

La prueba recompilada sigue

$$\text{compatibilidad cruzada} \Longrightarrow_{\text{SEP}} \text{separador } c \Longrightarrow \text{punto común}.$$

Las dos pruebas aplican formulaciones equivalentes de completitud. En §3.7 se demostró SUP $\Longleftrightarrow$ SEP. La demostración de esa equivalencia permite sustituir una aplicación de SUP por una de SEP. La existencia sigue dependiendo de la completitud, expresada mediante separación. En la versión SUP, el objeto estructural producido es $\sup A_L$. En la versión SEP, el objeto estructural producido es directamente un número

c situado entre todos los extremos izquierdos y todos los derechos. Después de producir ese objeto, las dos pruebas terminan con pasos elementales de orden y pertenencia a intervalos. La figura C03-F12 coloca ambas compilaciones en paralelo: cambia el objeto estructural intermedio, pero no aparece una segunda fuente de existencia.

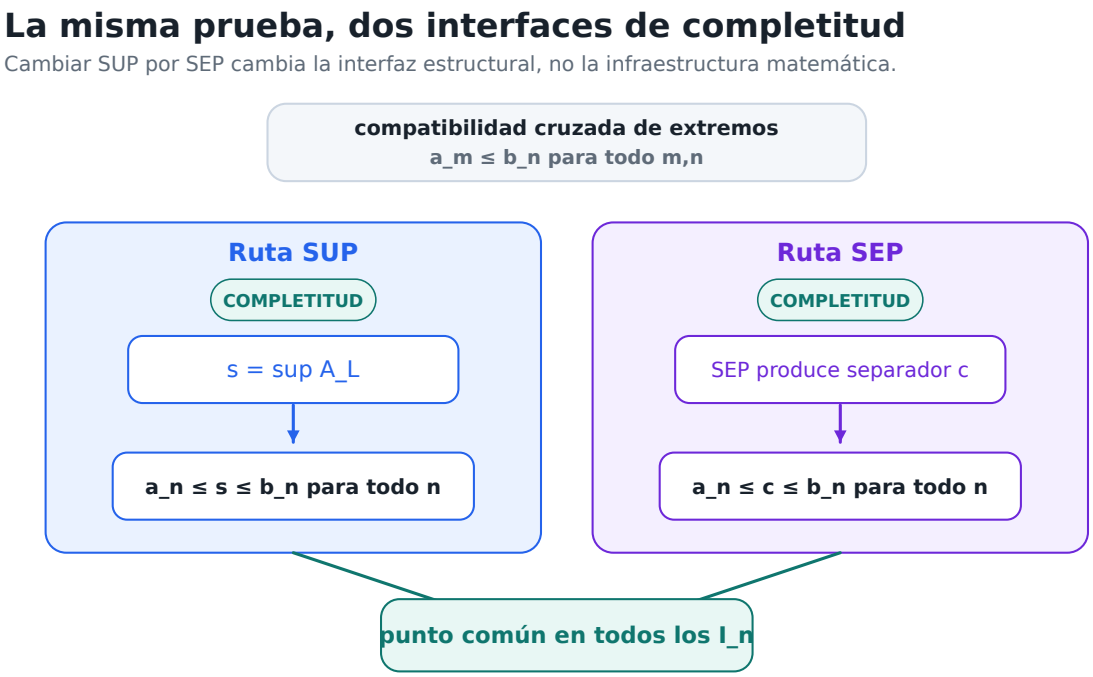


Figura 3.12. SUP y SEP recompilan la misma prueba de existencia con distintos objetos intermedios, sin añadir una segunda infraestructura de completitud.

Ejercicio 40. Qué sobrevive sin completitud y qué debe exportar C03

Compara estructuralmente $\mathbb{R}$ con $\mathbb{Q}$ usando únicamente los resultados establecidos en C02–C03 y el conjunto $S_2 = \{q \in \mathbb{Q} : 0 \leq q,\ q^2 < 2\}$. Construye una tabla razonada para las siguientes afirmaciones:

1. se pueden definir cotas, supremos e ínfimos de manera condicional;
2. si un supremo existe, es único;
3. el sistema es denso;
4. el sistema es arquimediano;
5. todo subconjunto no vacío y acotado superiormente posee supremo interno;
6. toda pareja de clases no vacías globalmente ordenadas admite un separador interno;

7. toda familia GCI de intervalos cerrados posee un punto común interno.

Para cada afirmación indica si:

- está disponible tanto en $\mathbb{Q}$ como en $\mathbb{R}$;
- está garantizada en $\mathbb{R}$ por la infraestructura de completitud;
- falla en $\mathbb{Q}$, usando S_2 cuando corresponda.

Después responde estas cuestiones de conexión:

1. ¿por qué densidad y arquimedianidad no bastan para recuperar completitud?
2. ¿qué significa decir que `SUP`, `SEP` y `GCI` son distintas **interfaces** de una misma infraestructura?
3. usando sólo el mapa de dependencias de §3.8, clasifica los papeles futuros de C07, C10 y C23 como:
   - **consumo de una garantía de existencia**,
   - **comparación/reformulación de la noción de completitud**,
   - o ambos si el texto de §3.8 lo justificara;
4. explica por qué esta clasificación no constituye todavía una demostración de ningún teorema de C07, C10 o C23.

Cierra formulando en una sola frase matemática —sin apelar a la imagen informal de una línea continua— qué aporta la completitud de $\mathbb{R}$.

Solución. Las diferencias pueden reunirse en la siguiente tabla. En las afirmaciones universales, «no» significa que existe al menos un contraejemplo.

Afirmación	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	Justificación
Definir cotas, supremos e ínfimos	Sí	Sí	Se formulan mediante el orden; nombrar un extremo requiere que exista.
Unicidad del supremo, si existe	Sí	Sí	Dos menores cotas superiores satisfacen las dos desigualdades opuestas.
Densidad	Sí	Sí	Entre $p < q$, el punto $(p+q)/2$ pertenece al mismo sistema y está estrictamente entre ambos.
Arquimedianidad	Sí	Sí	En $\mathbb{Q}$ se prueba directamente con numeradores y denominadores; para $\mathbb{R}$ se derivó de SUP.
Todo conjunto no vacío acotado superiormente posee supremo interno	No	Sí	S_2 falla en $\mathbb{Q}$; en $\mathbb{R}$ lo garantiza SUP.
Dos clases no vacías con $a \le b$ para todo par admiten separador interno	No	Sí	El par $S_2, U_{\mathbb{Q}}(S_2)$ falla en $\mathbb{Q}$; SEP se deduce de SUP en $\mathbb{R}$.

Afirmación	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	Justificación
Toda familia no vacía de intervalos cerrados con $a_i \leq b_j$ para todo par tiene punto común interno	No	Sí	Los intervalos racionales $[a, u]_{\mathbb{Q}}$ asociados a S_2 tienen intersección vacía; GCI garantiza el punto real.

El mismo conjunto S_2 explica los tres fallos racionales. Si un racional c separara S_2 de sus cotas, sería cota superior y menor que cualquier otra: sería su supremo racional, que el ejercicio 3 demostró inexistente. Un punto común racional de todos los intervalos $[a, u]_{\mathbb{Q}}$ tendría exactamente esa propiedad de separación. La densidad y la arquimedianidad de $\mathbb{Q}$ permanecen válidas, por lo que ninguna de ellas basta para garantizar completitud.

Las equivalencias SUP $\iff$ INF $\iff$ SEP $\iff$ GCI permiten usar distintos lenguajes para una misma propiedad. SUP proporciona una menor cota superior; SEP, un separador; GCI, un punto común. Las pruebas que convierten uno de esos objetos en otro muestran por qué estas formulaciones tienen la misma fuerza, sin añadir nuevos axiomas. En C07, el extremo de los valores de una sucesión monótona acotada será un candidato a límite. En C23, supremos e ínfimos permitirán construir las cantidades de Darboux. Ambos capítulos aplicarán la garantía de existencia. C10 comparará la completitud de orden con la formulación mediante sucesiones de Cauchy. Este reparto sólo identifica qué propiedad se utilizará: las afirmaciones sobre límites e integrales necesitan sus definiciones, hipótesis y demostraciones posteriores.

La aportación de la completitud puede expresarse así: todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado superiormente tiene una menor cota superior en $\mathbb{R}$. Las equivalencias probadas permiten reconocer esa misma garantía en los problemas de separación e intersección.

Capítulo 4

Mirar localmente un conjunto

El orden permite comparar puntos y reconocer cotas; la distancia permite examinar lo que ocurre cerca de un centro. En C02 estudiamos las barreras de un conjunto y en C03 las consecuencias y las formulaciones de la completitud establecida en C00. Ahora fijaremos un punto y estudiaremos su relación con un conjunto mediante las bolas de C01:

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R} : |y - x| < r\} = (x - r, x + r), \qquad r > 0.$$

El radio determina la escala de observación. Algunas propiedades pedirán encontrar una bola favorable; otras exigirán controlar todas las bolas positivas, por pequeñas que sean. Esa diferencia de cuantificadores permitirá distinguir tener margen, no poder evitar un conjunto y encontrar puntos distintos del centro arbitrariamente cerca. Ninguno de estos argumentos necesita sucesiones, límites ni una nueva aplicación de la completitud.

4.1. Ventanas alrededor de un punto: vecindades

La bola $B(2, 1/3) = (5/3, 7/3)$ contiene exactamente los puntos cuya distancia a 2 es menor que $1/3$. Sus extremos quedan fuera: la desigualdad que define la bola es estricta.

Vecindad básica. Si $x \in \mathbb{R}$ y $r > 0$, la bola
$B(x,r) = (x - r, x + r)$
es una vecindad básica de x.

Vecindad de un punto. Sea $x \in \mathbb{R}$. Un conjunto $V \subseteq \mathbb{R}$ es una **vecindad de** x si existe un radio $r > 0$ tal que
$B(x,r) \subseteq V$.

La definición sólo exige que una parte de V proporcione margen alrededor de x. Por ejemplo, $V = (-1, 1) \cup \{3\}$ es vecindad de 0: sirven tanto $r = 1$ como $r = 1/2$. El punto separado 3 no interviene en esa verificación. En cambio, $[0, 2)$ no es vecindad de 0. Dado cualquier $r > 0$, el punto $-r/2$ pertenece a $B(0,r)$ y queda fuera del conjunto.

Si V es una vecindad de x, entonces $x \in V$.

En efecto, $|x - x| = 0 < r$. La conversa falla en el ejemplo anterior: pertenecer al conjunto no asegura margen a ambos lados del centro. Además, una vecindad puede contener puntos separados y no tiene por qué ser un intervalo ni una bola. Hay tres operaciones elementales que usaremos repetidamente. Si $B(x,r) \subseteq V$ y $0 < s \leq r$, entonces $B(x,s) \subseteq B(x,r) \subseteq V$: reducir el radio conserva la inclusión. Si $V \subseteq W$, la misma bola certifica que W es vecindad de x. Y si V y W son vecindades de x, elegimos radios $r, s > 0$ que certifiquen ambas propiedades y tomamos $\rho = \min\{r, s\} > 0$. Así,

$B(x,\rho) \subseteq B(x,r) \cap B(x,s) \subseteq V \cap W$. La intersección de un número finito de vecindades vuelve a ser una vecindad: basta tomar el mínimo de sus radios. La positividad de ese mínimo depende de que la lista sea finita. También podemos cambiar el centro sin abandonar una bola, siempre que ajustemos el radio.

Margen interno de una bola. Si $y \in B(x,r)$, existe $\delta > 0$ tal que
$B(y,\delta) \subseteq B(x,r)$.

Si $y \in B(x,r)$, queda un margen $\delta = r - |y - x| > 0$. Para $z \in B(y,\delta)$, la desigualdad triangular da $|z - x| \leq |z - y| + |y - x| < \delta + |y - x| = r$. Por tanto $B(y,\delta) \subseteq B(x,r)$. El radio depende de la posición de y: cuanto más próximo esté al borde, menor será el margen

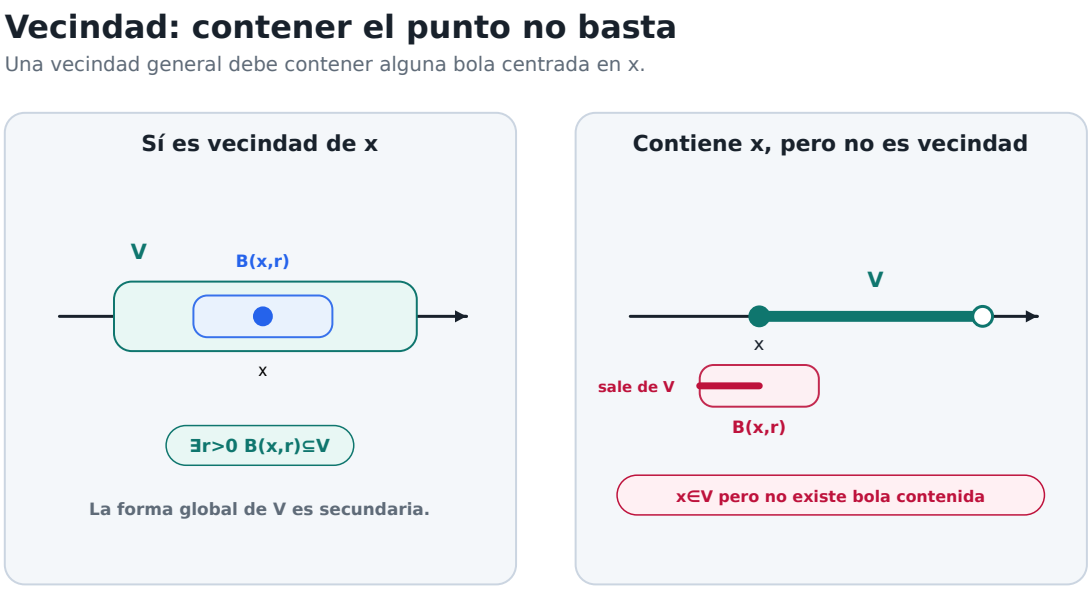


Figura 4.1. La bola es la ventana básica. Una vecindad general puede ser mayor, pero debe contener alguna bola centrada en el punto.

que garantiza este argumento. En $(-2, 2)$, por ejemplo, $B(0, 1)$ queda dentro del intervalo y también $B(1.9, 0.05)$, aunque los radios sean distintos. Esta dependencia será decisiva al pasar de propiedades de un punto a propiedades de un conjunto.

Ejercicios de la sección 4.1.

Ejercicio 1. Una definición, varias formas lógicas

Sean $V \subseteq \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}$. Considera las afirmaciones:

1. existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq V$;
2. existe $r > 0$ tal que, para todo $y \in \mathbb{R}$, $|y - x| < r \Longrightarrow y \in V$;
3. existe $r > 0$ tal que $(x - r, x + r) \subseteq V$;
4. para todo $r > 0$ existe $y \in V$ tal que $|y - x| < r$.

a) Demuestra que las afirmaciones 1, 2 y 3 son equivalentes.

b) Explica por qué la afirmación 4 tiene una estructura lógica distinta. Identifica con precisión el orden de los cuantificadores en 2 y en 4.

c) Da un ejemplo de V y x para el cual 4 sea verdadera pero 1 sea falsa.

d) Formula con palabras qué información adicional exige una vecindad respecto de la mera afirmación de que siempre aparecen puntos de V cerca de x.

No uses ninguna terminología de secciones posteriores.

Solución. La primera afirmación dice $\exists r > 0 : B(x, r) \subseteq V$. Por definición de bola,

$$y \in B(x, r) \iff |y - x| < r.$$

Por tanto la inclusión $B(x, r) \subseteq V$ significa exactamente que todo $y \in \mathbb{R}$ que satisfaga $|y - x| < r$ pertenece a V. Así, 1 equivale a $\exists r > 0 \ \forall y \in \mathbb{R} : (|y - x| < r \Longrightarrow y \in V)$, que es la afirmación 2. En $\mathbb{R}$ tenemos además $B(x, r) = (x - r, x + r)$. Sustituir la bola por ese intervalo transforma 1 en

$\exists r > 0 : (x - r, x + r) \subseteq V$, que es 3. Por tanto,

$$\boxed{1 \iff 2 \iff 3.}$$

La afirmación 4 es distinta: $\forall r > 0\ \exists y \in V : |y - x| < r$. En 2 elegimos **un** radio y, una vez elegido, exigimos que **todo** punto de la bola pertenezca a V. En 4, en cambio, cada radio puede tener su propio testigo y, y sólo se exige encontrar al menos un punto de V dentro de la bola. Un contraejemplo simple es

$V = [0, \infty)$, $x = 0$. Para cualquier $r > 0$, el punto $y = \frac{r}{2}$ satisface

$$y \in V \qquad \text{y} \qquad |y| < r.$$

Así, 4 es verdadera. Sin embargo, ningún $r > 0$ satisface $B(0, r) \subseteq V$, porque $-\frac{r}{2} \in B(0, r)$ pero $-\frac{r}{2} \notin [0, \infty)$. Por tanto 1 es falsa. La diferencia conceptual es que encontrar puntos de V arbitrariamente cerca de x sólo exige **intersección**. Ser vecindad exige algo más fuerte: debe existir una ventana completa alrededor de x cuyos puntos estén todos dentro de V.

Ejercicio 2. El conjunto de radios que realmente sirven

Sea $V = (-4, 3) \cup \{100\}$. Para un punto $x \in V$, define el conjunto de radios admisibles $R_V(x) = \{r > 0 : B(x, r) \subseteq V\}$.

a) Determina exactamente $R_V(-1)$.

b) Determina exactamente $R_V(2)$.

c) Decide si $R_V(100)$ es vacío o no vacío y justifica tu respuesta.

d) Explica por qué el punto aislado $\{100\}$ no ayuda a aumentar los radios admisibles alrededor de -1 ni alrededor de 2.

e) Compara $R_V(-1)$ y $R_V(2)$ y explica qué muestra el ejemplo acerca de la dependencia del radio respecto del centro.

Tu respuesta debe distinguir entre «pertenecer a V» y «disponer de un radio positivo cuya bola completa quede dentro de V».

Solución. Partimos de $V = (-4, 3) \cup \{100\}$. Para $x = -1$ buscamos todos los $r > 0$ tales que $B(-1, r) = (-1 - r, -1 + r)$ quede contenido en V. El obstáculo más cercano está a la izquierda, en -4. La distancia es $|-1 - (-4)| = 3$. Si $0 < r \leq 3$, entonces $-1 - r \geq -4$ y, como la bola es abierta, el punto -4 no queda incluido cuando $r = 3$. Además,

$-1 + r \leq 2 < 3$. Por tanto, $B(-1, r) \subseteq (-4, 3) \subseteq V$. Si $r > 3$, tomemos $\varepsilon = \frac{r-3}{2} > 0$ y definamos $y = -4 - \varepsilon$. Entonces $|y + 1| = 3 + \varepsilon = \frac{r+3}{2} < r$, de modo que $y \in B(-1, r)$, pero $y \notin V$. Así,

$$\boxed{R_V(-1) = (0, 3].}$$

Para $x = 2$, la barrera más cercana es ahora el extremo derecho 3, a distancia $|3 - 2| = 1$. Si $0 < r \leq 1$, entonces $B(2, r) \subseteq (-4, 3)$. Si $r > 1$, tomando $y = 3 + \min\left\{\frac{r-1}{2}, 1\right\}$ obtenemos $3 < y \leq 4$, de modo que $y \notin V$, incluido el punto remoto 100. Además, $|y - 2| = 1 + \min\{(r - 1)/2, 1\} < r$. Por tanto,

$$\boxed{R_V(2) = (0, 1].}$$

Para $x = 100$, cualquier bola positiva contiene puntos distintos de 100. En particular, dado $r > 0$, $y = 100 + \frac{r}{2}$ pertenece a $B(100, r)$, pero no pertenece a V, porque el único punto de V cerca de 100 es el propio 100. Por tanto,

$$\boxed{R_V(100) = \emptyset.}$$

El punto remoto 100 no amplía los radios admisibles alrededor de -1 o 2. Una bola centrada en uno de esos puntos debe contener **todos** sus puntos en V; no puede saltar sobre el hueco entre 3 y 100 para aprovechar un punto aislado lejano. Finalmente,

$$R_V(-1) = (0, 3] \qquad \text{y} \qquad R_V(2) = (0, 1].$$

Ambos centros pertenecen a la misma componente intervalar de V, pero el margen disponible depende de su posición. El radio que certifica una vecindad es una información local ligada al par (x, V), no una propiedad uniforme del conjunto.

Ejercicio 3. Intersecciones finitas sí; intersecciones arbitrarias, no

Sea $x \in \mathbb{R}$ y sean $V_1, \dots, V_n$ vecindades de x.

a) Demuestra que

$\bigcap_{k=1}^{n} V_k$ también es una vecindad de x. Tu prueba debe:

1. elegir, para cada k, un radio $r_k > 0$ con $B(x, r_k) \subseteq V_k$;
2. construir un único radio positivo que funcione simultáneamente para todos los conjuntos;
3. indicar exactamente por qué la finitud de la familia permite hacer esa elección.

b) Considera ahora, para cada $r > 0$,

$V_r = (-r, r)$. Demuestra que cada V_r es una vecindad de 0, pero que $\bigcap_{r>0} V_r = \{0\}$.

c) Concluye que una intersección arbitraria de vecindades de un mismo punto no tiene por qué ser una vecindad de ese punto.

No uses teoría de conjuntos abiertos ni resultados de §4.7.

Solución. Cada vecindad V_k aporta algún radio $r_k > 0$. Para satisfacer simultáneamente todas las inclusiones necesitamos un radio que no exceda ninguno de ellos. La finitud permite tomar un mínimo. Para cada $k \in \{1, \dots, n\}$, como V_k es vecindad de x, existe $r_k > 0$ tal que $B(x, r_k) \subseteq V_k$. Definimos $\rho = \min\{r_1, \dots, r_n\}$. Como se trata de un conjunto finito de números positivos,

$\rho > 0$. Además, $\rho \leq r_k$ para todo k, y por tanto $B(x, \rho) \subseteq B(x, r_k) \subseteq V_k$. La misma bola queda contenida en todos los V_k, de modo que $B(x, \rho) \subseteq \bigcap_{k=1}^{n} V_k$. Así,

$$\boxed{\bigcap_{k=1}^{n} V_k \text{ es una vecindad de } x.}$$

La finitud interviene exactamente al permitirnos formar el mínimo de la lista $r_1, \dots, r_n$ y conservar un número estrictamente positivo. Veamos ahora qué ocurre con una familia arbitraria. Para cada $r > 0$, $V_r = (-r, r) = B(0, r)$, por lo que V_r es una vecindad de 0. Afirmamos que $\bigcap_{r>0} V_r = \{0\}$. Primero, $0 \in (-r, r)$ para todo $r > 0$, así que 0 pertenece a la intersección.

Sea ahora $x \neq 0$. Elegimos $r = \frac{|x|}{2} > 0$. Entonces $|x| > r$, por lo que $x \notin (-r, r) = V_r$. Así, ningún $x \neq 0$ pertenece a la intersección. Queda probado que $\bigcap_{r>0} V_r = \{0\}$. Pero $\{0\}$ no es una vecindad de 0: para cualquier $\rho > 0$, el punto $\rho/2$ pertenece a $B(0, \rho)$ y es distinto de 0. Por tanto,

$B(0, \rho) \not\subseteq \{0\}$. Concluimos que la estabilidad de las vecindades bajo intersección es una propiedad **finita**, no arbitraria.

Ejercicio 4. Cuando «tocar» una ventana se confunde con «llenarla»

Un estudiante quiere demostrar que $V = [0, \infty)$ es una vecindad de 0 y escribe:

> Sea $r > 0$. El número $r/2$ pertenece a V y además $|r/2| < r$. Por tanto $B(0, r) \cap V \neq \emptyset$. Como esto ocurre para todo $r > 0$, V contiene puntos arbitrariamente cercanos a 0. Luego V es una vecindad de 0.

Audita el argumento.

a) Identifica exactamente qué afirmación cuantificada ha demostrado el estudiante.

b) Escribe la afirmación cuantificada que realmente tendría que demostrar para concluir que V es vecindad de 0.

c) Localiza el cambio ilegítimo entre ambas afirmaciones.

d) Demuestra directamente que V no es una vecindad de 0: para un radio arbitrario $r > 0$, construye un punto de $B(0, r)$ que no pertenezca a V.

e) Repara la conclusión del estudiante sin introducir aún nombres de conceptos posteriores: expresa sólo qué propiedad local de V alrededor de 0 sí quedó demostrada.

Solución. El estudiante demuestra correctamente que, para todo $r > 0$, $B(0, r) \cap V \neq \emptyset$, donde $V = [0, \infty)$. En forma desplegada, su argumento establece $\forall r > 0\ \exists y \in V : |y| < r$. De hecho, el testigo elegido es $y = \frac{r}{2}$. Pero para demostrar que V es vecindad de 0 tendría que probar $\exists r_0 > 0\ \forall y \in \mathbb{R} : (|y| < r_0 \Longrightarrow y \in V)$, o, equivalentemente,

$\exists r_0 > 0 : B(0, r_0) \subseteq V$. El salto ilegítimo cambia simultáneamente dos cosas. Primero, transforma $\forall r\ \exists y$ en una afirmación con la forma $\exists r\ \forall y$. Segundo, sustituye una condición de **intersección no vacía** por una condición de **inclusión completa**. La conclusión de vecindad es falsa. Sea $r > 0$ arbitrario y tomemos $z = -\frac{r}{2}$. Entonces $|z| = \frac{r}{2} < r$, así que

$z \in B(0, r)$. Sin embargo, $z < 0$, de modo que $z \notin [0, \infty)$. Por tanto, $B(0, r) \not\subseteq V$ para todo $r > 0$. No existe ningún radio que certifique que V sea una vecindad de 0. La reparación correcta consiste en conservar únicamente lo demostrado:

> para toda bola positiva centrada en 0, existe al menos un punto de V dentro de esa bola.

Esta afirmación describe una proximidad local real, pero es lógicamente más débil que contener una ventana completa alrededor del centro.

4.2. Interior y exterior: tener margen

Fijado $A \subseteq \mathbb{R}$, diremos que x es **interior a** A cuando A sea vecindad de x. El conjunto de esos puntos es el interior: $\operatorname{int}(A) = \{x \in \mathbb{R} : \exists r > 0,\ B(x, r) \subseteq A\}$. Como el centro pertenece a toda bola positiva, $\operatorname{int}(A) \subseteq A$. Para $a < x < b$, las distancias $x - a$ y $b - x$ son positivas; el radio $r_x = \frac{1}{2}\min\{x - a, b - x\}$ produce una bola contenida en (a, b). En cambio, alrededor de a toda bola contiene puntos menores que a, y alrededor de b contiene puntos mayores que b. Por ello, incluir un extremo no lo convierte en interior. Para $a < b$,

$$\operatorname{int}((a, b)) = \operatorname{int}([a, b]) = \operatorname{int}([a, b)) = \operatorname{int}((a, b]) = (a, b).$$

Así, de los puntos $-2, 0, 3$ del conjunto $[-2, 3]$, sólo 0 es interior; por ejemplo, sirve $r = 1$. Para excluir los extremos no basta fracasar con un radio particular: los puntos $-2 - r/2$ y $3 + r/2$ prueban el fracaso de cualquier $r > 0$. El mismo test aplicado al complemento define el **c04-exterior**:

$$\operatorname{ext}(A) = \operatorname{int}(A^c) = \{x \in \mathbb{R} : \exists r > 0,\ B(x, r) \cap A = \emptyset\}.$$

Ser exterior significa disponer de una bola que evita todo el conjunto. En particular, $\operatorname{ext}(A) \subseteq A^c$, pero no todo punto que falta en A es exterior. Para $A = (0, 1)$, el punto 0 no pertenece a A y, sin embargo, toda bola $B(0, r)$ encuentra al conjunto: contiene $a = \min\{r/2, 1/2\} \in (0, 1)$. La misma observación, reflejada en 1, se aplica al otro extremo.

Para $A = [0, 1)$ obtenemos $\operatorname{int}(A) = (0, 1)$ y $\operatorname{ext}(A) = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$. Si $x < 0$, el radio $-x/2$ evita A; si $x > 1$, sirve $(x - 1)/2$. Los puntos 0 y 1 no son interiores ni exteriores: toda bola encuentra puntos del conjunto y de su complemento. En 0 sirve el propio centro para encontrar A, mientras que en 1 usamos $1 - \min\{r/2, 1/2\}$. Para encontrar el complemento sirven, respectivamente, $-r/2$ y el centro 1.

Interior y exterior son disjuntos. Si un punto perteneciera a ambos, su centro tendría que estar simultáneamente en A y en A^c. No agotan necesariamente la recta, como muestran los

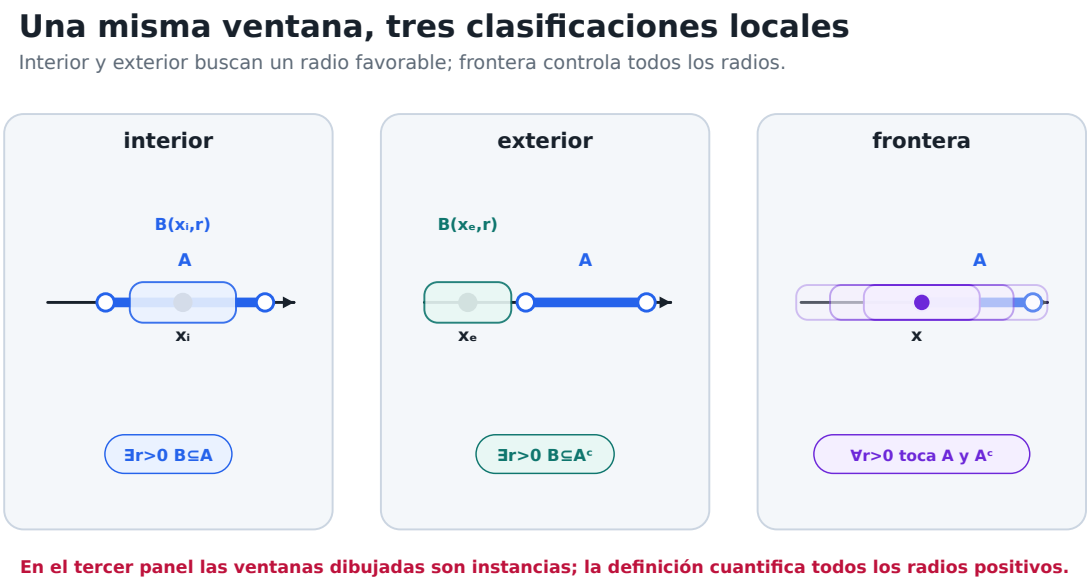


Figura 4.2. Interior y exterior requieren que exista margen; en la frontera toda ventana positiva ve ambos lados. Las ventanas dibujadas son sólo instancias.

extremos anteriores. Las negaciones explican la clase que falta: no ser interior significa que toda bola encuentra A^c, y no ser exterior significa que toda bola encuentra A. La inclusión de conjuntos conserva margen interior y reduce margen exterior. Si $A \subseteq B$ y $B(x,r) \subseteq A$, también $B(x,r) \subseteq B$, luego $\operatorname{int}(A) \subseteq \operatorname{int}(B)$. Como $B^c \subseteq A^c$, se deduce $\operatorname{ext}(B) \subseteq \operatorname{ext}(A)$. En los casos extremos, el interior de $\mathbb{R}$ y el exterior del vacío son $\mathbb{R}$; el interior del vacío y el exterior de $\mathbb{R}$ son vacíos.

Los radios se eligen después del centro. En $(0,1)$, la fórmula $r_x = \frac{1}{2}\min\{x, 1-x\}$ funciona para cada x, pero no hay un radio positivo común. En efecto, dado $r > 0$, tomamos $x = \min\{r/2, 1/2\}$. Entonces $0 < x < 1$, y $0 \in B(x,r)$ porque $x < r$, aunque $0 \notin (0,1)$. La afirmación $\forall x \in A\ \exists r_x > 0$ permite esa dependencia; $\exists r > 0\ \forall x \in A$ exige algo más fuerte. En $A = \mathbb{R}$ sí funciona cualquier radio fijo, de modo que apertura no prohibirá un radio uniforme: simplemente no lo exigirá.

Ejercicios de la sección 4.2.

Ejercicio 5. Negar correctamente el margen

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}$. Considera $I(x,A) : \exists r > 0 :\ B(x,r) \subseteq A$ y $E(x,A) : \exists r > 0 : B(x,r) \subseteq A^c$.

a) Escribe la negación de $I(x,A)$ sin usar la expresión «no es interior». La fórmula final debe comenzar con $\forall r > 0$.

b) Escribe de la misma manera la negación de $E(x,A)$.

c) Demuestra que $I(x,A)$ y $E(x,A)$ no pueden ser verdaderas simultáneamente.

d) Muestra que sus negaciones sí pueden ser verdaderas simultáneamente. Usa $A = [0,1]$, $x = 0$, y verifica directamente las dos condiciones cuantificadas.

e) Explica por qué la alternativa «interior o exterior» no agota necesariamente todos los puntos de $\mathbb{R}$.

No nombres todavía la tercera clase local que aparecerá más adelante.

Solución. La negación de $I(x,A) : \exists r > 0 :\ B(x,r) \subseteq A$ es $\forall r > 0 :\ B(x,r) \nsubseteq A$. Negar la inclusión significa que en cada bola existe al menos un punto fuera de A. Por tanto,

$$\boxed{\neg I(x,A) \iff \forall r > 0 : B(x,r) \cap A^c \neq \emptyset.}$$

Del mismo modo,

$$\boxed{\neg E(x,A) \iff \forall r > 0 : B(x,r) \cap A \neq \emptyset.}$$

Las afirmaciones $I(x,A)$ y $E(x,A)$ no pueden ser verdaderas simultáneamente. En efecto, la primera implica $x \in A$, mientras que la segunda implica $x \in A^c$, porque el centro pertenece a toda bola centrada en él. Eso obligaría a $x \in A \cap A^c$, lo cual es imposible. Tomemos ahora $A = [0,1], \qquad x = 0$. Dado $r > 0$,

$-\frac{r}{2} \in B(0,r) \cap A^c$, así que ninguna bola positiva centrada en 0 queda contenida en A. Por otro lado, $0 \in B(0,r) \cap A$ para todo $r > 0$. Por tanto ninguna bola centrada en 0 queda contenida en A^c. Así,

$$\neg I(0,A) \qquad \text{y} \qquad \neg E(0,A).$$

Interior y exterior son incompatibles, pero no exhaustivos: puede haber puntos para los cuales no exista margen completo en ninguno de los dos lados.

Ejercicio 6. Dos familias de radios alrededor del mismo conjunto

Sea $A = (-3,-1] \cup (1,4)$. Para $x \in \mathbb{R}$, define $R_{\text{in}}(x) = \{r > 0 : B(x,r) \subseteq A\}$ y $R_{\text{out}}(x) = \{r > 0 : B(x,r) \subseteq A^c\}$. Determina exactamente ambas familias de radios para

$$x = -2, \qquad x = 0, \qquad x = -1, \qquad x = 4.$$

Después:

a) identifica qué puntos son interiores, cuáles son exteriores y cuáles no pertenecen a ninguna de esas dos clases;

b) explica qué información aporta conocer el conjunto completo de radios admisibles, en lugar de limitarse a saber si existe alguno;

c) compara los casos $x = -1$ y $x = 4$: uno pertenece a A y el otro no, pero ambos producen el mismo patrón de radios admisibles. Explica por qué esto confirma que pertenencia y margen local son datos distintos.

Solución. Sea $A = (-3,-1] \cup (1,4)$. Para $x = -2$, una bola permanece dentro del primer intervalo exactamente mientras su radio no supere la distancia 1 a los dos extremos relevantes. Por tanto,

$$\boxed{R_{\text{in}}(-2) = (0,1].}$$

Si $r > 1$, elegimos $y = -1 + \min\{(r-1)/2, 1/2\}$. Entonces $-1 < y \leq -1/2$, de modo que $y \notin A$, y $|y+2| = 1 + \min\{(r-1)/2, 1/2\} < r$. Además, como $-2 \in A$, ninguna bola centrada en -2 puede quedar contenida en A^c. Luego

$$\boxed{R_{\text{out}}(-2) = \emptyset.}$$

Para $x = 0$ tenemos $B(0,1) = (-1,1) \subseteq A^c$. Todo radio $0 < r \leq 1$ sigue funcionando. Si $r > 1$, entonces $-1 \in B(0,r) \cap A$, de modo que el radio deja de ser exterior. Como $0 \notin A$, ningún radio puede certificar interioridad. Así,

$$\boxed{R_{\text{in}}(0) = \emptyset, \qquad R_{\text{out}}(0) = (0,1].}$$

Para $x = -1$, el centro pertenece a A, así que $R_{\text{out}}(-1) = \emptyset$. Pero tampoco existe radio interior. Dado $r > 0$, el punto $y = -1 + \frac{1}{2}\min\{r, 1\}$ satisface $|y+1| < r$ y pertenece a $(-1, 0]$, que está fuera de A. Por tanto,

$$\boxed{R_{\text{in}}(-1) = R_{\text{out}}(-1) = \emptyset.}$$

Finalmente, $4 \notin A$, de modo que $R_{\text{in}}(4) = \emptyset$. Para cualquier $r > 0$, el punto $y = 4 - \frac{1}{2}\min\{r, 1\}$ satisface $|y - 4| < r$ y, además, $3.5 \leq y < 4$, por lo que $y \in (1, 4) \subseteq A$. Así ninguna bola centrada en 4 queda contenida en A^c, y

$$\boxed{R_{\text{in}}(4) = R_{\text{out}}(4) = \emptyset.}$$

La clasificación es entonces:

- -2 es interior;
- 0 es exterior;
- -1 y 4 no son ni interiores ni exteriores.

Conocer toda la familia de radios aporta una escala local. Por ejemplo, $R_{\text{in}}(-2) = (0, 1]$ no sólo dice que -2 es interior: muestra exactamente hasta qué radio puede agrandarse una bola centrada allí sin salir del conjunto. Los puntos -1 y 4 tienen el mismo patrón de radios admisibles, aunque sólo el primero pertenece a A. Esto confirma que pertenencia y margen local son informaciones distintas.

Ejercicio 7. Clasificar todo un conjunto por margen local

Considera $A = [-2, -1) \cup \{0\} \cup (1, 3]$. Determina exactamente $\text{int}(A)$ y $\text{ext}(A)$. Tu respuesta debe ser una demostración por casos, no una inspección gráfica. En particular:

a) construye radios explícitos para los puntos que afirmes interiores;

b) construye radios explícitos para los puntos que afirmes exteriores;

c) demuestra que ninguno de los puntos

$$-2, \qquad -1, \qquad 0, \qquad 1, \qquad 3$$

es interior ni exterior;

d) verifica al final que cada punto real ha quedado clasificado como interior, exterior o dentro del conjunto excepcional anterior.

No uses todavía ninguna noción posterior a §4.2.

Solución. Sea $A = [-2, -1) \cup \{0\} \cup (1, 3]$. Si $-2 < x < -1$, entonces $r_x = \frac{1}{2}\min\{x+2, -1-x\} > 0$ satisface $B(x, r_x) \subseteq (-2, -1) \subseteq A$. Si $1 < x < 3$, entonces $r_x = \frac{1}{2}\min\{x-1, 3-x\} > 0$ satisface $B(x, r_x) \subseteq (1, 3) \subseteq A$. Por tanto, $(-2, -1) \cup (1, 3) \subseteq \text{int}(A)$. Los puntos -1 y 1 no pertenecen a A y, por tanto, no son interiores. Para cualquier radio $r > 0$, los puntos $-2 - r/2$ y $3 + r/2$ están en las bolas centradas en -2 y 3, respectivamente, y fuera de A. En la bola centrada en 0, el punto $\min\{r/2, 1/2\}$ está en $(0, 1) \subseteq A^c$. Así, tampoco -2, 0 ni 3 son interiores.

Así,

$$\boxed{\text{int}(A) = (-2, -1) \cup (1, 3).}$$

Calculemos el exterior. Si $x < -2$, el radio $r = \frac{-2-x}{2}$ produce una bola contenida en $(-\infty, -2)$. Si $-1 < x < 0$, tomamos $r = \frac{1}{2}\min\{x + 1, -x\}$, y la bola queda contenida en $(-1, 0)$. Si $0 < x < 1$, tomamos $r = \frac{1}{2}\min\{x, 1 - x\}$, y obtenemos una bola contenida en $(0, 1)$. Si $x > 3$, el radio $r = \frac{x-3}{2}$ produce una bola contenida en $(3, \infty)$.

Todas esas regiones están dentro de A^c, de modo que $(-\infty, -2) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (3, \infty) \subseteq \text{ext}(A)$. No hay más puntos exteriores. Los puntos $-2, 0, 3$ pertenecen a A, así que no pueden

ser exteriores. Para un radio arbitrario $r > 0$, el punto $-1-\min\{r/2, 1/2\}$ está en $A \cap B(-1, r)$, y $1 + \min\{r/2, 1/2\}$ está en $A \cap B(1, r)$. Por tanto, tampoco -1 ni 1 son exteriores.

Por tanto,

$$\boxed{\operatorname{ext}(A) = (-\infty, -2) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (3, \infty).}$$

Los únicos puntos que no quedaron en interior ni exterior son

$$\boxed{\{-2, -1, 0, 1, 3\}.}$$

Con esto se han agotado todos los puntos de $\mathbb{R}$ sin usar ninguna noción posterior a §4.2.

Ejercicio 8. Cómo se comporta el interior bajo operaciones de conjuntos

Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$.

a) Demuestra directamente que

$\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B)$. En la inclusión no inmediata deberás sincronizar dos radios.

b) Usa

$\operatorname{ext}(C) = \operatorname{int}(C^c)$ y una ley de De Morgan para deducir $\operatorname{ext}(A \cup B) = \operatorname{ext}(A) \cap \operatorname{ext}(B)$.

c) Demuestra que siempre

$\operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B) \subseteq \operatorname{int}(A \cup B)$.

d) Muestra que la inclusión del apartado c) puede ser estricta usando

$A = [-1, 0]$, $B = [0, 1]$. Identifica el punto que pertenece al interior de $A \cup B$ pero no a $\operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B)$.

Solución. Para probar $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B)$, demostramos ambas inclusiones. Si $x \in \operatorname{int}(A \cap B)$, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq A \cap B$. La misma bola queda contenida en A y en B. Por tanto, $x \in \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B)$.

Recíprocamente, supongamos $x \in \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B)$. Existen $r, s > 0$ tales que $B(x, r) \subseteq A$, $B(x, s) \subseteq B$. Tomamos $\rho = \min\{r, s\} > 0$. Entonces $B(x, \rho) \subseteq A \cap B$, y por tanto $x \in \operatorname{int}(A \cap B)$. Así,

$$\boxed{\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B).}$$

Para el exterior usamos $\operatorname{ext}(C) = \operatorname{int}(C^c)$. Por De Morgan y la identidad recién probada,

$$\begin{aligned} \operatorname{ext}(A \cup B) &= \operatorname{int}\big((A \cup B)^c\big) \\ &= \operatorname{int}(A^c \cap B^c) \\ &= \operatorname{int}(A^c) \cap \operatorname{int}(B^c) \\ &= \operatorname{ext}(A) \cap \operatorname{ext}(B). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\boxed{\operatorname{ext}(A \cup B) = \operatorname{ext}(A) \cap \operatorname{ext}(B).}$$

Además,

$$A \subseteq A \cup B \qquad \text{y} \qquad B \subseteq A \cup B.$$

La monotonicidad del interior da $\operatorname{int}(A) \subseteq \operatorname{int}(A \cup B)$ y $\operatorname{int}(B) \subseteq \operatorname{int}(A \cup B)$. Luego

$$\boxed{\operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B) \subseteq \operatorname{int}(A \cup B).}$$

La inclusión puede ser estricta. Si $A = [-1, 0]$, $B = [0, 1]$, entonces $\operatorname{int}(A) = (-1, 0)$, $\operatorname{int}(B) = (0, 1)$, pero $A \cup B = [-1, 1]$ y $\operatorname{int}(A \cup B) = (-1, 1)$. El punto

0 pertenece al interior de la unión, pero no al interior de ninguno de los dos conjuntos por separado.

Ejercicio 9. Añadir puntos sin crear margen

Sea $t > 1$ y considera $A_t = (0,1) \cup \{t\}$, y $B_t = [0,1) \cup \{t\}$.

a) Demuestra que, para todo $t > 1$,

$\text{int}(A_t) = \text{int}(B_t) = (0,1)$.

b) Demuestra que

$\text{ext}(A_t) = \text{ext}(B_t) = (-\infty, 0) \cup (1,t) \cup (t, \infty)$.

c) Compara A_t con $(0,1)$. ¿Qué efecto tiene añadir el punto t sobre el interior? ¿Qué efecto tiene sobre el exterior?

d) Compara A_t con B_t. El punto 0 cambia de pertenencia, pero el interior y el exterior no cambian. Justifica por qué.

e) Formula con tus propias palabras una conclusión general: ¿qué muestra esta familia acerca de la diferencia entre modificar la pertenencia de algunos puntos y modificar el margen local?

Solución. Sea $t > 1$. Para cualquier $x \in (0,1)$, el radio $r_x = \frac{1}{2}\min\{x, 1-x\} > 0$ satisface $B(x, r_x) \subseteq (0,1)$, de modo que x es interior tanto a A_t como a B_t. El punto 0 no es interior a B_t, porque toda bola centrada en 0 contiene números negativos; no es interior a A_t porque no pertenece a él. El punto 1 no pertenece a ninguno de los dos conjuntos y tampoco puede ser interior. El punto t tampoco es interior a ninguno de los dos conjuntos: dado $r > 0$, el punto

$t + \frac{r}{2}$ pertenece a $B(t,r)$ y queda fuera de ambos conjuntos. Así,

$$\boxed{\text{int}(A_t) = \text{int}(B_t) = (0,1).}$$

Para el exterior, si $x < 0$, el radio $r = \frac{-x}{2}$ produce una bola disjunta de ambos conjuntos. Si $1 < x < t$, tomamos $r = \frac{1}{2}\min\{x-1, t-x\} > 0$, y entonces $B(x,r) \subset (1,t)$. Si $x > t$, el radio $r = \frac{x-t}{2}$ produce una bola contenida en (t, ∞). Así, $(-\infty, 0) \cup (1,t) \cup (t, \infty)$ está contenido en los dos exteriores.

No hay otros puntos exteriores. Los puntos de $(0,1)$ y el punto t pertenecen a ambos conjuntos. Toda bola centrada en 0 toca $(0,1)$, y toda bola centrada en 1 toca puntos de $(0,1)$. Por tanto,

$$\boxed{\text{ext}(A_t) = \text{ext}(B_t) = (-\infty, 0) \cup (1,t) \cup (t, \infty).}$$

Para $C = (0,1)$, tenemos $\text{int}(C) = (0,1)$ y $\text{ext}(C) = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$. Añadir el punto t no crea margen interior alrededor de t, pero hace que ese punto deje de ser exterior. El resto de los puntos de $(1, \infty)$ conserva margen exterior. Pasar de A_t a B_t añade únicamente el punto 0. La pertenencia de 0 cambia, pero no aparece una bola completa contenida en el conjunto ni una bola completa contenida en el complemento. Por eso interior y exterior permanecen iguales.

La familia muestra que cambiar la pertenencia de algunos puntos no equivale a cambiar el margen local. Interior y exterior registran cómo se comportan ventanas completas alrededor del centro, no sólo si el centro pertenece al conjunto.

4.3. Clausura: puntos que no pueden evitar al conjunto

Negar exterioridad conduce a una propiedad nueva. Un punto x es **adherente a** A si toda bola positiva centrada en él intersecta A. La **c04-clausura** reúne esos puntos: $x \in \overline{A} \iff \forall r > 0 : \ B(x,r) \cap A \neq \emptyset$. La definición no obliga a que x pertenezca a A. Sí asegura la inclusión $A \subseteq \overline{A}$: si $x \in A$, el centro proporciona un testigo para cada radio. Los extremos 0

y 1 de $(0,1)$ son adherentes sin pertenecer al intervalo. Para un radio arbitrario, los testigos $\min\{r/2, 1/2\}$ y $1 - \min\{r/2, 1/2\}$ prueban ambas afirmaciones.

La negación del cuantificador permite escribir $\overline{A} = (\text{ext}(A))^c = (\text{int}(A^c))^c$. Por tanto, para demostrar adherencia debemos responder a todo radio; para excluirla basta construir uno que evite el conjunto. Esta diferencia organiza el cálculo de clausuras. Consideremos $A = (0,1) \setminus \{1/2\}$. Los puntos que ya pertenecen a A son adherentes. Para los tres puntos que faltan en $[0,1]$, fijamos $r > 0$ y ponemos $h = \min\{r/2, 1/4\} > 0$. Los puntos h, $1/2 + h$ y $1 - h$ pertenecen a A y quedan, respectivamente, a distancia menor que r de 0, $1/2$ y 1. Si $x < 0$, la bola de radio $-x/2$ queda a la izquierda de 0; si $x > 1$, la de radio $(x-1)/2$ queda a la derecha de 1. Ambas evitan A. Hemos probado $\overline{A} = [0,1]$, sin rellenar ningún hueco por una regla geométrica supuesta: cada punto añadido ha pasado el test local.



Figura 4.3. La clausura no se define añadiendo extremos: también recupera puntos interiores ausentes cuando ninguna ventana logra evitar al conjunto.

Podemos usar vecindades en lugar de bolas: $x \in \overline{A}$ si y sólo si toda vecindad de x intersecta A. Si x es adherente y V contiene $B(x,r)$, un punto de $B(x,r) \cap A$ pertenece también a $V \cap A$. Recíprocamente, cada bola es una vecindad, así que el test para todas las vecindades incluye el test para todas las bolas.

La clausura es monótona. Si $A \subseteq B$, cualquier punto de $B(x,r) \cap A$ pertenece a $B(x,r) \cap B$, luego $\overline{A} \subseteq \overline{B}$. Además, clausurar dos veces no añade puntos: $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$. Una inclusión se sigue de $C \subseteq \overline{C}$, aplicada a $C = \overline{A}$. Para la otra, sea $x \in \overline{\overline{A}}$ y fijemos $r > 0$. Primero elegimos $y \in B(x, r/2) \cap \overline{A}$. Como y es adherente a A, elegimos después $a \in B(y, r/2) \cap A$. Entonces $|a - x| \leq |a - y| + |y - x| < r/2 + r/2 = r$. Así, $a \in B(x,r) \cap A$. El radio era arbitrario, por lo que $x \in \overline{A}$. Los radios auxiliares se reparten el margen total antes de sumar distancias; usar r en ambos pasos sólo daría una cota $2r$ y no cerraría esta prueba. Finalmente, $\overline{\emptyset} = \emptyset$ y $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$, directamente por las intersecciones que exige la definición.

Ejercicios de la sección 4.3.

Ejercicio 10. Una clausura con intervalos y un punto separado

Sea $A = (-2,-1) \cup \{0\} \cup (1,2)$. Determina exactamente $\overline{A}$. Tu demostración debe separar tres tipos de puntos:

1. puntos que ya pertenecen a A;
2. puntos que no pertenecen a A pero que toda bola positiva alrededor de ellos obliga a tocar A;
3. puntos para los cuales puedes construir una bola positiva disjunta de A.

No basta escribir la respuesta por analogía con intervalos. Debes justificar explícitamente qué ocurre en

$$-2, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2$$

y explicar por qué no hay otros puntos adherentes.

Solución. Sea $A = (-2,-1) \cup \{0\} \cup (1,2)$. Todo punto de A es adherente, porque siempre $A \subseteq \overline{A}$. Por tanto, $(-2,-1) \cup \{0\} \cup (1,2) \subseteq \overline{A}$. Quedan por estudiar los puntos que no pertenecen al conjunto. Empecemos por los cuatro extremos intervalares. Para $x = -2$ y un radio arbitrario $r > 0$, tomemos $a = -2 + \min\left\{\frac{r}{2}, \frac{1}{4}\right\}$.

Entonces $-2 < a < -1$, de modo que $a \in A$, y además $|a-(-2)| < r$. Por tanto toda bola centrada en -2 intersecta A, así que $-2 \in \overline{A}$. El mismo mecanismo funciona en -1. Dado $r > 0$, podemos tomar $a = -1 - \min\left\{\frac{r}{2}, \frac{1}{4}\right\} \in (-2,-1) \cap B(-1,r)$, y concluimos $-1 \in \overline{A}$. Para $x = 1$, tomamos

$a = 1 + \min\left\{\frac{r}{2}, \frac{1}{4}\right\}$, y para $x = 2$, $a = 2 - \min\left\{\frac{r}{2}, \frac{1}{4}\right\}$. En ambos casos obtenemos puntos de $(1,2)$ dentro de la bola arbitraria correspondiente. Por tanto, $1, 2 \in \overline{A}$. El punto 0 ya pertenece a A, de modo que es adherente automáticamente. Así hemos demostrado $[-2,-1] \cup \{0\} \cup [1,2] \subseteq \overline{A}$.

Falta excluir todos los demás puntos. Si $x < -2$, el radio $r = \frac{-2-x}{2} > 0$ satisface $B(x,r) \subset (-\infty,-2)$, y la bola es disjunta de A. Si $-1 < x < 0$, tomemos $r = \frac{1}{2}\min\{x+1, -x\} > 0$. Entonces $B(x,r) \subset (-1,0)$, que no contiene puntos de A. Si $0 < x < 1$, el radio $r = \frac{1}{2}\min\{x, 1-x\} > 0$ produce una bola contenida en $(0,1)$ y disjunta de A.

Finalmente, si $x > 2$, basta tomar $r = \frac{x-2}{2} > 0$. No quedan más casos. Por tanto,

$$\boxed{\overline{A} = [-2,-1] \cup \{0\} \cup [1,2].}$$

La clausura añade los extremos de los dos intervalos, pero no rellena los huecos completos entre ellos: sólo incorpora los puntos que ninguna bola positiva puede separar del conjunto.

Ejercicio 11. La clausura de una unión finita

Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Demuestra que

$$\boxed{\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.}$$

Organiza la prueba como una igualdad de conjuntos. Para una de las inclusiones puedes usar la monotonicidad de la clausura ya demostrada en §4.3. Para la otra, si decides argumentar por contradicción, deberás:

1. suponer que un punto no pertenece ni a $\overline{A}$ ni a $\overline{B}$;
2. obtener dos radios positivos que eviten respectivamente a A y a B;
3. sincronizar esos radios;
4. explicar por qué la bola resultante evita a $A \cup B$.

Al final, identifica dónde se usa que sólo hay **dos** conjuntos.

Solución. Queremos probar $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Como se trata de una igualdad de conjuntos, probaremos las dos inclusiones. Primero, como $A \subseteq A \cup B$, la monotonicidad de la clausura da $\overline{A} \subseteq \overline{A \cup B}$. Del mismo modo, $\overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. Por tanto, $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$.

Para la inclusión contraria, supongamos que $x \notin \overline{A} \cup \overline{B}$. Entonces

$$x \notin \overline{A} \qquad \text{y} \qquad x \notin \overline{B}.$$

Negando la definición de adherencia, existen $r > 0$ y $s > 0$ tales que $B(x, r) \cap A = \emptyset$ y $B(x, s) \cap B = \emptyset$. Tomemos $\rho = \min\{r, s\} > 0$. Entonces $B(x, \rho) \subseteq B(x, r)$ y $B(x, \rho) \subseteq B(x, s)$. Por tanto la misma bola evita simultáneamente a A y a B: $B(x, \rho) \cap A = \emptyset$, $B(x, \rho) \cap B = \emptyset$.

De aquí se sigue $B(x, \rho) \cap (A \cup B) = \emptyset$. Por tanto, $x \notin \overline{A \cup B}$. Hemos probado la contraposición de $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$. Juntando ambas inclusiones,

$$\boxed{\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.}$$

La finitud aparece en la sincronización de radios. Para dos conjuntos basta tomar $\min\{r, s\}$. El mismo argumento funciona para cualquier familia finita, porque podemos tomar el mínimo de una lista finita de radios positivos.

Ejercicio 12. La intersección se comporta de otra manera

Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$.

a) Demuestra que siempre

$$\boxed{\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}.}$$

b) Decide si la igualdad tiene que cumplirse siempre.

c) Si no es así, usa

$A = (-1, 0)$, $B = (0, 1)$ para demostrar que la inclusión puede ser estricta.

d) Explica por qué el fracaso de la igualdad no contradice la identidad del ejercicio anterior.

Tu solución no debe invocar conjuntos cerrados ni resultados de §4.7.

Solución. Como $A \cap B \subseteq A$, la monotonicidad de la clausura da $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A}$. También $A \cap B \subseteq B$, por lo que $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{B}$. Así,

$$\boxed{\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}.}$$

La igualdad no tiene por qué cumplirse. Tomemos $A = (-1, 0)$, $B = (0, 1)$. Entonces $A \cap B = \emptyset$, de modo que $\overline{A \cap B} = \overline{\emptyset} = \emptyset$. En cambio, $\overline{A} = [-1, 0]$ y $\overline{B} = [0, 1]$. Por tanto, $\overline{A} \cap \overline{B} = \{0\}$. Así,

$$\boxed{\overline{A \cap B} \subsetneq \overline{A} \cap \overline{B}.}$$

No hay contradicción con el ejercicio anterior. La clausura de una unión y la clausura de una intersección responden a formas lógicas distintas. Para ser adherente a $A \cup B$, cada bola sólo necesita encontrar al menos un punto en **alguno** de los dos conjuntos. Si un punto deja de ser adherente a ambos por separado, podemos sincronizar dos bolas que los eviten y obtener una bola que evita la unión.

En cambio, un punto puede ser adherente a A y a B porque ambos conjuntos se acercan al mismo centro desde lados distintos, aunque ninguna bola contenga un punto que pertenezca simultáneamente a A y a B. Eso ocurre exactamente en 0 para el ejemplo anterior.

Ejercicio 13. Reparar una prueba de idempotencia

Un estudiante intenta demostrar $\overline{\overline{A}} \subseteq \overline{A}$ de la siguiente manera:

> Sea $x \in \overline{\overline{A}}$ y sea $r > 0$. Como x es adherente a $\overline{A}$, existe $y \in B(x, r) \cap \overline{A}$. Como $y \in \overline{A}$, existe $a \in B(y, r) \cap A$. Por la desigualdad triangular, $|a - x| \leq |a - y| + |y - x| < r + r$. Luego $a \in B(x, r)$, y por tanto $x \in \overline{A}$.

Audita el argumento.

a) Identifica la línea exacta que no está justificada.

b) Explica qué conclusión sí permite obtener la estimación

$|a - x| < 2r$.

c) Repara la prueba cambiando únicamente la elección de los radios de las dos bolas auxiliares.

d) Explica por qué la elección corregida permite cerrar el argumento para un radio **arbitrario** $r > 0$.

e) Resume en una frase el mecanismo reutilizable de la reparación.

Solución. La línea defectuosa es

> de $|a - x| < r + r$ se concluye $a \in B(x, r)$.

La estimación obtenida sólo permite afirmar $|a - x| < 2r$, y por tanto $a \in B(x, 2r)$. Eso no basta para demostrar que la bola original $B(x, r)$ intersecta A. La reparación consiste en reservar parte del radio para cada uno de los dos desplazamientos. Sea $x \in \overline{\overline{A}}$ y sea $r > 0$ arbitrario. Como x es adherente a $\overline{A}$, la bola de radio $r/2$ alrededor de x intersecta $\overline{A}$. Existe, pues,

$y \in B\left(x, \frac{r}{2}\right) \cap \overline{A}$. Como $y \in \overline{A}$, la bola de radio $r/2$ alrededor de y intersecta A. Existe entonces $a \in B\left(y, \frac{r}{2}\right) \cap A$. Ahora la desigualdad triangular produce $|a-x| \leq |a-y|+|y-x| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$. Por tanto, $a \in B(x, r) \cap A$.

Como $r > 0$ era arbitrario, $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ para todo $r > 0$, y así $x \in \overline{A}$. Hemos demostrado $\overline{\overline{A}} \subseteq \overline{A}$. La elección $r/2$ funciona porque divide de antemano el presupuesto total r entre los dos desplazamientos que luego sumará la desigualdad triangular. El mecanismo reutilizable es:

> cuando dos desplazamientos consecutivos deben caber dentro de un radio total, conviene repartir el margen antes de aplicar la desigualdad triangular.

Ejercicio 14. Perforar, rellenar y añadir un punto separado

Sea $t \in (0, 1)$ y define $A_t = (0, 1) \setminus \{t\}$, $B_t = A_t \cup \{t\} = (0, 1)$, y $C_t = A_t \cup \{2\}$.

a) Demuestra directamente, sin sucesiones, que

$\overline{A_t} = [0, 1]$. Tu argumento debe tratar por separado:

- los puntos de A_t;
- el punto perforado t;
- los extremos 0 y 1;
- los puntos exteriores a $[0, 1]$.

b) Deduce que

$\overline{B_t} = [0, 1]$.

c) Demuestra que

$\overline{C_t} = [0, 1] \cup \{2\}$. Puedes usar el resultado del ejercicio 11.

d) Compara las tres operaciones:

1. quitar el punto interior t;
2. volver a añadirlo;
3. añadir el punto separado 2.

Explica por qué las dos primeras no cambian la clausura, mientras que la tercera sí.

e) Formula una conclusión conceptual: ¿qué información local detecta la clausura que la simple pertenencia de un punto no registra?

Solución. Sea $t \in (0,1)$ y $A_t = (0,1) \setminus \{t\}$. Demostraremos primero que $\overline{A_t} = [0,1]$. Todo punto de A_t es adherente automáticamente. Veamos el punto perforado t. Sea $r > 0$. Definimos $\delta = \min\left\{\frac{r}{2}, \frac{1-t}{2}\right\} > 0$ y tomamos $a = t + \delta$. Entonces $t < a < 1$, de modo que $a \in A_t$, y además $|a - t| = \delta < r$.

Por tanto toda bola centrada en t intersecta A_t, así que $t \in \overline{A_t}$. Para $x = 0$, dado $r > 0$, tomemos $a = \min\left\{\frac{r}{2}, \frac{t}{2}, \frac{1}{4}\right\}$. Como $t > 0$, tenemos $a > 0$, y además $a < t$, por lo que $a \neq t$. Así, $a \in A_t \cap B(0,r)$. Luego $0 \in \overline{A_t}$. Para $x = 1$, tomemos $a = 1 - \min\left\{\frac{r}{2}, \frac{1-t}{2}, \frac{1}{4}\right\}$.

Entonces $t < a < 1$, por lo que $a \in A_t$, y además $|a - 1| < r$. Así, $1 \in \overline{A_t}$. Hemos probado $[0,1] \subseteq \overline{A_t}$. Falta excluir los puntos exteriores a $[0,1]$. Si $x < 0$, el radio $r = \frac{-x}{2}$ produce una bola contenida en $(-\infty, 0)$ y, por tanto, disjunta de A_t. Si $x > 1$, el radio $r = \frac{x-1}{2}$ produce una bola contenida en $(1, \infty)$, también disjunta de A_t.

Así,

$$\boxed{\overline{A_t} = [0,1].}$$

Ahora $B_t = A_t \cup \{t\} = (0,1)$. Por tanto, usando el cálculo ya conocido para un intervalo abierto,

$$\boxed{\overline{B_t} = [0,1].}$$

La perforación y su posterior relleno no cambian la clausura. Consideremos finalmente $C_t = A_t \cup \{2\}$. Por el ejercicio 11, $\overline{C_t} = \overline{A_t} \cup \overline{\{2\}}$. Como $\overline{A_t} = [0,1]$, sólo falta observar que $\overline{\{2\}} = \{2\}$. En efecto, 2 es adherente al singleton porque pertenece a él. Si $x \neq 2$, el radio $r = \frac{|x-2|}{2} > 0$ produce una bola que no contiene a 2, de modo que x no es adherente a $\{2\}$.

Por tanto,

$$\boxed{\overline{C_t} = [0,1] \cup \{2\}.}$$

La comparación final es instructiva. Quitar t no cambia la clausura porque, aunque t deja de pertenecer al conjunto, siguen apareciendo puntos de A_t dentro de **toda** bola centrada en t. Volver a añadir t tampoco cambia la clausura, porque t ya era adherente. En cambio, añadir el punto separado 2 sí modifica la clausura: el nuevo punto pertenece al conjunto y, por ello, debe pertenecer a su clausura; además, existe una ventana suficientemente pequeña alrededor de 2 que no toca la parte situada en $(0,1)$.

La clausura registra, por tanto, qué puntos son localmente imposibles de separar del conjunto. Esa información no coincide con la simple pertenencia: un punto puede salir del conjunto sin salir de su clausura, o puede entrar como un nuevo punto separado y ampliar efectivamente la clausura.

4.4. Frontera: toda ventana ve ambos lados

Los puntos que no tienen margen interior ni exterior obligan a toda bola a encontrar ambos conjuntos. Definimos la **c04-frontera** por

$$x \in \partial A \iff \forall r > 0 : \quad \begin{cases} B(x,r) \cap A \neq \emptyset, \\ B(x,r) \cap A^c \neq \emptyset. \end{cases}$$

El mismo radio rige las dos condiciones. Los testigos pueden ser diferentes y alguno puede ser el centro; lo exigido es que ambos lados aparezcan dentro de cada bola examinada. Al comparar con la definición de clausura obtenemos $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$. Intercambiar A y A^c no cambia la condición, de modo que $\partial(A^c) = \partial A$. La dualidad de la sección anterior aplicada a A^c da $\overline{A^c} = (\mathrm{int}(A))^c$. En consecuencia,

$\partial A = \overline{A} \setminus \mathrm{int}(A)$. Esta igualdad separa la pertenencia al conjunto de la clasificación local. Los intervalos $(0,1)$, $[0,1]$, $[0,1)$ y $(0,1]$ tienen todos interior $(0,1)$, clausura $[0,1]$ y frontera

$\{0,1\}$. Incluir un extremo cambia su pertenencia, pero no elimina la presencia de ambos lados en cada bola.



Figura 4.4. La frontera describe lo que ve toda ventana, no si el centro pertenece al conjunto.

Para $A = [-1, 2)$, por ejemplo, la frontera es $\{-1, 2\}$. Si $r > 0$, el extremo -1 pertenece a A y $-1 - r/2$ pertenece al complemento; en el otro extremo, 2 pertenece al complemento y $2 - \min\{r/2, 1\}$ pertenece a A. Si $x < -1$, sirve el radio $(-1 - x)/2$ para evitar el conjunto; si $x > 2$, sirve $(x-2)/2$. Los puntos estrictamente entre los extremos son interiores, de modo que no quedan otros puntos fronterizos.

La frontera tampoco se limita a los extremos globales. Para el intervalo perforado de §4.3, el interior es $(0, 1/2) \cup (1/2, 1)$: cada punto tiene margen hasta el extremo o la perforación más próximos. La clausura es $[0, 1]$, por lo que $\partial A = \{0, 1/2, 1\}$. La perforación es fronteriza aunque quede entre otros puntos del conjunto. La configuración de la figura C04-F02 también puede leerse ahora mediante estos dos tests simultáneos.

Todo punto de la recta pertenece exactamente a una de tres clases: $\mathbb{R} = \operatorname{int}(A) \dot\cup \partial A \dot\cup \operatorname{ext}(A)$. Ya sabemos que interior y exterior son disjuntos. Si x es interior, una bola no encuentra A^c, así que x no es fronterizo; si es exterior, una bola no encuentra A, con la misma conclusión. Finalmente, si no es interior ni exterior, las negaciones de ambos tests dicen que toda bola encuentra los dos lados: es fronterizo. Esto prueba a la vez exhaustividad y disjunción. Para el vacío y para la recta la frontera es vacía, porque uno de los dos lados no puede aportar ningún testigo.

Ejercicios de la sección 4.4.

Ejercicio 15. El espacio lógico de tres estados locales

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}$. Considera las dos preguntas: $P_A(x) : \exists r > 0 : \ B(x, r) \subseteq A$, y $Q_A(x) : \exists r > 0 : \ B(x, r) \subseteq A^c$. Representa el estado local de x mediante el par de respuestas $(P_A(x), Q_A(x))$.

a) Explica por qué el estado

(sí, sí) es imposible.

b) Interpreta matemáticamente los estados

$$(\text{sí}, \text{no}), \qquad (\text{no}, \text{sí}), \qquad (\text{no}, \text{no}).$$

c) Demuestra que el estado (no, no) equivale a

$$\forall r > 0 : (B(x,r) \cap A \neq \emptyset) \text{ y } (B(x,r) \cap A^c \neq \emptyset).$$

d) Resume el resultado en una tabla con tres filas: interior, exterior y frontera. La tabla debe mostrar qué cambia en el cuantificador y en el lado del conjunto que ocupa la ventana.

Solución. Las dos preguntas son $P_A(x) : \exists r > 0 : \ B(x,r) \subseteq A$ y $Q_A(x) : \exists r > 0 : \ B(x,r) \subseteq A^c$. El estado $(\text{sí}, \text{sí})$ es imposible. Si existieran $r, s > 0$ tales que $B(x,r) \subseteq A$ y $B(x,s) \subseteq A^c$, entonces el centro x pertenecería simultáneamente a A y a A^c, porque

$x \in B(x,r) \cap B(x,s)$. Esto es imposible. El estado $(\text{sí}, \text{no})$ significa que existe una bola contenida en A: x es interior a A. El estado $(\text{no}, \text{sí})$ significa que existe una bola contenida en A^c: x es exterior a A. Queda el estado (no, no). La negación de $P_A(x)$ es $\forall r > 0 : B(x,r) \not\subseteq A$.

Esto equivale a $\forall r > 0 : B(x,r) \cap A^c \neq \emptyset$. Análogamente, la negación de $Q_A(x)$ equivale a $\forall r > 0 : B(x,r) \cap A \neq \emptyset$. Por tanto, (no, no) equivale exactamente a

$$\forall r > 0 : (B(x,r) \cap A \neq \emptyset) \text{ y } (B(x,r) \cap A^c \neq \emptyset).$$

Ésta es la definición de punto de frontera. La representación completa es:

Estado	Condición local	Clase
$(\text{sí}, \text{no})$	alguna bola queda en A	interior
$(\text{no}, \text{sí})$	alguna bola queda en A^c	exterior
(no, no)	toda bola toca ambos lados	frontera

La cuarta combinación lógica no aparece porque interioridad y exterioridad son incompatibles.

Ejercicio 16. Clasificar una configuración completa

Sea $A = [-2,-1) \cup \{0\} \cup (1,2]$. Determina exactamente

$$\operatorname{int}(A), \qquad \operatorname{ext}(A), \qquad \partial A.$$

Tu solución debe justificar explícitamente:

1. qué radios sirven para puntos interiores;
2. qué radios sirven para puntos exteriores;
3. por qué $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$ son puntos de frontera;
4. por qué no hay otros puntos fronterizos.

Al final, verifica directamente la partición $\mathbb{R} = \operatorname{int}(A) \,\dot\cup\, \partial A \,\dot\cup\, \operatorname{ext}(A)$.

Solución. Sea $A = [-2,-1) \cup \{0\} \cup (1,2]$. Si $-2 < x < -1$, podemos tomar $r_x = \frac{1}{2}\min\{x+2, -1-x\} > 0$, y entonces $B(x,r_x) \subseteq (-2,-1) \subseteq A$. Si $1 < x < 2$, el radio $r_x = \frac{1}{2}\min\{x-1, 2-x\} > 0$ satisface $B(x,r_x) \subseteq (1,2) \subseteq A$. Por tanto,

$$\boxed{\operatorname{int}(A) = (-2,-1) \cup (1,2).}$$

Calculemos el exterior. Si $x < -2$, el radio $r = \frac{-2-x}{2}$ produce una bola contenida en $(-\infty,-2)$. Si $-1 < x < 0$, tomamos $r = \frac{1}{2}\min\{x+1, -x\}$. Si $0 < x < 1$, tomamos $r = \frac{1}{2}\min\{x, 1-x\}$. Si $x > 2$, tomamos $r = \frac{x-2}{2}$. En cada caso la bola queda contenida en A^c. Así,

$$\boxed{\operatorname{ext}(A) = (-\infty,-2) \cup (-1,0) \cup (0,1) \cup (2,\infty).}$$

Quedan los cinco puntos $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$. Mostremos que todos son fronterizos. Para $x=-2$, toda bola contiene al propio centro, que pertenece a A, y también contiene puntos menores que -2, que pertenecen a A^c. Para $x=-1$, dado $r>0$, el punto $-1-\frac{1}{2}\min\{r,1\}$ pertenece a $A\cap B(-1,r)$, mientras que $-1+\frac{1}{2}\min\{r,1\}$ pertenece a $A^c\cap B(-1,r)$.

Para $x=0$, el centro pertenece a A, mientras que cualquier punto $\frac{1}{2}\min\{r,1\}>0$ suficientemente pequeño pertenece a $(0,1)\subseteq A^c$. Para $x=1$, podemos elegir simétricamente puntos a izquierda y derecha de 1: uno en $(0,1)\subseteq A^c$ y otro en $(1,2]\subseteq A$. Para $x=2$, toda bola contiene al centro $2\in A$ y también puntos mayores que 2, que están en A^c.

Así,

$$\boxed{\partial A=\{-2,-1,0,1,2\}.}$$

No hay más puntos fronterizos porque todos los demás puntos ya pertenecen al interior o al exterior, y esas clases son disjuntas de la frontera. Por tanto,

$$\mathbb{R}=\big((-2,-1)\cup(1,2)\big)\,\dot\cup\,\{-2,-1,0,1,2\}\,\dot\cup\,\big((-\infty,-2)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(2,\infty)\big).$$

La partición queda verificada directamente.

Ejercicio 17. La frontera de una unión no puede aparecer de la nada

Sean $A,B\subseteq\mathbb{R}$.

a) Demuestra que

$$\boxed{\partial(A\cup B)\subseteq\partial A\cup\partial B.}$$

Puedes organizar la prueba por contraposición usando la partición local interior–frontera–exterior.

b) Usa la identidad

$\partial(C^c)=\partial C$ y una ley de De Morgan para deducir

$$\boxed{\partial(A\cap B)\subseteq\partial A\cup\partial B.}$$

c) Muestra que la inclusión del apartado a) puede ser estricta con

$A=[-1,0],\qquad B=[0,1].$

d) Explica geométricamente por qué el punto 0 desaparece de la frontera cuando pasamos de los dos conjuntos separados a su unión.

Solución. Queremos demostrar $\partial(A\cup B)\subseteq\partial A\cup\partial B$. Trabajaremos por contraposición. Supongamos que $x\notin\partial A\cup\partial B$. Entonces

$$x\notin\partial A\qquad\text{y}\qquad x\notin\partial B.$$

Por la partición local de §4.4, respecto de cada conjunto el punto debe ser interior o exterior. Hay cuatro combinaciones posibles. Si x es interior a A, entonces existe una bola contenida en A, y por tanto contenida en $A\cup B$. Así, x es interior a la unión y no es fronterizo. Lo mismo ocurre si x es interior a B. La única posibilidad restante es que x sea exterior tanto a A como a B. Entonces existen $r,s>0$ tales que

$B(x,r)\subseteq A^c$ y $B(x,s)\subseteq B^c$. Tomando $\rho=\min\{r,s\}$, obtenemos $B(x,\rho)\subseteq A^c\cap B^c=(A\cup B)^c$. Por tanto x es exterior a $A\cup B$ y tampoco es fronterizo. En todos los casos, $x\notin\partial(A\cup B)$. Queda demostrada la contraposición y, por tanto,

$$\boxed{\partial(A\cup B)\subseteq\partial A\cup\partial B.}$$

Para la intersección usamos complementos: $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$. Por la invariancia de la frontera bajo complemento, $\partial(A \cap B) = \partial(A^c \cup B^c)$. Aplicando el resultado recién demostrado, $\partial(A^c \cup B^c) \subseteq \partial(A^c) \cup \partial(B^c)$. Como

$$\partial(A^c) = \partial A \qquad \text{y} \qquad \partial(B^c) = \partial B,$$

obtenemos

$$\boxed{\partial(A \cap B) \subseteq \partial A \cup \partial B.}$$

La inclusión para la unión puede ser estricta. Si $A = [-1, 0], \quad B = [0, 1]$, entonces $\partial A = \{-1, 0\}$, y $\partial B = \{0, 1\}$. Por tanto, $\partial A \cup \partial B = \{-1, 0, 1\}$. Pero $A \cup B = [-1, 1]$, de modo que $\partial(A \cup B) = \{-1, 1\}$. El punto 0 desaparece de la frontera porque, después de unir los dos intervalos, queda rodeado por una ventana completa contenida en $[-1, 1]$. Una frontera interna de las piezas puede desaparecer al rellenarse localmente desde el otro conjunto.

Ejercicio 18. Dos radios que no están sincronizados

Un estudiante quiere probar que $x \in \partial A$ y dispone de la siguiente información:

- para todo $r > 0$, existe $a_r \in A$ con $|a_r - x| < r$;
- para todo $r > 0$, existe $b_r \in A^c$ con $|b_r - x| < 2r$.

Entonces escribe:

> Para un radio arbitrario $r > 0$, los puntos a_r y b_r están ambos suficientemente cerca de x. Por tanto $B(x, r)$ intersecta a A y a A^c, así que $x \in \partial A$.

a) Identifica el paso no justificado.

b) Explica qué sí garantiza la desigualdad $|b_r - x| < 2r$.

c) Decide si las hipótesis del estudiante son suficientes para demostrar que $x \in \partial A$.

d) Si lo son, repara la demostración mediante una reparametrización adecuada del segundo radio.

e) Explica qué enseña este ejemplo sobre la necesidad de sincronizar escalas cuando una definición exige dos condiciones dentro de la **misma** bola.

Solución. El error está en afirmar que b_r pertenece necesariamente a $B(x, r)$. La hipótesis sólo garantiza $|b_r - x| < 2r$, por lo que podemos concluir $b_r \in B(x, 2r)$. Eso no implica $b_r \in B(x, r)$. Sin embargo, las hipótesis sí son suficientes para demostrar que x es fronterizo. Sea $R > 0$ arbitrario. La primera hipótesis, aplicada directamente con $r = R$, proporciona un punto

$a_R \in A$ tal que $|a_R - x| < R$. Por tanto, $a_R \in B(x, R) \cap A$. Para el complemento no usamos el parámetro R directamente. Aplicamos la segunda hipótesis con $r = \frac{R}{2}$. Existe entonces $b_{R/2} \in A^c$ tal que $|b_{R/2} - x| < 2\left(\frac{R}{2}\right) = R$. Así, $b_{R/2} \in B(x, R) \cap A^c$.

Como $R > 0$ era arbitrario, toda bola positiva centrada en x intersecta simultáneamente A y A^c. Por tanto,

$$\boxed{x \in \partial A.}$$

La reparación no cambia las hipótesis: sólo sincroniza las escalas mediante una reparametrización. La lección es que, cuando una definición exige dos condiciones dentro de la misma bola, no basta con tener testigos «aproximadamente» cercanos. Hay que ajustar los radios para que ambos queden realmente dentro de la ventana que se está evaluando.

Ejercicio 19. La frontera no es monótona

Una primera intuición podría sugerir que, si $A \subseteq B$, entonces debería cumplirse $\partial A \subseteq \partial B$. Construye una familia paramétrica que destruya esa intuición. Sea $c \in \mathbb{R}$ y $R > 0$. Define $A = \{c\}, \qquad B = (c - R, c + R)$.

a) Demuestra que $A \subseteq B$.

b) Calcula directamente

∂A y ∂B.

c) Concluye que

$\partial A \not\subseteq \partial B$.

d) Observa además que

$\partial B \not\subseteq \partial A$.

e) Demuestra que, de hecho,

$\partial A \cap \partial B = \emptyset$.

f) Explica por qué agrandar un conjunto puede hacer desaparecer una frontera antigua y crear otra en una región diferente.

Tu argumento debe usar únicamente las definiciones locales disponibles hasta §4.4.

Solución. Sea $A = \{c\}, \qquad B = (c - R, c + R)$, con $R > 0$. Como $c - R < c < c + R$, tenemos $c \in B$, y por tanto $A \subseteq B$. Calculemos primero la frontera de A. El punto c es fronterizo: toda bola centrada en c contiene al propio centro, que pertenece a A, y contiene también puntos distintos de c, que pertenecen a A^c. Si $x \neq c$, tomemos $r = \frac{|x-c|}{2} > 0$. Entonces $B(x, r)$ no contiene a c, de modo que $B(x, r) \subseteq A^c$. Por tanto x es exterior a A y no es fronterizo. Así,

$$\boxed{\partial A = \{c\}.}$$

Ahora consideremos $B = (c - R, c + R)$. Los puntos estrictamente interiores al intervalo son interiores a B, y los puntos fuera de $[c - R, c + R]$ son exteriores. En los extremos

$$c - R \qquad \text{y} \qquad c + R,$$

toda bola positiva contiene puntos del intervalo y puntos de su complemento. Por tanto,

$$\boxed{\partial B = \{c - R, c + R\}.}$$

Como $R > 0$,

$$c \neq c - R \qquad \text{y} \qquad c \neq c + R.$$

Por ello, $\partial A = \{c\} \not\subseteq \{c - R, c + R\} = \partial B$. También, $\partial B \not\subseteq \partial A$. Más aún,

$$\boxed{\partial A \cap \partial B = \emptyset.}$$

Este ejemplo muestra que la operación frontera no es monótona respecto de la inclusión. Al agrandar el singleton hasta convertirlo en un intervalo abierto, el punto c deja de ser fronterizo porque adquiere margen interior. A la vez aparecen dos fronteras nuevas en los extremos del intervalo. Agrandar un conjunto puede, por tanto, destruir fronteras existentes y crear otras en posiciones diferentes.

4.5. Acumulación: el conjunto reaparece alrededor del punto

La adherencia puede apoyarse únicamente en el centro. Para distinguir ese caso retiramos x de la bola: x es **punto de acumulación de** A si $x \in \mathrm{Acc}(A) \iff \forall r > 0 : \ (B(x, r) \setminus$

$\{x\}) \cap A \neq \emptyset$. Equivalentemente, para cada $r > 0$ debe existir $a \in A$ tal que $0 < |a - x| < r$. El testigo puede depender del radio y siempre debe ser distinto del centro. Como la bola perforada está contenida en la bola, $\mathrm{Acc}(A) \subseteq \overline{A}$; por tanto, ningún punto exterior es de acumulación.

En $A = (0, 1) \cup \{2\}$ aparecen tres comportamientos. Para $x = 0$, dado $r > 0$, el punto $\min\{r/2, 1/2\}$ prueba acumulación aunque $0 \notin A$. Para $x = 1/2$, sirve $1/2 + \min\{r/2, 1/4\}$: el centro pertenece a A, pero no lo usamos como testigo. En cambio, $B(2, 1/2) \cap A = \{2\}$. El punto 2 es adherente por pertenecer al conjunto, pero no es de acumulación: la bola perforada correspondiente no encuentra nada.

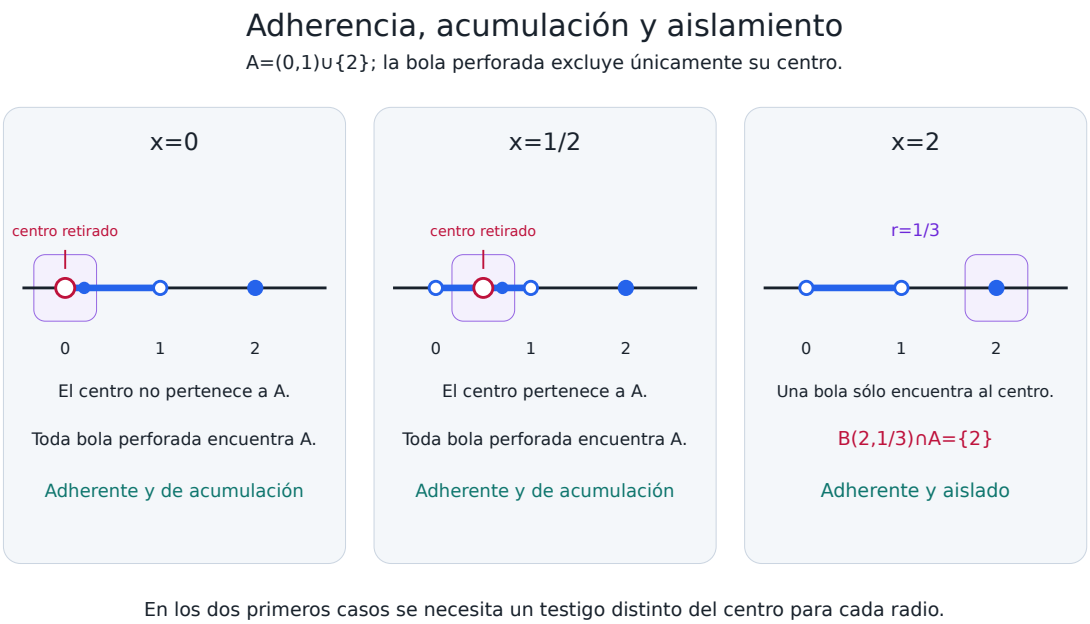


Figura 4.5. Perforar el centro cambia el test: un punto aislado puede ser adherente sin ser de acumulación, y un punto de acumulación puede quedar fuera del conjunto.

Esta diferencia produce una identidad fundamental: $\overline{A} = A \cup \mathrm{Acc}(A)$. La inclusión de derecha a izquierda reúne dos propiedades ya probadas. Para la otra, sea $x \in \overline{A}$. Si $x \in A$, ya pertenece a la unión. Si $x \notin A$, para cada $r > 0$ la adherencia proporciona un punto de $B(x, r) \cap A$; ese punto necesariamente es distinto de x. Por tanto $x \in \mathrm{Acc}(A)$. En particular, todo punto adherente que falta en el conjunto es de acumulación, pero no es exterior en el sentido técnico: ninguna bola puede separarlo del conjunto.

La acumulación es monótona: si $A \subseteq B$, todo testigo distinto del centro que sirva para A sirve para B, luego $\mathrm{Acc}(A) \subseteq \mathrm{Acc}(B)$. La pertenencia al conjunto no interviene en esta inclusión. Para $a < b$, podemos calcular directamente $\mathrm{Acc}((a, b)) = [a, b]$. Si $a < x < b$ y $r > 0$, tomamos $h = \min\{r/2, (b - x)/2\}$ y el testigo $x + h$. Para el centro a, usamos $a + \min\{r/2, (b - a)/2\}$; para b, usamos $b - \min\{r/2, (b - a)/2\}$. En los tres casos el testigo pertenece al intervalo, es distinto del centro y queda a distancia menor que r. Si $x < a$, la bola de radio $(a - x)/2$ evita el intervalo; si $x > b$, sirve $(x - b)/2$. No quedan otros puntos de acumulación. La prueba sólo usa bolas y elecciones de distancias positivas.

Ejercicios de la sección 4.5.

Ejercicio 20. Negar una bola perforada

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}$.

a) Escribe con cuantificadores la afirmación $x \in \mathrm{Acc}(A)$.

b) Niega correctamente esa afirmación y demuestra que $x \notin \operatorname{Acc}(A) \iff \exists r > 0 : (B(x,r) \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset$.

c) Compara esta negación con $x \notin \overline{A}$. Explica con precisión qué papel desempeña el centro x en cada caso.

d) Usa $A = \{0\}$ y $x = 0$ para mostrar que puede ocurrir
$$x \in \overline{A} \qquad \text{y} \qquad x \notin \operatorname{Acc}(A).$$

e) Usa $A = (0,1)$ y $x = 0$ para mostrar que un punto puede pertenecer a $\operatorname{Acc}(A)$ sin pertenecer a A.

Solución. Por definición,
$$x \in \operatorname{Acc}(A) \iff \forall r > 0 : (B(x,r) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$
Negar la afirmación cambia el cuantificador universal por uno existencial y la intersección no vacía por una intersección vacía: $x \notin \operatorname{Acc}(A) \iff \exists r > 0 : (B(x,r) \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset$. En cambio, $x \notin \overline{A} \iff \exists r > 0 : B(x,r) \cap A = \emptyset$. La diferencia está en el centro. Para negar acumulación, la bola puede tocar a A únicamente en x; para negar adherencia, ni siquiera el centro puede aportar un punto de A.

Si $A = \{0\}$ y $x = 0$, entonces $0 \in \overline{A}$ porque pertenece a A, pero $(B(0,r) \setminus \{0\}) \cap A = \emptyset$ para todo $r > 0$. Así, $0 \notin \operatorname{Acc}(A)$. Si $A = (0,1)$ y $x = 0$, dado $r > 0$ tomamos $a = \min\left\{\frac{r}{2}, \frac{1}{2}\right\}$. Entonces $a \in A$, $a \neq 0$ y $|a| < r$, de modo que $a \in (B(0,r) \setminus \{0\}) \cap A$. Por tanto, $0 \in \operatorname{Acc}(A)$ aunque $0 \notin A$.

Ejercicio 21. Calcular todos los puntos de acumulación

Sea $A = (-2,-1) \cup \{0\} \cup (1,2]$. Determina exactamente $\operatorname{Acc}(A)$. Tu demostración debe tratar por separado los puntos interiores de los dos intervalos, los cuatro extremos $-2, -1, 1, 2$, el punto 0, los puntos de los huecos $(-1,0)$ y $(0,1)$ y los puntos exteriores a $[-2,2]$. Para cada punto que afirmes de acumulación, comienza con un radio arbitrario $r > 0$ y construye un punto de A distinto del centro dentro de la bola perforada. Para cada punto que excluyas, exhibe un radio positivo que destruya la condición universal.

Solución. Sea $A = (-2,-1) \cup \{0\} \cup (1,2]$. Afirmamos que $\operatorname{Acc}(A) = [-2,-1] \cup [1,2]$. Si $x \in (-2,-1)$, dado $r > 0$ tomamos $\delta = \min\left\{\frac{r}{2}, \frac{-1-x}{2}\right\} > 0$ y $a = x + \delta$. Entonces $a \in A$, $a \neq x$ y $|a - x| < r$. Para $x \in (1,2)$, elegimos $\delta = \min\{r/2, (2-x)/2\}$ y $a = x + \delta$, que cumple $x < a < 2$ y $|a - x| < r$.

En los extremos usamos desplazamientos hacia el interior de los intervalos. Por ejemplo, para $x = -2$ tomamos $a = -2 + \min\left\{\frac{r}{2}, \frac{1}{4}\right\}$, y para $x = -1$, $a = -1 - \min\left\{\frac{r}{2}, \frac{1}{4}\right\}$. Para $x = 1$, sirve $a = 1 + \min\{r/2, 1/4\}$; para $x = 2$, sirve $a = 2 - \min\{r/2, 1/4\}$. Ambos puntos están en $(1,2)$, son distintos del centro y quedan a distancia menor que r. Por tanto, $[-2,-1] \cup [1,2] \subseteq \operatorname{Acc}(A)$.

Para $x = 0$, la bola $B(0,1/2)$ sólo encuentra a A en el centro: $B\left(0, \frac{1}{2}\right) \cap A = \{0\}$. Al perforar el centro, la intersección queda vacía; por tanto, $0 \notin \operatorname{Acc}(A)$. Si $-1 < x < 0$, tomamos $r = \frac{1}{2}\min\{x+1, -x\} > 0$. Entonces $B(x,r) \subset (-1,0)$ y no toca a A. Para $0 < x < 1$ usamos $r = \frac{1}{2}\min\{x, 1-x\}$. Si $x < -2$ o $x > 2$, basta tomar la mitad de la distancia al extremo más cercano del intervalo $[-2,2]$.

Así no hay otros puntos de acumulación, y
$$\boxed{\operatorname{Acc}(A) = [-2,-1] \cup [1,2].}$$

Ejercicio 22. La acumulación de una unión finita

Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Demuestra que $\operatorname{Acc}(A \cup B) = \operatorname{Acc}(A) \cup \operatorname{Acc}(B)$. La prueba debe incluir la inclusión obtenida por monotonicidad y la inclusión contraria por contraposición, usando la negación correcta del test de acumulación y un único radio que haga fallar dicho test para

$A \cup B$. Explica al final por qué el argumento depende de que la unión sea finita. No uses sucesiones.

Solución. Por monotonicidad, $\mathrm{Acc}(A) \cup \mathrm{Acc}(B) \subseteq \mathrm{Acc}(A \cup B)$.

Para la inclusión contraria trabajamos por contraposición. Supongamos

$$x \notin \mathrm{Acc}(A) \qquad \text{y} \qquad x \notin \mathrm{Acc}(B).$$

Existen $r, s > 0$ tales que $\big(B(x,r) \setminus \{x\}\big) \cap A = \emptyset$ y $\big(B(x,s) \setminus \{x\}\big) \cap B = \emptyset$. Tomemos $\rho = \min\{r, s\} > 0$. Entonces la bola perforada $B(x,\rho) \setminus \{x\}$ evita simultáneamente a A y a B, de modo que $\big(B(x,\rho) \setminus \{x\}\big) \cap (A \cup B) = \emptyset$. Por tanto, $x \notin \mathrm{Acc}(A \cup B)$.

Queda demostrada la contraposición y, en consecuencia,

$$\boxed{\mathrm{Acc}(A \cup B) = \mathrm{Acc}(A) \cup \mathrm{Acc}(B).}$$

La finitud interviene al sincronizar los radios. Para una familia finita, el mínimo de los radios positivos sigue siendo positivo; para una familia arbitraria no existe una garantía semejante.

Ejercicio 23. Dos testigos distintos no producen un testigo común

Un estudiante afirma que $\mathrm{Acc}(A \cap B) = \mathrm{Acc}(A) \cap \mathrm{Acc}(B)$ porque toda bola perforada que toca a A y a B debería tocar a $A \cap B$.

a) Identifica el salto lógico.

b) Usa
$$A = (-1, 0), \qquad B = (0, 1), \qquad x = 0$$
para refutar la igualdad.

c) Demuestra la inclusión correcta $\mathrm{Acc}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Acc}(A) \cap \mathrm{Acc}(B)$.

d) Explica por qué «existe un punto de A y existe un punto de B» no equivale a «existe un mismo punto de $A \cap B$».

Solución. La falla está en confundir dos testigos potencialmente distintos con un único testigo común. Tomemos $A = (-1, 0), \qquad B = (0, 1)$. Para todo $r > 0$ existen puntos de A y de B distintos de 0 dentro de $B(0, r)$; por tanto, $0 \in \mathrm{Acc}(A) \cap \mathrm{Acc}(B)$. Pero $A \cap B = \emptyset$, de modo que $\mathrm{Acc}(A \cap B) = \emptyset$.

Así, la igualdad propuesta es falsa.

La inclusión correcta se obtiene por monotonicidad:

$$A \cap B \subseteq A \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Acc}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Acc}(A),$$

y también

$$A \cap B \subseteq B \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Acc}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Acc}(B).$$

Por tanto,

$$\boxed{\mathrm{Acc}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Acc}(A) \cap \mathrm{Acc}(B).}$$

La conclusión correcta es que un punto de acumulación de la intersección debe ser de acumulación de cada conjunto por separado; la conversa puede fallar porque los testigos locales pueden ser diferentes.

Ejercicio 24. Quitar un punto, añadirlo y colocar otro lejos

Sean $s \in (0, 1)$ y $t > 1$, y define

$$A = (0, 1), \qquad B = (0, 1) \setminus \{s\}, \qquad C = (0, 1) \cup \{t\}.$$

Demuestra, sin sucesiones, que $\mathrm{Acc}(A) = \mathrm{Acc}(B) = \mathrm{Acc}(C) = [0, 1]$. Justifica específicamente por qué quitar s no destruye la acumulación en s, por qué los demás puntos de $[0, 1]$ siguen siendo de acumulación, por qué t no se convierte en punto de acumulación y por qué no aparecen nuevos puntos de acumulación fuera de $[0, 1]$. Concluye explicando qué

diferencia conceptual existe entre modificar la pertenencia de algunos puntos y modificar el conjunto de puntos de acumulación.

Solución. Para $A = (0,1)$ ya sabemos que $\mathrm{Acc}(A) = [0,1]$. Sea ahora $B = (0,1) \setminus \{s\}, \quad s \in (0,1)$. El punto s sigue siendo de acumulación. Dado $r > 0$, tomemos $\delta = \min\{\frac{r}{2}, \frac{1-s}{2}\} > 0$ y $b = s + \delta$. Entonces $b \in B$, $b \neq s$ y $|b - s| < r$. Si $x \in (0,1)$ y $x \neq s$, definimos $\eta = \frac{1}{2}\min\{r, 1-x, |x-s|\} > 0$ y $y = x + \eta$. Entonces $y \in (0,1)$, $y \neq x$, $y \neq s$ y $|y - x| < r$. Así, todo punto interior sigue siendo de acumulación.

En 0, sirve $b = \min\{r/2, s/2, 1/4\}$: es positivo, menor que s y menor que r. En 1, sirve $b = 1 - \min\{r/2, (1-s)/2, 1/4\}$: queda estrictamente entre s y 1 y a distancia menor que r del centro. Estos testigos pertenecen a B y son distintos de los extremos. Ningún punto fuera de $[0,1]$ puede ser de acumulación porque admite una bola disjunta de $(0,1)$. Por tanto, $\mathrm{Acc}(B) = [0,1]$.

Consideremos $C = (0,1) \cup \{t\}, \quad t > 1$. Como $A \subseteq C$, la monotonicidad da $[0,1] \subseteq \mathrm{Acc}(C)$. El punto t no es de acumulación. Con $r = \frac{t-1}{2} > 0$ la bola $B(t,r)$ no toca $(0,1)$; tras perforar el centro, tampoco toca a $\{t\}$. Si $x > 1$ y $x \neq t$, el radio $r = \frac{1}{2}\min\{x-1, |x-t|\} > 0$ evita tanto al intervalo como al punto t. Si $x < 0$, podemos tomar $r = \frac{1}{2}\min\{-x, t-x\} > 0$.

Así no aparecen nuevos puntos de acumulación fuera de $[0,1]$, y $\mathrm{Acc}(C) = [0,1]$.

En conclusión,

$$\boxed{\mathrm{Acc}(A) = \mathrm{Acc}(B) = \mathrm{Acc}(C) = [0,1].}$$

Quitar s cambia la pertenencia de ese punto, pero no elimina la presencia de otros puntos del conjunto arbitrariamente cerca. Añadir t también cambia la pertenencia, pero el nuevo punto queda separado del intervalo por un margen positivo. El operador Acc registra repetición local alrededor de un centro, no la mera pertenencia. Por eso puede permanecer inalterado bajo ciertas modificaciones finitas.

4.6. Puntos aislados y descomposición local

El comportamiento de 2 en el ejemplo anterior merece un nombre. Un punto x es **aislado en** A si $x \in A$ y existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \cap A = \{x\}$. La pertenencia es parte de la definición: estar lejos de un conjunto no convierte a un punto ajeno en un punto aislado de él. Si $x \in A$, negar acumulación significa que alguna bola perforada evita A. Al devolver el centro, esa misma bola encuentra exactamente $\{x\}$. Recíprocamente, una bola que sólo encuentra al centro queda vacía de puntos de A al perforarla. Por tanto,

x aislado en $A \iff x \in A \setminus \mathrm{Acc}(A)$. En particular, un punto aislado es adherente y no es de acumulación. El aislamiento es relativo al conjunto observado: $\{x\}$ no contiene ninguna bola positiva de la recta, pues $x + r/2 \in B(x,r)$ es distinto de x. Dentro de A hay una descomposición disjunta: $A = (A \cap \mathrm{Acc}(A)) \dot\cup (A \setminus \mathrm{Acc}(A))$.

La primera parte contiene los puntos del conjunto acompañados por otros puntos en toda bola; la segunda contiene sus puntos aislados. Para $A = (0,1) \cup \{2\}$, los centros $0, 1/2, 2$ permiten comparar las nociones sin identificarlas:

Centro	Pertenece a A	Adherente	De acumulación	Aislado en A
0	No	Sí	Sí	No
1/2	Sí	Sí	Sí	No
2	Sí	Sí	No	Sí

La figura C04-F04 sirve también para leer esta tabla: en los dos primeros paneles la bola perforada sigue encontrando puntos del conjunto; en el tercero existe una bola que aísla al centro. Cada entero n es aislado en $\mathbb{Z}$, porque todo entero distinto de n dista al menos 1 de él y $B(n, 1/2) \cap \mathbb{Z} = \{n\}$. Así, $\mathbb{Z} \cap \mathrm{Acc}(\mathbb{Z}) = \emptyset$. Este argumento muestra que un conjunto infinito puede tener todos sus propios puntos aislados. La afirmación se refiere a centros enteros y no

constituye por sí sola un examen de posibles centros ajenos al conjunto; aquí no necesitamos esa clasificación adicional.

Para un conjunto finito F podemos completar ambos exámenes. Si $F = \{x\}$, cualquier radio positivo aísla su único punto. Si F tiene más elementos y $x \in F$, la lista finita de distancias $|y - x|$, con $y \in F \setminus \{x\}$, tiene un mínimo positivo d. El radio $d/2$ aísla a x. Si $x \notin F$ y $F \neq \emptyset$, todas las distancias $|y - x|$, con $y \in F$, son positivas; la mitad de su mínimo produce una bola disjunta de F. Por ello no hay puntos de acumulación ni dentro ni fuera de F: $\mathrm{Acc}(F) = \emptyset$. Para $F = \emptyset$, la conclusión es inmediata. En particular, en $\{-2, 1, 4\}$ cada punto es aislado y no hay ningún punto de acumulación.

Ejercicios de la sección 4.6.

Ejercicio 25. Dos comportamientos dentro del mismo conjunto

Sea $A = (-2, -1) \cup \{0, 2\}$. Clasifica **cada punto de** A como punto de acumulación de A o como punto aislado de A. Tu solución debe:

a) demostrar que todo

$x \in (-2, -1)$ es punto de acumulación mediante una bola perforada arbitraria;

b) exhibir un radio que aísle al punto 0;

c) exhibir un radio que aísle al punto 2;

d) escribir al final la descomposición

$A = (A \cap \mathrm{Acc}(A)) \,\dot\cup\, (A \setminus \mathrm{Acc}(A))$ para este conjunto concreto;

e) explicar qué información adicional aporta esta descomposición respecto de la mera afirmación $A \subseteq \overline{A}$.

Solución. Sea $A = (-2, -1) \cup \{0, 2\}$. Consideremos primero $x \in (-2, -1)$. Sea $r > 0$. Definimos $\delta = \min\left\{\frac{r}{2}, \frac{-1-x}{2}\right\} > 0$ y tomamos $a = x + \delta$. Entonces $x < a < -1$, por lo que $a \in (-2, -1) \subseteq A$. Además, $a \neq x$ y $|a - x| = \delta < r$. Así, $a \in \big(B(x, r) \setminus \{x\}\big) \cap A$.

Como $r > 0$ era arbitrario, $x \in \mathrm{Acc}(A)$. Por tanto, $(-2, -1) \subseteq A \cap \mathrm{Acc}(A)$. Veamos ahora el punto 0. La bola

$$B\left(0, \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

no alcanza ni el intervalo $(-2, -1)$ ni el punto 2. Por tanto, $B\left(0, \frac{1}{2}\right) \cap A = \{0\}$, y 0 es aislado en A. Para 2 sirve, por ejemplo, $r = \frac{1}{2}$. En efecto,

$$B\left(2, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

no contiene ningún punto de A distinto de 2. Así, $B\left(2, \frac{1}{2}\right) \cap A = \{2\}$, y 2 también es aislado. Dentro del conjunto A no hay más puntos. Por tanto, $A \cap \mathrm{Acc}(A) = (-2, -1)$ y $A \setminus \mathrm{Acc}(A) = \{0, 2\}$. La descomposición queda

$$\boxed{A = (-2, -1) \,\dot\cup\, \{0, 2\}.}$$

La primera parte está formada por puntos de A que son de acumulación; la segunda, por puntos aislados. La inclusión $A \subseteq \overline{A}$ sólo dice que todo punto del conjunto es adherente. La descomposición anterior añade una información más fina: distingue si esa adherencia se sostiene gracias a otros puntos del conjunto arbitrariamente cerca o únicamente gracias al propio centro.

Ejercicio 26. Aislamiento expresado mediante vecindades

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ y $x \in A$. Demuestra la equivalencia

$$\boxed{x \text{ es aislado en } A \iff \exists V \text{ vecindad de } x : V \cap A = \{x\}.}$$

La demostración debe cubrir ambos sentidos. En la dirección de izquierda a derecha, explica por qué una bola que aísla al centro es ya una vecindad adecuada. En la dirección de derecha a izquierda, parte de una vecindad general V y vuelve explícitamente a una bola $B(x, r) \subseteq V$. Concluye explicando por qué la palabra «vecindad» no cambia el contenido matemático de la definición, sino sólo comprime la existencia de una bola suficientemente pequeña.

Solución. Supongamos primero que x es aislado en A. Por definición,

$$x \in A$$

y existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \cap A = \{x\}$. La propia bola $V = B(x, r)$ es una vecindad de x. Además, $V \cap A = \{x\}$. Por tanto existe una vecindad con la propiedad requerida.

Recíprocamente, supongamos que existe una vecindad V de x tal que $V \cap A = \{x\}$. Como V es vecindad de x, por definición existe $r > 0$ con $B(x, r) \subseteq V$. Entonces $B(x, r) \cap A \subseteq V \cap A = \{x\}$. Pero $x \in A$ por hipótesis y, además, $x \in B(x, r)$. Así, $x \in B(x, r) \cap A$. Por ambas inclusiones,

$B(x, r) \cap A = \{x\}$. Por tanto x es aislado en A. Hemos demostrado

$$\boxed{x \text{ aislado en } A \iff \exists V \text{ vecindad de } x : V \cap A = \{x\}.}$$

La formulación con vecindades no cambia el contenido matemático. Sólo oculta temporalmente el radio concreto: en cuanto necesitamos verificar la definición, volvemos a desplegar la vecindad como un conjunto que contiene alguna bola centrada en x.

Ejercicio 27. No ser de acumulación no basta para ser aislado

Refuta la afirmación

> Si $x \notin \mathrm{Acc}(A)$, entonces x es aislado en A.

Tu respuesta debe:

a) dar un contraejemplo con un conjunto elemental de la recta real;

b) verificar directamente que

$x \notin \mathrm{Acc}(A)$;

c) explicar por qué x no puede ser aislado en A;

d) identificar la hipótesis exacta que falta para convertir la afirmación falsa en la equivalencia correcta;

e) escribir esa equivalencia correcta.

Solución. Tomemos $A = (0, 1)$ y $x = 2$. Mostremos primero que $2 \notin \mathrm{Acc}(A)$. La distancia desde 2 al intervalo $(0, 1)$ es al menos 1. Por ejemplo,

$$B\left(2, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

es disjunta de A. En particular,

$$\left(B\left(2, \frac{1}{2}\right) \setminus \{2\}\right) \cap A = \emptyset.$$

Por tanto, $2 \notin \mathrm{Acc}(A)$. Sin embargo, 2 no puede ser aislado en A, porque la definición de punto aislado exige en primer lugar $x \in A$, y aquí $2 \notin (0, 1)$. El contraejemplo refuta la

afirmación propuesta. La hipótesis que faltaba era precisamente la pertenencia del centro al conjunto. La equivalencia correcta es

$$\boxed{x \text{ aislado en } A \iff x \in A \text{ y } x \notin \operatorname{Acc}(A).}$$

O, de forma equivalente,

$$\boxed{x \text{ aislado en } A \iff x \in A \setminus \operatorname{Acc}(A).}$$

La diferencia es lógica: «no ser de acumulación» sólo describe el fracaso de la bola perforada; para hablar de aislamiento debemos además saber que el centro pertenece al conjunto.

Ejercicio 28. El aislamiento no se conserva al agrandar el conjunto

Refuta la afirmación

Si $A \subseteq B$ y x es aislado en A, entonces x es aislado en B.

Usa $A = \{0\}, \qquad B = (-1, 1)$.

a) Demuestra que 0 es aislado en A.

b) Demuestra que 0 no es aislado en B.

c) Prueba además que

$0 \in \operatorname{Acc}(B)$.

d) Formula y demuestra la propiedad que sí es válida en la dirección opuesta:

si $C \subseteq A$, $x \in C$ y x es aislado en A, entonces x es aislado en C.

e) Explica por qué añadir puntos cerca del centro puede destruir aislamiento, mientras que retirar puntos conservando el centro no puede hacerlo.

Solución. Tomemos $A = \{0\}, \qquad B = (-1, 1)$. Es claro que $A \subseteq B$. El punto 0 es aislado en A. De hecho, para cualquier $r > 0$, $B(0, r) \cap A = \{0\}$. En particular, podemos tomar $r = 1$. En cambio, 0 no es aislado en B. Sea $r > 0$. El punto $y = \frac{1}{2} \min\{r, 1\}$ satisface $0 < y < 1$, de modo que $y \in B$.

Además, $y \neq 0$ y $|y| < r$. Así, $y \in (B(0, r) \setminus \{0\}) \cap B$. Como $r > 0$ era arbitrario, $0 \in \operatorname{Acc}(B)$. Por tanto 0 no es aislado en B. Esto refuta la supuesta monotonicidad ascendente del aislamiento. Sí existe una propiedad válida en la dirección opuesta. Supongamos $C \subseteq A, \qquad x \in C$, y que x es aislado en A.

Entonces existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \cap A = \{x\}$. Como $C \subseteq A$, tenemos $B(x, r) \cap C \subseteq B(x, r) \cap A = \{x\}$. Pero $x \in C$ y $x \in B(x, r)$, así que x pertenece a la intersección. Por tanto, $B(x, r) \cap C = \{x\}$. Luego x es aislado en C. La explicación local es clara: añadir puntos puede introducir nuevos puntos del conjunto dentro de toda ventana alrededor de x y destruir el aislamiento. Retirar puntos, en cambio, no puede crear nuevos vecinos del centro.

Ejercicio 29. Qué modificaciones puede ignorar un punto aislado

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y supón que x es aislado en A. Fija un radio $r_0 > 0$ tal que $B(x, r_0) \cap A = \{x\}$.

a) Sea $C \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto tal que

$C \cap B(x, r_0) = \emptyset$. Demuestra que x sigue siendo aislado en $A \cup C$.

b) Sea $D \subseteq A \setminus \{x\}$. Demuestra que x sigue siendo aislado en

$A \setminus D$.

c) Combina ambos apartados: si primero quitas puntos de A distintos de x y luego añades un conjunto completamente exterior a $B(x, r_0)$, demuestra que el mismo radio r_0 sigue certificando aislamiento.

d) Muestra que la condición del apartado a) no puede suprimirse. Usa

$$A = \{0\}, \qquad x = 0, \qquad C = (0, 1).$$

e) Extrae una conclusión local: explica por qué el aislamiento depende únicamente de lo que ocurre en alguna ventana suficientemente pequeña alrededor de x, y no del comportamiento global del conjunto lejos del centro.

Solución. Supongamos que x es aislado en A y que $B(x, r_0) \cap A = \{x\}$. Sea primero $C \subseteq \mathbb{R}$ tal que $C \cap B(x, r_0) = \emptyset$. Entonces

$$B(x, r_0) \cap (A \cup C) = (B(x, r_0) \cap A) \cup (B(x, r_0) \cap C).$$

Por las hipótesis, $B(x, r_0) \cap A = \{x\}$ y $B(x, r_0) \cap C = \emptyset$. Por tanto, $B(x, r_0) \cap (A \cup C) = \{x\}$. Así, el mismo radio r_0 demuestra que x sigue siendo aislado en $A \cup C$. Ahora sea $D \subseteq A \setminus \{x\}$. Como $x \notin D$, tenemos $x \in A \setminus D$. Además, $B(x, r_0) \cap (A \setminus D) \subseteq B(x, r_0) \cap A = \{x\}$.

Y como el centro pertenece a $A \setminus D$, la intersección no es vacía. Por tanto, $B(x, r_0) \cap (A \setminus D) = \{x\}$. Así, x sigue siendo aislado después de quitar cualquier colección de puntos de A distinta del centro. Combinemos ambos pasos. Definamos $E = (A \setminus D) \cup C$. Entonces

$$B(x, r_0) \cap E = (B(x, r_0) \cap (A \setminus D)) \cup (B(x, r_0) \cap C) = \{x\} \cup \emptyset = \{x\}.$$

Por tanto el mismo radio r_0 sigue certificando aislamiento. La condición sobre C sí es necesaria para este argumento. Tomemos

$$A = \{0\}, \qquad x = 0, \qquad C = (0, 1).$$

El punto 0 es aislado en A. Sin embargo, $A \cup C = [0, 1)$. Para cualquier $r > 0$, el punto $y = \frac{1}{2} \min\{r, 1\}$ pertenece a $(0, 1)$, es distinto de 0 y satisface $|y| < r$. Por tanto, $0 \in \mathrm{Acc}(A \cup C)$, y 0 deja de ser aislado. La conclusión es estrictamente local: una vez encontrada una ventana que aísla a x, cualquier modificación del conjunto que ocurra completamente fuera de esa ventana es invisible para el aislamiento de x. Sólo las modificaciones que introducen o eliminan puntos dentro de una ventana relevante pueden cambiar ese comportamiento local.

4.7. Abiertos y cerrados: de lo local a lo global

Diremos que A es **abierto** si todos sus puntos son interiores: $\forall x \in A\ \exists r_x > 0 : \ B(x, r_x) \subseteq A$. Como siempre $\mathrm{int}(A) \subseteq A$, esto equivale a $A = \mathrm{int}(A)$. Los intervalos abiertos cumplen la definición por los radios construidos en §4.2. También cada bola es abierta: si $x \in B(a, R)$, el margen $R - |x - a| > 0$ y la desigualdad triangular dan una bola centrada en x contenida en $B(a, R)$.

Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de abiertos, su unión es abierta. Para $x \in \bigcup_i A_i$, existe un índice j con $x \in A_j$; la apertura de A_j proporciona $B(x, r) \subseteq A_j \subseteq \bigcup_i A_i$. Basta una pieza que contenga al punto, de modo que la familia puede ser arbitraria, incluida la vacía: su unión es el vacío y la condición de apertura se cumple sin puntos que examinar.

La intersección de dos abiertos es abierta por una razón diferente. Para $x \in A \cap B$ elegimos una bola contenida en cada conjunto y tomamos el mínimo de sus radios. El mismo argumento sirve para una intersección finita. Para la familia vacía, la intersección es $\mathbb{R}$, que también es abierta porque cualquier bola queda en la recta. La finitud no se puede eliminar. Cada $A_r = (-r, r)$, con $r > 0$, es abierto y $\bigcap_{r>0} A_r = \{0\}$. El punto 0 pertenece a todos ellos; si $x \neq 0$, el índice $r = |x|/2$ lo excluye. El singleton no es abierto, pues toda bola positiva centrada en 0 contiene $r/2 \neq 0$. Una familia arbitraria de radios positivos puede carecer de un margen positivo común.

Un conjunto F es **cerrado** si F^c es abierto. Desplegando la definición, cada $x \notin F$ debe admitir un radio $r_x > 0$ con $B(x, r_x) \cap F = \emptyset$. Así, para un cerrado, todos los puntos que no pertenecen al conjunto son exteriores en el sentido técnico: $F^c = \mathrm{ext}(F)$.

Podemos reconocer los cerrados por su clausura: F cerrado $\iff F = \overline{F}$. Si F es cerrado y $x \notin F$, la apertura de F^c da una bola que evita F, por lo que $x \notin \overline{F}$. Esto prueba $\overline{F} \subseteq F$;

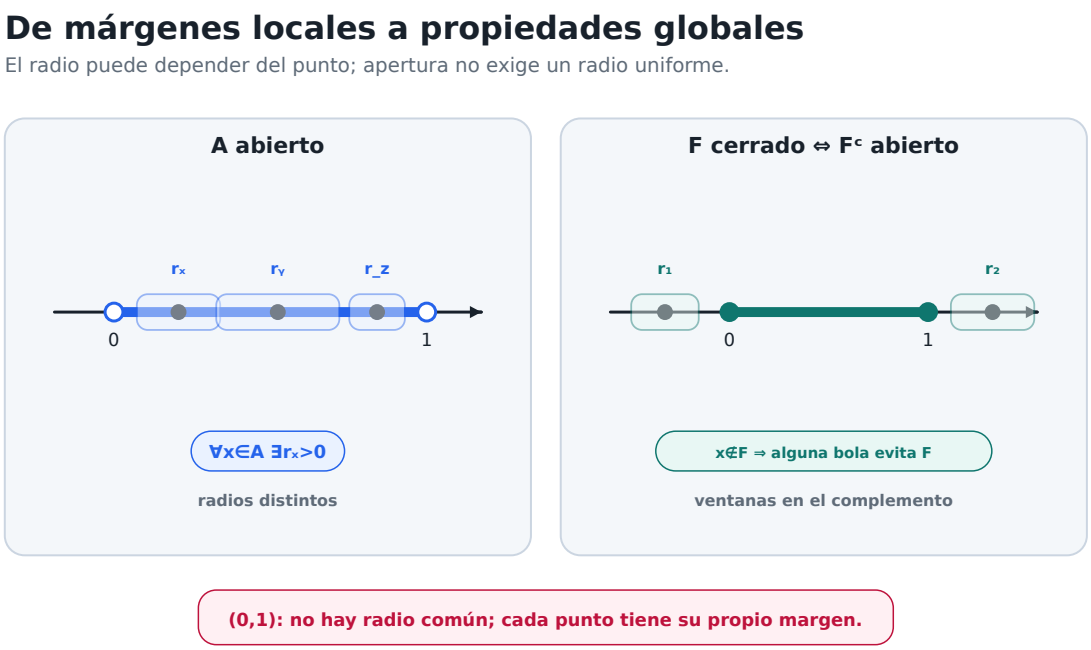


Figura 4.6. Ser abierto es global, pero se construye con radios locales que pueden depender del punto; cerrado se lee dualmente en el complemento.

la otra inclusión vale para todo conjunto. Recíprocamente, si $F = \overline{F}$ y $x \in F^c$, entonces $x \notin \overline{F}$; negar adherencia proporciona una bola disjunta de F y contenida en F^c. Cada punto del complemento es interior, de modo que F^c es abierto y F es cerrado.

La identidad $\overline{A} = A \cup \mathrm{Acc}(A)$ permite otra lectura: A cerrado $\iff$ $\mathrm{Acc}(A) \subseteq A$. En efecto, $A = A \cup \mathrm{Acc}(A)$ equivale exactamente a esa inclusión. Un cerrado puede contener puntos aislados; lo que exige es contener todos sus puntos de acumulación. Por ejemplo, $\{a\}$ es cerrado: para $x \neq a$, el radio $|x-a|/2$ da una bola que evita al singleton.

La idempotencia de la clausura muestra ahora que $\overline{A}$ es cerrado, porque coincide con su propia clausura. Además, es el menor cerrado que contiene a A. Si F es cerrado y $A \subseteq F$, la monotonicidad da $\overline{A} \subseteq \overline{F} = F$. Junto con $A \subseteq \overline{A}$, esto prueba la propiedad extremal. La descripción global se obtiene de la definición local, una vez introducidos los cerrados.

Las leyes de De Morgan trasladan las operaciones de abiertos a cerrados. Para una familia arbitraria de cerrados $\{F_i\}_{i\in I}$, el complemento de $\bigcap_i F_i$ es $\bigcup_i F_i^c$, unión de abiertos; por tanto, la intersección es cerrada. Para $F_1, \ldots, F_n$ cerrados, el complemento de su unión es la intersección finita de los abiertos F_k^c; por tanto, la unión finita es cerrada. Los casos vacíos también quedan incluidos: $\emptyset$ y $\mathbb{R}$ son abiertos y, por ser complementarios, cerrados.

Para $a < b$, el intervalo $[a, b]$ es cerrado porque su complemento $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$ es abierto; los semirrayos son abiertos usando la mitad de la distancia al extremo. Los intervalos $[a, b)$ y $(a, b]$ no son abiertos ni cerrados: tienen un extremo incluido sin margen interior y un extremo adherente excluido. Por ello, «cerrado» no significa «no abierto»; la relación que define ambos conceptos pasa por el complemento.

Ejercicios de la sección 4.7.

Ejercicio 30. Un radio por punto no es un radio para todos

Considera el intervalo $A = (0, 1)$.

a) Demuestra directamente que

$\forall x \in A\ \exists r_x > 0 : B(x, r_x) \subseteq A.$

b) Demuestra que es falsa la afirmación más fuerte

$\exists r > 0\ \forall x \in A : B(x, r) \subseteq A$. Tu argumento debe comenzar con un radio arbitrario $r > 0$ y construir un punto $x \in (0, 1)$ para el cual ese radio no sirve.

c) Explica con palabras por qué intercambiar el orden de

$$\forall x \qquad \text{y} \qquad \exists r_x$$

cambia la afirmación matemática.

d) Da un ejemplo de conjunto para el cual la afirmación fuerte sí sea verdadera.

Solución. Sea $A = (0, 1)$. Fijemos $x \in (0, 1)$. Las cantidades

$$x \qquad \text{y} \qquad 1 - x$$

son positivas. Por tanto, $r_x = \frac{1}{2}\min\{x, 1 - x\} > 0$ satisface $B(x, r_x) \subseteq (0, 1)$. Así hemos demostrado $\forall x \in A\ \exists r_x > 0 : B(x, r_x) \subseteq A$. Veamos ahora que no existe un radio único que funcione para todos los puntos. Sea $r > 0$ arbitrario. Tomemos $x = \min\left\{\frac{r}{2}, \frac{1}{2}\right\}$. Entonces $0 < x < 1$, así que $x \in A$.

Pero el punto $y = x - \frac{3x}{2} = -\frac{x}{2}$ satisface $|y - x| = \frac{3x}{2}$. Como $x \leq r/2$, tenemos $\frac{3x}{2} \leq \frac{3r}{4} < r$, de modo que $y \in B(x, r)$. Sin embargo, $y = -\frac{x}{2} < 0$, por lo que $y \notin (0, 1)$. Así, $B(x, r) \not\subseteq (0, 1)$. Como $r > 0$ era arbitrario, no existe un radio positivo común para todos los puntos del intervalo.

La diferencia lógica es fundamental: $\forall x \in A\ \exists r_x > 0$ permite que el radio dependa del punto. En cambio, $\exists r > 0\ \forall x \in A$ exige una única escala que funcione simultáneamente en todos los centros. Un conjunto para el cual la afirmación fuerte sí es verdadera es $A = \mathbb{R}$. Cualquier radio fijo, por ejemplo $r = 1$, satisface $B(x, 1) \subseteq \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 31. Del margen local al complemento cerrado

Sea $U = (-2, 0) \cup (1, \infty)$ y define $F = U^c$.

a) Escribe explícitamente F.

b) Demuestra que U es abierto construyendo, para cada tipo de punto $x \in U$, un radio $r_x > 0$ con

$B(x, r_x) \subseteq U$.

c) Usa únicamente la definición por complemento para concluir que F es cerrado.

d) Reinterpreta la misma situación desde F: para cada $x \notin F$, exhibe una bola centrada en x que no intersecte F.

e) Explica por qué los radios deben depender de x y por qué una figura que dibuje sólo unas pocas ventanas no sustituye la condición

$\forall x \in U\ \exists r_x > 0$.

Solución. Partimos de $U = (-2, 0) \cup (1, \infty)$. Su complemento es

$$\boxed{F = (-\infty, -2] \cup [0, 1].}$$

Demostremos que U es abierto. Si $x \in (-2, 0)$, podemos tomar $r_x = \frac{1}{2}\min\{x + 2, -x\} > 0$. Entonces $B(x, r_x) \subseteq (-2, 0) \subseteq U$. Si $x > 1$, tomamos $r_x = \frac{x-1}{2} > 0$. Entonces $B(x, r_x) \subseteq (1, \infty) \subseteq U$. Todo punto de U posee así una bola contenida en U, por lo que U es abierto. Como

$F = U^c$, la definición de conjunto cerrado da inmediatamente:

$$\boxed{F \text{ es cerrado.}}$$

La misma información puede leerse desde F. Si $x \notin F$, entonces $x \in U$. Los radios construidos arriba producen una bola contenida en $U = F^c$, y por tanto $B(x, r_x) \cap F = \emptyset$.

Así, todo punto que no pertenece a F es exterior a F: tiene una bola disjunta del conjunto. Los radios dependen del centro. Cerca de -2, 0 o 1 el margen disponible puede hacerse tan pequeño como sea necesario. Por eso unas pocas ventanas dibujadas sólo ilustran casos concretos: la afirmación de apertura exige controlar **cada** punto de U, aunque el radio elegido pueda cambiar de un punto a otro.

Ejercicio 32. Interior e intersecciones: qué sobrevive para familias arbitrarias

Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia no vacía de subconjuntos de $\mathbb{R}$.

a) Demuestra que siempre

$$\boxed{\operatorname{int}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} \operatorname{int}(A_i).}$$

b) Demuestra que, si I es finito, entonces la inclusión es una igualdad.

c) Muestra que para una familia arbitraria la igualdad puede fallar. Usa

$A_r = (-r, r), \qquad r > 0$. Calcula $\operatorname{int}\left(\bigcap_{r>0} A_r\right)$ y $\bigcap_{r>0} \operatorname{int}(A_r)$.

d) Identifica exactamente qué paso de la demostración finita deja de estar disponible en la familia arbitraria.

Solución. Sea $x \in \operatorname{int}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$. Existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i$. Por definición de intersección, esto implica $B(x, r) \subseteq A_i$ para todo $i \in I$. Por tanto, $x \in \operatorname{int}(A_i)$ para todo i, y así $x \in \bigcap_{i\in I} \operatorname{int}(A_i)$. Hemos demostrado

$$\boxed{\operatorname{int}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} \operatorname{int}(A_i).}$$

Supongamos ahora que $I = \{1, \dots, n\}$ es finito y que $x \in \bigcap_{k=1}^{n} \operatorname{int}(A_k)$. Para cada k existe $r_k > 0$ con $B(x, r_k) \subseteq A_k$. Tomamos $\rho = \min\{r_1, \dots, r_n\} > 0$. Entonces $B(x, \rho) \subseteq A_k$ para todo k, y por tanto $B(x, \rho) \subseteq \bigcap_{k=1}^{n} A_k$. Así, $x \in \operatorname{int}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)$.

En el caso finito obtenemos la igualdad

$$\boxed{\operatorname{int}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \bigcap_{k=1}^{n} \operatorname{int}(A_k).}$$

Veamos el fallo para una familia arbitraria. Sea $A_r = (-r, r), \qquad r > 0$. Cada A_r es abierto, así que $\operatorname{int}(A_r) = A_r$. Además, $\bigcap_{r>0} A_r = \{0\}$. Como el singleton no contiene ninguna bola positiva alrededor de 0, $\operatorname{int}(\{0\}) = \emptyset$. Por tanto, $\operatorname{int}\left(\bigcap_{r>0} A_r\right) = \emptyset$, mientras que $\bigcap_{r>0} \operatorname{int}(A_r) = \bigcap_{r>0} A_r = \{0\}$.

La inclusión es estricta. El paso finito que falla es la elección de un único radio positivo menor o igual que todos los radios disponibles. Para una familia arbitraria de radios positivos no tiene por qué existir un mínimo positivo.

Ejercicio 33. La frontera siempre es cerrada

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Demuestra que

$$\boxed{\partial A \text{ es un conjunto cerrado.}}$$

Puedes usar los resultados ya demostrados: $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$, la idempotencia de la clausura y la caracterización F cerrado $\iff F = \overline{F}$. Tu prueba debe dejar explícito:

a) por qué $\overline{A}$ es cerrado;

b) por qué $\overline{A^c}$ es cerrado;

c) por qué la intersección de esos dos conjuntos es cerrada.

Concluye explicando por qué este resultado no afirma que la frontera deba ser finita ni que deba estar contenida en A.

Solución. Partimos de $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$. Primero mostraremos que $\overline{A}$ es cerrado. Por idempotencia, $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$. Y por la caracterización de §4.7, F cerrado $\iff F = \overline{F}$. Aplicada a $F = \overline{A}$, esta igualdad muestra que $\overline{A}$ es cerrado. El mismo argumento aplicado a A^c demuestra que $\overline{A^c}$ también es cerrado.

La intersección de dos cerrados es cerrada, porque las intersecciones arbitrarias de cerrados son cerradas. Por tanto, $\overline{A} \cap \overline{A^c}$ es cerrado. Como este conjunto es precisamente ∂A, concluimos

$$\boxed{\partial A \text{ es cerrado.}}$$

El resultado habla del comportamiento topológico de la frontera, no de su tamaño ni de su pertenencia al conjunto original. Una frontera puede contener puntos que pertenecen a A y puntos que no pertenecen a A; además, nada en la demostración exige que sea finita.

Ejercicio 34. El mínimo de infinitos radios puede desaparecer

Un estudiante intenta demostrar que una intersección arbitraria de abiertos es abierta:

> Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ una familia de abiertos y sea $x \in \bigcap_{i\in I} U_i$. Para cada i existe $r_i > 0$ tal que $B(x, r_i) \subseteq U_i$. Tomamos $r = \min_{i\in I} r_i > 0$. Entonces $B(x, r) \subseteq \bigcap_{i\in I} U_i$. Por tanto la intersección es abierta.

a) Identifica la afirmación no justificada.

b) Explica por qué el hecho de que cada r_i sea positivo no garantiza un mínimo positivo para una familia arbitraria.

c) Usa la familia

$U_t = (-t, t), \qquad t > 0$, para mostrar concretamente el fallo.

d) Calcula

$\bigcap_{t>0} U_t$ y demuestra que ese conjunto no es abierto.

e) Repara el enunciado del estudiante sustituyendo «arbitraria» por la hipótesis exacta que sí permite la prueba con un mínimo de radios.

Solución. La línea no justificada es $r = \min_{i\in I} r_i > 0$. Que cada r_i sea positivo no implica que una familia arbitraria de ellos posea un mínimo positivo. El ejemplo canónico es $U_t = (-t, t), \qquad t > 0$. Cada U_t es abierto. El punto 0 pertenece a todos los U_t. Para cada $t > 0$, podemos certificar el margen en 0 con, por ejemplo, $r_t = \frac{t}{2} > 0$.

Pero la familia $\left\{\frac{t}{2} : t > 0\right\}$ no posee mínimo positivo: dado cualquier candidato $a > 0$, el número $a/2$ es un elemento positivo menor. Calculemos la intersección. El punto 0 pertenece a todos los intervalos. Si $x \neq 0$, elegimos $t = \frac{|x|}{2} > 0$. Entonces $|x| > t$, por lo que $x \notin (-t, t)$. Así, $\bigcap_{t>0} U_t = \{0\}$. Pero $\{0\}$ no es abierto: ninguna bola positiva centrada en 0 queda contenida en el singleton.

Por tanto, una intersección arbitraria de abiertos puede no ser abierta. La reparación correcta del enunciado es:

> **una intersección finita de conjuntos abiertos es abierta.**

En ese caso sólo intervienen finitísimos radios positivos y su mínimo sí existe y sigue siendo positivo.

Ejercicio 35. Una unión arbitraria de cerrados puede dejar de ser cerrada

Para cada $r > 0$, define $F_r = [r, \infty)$.

a) Demuestra que cada F_r es cerrado.

b) Calcula exactamente

$\bigcup_{r>0} F_r$.

c) Demuestra que la unión obtenida no es cerrada.

d) Explica por qué esto no contradice el teorema de que las uniones **finitas** de cerrados son cerradas.

e) Pasa al complemento y explica cómo este mismo ejemplo refleja el fallo de estabilidad de los abiertos bajo intersecciones arbitrarias.

Solución. Para cada $r > 0$, sea $F_r = [r, \infty)$. Su complemento es $F_r^c = (-\infty, r)$, que es abierto. Por tanto, F_r es cerrado. Afirmamos que $\bigcup_{r>0} F_r = (0, \infty)$. Si x pertenece a la unión, existe $r > 0$ tal que $x \geq r$, de modo que $x > 0$.

Recíprocamente, si $x > 0$, elegimos, por ejemplo, $r = \frac{x}{2} > 0$. Entonces $x \geq r$, así que $x \in F_r$ y, por tanto, pertenece a la unión. Queda demostrada la igualdad. El conjunto $(0, \infty)$ no es cerrado. Su clausura contiene a 0, porque toda bola positiva centrada en 0 intersecta $(0, \infty)$, pero $0 \notin (0, \infty)$. Equivalentemente, su complemento $(-\infty, 0]$ no es abierto.

Así, una unión arbitraria de cerrados puede dejar de ser cerrada. No hay contradicción con el teorema de §4.7, que sólo garantiza estabilidad bajo **uniones finitas** de cerrados. Al pasar a complementos, $F_r^c = (-\infty, r)$, y por De Morgan, $\left(\bigcup_{r>0} F_r\right)^c = \bigcap_{r>0} F_r^c = (-\infty, 0]$. Esta intersección arbitraria de abiertos no es abierta. El mismo fenómeno aparece así en su forma dual.

Ejercicio 36. Dos envolventes extremales de un conjunto

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$.

a) Demuestra directamente que $\text{int}(A)$ es abierto.

b) Demuestra que, si G es abierto y

$G \subseteq A$, entonces $G \subseteq \text{int}(A)$. Concluye que $\text{int}(A)$ es el **mayor conjunto abierto contenido en** A.

c) Demuestra que $\overline{A}$ es cerrado.

d) Sea F cerrado y supón

$A \subseteq F$. Demuestra que $\overline{A} \subseteq F$. Concluye que $\overline{A}$ es el **menor conjunto cerrado que contiene a** A.

e) Organiza los dos resultados en un esquema dual:

$\text{int}(A) \subseteq A \subseteq \overline{A}$. Explica qué significa que las dos operaciones actúen como envolventes extremales desde lados opuestos.

f) Aplica el esquema a

$A = [0, 1)$ y determina las dos envolventes.

Solución. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$.

El interior es abierto

Tomemos $x \in \text{int}(A)$. Por definición, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq A$. Queremos demostrar que x es interior también a $\text{int}(A)$. Sea $y \in B(x, r)$. Como $|y - x| < r$, queda un margen positivo $\delta_y = r - |y - x| > 0$. Por el margen interno de una bola, $B(y, \delta_y) \subseteq B(x, r) \subseteq A$. Así,

$y \in \text{int}(A)$. Como esto vale para todo $y \in B(x, r)$, $B(x, r) \subseteq \text{int}(A)$. Por tanto cada punto de $\text{int}(A)$ es interior a $\text{int}(A)$, y concluimos que

$$\boxed{\text{int}(A) \text{ es abierto.}}$$

El interior es el mayor abierto contenido en A

Sea G abierto y supongamos $G \subseteq A$. Tomemos $x \in G$. Como G es abierto, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq G$. Y como $G \subseteq A$, $B(x, r) \subseteq A$. Por tanto $x \in \text{int}(A)$. Así, $G \subseteq \text{int}(A)$. Como además $\text{int}(A) \subseteq A$, obtenemos la propiedad extremal:

$$\boxed{\text{int}(A) = \text{el mayor conjunto abierto contenido en } A.}$$

La clausura es cerrada

Por idempotencia, $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$. Como un conjunto F es cerrado si y sólo si $F = \overline{F}$, se sigue que

$$\boxed{\overline{A} \text{ es cerrado.}}$$

La clausura es el menor cerrado que contiene a A

Sea F cerrado y supongamos $A \subseteq F$. Por monotonicidad de la clausura, $\overline{A} \subseteq \overline{F}$. Como F es cerrado, $\overline{F} = F$. Por tanto, $\overline{A} \subseteq F$. Y como siempre $A \subseteq \overline{A}$, concluimos que

$$\boxed{\overline{A} = \text{el menor conjunto cerrado que contiene a } A.}$$

Las dos operaciones enmarcan al conjunto:

$$\boxed{\text{int}(A) \subseteq A \subseteq \overline{A}.}$$

El interior aproxima A desde dentro mediante el mayor conjunto abierto que puede conservarse sin salir de A. La clausura aproxima A desde fuera mediante el menor conjunto cerrado que debe contenerlo. Para $A = [0, 1)$, tenemos

$$\boxed{\text{int}(A) = (0, 1)}$$

y

$$\boxed{\overline{A} = [0, 1].}$$

Así, en este ejemplo las dos envolventes se obtienen retirando el extremo sin margen interior y añadiendo el extremo adherente que faltaba.

4.8. Un diccionario local para leer conjuntos

Las definiciones pueden compararse atendiendo al cuantificador, al lado observado y al tratamiento del centro. El siguiente diccionario mantiene a la vista esas tres decisiones:

Noción	Test local
Interior	$\exists r > 0 :\ B(x, r) \subseteq A$
Exterior	$\exists r > 0 :\ B(x, r) \subseteq A^c$
Adherencia	$\forall r > 0 :\ B(x, r) \cap A \neq \emptyset$
Frontera	Para todo $r > 0$, tanto $B(x, r) \cap A$ como $B(x, r) \cap A^c$ son no vacíos
Acumulación	$\forall r > 0 :\ (B(x, r) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$
Aislamiento	$x \in A$ y $\exists r > 0 :\ B(x, r) \cap A = \{x\}$

Interior y exterior buscan un radio favorable. Adherencia, frontera y acumulación obligan a responder a todos los radios. La frontera exige testigos en los dos lados; la acumulación

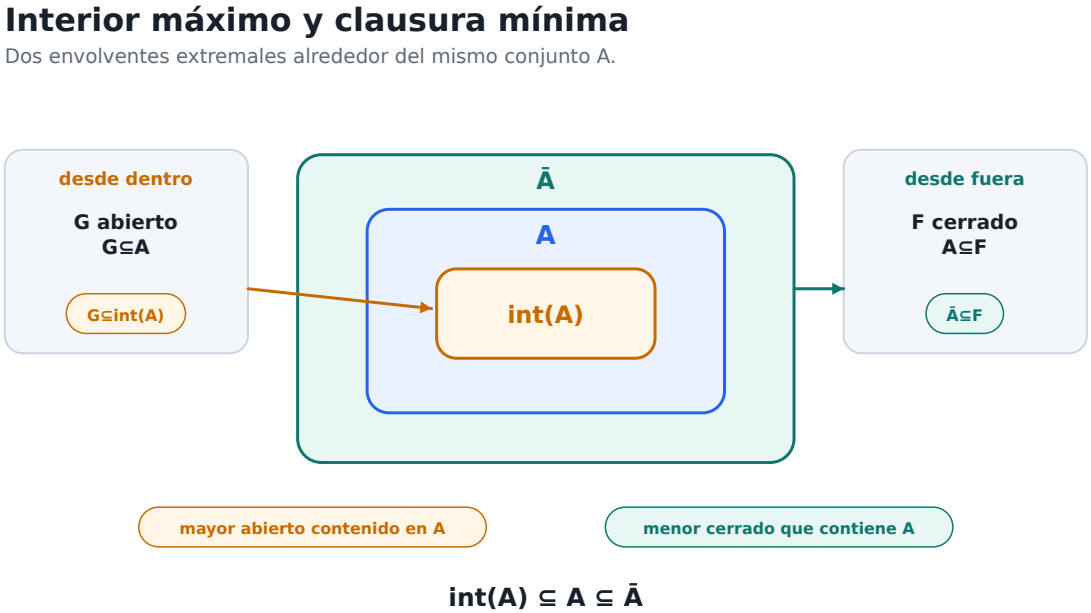


Figura 4.7. Interior y clausura envuelven a A desde lados opuestos: el interior es el mayor abierto contenido y la clausura el menor cerrado que contiene.

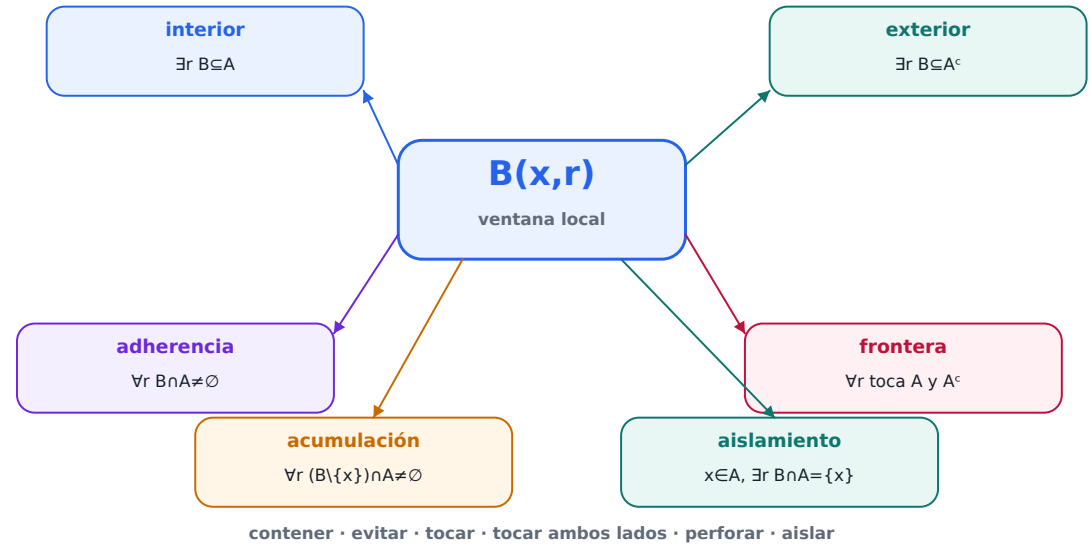


Figura 4.8. Las nociones de C04 reutilizan la misma ventana y cambian el cuantificador o la forma de intersectar el conjunto.

impide usar el centro. Al negar estos tests se invierten los cuantificadores: no ser interior significa que toda bola encuentra el complemento; no ser adherente significa que alguna bola evita A; no ser de acumulación significa que alguna bola perforada evita A. En este último caso, si el centro pertenece a A, es aislado; si no pertenece, la bola entera evita A y el punto es exterior.

El interior también es idempotente. La inclusión $\operatorname{int}(\operatorname{int}(A)) \subseteq \operatorname{int}(A)$ vale por la inclusión general del interior en el conjunto. Para la otra, sea $x \in \operatorname{int}(A)$ y elijamos $B(x, r) \subseteq A$. Si

$y \in B(x,r)$, el margen $\delta_y = r - |y-x| > 0$ produce $B(y,\delta_y) \subseteq B(x,r) \subseteq A$, de modo que $y \in \operatorname{int}(A)$. Así, $B(x,r) \subseteq \operatorname{int}(A)$, lo cual prueba que x es interior al interior. Hemos obtenido $\operatorname{int}(\operatorname{int}(A)) = \operatorname{int}(A)$. Para la clausura repartimos r entre dos desplazamientos; para el interior usamos el margen que conserva una bola al cambiar de centro. Ambas operaciones quedan estables después de una aplicación, pero los argumentos responden a sus distintos cuantificadores. Los ejemplos básicos permiten separar las nociones globales:

Conjunto, con $a < b$	Interior	Clausura	Frontera	Abierto / cerrado
(a,b)	(a,b)	$[a,b]$	$\{a,b\}$	Sí / no
$[a,b]$	(a,b)	$[a,b]$	$\{a,b\}$	No / sí
$[a,b)$	(a,b)	$[a,b]$	$\{a,b\}$	No / no

En los tres casos los puntos de acumulación forman $[a,b]$: el intervalo abierto está contenido en los otros dos, y ninguno tiene puntos de clausura fuera de $[a,b]$. En cambio, cada entero es aislado en $\mathbb{Z}$. La infinitud de un conjunto no obliga a que sus propios puntos sean de acumulación. Para $A = (0,1) \cup \{2\}$ tenemos $\operatorname{int}(A) = (0,1)$, $\overline{A} = [0,1] \cup \{2\}$, $\operatorname{Acc}(A) = [0,1]$ y $\partial A = \{0,1,2\}$. Los testigos de §4.5 prueban acumulación en $[0,1]$; fuera de ese intervalo y de 2, la mitad de la menor distancia al intervalo y al punto separado da una bola disjunta de A. El punto 2 es el único aislado. Este ejemplo distingue clausura, frontera y acumulación en un mismo conjunto.

Para $A = (0,1) \setminus \{1/2\}$, la unión $(0,1/2) \cup (1/2,1)$ muestra además que el conjunto es abierto. El punto ausente $1/2$ pertenece a su clausura, frontera y conjunto de acumulación: para cada $r > 0$, el punto $1/2 + \min\{r/2, 1/4\}$ encuentra A sin usar el centro, mientras que el centro mismo encuentra A^c. La perforación cambia la pertenencia sin crear una separación local del conjunto.

En los capítulos siguientes, este lenguaje tendrá usos nuevos. C06 formulará la convergencia mediante captura eventual en vecindades; C08 volverá sobre acumulación al estudiar Bolzano–Weierstrass; C13 y C14 usarán vecindades en límites y continuidad. Interior, clausura, frontera, abiertos y cerrados entrarán en los argumentos de conexidad y compacidad de C15 y C16, y C30 trasladará la lógica de bolas a espacios métricos generales. Aquí hemos construido sus tests sobre la recta: para aplicarlos será necesario conservar el orden de los cuantificadores y reconocer qué puntos pueden servir como testigos.

Ejercicios de la sección 4.8.

Ejercicio 37. Reconstruir el diccionario desde tres decisiones

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y fija $x \in \mathbb{R}$. Sin consultar una tabla previa, reconstruye las seis nociones locales del capítulo a partir de estas tres decisiones:

1. cuantificador sobre el radio:
$$\exists r > 0 \qquad \text{o} \qquad \forall r > 0;$$
2. lado observado:
$$A, \qquad A^c, \qquad \text{o ambos;}$$
3. centro permitido o perforado.

Tu reconstrucción debe producir las condiciones para:

- interior;
- exterior;
- adherencia;
- frontera;
- acumulación;
- aislamiento.

Después demuestra las relaciones $\operatorname{int}(A) \subseteq A \subseteq \overline{A}$, $\operatorname{ext}(A) = \operatorname{int}(A^c)$, $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$, y x aislado en $A \iff x \in A \setminus \operatorname{Acc}(A)$. Finalmente, explica cuál de las seis nociones no puede decidirse sólo con información sobre bolas completas porque exige perforar explícitamente el centro.

Solución. Partimos siempre de una bola $B(x,r)$. Las seis nociones aparecen al cambiar el cuantificador, el lado observado y el tratamiento del centro. Para interior buscamos **algún** radio cuya bola completa quede dentro de A: $x \in \operatorname{int}(A) \iff \exists r > 0 : B(x,r) \subseteq A$. Para exterior usamos el mismo cuantificador, pero miramos el complemento: $x \in \operatorname{ext}(A) \iff \exists r > 0 : B(x,r) \subseteq A^c$.

Para adherencia cambiamos a cuantificador universal y sólo exigimos intersección: $x \in \overline{A} \iff \forall r > 0 : B(x,r) \cap A \neq \emptyset$. Para frontera controlamos simultáneamente ambos lados:

$$x \in \partial A \iff \forall r > 0 : \quad \begin{cases} B(x,r) \cap A \neq \emptyset, \\ B(x,r) \cap A^c \neq \emptyset. \end{cases}$$

Para acumulación perforamos el centro: $x \in \operatorname{Acc}(A) \iff \forall r > 0 : (B(x,r) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. Finalmente, aislamiento exige pertenencia del centro y una ventana en la cual no aparezca ningún otro punto de A:

$$x \text{ aislado en } A \iff x \in A \text{ y } \exists r > 0 : B(x,r) \cap A = \{x\}.$$

Las inclusiones $\operatorname{int}(A) \subseteq A \subseteq \overline{A}$ son inmediatas desde las definiciones. Si una bola queda contenida en A, su centro pertenece a A. Y si $x \in A$, toda bola centrada en x intersecta A al menos en el propio centro. La dualidad exterior–interior es $\operatorname{ext}(A) = \operatorname{int}(A^c)$, porque ambas condiciones significan exactamente que existe una bola centrada en x contenida en A^c.

Para la frontera, $x \in \partial A$ equivale a ser adherente a A y adherente a A^c. Por tanto, $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$. Por último, si $x \in A$, negar la acumulación significa que existe $r > 0$ tal que $(B(x,r) \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset$. Como el centro sí pertenece a A, esto equivale a $B(x,r) \cap A = \{x\}$.

Así, x aislado en $A \iff x \in A \setminus \operatorname{Acc}(A)$. La noción que exige explícitamente una bola perforada es la acumulación. Precisamente allí debemos impedir que el centro se use como testigo automático.

Ejercicio 38. Radiografía completa de un conjunto mixto

Sea

$$A = (-2,-1] \cup \left((0,1) \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\} \right) \cup \{2\}.$$

Determina exactamente:

$$\operatorname{int}(A), \qquad \overline{A}, \qquad \partial A, \qquad \operatorname{Acc}(A),$$

y el conjunto de puntos aislados de A. Después determina:

1. $\operatorname{ext}(A)$;
2. si A es abierto;
3. si A es cerrado.

Tu solución debe usar las identidades del capítulo para reducir trabajo cuando sea legítimo, pero debe justificar directamente al menos:

- por qué $1/2$ pertenece a $\operatorname{Acc}(A)$;
- por qué 2 es aislado;
- por qué -1 pertenece a la frontera aunque pertenezca a A.

Solución. Sea

$$A = (-2,-1] \cup \left((0,1) \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}\right) \cup \{2\}.$$

Interior

Los puntos con margen interior son exactamente los que quedan dentro de los dos intervalos, lejos de extremos y de la perforación:

$$\boxed{\operatorname{int}(A) = (-2,-1) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right).}$$

El punto -1 pertenece a A pero carece de margen por la derecha. El punto 2 está aislado y tampoco posee una bola completa contenida en A.

Clausura

La primera componente aporta $[-2,-1]$. La componente perforada aporta todo $[0,1]$, porque los extremos y el punto $1/2$ son adherentes. El singleton $\{2\}$ aporta el propio punto. Por tanto,

$$\boxed{\overline{A} = [-2,-1] \cup [0,1] \cup \{2\}.}$$

Acumulación

En la primera componente, todos los puntos de $[-2,-1]$ son de acumulación. En la parte perforada, todos los puntos de $[0,1]$ son de acumulación. En particular, para $x = 1/2$ y $r > 0$ podemos tomar $a = \frac{1}{2} + \min\left\{\frac{r}{2}, \frac{1}{4}\right\}$. Entonces

$$a \in A, \qquad a \neq \frac{1}{2}, \qquad \left|a - \frac{1}{2}\right| < r.$$

Así, $\frac{1}{2} \in \operatorname{Acc}(A)$. El punto 2 no es de acumulación. Por ejemplo, $B\left(2, \frac{1}{2}\right) \cap A = \{2\}$, de modo que la bola perforada no encuentra ningún punto de A. Por tanto,

$$\boxed{\operatorname{Acc}(A) = [-2,-1] \cup [0,1].}$$

El único punto aislado es

$$\boxed{\{2\}.}$$

Frontera

Usamos $\partial A = \overline{A} \setminus \operatorname{int}(A)$. Sustituyendo los cálculos anteriores,

$$\boxed{\partial A = \left\{-2, -1, 0, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}.}$$

El punto -1 ilustra que frontera y pertenencia son independientes. Aunque $-1 \in A$, toda bola alrededor de -1 contiene puntos de $(-2,-1) \subseteq A$ y puntos a la derecha de -1 que no pertenecen a A. Por tanto, $-1 \in \partial A$.

Exterior

Como $\operatorname{ext}(A) = \mathbb{R} \setminus \overline{A}$, obtenemos

$$\boxed{\operatorname{ext}(A) = (-\infty,-2) \cup (-1,0) \cup (1,2) \cup (2,\infty).}$$

Abierto y cerrado

El conjunto no es abierto porque $-1 \in A$ pero $-1 \notin \operatorname{int}(A)$. Tampoco es cerrado porque, por ejemplo, $0 \in \overline{A}$ pero $0 \notin A$. Así,

$$\boxed{A \text{ no es abierto ni cerrado.}}$$

Ejercicio 39. Cinco formas de reconocer que un conjunto es cerrado

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Demuestra la equivalencia entre las cinco afirmaciones siguientes:

1. A es cerrado;
2. A^c es abierto;
3. $A = \overline{A}$;
4. $\operatorname{Acc}(A) \subseteq A$;
5. $\partial A \subseteq A$.

No repitas cinco pruebas independientes. Organiza el argumento como una red eficiente de implicaciones, indicando qué resultados previos utilizas en cada paso. Como parte de la prueba de $5 \Rightarrow 3$, puedes usar $\overline{A} = \operatorname{int}(A) \cup \partial A$, pero debes justificar esa identidad a partir de $\partial A = \overline{A} \setminus \operatorname{int}(A)$ y $\operatorname{int}(A) \subseteq A \subseteq \overline{A}$.

Al final, explica qué aporta la quinta caracterización respecto de las otras cuatro: ¿qué dice de los puntos donde toda ventana ve ambos lados?

Solución. Las dos primeras afirmaciones son equivalentes por definición:

$$A \text{ cerrado} \iff A^c \text{ abierto.}$$

Por §4.7 sabemos además que A cerrado $\iff A = \overline{A}$. Así, $1 \iff 2 \iff 3$. También sabemos que $\overline{A} = A \cup \operatorname{Acc}(A)$. Por tanto, $A = \overline{A}$ equivale a $A = A \cup \operatorname{Acc}(A)$, lo cual ocurre exactamente cuando $\operatorname{Acc}(A) \subseteq A$. Así, $3 \iff 4$. Falta incorporar la frontera. Supongamos primero que $A = \overline{A}$. Como $\partial A \subseteq \overline{A}$, obtenemos inmediatamente

$\partial A \subseteq A$. Por tanto, $3 \Rightarrow 5$. Ahora supongamos $\partial A \subseteq A$. Partimos de $\partial A = \overline{A} \setminus \operatorname{int}(A)$. Como $\operatorname{int}(A) \subseteq \overline{A}$, la clausura se descompone como $\overline{A} = \operatorname{int}(A) \cup \partial A$. Además, $\operatorname{int}(A) \subseteq A$ y, por hipótesis, $\partial A \subseteq A$. Por tanto, $\overline{A} \subseteq A$. Pero siempre

$A \subseteq \overline{A}$. Luego $A = \overline{A}$. Así, $5 \Rightarrow 3$. Concluimos

$$\boxed{1 \iff 2 \iff 3 \iff 4 \iff 5.}$$

La quinta caracterización ofrece una lectura especialmente local: un conjunto es cerrado exactamente cuando todos los puntos donde toda ventana ve simultáneamente al conjunto y a su complemento ya pertenecen al conjunto. Ninguna frontera queda excluida.

Ejercicio 40. Reconstrucción inversa a partir de datos locales

Se sabe que un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ satisface simultáneamente: $\operatorname{int}(A) = (-3,-1) \cup (0,1)$, $\operatorname{Acc}(A) = [-3,-1] \cup [0,1]$, el conjunto de puntos aislados de A es $\{2\}$, y además

$$-3 \in A, \qquad -1 \notin A, \qquad 0 \notin A, \qquad 1 \notin A.$$

a) Reconstruye A.

b) Demuestra que tu respuesta satisface todos los datos dados.

c) Calcula después

$$\overline{A}, \qquad \partial A, \qquad \operatorname{ext}(A).$$

d) Decide si A es abierto o cerrado.

e) Demuestra que los datos determinan A de manera única.

La prueba de unicidad debe usar la descomposición

$$A = (A \cap \mathrm{Acc}(A)) \,\dot\cup\, \{\text{puntos aislados de } A\}$$

y no una mera inspección de la respuesta propuesta.

Solución. Se nos da $\mathrm{int}(A) = (-3,-1)\cup(0,1)$, $\mathrm{Acc}(A) = [-3,-1]\cup[0,1]$, y el conjunto de puntos aislados de A es $\{2\}$. Además, $-3 \in A$, $\quad -1, 0, 1 \notin A$. La descomposición interna del conjunto es

$$A = (A \cap \mathrm{Acc}(A)) \,\dot\cup\, \{\text{puntos aislados de } A\}.$$

Como todo punto interior pertenece a A, $(-3,-1)\cup(0,1) \subseteq A$. Además, $-3 \in A$. Los puntos

$$-1, \quad 0, \quad 1$$

son de acumulación, pero se nos dice explícitamente que no pertenecen a A. El conjunto $\mathrm{Acc}(A) = [-3,-1]\cup[0,1]$ no contiene otros puntos que puedan añadirse a A sin estar ya forzados por el interior o por la pertenencia de -3. La parte de A formada por puntos de acumulación es, por tanto, $A \cap \mathrm{Acc}(A) = [-3,-1)\cup(0,1)$.

Añadimos ahora el único punto aislado:

$$\boxed{A = [-3,-1)\cup(0,1)\cup\{2\}.}$$

Verifiquemos los datos. El interior de $[-3,-1)$ es $(-3,-1)$, el interior de $(0,1)$ es el propio intervalo y el singleton $\{2\}$ no aporta interior. Así, $\mathrm{int}(A) = (-3,-1)\cup(0,1)$. Los puntos de acumulación de la primera componente forman $[-3,-1]$, los de la segunda forman $[0,1]$, y el punto 2 es aislado. Por tanto, $\mathrm{Acc}(A) = [-3,-1]\cup[0,1]$.

Además, 2 es aislado porque, por ejemplo, $B\left(2, \frac{1}{2}\right) \cap A = \{2\}$. La clausura se obtiene mediante $\overline{A} = A \cup \mathrm{Acc}(A)$, de modo que

$$\boxed{\overline{A} = [-3,-1]\cup[0,1]\cup\{2\}.}$$

La frontera es $\partial A = \overline{A} \setminus \mathrm{int}(A)$, y por tanto

$$\boxed{\partial A = \{-3,-1,0,1,2\}.}$$

El exterior es el complemento de la clausura:

$$\boxed{\mathrm{ext}(A) = (-\infty,-3)\cup(-1,0)\cup(1,2)\cup(2,\infty).}$$

El conjunto no es abierto porque $-3 \in A$ pero -3 no es interior. Tampoco es cerrado porque, por ejemplo, $-1 \in \overline{A}$ y $-1 \notin A$. Así,

$$\boxed{A \text{ no es abierto ni cerrado.}}$$

Queda demostrar unicidad. Sea A' cualquier conjunto que satisfaga los mismos datos. Por la descomposición

$$A' = (A' \cap \mathrm{Acc}(A')) \,\dot\cup\, \{\text{puntos aislados de } A'\},$$

todo punto de A' debe pertenecer o bien a $[-3,-1]\cup[0,1]$ o bien al singleton aislado $\{2\}$. Dentro del conjunto de acumulación, los puntos interiores $(-3,-1)\cup(0,1)$ deben pertenecer a A', y también debe pertenecer -3 por el dato adicional. Los puntos -1, 0 y 1 están excluidos explícitamente. No queda ningún otro punto posible dentro de $\mathrm{Acc}(A')$. Fuera de él, el único punto permitido de A' es el único punto aislado prescrito, 2.

Por tanto, $A' = [-3,-1)\cup(0,1)\cup\{2\} = A$. La reconstrucción es única.

Capítulo 5

Sucesiones y comportamiento eventual

La escritura $2, -1, 2, 0, 2, -1, \ldots$ guarda información que desaparece si reunimos sus valores en un conjunto. Cada aparición ocupa una posición: el segundo 2 no sustituye al primero y el orden de las visitas permite distinguir listas que recorren los mismos números. Con este objeto comienza la Parte II, *El infinito bajo control*. La geometría local de C04 seguirá disponible, pero antes de estudiar cómo una sucesión se aproxima a un punto necesitamos precisar qué significa que una propiedad se cumpla desde cierto índice en adelante.

Usaremos la convención $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. El primer término llevará índice 0, y una lista $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ presentará los valores en ese orden. La definición mediante funciones permitirá trabajar con todos los índices, incluso cuando sólo podamos dibujar o escribir unos pocos.

5.1. Una sucesión es una función: índice y término

Sucesión real. Una **sucesión real** es una función $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, escribimos $a_n = a(n)$ y llamamos a_n al **término de índice** n de la sucesión.

El dominio determina qué entradas están permitidas. Para $a_n = 1/(n+1)$, por ejemplo, los primeros cinco términos son $1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5$, correspondientes a los índices $0, 1, 2, 3, 4$. La igualdad $a_3 = a(3) = 1/4$ relaciona una entrada natural con su salida real; el símbolo a designa la función completa. Del mismo modo, si $a_n = 3n - 2$, el índice 4 selecciona $a_4 = 10$.

C05-F01 · Índice, evaluación y término

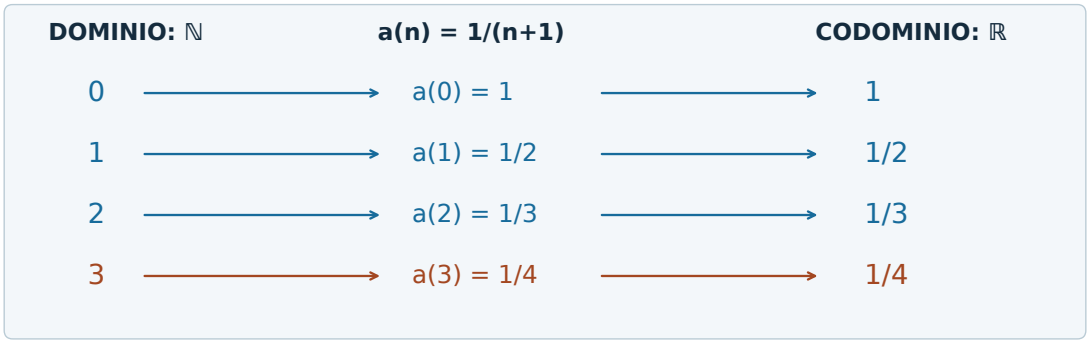


Figura 5.1. El índice 3 selecciona el término 1/4; índice, evaluación y valor pertenecen a niveles distintos.

La expresión algebraica por sí sola no fija el objeto. Las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, y $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $a_n = n^2$, tienen dominios distintos. Para cada natural n se cumple $a_n = f(n)$, pero $f(1/2) = 1/4$ está definido y $a_{1/2}$ no lo está. Tampoco hay términos de índices 2.1 o 2.7 entre los de índices 2 y 3.

Los valores pueden repetirse. En $b_n = (-1)^n$, los índices pares producen 1 y los impares producen -1; así, $b_0 = b_2 = b_4 = 1$ aunque los índices sean distintos. Una función exige

una única salida para cada entrada, y permite que entradas diferentes compartan salida. La sucesión constante $a_n = 2$ ofrece el caso más sencillo: todos sus términos coinciden. También pueden coincidir numéricamente entrada y salida en una evaluación. Para $c_n = 2n - 3$ obtenemos $c_0 = -3$, $c_1 = -1$, $c_2 = 1$ y $c_3 = 3$. Como consideramos los naturales incluidos en los reales, el índice 3 y el valor c_3 pueden designar el mismo número; lo que debemos distinguir son sus papeles en $c(3)$. Esa coincidencia no identifica un término con la función ni permite ampliar su dominio. Para $d_n = 2n$, en cambio, $d_3 = 6$ hace visible la diferencia entre los dos valores.

La igualdad de sucesiones se decide sobre el dominio completo. Si $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, entonces $a = b \iff \forall n \in \mathbb{N} : \ a_n = b_n$. Las sucesiones $(0, 1, 0, 1, ...)$ y $(1, 0, 1, 0, ...)$ ya difieren en el índice 0. Para descartar su igualdad basta una entrada; para probarla debemos cubrirlas todas. El orden $0 < 1 < 2 < \cdots$ permite además hablar de posiciones anteriores y posteriores: decir que a_5 aparece después de a_2 significa que $2 < 5$, sin introducir tiempo físico. Ese orden del dominio será lo que nos permita cortar una sucesión y conservar su parte tardía.

Ejercicios de la sección 5.1.

Ejercicio 1. Entrada, salida y repetición

Sea la sucesión real $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \qquad a_n = (n-2)^2 - 1.$

a) Calcula a_0, a_1, a_2, a_3 y a_5.

b) Para cada una de las expresiones siguientes, indica qué tipo de objeto designa:

$$a, \qquad 5, \qquad a_5, \qquad a(5).$$

No basta con dar su valor numérico: debes decir si se trata de la función completa, de un índice o de un término.

c) Observa que dos índices distintos producen el mismo valor. Encuentra esos dos índices entre $0, 1, 2, 3$ y escribe las dos igualdades correspondientes.

d) Explica por qué esa repetición no contradice que a sea una función.

Solución. La sucesión está dada por $a_n = (n-2)^2 - 1$. Sustituyendo cada índice obtenemos $a_0 = 4 - 1 = 3$, $a_1 = 1 - 1 = 0$, $a_2 = 0 - 1 = -1$, $a_3 = 1 - 1 = 0$, y $a_5 = 9 - 1 = 8$. Ahora separamos los tipos:

- a es la función completa $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$;
- 5 es un índice, es decir, un elemento de $\mathbb{N}$;
- a_5 es el término real seleccionado por el índice 5;
- $a(5)$ es otra notación para ese mismo término.

Por tanto, $a_5 = a(5) = 8$, pero el índice sigue siendo 5 y el término sigue siendo 8. Además, $a_1 = 0 = a_3$, aunque $1 \neq 3$. Esto no contradice la definición de función. Una función exige que cada entrada tenga una única salida; no exige que entradas distintas tengan salidas distintas. Aquí el índice 1 tiene una sola imagen, 0, y el índice 3 también tiene una sola imagen, 0.

Ejercicio 2. La misma regla no determina la misma función

Considera $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = 2x + 1$, $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \qquad a_n = 2n + 1$, y $c : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, \qquad c(k) = 2k + 1$.

a) Calcula $f(3)$, a_3 y $c(3)$.

b) ¿Son iguales como funciones f, a y c? Justifica tu respuesta usando el dominio como parte del objeto matemático.

c) Decide cuáles de las expresiones siguientes están definidas y, cuando lo estén, calcula su valor:

$$a_{-1}, \qquad c(-1), \qquad f\left(\frac{1}{2}\right), \qquad a_{1/2}.$$

d) Formula con precisión la relación que sí existe entre f y a: ¿qué ocurre cuando ambos se evalúan en un mismo $n \in \mathbb{N}$?

Solución. En el índice o argumento 3 las tres reglas producen el mismo valor: $f(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$, $a_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$, y $c(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$. Sin embargo, f, a y c no son iguales como funciones. Sus dominios son distintos:

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}, \qquad \mathrm{Dom}(a) = \mathbb{N}, \qquad \mathrm{Dom}(c) = \mathbb{Z}.$$

La fórmula algebraica no determina por sí sola el objeto función; el dominio forma parte de él. Revisemos ahora las cuatro expresiones propuestas. Como $-1 \notin \mathbb{N}$, la expresión a_{-1} no está definida para la sucesión a. En cambio, $-1 \in \mathbb{Z}$, de modo que $c(-1) = 2(-1) + 1 = -1$. Como $1/2 \in \mathbb{R}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 2$.

Pero $1/2 \notin \mathbb{N}$, así que $a_{1/2}$ no está definido. La relación correcta entre f y a es ésta: para todo $n \in \mathbb{N}$, ambos objetos pueden evaluarse en n y dan el mismo valor, $a_n = f(n) = 2n + 1$. Eso no convierte a a y f en la misma función, porque sus dominios siguen siendo distintos.

Ejercicio 3. Tres registros para una misma sucesión

Sea $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida por

$$b_n = \begin{cases} 4, & \text{si } n \equiv 0 \pmod 3, \\ -1, & \text{si } n \equiv 1 \pmod 3, \\ 0, & \text{si } n \equiv 2 \pmod 3. \end{cases}$$

a) Construye una tabla con dos columnas, n y b_n, para $0 \le n \le 8$.

b) Escribe esos nueve términos como una lista ordenada

$(b_0, b_1, \ldots, b_8)$.

c) Escribe explícitamente las nueve asignaciones

$n \longmapsto b_n$ para $0 \le n \le 8$.

d) Señala qué información permanece visible en las tres representaciones y explica por qué la aparición repetida de 4, -1 y 0 es compatible con la definición de función.

Solución. La definición depende del resto de n al dividir por 3. Para $0 \le n \le 8$ obtenemos:

n	b_n
0	4
1	-1
2	0
3	4
4	-1
5	0
6	4
7	-1
8	0

La lista ordenada correspondiente es $(4, -1, 0, 4, -1, 0, 4, -1, 0)$. Las mismas nueve evaluaciones pueden escribirse como

$$0 \longmapsto 4,$$
$$1 \longmapsto -1,$$
$$2 \longmapsto 0,$$
$$3 \longmapsto 4,$$
$$4 \longmapsto -1,$$
$$5 \longmapsto 0,$$
$$6 \longmapsto 4,$$
$$7 \longmapsto -1,$$
$$8 \longmapsto 0.$$

La tabla muestra directamente qué índice corresponde a cada término. La lista conserva esa correspondencia porque sus posiciones están ordenadas como $0, 1, 2, \ldots$. Las asignaciones $n \mapsto b_n$ hacen explícita la evaluación de la función. En los tres registros se conserva la asociación entre posición y valor. La repetición de 4, -1 y 0 no crea ambigüedad: cada índice sigue teniendo exactamente una salida. Por ejemplo,

$b_0 = b_3 = b_6 = 4$, pero cada uno de los índices 0, 3 y 6 tiene una imagen única.

Ejercicio 4. Una fórmula, tres errores de tipo

Sea $c : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $\quad c_n = 2n - 3$. Un estudiante escribe:

> Como $c_3 = 3$, el índice 3 y el término c_3 son el mismo objeto. Además, la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = 2x - 3$ es igual a c, porque ambas usan la misma fórmula. Por tanto c también tiene un término de índice 3.5, y ese término vale 4.

Analiza el argumento completo.

a) Localiza tres errores distintos.

b) Para cada error, identifica qué distinción de tipos o de dominios se ha perdido.

c) Reescribe el razonamiento de forma correcta, conservando todas las afirmaciones verdaderas que puedan rescatarse.

d) Indica qué habría que comprobar para poder afirmar que dos sucesiones $u, v : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ son iguales.

Solución. El argumento mezcla tres cuestiones diferentes: igualdad numérica, igualdad de objetos y pertenencia al dominio. La igualdad $c_3 = 3$ es verdadera como igualdad numérica. Puesto que los naturales se consideran incluidos en los reales, ambas expresiones pueden designar el mismo número. La dificultad aparece cuando se intercambian sus papeles: 3 es la entrada en la evaluación $c(3)$, mientras que $c_3 = c(3)$ es su salida. Esa coincidencia en una evaluación no convierte el índice en la función completa ni permite confundir dominio y codominio.

El segundo error consiste en afirmar que g y c son la misma función porque comparten la expresión $2x - 3$. No lo son, pues $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $c : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tienen dominios distintos. Lo que sí es correcto es que para cada $n \in \mathbb{N}$, $g(n) = 2n - 3 = c_n$. El tercer error es introducir un supuesto término $c_{3.5}$. Como

$3.5 \notin \mathbb{N}$, 3.5 no es un índice permitido de c. La expresión $g(3.5)$ sí está definida y vale $g(3.5) = 2(3.5) - 3 = 4$, pero ese valor pertenece a una evaluación de g y no a un término de c con índice 3.5. Una versión corregida del razonamiento es: $c_3 = 3$, de modo que el índice 3 y el término correspondiente tienen el mismo valor numérico, aunque desempeñan papeles distintos. La función g y la sucesión c obedecen a la misma regla algebraica en los índices naturales, pero no son la misma función porque sus dominios difieren. Por eso $g(3.5) = 4$ está definido, mientras que $c_{3.5}$ no lo está.

Finalmente, si $u, v : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, entonces para afirmar que son la misma sucesión debemos comprobar igualdad índice por índice:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = v_n.}$$

5.2. El orden de las visitas importa

De una sucesión podemos extraer su imagen, el **conjunto de valores** $a(\mathbb{N}) = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$. Para pertenecer a él basta aparecer en algún índice. El conjunto guarda cuáles números aparecen y descarta la asignación de cada índice a su término. Consideremos $a = (0, 1, 0, 1, ...)$ y $b = (0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, ...)$. Ambas toman exactamente los valores 0 y 1, pero $a_1 = 1$ y $b_1 = 0$. Si conservamos sólo $\{0, 1\}$ no podremos reconstruir cuál de las dos sucesiones lo produjo. La pérdida afecta también a las repeticiones: en $c = (0, 1, 1, 1, ...)$, el cero aparece sólo en el índice 0, mientras que en $d = (0, 1, 0, 1, ...)$ aparece en $0, 2, 4, ...$; sus imágenes siguen siendo iguales.

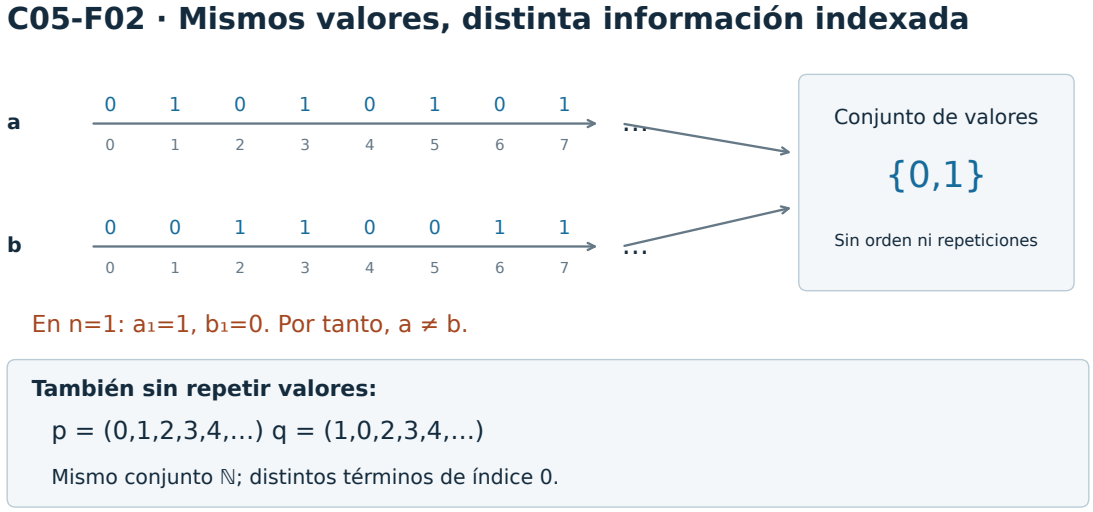


Figura 5.2. El conjunto {0,1} no distingue los dos patrones de visitas. También cambia el orden al intercambiar dos valores sin repeticiones.

Ni siquiera hace falta que haya valores repetidos. La sucesión $p_n = n$ y la definida por $q_0 = 1$, $q_1 = 0$, $q_n = n$ para $n \geq 2$, visitan cada natural una sola vez y tienen imagen $\mathbb{N}$, considerada dentro de $\mathbb{R}$. Sin embargo, $p_0 = 0 \neq 1 = q_0$. También podemos construir dos sucesiones con imagen $\{0, 1, 2\}$ intercambiando las primeras entradas de $(0, 1, 2, 2, 2, ...)$: obtenemos $(1, 0, 2, 2, 2, ...)$, que difiere ya en el índice 0.

En general, la igualdad de sucesiones implica igualdad de imágenes. Si $x = a_m$ para algún m y $a = b$, entonces $x = b_m$; esto prueba una inclusión entre imágenes, y el mismo argumento con los papeles intercambiados prueba la otra. Los ejemplos anteriores muestran que la implicación inversa falla: compartir todos los valores no fuerza a compartir sus índices. Una biyección $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ permite reorganizar las visitas mediante $b_n = a_{\sigma(n)}$. Las imágenes siguen coincidiendo. Todo valor b_n es un valor de a; recíprocamente, si $x = a_m$, la sobreyectividad de σ proporciona un índice n con $\sigma(n) = m$, y entonces $x = b_n$. No hemos probado $a_n = b_n$, pues el índice encontrado puede ser otro. Para que las funciones fueran iguales necesitaríamos $a_n = a_{\sigma(n)}$ en cada mismo índice.

Así, una lista ordenada conserva información que un conjunto elimina. Si la regla de continuación está determinada, su posición $n + 1$ permite recuperar a_n porque empezamos en 0. Unos pocos términos seguidos de puntos suspensivos, sin una regla que determine los restantes, no bastan para especificar una sucesión completa.

Ejercicios de la sección 5.2.

Ejercicio 5. Los valores y los índices que los visitan

Sea la sucesión $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida por

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n \equiv 0 \pmod 4, \\ 2, & \text{si } n \equiv 1 \text{ o } 2 \pmod 4, \\ -1, & \text{si } n \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Para cada $x \in \mathbb{R}$, define el conjunto de índices de aparición de x por $I_a(x) = \{n \in \mathbb{N} : a_n = x\}$.

a) Determina el conjunto de valores $a(\mathbb{N})$.

b) Describe exactamente $I_a(0)$, $I_a(2)$ e $I_a(-1)$.

c) Indica el tipo matemático de cada objeto:

$$a, \qquad a(\mathbb{N}), \qquad I_a(2), \qquad a_6.$$

d) Explica qué información conservan los conjuntos $I_a(x)$ que desaparece si sólo conocemos $a(\mathbb{N})$.

Solución. La definición depende del resto de n módulo 4. Los valores posibles son únicamente 0, 2 y -1, y cada uno aparece: $a_0 = 0$, $a_1 = 2$ y $a_3 = -1$. Por tanto,

$$\boxed{a(\mathbb{N}) = \{-1, 0, 2\}.}$$

Los índices que producen 0 son exactamente los múltiplos de 4:

$$\boxed{I_a(0) = \{4k : k \in \mathbb{N}\}.}$$

El valor 2 aparece en los índices congruentes con 1 o 2 módulo 4:

$$\boxed{I_a(2) = \{4k + 1 : k \in \mathbb{N}\} \cup \{4k + 2 : k \in \mathbb{N}\}.}$$

Finalmente,

$$\boxed{I_a(-1) = \{4k + 3 : k \in \mathbb{N}\}.}$$

Los tipos son distintos:

- a es la función completa $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$;
- $a(\mathbb{N})$ es un subconjunto de $\mathbb{R}$;
- $I_a(2)$ es un subconjunto de $\mathbb{N}$;
- a_6 es un número real, y como $6 \equiv 2 \pmod 4$, vale 2.

El conjunto de valores sólo dice **qué** números aparecen. Los conjuntos $I_a(x)$ dicen además **dónde** aparecen. Por ejemplo, de $a(\mathbb{N}) = \{-1, 0, 2\}$ no puede recuperarse que 0 aparezca exactamente en los múltiplos de 4 ni que 2 ocupe dos clases de congruencia distintas.

Ejercicio 6. Recuperar la sucesión a partir de sus índices de aparición

Sean $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Para cada $x \in \mathbb{R}$, define

$$I_a(x) = \{n \in \mathbb{N} : a_n = x\}, \qquad I_b(x) = \{n \in \mathbb{N} : b_n = x\}.$$

Demuestra la equivalencia

$$\boxed{a = b \iff \forall x \in \mathbb{R},\ I_a(x) = I_b(x).}$$

Después demuestra que $a(\mathbb{N}) = \{x \in \mathbb{R} : I_a(x) \neq \emptyset\}$. Concluye explicando por qué conocer todos los conjuntos $I_a(x)$ contiene estrictamente más información que conocer sólo el conjunto de valores $a(\mathbb{N})$.

Solución. Supongamos primero que $a = b$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$. Fijemos $x \in \mathbb{R}$. Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $n \in I_a(x) \iff a_n = x \iff b_n = x \iff n \in I_b(x)$. Por extensionalidad, $I_a(x) = I_b(x)$. Como x era arbitrario, $\forall x \in \mathbb{R},\ I_a(x) = I_b(x)$. Probemos la conversa. Supongamos ahora que

$\forall x \in \mathbb{R},\ I_a(x) = I_b(x)$. Fijemos un índice arbitrario $n \in \mathbb{N}$ y pongamos $x = a_n$. Entonces $n \in I_a(x)$. Por la igualdad de conjuntos de índices, $n \in I_b(x)$, y, por definición de $I_b(x)$,

$$b_n = x = a_n.$$

Como esto vale para todo $n \in \mathbb{N}$, $a = b$. Hemos demostrado

$$\boxed{a = b \iff \forall x \in \mathbb{R},\ I_a(x) = I_b(x).}$$

Para la segunda identidad, un real x pertenece al conjunto de valores si y sólo si aparece en al menos un índice:

$$\begin{aligned} x \in a(\mathbb{N}) &\iff \exists n \in \mathbb{N} :\ a_n = x \\ &\iff I_a(x) \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\boxed{a(\mathbb{N}) = \{x \in \mathbb{R} : I_a(x) \neq \emptyset\}.}$$

El conjunto de valores conserva solamente cuáles conjuntos $I_a(x)$ son vacíos o no vacíos. Conocer cada $I_a(x)$ conserva además todos los índices en los que aparece cada valor, y esa información basta incluso para reconstruir la sucesión completa.

Ejercicio 7. Dos existencias no alinean los índices

Un estudiante escribe:

> Si dos sucesiones $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tienen el mismo conjunto de valores, entonces cada término a_n aparece en algún lugar de b y cada término b_m aparece en algún lugar de a. Por tanto, para todo n se tiene $a_n = b_n$, y las sucesiones son iguales.

Audita el argumento.

a) Traduce la igualdad de conjuntos de valores en dos afirmaciones cuantificadas que expresen «cada término aparece en algún lugar de la otra sucesión».

b) Escribe la afirmación cuantificada que sería necesaria para concluir $a = b$.

c) Localiza el paso ilegítimo: explica por qué un índice m cuya existencia depende de n no puede reemplazarse sin más por ese mismo n.

d) Usa

$a = (0, 1, 0, 1, ...)$, $b = (1, 0, 1, 0, ...)$ para mostrar concretamente que las dos afirmaciones existenciales pueden ser verdaderas mientras $a \neq b$.

e) Reescribe la conclusión correcta del argumento del estudiante.

Solución. La igualdad de conjuntos de valores $a(\mathbb{N}) = b(\mathbb{N})$ implica dos afirmaciones correctas: $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N} :\ a_n = b_m$, y $\forall m \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N} :\ b_m = a_n$. Estas fórmulas dicen que cada valor visitado por una sucesión aparece **en algún índice** de la otra. Para concluir igualdad de sucesiones necesitaríamos algo distinto:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} :\ a_n = b_n.}$$

El error consiste en sustituir $\forall n\, \exists m$ por una afirmación en la que el testigo m queda forzado a ser el mismo índice n. La existencia de algún m no garantiza $m = n$; además, el índice testigo puede depender del valor de n. En el ejemplo $a = (0, 1, 0, 1, ...), \qquad b = (1, 0, 1, 0, ...)$, ambas sucesiones tienen conjunto de valores $\{0, 1\}$. En b, el valor 0 aparece en los índices impares y el valor 1 en los pares. Para todo n, el testigo $m = n + 1$ cumple $b_m = a_n$; en la dirección recíproca, el mismo desplazamiento cumple $a_{n+1} = b_n$. Por tanto, ambas afirmaciones existenciales son verdaderas, aunque la coincidencia nunca se dé en el mismo índice.

Sin embargo, en el índice 0,

$$a_0 = 0 \qquad \text{y} \qquad b_0 = 1,$$

de modo que $a \neq b$. La conclusión correcta es únicamente:

> si dos sucesiones tienen el mismo conjunto de valores, cada valor tomado por una de ellas es tomado también por la otra, quizá en índices distintos.

No puede recuperarse la igualdad índice por índice a partir de esa información.

Ejercicio 8. Ningún prefijo finito fija el orden completo

Sea $M \in \mathbb{N}$ arbitrario. Construye dos sucesiones $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que satisfagan simultáneamente:

1. $a_n = b_n$ para todo $0 \leq n \leq M$;
2. $a(\mathbb{N}) = b(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$;
3. cada valor natural aparece exactamente una vez en cada sucesión;
4. $a \neq b$.

Tu construcción debe funcionar para **todo** M. Después identifica un índice concreto que demuestre $a \neq b$ y explica qué refuta el ejemplo acerca de la posibilidad de reconstruir una sucesión conociendo su conjunto de valores y una cantidad finita, aunque arbitrariamente grande, de términos iniciales.

Solución. Fijemos $M \in \mathbb{N}$. Definimos $a_n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y construimos b intercambiando únicamente los valores situados en los índices $M + 1$ y $M + 2$:

$$b_n = \begin{cases} M + 2, & n = M + 1, \\ M + 1, & n = M + 2, \\ n, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Para todo $0 \leq n \leq M$ no se ha modificado nada, así que $a_n = b_n$. La sucesión a visita cada número natural exactamente una vez. La sucesión b hace lo mismo: sólo hemos permutado las posiciones de $M+1$ y $M+2$. Por tanto, $a(\mathbb{N}) = b(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, y cada valor aparece exactamente una vez en ambas. Pero en el índice $M + 1$ tenemos

$a_{M+1} = M + 1$ mientras que $b_{M+1} = M + 2$. Luego

$$\boxed{a \neq b.}$$

Como M era arbitrario, el acuerdo puede hacerse tan largo como queramos sin forzar igualdad global. Incluso conocer el conjunto completo de valores y cualquier cantidad finita prefijada de términos iniciales deja abierta la posibilidad de reorganizar valores en índices posteriores. El ejemplo separa dos clases de información: el conjunto de valores registra qué números aparecen; la sucesión registra además en qué índice aparece cada uno.

Ejercicio 9. El mismo conjunto de valores, muchos ritmos de repetición

Para cada entero $r \geq 1$, define una sucesión $b^{(r)} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ por bloques. Para $q \in \mathbb{N}$ y $j \in \{0, 1, ..., r - 1\}$, fija $b^{(r)}_{3rq+j} = 0$, $b^{(r)}_{3rq+r+j} = 1$, y $b^{(r)}_{3rq+2r+j} = 2$. Así, cada ciclo contiene r ceros, luego r unos y luego r doses.

a) Escribe los primeros doce términos de $b^{(1)}$, $b^{(2)}$ y $b^{(3)}$.

b) Demuestra que, para todo $r \geq 1$,

$b^{(r)}(\mathbb{N}) = \{0, 1, 2\}$.

c) Demuestra que si $1 \leq r < s$, entonces

$$b_r^{(r)} = 1 \qquad \text{y} \qquad b_r^{(s)} = 0.$$

Concluye que las sucesiones $b^{(r)}$ son dos a dos distintas.

d) Describe el conjunto de índices en los que $b^{(r)}$ toma el valor 0.

e) Explica qué aspecto de la sucesión cambia con r y por qué ese cambio es completamente invisible en el conjunto de valores $\{0, 1, 2\}$.

Solución. Para $r = 1$ obtenemos ciclos de longitud 3: $b^{(1)} = (0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, ...)$. Para $r = 2$ los valores aparecen en bloques de longitud 2: $b^{(2)} = (0, 0, 1, 1, 2, 2, 0, 0, 1, 1, 2, 2, ...)$. Para $r = 3$ aparecen en bloques de longitud 3: $b^{(3)} = (0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 0, 0, 0, ...)$.

Fijemos ahora $r \geq 1$. Por definición, todos los términos de $b^{(r)}$ pertenecen a $\{0, 1, 2\}$. Además, tomando $q = 0$ y $j = 0$ obtenemos

$$b_0^{(r)} = 0, \qquad b_r^{(r)} = 1, \qquad b_{2r}^{(r)} = 2.$$

Por tanto los tres valores aparecen y no aparece ningún otro:

$$\boxed{b^{(r)}(\mathbb{N}) = \{0, 1, 2\}.}$$

Sean ahora $1 \leq r < s$. En la sucesión $b^{(r)}$, el primer bloque de ceros ocupa los índices $0, 1, \dots, r-1$, de modo que el índice r ya pertenece al primer bloque de unos. Así, $b_r^{(r)} = 1$. En cambio, para $b^{(s)}$ el primer bloque de ceros ocupa $0, 1, \dots, s-1$. Como $r < s$, $b_r^{(s)} = 0$.

Luego $b_r^{(r)} \neq b_r^{(s)}$, y por tanto

$$\boxed{b^{(r)} \neq b^{(s)}}$$

siempre que $r \neq s$. Los índices en los que aparece 0 forman, para cada ciclo q, el bloque $\{3rq, 3rq + 1, \dots, 3rq + r - 1\}$. Por tanto,

$$\boxed{I_{b^{(r)}}(0) = \bigcup_{q \in \mathbb{N}} \{3rq + j : 0 \leq j \leq r - 1\}.}$$

Al variar r cambia la longitud de los bloques y, con ella, el patrón de repetición y el orden local de las visitas. El conjunto de valores no registra ninguna de esas diferencias: para todos los parámetros colapsa al mismo conjunto $\{0, 1, 2\}$. La familia muestra de forma paramétrica que conservar los valores visitados no equivale a conservar la organización indexada de esas visitas.

5.3. Ver una sucesión sin perder el índice

La sucesión $a_n = 2n - 1$ puede describirse mediante una fórmula, una lista, una tabla o sus puntos en el plano. Estas representaciones deben conservar la misma asociación $n \mapsto a_n$:

n	a_n	Punto (n, a_n)
0	-1	$(0, -1)$
1	1	$(1, 1)$
2	3	$(2, 3)$
3	5	$(3, 5)$
4	7	$(4, 7)$

La lista comienza $(-1, 1, 3, 5, 7, \ldots)$, y la afirmación $a_3 = 5$ ocupa su cuarto lugar. En la fórmula se obtiene sustituyendo $n = 3$; en la tabla está en la fila de entrada 3; en el plano está representada por $(3, 5)$. Esos cambios de escritura conservan una misma evaluación.



Figura 5.3. Fórmula, lista, tabla y puntos conservan el mismo par (3,5). No se añaden valores entre índices.

La **gráfica** de la sucesión es el conjunto $\{(n, a_n) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. Cada par guarda el índice en su primera coordenada y el término en la segunda. Por eso los puntos $(0, 1)$ y $(2, 1)$ de $b_n = (-1)^n$ son distintos, aunque compartan altura. Si proyectamos sobre la recta real y dejamos sólo las marcas -1 y 1, recuperamos el conjunto de valores y perdemos la asignación. Podemos conservarla mediante etiquetas: a 1 le corresponden los índices $2k$ y a -1 los índices $2k + 1$, con $k \in \mathbb{N}$.

Una curva que una los puntos añade entradas que no están en el dominio. Para $a_n = n^2$, la parábola completa $y = x^2$ contiene también $(1/2, 1/4)$, que no pertenece a la gráfica de la sucesión. Las líneas pueden servir como construcciones auxiliares, pero no definen términos de índices no naturales. En las figuras de sucesiones mantendremos los puntos separados para que el dibujo conserve ese dominio.

La función tampoco tiene que venir dada por una fórmula cerrada. Una descripción por recurrencia, como $a_0 = 0$ y $a_{n+1} = a_n^2 + 1$, fija el primer valor y determina un único real siguiente a partir de cada valor ya fijado; produce los términos $0, 1, 2, 5, 26, \ldots$. La definición de sucesión pide la asignación completa, cualquiera que sea su descripción exacta. Su gráfica completa permite recuperarla buscando, para cada natural n, el único par de primera coordenada n.

La utilidad de cada registro depende de la tarea. La fórmula permite calcular términos lejanos; la tabla explicita las entradas; la lista muestra rápidamente repeticiones y alternancias; los puntos permiten comparar índices y alturas. Para $a_n = 3 - 2n$, por ejemplo, los primeros cinco términos son $(3, 1, -1, -3, -5)$ y sus puntos son $(0, 3), (1, 1), (2, -1), (3, -3), (4, -5)$. En cualquiera de esos registros sólo hemos mostrado un bloque finito: la regla $a_n = 3 - 2n$ es la que determina también las entradas posteriores.

Ejercicios de la sección 5.3.

Ejercicio 10. Del conjunto de puntos a tres registros coordinados

Los primeros ocho términos de una sucesión $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ están representados por el conjunto de puntos

$$G_7 = \{(0,3),(1,1),(2,3),(3,-1),(4,1),(5,3),(6,-1),(7,1)\}.$$

Este conjunto registra sólo los índices 0 a 7; no se afirma nada todavía sobre los términos posteriores.

a) Reconstruye una tabla con columnas n y a_n para $0 \le n \le 7$.

b) Escribe el mismo bloque como lista ordenada

$(a_0, a_1, \dots, a_7)$.

c) Representa esos ocho términos sobre la recta real usando únicamente las posiciones -1, 1 y 3, pero añade junto a cada posición **todos** los índices que llegan a ella.

d) Localiza la afirmación

$a_5 = 3$ en los tres registros: conjunto de puntos, tabla y recta real etiquetada.

e) Borra ahora las etiquetas de índice de la representación sobre la recta real. ¿Qué información queda y qué información deja de poder recuperarse acerca de los primeros ocho términos?

Solución. Cada punto (n, a_n) contiene simultáneamente el índice y el término. La tabla es, por tanto,

n	a_n
0	3
1	1
2	3
3	-1
4	1
5	3
6	-1
7	1

El bloque ordenado correspondiente es $(a_0, a_1, \dots, a_7) = (3,1,3,-1,1,3,-1,1)$. Sobre la recta real sólo aparecen tres posiciones. Para conservar la información indexada debemos añadir las etiquetas:

$$-1 : \{3,6\}, \qquad 1 : \{1,4,7\}, \qquad 3 : \{0,2,5\}.$$

La igualdad $a_5 = 3$ aparece en el conjunto de puntos como $(5,3) \in G_7$, en la tabla como la fila cuya primera entrada es 5, y en la recta etiquetada mediante la presencia del índice 5 junto a la posición 3. Si borramos todas las etiquetas de índice, sólo queda el conjunto $\{-1,1,3\}$. Ese registro conserva qué valores aparecen en el bloque, pero ya no indica en qué posiciones aparecen, en qué orden se recorren ni cuántas veces aparece cada uno dentro de los ocho términos observados. La pérdida se produce precisamente al eliminar la asociación $n \longmapsto a_n$.

Ejercicio 11. Una codificación fiel que no es la gráfica estándar

Sea $a_n = (-1)^n(n+1), \qquad n \in \mathbb{N}$. Considera dos conjuntos de puntos: $G = \{(n, a_n) : n \in \mathbb{N}\}$ y $H = \{(2n+1, a_n) : n \in \mathbb{N}\}$.

a) Escribe los primeros cinco puntos de G y los primeros cinco puntos de H.

b) Explica por qué G es la gráfica de la sucesión en el sentido estándar de §5.3.

c) El conjunto H no usa el índice original como coordenada horizontal. Demuestra, sin embargo, que conserva toda la información de la sucesión si se declara la regla de decodificación

$n = \frac{x-1}{2}$. En particular, muestra cómo recuperar a_3 a partir del punto correspondiente de H.

d) Explica por qué H es una representación codificada fiel, pero no es literalmente la gráfica

$\{(n, a_n) : n \in \mathbb{N}\}$.

e) Si de G o de H conservamos únicamente las alturas y borramos por completo la coordenada horizontal, ¿qué estructura de la sucesión se pierde?

Solución. Los primeros valores son

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -2, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = -4, \quad a_4 = 5.$$

Por tanto, los primeros cinco puntos de la gráfica estándar son

$$(0, 1),\ (1, -2),\ (2, 3),\ (3, -4),\ (4, 5),$$

y los primeros cinco puntos de H son

$$(1, 1),\ (3, -2),\ (5, 3),\ (7, -4),\ (9, 5).$$

El conjunto $G = \{(n, a_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es la gráfica estándar porque su primera coordenada es literalmente el índice n de la sucesión. En H la primera coordenada ha sido reemplazada por

$x = 2n + 1$. La transformación es reversible sobre las coordenadas que aparecen en H: si conocemos x, recuperamos el índice mediante $n = \frac{x-1}{2}$. Por ejemplo, el término a_3 corresponde al punto cuya primera coordenada es $2 \cdot 3 + 1 = 7$. Como $(7, -4) \in H$, recuperamos $a_3 = -4$. Así, H conserva toda la asociación índice–término siempre que la regla de decodificación forme parte de la representación. No es, sin embargo, la gráfica estándar de a, porque sus puntos no tienen la forma (n, a_n): la coordenada horizontal es $2n + 1$, no n.

Si borramos la coordenada horizontal, en cualquiera de los dos registros quedan sólo las alturas $\{1, -2, 3, -4, 5, -6, ...\}$. Se pierde la correspondencia explícita entre cada índice y su valor. El hecho de que en este ejemplo los valores sean distintos no cambia el tipo de información eliminada: la proyección vertical ya no registra por sí misma la función $n \mapsto a_n$.

Ejercicio 12. Dos curvas distintas, una sola sucesión

Considera las funciones reales $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x + \sin(\pi x)$. A partir de ellas se definen dos sucesiones

$$a_n = f(n), \qquad b_n = g(n), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Un estudiante afirma:

> Las gráficas de f y g son distintas como curvas del plano. Por tanto, las sucesiones a y b también son distintas.

a) Demuestra que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$a_n = b_n = n$.

b) Concluye, usando la igualdad de sucesiones índice por índice, que $a = b$.

c) Exhibe un número real $x \notin \mathbb{N}$ para el cual $f(x) \neq g(x)$ y verifica numéricamente la desigualdad.

d) Localiza con precisión el error del estudiante: ¿qué dos objetos está identificando indebidamente?

e) Escribe la gráfica discreta común de a y b y explica por qué los valores de f y g entre dos índices naturales consecutivos no pertenecen a ninguna de las dos sucesiones.

Solución. Para todo $n \in \mathbb{N}$, el número n es entero y por tanto $\sin(\pi n) = 0$. De aquí se obtiene $b_n = g(n) = n + \sin(\pi n) = n$. Además, $a_n = f(n) = n$. Luego, para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$. Como ambas sucesiones tienen el mismo dominio $\mathbb{N}$, la igualdad índice por índice implica

$$\boxed{a = b.}$$

Las funciones reales f y g sí son distintas. Por ejemplo, para $x = \frac{1}{2}$ tenemos $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, mientras que

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{2}.$$

El error del estudiante consiste en identificar las funciones de variable real $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con sus restricciones al dominio discreto $\mathbb{N}$. Las curvas completas pueden ser distintas aunque coincidan en cada índice natural. La gráfica discreta común de las dos sucesiones es

$$\boxed{\{(n, n) : n \in \mathbb{N}\}.}$$

Los valores de $f(x)$ y $g(x)$ para $x \notin \mathbb{N}$ pertenecen a las funciones reales auxiliares, no a las sucesiones a y b. Unir los puntos naturales mediante una curva añade información que la definición de sucesión no contiene.

Ejercicio 13. Cuánto puede cambiar una representación sin perder la sucesión

Sea $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ la sucesión periódica

$$a_n = \begin{cases} 2, & n \equiv 0 \pmod 3, \\ 0, & n \equiv 1 \pmod 3, \\ 1, & n \equiv 2 \pmod 3. \end{cases}$$

Considera los siguientes registros de información:

1. la gráfica estándar $G = \{(n, a_n) : n \in \mathbb{N}\}$;
2. una tabla que contiene todos los pares (n, a_n), pero cuyas filas han sido reordenadas arbitrariamente;
3. el conjunto codificado $H = \{(n + 10, a_n) : n \in \mathbb{N}\}$, acompañado de la regla «el índice original es $x - 10$»;
4. el conjunto de valores $V = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

a) Decide para cada registro si permite reconstruir exactamente la sucesión a. Justifica cada respuesta.

b) Para el registro 2, explica por qué el orden físico de las filas es irrelevante mientras cada fila conserve su etiqueta n.

c) Para el registro 3, da una fórmula explícita que permita recuperar a_n a partir del punto cuya coordenada horizontal es $n + 10$.

d) Calcula V y construye una sucesión $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ distinta de a que tenga exactamente ese mismo conjunto de valores.

e) Formula un criterio general, en una sola frase matemática, para decidir cuándo un cambio de representación conserva la sucesión y cuándo la ha colapsado a un objeto más pobre.

Solución. La sucesión comienza $a = (2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, ...)$. El registro 1 permite reconstruirla directamente: para cada índice n, el único punto de primera coordenada n tiene segunda coordenada a_n. El registro 2 también conserva toda la sucesión. Reordenar físicamente las filas no modifica los pares etiquetados (n, a_n). Mientras la columna del

índice permanezca, podemos buscar la fila con etiqueta n y recuperar su término. El orden de presentación de las filas no debe confundirse con el orden matemático de los índices.

El registro 3 también es fiel porque la codificación horizontal es reversible. El punto correspondiente al índice n tiene primera coordenada $x = n + 10$. Dado ese punto, la regla declarada permite recuperar $n = x - 10$, y su segunda coordenada es precisamente a_n. En cambio, el registro 4 es $V = \{0, 1, 2\}$. No conserva la asociación entre índices y valores. Por ejemplo, definamos

$$b_n = \begin{cases} 0, & n \equiv 0 \pmod 3, \\ 1, & n \equiv 1 \pmod 3, \\ 2, & n \equiv 2 \pmod 3. \end{cases}$$

Entonces $b(\mathbb{N}) = \{0, 1, 2\} = a(\mathbb{N})$, pero $a_0 = 2 \neq 0 = b_0$. Por tanto, $a \neq b$. Los tres primeros registros admiten una reconstrucción exacta de la correspondencia $n \longmapsto a_n$; el cuarto no. Un criterio general es:

> **Un cambio de representación conserva la sucesión cuando mantiene, de manera directa o mediante una codificación invertible declarada, información suficiente para recuperar cada par (n, a_n). Si esa asociación deja de ser recuperable, la representación ha colapsado la sucesión a un objeto más pobre.**

5.4. Colas: olvidar un comienzo finito

Fijado $N \in \mathbb{N}$, el **segmento final** $\mathbb{N}_{\geq N} = \{n \in \mathbb{N} : n \geq N\}$ conserva los índices $N, N + 1, N + 2, \ldots$. El prefijo descartado es $\{0, 1, \ldots, N - 1\}$ cuando $N > 0$; para $N = 0$ es vacío. A partir de ese corte aparecen tres objetos relacionados que debemos distinguir. La **cola restringida** es la función $a|_{\mathbb{N}_{\geq N}} : \mathbb{N}_{\geq N} \to \mathbb{R}$. Conserva los índices originales y sus valores. Para volver a numerar desde 0 usamos el corrimiento $\tau_N : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_{\geq N}$, dado por $\tau_N(k) = N+k$.

> **Lema de reindexación.** Para cada $N \in \mathbb{N}$, la aplicación
> $\tau_N(k) = N + k$
> es una biyección de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{N}_{\geq N}$.

Si $N + k = N + \ell$, la cancelación da $k = \ell$, lo cual prueba inyectividad. Además, todo $n \geq N$ tiene la forma $N+k$ con $k = n-N \in \mathbb{N}$; así, τ_N toma todos los valores de su codominio y es sobreyectiva. La biyección conserva el orden de las posiciones y permite pasar de una numeración a la otra sin perder ni duplicar índices.

La **cola reindexada** $a^{\langle N \rangle} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ se define mediante $a_k^{\langle N \rangle} = a_{N+k}, \qquad k \in \mathbb{N}$. Equivale a componer la restricción con el corrimiento: $a^{\langle N \rangle} = (a|_{\mathbb{N}_{\geq N}}) \circ \tau_N$. El nuevo índice k representa al índice original $N + k$, y ambos seleccionan el mismo valor real. Si $N > 0$, los dominios de la restricción y de la cola reindexada son distintos, por lo que las funciones no son iguales. Para $N = 0$ ambas coinciden con a, pues $\tau_0(k) = k$ y no se descarta ningún índice.

El tercer objeto es el **conjunto de valores tardíos** $\{a_n : n \geq N\} \subseteq \mathbb{R}$. Es la imagen de la cola restringida y también la de la cola reindexada. Conserva cuáles valores aparecen después del corte, pero vuelve a eliminar los índices y las repeticiones. Para $a = (7, -2, 4, 1, 4, 1, \ldots)$ y $N = 2$, la restricción asigna $2 \mapsto 4$, $3 \mapsto 1$, $4 \mapsto 4$, $5 \mapsto 1$, y así sucesivamente. La cola reindexada es $(4, 1, 4, 1, \ldots)$, con $a_0^{\langle 2 \rangle} = a_2 = 4$ y $a_1^{\langle 2 \rangle} = a_3 = 1$. El conjunto de valores tardíos es $\{1, 4\}$. La figura siguiente usa otra sucesión, $(5, 8, 1, 0, 1, 0, \ldots)$: para el mismo corte 2, la cola reindexada es $(1, 0, 1, 0, \ldots)$ y su imagen es $\{0, 1\}$.

Como ejemplo de cálculo, para $a_n = 2n+1$ la restricción desde 3 tiene dominio $\{3, 4, 5, \ldots\}$ y comienza con las asignaciones $3 \mapsto 7$, $4 \mapsto 9$, $5 \mapsto 11$, $6 \mapsto 13$. Su reindexación tiene regla $a_k^{\langle 3 \rangle} = 2k + 7$, de modo que $a_2^{\langle 3 \rangle} = 11 = a_5$. La igualdad compara términos correspondientes; no iguala los números de índice 2 y 5. Si $M \geq N$, el segmento final desde M está contenido en el segmento final desde N. Por tanto, $a|_{\mathbb{N}_{\geq M}}$ es una restricción adicional de $a|_{\mathbb{N}_{\geq N}}$, y

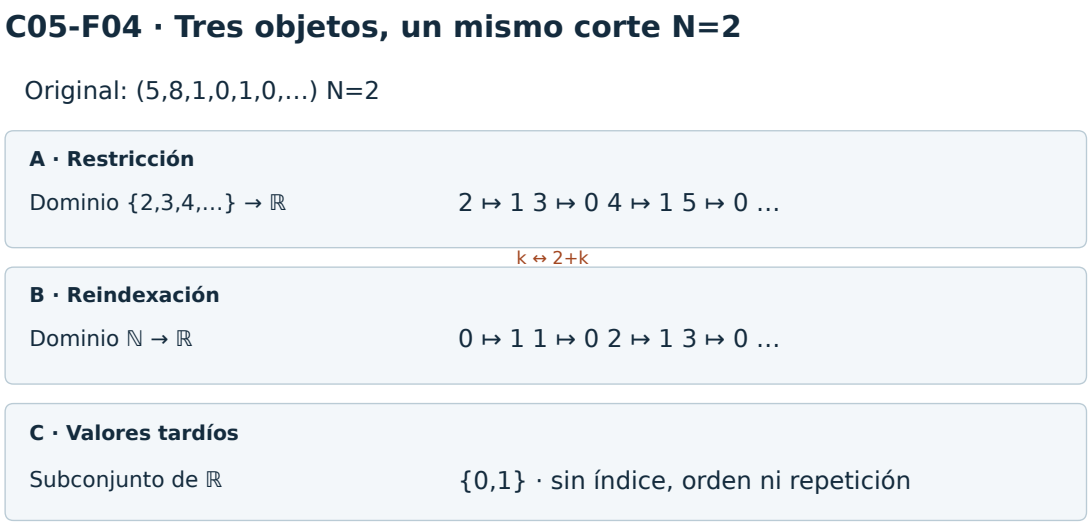


Figura 5.4. Con N=2, la restricción conserva los índices originales; la reindexación empieza en 0; el conjunto de valores elimina la indexación.

$\{a_n : n \geq M\} \subseteq \{a_n : n \geq N\}$. En efecto, un valor de la izquierda aparece en algún índice $n \geq M \geq N$, y ese mismo índice acredita la pertenencia a la derecha. Para las colas reindexadas, el corte adicional debe contarse dentro de la primera cola. Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\big(a^{\langle N\rangle}\big)_k^{\langle M-N\rangle} = a_{N+(M-N)+k} = a_{M+k} = a_k^{\langle M\rangle}$.

Las funciones tienen el mismo dominio y codominio, y coinciden en cada entrada; así, $a^{\langle M\rangle} = (a^{\langle N\rangle})^{\langle M-N\rangle}$. La fórmula incluye $M = N$: el segundo corte es entonces 0 y conserva íntegra la primera cola.

Ejercicios de la sección 5.4.

Ejercicio 14. Tres objetos después del mismo corte

Sea $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ la sucesión periódica

$$a_n = \begin{cases} 5, & n \equiv 0 \pmod 3, \\ -1, & n \equiv 1 \pmod 3, \\ 2, & n \equiv 2 \pmod 3. \end{cases}$$

Fija $N = 4$ y define

$$R = a|_{\mathbb{N}_{\geq 4}}, \qquad T = a^{\langle 4\rangle}, \qquad V_4 = \{a_n : n \geq 4\}.$$

a) Escribe el dominio y el codominio de R y de T.

b) Escribe las primeras seis asignaciones de R y los primeros seis términos de T.

c) Determina V_4.

d) Calcula $R(6)$ y T_2 y explica por qué ambos valores coinciden aunque R y T no sean la misma función.

e) Clasifica tipológicamente R, T y V_4: ¿cuáles son funciones y cuál es sólo un subconjunto de $\mathbb{R}$?

Solución. Como $4 \equiv 1 \pmod 3$, desde el índice 4 los valores se repiten según el patrón $-1, 2, 5, -1, 2, 5, \ldots$ La cola restringida es $R = a|_{\mathbb{N}_{\geq 4}} : \mathbb{N}_{\geq 4} \to \mathbb{R}$, y la cola reindexada es $T = a^{\langle 4\rangle} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Las primeras seis asignaciones de R son

$$4 \mapsto -1, \quad 5 \mapsto 2, \quad 6 \mapsto 5, \quad 7 \mapsto -1, \quad 8 \mapsto 2, \quad 9 \mapsto 5.$$

Los primeros seis términos de T son $T = (-1, 2, 5, -1, 2, 5, ...)$. Por tanto, $V_4 = \{-1, 2, 5\}$. Además, $R(6) = a_6 = 5$ y $T_2 = a_2^{\langle 4\rangle} = a_{4+2} = a_6 = 5$. Los valores coinciden porque el nuevo índice 2 de la cola reindexada corresponde al índice original 6. Sin embargo, las funciones no son iguales: sus dominios son distintos,

$\mathrm{Dom}(R) = \mathbb{N}_{\geq 4}$, $\mathrm{Dom}(T) = \mathbb{N}$. Finalmente, R y T son funciones con valores reales, mientras que V_4 es un subconjunto de $\mathbb{R}$. El conjunto V_4 ya no conserva ni índices ni repeticiones.

Ejercicio 15. Reparar una igualdad mal tipada

Sea $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ y fija $N \in \mathbb{N}$. Un estudiante escribe $a|_{\mathbb{N}_{\geq N}} = a^{\langle N\rangle} = \{a_n : n \geq N\}$. Audita la cadena.

a) Escribe el tipo exacto de cada uno de los tres objetos.

b) Examina las dos igualdades escritas, separando el caso $N = 0$ del caso $N > 0$. Indica cuándo los dominios impiden la primera igualdad y por qué la segunda confunde una función con su conjunto de valores.

c) Sea

$\tau_N : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_{\geq N}$, $\tau_N(k) = N + k$. Demuestra la relación correcta

$$\boxed{a^{\langle N\rangle} = \left(a|_{\mathbb{N}_{\geq N}}\right) \circ \tau_N.}$$

d) Demuestra además que las imágenes de las dos funciones coinciden y son precisamente el conjunto de valores tardíos:

$$\boxed{\left(a|_{\mathbb{N}_{\geq N}}\right)(\mathbb{N}_{\geq N}) = a^{\langle N\rangle}(\mathbb{N}) = \{a_n : n \geq N\}.}$$

Solución. Introduzcamos

$$R_N = a|_{\mathbb{N}_{\geq N}}, \qquad T_N = a^{\langle N\rangle}, \qquad V_N = \{a_n : n \geq N\}.$$

Sus tipos son $R_N : \mathbb{N}_{\geq N} \to \mathbb{R}$, $T_N : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, y $V_N \subseteq \mathbb{R}$. Si $N > 0$, la primera igualdad es falsa porque R_N tiene dominio $\mathbb{N}_{\geq N}$ y T_N tiene dominio $\mathbb{N}$. Para $N = 0$, en cambio, ambos dominios son $\mathbb{N}$ y se cumple $R_0 = T_0 = a$: la restricción y la reindexación no cambian la sucesión. La segunda igualdad confunde, para cualquier N, una función con su conjunto de valores. Ese conjunto conserva las salidas, pero no la asignación de cada índice a su término.

La relación correcta entre las dos funciones usa el corrimiento $\tau_N(k) = N + k$. Para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}(R_N \circ \tau_N)(k) &= R_N(N + k)\\ &= a_{N+k}\\ &= a_k^{\langle N\rangle}\\ &= T_N(k).\end{aligned}$$

Como ambas funciones tienen dominio $\mathbb{N}$ y codominio $\mathbb{R}$ después de la composición, obtenemos

$$\boxed{T_N = R_N \circ \tau_N.}$$

Veamos ahora sus imágenes. Un real x pertenece a $R_N(\mathbb{N}_{\geq N})$ si y sólo si existe $n \geq N$ tal que $x = a_n$. Por tanto, $R_N(\mathbb{N}_{\geq N}) = V_N$. Análogamente, $x \in T_N(\mathbb{N})$ si y sólo si existe $k \in \mathbb{N}$ con $x = a_{N+k}$. Como $N + k$ recorre exactamente $\mathbb{N}_{\geq N}$, $T_N(\mathbb{N}) = V_N$.

Luego

$$\boxed{R_N(\mathbb{N}_{\geq N}) = T_N(\mathbb{N}) = V_N.}$$

La igualdad correcta aparece al comparar **imágenes**, no al identificar objetos de tipos distintos.

Ejercicio 16. Una misma cola en cuatro registros

Sea $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por

$$a_n = \begin{cases} 3, & n \equiv 0 \pmod 4, \\ -1, & n \equiv 1 \pmod 4, \\ 2, & n \equiv 2 \pmod 4, \\ -1, & n \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Fija $N = 5$.

a) Construye una tabla con los pares (n, a_n) para $5 \leq n \leq 10$.

b) Escribe ese mismo bloque como parte inicial de la cola restringida $a|_{\mathbb{N}_{\geq 5}}$, conservando los índices originales.

c) Reescríbelo como los primeros seis términos de la cola reindexada $a^{\langle 5 \rangle}$, usando índices $k = 0, \ldots, 5$.

d) Escribe los seis puntos correspondientes de la gráfica discreta de la cola reindexada, $(k, a_k^{\langle 5 \rangle})$.

e) Determina el conjunto completo de valores tardíos $\{a_n : n \geq 5\}$ y explica qué información presente en los tres registros anteriores desaparece al pasar a este conjunto.

Solución. Para $5 \leq n \leq 10$ tenemos:

n	a_n
5	-1
6	2
7	-1
8	3
9	-1
10	2

Como parte inicial de la cola restringida, la misma información se escribe

$$5 \mapsto -1, \quad 6 \mapsto 2, \quad 7 \mapsto -1, \quad 8 \mapsto 3, \quad 9 \mapsto -1, \quad 10 \mapsto 2.$$

Al reindexar desde 5, los nuevos índices son $k = 0, 1, \ldots$. Los primeros seis términos quedan

k	$a_k^{\langle 5 \rangle} = a_{5+k}$
0	-1
1	2
2	-1
3	3
4	-1
5	2

La gráfica discreta de este bloque de la cola reindexada contiene los puntos $(0,-1),(1,2),(2,-1),(3,3),(4,-1),(5,2)$. El patrón continúa periódicamente. Desde $n=5$ siguen apareciendo los tres valores -1, 2 y 3, de modo que

$$\boxed{\{a_n : n \geq 5\} = \{-1, 2, 3\}.}$$

La tabla, la cola restringida y la cola reindexada conservan la organización de las visitas. El conjunto de valores tardíos sólo conserva cuáles números aparecen: pierde los índices, el orden de aparición y las repeticiones.

Ejercicio 17. Reconstruir el corte desde las nuevas posiciones

Sea $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una sucesión y supón que queremos reindexar una de sus colas. No estamos comparando valores numéricos por coincidencia accidental: cuando escribimos $r \longleftrightarrow p$, queremos decir que el término original a_p debe ocupar exactamente el nuevo índice r de la cola reindexada.

a) Decide si existe un corte N que satisfaga simultáneamente

$3 \longleftrightarrow 14, \qquad 9 \longleftrightarrow 20$. Si existe, encuéntralo y verifica ambas correspondencias.

b) Manteniendo esas dos exigencias, ¿puede añadirse también

$4 \longleftrightarrow 16$? Justifica.

c) Sean en general $r, s, p, q \in \mathbb{N}$. Demuestra que existe un mismo corte N para el cual

$r \longleftrightarrow p, \qquad s \longleftrightarrow q$ en la cola $a^{\langle N \rangle}$ si y sólo si

$$\boxed{p - r = q - s \geq 0.}$$

Cuando existe, identifica el único valor posible de N.

Solución. En una cola reindexada desde N, el nuevo índice r corresponde al índice original $N + r$. Por tanto, la exigencia $3 \longleftrightarrow 14$ obliga a $N + 3 = 14$, de donde $N = 11$. La segunda exigencia da $N + 9 = 20$, y produce el mismo valor $N = 11$. Así, las dos correspondencias son compatibles y el corte es único:

$$\boxed{N = 11.}$$

En efecto, $a_3^{\langle 11 \rangle} = a_{14}, \qquad a_9^{\langle 11 \rangle} = a_{20}$. Si añadimos $4 \longleftrightarrow 16$, la nueva condición exige $N + 4 = 16$, o sea, $N = 12$. Esto contradice el valor $N = 11$ impuesto por las dos correspondencias anteriores. Por tanto, las tres exigencias no pueden satisfacerse simultáneamente. En general, $r \longleftrightarrow p$ y $s \longleftrightarrow q$ significan $p = N + r, \qquad q = N + s$.

Restando,

$$p - r = N \qquad \text{y} \qquad q - s = N.$$

Por tanto, una condición necesaria es $p - r = q - s \geq 0$.

Recíprocamente, si $p - r = q - s \geq 0$, definimos $N = p - r = q - s$. Entonces $N \in \mathbb{N}$ y se cumplen $N + r = p, \qquad N + s = q$. Así,

$$\boxed{\exists N \in \mathbb{N} \text{ compatible con ambas correspondencias } \iff p - r = q - s \geq 0.}$$

Cuando existe, el corte es necesariamente

$$\boxed{N = p - r = q - s,}$$

y por ello es único.

Ejercicio 18. Componer reindexaciones

Sea $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ y sean $N, K \in \mathbb{N}$.

a) Demuestra, como igualdad de funciones $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que

$$\boxed{\left(a^{\langle N\rangle}\right)^{\langle K\rangle} = a^{\langle N+K\rangle}.}$$

Tu prueba debe comenzar con un índice arbitrario $j \in \mathbb{N}$ y seguir explícitamente qué índice original de a representa cada término.

b) Explica la cadena de índices

$j \longmapsto K + j \longmapsto N + K + j.$

c) Deduce como caso particular que, si $M \geq N$, entonces

$$\boxed{a^{\langle M\rangle} = \left(a^{\langle N\rangle}\right)^{\langle M-N\rangle}.}$$

d) Explica por qué esta identidad habla de reindexar dos veces y no de eliminar dos bloques independientes de términos.

Solución. Fijemos $j \in \mathbb{N}$. Por definición de cola reindexada,

$$\left(a^{\langle N\rangle}\right)^{\langle K\rangle}_j = a^{\langle N\rangle}_{K+j}.$$

Aplicando nuevamente la definición,

$$a^{\langle N\rangle}_{K+j} = a_{N+(K+j)}.$$

Por asociatividad de la suma, $a_{N+(K+j)} = a_{(N+K)+j}$. Pero el miembro derecho es precisamente $a^{\langle N+K\rangle}_j$. Hemos probado que, para todo $j \in \mathbb{N}$, $\left(a^{\langle N\rangle}\right)^{\langle K\rangle}_j = a^{\langle N+K\rangle}_j$. Ambos objetos son funciones $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Por igualdad índice a índice,

$$\boxed{\left(a^{\langle N\rangle}\right)^{\langle K\rangle} = a^{\langle N+K\rangle}.}$$

La cadena $j \longmapsto K + j \longmapsto N + K + j$ se interpreta así: j es el índice de la segunda reindexación; $K + j$ es el índice correspondiente dentro de la primera cola reindexada; $N + K + j$ es el índice original en a. Si $M \geq N$, entonces $K = M - N \in \mathbb{N}$. La identidad general produce $\left(a^{\langle N\rangle}\right)^{\langle M-N\rangle} = a^{\langle N+(M-N)\rangle} = a^{\langle M\rangle}$.

Por tanto,

$$\boxed{a^{\langle M\rangle} = \left(a^{\langle N\rangle}\right)^{\langle M-N\rangle}.}$$

No se están eliminando dos bloques independientes. El segundo corte actúa **dentro de la primera cola ya reindexada**: descarta sus primeros K términos, que corresponden exactamente a los índices originales $N, N+1, \ldots, N+K-1$. El efecto acumulado es un único corte original en $N + K$.

Ejercicio 19. Cuándo deja de encogerse el conjunto de valores tardíos

Para una sucesión $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ define $V_N(a) = \{a_n : n \geq N\}$. Sean $M, N \in \mathbb{N}$ con $M \geq N$.

a) Demuestra que

$V_M(a) \subseteq V_N(a).$

b) Demuestra la equivalencia

$$\boxed{V_N(a) = V_M(a) \iff \forall n \in \{N, N+1, \dots, M-1\}\ \exists m \geq M :\ a_n = a_m.}$$

Interpreta verbalmente la condición de la derecha.

c) Explica qué ocurre en el caso $M = N$.

d) Da un ejemplo en el que la inclusión de a) sea estricta y otro en el que haya igualdad aunque $M > N$.

e) Explica por qué la igualdad de conjuntos $V_N(a) = V_M(a)$ no implica que las colas restringidas desde N y desde M sean la misma función.

Solución. Definimos $V_N(a) = \{a_n : n \geq N\}$. Como $M \geq N$, todo índice $m \geq M$ satisface también $m \geq N$. Si $x \in V_M(a)$, existe $m \geq M$ tal que $x = a_m$. Entonces $m \geq N$, y por tanto $x \in V_N(a)$. Así,

$$\boxed{V_M(a) \subseteq V_N(a).}$$

Probemos ahora la equivalencia. Supongamos primero que $V_N(a) = V_M(a)$. Sea $n \in \{N, N+1, \dots, M-1\}$. Como $n \geq N$, tenemos $a_n \in V_N(a)$. Por la igualdad de conjuntos, $a_n \in V_M(a)$. Por definición de $V_M(a)$, existe $m \geq M$ tal que $a_m = a_n$. Por tanto, $\forall n \in \{N, \dots, M-1\}\ \exists m \geq M :\ a_n = a_m$.

Para la conversa, supongamos esta última condición y tomemos $x \in V_N(a)$. Existe $n \geq N$ con $x = a_n$. Hay dos casos. Si $n \geq M$, entonces directamente $x \in V_M(a)$. Si $N \leq n < M$, la hipótesis proporciona un índice $m \geq M$ tal que $a_m = a_n = x$. De nuevo $x \in V_M(a)$. Hemos probado $V_N(a) \subseteq V_M(a)$. Junto con la inclusión siempre válida de la primera parte, obtenemos

$$\boxed{V_N(a) = V_M(a) \iff \forall n \in \{N, \dots, M-1\}\ \exists m \geq M :\ a_n = a_m.}$$

La condición dice: **ningún valor que aparezca en el bloque eliminado entre N y $M-1$ desaparece definitivamente al mover el corte hasta M; cada uno reaparece en algún índice posterior**. Si $M = N$, el bloque $\{N, N+1, \dots, M-1\}$ es vacío. La condición universal sobre ese bloque es vacuamente verdadera y, naturalmente, $V_N(a) = V_N(a)$. Para una inclusión estricta, tomemos

$$a = (0, 1, 1, 1, 1, \dots), \qquad N = 0, \qquad M = 1.$$

Entonces $V_0(a) = \{0, 1\}$, $\quad V_1(a) = \{1\}$, de modo que $V_1(a) \subsetneq V_0(a)$. Para un caso de igualdad con $M > N$, tomemos

$$a_n = (-1)^n, \qquad N = 0, \qquad M = 1.$$

Tenemos $V_0(a) = V_1(a) = \{-1, 1\}$, porque el valor $a_0 = 1$ reaparece en índices pares posteriores a 1. Finalmente, la igualdad de conjuntos de valores tardíos no convierte las colas restringidas en la misma función. Si $M > N$, sus dominios son distintos: $\mathbb{N}_{\geq N} \neq \mathbb{N}_{\geq M}$. Además, aun cuando sus imágenes coincidan, los índices originales y el orden de las visitas siguen siendo información propia de cada cola. La igualdad

$V_N(a) = V_M(a)$ es una igualdad de subconjuntos de $\mathbb{R}$, no una igualdad de funciones restringidas.

5.5. «A partir de cierto momento»: propiedades eventuales

En $a_n = 2n - 7$, los primeros términos son negativos, pero si $n \geq 4$ se cumple $a_n \geq 1 > 0$. La positividad puede fallar al comienzo y mantenerse en todos los índices posteriores a un mismo corte. Para expresar esa situación, sea $P(n)$ una propiedad definida para cada $n \in \mathbb{N}$.

Propiedad eventual. La propiedad $P(n)$ ocurre **eventualmente** si

$$\boxed{\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N :\ P(n).}$$

El natural N se llama **umbral** o **testigo de eventualidad**. Se elige primero y después debemos demostrar $P(n)$ para un índice arbitrario $n \geq N$. Verificar una larga lista de casos posteriores no cubre por sí solo ese universal. Para la positividad de $2n-7$, la desigualdad $2n-7 \geq 1$ cuando $n \geq 4$ proporciona la razón general que faltaría en una tabla.

> **Persistencia de los testigos.** Si N es un testigo de que $P(n)$ ocurre eventualmente y $M \geq N$, entonces M también es un testigo.

Si P vale para todo $n \geq N$ y $M \geq N$, un índice $n \geq M$ satisface $n \geq M \geq N$ y, por tanto, $P(n)$. Esto demuestra la persistencia. Para $a_n = 2n-7$, tanto 4 como 5, 6 y todos los cortes posteriores son testigos. La definición exige encontrar uno que funcione, y no obliga a localizar el menor.

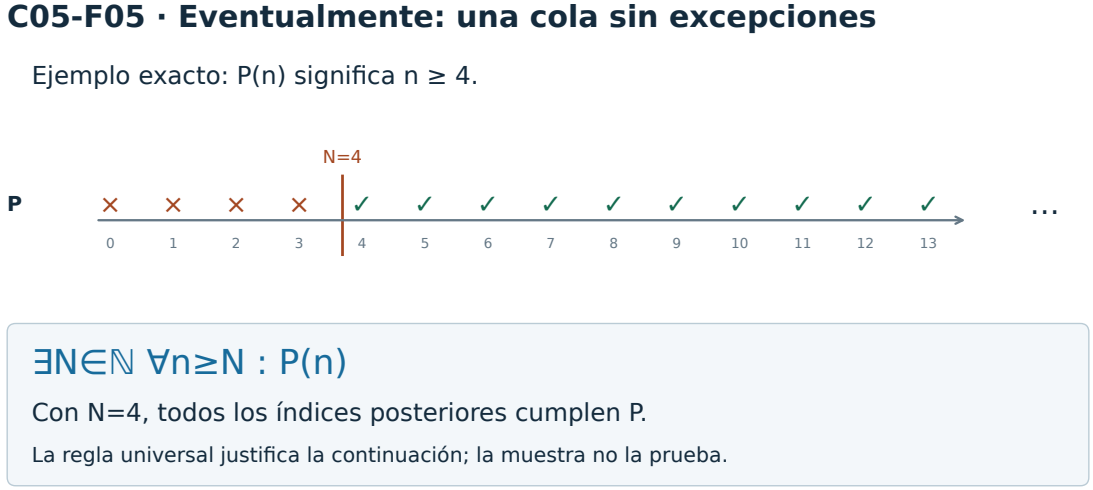


Figura 5.5. Para P(n): n≥4, N=4 deja una cola sin excepciones. La regla universal justifica la continuación más allá del dibujo.

Una propiedad válida para todos los índices es eventual con testigo $N = 0$. La conversa falla: $a_0 = -7$ impide la positividad global en el ejemplo, sin impedir su positividad eventual. También la sucesión definida por $c_n = 0$ para $n = 0, 1, 2$ y $c_n = 1$ para $n \geq 3$ es eventualmente no nula, con testigo 3, aunque sus tres primeros términos sean cero. Si fijamos $a_0 = -1$ y $a_n = 1$ para $n \geq 1$, la positividad empieza ya en 1.

El lenguaje de colas da la equivalencia

$$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : P(n) \iff \exists N \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N} : P(N+k).$$

Para pasar de izquierda a derecha usamos que $N + k \geq N$; para volver, escribimos cada $n \geq N$ como $N + (n - N)$. Si $P(n)$ es $R(a_n)$ para un predicado fijo R, la expresión reindexada es $R(a_k^{\langle N \rangle})$. Para una propiedad que también mire el índice, debe conservarse $N + k$ en su argumento: renumerar la cola no convierte una condición sobre el índice original en otra sobre k.

La pertenencia eventual a un intervalo requiere fijar ese intervalo antes de buscar el umbral. Para $b_n = 1/(n+1)$ e $I = (0, 1/3)$, elegimos $N = 3$; si $n \geq 3$, entonces $0 < b_n \leq 1/4 < 1/3$. Para el intervalo fijo $(0, 1/5)$ sirve $N = 5$, pues $0 < b_n \leq 1/6 < 1/5$ para todo $n \geq 5$. El término $b_4 = 1/5$ explica por qué el extremo estricto importa. También para $a_n = 3n - 10$ sirve $N = 4$, ya que $a_n \geq 2 > 0$ en esa cola.

Los parámetros permanecen fijados durante la prueba: en $P_I(n) : a_n \in I$, el conjunto I precede a N; en $a_n > c$, el número c también está elegido antes del umbral. El índice n es

el que recorre la cola. Por eso comprobar $P(10), \dots, P(1000)$ no demuestra eventualidad. La propiedad $P(n) : n \leq 1000$ supera todas esas comprobaciones, pero para cualquier corte N falla en $n = N + 1001 \geq N$. Incluso una muestra muy larga puede quedar enteramente antes de un fallo definitivo.

Ejercicios de la sección 5.5.

Ejercicio 20. Todos los testigos de una desigualdad eventual

Sea $a_n = 4n - 13, \quad n \in \mathbb{N}$, y considera la propiedad $P(n) : \quad a_n \geq 7$.

a) Encuentra un testigo N de que $P(n)$ ocurre eventualmente y verifica tu elección para un índice arbitrario $n \geq N$.

b) Determina **todos** los valores de $N \in \mathbb{N}$ que sirven como testigos de eventualidad.

c) Explica por qué no es necesario elegir el menor testigo para demostrar que P es eventual, aunque en este ejemplo pueda identificarse.

Solución. La propiedad es $4n - 13 \geq 7$. Si elegimos $N = 5$ y tomamos un índice arbitrario $n \geq 5$, entonces $4n \geq 20$, y por tanto $a_n = 4n - 13 \geq 7$. Así, $N = 5$ es un testigo. Caractericemos ahora todos los testigos. Si $N \geq 5$ y $n \geq N$, entonces también $n \geq 5$, de modo que el argumento anterior da $a_n \geq 7$. Por tanto todo $N \geq 5$ funciona. En cambio, si $N \leq 4$, el propio índice $n = N$ pertenece a la cola que comienza en N, pero

$a_N = 4N - 13 \leq 4 \cdot 4 - 13 = 3 < 7$. Luego ningún $N \leq 4$ es testigo. El conjunto completo de testigos es

$$\boxed{\{N \in \mathbb{N} : N \geq 5\} = \mathbb{N}_{\geq 5}.}$$

Para demostrar eventualidad bastaba exhibir un único elemento de este conjunto, por ejemplo $N = 5$ o $N = 100$. La definición exige existencia de un testigo, no minimalidad.

Ejercicio 21. Un intervalo fijo y el conjunto exacto de testigos

Sea $b_n = \frac{2n+1}{n+2}, \quad n \in \mathbb{N}$, y fija, **antes de elegir cualquier umbral**, el intervalo $I = \left(\frac{3}{2}, 2\right)$.

a) Demuestra que $b_n < 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) Encuentra un testigo N de que $b_n \in I$ eventualmente.

c) Caracteriza exactamente el conjunto de todos los testigos para esta propiedad.

d) Identifica en tu prueba qué dato estaba fijado antes de elegir N y qué variable quedó arbitraria después de fijar el umbral.

Solución. El denominador $n+2$ es positivo para todo $n \in \mathbb{N}$. Para la cota superior, $2n+1 < 2n + 4 = 2(n + 2)$, de modo que

$$\boxed{b_n < 2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Para la cota inferior queremos $\frac{2n+1}{n+2} > \frac{3}{2}$. Como $2(n + 2) > 0$, podemos multiplicar sin invertir la desigualdad: $2(2n + 1) > 3(n + 2)$. Esto equivale a $4n + 2 > 3n + 6$, y por tanto a $n > 4$. Así, si $n \geq 5$, $\frac{3}{2} < b_n < 2$. Por ello $N = 5$ es un testigo de que $b_n \in I$ eventualmente.

Más aún, todo $N \geq 5$ es testigo: si $n \geq N$, entonces $n \geq 5$ y la doble desigualdad anterior vale. Si $N \leq 4$, podemos tomar $n = N$. En ese caso $n \leq 4$, luego $b_n \leq \frac{3}{2}$, por lo que $b_n \notin I$. Así,

$$\boxed{\{N : \forall n \geq N,\ b_n \in I\} = \mathbb{N}_{\geq 5}.}$$

El orden de elecciones es esencial. Primero se fijó $I = \left(\frac{3}{2}, 2\right)$. Después se buscó N. Una vez elegido el umbral, el índice $n \geq N$ quedó arbitrario y la prueba tuvo que cubrir todos esos índices.

Ejercicio 22. El conjunto de testigos y la cola reindexada

Sea $P(n)$ una propiedad definida para cada $n \in \mathbb{N}$ y define $W_P = \{N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N,\ P(n)\}$. Demuestra las tres afirmaciones siguientes.

a) $P(n)$ ocurre eventualmente si y sólo si $W_P \neq \emptyset$.

b) Si $N \in W_P$ y $M \geq N$, entonces $M \in W_P$.

c) Para cada $N \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{N \in W_P \iff \forall k \in \mathbb{N} :\ P(N+k).}$$

Concluye explicando por qué el conjunto de testigos, cuando no es vacío, está cerrado hacia índices posteriores y cómo la parte c) traduce la eventualidad al lenguaje de una cola reindexada.

Solución. Por definición,

$$P(n) \text{ ocurre eventualmente}$$

significa $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N :\ P(n)$. Pero afirmar que existe tal N es exactamente afirmar que existe un elemento de $W_P = \{N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N,\ P(n)\}$. Por tanto,

$$\boxed{P \text{ eventual} \iff W_P \neq \emptyset.}$$

Para la segunda afirmación, supongamos que $N \in W_P$ y $M \geq N$. Entonces $\forall n \geq N : P(n)$. Tomemos un índice arbitrario $n \geq M$. Como $n \geq M \geq N$, tenemos $n \geq N$ y, por la propiedad de N, se cumple $P(n)$. Como esto vale para todo $n \geq M$, $M \in W_P$. Así, cuando W_P no es vacío, queda cerrado hacia índices posteriores.

Probemos ahora la equivalencia reindexada. Si $N \in W_P$, entonces $P(n)$ vale para todo $n \geq N$. Para cualquier $k \in \mathbb{N}$, el índice $n = N + k$ satisface $n \geq N$, luego $P(N+k)$ es verdadera.

Recíprocamente, supongamos $\forall k \in \mathbb{N} :\ P(N+k)$. Sea $n \geq N$. Entonces $k = n - N \in \mathbb{N}$ y $n = N + k$. Por hipótesis, $P(N+k)$ es verdadera; es decir, $P(n)$ es verdadera. Por tanto $N \in W_P$. Hemos demostrado

$$\boxed{N \in W_P \iff \forall k \in \mathbb{N} :\ P(N+k).}$$

La parte derecha es la lectura de la misma cola después de reiniciar sus índices en 0: cada nuevo índice k representa el índice original $N + k$.

Ejercicio 23. Un millón de verificaciones no produce un cuantificador universal

Un estudiante quiere demostrar que una propiedad $P(n)$ ocurre eventualmente y escribe:

> He comprobado $P(n)$ para todos los índices desde 1000 hasta 10^6. Por tanto puedo tomar $N = 1000$ y concluir que $P(n)$ es verdadera para todo $n \geq 1000$.

a) Escribe la afirmación cuantificada que el estudiante necesita demostrar para que $N = 1000$ sea un testigo.

b) Localiza el salto lógico entre lo que verificó y lo que concluyó.

c) Construye una propiedad explícita $P(n)$ que sea verdadera para **todos** los índices $1000 \leq n \leq 10^6$ y, sin embargo, no sea eventual.

d) Demuestra desde la definición que tu propiedad no es eventual.

e) Indica qué tipo de argumento adicional, más allá de una lista finita de comprobaciones, repararía la prueba original.

Solución. Para que $N = 1000$ sea un testigo, el estudiante debe demostrar

$$\boxed{\forall n \geq 1000 : \ P(n).}$$

Sin embargo, sólo verificó la afirmación en el conjunto finito $\{1000, 1001, \ldots, 10^6\}$. Faltan todos los índices mayores que 10^6. La conclusión universal sobre la cola completa no se sigue de una cantidad finita de casos. Un contraejemplo explícito es $P(n) : \quad n \leq 10^6$. Esta propiedad es verdadera para cada índice entre 1000 y 10^6, exactamente como exige la comprobación del estudiante.

No obstante, P no es eventual. En efecto, sea $N \in \mathbb{N}$ cualquier umbral propuesto. Tomemos $n = N+10^6+1$. Entonces $n \geq N$ y además $n > 10^6$. Por tanto $P(n)$ es falsa. Como esto puede hacerse para cualquier N, no existe un umbral después del cual P sea siempre verdadera. El argumento original se repararía sustituyendo la lista finita de verificaciones por una razón general que cubra **todo** índice $n \geq 1000$: por ejemplo, una desigualdad, una identidad o una definición por casos que permita deducir $P(n)$ a partir de la hipótesis arbitraria $n \geq 1000$.

Ejercicio 24. Mover una única excepción mueve el umbral

Para cada $r \in \mathbb{N}$, fija primero el parámetro r y define la sucesión

$$d_n^{(r)} = \begin{cases} 0, & n = r, \\ 1, & n \neq r. \end{cases}$$

Considera la propiedad $P_r(n) : \quad d_n^{(r)} = 1$.

a) Demuestra que, para cada r fijo, $P_r(n)$ ocurre eventualmente.

b) Determina exactamente todos los testigos N para P_r.

c) Explica por qué ningún $N \leq r$ puede ser testigo.

d) ¿Es $P_r(n)$ verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$? Justifica.

e) Compara los casos r y $r+10$: ¿qué cambia en el conjunto de testigos y qué estructura lógica de la definición permanece idéntica?

Solución. Fijemos primero $r \in \mathbb{N}$. La única falla de la propiedad $P_r(n) : \quad d_n^{(r)} = 1$ ocurre en el índice r. Si elegimos $N = r + 1$, y tomamos cualquier $n \geq N$, entonces $n \geq r + 1$, de modo que $n \neq r$. Por definición,

$$d_n^{(r)} = 1.$$

Luego P_r es eventual. Todo $N \geq r + 1$ también es testigo por el mismo argumento. En cambio, si $N \leq r$, el índice $n = r$ satisface $n \geq N$, pero $d_r^{(r)} = 0 \neq 1$. Por tanto ningún $N \leq r$ funciona y el conjunto exacto de testigos es

$$\boxed{\{N : \forall n \geq N, \ d_n^{(r)} = 1\} = \mathbb{N}_{\geq r+1}.}$$

La propiedad no es global, porque falla precisamente en $n = r$. Si reemplazamos r por $r + 10$, la excepción se desplaza diez lugares hacia la derecha y el conjunto de testigos pasa de $\mathbb{N}_{\geq r+1}$ a $\mathbb{N}_{\geq r+11}$. Lo que no cambia es la arquitectura lógica: primero se fija el parámetro de la sucesión, después se elige un umbral y, finalmente, la propiedad debe verificarse para todo índice posterior.

Ejercicio 25. Tres lenguajes para la misma eventualidad

Sea $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ y sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo **fijo**. Demuestra que son equivalentes las afirmaciones siguientes:

1. $a_n \in I$ eventualmente;
2. existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a(\mathbb{N}_{\geq N}) \subseteq I$;
3. existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall k \in \mathbb{N} :\ a_k^{\langle N \rangle} \in I$.

Después responde:

a) Si $a_n \in I$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ¿qué testigo puede elegirse inmediatamente?

b) Da un ejemplo explícito en el que $a_n \in I$ sea eventual pero no global.

c) Explica por qué el intervalo I debe considerarse fijado antes de buscar el testigo N.

d) Resume en una sola cadena conceptual cómo intervienen en esta equivalencia el segmento final, la cola reindexada y el patrón $\exists N\, \forall n \geq N$.

Solución. La primera afirmación significa, por definición,

$$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N :\ a_n \in I.$$

Para cada N, la imagen del segmento final es $a(\mathbb{N}_{\geq N}) = \{a_n : n \geq N\}$. Por tanto, $\forall n \geq N :\ a_n \in I$ es equivalente a $a(\mathbb{N}_{\geq N}) \subseteq I$. Esto prueba la equivalencia entre 1 y 2. Comparemos ahora 1 y 3. Si existe N tal que $a_n \in I$ para todo $n \geq N$, entonces para cada $k \in \mathbb{N}$ el índice $N + k$ satisface $N + k \geq N$. Por tanto,
$a_k^{\langle N \rangle} = a_{N+k} \in I$.

Recíprocamente, supongamos que para cierto N, $\forall k \in \mathbb{N} :\ a_k^{\langle N \rangle} \in I$. Sea $n \geq N$. Entonces $k = n - N \in \mathbb{N}$ y $a_n = a_{N+k} = a_k^{\langle N \rangle} \in I$. Luego 3 implica 1. En consecuencia,

$$\boxed{1 \iff 2 \iff 3.}$$

Si $a_n \in I$ para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos elegir inmediatamente $N = 0$. La conversa falla. Por ejemplo, toma

$$a_0 = 0, \qquad a_n = 2 \quad (n \geq 1),$$

y $I = (1, 3)$. Entonces $a_0 \notin I$, de modo que la propiedad no es global, pero para todo $n \geq 1$ tenemos $a_n = 2 \in I$. Así, $N = 1$ es un testigo de eventualidad. El intervalo I debe estar fijado antes de buscar N: la afirmación estudia si **una misma región previamente elegida** contiene todos los términos de alguna cola. Una vez fijados I y N, sólo el índice recorre la cola.

La cadena conceptual puede escribirse así:

$$\boxed{\mathbb{N}_{\geq N} \longleftrightarrow \text{cola desde } N \longleftrightarrow \forall n \geq N \longleftrightarrow \text{propiedad eventual.}}$$

La cola reindexada expresa la misma estructura sustituyendo cada índice original $n \geq N$ por $k = n - N$.

5.6. Eventualmente no significa infinitas veces

Para $a_n = (-1)^n$, el valor 1 reaparece después de cualquier corte, aunque entre sus apariciones sigan apareciendo términos iguales a -1. Esta repetición tardía exige un orden de cuantificadores diferente.

Ocurrir infinitas veces. Diremos que la propiedad $P(n)$ ocurre **infinitas veces** si

$$\boxed{\forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N :\ P(n).}$$

El corte N es ahora arbitrario; el índice testigo puede elegirse después y depender de él. En el ejemplo, si N es par sirve $n = N$ y, si es impar, sirve $n = N + 1$. También podemos elegir siempre $n = 2N$. Para encontrar un fallo después del mismo corte sirve el impar $m = 2N + 1$. Así, la propiedad $P(n) : a_n = 1$ y su negación ocurren ambas infinitas veces, y ninguna de ellas llena una cola completa.

> **Proposición.** Si $P(n)$ ocurre eventualmente, entonces $P(n)$ ocurre infinitas veces.

Supongamos que $P(n)$ vale para todo $n \geq N_0$. Dado un corte arbitrario N, elegimos $n = N + N_0$. Como ambos sumandos son naturales no negativos, $n \geq N$ y $n \geq N_0$; la segunda desigualdad da $P(n)$ y la primera lo sitúa después del corte solicitado. Hemos construido una ocurrencia para cada N, sin usar todavía el lema de sincronización. La conversa es falsa por el ejemplo alternante.

Las negaciones explican con precisión el fracaso de cada propiedad:

$$\neg(\exists N\ \forall n \geq N : P(n)) \iff \forall N\ \exists n \geq N : \neg P(n),$$
$$\neg(\forall N\ \exists n \geq N : P(n)) \iff \exists N\ \forall n \geq N : \neg P(n).$$

En la primera equivalencia, negar que algún corte elimine todos los fallos obliga a encontrar un fallo después de cada corte. Si desplegamos el universal restringido, negamos la implicación $n \geq N \Rightarrow P(n)$ y obtenemos conjuntamente $n \geq N$ y $\neg P(n)$. Por tanto, P no es eventual si y sólo si $\neg P$ ocurre infinitas veces. La segunda equivalencia dice que P no ocurre infinitas veces si y sólo si su negación es eventual. En particular, si P es eventual, su negación no puede seguir apareciendo arbitrariamente tarde.

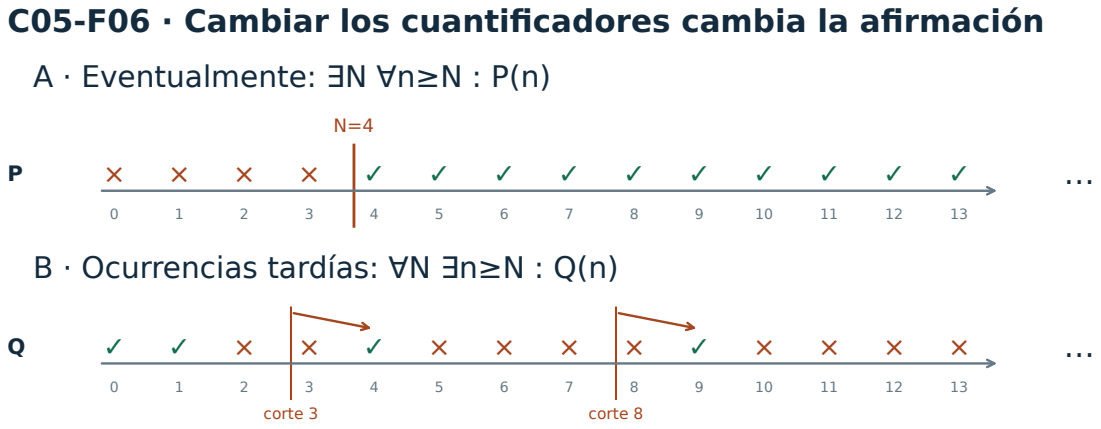


Figura 5.6. Una cola de éxitos y ocurrencias posteriores a cada corte tienen cuantificadores distintos. Los cuadrados reaparecen sin llenar ninguna cola.

La periodicidad no es necesaria. Sea $P(n)$ la propiedad de que n sea un cuadrado perfecto. Dado cualquier N, el índice $(N+1)^2 \geq N$ es una ocurrencia. Para encontrar un fallo ponemos $k = N + 1 \geq 1$ y $m = k^2 + 1$. Entonces $m \geq N$ y $k^2 < m < (k+1)^2$, porque $1 < 2k + 1$. Ningún cuadrado natural queda estrictamente entre cuadrados consecutivos: si j^2 estuviera allí, de $j \leq k$ se deduciría $j^2 \leq k^2$, y de $j \geq k+1$, $j^2 \geq (k+1)^2$. Por tanto m no es cuadrado. Hay apariciones y fallos después de cualquier corte, aunque las separaciones entre cuadrados crezcan.

Una cantidad finita de apariciones, por grande que sea, tampoco basta. La propiedad $n < 100000$ vale en cien mil índices, pero no tiene ninguna ocurrencia desde 100000 en

adelante. Debemos distinguir una cola de éxitos, apariciones y fallos arbitrariamente tardíos, y una cola de fallos. Las dos equivalencias anteriores permiten reconocer estos casos sin sustituir los cuantificadores por impresiones de frecuencia.

Ejercicios de la sección 5.6.

Ejercicio 26. El conjunto de ocurrencias visto desde cada cola

Sea $P(n)$ una propiedad definida para cada $n \in \mathbb{N}$ y define su conjunto de ocurrencias por $A_P = \{n \in \mathbb{N} : P(n)\}$. Para $N \in \mathbb{N}$, recuerda que $\mathbb{N}_{\geq N} = \{n \in \mathbb{N} : n \geq N\}$. Demuestra las equivalencias

$$\boxed{P \text{ ocurre infinitas veces } \iff \forall N \in \mathbb{N} :\ A_P \cap \mathbb{N}_{\geq N} \neq \emptyset,}$$

y

$$\boxed{P \text{ ocurre eventualmente } \iff \exists N \in \mathbb{N} :\ \mathbb{N}_{\geq N} \subseteq A_P.}$$

Después:

a) usa únicamente estas dos caracterizaciones para demostrar que toda propiedad eventual ocurre infinitas veces;

b) explica, en lenguaje de conjuntos, la diferencia entre «una cola completa queda dentro de A_P» y «cada cola corta a A_P en al menos un punto»;

c) indica cuál de las dos caracterizaciones permite que haya fallos de P arbitrariamente tardíos.

Solución. Por definición,

$$A_P = \{n \in \mathbb{N} : P(n)\}.$$

La propiedad P ocurre infinitas veces si y sólo si $\forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N :\ P(n)$. Para un N fijo, afirmar que existe $n \geq N$ con $P(n)$ equivale a afirmar que existe un índice perteneciente simultáneamente a A_P y a $\mathbb{N}_{\geq N}$. Por tanto, $\exists n \geq N :\ P(n) \iff A_P \cap \mathbb{N}_{\geq N} \neq \emptyset$.

Como la equivalencia vale para cada N,

$$\boxed{P \text{ ocurre infinitas veces } \iff \forall N :\ A_P \cap \mathbb{N}_{\geq N} \neq \emptyset.}$$

Análogamente, P ocurre eventualmente si y sólo si existe N tal que $\forall n \geq N :\ P(n)$. Esto significa exactamente que cada elemento de $\mathbb{N}_{\geq N}$ pertenece a A_P; es decir,

$$\boxed{P \text{ ocurre eventualmente } \iff \exists N :\ \mathbb{N}_{\geq N} \subseteq A_P.}$$

Supongamos ahora que P es eventual. Existe N_0 con $\mathbb{N}_{\geq N_0} \subseteq A_P$. Tomemos un umbral arbitrario N. El índice $n = N + N_0$ satisface $n \geq N$ y $n \geq N_0$. Por tanto, $n \in \mathbb{N}_{\geq N} \cap \mathbb{N}_{\geq N_0}$ y, como $\mathbb{N}_{\geq N_0} \subseteq A_P$, $n \in A_P \cap \mathbb{N}_{\geq N}$. Así, toda cola corta a A_P, de modo que P ocurre infinitas veces.

La diferencia entre las dos condiciones es estructural. La eventualidad exige una inclusión completa: $\mathbb{N}_{\geq N_0} \subseteq A_P$. Desde N_0 no queda ningún fallo. En cambio, «infinitas veces» sólo exige $A_P \cap \mathbb{N}_{\geq N} \neq \emptyset$ para cada N. Puede haber muchos índices de la cola que no pertenezcan a A_P; basta con que siempre sobreviva alguna nueva ocurrencia más allá del corte. Por eso esta segunda condición permite fallos arbitrariamente tardíos.

Ejercicio 27. Apariciones arbitrariamente tardías no llenan una cola

Define la propiedad $P(n) :\quad n = 2^k$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Un estudiante razona:

> Para cualquier umbral N puedo encontrar una potencia de 2 situada después de N. Por tanto, llega un momento a partir del cual todos los índices son potencias de 2, así que P es eventual.

Audita el argumento.

a) Escribe la afirmación cuantificada que expresa correctamente que P ocurre infinitas veces.

b) Demuestra esa afirmación construyendo, para un N arbitrario, un índice testigo $n \geq N$ que sea potencia de 2.

c) Localiza con precisión el cambio ilegítimo de orden o alcance de cuantificadores en el razonamiento del estudiante.

d) Demuestra que P **no** es eventual: dado un umbral arbitrario N, construye un índice $m \geq N$ que no sea potencia de 2.

e) Reescribe la conclusión correcta sin cambiar ninguna premisa verdadera del argumento original.

Solución. La afirmación correcta de que P ocurre infinitas veces es

$$\boxed{\forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N :\ n = 2^k \text{ para algún } k \in \mathbb{N}.}$$

Fijemos un umbral arbitrario N. Podemos tomar $n = 2^{N+1}$. Entonces n es una potencia de 2. Además, $2^{N+1} \geq N$ para todo $N \in \mathbb{N}$. En efecto, $2^j \geq j+1$ se prueba por inducción: vale para $j = 0$ y, si vale para j, entonces $2^{j+1} \geq 2(j+1) \geq j+2$. Aplicando esta desigualdad a $j = N+1$ obtenemos incluso $2^{N+1} \geq N+2$. Hemos construido una ocurrencia de P después de cualquier corte; por tanto P ocurre infinitas veces.

El estudiante transforma indebidamente $\forall N\ \exists n \geq N :\ P(n)$ en $\exists N\ \forall n \geq N :\ P(n)$. En la primera fórmula, el índice testigo n puede depender del umbral N y sólo se exige **alguna** ocurrencia posterior. En la segunda debe existir un único corte después del cual **todos** los índices satisfagan P. No hay ninguna regla lógica que permita intercambiar esos cuantificadores.

Veamos directamente que P no es eventual. Sea $N \in \mathbb{N}$ arbitrario y define $m = 2^{N+1} + 1$. Claramente $m \geq N$. Además, $2^{N+1} < m < 2^{N+2}$, porque $1 < 2^{N+1}$. Por tanto m queda estrictamente entre dos potencias consecutivas de 2 y no puede ser una potencia de 2. Así, después de cualquier umbral aparece todavía un fallo de P.

La conclusión correcta es:

$$\boxed{P \text{ ocurre infinitas veces, pero no ocurre eventualmente.}}$$

El argumento original sí demostraba la existencia de potencias de 2 arbitrariamente tardías; lo único falso era convertir esas apariciones aisladas en una cola completa de éxitos.

Ejercicio 28. Bloques cada vez más largos sin estabilización

Define una propiedad $P(n)$ de los naturales de la siguiente manera. Para cada entero $k \geq 1$, declara verdadera a P en el bloque $k^2 \leq n < k^2 + k$ y falsa en el bloque siguiente $k^2 + k \leq n < (k+1)^2$. Además, fija $P(0)$ como falsa.

a) Escribe el patrón de verdad de $P(n)$ para $0 \leq n \leq 20$, agrupando los índices en bloques consecutivos de verdad y falsedad.

b) Demuestra directamente desde la definición que P ocurre infinitas veces.

c) Demuestra directamente que $\neg P$ ocurre infinitas veces.

d) Concluye que ni P ni $\neg P$ son eventuales.

e) Demuestra algo más fuerte: para cada $L \geq 1$ existe un bloque de al menos L índices consecutivos en los que P es verdadera y también un bloque de al menos L índices consecutivos en los que P es falsa.

f) Explica qué falsa inferencia destruye este ejemplo acerca de observar bloques finitos cada vez más largos.

Solución. Para $k = 1$ tenemos un bloque verdadero en $n = 1$ y un bloque falso en $n = 2, 3$. Para $k = 2$, P es verdadera en $4, 5$ y falsa en $6, 7, 8$. Para $k = 3$, es verdadera en $9, 10, 11$ y falsa en $12, 13, 14, 15$. Para $k = 4$, es verdadera en $16, 17, 18, 19$ y falsa desde 20 hasta 24.

Así, entre 0 y 20 el patrón puede registrarse como

valor lógico	índices
falso	0
verdadero	1
falso	$2, 3$
verdadero	$4, 5$
falso	$6, 7, 8$
verdadero	$9, 10, 11$
falso	$12, 13, 14, 15$
verdadero	$16, 17, 18, 19$
falso	20.

Probemos que P ocurre infinitas veces. Sea $N \in \mathbb{N}$ arbitrario. Elijamos $k = N + 1$ y tomemos $n = k^2$. Entonces $n \geq N$ y, por definición,

$$k^2 \leq n < k^2 + k,$$

de modo que $P(n)$ es verdadera. Como esto funciona para todo N, P ocurre infinitas veces. Para $\neg P$ usamos el mismo $k = N + 1$ y tomamos $m = k^2 + k$. Se cumple $m \geq N$ y además $k^2 + k \leq m < (k + 1)^2$, pues $k^2 + k < k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$. Por tanto $P(m)$ es falsa. Así, $\neg P$ también ocurre infinitas veces.

Como $\neg P$ ocurre infinitas veces, P no puede ser eventual. Simétricamente, como P ocurre infinitas veces, $\neg P$ no puede ser eventual. En consecuencia,

$$\boxed{P \text{ y } \neg P \text{ ocurren infinitas veces, y ninguna es eventual.}}$$

Veamos ahora la longitud de los bloques. El bloque verdadero correspondiente a k contiene $k^2, k^2 + 1, \ldots, k^2 + k - 1$, exactamente k índices. El bloque falso siguiente contiene $k^2 + k, k^2 + k + 1, \ldots, (k + 1)^2 - 1$, y su longitud es $(k + 1)^2 - (k^2 + k) = k + 1$. Dado $L \geq 1$, basta elegir $k \geq L$. Entonces aparece un bloque verdadero de longitud al menos L y un bloque falso de longitud al menos L.

El ejemplo destruye la inferencia

> «si una propiedad aparece en bloques consecutivos cada vez más largos, entonces termina por hacerse eventual».

La eventualidad no pide bloques finitos muy largos. Pide una **cola infinita completa** sin nuevas excepciones.

Ejercicio 29. Tricotomía del comportamiento tardío de una propiedad

Sea $P(n)$ una propiedad cualquiera sobre $\mathbb{N}$. Demuestra que **exactamente una** de las tres situaciones siguientes ocurre:

1. P ocurre eventualmente;
2. $\neg P$ ocurre eventualmente;
3. tanto P como $\neg P$ ocurren infinitas veces.

Tu demostración debe cumplir estas condiciones:

a) prueba primero que las tres situaciones son mutuamente excluyentes usando sólo los resultados de §5.6;

b) prueba después que siempre ocurre al menos una de ellas, separando los casos según si P es eventual o no y, cuando corresponda, según si $\neg P$ es eventual o no;

c) deduce como corolario que, para cualquier propiedad P, al menos una de P o $\neg P$ ocurre infinitas veces;

d) explica por qué esta tricotomía es más precisa que dividir simplemente entre «eventual» y «no eventual».

No utilices el lema de sincronización de §5.7.

Solución. Usaremos dos equivalencias de §5.6:

$$\neg(P \text{ eventual}) \iff \neg P \text{ ocurre infinitas veces},$$

y, aplicando la misma equivalencia a $\neg P$,

$$\neg(\neg P \text{ eventual}) \iff P \text{ ocurre infinitas veces}.$$

Primero probemos exclusión mutua. Si P ocurre eventualmente, entonces $\neg P$ **no** ocurre infinitas veces. Por tanto no puede darse la situación 3. Tampoco puede ocurrir $\neg P$ eventualmente, porque toda propiedad eventual ocurre infinitas veces; eso obligaría a que $\neg P$ ocurriera infinitas veces, contradicción. Así, la situación 1 excluye a 2 y 3. El mismo argumento, intercambiando P y $\neg P$, muestra que la situación 2 excluye a 1 y 3.

Finalmente, si ocurre la situación 3, entonces $\neg P$ ocurre infinitas veces, de modo que P no es eventual; y P ocurre infinitas veces, de modo que $\neg P$ no es eventual. Por tanto 3 excluye a 1 y 2. Probemos ahora que alguna de las tres situaciones siempre ocurre.

- Si P es eventual, estamos en la situación 1.
- Supongamos que P no es eventual. Entonces, por la primera equivalencia, $\neg P$ ocurre infinitas veces.
  - Si $\neg P$ es eventual, estamos en la situación 2.
  - Si $\neg P$ no es eventual, la segunda equivalencia implica que P ocurre infinitas veces. Como ya sabíamos que $\neg P$ ocurre infinitas veces, estamos en la situación 3.

Hemos demostrado que las tres situaciones son exhaustivas y mutuamente excluyentes. Por tanto,

$$\boxed{\text{exactamente una de 1, 2 o 3 ocurre.}}$$

Como corolario, al menos una de P o $\neg P$ ocurre infinitas veces. En efecto, en la situación 1, P es eventual y por tanto ocurre infinitas veces; en la situación 2, ocurre infinitas veces $\neg P$; y en la situación 3 ocurren infinitas veces ambas. La tricotomía es más precisa que la división «eventual / no eventual» porque el caso no eventual se separa en dos mecanismos diferentes: o bien la negación termina estabilizándose, o bien continúan reapareciendo arbitrariamente tarde tanto éxitos como fallos.

Ejercicio 30. Cuando el testigo depende de otro parámetro

Para cada entero $r \geq 1$, define la propiedad $P_r(n) : \quad r \mid n$. Analiza con cuidado el orden de los cuantificadores.

a) Demuestra que, para cada $r \geq 1$ fijo, $P_r(n)$ ocurre infinitas veces. Tu prueba debe construir explícitamente un índice $n = n(r, N) \geq N$ para un umbral arbitrario N.

b) Concluye que es verdadera la afirmación

$\forall r \geq 1\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N :\ r \mid n.$

c) Demuestra, en cambio, que es falsa la afirmación

$\forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N\ \forall r \geq 1 :\ r \mid n$. Basta analizar cuidadosamente el caso $N = 1$.

d) Explica por qué los testigos obtenidos en a), que pueden depender de r y de N, no autorizan a producir un único n que funcione simultáneamente para todos los enteros positivos r.

e) Fija ahora un entero $m \geq 1$ y reemplaza la familia infinita $r \geq 1$ por la familia finita $1 \leq r \leq m$. Demuestra que

$\forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N\ \forall r \in \{1, \dots, m\} :\ r \mid n$. Construye un testigo explícito y explica qué cambió al pasar de una familia infinita a una familia finita de divisores.

Solución. Fijemos primero $r \geq 1$ y un umbral arbitrario $N \in \mathbb{N}$. Definimos $n = r(N+1)$. Entonces $r \mid n$ por construcción. Además, como $r \geq 1$, $n = r(N+1) \geq N+1 > N$. Por tanto $n \geq N$. Hemos mostrado que, para cada r fijo y para todo umbral N, existe un índice posterior divisible por r. Así,

$$\boxed{\forall r \geq 1\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N :\ r \mid n.}$$

El testigo obtenido es $n(r, N) = r(N+1)$, y depende explícitamente de los dos datos elegidos antes. Consideremos ahora la afirmación $\forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N\ \forall r \geq 1 :\ r \mid n$. Tomemos $N = 1$. Si existiera un $n \geq 1$ divisible por todo entero positivo, podríamos elegir $r = n+1$. Entonces la condición exigiría $n+1 \mid n$. Pero un entero positivo estrictamente mayor que n no puede dividir a n. Contradicción. Por tanto la afirmación es falsa.

La diferencia lógica está en la dependencia del testigo. En $\forall r\ \forall N\ \exists n$, el valor de n puede cambiar cuando cambia r o cuando cambia N. La fórmula no produce un mismo índice válido para todos los r. En cambio, $\forall N\ \exists n\ \forall r$ exige que, después de fijar N, se encuentre **un único** n que satisfaga simultáneamente todas las divisibilidades. Es una obligación mucho más fuerte.

Fijemos finalmente $m \geq 1$ y restrinjamos la familia a $1 \leq r \leq m$. Para un umbral arbitrario N, tomemos $n = m!(N+1)$. Entonces $n \geq N$ y, para cada $r \in \{1, \dots, m\}$, se tiene $r \mid m!$, luego $r \mid n$. Por tanto,

$$\boxed{\forall N\ \exists n \geq N\ \forall r \in \{1, \dots, m\} :\ r \mid n.}$$

Al pasar de la familia infinita a una familia finita apareció un múltiplo común explícito, $m!$, que permite satisfacer simultáneamente todas las condiciones. El punto lógico no es que los testigos anteriores pudieran fusionarse automáticamente, sino que la nueva familia finita admite una construcción aritmética común que la familia de **todos** los enteros positivos no admite para ningún $n \geq 1$.

5.7. Sincronizar colas y olvidar perturbaciones finitas

Supongamos que P vale desde un umbral N_P y que Q vale desde otro N_Q. Para usar ambas propiedades en el mismo índice debemos entrar en una cola que esté dentro de las dos regiones de validez. El corte más tardío proporciona esa cola.

> **Lema de sincronización de umbrales.** Si $P(n)$ ocurre eventualmente y $Q(n)$ ocurre eventualmente, entonces $P(n) \wedge Q(n)$ ocurre eventualmente. Más precisamente, si N_P es un testigo para P y N_Q es un testigo para Q, entonces
>
> $$\boxed{N = \max\{N_P, N_Q\}}$$
>
> es un testigo común para ambas propiedades.

Si $n \geq N = \max\{N_P, N_Q\}$, tenemos $n \geq N_P$ y $n \geq N_Q$, por lo que se cumplen $P(n)$ y $Q(n)$. El argumento cubre cada índice posterior al corte y prueba la conjunción eventual. Llamaremos también **lema de compresión** a este modo de sustituir varias obligaciones con sus respectivos cortes por una obligación sobre una cola común. Si sabemos que $a_n > 0$ para $n \geq 4$ y $a_n < 10$ para $n \geq 7$, el máximo 7 garantiza $0 < a_n < 10$ en toda esa cola. Con cortes

5 y 9 funciona 9; con tres testigos $4, 11, 7$, funciona 11. En general, para un número finito de propiedades $P_1, \dots, P_k$, con $k \geq 1$ y testigos $N_1, \dots, N_k$, elegimos $N = \max\{N_1, \dots, N_k\}$. Si $n \geq N$, cada comparación $n \geq N_i$ permite aplicar la obligación correspondiente. El máximo de una lista finita existe; este argumento no suministra un corte para una familia arbitraria de umbrales.

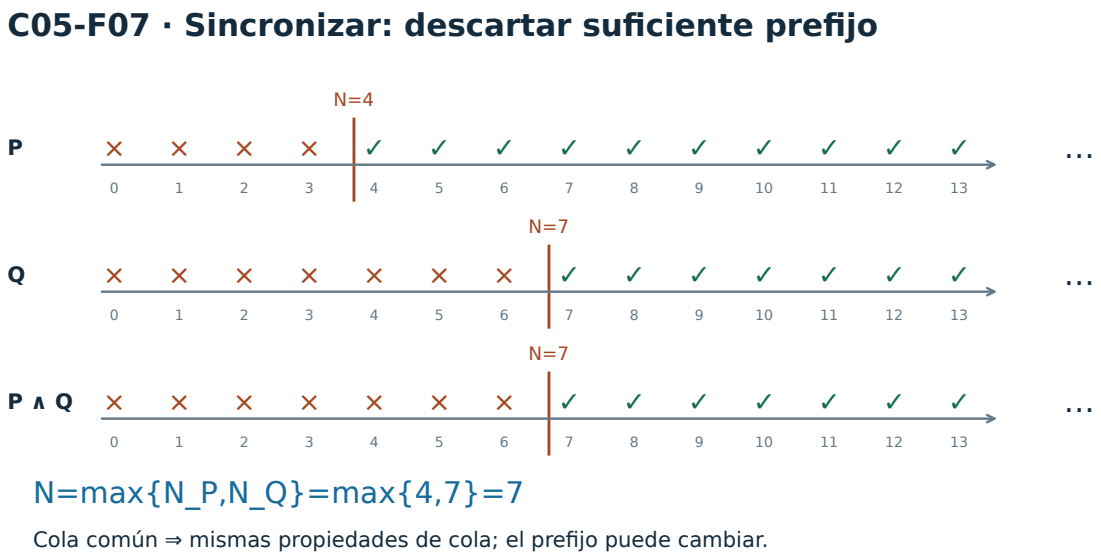


Figura 5.7. Desde el máximo de los cortes ambas obligaciones están activas. La coincidencia de colas sólo permite transferir propiedades de cola.

El máximo garantiza un testigo, pero los testigos suministrados podrían no ser mínimos. Si P y Q valen en todos los índices, 5 y 9 son testigos válidos y su conjunción vale ya desde 0. La sincronización organiza la información disponible sin afirmar que el corte obtenido sea el primero posible. La misma idea permite comparar sucesiones que difieren en un comienzo finito.

Coincidencia eventual. Dos sucesiones reales
$a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
coinciden eventualmente si

$$\boxed{\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N :\ a_n = b_n.}$$

Si la coincidencia comienza en N_E, las restricciones de a y b a $\mathbb{N}_{\geq N_E}$ son la misma función. También $a^{\langle N_E \rangle} = b^{\langle N_E \rangle}$: para cada k, el índice original $N_E + k$ está en la cola de coincidencia. Las sucesiones completas pueden seguir siendo distintas por sus términos anteriores al corte. Por ejemplo, $(3, 4, 5, 6, \dots)$ y $(-100, 4, 5, 6, \dots)$ coinciden desde 1 y difieren en 0.

Sea ahora $R(x)$ un predicado fijo sobre números reales y supongamos que $R(a_n)$ vale desde N_R. Si $a_n = b_n$ desde N_E, ponemos $M = \max\{N_E, N_R\}$. Para todo $n \geq M$ disponemos a la vez de $R(a_n)$ y de $a_n = b_n$, de modo que la sustitución de iguales da $R(b_n)$. Intercambiando las sucesiones obtenemos la transferencia en el otro sentido. El predicado y sus parámetros deben permanecer fijados; estamos usando que el mismo número satisface la misma condición en cada índice de la cola común.

En $a = (3, -1, 5, 2, 2, \dots)$ y $b = (100, 7, -8, 2, 2, \dots)$, por ejemplo, la coincidencia empieza en 3. Cualquier modificación en un conjunto finito de índices queda contenida en un prefijo: si el conjunto modificado es no vacío y su máximo es m, desde $m+1$ vuelve a haber coincidencia; si es vacío, sirve 0. Cuando sólo cambian los índices $2, 8, 13$, el corte 14 garantiza una cola común.

Esto no permite transferir propiedades arbitrarias del objeto completo. Para $a = (0, -5, 1, 1, \dots)$ y $b = (9, 12, 1, 1, \dots)$, la positividad es eventual en ambas con testigo

2, pero $a_0 = 0$ es verdadero y $b_0 = 0$ es falso. También la sucesión constantemente nula pierde la afirmación sobre su primer término si cambiamos sólo a_0 por 1. Lo preservado es la información de una cola suficientemente tardía; las propiedades que examinan el prefijo modificado requieren su propio control.

Ejercicios de la sección 5.7.

Ejercicio 31. Un solo corte para tres obligaciones

Sean $P(n)$, $Q(n)$ y $R(n)$ tres propiedades sobre $\mathbb{N}$. Se sabe que $\forall n \geq 4 :\ P(n)$, $\forall n \geq 9 :\ Q(n)$, y $\forall n \geq 6 :\ R(n)$. No se afirma que 4, 9 y 6 sean los menores testigos posibles.

a) Construye un único umbral N que garantice simultáneamente $P(n)$, $Q(n)$ y $R(n)$ para todo $n \geq N$.

b) Verifica tu elección tomando un índice arbitrario $n \geq N$ y siguiendo explícitamente las tres comparaciones de índices.

c) Determina todos los valores M que, **sólo a partir de la información dada**, están garantizados como testigos comunes.

d) Explica por qué los datos no permiten concluir que tu umbral sea el menor testigo posible de $P \wedge Q \wedge R$.

e) Identifica qué función lógica cumple el máximo de los tres umbrales: ¿mejora alguna estimación o sincroniza tres colas?

Solución. Tomamos $N = \max\{4, 9, 6\} = 9$. Si $n \geq 9$, entonces

$$n \geq 9 \geq 4, \qquad n \geq 9, \qquad n \geq 9 \geq 6.$$

Por las tres hipótesis se siguen simultáneamente

$$P(n), \qquad Q(n), \qquad R(n).$$

Por tanto, 9 es un testigo común para $P \wedge Q \wedge R$. Más generalmente, todo $M \geq 9$ está garantizado como testigo común. En efecto, si $n \geq M \geq 9$, entonces n queda también por encima de 4 y 6, de modo que las tres propiedades están disponibles. Un umbral $M < 9$ no está garantizado. Para comprobarlo, tomemos $P(n)$ y $R(n)$ verdaderas para todo n, y $Q(n)$ verdadera exactamente cuando $n \geq 9$. Estas propiedades satisfacen las tres hipótesis; sin embargo, la conjunción falla en $n = M \geq M$. Así, a partir de la información dada, el conjunto de umbrales **garantizados** es

$$\boxed{\mathbb{N}_{\geq 9}.}$$

Esto no significa que 9 sea necesariamente el menor testigo real de la conjunción. Las hipótesis sólo dicen que 4, 9 y 6 funcionan para las propiedades por separado; no dicen que sean sus umbrales mínimos. Podría ocurrir, por ejemplo, que Q ya fuera verdadera desde 7 aunque sólo se nos haya informado que vale desde 9. La función del máximo es lógica: sincroniza tres colas. No mejora las estimaciones disponibles; descarta suficiente prefijo para entrar en una cola en la que las tres obligaciones ya están simultáneamente activas.

Ejercicio 32. Intersecar conjuntos de testigos

Sea $P(n)$ una propiedad sobre $\mathbb{N}$ y define $W_P = \{N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N,\ P(n)\}$. Sean ahora $P_1, \ldots, P_k$ propiedades, con $k \geq 1$ finito.

a) Demuestra que

$$\boxed{W_{P_1 \wedge \cdots \wedge P_k} = W_{P_1} \cap \cdots \cap W_{P_k}.}$$

b) Supón que cada P_i es eventual. Elige un testigo $N_i \in W_{P_i}$ para cada i y demuestra que

$N = \max\{N_1, \dots, N_k\}$ pertenece a la intersección de a).

c) Concluye que una conjunción finita de propiedades eventuales es eventual.

d) Explica con precisión dónde se usa la finitud de la familia en esta demostración. No concluyas nada sobre familias infinitas.

Solución. Por definición,

$$N \in W_{P_1 \wedge \cdots \wedge P_k}$$

si y sólo si $\forall n \geq N :\ P_1(n) \wedge \cdots \wedge P_k(n)$. Una conjunción es verdadera exactamente cuando lo son todos sus componentes. Por tanto, la afirmación anterior equivale a $\forall i \in \{1, \dots, k\}\ \forall n \geq N :\ P_i(n)$. Eso significa precisamente $N \in W_{P_i}$ para cada i. Luego

$$\boxed{W_{P_1 \wedge \cdots \wedge P_k} = \bigcap_{i=1}^{k} W_{P_i}.}$$

Supongamos ahora que cada P_i es eventual. Entonces cada W_{P_i} es no vacío. Elijamos $N_i \in W_{P_i}$ para $i = 1, \dots, k$ y definamos $N = \max\{N_1, \dots, N_k\}$. Como $N \geq N_i$ para todo i, y los conjuntos de testigos son estables hacia índices posteriores, se tiene $N \in W_{P_i}$ para cada i. Así, $N \in \bigcap_{i=1}^{k} W_{P_i} = W_{P_1 \wedge \cdots \wedge P_k}$.

La conjunción finita es, por tanto, eventual. La finitud se usa al formar un máximo de la lista $N_1, \dots, N_k$. Para una familia infinita, este argumento concreto ya no proporciona automáticamente un natural que domine todos los testigos. Nada de lo demostrado aquí autoriza a extender sin más la conclusión a una familia infinita.

Ejercicio 33. Encadenar coincidencias eventuales

Sean $a, b, c : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Supón que a y b coinciden desde N_{ab}, mientras que b y c coinciden desde N_{bc}: $\forall n \geq N_{ab} :\ a_n = b_n$, y $\forall n \geq N_{bc} :\ b_n = c_n$.

a) Define

$M = \max\{N_{ab}, N_{bc}\}$ y demuestra que a y c coinciden desde M.

b) Demuestra algo más fuerte: desde ese mismo M, las tres sucesiones coinciden término a término,

$\forall n \geq M :\ a_n = b_n = c_n$.

c) Traduce b) al lenguaje de colas reindexadas y demuestra

$$\boxed{a^{\langle M \rangle} = b^{\langle M \rangle} = c^{\langle M \rangle}.}$$

d) Explica por qué a), b) y c) no autorizan a concluir $a = b = c$ como funciones sobre todo $\mathbb{N}$.

Solución. Definimos $M = \max\{N_{ab}, N_{bc}\}$. Sea $n \geq M$. Entonces $n \geq M \geq N_{ab}$ y $n \geq M \geq N_{bc}$. Por las hipótesis, $a_n = b_n$ y $b_n = c_n$. Por transitividad de la igualdad, $a_n = c_n$. Como esto vale para todo $n \geq M$, a y c coinciden eventualmente. Más aún, para todo $n \geq M$,

$$\boxed{a_n = b_n = c_n.}$$

Pasemos a las colas reindexadas. Para cualquier $k \in \mathbb{N}$, el índice original $M + k$ satisface $M + k \geq M$. Por tanto, $a_{M+k} = b_{M+k} = c_{M+k}$. Usando la definición de cola reindexada,

$$a_k^{\langle M \rangle} = a_{M+k},$$

$b_k^{\langle M\rangle} = b_{M+k}$, y $c_k^{\langle M\rangle} = c_{M+k}$. Luego las tres funciones $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ coinciden índice por índice:

$$\boxed{a^{\langle M\rangle} = b^{\langle M\rangle} = c^{\langle M\rangle}.}$$

Nada de esto obliga a que las sucesiones originales sean iguales en los índices menores que M. La igualdad de funciones $a = b = c$ exigiría igualdad para **todo** $n \in \mathbb{N}$, no sólo sobre una cola común.

Ejercicio 34. «Cambiar finitos términos no cambia nada»

Considera $a = (0, 1, 1, 1, 1, ...)$ y $b = (9, 1, 1, 1, 1, ...)$. Un estudiante escribe:

> Las dos sucesiones sólo difieren en un término. Por tanto son la misma sucesión a partir de una modificación irrelevante, y cualquier propiedad verdadera de a también es verdadera de b.

Audita la afirmación.

a) Decide si $a = b$ como funciones y justifica tu respuesta.

b) Determina un umbral desde el cual a y b coinciden eventualmente.

c) Da una propiedad del prefijo que sea verdadera para a y falsa para b.

d) Da una propiedad término a término que ocurra eventualmente para ambas y exhibe un umbral común.

e) Reescribe la afirmación del estudiante en una forma correcta que delimite exactamente qué clase de propiedades se conservan bajo una modificación finita.

f) Explica por qué la frase «los primeros términos son irrelevantes» es matemáticamente demasiado fuerte si no se especifica **para qué tipo de afirmación** son irrelevantes.

Solución. Las sucesiones no son iguales como funciones. Ya en el índice 0, $a_0 = 0 \neq 9 = b_0$. Por tanto,

$$\boxed{a \neq b.}$$

Sin embargo, desde el índice 1 coinciden: $\forall n \geq 1 : \ a_n = b_n = 1$. Así, $N_E = 1$ es un testigo de coincidencia eventual. Una propiedad sensible al prefijo es $a_0 = 0$. Es verdadera para a y falsa para b. También cambiaría cualquier afirmación que mencione explícitamente el primer término. En cambio, la propiedad término a término $x = 1$ aplicada a los términos es eventual en ambas sucesiones:

$\forall n \geq 1 : \ a_n = 1$ y $\forall n \geq 1 : \ b_n = 1$. El mismo umbral $N = 1$ funciona para las dos. La afirmación correcta es:

> Si dos sucesiones coinciden desde algún índice en adelante, entonces comparten las propiedades que dependen exclusivamente de una cola suficientemente tardía; en particular, los predicados término a término que son eventuales se transfieren entre ellas.

No se preservan necesariamente las propiedades que miran el prefijo modificado. Por eso «los primeros términos son irrelevantes» es una frase incompleta. Los primeros términos son irrelevantes **para propiedades de cola**; pueden ser decisivos para propiedades globales o localizadas en índices iniciales.

Ejercicio 35. Mismos valores tardíos en cada corte, pero sin cola común

Construye dos sucesiones $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que satisfagan simultáneamente: $\forall N \in \mathbb{N} : \{a_n : n \geq N\} = \{b_n : n \geq N\}$, pero que **no** coincidan eventualmente. Tu contraejemplo debe cumplir además:

a) los conjuntos de valores tardíos anteriores deben tener exactamente dos elementos para todo N;

b) debes demostrar la igualdad de esos conjuntos para un N arbitrario, no sólo para algunos cortes;

c) debes demostrar que para todo $M \in \mathbb{N}$ existe $n \geq M$ con $a_n \neq b_n$;

d) concluye explicando por qué la igualdad de todos los conjuntos de valores tardíos no recupera la información indexada necesaria para una cola común.

Solución. Tomemos $a_n = (-1)^n$ y $b_n = (-1)^{n+1}$. Las sucesiones son $a = (1, -1, 1, -1, ...)$ y $b = (-1, 1, -1, 1, ...)$. Fijemos un $N \in \mathbb{N}$ arbitrario. Entre los índices N y $N+1$ hay uno par y uno impar. Por tanto, en la cola de a aparecen tanto 1 como -1. No aparece ningún otro valor, de modo que

$\{a_n : n \geq N\} = \{-1, 1\}$. El mismo argumento vale para b: $\{b_n : n \geq N\} = \{-1, 1\}$. Así, para todo N,

$$\boxed{\{a_n : n \geq N\} = \{b_n : n \geq N\} = \{-1, 1\}.}$$

No obstante, las sucesiones nunca coinciden en un mismo índice. Para todo n, $b_n = (-1)^{n+1} = -(-1)^n = -a_n$. Como $a_n \in \{-1, 1\}$, se tiene $a_n \neq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En particular, dado cualquier M, basta elegir $n = M$ para obtener un índice $n \geq M$ en el que difieren. Por tanto no existe una cola común y las sucesiones no coinciden eventualmente.

El contraejemplo muestra que incluso conocer **todos** los conjuntos de valores tardíos puede ser insuficiente: esos conjuntos registran qué valores aparecen después de cada corte, pero siguen sin registrar qué valor corresponde a cada índice. La coincidencia eventual exige precisamente esa información indexada.

Ejercicio 36. Sincronizar primero o transferir primero

Sean $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dos sucesiones que coinciden desde un umbral N_E: $\forall n \geq N_E : \ a_n = b_n$. Sean además $P(x)$ y $Q(x)$ dos predicados fijos sobre números reales. Supón que $\forall n \geq N_P : P(a_n)$ y $\forall n \geq N_Q : \ Q(a_n)$. Demuestra que $P(b_n) \wedge Q(b_n)$ ocurre eventualmente siguiendo **dos rutas distintas**. **Ruta A.** Sincroniza primero $P(a_n)$ y $Q(a_n)$ sobre la sucesión a y después transfiere la conjunción a b usando la coincidencia eventual.

Ruta B. Transfiere primero P y Q por separado desde a hacia b y después sincroniza las dos propiedades ya transferidas. En ambos casos:

a) escribe todos los umbrales intermedios;

b) demuestra que puede elegirse finalmente

$$\boxed{M = \max\{N_E, N_P, N_Q\};}$$

c) explica por qué las dos rutas producen el mismo corte efectivo aunque agrupen los máximos de manera distinta;

d) generaliza el argumento a una familia finita $P_1, \dots, P_k$ de predicados eventuales sobre a, con testigos $N_1, \dots, N_k$;

e) indica por qué el mismo argumento no transfiere una propiedad como «$a_0 = 0$».

Solución. Tenemos tres umbrales:

$$N_E, \qquad N_P, \qquad N_Q.$$

La coincidencia eventual proporciona $\forall n \geq N_E : \ a_n = b_n$, mientras que las dos propiedades sobre a están disponibles desde N_P y N_Q.

Ruta A: sincronizar en a y luego transferir

Primero sincronizamos $P(a_n)$ y $Q(a_n)$ con $N_A = \max\{N_P, N_Q\}$. Entonces $\forall n \geq N_A : P(a_n) \wedge Q(a_n)$. Ahora sincronizamos esta cola con la cola de coincidencia entre a y b: $M_A =$

$\max\{N_E, N_A\}$. Si $n \geq M_A$, entonces $a_n = b_n$ y además $P(a_n) \wedge Q(a_n)$. Como los predicados se aplican al mismo número real, $P(b_n) \wedge Q(b_n)$.

Por tanto la conjunción ocurre eventualmente en b.

Ruta B: transferir por separado y luego sincronizar

Transferimos primero P. Un umbral válido es $M_P = \max\{N_E, N_P\}$. Desde M_P tenemos $a_n = b_n$ y $P(a_n)$, de donde $P(b_n)$. Análogamente, $M_Q = \max\{N_E, N_Q\}$ es un testigo para $Q(b_n)$. Sincronizamos ambas propiedades ya transferidas mediante $M_B = \max\{M_P, M_Q\}$. Entonces, para todo $n \geq M_B$, $P(b_n) \wedge Q(b_n)$. Comparemos los cortes. En la ruta A, $M_A = \max\{N_E, \max\{N_P, N_Q\}\}$.

En la ruta B, $M_B = \max\{\max\{N_E, N_P\}, \max\{N_E, N_Q\}\}$. Ambos números son simplemente el mayor de los tres umbrales originales:

$$\boxed{M_A = M_B = \max\{N_E, N_P, N_Q\}.}$$

La diferencia entre las rutas es organizativa, no matemática: ambas construyen una cola común en la que ya están activas la coincidencia y las dos propiedades. Para una familia finita $P_1, \ldots, P_k$, con testigos $N_1, \ldots, N_k$ sobre a, basta tomar

$$\boxed{M = \max\{N_E, N_1, \ldots, N_k\}.}$$

Si $n \geq M$, entonces $a_n = b_n$ y cada $P_i(a_n)$ es verdadera. Por sustitución de iguales, $P_i(b_n)$ para todo $i = 1, \ldots, k$. Así, todas las propiedades se transfieren simultáneamente a una sola cola de b. El argumento no sirve para una propiedad como $a_0 = 0$, porque esa afirmación no depende de una cola tardía: mira específicamente el índice 0. La coincidencia eventual puede comenzar mucho después y no proporciona ninguna información sobre ese término inicial.

5.8. Captura eventual: la puerta a ε–N

Fijemos un conjunto $U \subseteq \mathbb{R}$. Aplicar eventualidad al predicado $P_U(n) : a_n \in U$ expresa que una cola completa queda en esa región.

> **Captura eventual por un conjunto fijo.** Diremos que la sucesión a está **eventualmente en** U si
>
> $$\boxed{\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N :\ a_n \in U.}$$

Para un mismo testigo N, las afirmaciones $\forall n \geq N : a_n \in U$, $a(\mathbb{N}_{\geq N}) \subseteq U$ y $\{a_n : n \geq N\} \subseteq U$ son equivalentes: cada una dice que todos los valores de ese segmento final pertenecen a U. Por la biyección de §5.4 también equivalen a $\forall k \in \mathbb{N} : a_k^{\langle N \rangle} \in U$. Para esta pregunta podemos trabajar con la imagen de la cola, porque sólo necesitamos comprobar pertenencia a un conjunto fijo; el corte sigue siendo un índice.

No se exige que U sea un intervalo, abierto o cerrado. Para $a = (7, -3, 0, 3/2, 0, 3/2, \ldots)$, el conjunto $U = \{0, 3/2\}$ contiene todos los términos desde 2, aunque los dos primeros estén fuera. Los términos tardíos alternan entre dos puntos; la captura afirma que no salen del conjunto y no les impone proximidad mutua. Como $0, 3/2 \in U$ y $3/4 \notin U$, ese conjunto no es un intervalo.

También $(5, -2, 1, 1, 1, \ldots)$ está eventualmente en $\{1\}$ desde 2. Para otro ejemplo, tomemos $U = \{0, 2\}$, $a_0 = 5$, $a_n = 0$ cuando $n \geq 1$ es par y $a_n = 2$ cuando n es impar. La captura empieza en 1 y el conjunto sigue sin ser un intervalo. En todos los casos la región se elige antes del umbral. Si permitiéramos definir $U_n = \{a_n\}$, tendríamos $a_n \in U_n$ para cualquier sucesión en cualquier índice; habríamos cambiado la condición en lugar de probar permanencia en una misma región.

El lema de sincronización entra aquí como una herramienta ya disponible. Si a está eventualmente en los conjuntos fijos U y V, con testigos N_U y N_V, elegimos

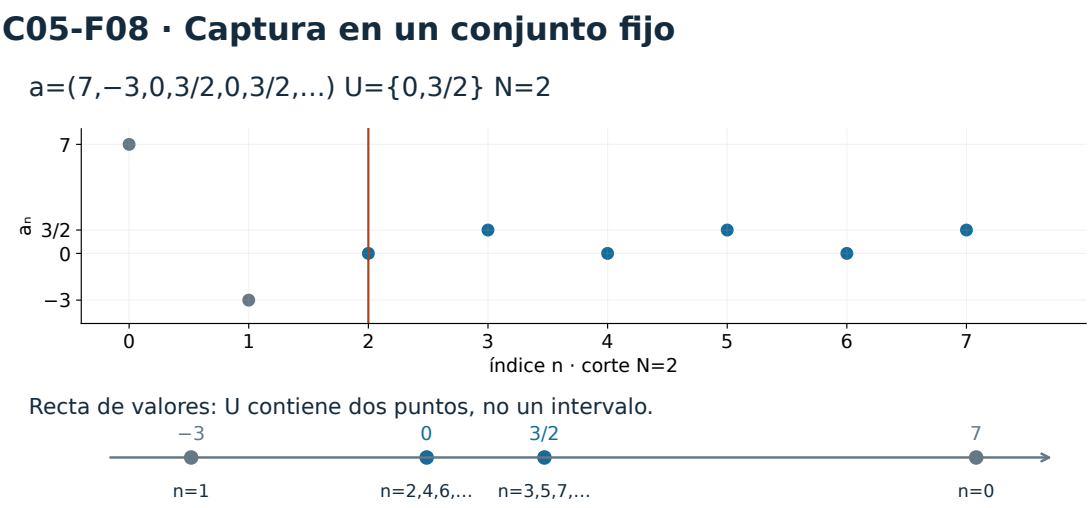


Figura 5.8. El conjunto fijo U={0,3/2} contiene toda la cola desde 2 y no es un intervalo. Dos capturas se sincronizan para U∩V.

$N = \max\{N_U, N_V\}$. Para $n \geq N$ se cumplen ambas pertenencias y, por definición de intersección, $a_n \in U \cap V$.

> **Intersección de capturas eventuales.** Si una sucesión está eventualmente en dos conjuntos fijos U y V, entonces está eventualmente en $U \cap V$.

Por ejemplo, con $N_U = 4$ y $N_V = 9$ sirve $N = 9$. Si $U \cap V = \emptyset$, la captura simultánea sería imposible: en el propio índice N exigiría $a_N \in \emptyset$. Para una familia finita no vacía de conjuntos $U_1, \dots, U_k$ repetimos el argumento con $N = \max\{N_1, \dots, N_k\}$; cada término posterior pertenece a todos los conjuntos y, por tanto, a su intersección. Una bola fija $B(L, r)$, con $L \in \mathbb{R}$ y $r > 0$ ya elegidos, es otro caso de captura. Controla una sola ventana. La sucesión constante $a_n = L + r/2$ pertenece a $B(L, r)$ desde 0, pero no pertenece a $B(L, r/4)$ en ningún índice, pues su distancia a L es $r/2 > r/4$. Incluso una lista finita de radios positivos queda resumida en el menor de ellos, como demuestra el problema 40: superar esas exigencias fijas no garantiza responder a una nueva ventana más pequeña.

En C06 la tolerancia se elegirá antes del umbral, y éste deberá responder a esa elección para controlar todos los índices posteriores. La definición de convergencia añadirá esa obligación a la infraestructura que acabamos de construir. Las pruebas de C05 sólo han necesitado funciones sobre los naturales, su orden, colas y cuantificadores; no han usado completitud, la propiedad arquimediana ni resultados sobre límites.

Ejercicios de la sección 5.8.

Ejercicio 37. El último escape determina todos los testigos

Sea $U \subsetneq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío. Fija dos números $u \in U$, $v \notin U$, y sea $F \subseteq \mathbb{N}$ un conjunto finito no vacío. Define una sucesión $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ por

$$a_n = \begin{cases} v, & n \in F, \\ u, & n \notin F. \end{cases}$$

Sea $m = \max F$.

a) Demuestra que a está eventualmente en U.

b) Determina **exactamente** el conjunto de todos los testigos de captura

$W_U(a) = \{N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N,\ a_n \in U\}$.

c) Reescribe el resultado de b) mediante la inclusión de valores tardíos

$\{a_n : n \geq N\} \subseteq U$.

d) Explica por qué el número decisivo es el último índice modificado, m, y no la cantidad de elementos de F.

e) ¿Qué cambia si $F = \emptyset$? Formula el conjunto de testigos en ese caso.

Solución. Como F es finito y no vacío, existe $m = \max F$. Para todo índice $n \geq m + 1$ se tiene $n > m$. Por definición de máximo, ningún elemento de F puede ser mayor que m, así que $n \notin F$. Por la definición de la sucesión,

$$a_n = u \in U.$$

Por tanto, $\forall n \geq m + 1 :\ \ a_n \in U$, y $N = m + 1$ es un testigo de captura eventual. Caractericemos ahora todos los testigos. Si $N \geq m + 1$, el argumento anterior muestra que todo $n \geq N$ queda fuera de F, y por tanto $a_n = u \in U$. Así, todo $N \geq m + 1$ pertenece a $W_U(a)$.

Recíprocamente, si $N \leq m$, entonces el índice m satisface $m \geq N$. Pero $m \in F$, luego $a_m = v \notin U$. Por tanto, ningún $N \leq m$ es testigo. Hemos probado

$$\boxed{W_U(a) = \mathbb{N}_{\geq m+1}.}$$

La misma afirmación puede escribirse en lenguaje de valores tardíos: $N \in W_U(a) \iff \{a_n : n \geq N\} \subseteq U$. En este ejemplo, para todo $N \geq m + 1$ el conjunto de valores tardíos es incluso $\{a_n : n \geq N\} = \{u\} \subseteq U$. El dato decisivo no es $|F|$, sino la posición del último escape. Un conjunto F puede tener muchos elementos concentrados al principio o pocos elementos muy separados; la captura sólo puede comenzar después del mayor índice en que aparece el valor exterior v.

Si $F = \emptyset$, entonces $a_n = u \in U$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En ese caso todo umbral funciona y

$$\boxed{W_U(a) = \mathbb{N}.}$$

Ejercicio 38. Cálculo con conjuntos de testigos de captura

Sea $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Para cada conjunto fijo $U \subseteq \mathbb{R}$, define $W_U(a) = \{N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N,\ a_n \in U\}$. Demuestra las afirmaciones siguientes.

a) Si $U \subseteq V$, entonces

$W_U(a) \subseteq W_V(a)$.

b) Para cualesquiera conjuntos fijos $U, V \subseteq \mathbb{R}$,

$$\boxed{W_{U \cap V}(a) = W_U(a) \cap W_V(a).}$$

c) Generaliza b) a una familia finita $U_1, \ldots, U_k$:

$$\boxed{W_{\bigcap_{j=1}^{k} U_j}(a) = \bigcap_{j=1}^{k} W_{U_j}(a).}$$

d) Supón que cada $W_{U_j}(a)$ es no vacío y elige $N_j \in W_{U_j}(a)$. Demuestra directamente que

$N = \max\{N_1, \ldots, N_k\}$ es un testigo de captura en $\bigcap_{j=1}^{k} U_j$.

e) Deduce que, si $U \cap V = \emptyset$, ninguna sucesión puede estar eventualmente en ambos conjuntos a la vez.

Tu prueba debe distinguir en todo momento entre los conjuntos geométricos $U, V \subseteq \mathbb{R}$ y los conjuntos de índices $W_U(a), W_V(a) \subseteq \mathbb{N}$.

Solución. Supongamos primero que $U \subseteq V$ y toma $N \in W_U(a)$. Entonces $\forall n \geq N : \ a_n \in U$. Como $U \subseteq V$, se sigue que $\forall n \geq N : \ a_n \in V$. Por tanto $N \in W_V(a)$ y

$$\boxed{W_U(a) \subseteq W_V(a).}$$

Para la intersección de dos conjuntos, fijemos $N \in \mathbb{N}$. Tenemos

$$\begin{aligned} N \in W_{U\cap V}(a) &\iff \forall n \geq N : \ a_n \in U \cap V \\ &\iff (\forall n \geq N : \ a_n \in U) \text{ y } (\forall n \geq N : \ a_n \in V) \\ &\iff N \in W_U(a) \cap W_V(a). \end{aligned}$$

Por extensionalidad,

$$\boxed{W_{U\cap V}(a) = W_U(a) \cap W_V(a).}$$

El mismo argumento, repetido para una familia finita, da

$$\boxed{W_{\bigcap_{j=1}^{k} U_j}(a) = \bigcap_{j=1}^{k} W_{U_j}(a).}$$

Supongamos ahora que cada $W_{U_j}(a)$ es no vacío y elijamos $N_j \in W_{U_j}(a)$. Definimos $N = \max\{N_1, \dots, N_k\}$. Si $n \geq N$, entonces $n \geq N_j$ para cada j. Por la elección de N_j, $a_n \in U_j$ para todos los j. Luego $a_n \in \bigcap_{j=1}^{k} U_j$. Así, $N \in W_{\bigcap_{j=1}^{k} U_j}(a)$. Esto recupera, en lenguaje de conjuntos de testigos, el lema de sincronización.

Finalmente, si $U \cap V = \emptyset$ y una sucesión estuviera eventualmente en ambos, entonces $W_U(a)$ y $W_V(a)$ serían no vacíos. El argumento anterior produciría un testigo en $W_{U\cap V}(a) = W_\emptyset(a)$. Pero ningún N puede satisfacer $\forall n \geq N : \ a_n \in \emptyset$, porque el propio índice $n = N$ pertenece al segmento final. Contradicción. Aquí aparecen dos niveles de objetos que no deben confundirse: U, V son subconjuntos de $\mathbb{R}$ que contienen valores de la sucesión; $W_U(a), W_V(a)$ son subconjuntos de $\mathbb{N}$ que contienen umbrales válidos.

Ejercicio 39. Una cola común atrapada por dos regiones

Sean $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dos sucesiones que coinciden eventualmente. Supón que existen umbrales $N_E, N_U, N_V \in \mathbb{N}$ tales que $\forall n \geq N_E : \ a_n = b_n$, $\forall n \geq N_U : \ a_n \in U$, y $\forall n \geq N_V : \ b_n \in V$, donde $U, V \subseteq \mathbb{R}$ son conjuntos fijos.

a) Define un único umbral M que permita usar simultáneamente las tres hipótesis.

b) Demuestra que para todo $n \geq M$ el valor común $a_n = b_n$ pertenece a $U \cap V$.

c) Concluye que **ambas** sucesiones están eventualmente en $U \cap V$.

d) Deduce que, si $U \cap V = \emptyset$, las tres hipótesis anteriores no pueden cumplirse simultáneamente.

e) Explica por qué la conclusión de d) depende esencialmente de la coincidencia eventual. Construye dos sucesiones que estén respectivamente siempre en dos conjuntos disjuntos U y V, pero que no coincidan eventualmente.

Solución. Tomamos $M = \max\{N_E, N_U, N_V\}$. Sea $n \geq M$. Entonces, simultáneamente,

$$n \geq N_E, \qquad n \geq N_U, \qquad n \geq N_V.$$

Por la primera hipótesis, $a_n = b_n$. Por la segunda, $a_n \in U$, y por la tercera, $b_n \in V$. Como $a_n = b_n$, el mismo número real pertenece a ambos conjuntos. Por tanto,

$$\boxed{a_n = b_n \in U \cap V}$$

para todo $n \geq M$. Se siguen dos conclusiones a la vez: $\forall n \geq M : \ a_n \in U \cap V$ y $\forall n \geq M : \ b_n \in U \cap V$. Así, **ambas** sucesiones están eventualmente en $U \cap V$. Si $U \cap V = \emptyset$, esto exigiría que para todo $n \geq M$ el valor común perteneciera al conjunto vacío, lo cual es imposible. Por tanto las tres hipótesis no pueden coexistir cuando U y V son disjuntos.

La coincidencia eventual es esencial. Sin ella no hay razón para que los valores capturados por U y los capturados por V tengan que ser los mismos. Por ejemplo, toma $U = \{0\}, \qquad V = \{1\},$

$$a_n = 0, \qquad b_n = 1 \quad \text{para todo } n.$$

Entonces a está siempre en U y b está siempre en V, aunque $U \cap V = \emptyset$. No hay contradicción, porque $a_n \neq b_n$ para todo n; las sucesiones no coinciden eventualmente. El mecanismo reusable es, por tanto, una sincronización de **tres** obligaciones: cola común de a y b, captura de a en U y captura de b en V. Una vez comprimidas mediante el máximo, todas actúan sobre los mismos índices tardíos.

Ejercicio 40. Una batería finita de bolas sigue siendo una exigencia fija

Fija un entero $k \geq 1$ y radios positivos $r_1, \dots, r_k > 0$. Sea $r_* = \min\{r_1, \dots, r_k\}$. Trabajamos con bolas centradas en 0, $B(0, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x| < r\}$.

a) Demuestra que

$\bigcap_{j=1}^{k} B(0, r_j) = B(0, r_*)$.

b) Considera la sucesión constante

$c_n = \frac{r_*}{2}$. Demuestra que c está en **cada una** de las bolas $B(0, r_j)$ para todo índice n.

c) Demuestra, sin embargo, que ningún término de c pertenece a la bola más pequeña

$B(0, \frac{r_*}{4})$.

d) Concluye que verificar captura eventual en cualquier lista **finita** prefijada de bolas no equivale a disponer de una respuesta para exigencias de tamaño cada vez menor.

e) Explica, sólo con palabras y sin escribir todavía la definición formal de convergencia, qué cambia en C06 en el orden conceptual

$$\text{tolerancia} \longrightarrow \text{umbral} \longrightarrow \text{todos los índices posteriores.}$$

f) Explica por qué este ejercicio no autoriza todavía ninguna notación de límite: todo lo demostrado en a)–d) pertenece al lenguaje de capturas por una **familia finita de conjuntos ya fijados**.

Solución. Como $r_* = \min\{r_1, \dots, r_k\}$, tenemos $r_* \leq r_j$ para cada j. Por tanto, si $x \in B(0, r_*)$, entonces $|x| < r_* \leq r_j$, y así $x \in B(0, r_j)$ para todo j. Esto prueba $B(0, r_*) \subseteq \bigcap_{j=1}^{k} B(0, r_j)$. La inclusión inversa se obtiene usando un índice j_* para el cual $r_{j_*} = r_*$. Si $x \in \bigcap_{j=1}^{k} B(0, r_j)$, entonces en particular

$|x| < r_{j_*} = r_*$, de modo que $x \in B(0, r_*)$. Así,

$$\boxed{\bigcap_{j=1}^{k} B(0, r_j) = B(0, r_*).}$$

Consideremos ahora $c_n = \frac{r_*}{2}$. Para todo índice n, $|c_n| = \frac{r_*}{2} < r_* \leq r_j$ para cada j. Por tanto, $c_n \in B(0, r_j)$ para todo n y para todo $j \in \{1, \ldots, k\}$. De hecho, el mismo testigo $N = 0$ sirve para cada una de las k capturas fijas. Sin embargo, $|c_n| = \frac{r_*}{2} > \frac{r_*}{4}$ para todo n. Luego

$c_n \notin B(0, \frac{r_*}{4})$ para ningún índice. Esa bola más pequeña no captura ninguna cola de c. Toda esta familia finita queda resumida en la región fija $B(0, r_*)$. La sucesión construida permanece en ella desde el índice 0, pero falla en todos los índices ante la nueva exigencia $B(0, r_*/4)$. En C06, la elección de la tolerancia precederá a la del umbral: una vez elegida la tolerancia, habrá que encontrar un corte desde el que todos los términos respondan a ella. El umbral podrá depender de esa elección. Las pruebas anteriores sólo usan captura eventual en conjuntos fijos, intersección finita y sincronización; todavía no introducen una definición ni una notación de límite.

Capítulo 6

Convergencia: el juego de ε y N

Al terminar el capítulo anterior sabíamos expresar que una cola de una sucesión queda dentro de un conjunto fijo. El centro y el tamaño de una bola se elegían antes de buscar el umbral. Para afirmar que una sucesión se aproxima a un número con cualquier precisión, necesitamos poder responder también cuando nos piden una ventana más pequeña. Una cola puede quedar entre -1 y 1 sin que ninguna cola quede entre $-1/10$ y $1/10$. Comprobar las dos ventanas tampoco responde a todas las exigencias posibles. La convergencia consistirá en acreditar una captura para cada tolerancia positiva alrededor de un mismo candidato. Conservamos $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$: la sucesión $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ y el candidato $A \in \mathbb{R}$ se fijan primero; los índices servirán para controlar la distancia de sus términos a ese número.

6.1. Una ventana para cada tolerancia

Para una tolerancia $\varepsilon > 0$, la ventana $B(A, \varepsilon) = (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ contiene exactamente los valores que cumplen $|a_n - A| < \varepsilon$. C05 permite expresar la captura de una cola mediante $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : |a_n - A| < \varepsilon$. La nueva obligación es disponer de esa respuesta para cada radio positivo, conservando la sucesión y el centro.

> **Convergencia a un candidato real.** Sean $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ y $A \in \mathbb{R}$. Decimos que la sucesión **converge a** A, y escribimos $a_n \to A$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq N$, se cumple $|a_n - A| < \varepsilon$.

En símbolos,

$$a_n \to A \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} : \quad n \geq N \Longrightarrow |a_n - A| < \varepsilon.$$

La tolerancia se impone sobre la recta de valores y el umbral se elige en el dominio de índices. Después de elegir N, el índice $n \geq N$ es arbitrario: debemos controlar toda la cola. El umbral puede depender de la tolerancia y no tiene por qué ser el menor. Si funciona N, también funciona cualquier $K \geq N$, porque $n \geq K$ implica $n \geq N$.

Consideremos $r_n = 0$ cuando n es par y $r_n = 1$ cuando es impar. La bola $B(0, 2)$ contiene todos sus términos, con corte 0. La de radio $1/2$ no captura ninguna cola: después de cualquier N, el índice impar $2N + 1 \geq N$ sigue aportando el valor 1. Encontrar una ventana favorable alrededor de cero no acredita el candidato cero. La frontera tampoco cumple el error estricto. Con candidato $A = 2$ y tolerancia $1/3$, el valor 2 queda dentro de la ventana, pero $5/3$ y $7/3$ están en sus extremos y tienen error exactamente $1/3$. Una muestra de términos interiores no demuestra que los posteriores también lo sean, y una muestra de tolerancias no reemplaza a todas las positivas.

La sucesión $s_n = (-1)^n/(n + 1)$ permite representar esas exigencias cambiando de lado. Sus primeros términos son $1, -1/2, 1/3, -1/4, ...$ En las ventanas de radios $1/2$, $1/4$ y $1/8$, los cortes 2, 4 y 8 dejan dentro los términos mostrados a partir de esas posiciones. El de índice 7 cae exactamente en la frontera inferior de la última ventana. Esta lectura anticipa lo que habrá que demostrar; §6.3 dará un argumento para cualquier tolerancia y todos los índices posteriores.

Para una constante la comprobación ya es completa. Si $a_n = A$ para todo n, recibida cualquier $\varepsilon > 0$ elegimos $N = 0$: el error es $0 < \varepsilon$ en toda la sucesión. Si sólo sabemos que $b_n = A$ para $n \geq T$, sirve $N = T$ para cada tolerancia. Así, $(7, -3, 2, 2, ...)$ converge a 2,

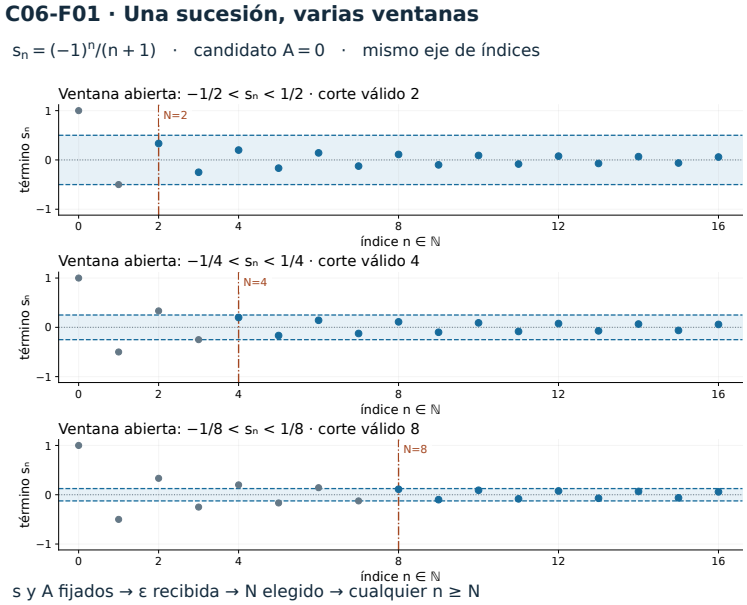


Figura 6.1. La tolerancia se impone sobre los valores y el umbral se elige sobre los índices. Cada ventana exige capturar una cola completa de la misma sucesión, aunque los términos cambien de lado. La muestra ilustra la exigencia; la garantía se demuestra en §6.3.

y $(9, -4, 1, 1, \ldots)$ converge a 1; sus prefijos no entran en la cola que exige la estimación. No hemos usado aún una regla general de invariancia: el error de esas colas es exactamente cero.

La convergencia permite, por tanto, alcanzar el candidato y repetir valores; tampoco exige aumentar estrictamente el umbral al reducir la tolerancia. La escritura $a_n \to A$ expresa una relación entre una función y un número, y no los identifica. No hay un término a_∞: infinito no es un índice natural. Las gráficas siguen siendo conjuntos discretos de pares (n, a_n). La definición mediante bolas tiene una lectura equivalente con las vecindades de C04.

> **Caracterización por vecindades.** Una sucesión $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ converge a $A \in \mathbb{R}$ si y sólo si está eventualmente en cada vecindad de A.

Si $a_n \to A$ y U es una vecindad de A, existe $r > 0$ con $B(A, r) \subseteq U$. Aplicando la convergencia a esa tolerancia obtenemos un corte desde el cual $a_n \in B(A, r) \subseteq U$. Así, la sucesión está eventualmente en U. Recíprocamente, si cada vecindad de A captura una cola, para una tolerancia arbitraria $\varepsilon > 0$ usamos la propia vecindad $B(A, \varepsilon)$. Su captura es exactamente el error estricto de la definición.

Las dos direcciones usan inclusiones y la definición de vecindad, sin exigir que U sea abierto o un intervalo. El corte puede depender de U. En la sucesión eventualmente constante de valor 2, por ejemplo, toda vecindad de 2 contiene la cola constante desde el índice 2; en una sucesión no constante, una bola contenida en la vecindad será lo que permita transportar el control de distancia.

Ejercicios de la sección 6.1.

Ejercicio 1. Ventanas con lados distintos

Fija una sucesión $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ y $A \in \mathbb{R}$. Compara la afirmación $a_n \to A$ con la siguiente: para cada $r, s > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A - r < a_n < A + s$ para todo $n \geq N$. Demuestra la equivalencia e identifica qué datos se fijan y cuáles se eligen.

Solución. La sucesión a y el candidato real A se fijan al comienzo; n y N son índices, mientras que a_n, r, s son reales. Si $a_n \to A$, dados $r, s > 0$ usamos la tolerancia $\delta = \min\{r, s\} > 0$. Su umbral garantiza $-r < a_n - A < s$ en toda la cola. Recíprocamente, recibida $\varepsilon > 0$, aplicamos la condición con $r = s = \varepsilon$. Entonces $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$, que equivale a $|a_n - A| < \varepsilon$. En cada dirección el umbral se elige antes de tomar un índice arbitrario de la cola; no hace falta que las ventanas iniciales sean simétricas.

Ejercicio 2. Lo que un prefijo no decide

Dados $m \in \mathbb{N}$ y $x_0, \dots, x_m \in \mathbb{R}$, construye dos sucesiones que coincidan con esos datos: una que converja a 0 y otra que no converja a 0. Justifica ambas afirmaciones sin inferir propiedades de una cola a partir de una muestra. Explica qué comparten sus gráficas para $0 \le n \le m$.

Solución. Definimos $a_n = b_n = x_n$ para $n \le m$, y ponemos $a_n = 0$, $b_n = 2$ para $n > m$. Son funciones con dominio $\mathbb{N}$ y valores reales. Para cualquier $\varepsilon > 0$, el umbral $m + 1$ da $|a_n| = 0 < \varepsilon$, de modo que $a_n \to 0$. Para b fijamos la tolerancia 1. Ningún corte N captura su cola alrededor de 0: el índice $n = \max\{N, m+1\}$ tiene $|b_n| = 2 \ge 1$. Las gráficas comparten exactamente los puntos prescritos (n, x_n) en el intervalo de índices mostrado. Ese prefijo no decide la captura de una cola ni la convergencia a 0.

Ejercicio 3. Una familia con destino común

Fija $T \in \mathbb{N}$ y $A \in \mathbb{R}$. Para cada familia de reales $x = (x_0, \dots, x_{T-1})$, define $a^x_n = x_n$ si $n < T$ y $a^x_n = A$ si $n \ge T$. Describe el caso $T = 0$, demuestra directamente la convergencia a A y determina cuándo $a^x = a^y$ como funciones. ¿La igualdad del candidato obliga a esa igualdad de funciones?

Solución. Cuando $T = 0$, el prefijo es vacío y la única sucesión de esta familia es la constante A. Para cualquier T y cualquier $\varepsilon > 0$, tomamos $N = T$. Todos los índices $n \ge N$ cumplen $|a^x_n - A| = 0 < \varepsilon$; la prueba no depende de las magnitudes del prefijo. Las funciones a^x y a^y tienen el mismo dominio y coinciden desde T. Son iguales si y sólo si $x_j = y_j$ para todos los índices $j < T$, pues ésa es la única zona en que pueden diferir. Si $T > 0$, basta escoger $x_0 \neq y_0$ para obtener funciones diferentes con el mismo candidato de convergencia. No se necesita aquí el teorema posterior de unicidad.

Ejercicio 4. Qué familia de ventanas basta

Demuestra que $a_n \to A$ equivale a que todo intervalo abierto (u, v) con $u < A < v$ capture una cola. Compara esta condición con la captura por cada vecindad de A, entendiendo vecindad en el sentido de C04.

Solución. Si $a_n \to A$ y $u < A < v$, la tolerancia $\delta = \min\{A - u, v - A\} > 0$ produce una cola en $(A - \delta, A + \delta) \subseteq (u, v)$. A la inversa, los intervalos $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ están entre los intervalos exigidos, por lo que recuperamos la definición para cada $\varepsilon > 0$. Todo intervalo abierto que contiene A es una vecindad: contiene esa bola de radio δ. Además, por la definición de C04, cualquier vecindad U de A contiene una bola $B(A, r)$ con $r > 0$. Así, capturar cada vecindad implica capturar cada intervalo, y capturar cada intervalo implica capturar una bola contenida en cada vecindad. Las inclusiones transmiten la captura a U, aunque U no sea un intervalo.

6.2. Quién elige qué: leer y negar la definición

El orden de elecciones determina qué datos tenemos al construir cada objeto. Para probar $a_n \to A$, fijamos a y A, recibimos $\varepsilon > 0$, construimos $N \in \mathbb{N}$ y verificamos un índice arbitrario $n \ge N$. El corte puede depender de a, A, ε, pero debe quedar elegido antes del índice que recorrerá su cola. Si invertimos las primeras elecciones y pedimos un mismo corte para todas las tolerancias, obtenemos una condición más fuerte:

$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall \varepsilon > 0\ \forall n \ge N : \quad |a_n - A| < \varepsilon$. Esta condición equivale a ser eventualmente constante de valor A. En efecto, fijemos $n \ge N$. Si $d = |a_n - A| > 0$, podemos exigir $\varepsilon = d/2$

y obtenemos la contradicción $d < d/2$. Luego $a_n = A$ en toda esa cola. A la inversa, si una cola vale constantemente A, su error cero responde a cualquier tolerancia con un mismo corte. Que el ejemplo constante admita ese corte común no convierte la condición más fuerte en parte de la definición general.

Otras alteraciones eliminan obligaciones. La elección $\varepsilon_n = |a_n - A| + 1$ hace verdadera una desigualdad en cada índice de cualquier sucesión, pero adapta la tolerancia al error encontrado. Tampoco la fórmula $\forall \varepsilon > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists N \in \mathbb{N}: \quad n \geq N \Longrightarrow |a_n - A| < \varepsilon$ expresa convergencia: podemos elegir $N = n+1$ y hacer falso el antecedente. Ya no se ha construido una cola que controle todos sus índices.

También es insuficiente visitar cada ventana arbitrariamente tarde. La sucesión r de la sección anterior satisface, para todo $\varepsilon > 0$ y todo N, la condición $r_{2N} = 0 \in B(0, \varepsilon)$, con $2N \geq N$. Esas visitas no eliminan los unos impares. La diferencia entre alguna aparición después de cada corte y todos los términos después de un corte es la distinción entre ocurrencia y eventualidad de C05.

Para refutar un candidato debemos conservar ese mismo orden lógico al negar la definición. El fracaso de la implicación $n \geq N \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon$ exige que el índice esté en la cola y falle la estimación. Al negar los cuantificadores exteriores obtenemos:

> **Refutación de un candidato.** Para a y A fijados, la afirmación $a_n \not\to A$ equivale a que exista una tolerancia $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para cada $N \in \mathbb{N}$, haya un $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq N$ y $|a_n - A| \geq \varepsilon_0$.

$$a_n \not\to A \iff \exists \varepsilon_0 > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}: \quad n \geq N \text{ y } |a_n - A| \geq \varepsilon_0.$$

La tolerancia de refutación queda fija mientras el índice infractor responde a cada corte. La igualdad en la frontera ya es una infracción. Para r y $A = 0$, elegimos $\varepsilon_0 = 1/2$; tras cualquier N, sirve $n = 2N+1$, pues $r_n = 1$. Los índices pares siguen dentro de la ventana, sin invalidar la prueba: para refutar basta un infractor después de cada corte. Un solo infractor inicial, en cambio, puede dejarse atrás y no prueba esa condición.

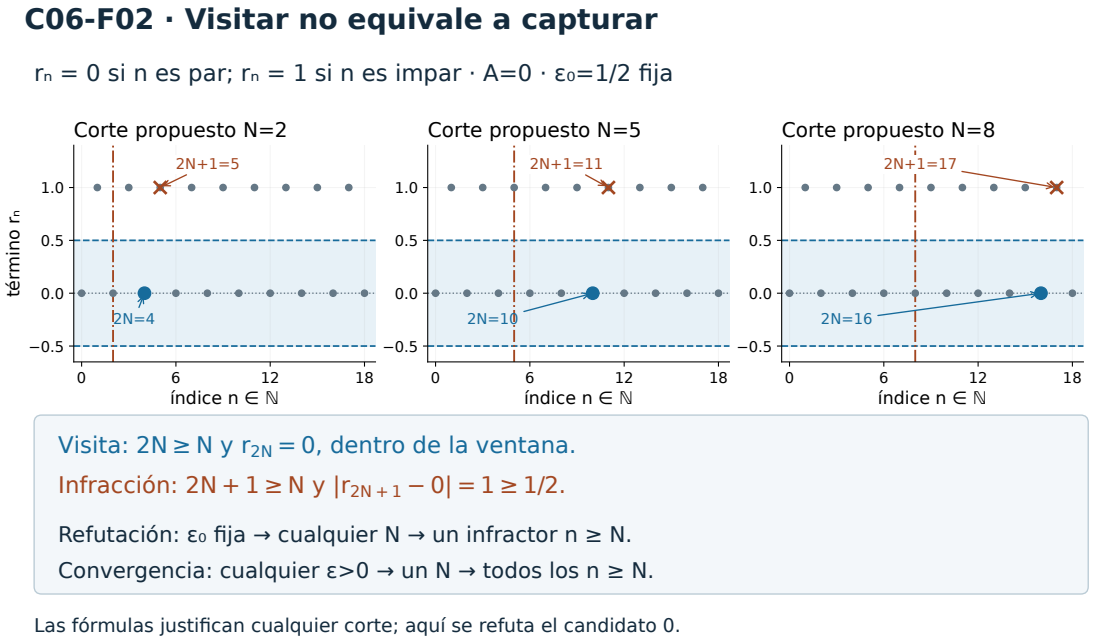


Figura 6.2. Cada corte tiene visitas posteriores a la ventana y también infracciones posteriores. La tolerancia un medio refuta la captura por una cola alrededor de cero.

Refutar un candidato no excluye los demás. La constante $c_n = 1$ converge a 1, pero no a 0: con tolerancia 1, el propio índice $n = N$ tiene error 1 después de cada corte. La constante $c_n = 3$ refuta de la misma manera el candidato 1 con tolerancia 2. En ambos casos la infracción cae exactamente en la frontera; exigir un error mayor, en lugar de mayor o igual, perdería esos testigos.

Decir que no hay ningún límite real antepone la obligación de refutar cada candidato:

$$\forall A \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon_A > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N} : \quad n \geq N \text{ y } |a_n - A| \geq \varepsilon_A.$$

La tolerancia puede depender de A, pero no del corte recibido después. Cambiar de candidato durante una misma comprobación tampoco acredita la conclusión buscada; el problema 5 examina esa pérdida de obligación. Usaremos siempre $n \geq N$. Una definición con $n > N$ describe la misma convergencia, aunque no conserve el valor numérico de cada testigo. Un corte válido para $n \geq N$ sirve para $n > N$; en sentido inverso, un corte N válido para $n > N$ se convierte en $N+1$ bajo nuestra convención. En $d = (1, 0, 0, ...)$, con candidato cero y tolerancia $1/2$, el corte 0 funciona para $n > 0$ y falla para $n \geq 0$. El corte 1 recupera la captura con el extremo incluido.

Ejercicios de la sección 6.2.

Ejercicio 5. Un candidato elegido demasiado tarde

Alguien escribe: «Para cada $\varepsilon > 0$ puedo elegir $A_\varepsilon \in \mathbb{R}$ y $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ que satisfacen $|a_n - A_\varepsilon| < \varepsilon$ para todos los índices $n \geq N_\varepsilon$. Por tanto, $a_n \to 0$». Localiza la falta en esa conclusión y refútala con una sucesión concreta. ¿Cuál sería la obligación correcta para acreditar el candidato 0? No se pide decidir si la premisa implica alguna otra propiedad.

Solución. La premisa controla distancias a centros elegidos después de la tolerancia; no los identifica con 0. Para la sucesión constante $a_n = 5$, basta elegir $A_\varepsilon = 5$ y $N_\varepsilon = 0$ para cualquier tolerancia: el error es cero. Sin embargo, con candidato 0 y tolerancia 1, cada término tiene error 5, así que ningún corte funciona. Para probar $a_n \to 0$ hay que fijar ese centro antes de recibir ε y, para cada tolerancia, construir un umbral que controle $|a_n|$ en toda la cola. La premisa deja libre la elección del centro; para la conclusión propuesta, todas las capturas tendrían que estar centradas en 0.

Ejercicio 6. Negar la existencia de un destino

Escribe con todos sus dominios la afirmación «a no converge a ningún número real» y deriva su forma cuantificada desde la negación de «existe $A \in \mathbb{R}$ al que converge». Compara el orden de elecciones con la refutación de un candidato fijo.

Solución. La existencia de un destino real se expresa mediante $\exists A \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} : \ n \geq N \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon$. Al negar sucesivamente los cuantificadores y la implicación obtenemos

$$\forall A \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon_A > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N} : \quad n \geq N \text{ y } |a_n - A| \geq \varepsilon_A.$$

La sucesión queda fijada. Para cada candidato se elige una tolerancia de refutación, que puede depender de él, pero no del corte posterior. Después de cada corte se construye un índice infractor. Para refutar un solo candidato A_0 se exige la misma condición únicamente para ese número: desaparece el cuantificador inicial sobre todos los reales. Tal refutación deja sin decidir los demás candidatos.

Ejercicio 7. Visitar sin permanecer

Construye una sucesión real que tome el valor 0 en índices arbitrariamente tardíos y que también tome valores de módulo al menos 2 arbitrariamente tarde, sin ser una sucesión de sólo dos valores. Verifica que visita toda bola alrededor de 0 después de cada corte y que no converge a 0.

Solución. Definimos $a_n = 0$ si n es par y $a_n = n + 2$ si es impar. El conjunto de valores no tiene sólo dos elementos: los índices impares producen valores distintos. Dados una tolerancia $\varepsilon > 0$ y un corte $N \in \mathbb{N}$, el índice $2N \geq N$ satisface $a_{2N} = 0 \in B(0, \varepsilon)$. Por tanto, cada ventana es visitada arbitrariamente tarde. En cambio, fijamos $\varepsilon_0 = 2$. Después de cualquier corte, el índice $2N + 1$ tiene $|a_{2N+1}| = 2N + 3 \geq 2$. Ninguna cola completa queda en $B(0, 2)$. Los índices de visitas e infracciones se han construido explícitamente; no se usan resultados sobre subsucesiones.

Ejercicio 8. Cambiar la frontera del error

Compara la definición usual de $a_n \to A$ con la condición que exige $|a_n - A| \leq \varepsilon$ eventualmente para cada $\varepsilon > 0$. Demuestra su equivalencia y deriva la negación de la segunda condición. Explica por qué las distintas desigualdades en las negaciones no cambian su alcance global.

Solución. Una captura con error estricto implica la misma captura con error no estricto. Recíprocamente, si tenemos la condición no estricta para toda tolerancia, recibida $\varepsilon > 0$ usamos $\varepsilon/2$; el umbral correspondiente garantiza $|a_n - A| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$. Su negación es: existe $\eta > 0$ tal que, después de cada corte, aparece un índice con $|a_n - A| > \eta$. Esta condición implica la refutación usual con error $\geq \eta$. Si la refutación usual proporciona $\varepsilon_0 > 0$ y errores $\geq \varepsilon_0$ después de cada corte, esos mismos índices tienen errores $> \varepsilon_0/2$. Así obtenemos la otra negación. La posibilidad de cambiar de tolerancia permite absorber la diferencia de frontera.

Ejercicio 9. Sólo tolerancias pequeñas

Sea $r > 0$ fijo. Demuestra que basta verificar la captura con error estricto para todas las tolerancias δ tales que $0 < \delta < r$ para acreditar $a_n \to A$. ¿Basta verificar únicamente la tolerancia r? Justifica la respuesta.

Solución. Para una tolerancia arbitraria $\varepsilon > 0$, elegimos $\delta = \min\{\varepsilon/2, r/2\}$. Es positiva, menor que r y menor que ε. La hipótesis proporciona un umbral para δ, que sirve también para ε, pues $|a_n - A| < \delta < \varepsilon$. No hemos elegido un único corte para todas las tolerancias. Verificar solamente r no basta: la constante $a_n = A + r/2$ satisface $|a_n - A| = r/2 < r$ en todos los índices, pero no converge a A. La tolerancia $r/4$ falla en toda la sucesión. Una familia de exigencias pequeñas conserva la posibilidad de refinar la captura; una sola exigencia no la conserva.

6.3. Construir el umbral

Para $a_n = 1/(n + 1)$ y candidato cero, empezar por el error permite descubrir qué corte necesitamos. Como $n+1$ y ε son positivos, $\frac{1}{n+1} < \varepsilon \iff n+1 > \frac{1}{\varepsilon}$. Basta elegir un natural N con $N+1 > 1/\varepsilon$: cada $n \geq N$ heredará esa comparación. La propiedad arquimediana de C03 §3.4 asegura naturales mayores que cualquier real. Para escribir una fórmula de respuesta construiremos primero el piso positivo que vamos a usar.

> **Piso de un real positivo.** Para cada $t > 0$ existe un único $K \in \mathbb{N}$ tal que $K \leq t < K + 1$. Lo denotamos por $\lfloor t \rfloor$.

Sea $t > 0$. Elegimos por la propiedad arquimediana un natural $m > t$ y consideramos $F = \{k \in \{0, 1, \ldots, m\} : k \leq t\}$. El conjunto es finito y contiene a 0, por lo que tiene un máximo K. La existencia de máximo en un conjunto finito no vacío se demuestra por inducción, conservando el mayor al añadir un elemento; no requiere el principio del supremo. Como $K \leq t < m$, tenemos $K < m$ y $K + 1 \leq m$. Si también $K + 1 \leq t$, ese sucesor pertenecería a F, contradiciendo la maximalidad. Así, $K \leq t < K + 1$.

Para probar unicidad, supongamos que J cumple las mismas desigualdades. Si $K < J$, el orden natural da $K + 1 \leq J \leq t < K + 1$, imposible. El caso $J < K$ produce la contradicción simétrica; luego $J = K$. El resultado tampoco depende de qué $m > t$ se haya escogido, pues cualquier construcción da esa misma propiedad única. Por ejemplo, $\lfloor 5/2 \rfloor = 2$, $\lfloor 3 \rfloor = 3$, y el piso de $0 < t < 1$ es 0.

La dependencia de completitud entra a través del resultado arquimediano ya demostrado en C03. Después sólo usamos un máximo finito y el orden de los naturales. Volvamos a la estimación que motivó esta construcción.

Primera prueba de convergencia con N explícito. La sucesión $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por $a_n = 1/(n+1)$ converge a 0.

Sea $\varepsilon > 0$ y elijamos $N = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor \in \mathbb{N}$. Para todo $n \geq N$, la propiedad del piso da $n + 1 \geq N + 1 > 1/\varepsilon$. Al invertir cantidades positivas, $|a_n - 0| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{N+1} < \varepsilon$. Así se cumple la definición para cualquier tolerancia. Primero descubrimos una condición suficiente trabajando desde el error; después verificamos el argumento en el orden tolerancia, corte e índice arbitrario. No usamos reglas algebraicas de límites para probar la primera convergencia.

Los detalles de frontera y dominio se ven en algunos cortes:

ε	$N = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor$	Error del primer término de la cola
2	0	$1 < 2$
1	1	$1/2 < 1$
1/3	3	$1/4 < 1/3$
1/8	8	$1/9 < 1/8$

Con $\varepsilon = 2/5$, por ejemplo, $N = 2$ y todo $n \geq 2$ tiene error a lo sumo $1/3 < 2/5$. Para $\varepsilon > 1$, el piso es 0 y toda la sucesión cumple $1/(n+1) \leq 1 < \varepsilon$. Las tolerancias grandes no obligan a introducir índices negativos ni a cambiar el dominio. La propuesta $N' = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor - 1$ tiene dos defectos. Con $\varepsilon = 1/3$ produce el natural 2, pero el término de ese índice tiene error exactamente $1/3$. Con $\varepsilon = 2$ produce -1, que ni siquiera es un umbral natural. La fórmula válida anterior resuelve ambas obligaciones para todas las tolerancias, sin necesitar que el corte sea óptimo.

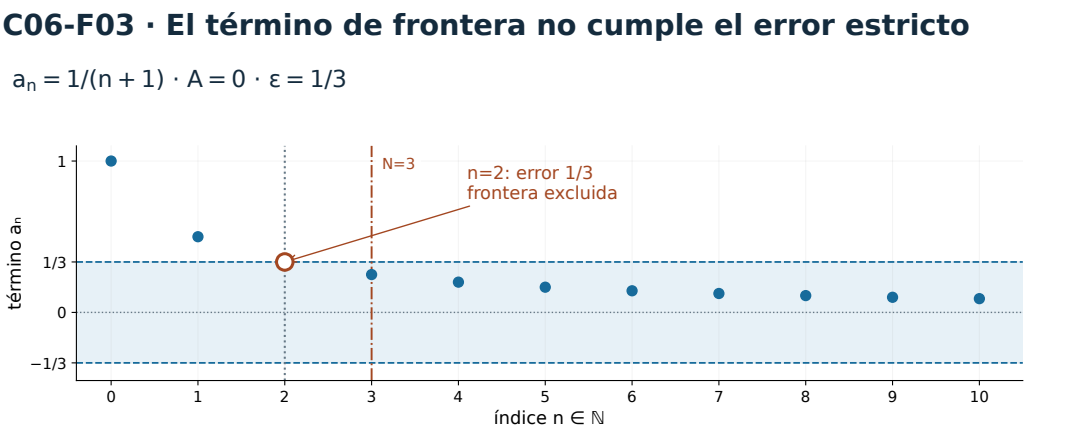


Figura 6.3. Con tolerancia un tercio, el término de índice 2 queda sobre la frontera y no cumple el error estricto. El corte 3 sí controla toda la cola, como muestra la estimación general.

La sucesión alternante presentada en §6.1 ya puede demostrarse con el mismo corte. Para todo n, $|(-1)^n| = 1$ y $n+1 > 0$, por lo que $|s_n| = 1/(n+1)$. Dada $\varepsilon > 0$, $N = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor$ controla el error de cada $n \geq N$ y prueba $s_n \to 0$. Los cortes $2, 4, 8$ de la figura F01 son tres aplicaciones de esta prueba general. Sus términos cambian de signo; $s_0 = 1$, $s_1 = -1/2$, $s_2 = 1/3$ muestran que no es monótona, sin impedir la convergencia.

También podemos fijar $A, c \in \mathbb{R}$ y estudiar $u_n = A + c/(n+1)$ directamente. Si $c = 0$, basta $N = 0$. Si $c \neq 0$, recibida $\varepsilon > 0$ elegimos $N = \lfloor |c|/\varepsilon \rfloor$; para $n \geq N$ tenemos $n + 1 > |c|/\varepsilon$ y $|u_n - A| = |c|/(n+1) < \varepsilon$. El piso sólo se aplica aquí a argumentos positivos. En $u_n = 3 - 2/(n+1)$ sirve $N = \lfloor 2/\varepsilon \rfloor$.

Para excluir todos los candidatos de $q_n = (-1)^n$, la construcción cambia. Fijemos $A \in \mathbb{R}$. La triangular da $2 = |1-(-1)| \leq |1-A| + |-1-A|$. Alguno de los dos errores es al menos 1. Elegimos ese valor y fijamos $\varepsilon_0 = 1$. Después de cualquier N, el índice $2N$ presenta el valor 1 y $2N+1$ presenta el valor -1; usamos el que tenga error al menos 1. El testigo pertenece a la cola y refuta el candidato. Como A fue arbitrario, no hay límite real. La prueba sólo necesita distancia, paridad y cuantificadores; no usa subsucesiones. La tolerancia uniforme respecto de A funciona en este ejemplo, aunque la negación general no la exige.

La alternancia de signos aparece tanto en q como en s. Lo que decide sus comportamientos es la magnitud de los errores: en s se responde a cualquier tolerancia alrededor de cero; en q una separación fija permite refutar todo candidato.

Ejercicios de la sección 6.3.

Ejercicio 10. Centro, escala y denominador

Fija $A, c \in \mathbb{R}$ y $d, e > 0$. Para $a_n = A + c/(dn+e)$, demuestra directamente que $a_n \to A$. Da un umbral explícito para cada $\varepsilon > 0$, trata $c = 0$ y verifica que la sucesión está definida también en $n = 0$.

Solución. El denominador cumple $dn + e \geq e > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, incluido 0. Si $c = 0$, la sucesión es constante y $N = 0$ sirve para cualquier tolerancia. Si $c \neq 0$, ponemos $t = |c|/(d\varepsilon) > 0$ y elegimos $N = \lfloor t \rfloor + 1$. El piso usado es el construido en §6.3; por su propiedad, $N > t$. Para un índice arbitrario $n \geq N$, tenemos $dn + e > dt = |c|/\varepsilon$. Al dividir por cantidades positivas obtenemos $|a_n - A| = |c|/(dn+e) < \varepsilon$. El testigo es suficiente, aunque el término e pueda permitir uno menor. No se invoca ninguna regla algebraica de límites.

Ejercicio 11. Dos cortes defectuosos

Para la familia del ejercicio 10 con $c \neq 0$, se proponen $N_1 = \max\{0, \lfloor (|c|/\varepsilon - e)/d \rfloor\}$ y $N_2 = \lfloor |c|/(d\varepsilon) \rfloor - 1$. Refuta cada propuesta como fórmula válida para todos los parámetros: muestra una falla de estrictitud de N_1 y una falla de dominio de N_2. Repara ambas con un testigo universal suficiente.

Solución. Tomamos $c = d = e = 1$ y $\varepsilon = 1/3$. Entonces $N_1 = 2$, pero en el índice $n = 2$ el error es $1/3$, exactamente la tolerancia. La condición estricta falla, aunque N_1 sea un natural. Para N_2, con los mismos parámetros y $\varepsilon = 2$, resulta $N_2 = \lfloor 1/2 \rfloor - 1 = -1$, que no pertenece a $\mathbb{N}$ y no puede servir como umbral de la definición. En ambas fórmulas el defecto ocurre antes de acreditar toda la cola. Una reparación común es $N = \lfloor |c|/(d\varepsilon) \rfloor + 1$. Es natural y mayor que $|c|/(d\varepsilon)$; el argumento del ejercicio 10 verifica el error estricto para cada $n \geq N$. El corte asegura la desigualdad requerida; un denominador inicial mayor puede permitir empezar antes.

La figura C06-F03 de §6.3 muestra el mismo fallo de estrictitud en n=2. No representa el segundo defecto: $N_2 = -1$ falla por no pertenecer al dominio de índices.

Ejercicio 12. Un prefijo arbitrario

Sea $T \in \mathbb{N}$. Define $a_n = x_n$ para $n < T$, con valores reales arbitrarios, y $a_n = A + c/(dn+e)$ para $n \geq T$, donde $A, c \in \mathbb{R}$ y $d, e > 0$. Prueba $a_n \to A$ desde la definición, sin usar aún invariancia por modificaciones finitas. Cubre el prefijo vacío.

Solución. Los términos del prefijo son reales y los restantes están definidos porque $dn+e > 0$. Si $c = 0$, elegimos $N = T$ y el error es cero en toda la cola. Si $c \neq 0$, dado $\varepsilon > 0$ ponemos $K = \lfloor |c|/(d\varepsilon) \rfloor + 1$ y $N = \max\{T, K\}$. Para cualquier $n \geq N$ se cumplen las dos obligaciones: usamos la fórmula de la cola porque $n \geq T$, y su denominador es mayor que $|c|/\varepsilon$ porque $n \geq K$. Por tanto, $|a_n - A| < \varepsilon$. Cuando $T = 0$ no hay valores iniciales que controlar y la misma construcción funciona. La prueba explica directamente por qué ningún tamaño del prefijo interviene en la estimación tardía.

Ejercicio 13. Un corte suficiente y el menor corte

Considera $a_n = 2/(n + 3)$ y candidato 0. Para cada $\varepsilon > 0$, determina el menor umbral natural que da error estricto en toda la cola. Compáralo con $K = \lfloor 2/\varepsilon \rfloor + 1$. Examina $\varepsilon = 2/5$ y $\varepsilon = 1$, e identifica el papel de la frontera.

Solución. Como $n + 3 > 0$, la condición es $n > 2/\varepsilon - 3$. Ponemos $m = \lfloor 2/\varepsilon \rfloor$, usando sólo el piso de un real positivo. El menor umbral es $N_{\min} = \max\{0, m - 2\}$. Si $m \leq 2$, entonces $2/\varepsilon < m+1 \leq 3$, por lo que el índice 0 y todos los posteriores cumplen la condición. Si $m \geq 3$, el índice $m - 2$ satisface $n + 3 = m + 1 > 2/\varepsilon$. Todo natural anterior tiene $n + 3 \leq m \leq 2/\varepsilon$ y falla el error estricto. Esto acredita la minimalidad y el control de toda la cola. El corte $K = m + 1$ del ejercicio 10 es válido pero mayor. Para $\varepsilon = 2/5$, $N_{\min} = 3$: el índice 2 tiene error $2/5$ y debe excluirse. Para $\varepsilon = 1$, $N_{\min} = 0$, mientras que $K = 3$. Un testigo suficiente responde a la definición; determinar el menor requiere examinar también por qué fallan los índices anteriores.

Ejercicio 14. Dos valores que no desaparecen

Sean $p, q \in \mathbb{R}$, $p \neq q$, y una sucesión a. Supón que existen fórmulas $i, j : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que $i(N), j(N) \geq N$, $a_{i(N)} = p$ y $a_{j(N)} = q$ para cada N. Demuestra que a no converge a ningún real. Construye además un ejemplo con $p = -2$, $q = 4$ y valores adicionales en otros índices.

Solución. Fijamos un candidato arbitrario A y $D = |p - q| > 0$. La triangular da $D \leq |p - A| + |q - A|$, de modo que alguno de los dos errores es al menos $D/2$. Elegimos ese valor una vez para este candidato y fijamos $\varepsilon_A = D/2$. Después de cualquier corte usamos $i(N)$ o $j(N)$, según el valor elegido, para obtener el infractor requerido. Como el argumento vale para cada A, no hay destino real. Para el ejemplo, ponemos $a_{3k} = -2$, $a_{3k+1} = 4$ y $a_{3k+2} = k$. Las fórmulas $i(N) = 3N$ y $j(N) = 3N + 1$ acreditan las hipótesis. Los valores adicionales no eliminan la separación persistente que refuta cada candidato.

6.4. Un solo destino; el comienzo puede cambiar

Dos ventanas grandes pueden solaparse, pero la convergencia permite reducir los radios según la distancia entre sus centros. Para excluir dos candidatos distintos necesitaremos además usar las dos capturas en un mismo término.

> **Unicidad del límite.** Sean $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ y $A, B \in \mathbb{R}$. Si $a_n \to A$ y $a_n \to B$, entonces A=B.

Supongamos $A \neq B$ y pongamos $d = |A - B| > 0$. Pedimos a ambas convergencias la tolerancia $d/3$, obteniendo cortes N_A, N_B. El máximo $N = \max\{N_A, N_B\}$ hace disponibles las dos estimaciones en el índice $n = N$. Por la triangular,

$$d = |A - B| \leq |A - a_N| + |a_N - B| < \frac{d}{3} + \frac{d}{3} = \frac{2d}{3} < d,$$

contradicción. Luego $A = B$. El máximo no acerca los centros; asegura que el número situado cerca de ambos sea el mismo a_N. Con radios d sólo obtendríamos $d < 2d$, que no es contradictorio.

La unicidad permite escribir $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ cuando se ha demostrado $a_n \to A$. La existencia sigue siendo otra obligación: no toda sucesión tiene límite real. Si una prueba acredita $u_n \to 3$ y otra pretende acreditar $u_n \to B$, ambas sólo pueden ser correctas si $B = 3$.

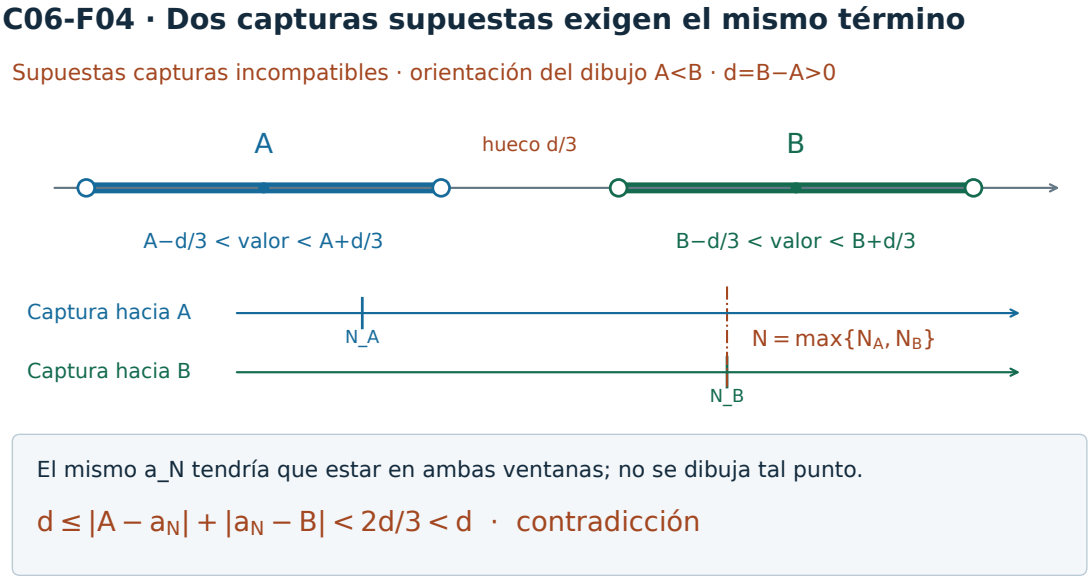


Figura 6.4. La sincronización exige que un mismo término tardío esté en ambas ventanas. La separación de los candidatos y la triangular hacen imposible esa doble pertenencia.

La notación no evalúa una función en infinito ni crea un último término. Una modificación del comienzo puede cambiar la función y conservar todas sus convergencias.

> **Coincidencia eventual y convergencia.** Sean $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Supongamos que existe un $T \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = b_n$ para todo n≥T. Entonces, para cada $A \in \mathbb{R}$, se cumple $a_n \to A$ si y sólo si $b_n \to A$.

Fijemos A y supongamos $a_n \to A$. Para una tolerancia $\varepsilon > 0$, sea N_a un corte que controla el error de a. Tomamos $N_b = \max\{T, N_a\}$. Si $n \geq N_b$, valen $b_n = a_n$ y $|a_n - A| < \varepsilon$, luego $|b_n - A| < \varepsilon$. Esto prueba $b_n \to A$. La dirección inversa repite el argumento intercambiando a y b y usando el mismo corte de coincidencia T.

El resultado también conserva la ausencia de límite: si a no tuviera límite real y b lo tuviera, la equivalencia produciría un límite para a. No conserva propiedades que miren el prefijo. Para $a_n = 1/(n+1)$, definamos $b_0 = 7$, $b_1 = -3$, $b_2 = 2$ y $b_n = a_n$ desde 3. Entonces $b_n \to 0$, con testigo $\max\{3, \lfloor 1/\varepsilon \rfloor\}$; la positividad global de a no pasa a b.

Tener el mismo límite tampoco fuerza coincidencia eventual. Las sucesiones $a_n = 1/(n+1)$ y $v_n = -1/(n+1)$ convergen a cero por las pruebas directas, pero sus términos tienen signos opuestos y no coinciden en ningún índice. Reindexar una cola requiere otra traducción: si $b_k = a_{T+k}$, los términos correspondientes tienen índices distintos, y no podemos invocar una igualdad $a_n = b_n$.

> **Convergencia de una cola reindexada.** Sean $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $T \in \mathbb{N}$ y $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por $b_k = a_{T+k}$. Para cada $A \in \mathbb{R}$, se cumple $a_n \to A$ si y sólo si $b_k \to A$.

Si $a_n \to A$ y N controla una tolerancia, para $k \geq N$ se cumple $T + k \geq k \geq N$; por tanto $|b_k - A| = |a_{T+k} - A| < \varepsilon$. El mismo corte numérico es suficiente en la nueva sucesión. Puede mejorarse a $K = \max\{0, N - T\}$, como comprueba el problema 16, pero no necesitamos minimizarlo.

Recíprocamente, si $b_k \to A$, recibimos $\varepsilon > 0$ y elegimos su corte K. Tomamos $N = T + K$. Para $n \geq N$, el número $k = n - T$ es natural y cumple $k \geq K$, y $a_n = b_k$; así, $|a_n - A| < \varepsilon$. Esto prueba la equivalencia en ambos sentidos. Para $a_n = 1/(n+1)$ y $T = 3$, la nueva función

es $b_k = 1/(k+4)$: $b_0 = a_3 = 1/4$. Un corte $K = 5$ de b se transporta al corte $N = 8$ de a; un corte $N = 8$ de a permite usar $K = 8$ para b, o el corte más ajustado 5. En cada caso la comprobación es la desigualdad entre el índice original y el nuevo.

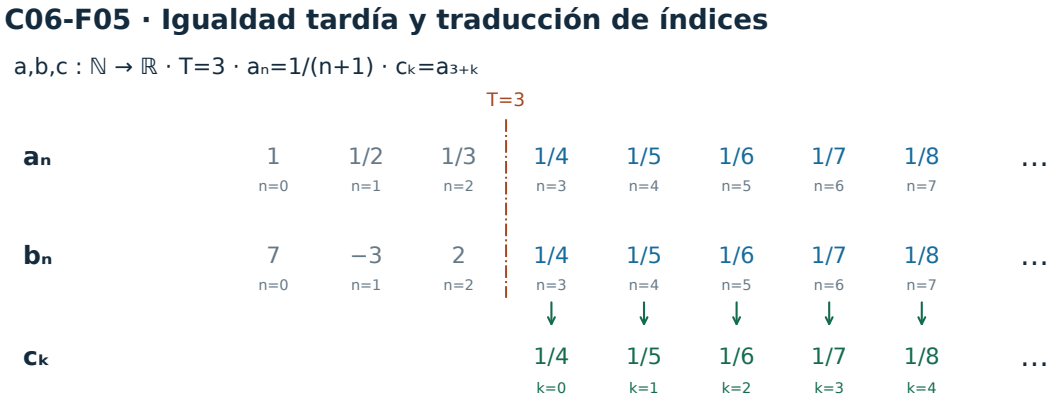


Figura 6.5. Cambiar un prefijo conserva el límite, aunque cambie la sucesión. Reindexar una cola devuelve su dominio a los naturales y exige traducir los umbrales.

En esta figura, b nombra la sucesión con prefijo modificado y c la cola reindexada, mientras que el teorema anterior llamó b a la reindexación. La restricción $a|_{\mathbb{N}_{\geq T}}$ conserva los índices originales; la cola reindexada tiene dominio $\mathbb{N}$; el conjunto $\{a_n : n \geq T\}$ sólo es una imagen y pierde las posiciones. Para $T = 0$, restricción y reindexación coinciden con a. Para $T > 0$, sus dominios son distintos. El resultado demostrado se refiere al desplazamiento $k \mapsto T + k$, sin presuponer todavía una teoría de selecciones arbitrarias de índices.

Ejercicios de la sección 6.4.

Ejercicio 15. Cómo repartir una separación

En una prueba de unicidad con candidatos distintos A, B, escribe $D = |A - B|$. Se desean tolerancias αD y βD, con $\alpha, \beta > 0$. Determina cuándo la triangular y las dos capturas bastan por sí solas para dar contradicción. Explica qué ocurre cuando $\alpha + \beta > 1$.

Solución. Sincronizados los umbrales, un mismo término satisface ambas capturas y la triangular da $D \leq |A - a_n| + |a_n - B| < (\alpha + \beta)D$. Hay contradicción si $\alpha + \beta \leq 1$, incluida la igualdad, porque el error total es estricto. Si la suma es mayor que 1, esa estimación aislada no contradice $D > 0$. Más aún, las ventanas pueden compartir un punto: con $A = 0$, $B = D$, ponemos $\ell = \max\{0, 1 - \beta\}$ y $u = \min\{1, \alpha\}$. Tanto 0 como $1 - \beta$ son menores que 1 y que α: se usan $\alpha, \beta > 0$ y $1 - \beta < \alpha$. Luego $\ell < u$, y el punto medio $t = (\ell + u)/2$ cumple $0 < t < 1$, $t < \alpha$ y $1 - t < \beta$. El punto tD tiene así distancias menores que αD y βD a los dos centros. Esto no permite dos límites reales distintos: para la unicidad pueden elegirse otras tolerancias cuya suma sea menor o igual que la separación. Sólo muestra que el reparto propuesto no cierra esa contradicción.

Ejercicio 16. Transportar índices y cortes

Fija $T \in \mathbb{N}$, una sucesión a y $A \in \mathbb{R}$. Compara $r = a|_{\mathbb{N}_{\geq T}}$ con $b_k = a_{T+k}$. Declara dominios y codominios y escribe el transporte $k \mapsto T + k$ y su inversa. Para una tolerancia, transforma un umbral de a en uno de b, y un umbral de b en uno de a, justificando las dos capturas.
Solución. La función r tiene dominio $\mathbb{N}_{\geq T}$ y codominio $\mathbb{R}$; b tiene dominio $\mathbb{N}$ y el mismo codominio. La biyección $\tau_T(k) = T + k$ lleva $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}_{\geq T}$ y tiene inversa $n \mapsto n - T$. Se cumple $b = r \circ \tau_T$. Cuando $T = 0$, la biyección es la identidad y $b = r = a$. Cuando $T > 0$, los dominios de r y b son diferentes, por lo que estas funciones no son iguales; la composición expresa cómo se corresponden sus evaluaciones. Si a tiene umbral N para la tolerancia dada, podemos usar $K = \max\{0, N - T\}$ para b. Cuando $k \geq K$, se tiene $T + k \geq N$, tanto si $N \leq T$ como si $N > T$; de ahí $|b_k - A| < \varepsilon$. Si b tiene umbral K, tomamos $N = T + K$ para a. Cada $n \geq N$ admite $k = n - T \in \mathbb{N}$ con $k \geq K$, y $a_n = b_k$. La correspondencia de índices transporta el control de toda la cola.

En la figura C06-F05 de §6.4, la fila c ilustra la reindexación con T=3. Aquí b cumple ese papel para T general; el corte optimizado K=max{0,N−T} se justifica por las desigualdades anteriores, no por el corte suficiente de la figura.

Ejercicio 17. Tres funciones y un destino

Construye tres sucesiones reales distintas que converjan a 0, de modo que las dos primeras coincidan eventualmente y la tercera difiera de ambas en todos los índices suficientemente grandes. Justifica la convergencia y explica qué igualdades se conservan y cuáles no.
Solución. Tomamos $a_n = 0$ para todo n, $b_0 = 7$ y $b_n = 0$ para $n \geq 1$, y $c_n = 1/(n + 1)$. La convergencia de a sigue del error cero; b converge a 0 con umbral 1 para cualquier tolerancia. La convergencia de c es la prueba directa de §6.3. Las tres funciones son distintas: $a_0 \neq b_0$, $c_0 \neq a_0$ y $c_0 \neq b_0$. Además, $c_n > 0 = a_n = b_n$ para todo $n \geq 1$. Hay coincidencia eventual entre a y b, pero no entre éstas y c. Después de la unicidad de §6.4 sus límites pueden escribirse como el mismo número 0; la igualdad de esos números no implica igualdad de funciones ni coincidencia eventual.

Ejercicio 18. Alguna cola y todas las colas

Para $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ y $A \in \mathbb{R}$, prueba la equivalencia de: $a_n \to A$; existe $T \in \mathbb{N}$ tal que $a_{T+k} \to A$ al recorrer $k \in \mathbb{N}$; para cada $T \in \mathbb{N}$ esa cola reindexada converge a A. Distingue el candidato común de los cortes, que pueden variar.
Solución. Si $a_n \to A$, fijamos cualquier T. Dada una tolerancia con umbral N para a, el mismo umbral para k es suficiente, porque $T + k \geq k \geq N$. Así converge cada cola reindexada al candidato común. Que converjan todas implica que converge alguna, por ejemplo la de $T = 0$. Si converge una cola con índice inicial T, recibimos $\varepsilon > 0$ y obtenemos su corte K. El umbral $N = T + K$ controla a: para todo $n \geq N$, el natural $k = n - T \geq K$ tiene $a_n = a_{T+k}$ y error menor que ε. Esta última dirección explica por qué basta alguna cola. El candidato A queda fijo en las tres afirmaciones; los cortes dependen de la tolerancia y pueden depender de T.

6.5. Qué control deja una sucesión convergente

Una captura con tolerancia fija proporciona información útil aunque no contenga toda la definición. Si $a_n \to A$, pedir error menor que 1 permitirá acotar una cola; después sólo faltará recoger el prefijo finito para obtener una cota global. Recordemos que a es acotada si existe un real $M \geq 0$ tal que $|a_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

> **Acotación de una sucesión convergente.** Si $a_n \to A$ para algún $A \in \mathbb{R}$, entonces a es acotada. Se puede elegir una cota $M \geq 1$.

La convergencia proporciona un corte N con $|a_n - A| < 1$ para todo $n \geq N$. En esa cola, $|a_n| \leq |a_n - A| + |A| < 1 + |A|$. Definimos

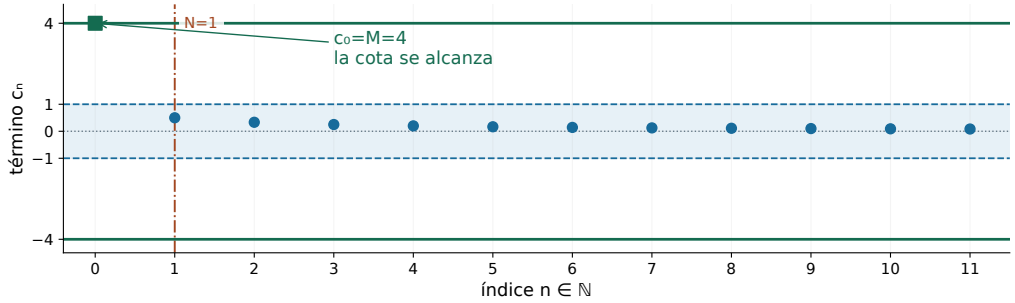
$$S = \{1, |A| + 1\} \cup \{|a_j| : j \in \mathbb{N},\ j < N\}, \qquad M = \max S.$$

El conjunto es finito y no vacío, y $M \geq 1$. Si $n < N$, el número $|a_n|$ está incluido en S y no supera su máximo. Si $n \geq N$, la cota de la cola da $|a_n| < |A| + 1 \leq M$. Los dos casos cubren todo el dominio. Para $N = 0$ el prefijo está vacío, pero $S = \{1, |A|+1\}$ sigue teniendo máximo; no tomamos un máximo vacío.

Para $c_0 = 4$ y $c_n = 1/(n+1)$ desde 1, la coincidencia eventual acredita $c_n \to 0$. El error menor que 1 vale desde $N = 1$ y la construcción produce $M = 4$. El término inicial alcanza la cota: tenemos $|c_n| \leq 4$ globalmente y no podemos sustituirla por $|c_n| < 4$ en todos los índices.

C06-F06 · Una cota global reúne el comienzo y la cola

c₀=4; cₙ=1/(n+1) para n≥1 · A=0 · tolerancia 1 · corte N=1



En la cola: |cₙ|<1. En todo el dominio: |cₙ|≤4.

M = max({1, |A| + 1} ∪ {|aⱼ| : j < N}) · máximo finito no vacío

Si N=0, no hay prefijo; {1,|A|+1} mantiene el máximo definido. Acotación no basta para converger.

Figura 6.6. La tolerancia uno controla una cola. El máximo de esa cota y de un prefijo finito controla todos los términos; la cota global puede ser alcanzada.

La acotación no implica convergencia: $q_n = (-1)^n$ está acotada por 1, pero la separación de sus dos valores refuta todos los candidatos, como probamos en §6.3. Una banda fija limita magnitudes; no obliga a que una cola quepa en cada ventana alrededor de un único centro. Para volver al control de todas las tolerancias podemos expresar la aproximación mediante su error con signo.

> **Identidad de errores.** Para cualquier sucesión real a y cualquier $A \in \mathbb{R}$, se cumple $a_n \to A$ si y sólo si $e_n \to 0$, donde $e_n = a_n - A$.

La demostración es la identidad $|e_n - 0| = |a_n - A|$ en cada índice. Para cualquier tolerancia y cualquier corte, las dos capturas son la misma condición; los mismos umbrales acreditan ambas convergencias. No se ha usado una regla de resta de límites. En $a_n = 3 - 2/(n+1)$, por ejemplo, el error respecto de 3 es $e_n = -2/(n+1)$ y la estimación directa de §6.3 controla exactamente su magnitud.

Una comparación con ese error permite tratar funciones nuevas sin reconstruir siempre una fórmula de corte.

> **Lema de transferencia de error.** Sean $u, v : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Supongamos que $u_n \to 0$ y que existen un número real fijo $C \geq 0$ y un índice $T \in \mathbb{N}$ tales que $|v_n| \leq C|u_n|$ para todo $n \geq T$. Entonces $v_n \to 0$.

Si $C > 0$, recibimos $\varepsilon > 0$ y pedimos a u la tolerancia ε/C. Sea N_u el corte correspondiente y tomemos $N = \max\{T, N_u\}$. Para todo $n \geq N$, $|v_n| \leq C|u_n| < C\frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$. Si $C = 0$, la

comparación da $0 \leq |v_n| \leq 0$ desde T y, por tanto, $v_n = 0$ allí. El propio corte T sirve para cualquier tolerancia; no hay una división por cero ni se multiplica una desigualdad estricta por cero.

Que el coeficiente sea fijo importa. Para $u_n = 1/(n+1)$ y $v_n = 1$ tenemos $|v_n| = (n+1)|u_n|$, pero v no converge a cero: el error 1 no satisface la tolerancia $1/2$ en ningún índice. Una cota eventual fija de esos coeficientes, como la del problema 21, sí permitiría reducirse al lema.

Convergencia del valor absoluto. Si $a_n \to A$, entonces $|a_n| \to |A|$.

Para demostrarlo, definimos $u_n = a_n - A$ y $v_n = |a_n| - |A|$. La identidad de errores da $u_n \to 0$, y la triangular inversa proporciona $|v_n| = \big||a_n| - |A|\big| \leq |a_n - A| = |u_n|$. Aplicamos la transferencia con $C = 1$ y $T = 0$, obteniendo $v_n \to 0$; la identidad de errores lo traduce en $|a_n| \to |A|$. La comparación puede ser una igualdad: la estrictitud viene del control de u, sin necesidad de invocar continuidad del valor absoluto.

Así, $a_n = -1/(n+1) \to 0$ produce $|a_n| \to 0$, y $a_n = 3 - 2/(n+1) \to 3$ produce $|a_n| \to 3$. La conversa general falla porque $|(-1)^n|$ es la constante 1 y la sucesión original no converge. Si el módulo converge a cero, en cambio, la identidad $||a_n| - 0| = |a_n - 0|$ conserva todo el control necesario para el candidato cero. Otro uso del lema es $z_0 = 9$ y $z_n = (-1)^n/(n+1)^3$ para $n \geq 1$. Desde ese corte, $|z_n| = 1/(n+1)^3 \leq 1/(n+1)$. La comparación con el error conocido, con $C = 1$ y $T = 1$, acredita $z_n \to 0$ y permite el testigo $\max\{1, \lfloor 1/\varepsilon \rfloor\}$. El valor inicial forma parte de la función, pero no de esa comparación tardía.

Ejercicios de la sección 6.5.

Ejercicio 19. Acotar con otra tolerancia

Supón $a_n \to A$. Para $r > 0$, sea N_r un umbral con error menor que r. Construye una cota global usando esa cola y el prefijo, incluido $N_r = 0$. Para $a_0 = 20$, $a_n = 0$ si $n \geq 1$, compara las cotas obtenidas con $r = 1, N_r = 1$ y con $r = 30, N_r = 0$. ¿Se minimiza necesariamente la cota eligiendo una tolerancia mayor?

Solución. Definimos el conjunto finito no vacío $S_r = \{1, |A| + r\} \cup \{|a_j| : j < N_r\}$ y $M_r = \max S_r$. Para $n < N_r$ la cota está incluida en el conjunto; para $n \geq N_r$, la triangular da $|a_n| \leq |A| + |a_n - A| < |A| + r \leq M_r$. Por tanto, $|a_n| \leq M_r$ en todos los índices, sin pretender estrictitud en el prefijo. Si $N_r = 0$, el prefijo es vacío, pero S_r sigue conteniendo 1. En el ejemplo $A = 0$: la primera elección produce $M_1 = 20$ y la segunda $M_{30} = 30$. Un corte anterior puede reducir el prefijo que se inspecciona, pero una tolerancia mayor aumenta la cota de cola. No hay una minimización automática por ese cambio.

La figura C06-F06 de §6.5 muestra cómo reunir cola y prefijo. Su cota 4 corresponde a otro ejemplo; las cotas 20 y 30 de esta solución se calculan con sus propios datos.

Ejercicio 20. Qué decide el módulo

Construye una sucesión a cuyo módulo converja a un número positivo pero que no converja a ningún real. Demuestra, por contraste, que $|b_n| \to 0$ sí obliga a $b_n \to 0$. Da un ejemplo de esta segunda situación con signos alternantes.

Solución. Podemos tomar $a_n = 2(-1)^n$. Su módulo es la constante 2, que converge a 2. Los valores 2 y -2 reaparecen después de cada corte, y el argumento de separación del ejercicio 14 refuta todos los candidatos para a. Si $|b_n| \to 0$, en cambio, su captura dice $||b_n| - 0| < \varepsilon$ para toda cola suficientemente tardía. Esa expresión es precisamente $|b_n - 0|$, por lo que el mismo umbral prueba $b_n \to 0$. La sucesión $b_n = (-1)^n/(n+1)$ es un ejemplo: su módulo es $1/(n+1)$, cuya convergencia a cero ya se demostró directamente. El caso de módulo límite cero conserva toda la información de distancia al candidato 0; un módulo límite positivo no determina de qué lado están los términos.

Ejercicio 21. Un coeficiente variable controlado

Sean $u_n \to 0$, $v : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ y $C : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Supón que $|v_n| \leq C_n|u_n|$ desde T y que $0 \leq C_n \leq M$ desde S, con $M \geq 0$ fijo. Demuestra $v_n \to 0$ y separa $M = 0$ de $M > 0$. Explica qué sustituye a la constancia del coeficiente.

Solución. Desde $R = \max\{T, S\}$ tenemos $|v_n| \leq M|u_n|$. Si $M = 0$, esto obliga a $v_n = 0$ para $n \geq R$, y R sirve para cualquier tolerancia positiva. Si $M > 0$, recibimos $\varepsilon > 0$ y escogemos un corte K para u con tolerancia ε/M. Para $n \geq N = \max\{R, K\}$ se cumple $|v_n| \leq M|u_n| < \varepsilon$. Lo decisivo es una cota eventual fija que pueda usarse para elegir la tolerancia auxiliar antes de recorrer la cola. El coeficiente C_n puede variar dentro de esa cota; su mera existencia sin control uniforme no permite el mismo argumento.

Ejercicio 22. Una comparación intermitente

Examina este argumento: «$u_n \to 0$ y, después de cada corte, hay un índice con $|v_n| \leq 3|u_n|$; luego $v_n \to 0$». Construye un contraejemplo y localiza el cuantificador que falta. Formula una reparación suficiente y demuéstrala.

Solución. Tomamos $u_n = 1/(n+1)$ y $v_n = 0$ en índices pares, $v_n = 2$ en impares. La convergencia de u ya está probada. Para cada corte N, el índice $2N$ satisface $|v_{2N}| = 0 \leq 3|u_{2N}|$. Pero con tolerancia 1, el índice $2N + 1$ es un infractor para v después de cualquier corte; no hay convergencia a cero. El argumento necesita que la comparación valga para todos los índices desde un mismo T, no sólo que algún índice la satisfaga después de cada corte. Bajo esa reparación, dado $\varepsilon > 0$, elegimos K para u con tolerancia $\varepsilon/3$ y tomamos $\max\{T, K\}$. Cada índice posterior satisface $|v_n| \leq 3|u_n| < \varepsilon$.

Ejercicio 23. Compartir destino por un error pequeño

Supón $a_n - b_n \to 0$. Demuestra que $a_n \to A$ si y sólo si $b_n \to A$, para un candidato real fijo A. Usa la definición y la triangular; no invoques la regla posterior de suma de límites.

Solución. Si $a_n \to A$, recibimos $\varepsilon > 0$. Elegimos N_1 para $|a_n - A| < \varepsilon/2$ y N_2 para $|a_n - b_n| < \varepsilon/2$. Para todo $n \geq \max\{N_1, N_2\}$, la triangular da $|b_n - A| \leq |b_n - a_n| + |a_n - A| < \varepsilon$. Así converge b al mismo candidato. Si $b_n \to A$, repetimos el control usando $|a_n - A| \leq |a_n - b_n| + |b_n - A|$ y sus dos umbrales con tolerancia $\varepsilon/2$. El módulo de la diferencia es el mismo al invertir su orden; no hay que justificar una resta de límites para usarlo. La hipótesis aporta un control de la distancia entre las sucesiones, no coincidencia eventual entre sus términos.

6.6. Calcular límites sin perder las hipótesis

Las reglas de cálculo deben construir convergencias a partir de otras ya acreditadas. Su prueba consiste en calcular el error de la función resultante y usar los controles disponibles. Cada operación presenta su dificultad: la suma reúne dos errores; el producto introduce un factor variable; el inverso exige además definir la función donde se pretende evaluar.

Suma y factores escalares.

Regla de la suma. Si $a_n \to A$ y $b_n \to B$, entonces $a_n + b_n \to A + B$.

La identidad $(a_n + b_n) - (A + B) = (a_n - A) + (b_n - B)$ separa los dos aportes. Dada $\varepsilon > 0$, pedimos a cada sucesión la tolerancia $\varepsilon/2$ y reunimos sus cortes en $N = \max\{N_a, N_b\}$. Para todo $n \geq N$,

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto acredita la convergencia de la suma. También servirían los presupuestos positivos $\varepsilon/3$ y $2\varepsilon/3$. Primero decidimos qué errores necesitamos, después pedimos sus cortes y finalmente los sincronizamos.

Regla del factor escalar. Si $a_n \to A$ y c es un número real fijo, entonces $ca_n \to cA$.

Si $c = 0$, la nueva sucesión y su candidato son cero, y sirve $N = 0$. Si $c \neq 0$, para una tolerancia $\varepsilon > 0$ pedimos a a un error menor que $\varepsilon/|c|$. En la cola resultante, $|ca_n - cA| = |c||a_n - A| < |c|\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$. El módulo cubre ambos signos del escalar y el caso nulo se trata antes de dividir. Aplicando la regla con -1 y después la suma obtenemos $a_n - b_n \to A - B$. Para escalares fijos α, β, las dos aplicaciones del factor escalar y la suma dan $\alpha a_n + \beta b_n \to \alpha A + \beta B$.

Por ejemplo, con $h_n = 1/(n+1) \to 0$ y $t_n = 3 - 2/(n+1) \to 3$, ya probados directamente, obtenemos $h_n + t_n \to 3$ y $-2h_n \to 0$. Una constante d define una sucesión convergente a d, así que también $2 + 5h_n \to 2$. La hipótesis sobre los sumandos no se recupera desde la conclusión: $(-1)^n + (-(-1)^n) = 0$ converge, aunque ninguno de esos sumandos tenga límite real.

Producto y coeficiente variable.

Regla del producto. Si $a_n \to A$ y $b_n \to B$, entonces $a_n b_n \to AB$.

Sumar y restar $a_n B$ produce la identidad $a_n b_n - AB = a_n(b_n - B) + B(a_n - A)$. El segundo error tiene coeficiente fijo B; el primero lleva el coeficiente variable a_n. Usamos la acotación de §6.5 para fijar $M \geq 1$ con $|a_n| \leq M$ en todo el dominio, antes de recibir la tolerancia. Dada $\varepsilon > 0$, pedimos a b el error $\varepsilon/(2M)$ y a a el error $\varepsilon/[2(|B|+1)]$. Las dos tolerancias son positivas, incluso cuando $B = 0$. Si N es el máximo de sus cortes, para cada $n \geq N$ tenemos $|a_n b_n - AB| \leq M|b_n - B| + |B||a_n - A|$. El primer aporte es estrictamente menor que $\varepsilon/2$. Para el segundo basta la comparación no estricta $|B||a_n - A| \leq |B|\varepsilon/[2(|B|+1)]$, válida también con $B = 0$. En consecuencia, $|a_n b_n - AB| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|B|}{|B|+1}\frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$. Se obtiene el error estricto requerido. El término $|B|+1$ evita dividir por cero, y no afirmamos una desigualdad estricta al multiplicar por el coeficiente nulo. La estrictitud del primer aporte, con $M > 0$, cierra todos los casos. La convergencia de a se usa tanto para acotar ese coeficiente variable como para controlar su propio error.

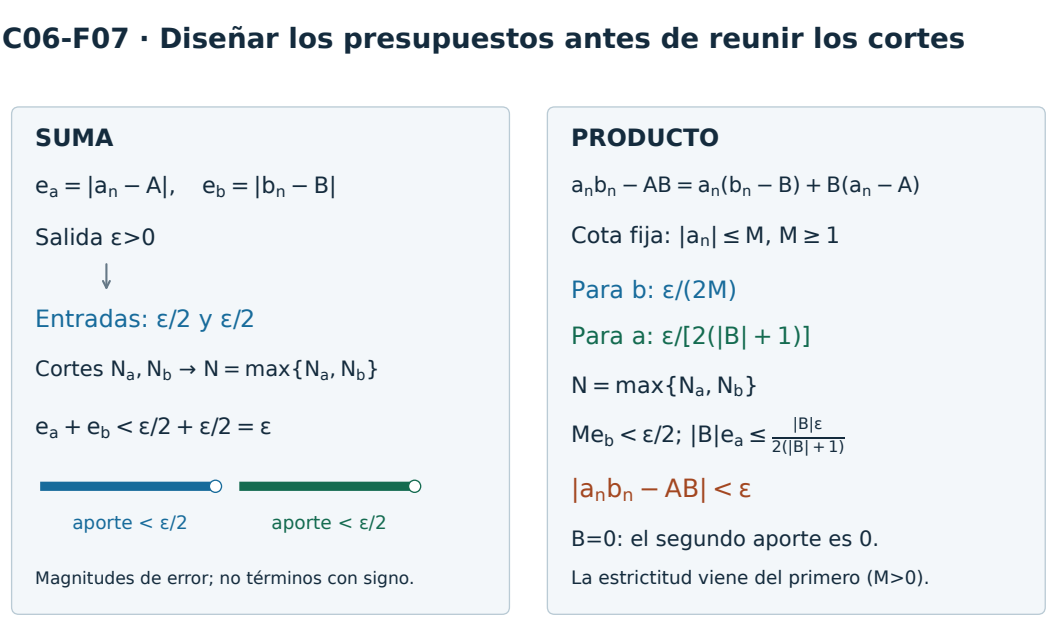


Figura 6.7. El presupuesto de salida determina las tolerancias que pedimos a cada sucesión. El máximo reúne los controles; en el producto la cota fija impide que un coeficiente variable amplifique el error sin control.

La cota M es global, así que no exige un corte adicional. Si sólo dispusiéramos de ella desde algún índice, habría que incluirlo en el máximo. Las convergencias de h y t acreditan

ahora $h_n t_n \to 0$ y $h_n^2 \to 0$, este último incluido en el caso de candidato producto cero. La conclusión no fuerza convergencia de los factores: $(-1)^n \cdot 0 = 0$ y $(-1)^n(-1)^n = 1$ son productos constantes.

Inverso y cociente con dominio declarado. Supongamos $b_n \to B \neq 0$. La tolerancia $|B|/2 > 0$ proporciona un corte T con $|b_n - B| < |B|/2$ desde él. La triangular da $|b_n| \geq |B| - |b_n - B| > \frac{|B|}{2} > 0, \qquad n \geq T$. La cola del denominador está separada de cero por un margen fijo, tanto si $B > 0$ como si $B < 0$. Puede seguir habiendo ceros iniciales. Para definir una sucesión real en todo $\mathbb{N}$ asignamos explícitamente

$$c_n = \begin{cases} 0, & n < T, \\ 1/b_n, & n \geq T. \end{cases}$$

Cada índice tiene ahora un valor real. Los ceros asignados al prefijo no son recíprocos de denominadores nulos: son una elección de extensión.

> **Regla del inverso extendido.** Si $b_n \to B \neq 0$, la sucesión c recién definida converge a $1/B$. Cualquier otra asignación de valores reales en el prefijo, conservando $c_n = 1/b_n$ desde T, tiene el mismo límite.

Desde T, el cálculo es legítimo y produce $\left|c_n - \frac{1}{B}\right| = \frac{|b_n - B|}{|b_n||B|} \leq \frac{2}{|B|^2}|b_n - B|$. El error $u_n = b_n - B$ tiende a cero por la identidad de §6.5. La comparación transfiere ese control al error $v_n = c_n - 1/B$, con constante fija $2/|B|^2$; por tanto $c_n \to 1/B$. Para hacer visible el corte, recibida $\varepsilon > 0$ pedimos a b la tolerancia $\varepsilon|B|^2/2$ y reunimos su umbral con T. La estimación da entonces el error menor que ε para cada índice posterior.

Otra asignación real en el prefijo coincide eventualmente con c y tiene el mismo límite por §6.4. Si todos los b_n son no nulos, la sucesión global $1/b_n$ también coincide con esa extensión desde T y converge a $1/B$. Esa condición global es la que permite escribir el recíproco en todos los índices sin completar antes la fórmula.

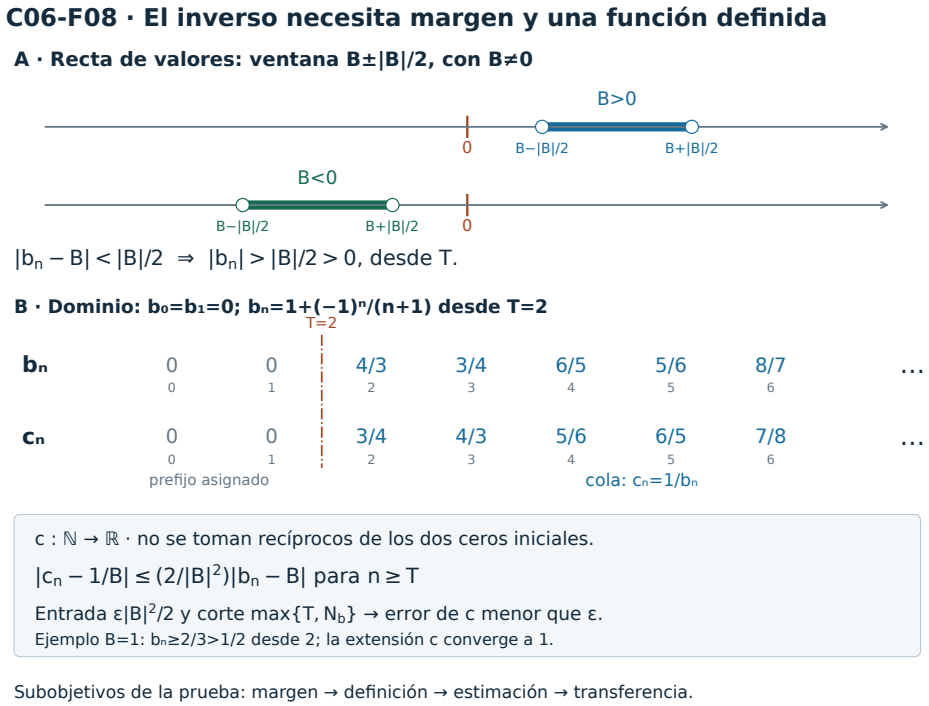


Figura 6.8. El límite no nulo separa de cero una cola del denominador. Los ceros iniciales requieren declarar otra sucesión extendida; sólo después tiene sentido estimar su inverso tardío.

Para comprobar el ejemplo de la figura, usemos $s_n = (-1)^n/(n+1) \to 0$. Las reglas lineales dan $1 + s_n \to 1$. Definimos $b_0 = b_1 = 0$ y $b_n = 1 + s_n$ para $n \geq 2$; la coincidencia eventual conserva el límite 1. Desde 2, $|s_n| \leq 1/3$ y $b_n \geq 2/3 > 1/2$, de modo que podemos usar $T = 2$. La extensión $c_0 = c_1 = 0$, $c_n = 1/b_n$ para $n \geq 2$, converge a 1. Cambiar sus dos valores iniciales cambia la función cuando alguno difiere, y conserva su límite.

Con un límite negativo también funciona la regla. La sucesión $d_n = -2 + 1/(n+1)$ converge a -2, y cada término es menor o igual que -1; ninguno se anula. Así, el recíproco global converge a $-1/2$. Sean ahora $a_n \to A$ y $b_n \to B \neq 0$, y sea c la extensión del inverso. La función $z_n = a_n c_n$, definida en todo $\mathbb{N}$, converge por el producto a A/B. Desde T, sus términos son a_n/b_n; antes de T esta construcción asigna cero. Cualquier otra extensión real del mismo cociente tardío tiene el mismo límite por coincidencia eventual.

Si el denominador nunca es cero, el cociente global tiene límite A/B. Si sólo se sabe no anulación desde T, también podemos usar la sucesión reindexada $y_k = a_{T+k}/b_{T+k}$, con dominio $\mathbb{N}$: es una cola reindexada de z, y §6.4 acredita $y_k \to A/B$. Su restricción a los índices originales desde T tiene otro dominio cuando $T > 0$.

En el ejemplo de los dos ceros iniciales, tomando $a_n = 2 + 1/(n+1) \to 2$, el cociente extendido con prefijo cero converge a 2. Cuando $B = 0$, en cambio, $1/B$ y A/B no son candidatos reales y la regla no se aplica. Esto no decide cada cociente particular. Para $h_n = 1/(n+1) > 0$, las identidades $h_n/h_n = 1$ y $h_n^2/h_n = h_n$ acreditan límites 1 y 0, respectivamente, aunque el denominador tienda a cero. Debemos comprobar la función y las hipótesis concretas antes de usar una regla.

Ejercicios de la sección 6.6.

Ejercicio 24. Un reparto a medida

Sean $a_n \to A$, $b_n \to B$, $c, d \in \mathbb{R}$ y $0 < \theta < 1$. Construye una prueba de $ca_n + db_n \to cA + dB$ que reserve $\theta\varepsilon$ al primer error y $(1-\theta)\varepsilon$ al segundo. Trata los coeficientes nulos y da un ejemplo de reparto no simétrico.

Solución. Si $c, d \neq 0$, usamos las tolerancias auxiliares $\theta\varepsilon/|c|$ y $(1-\theta)\varepsilon/|d|$. Tras sincronizar sus umbrales, la identidad del error y la triangular dan $|c(a_n - A) + d(b_n - B)| \leq |c||a_n - A| + |d||b_n - B| < \theta\varepsilon + (1-\theta)\varepsilon = \varepsilon$. Si $c = 0$ y $d \neq 0$, sólo se requiere la segunda captura; su aporte es menor que $(1-\theta)\varepsilon < \varepsilon$. El caso $d = 0, c \neq 0$ se resuelve con la primera. Si ambos son cero, el error es cero desde el índice 0. El valor $\theta = 1/3$ reserva un tercio al primer aporte y dos tercios al segundo. Las divisiones se realizan únicamente cuando el coeficiente correspondiente es no nulo.

La figura C06-F07 de §6.6 muestra la elección de presupuestos antes de sincronizar. Aquí las fracciones son θ y $1-\theta$, con los coeficientes c,d; no tienen que ser las dos mitades del panel de suma.

Ejercicio 25. Una cantidad finita de operaciones

Para $m \geq 1$, sean $a^{(1)}, \ldots, a^{(m)}$ sucesiones con $a_n^{(j)} \to A_j$. Demuestra que la suma de sus términos converge a $\sum_{j=1}^{m} A_j$ y que su producto converge a $\prod_{j=1}^{m} A_j$. Usa inducción y las reglas binarias demostradas. Describe también el caso de familia vacía con las convenciones usuales.

Solución. Para $m = 1$ ambas afirmaciones son las hipótesis. Si valen para una familia de tamaño m, la sucesión de sumas parciales tiene límite $S_m = \sum_{j=1}^{m} A_j$. La regla binaria de suma, aplicada a esa sucesión y a $a^{(m+1)}$, produce límite $S_m + A_{m+1}$. Del mismo modo, la sucesión de productos parciales tiene límite $P_m = \prod_{j=1}^{m} A_j$ y la regla binaria del producto da $P_m A_{m+1}$. Cada paso usa convergencias ya acreditadas, incluso si algún $A_j = 0$. Todas las operaciones son entre reales y definen sucesiones en $\mathbb{N}$. Para $m = 0$, las convenciones de suma vacía 0 y producto vacío 1 dan sucesiones constantes con esos límites. La inducción sólo autoriza familias finitas; no demuestra una regla de suma o producto infinito.

Ejercicio 26. Leer un producto al revés

Se afirma: «Si $a_n b_n$ converge, ambos factores convergen». Refuta la afirmación con un producto idénticamente cero y con un producto idénticamente no nulo. En el segundo caso comprueba que ninguno de los factores tiene límite real.

Solución. Para el producto cero tomamos $a_n = (-1)^n$ y $b_n = 0$. El producto es la constante cero, pero a toma 1 y -1 arbitrariamente tarde y no tiene límite real, por el argumento de separación. Para el producto no nulo elegimos $a_n = b_n = (-1)^n$. Ambos factores carecen de límite real por la misma separación, mientras que $a_n b_n = 1$ para todo índice y, por tanto, el producto converge a 1. La regla del producto parte de la convergencia de cada factor para controlar dos errores; su conclusión no contiene información suficiente para recuperar esos controles. La convergencia del producto puede ocultar oscilaciones que se compensan entre los factores.

Ejercicio 27. Un factor pequeño y otro acotado

Supón $u_n \to 0$ y $|p_n| \leq M$ desde T, con $M \geq 0$ fijo. Prueba $u_n p_n \to 0$ sin suponer convergencia de p. Da un ejemplo en que esa última convergencia falle.

Solución. La identidad $|u_n p_n| = |u_n||p_n|$ da $|u_n p_n| \leq M|u_n|$ desde T. Si $M = 0$, el producto es cero en esa cola y converge a cero. Si $M > 0$, para $\varepsilon > 0$ escogemos un corte K de u con tolerancia ε/M; el umbral $\max\{T, K\}$ da $|u_n p_n| < \varepsilon$ en todos los índices posteriores. Es el mecanismo de transferencia de §6.5, no la regla binaria del producto con dos límites. Por ejemplo, $u_n = 1/(n+1)$ y $p_n = (-1)^n$: el segundo factor no tiene límite real, pero está acotado por 1 y el producto converge a cero. La cota eventual sustituye aquí el control de un segundo límite.

Ejercicio 28. El inverso como conjunto de obligaciones

Supón $b_n \to B \neq 0$ y $|b_n| > |B|/2$ desde T. Para cualquier prefijo real $x_0, \ldots, x_{T-1}$, define $c_n^x = x_n$ si $n < T$ y $c_n^x = 1/b_n$ si $n \geq T$. Organiza la prueba de $c_n^x \to 1/B$ en cuatro obligaciones: margen, definición, estimación y transferencia. Compara dos prefijos distintos.

Solución. El margen garantiza que $b_n \neq 0$ para $n \geq T$; $B \neq 0$ hace legítimo $1/B$. Por tanto, cada elección de prefijo define una función $c^x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, incluso si b tiene ceros anteriores. En la cola obtenemos $\left|c_n^x - \frac{1}{B}\right| = \frac{|b_n - B|}{|b_n||B|} \leq \frac{2}{|B|^2}|b_n - B|$. El error $b_n - B$ tiende a cero por la identidad de §6.5. Su comparación con la constante positiva $2/|B|^2$ permite transferir la convergencia al error de c^x, sincronizando con T. Así $c_n^x \to 1/B$. Este orden importa: estimar un inverso sin definirlo previamente dejaría abierta una obligación de dominio. Dos prefijos que difieran en alguna posición producen funciones distintas, pero las estimaciones tardías y el límite son los mismos. Si $T = 0$, no hay dos prefijos distintos.

La figura C06-F08 de §6.6 separa margen, definición, estimación y transferencia. La elección del prefijo forma parte de definir c^x; ningún recíproco de cero queda implícito.

Ejercicio 29. Un denominador negativo con ceros

Construye una sucesión b con $b_0 = b_1 = 0$, límite -2 y términos no nulos desde 2. Toma $a_n = 3 + 1/(n+1)$. Define dos sucesiones distintas que extiendan el cociente a_n/b_n desde 2 y demuestra que ambas convergen a $-3/2$. Comprueba un margen explícito para el denominador.

Solución. Elegimos $b_n = -2 + 1/(n+1)$ para $n \geq 2$, además de los dos ceros prescritos. La sucesión dada por esa fórmula en todos los índices converge a -2 por las reglas lineales, y la modificación de dos términos conserva el límite. Para $n \geq 2$, $b_n \leq -5/3 < 0$, de modo que $|b_n| \geq 5/3 > 1 = |-2|/2$. Definimos $q_0 = q_1 = 0$, $r_0 = 5, r_1 = -7$ y $q_n = r_n = a_n/b_n$ para $n \geq 2$. Ambos objetos son sucesiones reales definidas en todo $\mathbb{N}$ y difieren en el prefijo. Como $a_n \to 3$ y $b_n \to -2 \neq 0$, el cociente extendido con prefijo cero converge a $-3/2$. La coincidencia eventual transmite ese límite a r. El cociente sin extensión no está definido en los índices 0 y 1.

En la figura C06-F08 de §6.6, la ventana negativa muestra el mismo mecanismo de separación de cero. La fila numérica B=1 ilustra otro denominador; aquí B=−2, el margen elegido es 1 y el límite del cociente extendido es $-3/2$.

Ejercicio 30. Tres cálculos que necesitan una auditoría

Examina las propuestas siguientes: (i) $(3n+2)/(2n+5)$ tiene límite «$\lim(3n+2)/\lim(2n+5)$»; (ii) con $h_n = 1/(n+1)$, h_n/h_n tiene límite «0/0»; (iii) $(-1)^n/h_n$ tiene límite «un número dividido por 0». Localiza los usos ilegítimos, resuelve los casos (i) y (ii) mediante identidades válidas y decide si (iii) tiene algún límite real sin usar límites infinitos.

Solución. En (i) las sucesiones lineales no tienen límites reales finitos: son no acotadas, mientras que toda sucesión convergente es acotada. La regla del cociente no se aplica a esos factores. Sin embargo, como $h_n > 0$, la identidad $(3n+2)/(2n+5) = (3-h_n)/(2+3h_n)$ permite usar límites 3 y 2; el resultado es $3/2$, con denominador siempre positivo. En (ii), $h_n \neq 0$ en todos los índices y el cociente es exactamente 1, por lo que converge a 1. La expresión 0/0 no es un número real ni el resultado de la regla. En (iii), el numerador no converge y el límite cero del denominador tampoco habilita la regla. El cociente está definido, pero su módulo es $n+1$, que no está acotado: para cualquier cota real positiva hay un natural mayor, por C03. Así no tiene límite real finito. No se le asigna aquí un límite infinito.

Ejercicio 31. Construir un cociente y revisar su margen

Sean $a_n \to A$ y $b_n \to B$. Determina cuándo puedes proponer coeficientes reales r, s, t, u para los que $D = tA + uB \neq 0$ y estudia la expresión $(ra_n + sb_n)/(ta_n + ub_n)$. Justifica un margen eventual, define un cociente real en todo $\mathbb{N}$ aunque haya ceros iniciales y determina su límite. Da dos ejemplos con $D = 0$ que impidan asignar una conclusión única por esa fórmula.

Solución. Siempre que $(A, B) \neq (0, 0)$ puede elegirse $(t, u) = (1, 0)$ si $A \neq 0$, o $(0, 1)$ si sólo $B \neq 0$; por ejemplo, tomamos $(r, s) = (1, 1)$. Si $A = B = 0$, ninguna elección lineal del denominador da $D \neq 0$, limitación que debe declararse. Para cualquier elección válida, las reglas lineales dan numerador $P = rA + sB$ y denominador $D \neq 0$. La tolerancia $|D|/2$ proporciona un corte T con $|ta_n + ub_n| > |D|/2$. Asignando cero al cociente antes de T y la fórmula desde T definimos una sucesión real cuyo límite es P/D. Si $D = 0$, la regla deja de decidir: con $a_n = b_n = h_n$, la expresión a_n/b_n es 1; con $a_n = h_n$, $b_n = h_n^2$, es $n+1$ y no tiene límite real por no acotación. En ambos ejemplos $A = B = 0$ y los denominadores son no nulos en todos los índices.

6.7. Orden y captura entre dos sucesiones

Una desigualdad puede relacionar límites ya existentes o puede ayudar a construir una convergencia que todavía no conocemos. Las dos tareas requieren pruebas distintas. Empecemos suponiendo que ambas sucesiones convergen.

> **Paso al límite en una desigualdad.** Sean $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tales que $a_n \to A$ y $b_n \to B$. Si existe $T \in \mathbb{N}$ con $a_n \leq b_n$ para todo $n \geq T$, entonces $A \leq B$.

Si $A > B$, ponemos $d = A - B > 0$ y pedimos tolerancia $d/3$ a las dos convergencias, con cortes N_a, N_b. Tomamos $N = \max\{T, N_a, N_b\}$. Para cualquier $n \geq N$ valen la comparación y las dos capturas, pero éstas dan $a_n > A - \frac{d}{3} = B + \frac{2d}{3} > B + \frac{d}{3} > b_n$. En el propio índice N tendríamos $a_N > b_N$ y $a_N \leq b_N$, contradicción. Luego $A \leq B$. El máximo reúne también el corte de comparación, pues el orden puede empezar a valer más tarde que alguna captura.

Si $x_n \to X$ y $x_n \geq 0$ eventualmente, comparando con la constante cero concluimos $X \geq 0$. Si $x_n \leq m$ eventualmente, la comparación con la constante m da $X \leq m$. Estas consecuencias presuponen convergencia. La positividad sola no la acredita: $x_n = 2 + (-1)^n$ toma 3 en los pares y 1 en los impares. Para cualquier candidato X, la triangular da $2 \leq |3 - X| + |1 - X|$, de modo que uno de los errores es al menos 1. Ese valor aparece después de cada corte en $2N$ o en $2N+1$ y la tolerancia 1 refuta a X.

Para $x_n = 2 + 1/(n+1) \to 2$, las cotas $2 \le x_n \le 3$ transmiten $2 \le X \le 3$ a su límite. Son compatibles con el candidato ya acreditado, pero por sí solas no lo identifican. Tampoco un orden estricto de términos garantiza límites distintos. Las sucesiones $a_n = 0$ y $b_n = 1/(n+1)$ cumplen $a_n < b_n$ en todo índice y convergen ambas a cero.

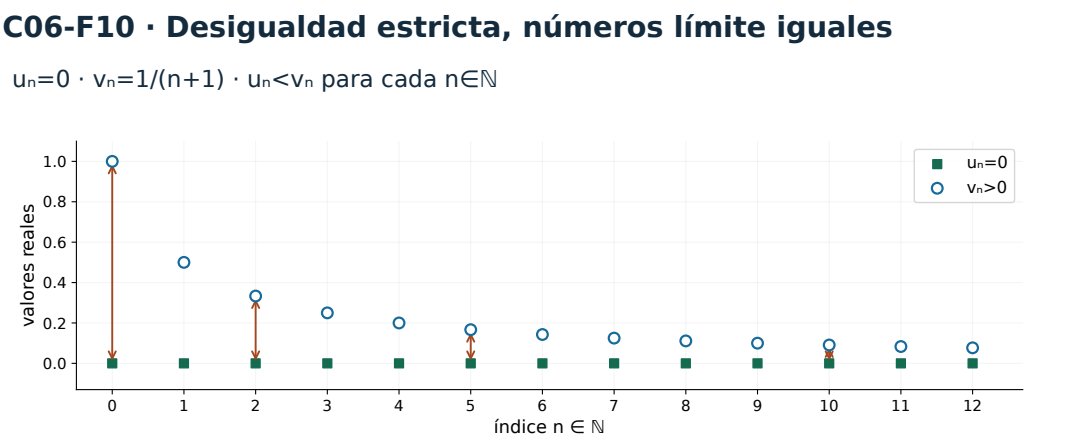


Figura 6.9. Cada diferencia es positiva, pero no existe aquí un margen positivo uniforme. Las sucesiones son distintas y sus límites son el mismo número.

La separación $1/(n+1)$ es positiva en cada índice y puede quedar por debajo de cualquier margen positivo. Si se añade un margen fijo $\delta > 0$ con $a_n + \delta \le b_n$ eventualmente, las reglas lineales dan $a_n + \delta \to A + \delta$ y el orden da $A + \delta \le B$; ahora sí se obtiene $A < B$. Para producir la convergencia de una sucesión intermedia usaremos dos fronteras con destino común.

> **Teorema del sándwich.** Sean $u, a, v : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Supongamos que $u_n \to L$ y $v_n \to L$ para un mismo $L \in \mathbb{R}$, y que existe $T \in \mathbb{N}$ tal que $u_n \le a_n \le v_n$ para todo $n \ge T$. Entonces $a_n \to L$.

La convergencia de a no es una hipótesis. Dada $\varepsilon > 0$, elegimos cortes N_u, N_v para los errores de las dos fronteras con esa misma tolerancia y ponemos $N = \max\{T, N_u, N_v\}$. Para todo $n \ge N$, $L - \varepsilon < u_n \le a_n \le v_n < L + \varepsilon$. La cadena equivale a $|a_n - L| < \varepsilon$ y verifica directamente la definición. No pasamos al límite atribuyendo de antemano un destino a a. Las desigualdades interiores pueden ser igualdades; la estrictitud procede de las capturas exteriores. Si las comparaciones empiezan en T_1 y T_2, el corte es $\max\{T_1, T_2, N_u, N_v\}$. Por ejemplo, con $T_1 = 3$, $T_2 = 8$, $N_u = 5$ y $N_v = 6$ sirve 8.

La aplicación de la figura toma $u_n = -1/(n+1)$, $v_n = 1/(n+1)$ y $w_n = (-1)^n/(n+1)^2$. Las fronteras convergen a cero por la primera prueba y el escalar -1. Como $n + 1 \ge 1$, tenemos $|w_n| = 1/(n+1)^2 \le 1/(n+1)$, por lo que $u_n \le w_n \le v_n$. El sándwich acredita $w_n \to 0$. En el índice 0, $w_0 = v_0 = 1$; desde 1, su módulo es estrictamente menor que el de las fronteras. La coincidencia inicial está permitida y no se requiere monotonía.

Para una tolerancia $\varepsilon > 0$, ambas fronteras comparten el corte $N = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor$, y las comparaciones valen desde cero. Así, $-\varepsilon < -\frac{1}{n+1} \le w_n \le \frac{1}{n+1} < \varepsilon, \quad n \ge N$, hace visible el testigo resultante. Los puntos dibujados ilustran esa captura; la estimación es la que cubre la cola entera. Las hipótesis no se sustituyen por otras más débiles. Aunque $-1 \le (-1)^n \le 1$, esas fronteras constantes tienen destinos distintos y la intermedia no converge. Si las dos fronteras son cero y r_n vale cero en los pares y uno en los impares, la

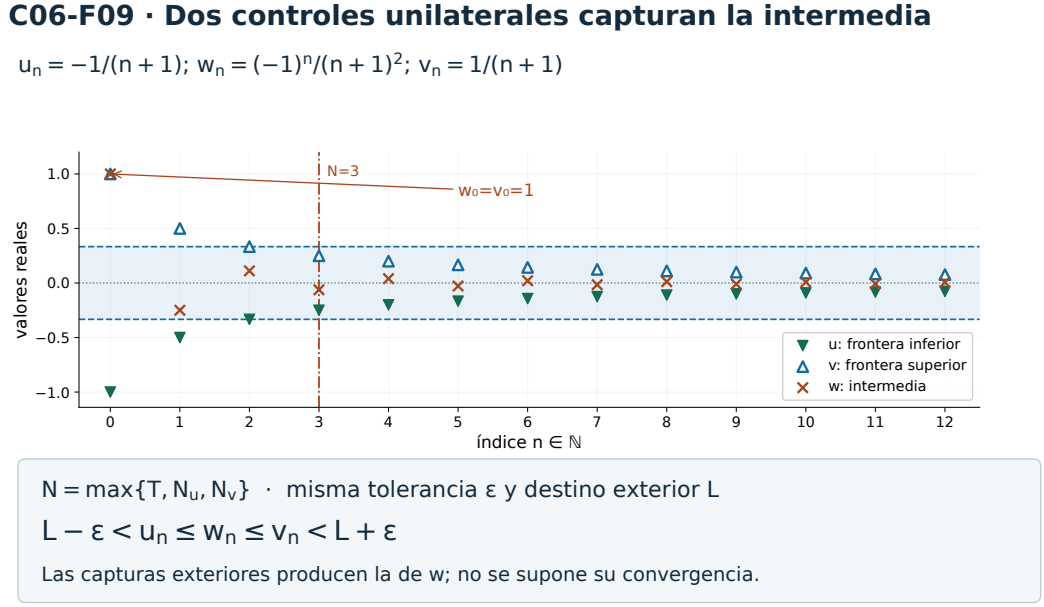


Figura 6.10. Las fronteras $-1/(n+1)$ y $1/(n+1)$ convergen a cero. La sucesión intermedia $(-1)^{n/(n+1)}2$ queda entre ellas y, al sincronizar los controles, dentro de cada ventana prescrita.

comparación $0 \le r_n \le 0$ sólo vale arbitrariamente tarde en los pares, sin valer en una cola completa. Para cualquier candidato A, la desigualdad $1 \le |A| + |1 - A|$ separa alguno de los dos valores al menos $1/2$; sus ocurrencias pares o impares refutan ese candidato tras cada corte. Ni las fronteras convergentes por separado ni las comparaciones intermitentes proporcionan las hipótesis que faltan.

Ejercicios de la sección 6.7.

Ejercicio 32. Llegar a la frontera de un intervalo

Sean $p < q$ reales, $a_n \to A$ y $p \le a_n \le q$ eventualmente. Prueba $A \in [p, q]$. Decide si la conclusión puede sustituirse por $A \in (p, q)$ cuando todos los términos tardíos están en ese intervalo abierto. Construye un ejemplo que llegue a cada frontera.

Solución. Las sucesiones constantes p y q convergen a esos números. El paso al límite en las dos desigualdades eventuales da $p \le A \le q$. Si los términos están en (p, q), también satisfacen las comparaciones no estrictas y sólo se conserva, en general, el intervalo cerrado. Para la frontera inferior elegimos $a_n = p + (q-p)/(n+2)$; para la superior, $b_n = q - (q-p)/(n+2)$. Como $0 < 1/(n+2) \le 1/2 < 1$, ambos términos quedan estrictamente entre p y q en todos los índices. Las reglas lineales y la prueba de esa familia racional dan límites p y q, respectivamente. La positividad de una distancia en cada índice no proporciona un margen fijo que excluya un extremo del límite.

Ejercicio 33. Orden estricto y margen uniforme

Construye a, b con $a_n < b_n$ en todos los índices y límite común 2. Construye también c, d con límites distintos y $c_n + \delta \le d_n$ para alguna constante $\delta > 0$. Demuestra en general que ese margen, junto con la convergencia de ambos factores, obliga a que el primer límite sea estrictamente menor que el segundo.

Solución. Tomamos $a_n = 2 - 1/(n+2)$ y $b_n = 2 + 1/(n+2)$; la desigualdad es estricta en todos los índices y los dos límites son 2. Para el segundo ejemplo podemos usar las constantes $c_n = 0, d_n = 3$ con $\delta = 1$. En general, si $c_n \to C$, $d_n \to D$ y $c_n + \delta \leq d_n$ eventualmente, las reglas lineales dan $c_n + \delta \to C + \delta$. El orden eventual pasa a los límites, de modo que $C + \delta \leq D$. Como $\delta > 0$, obtenemos $C < D$. Una desigualdad estricta sin escala positiva fija puede estrecharse hasta la igualdad; el margen uniforme impide ese estrechamiento.

La figura C06-F10 de §6.7 ilustra la pérdida de estrictitud entre los límites con otro par de sucesiones que converge a 0. En nuestro primer ejemplo, los dos límites son 2; la diferencia sigue siendo positiva y no posee un margen uniforme.

Ejercicio 34. Dos presupuestos de error exteriores

Sean $r_n, s_n \geq 0$ con $r_n \to 0$, $s_n \to 0$, y supón $L - r_n \leq a_n$ desde T_1 y $a_n \leq L + s_n$ desde T_2. Demuestra directamente $a_n \to L$ sin presuponer su convergencia ni exigir que las dos cotas de error coincidan.

Solución. Dada $\varepsilon > 0$, elegimos cortes N_r, N_s para que $r_n < \varepsilon$ y $s_n < \varepsilon$ en las respectivas colas; el valor absoluto de cada término coincide con él por no negatividad. Tomamos $N = \max\{T_1, T_2, N_r, N_s\}$. Para todo $n \geq N$ tenemos $L - \varepsilon < L - r_n \leq a_n \leq L + s_n < L + \varepsilon$. Las dos desigualdades exteriores son estrictas por las capturas de r y s, aunque las comparaciones interiores no lo sean. La cadena equivale a $|a_n - L| < \varepsilon$ y establece la convergencia buscada desde la definición. Las cotas pueden decrecer de modos distintos, oscilar o alcanzar cero; únicamente importa que cada una permita responder a la misma tolerancia.

La figura C06-F09 de §6.7 permite seguir los dos controles exteriores. Aquí r_n y s_n pueden ser distintos y se reúnen cuatro cortes; no se trasladan sin cambio el radio ni el corte numérico del ejemplo dibujado.

Ejercicio 35. Una frontera conocida sólo por su módulo

Se propone: «$u_n \leq a_n \leq v_n$ eventualmente, $|u_n| \to 1$ y $v_n \to 1$; por el sándwich, $a_n \to 1$». Refuta la propuesta con un ejemplo en que u no tenga límite real. Formula una reparación sobre la frontera inferior y justifica el resultado.

Solución. Ponemos $u_n = a_n = (-1)^n$ y $v_n = 1$. Las comparaciones valen en todos los índices, $|u_n| = 1$ converge a 1 y v es constante. Sin embargo, a y u no tienen límite real, pues sus valores 1 y -1 reaparecen arbitrariamente tarde. La hipótesis sobre el módulo no determina el destino de la frontera inferior. Una reparación es exigir $u_n \to 1$, manteniendo $v_n \to 1$ y las comparaciones eventuales: ahora el sándwich sí produce $a_n \to 1$. Bajo la hipótesis original $|u_n| \to 1$, también basta añadir $u_n \geq 0$ eventualmente: en esa cola $u_n = |u_n|$, y la coincidencia eventual da $u_n \to 1$. Las dos reparaciones son equivalentes en este contexto. En efecto, si $u_n \to 1$, la tolerancia 1 da $|u_n - 1| < 1$ desde algún corte y, por tanto, $u_n > 0$ en esa cola.

Ejercicio 36. Una caracterización por fronteras

Prueba que $a_n \to L$ equivale a la existencia de sucesiones u, v tales que $u_n \leq a_n \leq v_n$ eventualmente y $u_n, v_n \to L$. En la dirección que construye fronteras desde a, procura que éstas tengan fórmulas distintas y justifica la captura sin importar resultados posteriores.

Solución. Si existen esas fronteras, el sándwich probado en §6.7 da $a_n \to L$ sin suponer la conclusión. Para la dirección inversa, partimos de $a_n \to L$ y construimos $u_n = a_n - 1/(n+1)$ y $v_n = a_n + 1/(n+1)$. Son funciones reales en $\mathbb{N}$ y satisfacen $u_n < a_n < v_n$ en todos los índices, además de $u_n \neq v_n$. La convergencia de $1/(n+1)$ a cero y las reglas lineales acreditan $u_n, v_n \to L$. No se usa el sándwich para probar aquí la convergencia de a, que ya es una hipótesis de esta dirección. Las dos implicaciones tienen puntos de partida distintos; confundirlos produciría una circularidad.

6.8. Elegir un argumento y comprobar su alcance

Una fórmula puede sugerir un candidato, pero los datos disponibles deciden cómo probarlo. La definición permite buscar un corte desde el error; la transferencia aprovecha otro error ya controlado; las reglas reúnen convergencias acreditadas; el sándwich construye una captura desde fronteras con destino común. En todos los casos hay que identificar la función que se está evaluando y mantener las hipótesis hasta la conclusión. Consideremos $f_n = (2n + 1)/(n + 2)$, definida en todo $\mathbb{N}$ porque $n + 2 > 0$. La identidad $f_n = 2 - 3/(n + 2)$ sugiere el candidato 2. Dada $\varepsilon > 0$, elegimos $N = \lfloor 3/\varepsilon \rfloor$. Para $n \geq N$, $n + 2 \geq N + 2 > 3/\varepsilon$, por lo que $|f_n - 2| = 3/(n + 2) < \varepsilon$. Con $\varepsilon = 1/2$ el corte es 6 y toda esa cola tiene error a lo sumo $3/8 < 1/2$.

La misma convergencia admite un argumento por reglas. Con $h_n = 1/(n + 1) \to 0$, $f_n = \frac{2-h_n}{1+h_n}$. Multiplicar numerador y denominador por $n + 1 > 0$ comprueba la identidad. Las reglas lineales acreditan límites 2 y 1 en las nuevas sucesiones, y $1 + h_n > 0$ en todos los índices. El cociente global converge a 2. La normalización aporta las convergencias finitas que faltarían si intentáramos dividir supuestos límites reales de $2n+1$ y $n+2$: esas sucesiones son no acotadas y no pueden tenerlos.

El argumento directo ofrece un corte concreto; las reglas evitan reconstruirlo cuando sus hipótesis ya están disponibles. La unicidad impide que dos pruebas válidas para la misma función produzcan candidatos diferentes. Podemos también refutar 3 sin negar la convergencia a 2: como $f_n < 2$, tenemos $|f_n - 3| = 1 + 3/(n + 2) > 1$ en todo índice. La tolerancia 1 y el infractor $n = N$ refutan ese candidato para cualquier corte.

Otro problema muestra por qué hace falta elegir la herramienta según el control que poseemos. Supongamos sólo $|p_n| \leq 5$ desde algún T y definamos $x_n = 3 + p_n/(n + 1)$. No se conoce un límite de p, pero desde T se cumple $|x_n - 3| \leq \frac{5}{n+1}$. La transferencia, con $C = 5$ y el error conocido $h_n \to 0$, acredita $x_n \to 3$. Para $\varepsilon > 0$ sirve el corte $\max\{T, \lfloor 5/\varepsilon \rfloor\}$. También podemos escribir

$3 - \frac{5}{n+1} \leq x_n \leq 3 + \frac{5}{n+1}$, $\qquad n \geq T$. Las fronteras convergen a 3 por las reglas lineales y el sándwich da la misma conclusión, sin presuponer convergencia de x. Si elegimos $p_n = (-1)^n$, esa función no tiene límite real y satisface la cota; ambos argumentos siguen siendo válidos. La regla binaria del producto no podría aplicarse a un supuesto límite de p, mientras que el control de magnitud basta para estas pruebas.

Las obligaciones principales quedan así diferenciadas:

Objetivo	Control que debe producir la prueba
Acreditar $a_n \to A$	Para cada $\varepsilon > 0$, una cola completa con error menor que ε
Refutar A	Una tolerancia fija y un infractor después de cada corte
Excluir todo límite real	Refutar cada $A \in \mathbb{R}$, permitiendo que la tolerancia dependa de él
Acotar la sucesión	Una cota fija para todos los índices, incluido el prefijo
Usar un cociente	Denominadores legítimos y una función de dominio declarado; para la regla, límite denominador no nulo
Aplicar el sándwich	Fronteras con el mismo límite y comparaciones válidas en una cola completa

La acotación no construye un límite; la unicidad tampoco asegura existencia. El orden entre términos transmite en general una desigualdad no estricta entre límites, y refutar un candidato deja abiertos los demás. Cada conclusión debe conservar el alcance del argumento

que la produce. Cuando una regla no se aplica, podemos volver a la identidad del error y buscar directamente una estimación que responda a la tolerancia recibida.

Ejercicios de la sección 6.8.

Ejercicio 37. Dos recorridos para una expresión racional

Para $f_n = (5n+2)/(2n+3)$, demuestra su convergencia por una estimación directa del error y por normalización con $h_n = 1/(n+1)$. Determina el candidato, construye un testigo suficiente y revisa los denominadores en todo $\mathbb{N}$.

Solución. El candidato es $5/2$. Como $2n+3 \geq 3 > 0$, la sucesión está definida y la identidad $f_n - 5/2 = -11/[2(2n+3)]$ da $|f_n - 5/2| = 11/(4n+6)$. Para $\varepsilon > 0$, tomamos $N = \lfloor 11/(4\varepsilon) \rfloor + 1$. Si $n \geq N$, $4n+6 > 11/\varepsilon$ y el error es menor que ε. El recorrido por reglas usa la identidad $f_n = (5-3h_n)/(2+h_n)$. Numerador y denominador convergen a 5 y 2; el segundo es positivo para todo índice, así que el cociente converge a $5/2$. La normalización transforma factores originalmente no acotados en sucesiones con límites finitos. La prueba directa aporta un corte explícito suficiente; la regla del cociente evita reconstruirlo, pero su validez depende de esas convergencias y del límite denominador no nulo.

Ejercicio 38. Una perturbación que conserva el destino

Sea $a_n \to A$. Diseña una sucesión p sin límite real pero eventualmente acotada, y una sucesión b con prefijo arbitrario que desde un corte T satisfaga $b_n = a_n + p_n/(n+1)$. Demuestra $b_n \to A$ e identifica qué partes del argumento no necesitan un límite de p.

Solución. Elegimos $p_n = 3(-1)^n$, que está acotada por 3 y no tiene límite real por la separación persistente de 3 y -3. La sucesión $h_n = 1/(n+1)$ converge a cero; el ejercicio 27, o la transferencia de errores, da $p_n h_n \to 0$ sin suponer un límite de p. Definimos primero $c_n = a_n + p_n h_n$ en todos los índices. La regla de suma produce $c_n \to A + 0 = A$. Finalmente asignamos cualquier prefijo real a b antes de T y ponemos $b_n = c_n$ desde T. La coincidencia eventual conserva la convergencia. Los tres controles usados son la cota del factor variable, la convergencia del factor pequeño y la transferencia de un prefijo finito; ninguno exige conocer un destino para p.

Ejercicio 39. Qué puede recuperarse de las operaciones

Para sucesiones reales a, b, estudia estas afirmaciones, con cocientes globalmente definidos cuando se mencionan: (i) si $a_n + b_n \to S$ y $a_n \to A$, entonces $b_n \to S - A$; (ii) si $a_n b_n \to P$ y $a_n \to A \neq 0$, entonces $b_n \to P/A$; (iii) si $a_n/b_n \to Q$ y $b_n \to B$, entonces $a_n \to QB$, incluso si $B = 0$; (iv) la convergencia simultánea de la suma y el producto obliga a converger a ambos factores; (v) en (ii) basta $A = 0$. Justifica las inferencias o construye contraejemplos.

Solución. En (i), $b_n = (a_n + b_n) - a_n$; las reglas lineales dan $b_n \to S - A$. En (ii), la convergencia de a a un número no nulo garantiza un corte desde el que $a_n \neq 0$. El cociente tardío $(a_n b_n)/a_n$ converge a P/A al extenderlo, y coincide con b en esa cola; así converge b, aunque a tuviera ceros iniciales. En (iii), ponemos $q_n = a_n/b_n$, sucesión global por la hipótesis. La identidad $a_n = q_n b_n$ y la regla del producto dan QB, sin dividir por B. En (iv), tomamos $a_n = (-1)^n$ y $b_n = -(-1)^n$: suma cero y producto -1 convergen, pero ninguno de los factores converge. En (v), $a_n = 0$ y $b_n = (-1)^n$ dan producto cero y $A = 0$, sin convergencia de b. Recuperar un factor por división necesita el margen que aporta $A \neq 0$.

Ejercicio 40. Cambiar todo el orden de los índices

Sea $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una biyección y $b_n = a_{\pi(n)}$. Demuestra que $a_n \to A$ si y sólo si $b_n \to A$, sin suponer que la permutación conserve el orden ni que a, b coincidan eventualmente. Construye el corte usando la preimagen de un prefijo finito, trata el caso vacío y demuestra la dirección inversa.

Solución. La composición define $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Supongamos $a_n \to A$ y recibamos $\varepsilon > 0$, con umbral K para a. El conjunto $F = \pi^{-1}(\{0, \dots, K-1\})$ es finito: por biyectividad, cada uno de los K índices tiene una sola preimagen. Si F es vacío, ponemos $N = 0$; en otro caso, $N = 1 + \max F$. Para todo $n \geq N$, el índice n no pertenece a F, por lo que $\pi(n) \geq K$. Luego $|b_n - A| = |a_{\pi(n)} - A| < \varepsilon$. En particular, cuando $K = 0$ el prefijo y su preimagen son vacíos. El corte controla posiciones de la permutación que caían en el prefijo original, no el tamaño numérico de $\pi(n)$ por una presunta monotonía.

Si $b_n \to A$, aplicamos el argumento a la biyección inversa π^{-1}: la identidad $a_n = b_{\pi^{-1}(n)}$ acredita la convergencia de a. La inyectividad impide repetir infinitamente un índice inicial; la sobreyectividad permite recuperar todos los índices mediante la inversa. En ambas direcciones basta retirar las posiciones que envían al prefijo finito cuyo error todavía no está controlado. La figura C06-F11 muestra cómo elegir el corte en las posiciones nuevas. El ejemplo de biyección sólo ilustra el conjunto disperso de preimágenes; la finitud que acaba de probarse sostiene el argumento general.

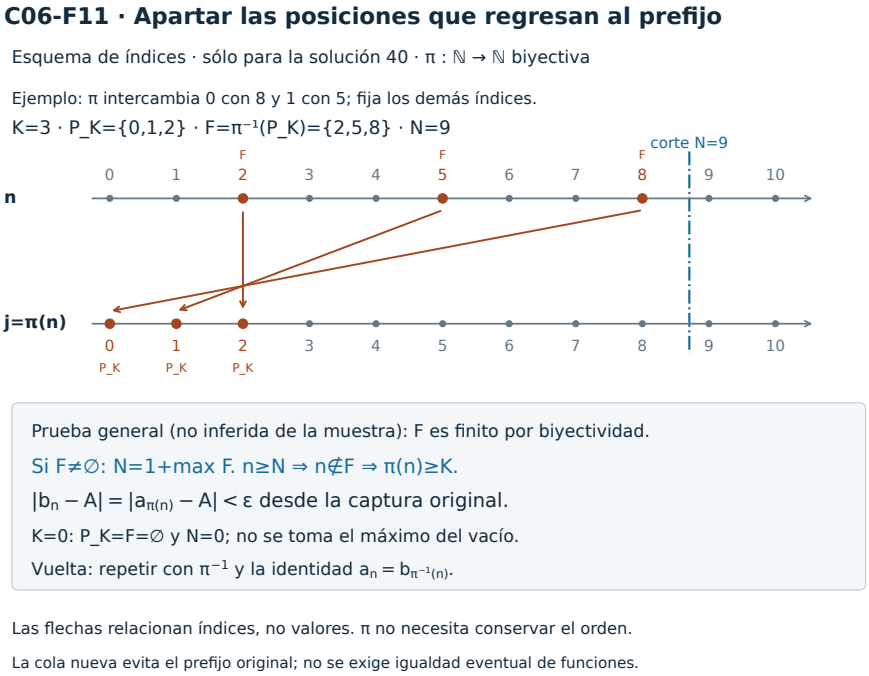


Figura 6.11. En un ejemplo de biyección, el prefijo original 0,1,2 tiene preimágenes 8,5,2. El corte nuevo 9 queda después de todas ellas. Un recuadro separado da el argumento general por finitud, el caso vacío y la dirección inversa. Las flechas relacionan índices, no valores de la sucesión.

Figura C06-F11. Figura C06-F11. Las posiciones nuevas que envían al prefijo original forman un conjunto finito. Si no es vacío, un corte posterior a su máximo evita todas esas posiciones; si es vacío, basta el corte cero. La biyección no necesita conservar el orden. Para K=3, el prefijo original es {0,1,2} y sus preimágenes en la biyección dibujada son {2,5,8}; N=9 evita todas esas posiciones. Si K=0, se elige N=0 sin tomar un máximo del conjunto vacío. En la dirección inversa se aplica la misma construcción a π^{-1}. Las flechas relacionan índices naturales; los términos reales aparecen al evaluar las funciones a y b.

Capítulo 7

Monotonía, cotas y existencia de límites

La definición de convergencia permite comprobar un número propuesto: fijamos el candidato y buscamos una cola dentro de cada ventana a su alrededor. En una recurrencia, sin embargo, podemos saber que los términos suben sin conocer una fórmula para ellos ni un número al que deban aproximarse. Si además nunca superan una barrera, el problema consiste en encontrar un destino a partir de esos dos datos.

La cota superior conocida puede dejar demasiado margen. Todos los términos de $1 - 1/(n+1)$ son menores que 2, pero sus errores respecto de 2 son mayores que 1; esa barrera no puede ser su límite. Necesitamos una cota ajustada al conjunto entero de valores. C02 dio un nombre a la menor cota superior, y C03 garantizó su existencia real para conjuntos no vacíos y acotados superiormente. La monotonía permitirá convertir la proximidad a ese supremo en control de todos los términos posteriores.

Conservamos $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ y las sucesiones $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Las comparaciones de monotonía relacionan sus términos reales; el orden natural de los índices determina cuáles se comparan antes y después.

7.1. Comparar términos: qué significa ser monótona

Consideremos la sucesión p definida por $p_{2k} = k$ y $p_{2k+1} = k$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Todo índice natural es par o impar, así que estas dos cláusulas asignan un único valor a cada índice. Sus primeros términos son $0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, ...$ Al pasar de un término al siguiente, el valor se conserva o aumenta; las repeticiones no cambian la dirección.

En los pasos de p_{2k} a p_{2k+1} hay igualdad; en los siguientes hay aumento. Ambas clases de paso mantienen una dirección, de modo que la comparación que buscamos debe admitir repeticiones. También una constante queda incluida al permitir la igualdad.

> **Monotonía de una sucesión real.** Una sucesión $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es **no decreciente** si $a_n \leq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y es **no creciente** si $a_{n+1} \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es **monótona** si satisface al menos una de estas dos propiedades.

La dirección debe mantenerse en todos los pasos, como expresa la disyunción

$$(\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq a_{n+1}) \quad \text{o} \quad (\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} \leq a_n).$$

Cada una de las alternativas contiene su propio cuantificador universal. La disyunción es inclusiva y una constante $a_n = c$ satisface ambas, porque $c \leq c$. Si pusiéramos la disyunción dentro del cuantificador y permitiéramos elegir dirección en cada índice, obtendríamos una condición verdadera para cualquier sucesión real: el orden total siempre compara a_n con a_{n+1}. Reservamos **estrictamente creciente** para $a_n < a_{n+1}$ en todo índice, y **estrictamente decreciente** para $a_{n+1} < a_n$ en todo índice. Estas propiedades excluyen las repeticiones adyacentes; cuando sólo se exige no decrecimiento o no crecimiento, la igualdad sigue permitida.

Para controlar una cola necesitaremos comparar un término con cualquiera de los posteriores, aunque no sean vecinos. Entre dos naturales fijados hay una cantidad finita de pasos, y la transitividad permite reunir sus comparaciones.

> **Comparación entre índices ordenados.** Para una sucesión real a, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $a_n \le a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
2. Para todos $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \le m$, se cumple $a_n \le a_m$.

También son equivalentes las condiciones $a_{n+1} \le a_n$ para todo n y $a_m \le a_n$ para todos los índices $n \le m$.

Demostración. Supongamos primero que $a_k \le a_{k+1}$ para todo índice k. Fijemos $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \le m$. Si $n = m$, la conclusión es $a_n \le a_n$. Si $n < m$, las comparaciones adyacentes dan la cadena finita $a_n \le a_{n+1} \le \cdots \le a_m$. Por transitividad, $a_n \le a_m$. Para hacer explícito el papel de la finitud, podemos escribir $m = n + r$ con $r \in \mathbb{N}$ e inducir sobre r: el caso $r = 0$ es reflexividad, y el paso combina $a_n \le a_{n+r}$ con $a_{n+r} \le a_{n+r+1}$. Como los índices fijados eran arbitrarios, queda probada la condición para todo par ordenado.

Recíprocamente, supongamos que $a_n \le a_m$ siempre que $n \le m$. Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, el natural $m = n + 1$ satisface $n \le m$, así que $a_n \le a_{n+1}$. Se recupera la condición adyacente en todos los índices. Para la dirección no creciente, supongamos que $a_{k+1} \le a_k$ para todo k. Si $n = m$, de nuevo basta reflexividad. Si $n < m$, la cadena es $a_m \le a_{m-1} \le \cdots \le a_n$; cada comparación usa una hipótesis adyacente y la transitividad da $a_m \le a_n$. En la dirección inversa, la comparación para $n \le m$ aplicada a $m = n + 1$ da $a_{n+1} \le a_n$. Esto demuestra también la segunda equivalencia.

Cada cadena corresponde a dos índices naturales fijados, cuya diferencia es finita. La inducción justifica todas esas cadenas sin requerir un último término de la sucesión. Las versiones estrictas siguen el mismo argumento: si cada comparación adyacente es estricta, entonces $a_n < a_m$ para $n < m$ en la dirección creciente, y $a_m < a_n$ para $n < m$ en la decreciente. Recíprocamente, esas comparaciones para índices distintos dan las adyacentes al elegir $m = n + 1$. Aquí se exige $n < m$: incluir $n = m$ pediría $a_n < a_n$, imposible.

Si a es no decreciente y $a_N > c$, la comparación entre índices da $c < a_N \le a_n$ para cada $n \ge N$. Así, una vez superada la barrera c, toda la cola permanece por encima. De $c \le a_N$ se obtiene igualmente $c \le a_n$, con desigualdad no estricta. Para una sucesión no creciente ocurre lo mismo en la dirección inferior: de $a_N < c$ y $n \ge N$ se sigue $a_n \le a_N < c$. Esta propagación será útil cuando logremos encontrar un término próximo a una barrera elegida.

En la sucesión p, por ejemplo, $p_4 = 2$. Una vez verificado que p no decrece, la proposición permite concluir $p_n \ge 2$ para todo $n \ge 4$. Para justificar la hipótesis en todo índice, distinguimos las dos paridades: de $2k$ a $2k + 1$ los valores son iguales a k, y de $2k + 1$ a $2k + 2$ pasan de k a $k + 1$. Ambas comparaciones son no decrecientes. La muestra inicial sugería la dirección; estas dos cláusulas la demuestran para todos los pasos.

Cuando conocemos una fórmula, podemos examinar el signo de $a_{n+1} - a_n$ para un índice arbitrario. Sumando o restando el mismo real, $a_n \le a_{n+1}$ equivale a $a_{n+1} - a_n \ge 0$, y la comparación opuesta equivale a diferencia no positiva. Para $x_n = 1 - 1/(n + 1)$, los denominadores son positivos también en $n = 0$, y $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$.

Esto demuestra que x es estrictamente creciente. La sucesión $z_n = 1/(n + 1)$ tiene la diferencia opuesta, $z_{n+1} - z_n = -1/[(n+1)(n+2)] < 0$, así que es estrictamente decreciente. La comparación entre índices vale globalmente en ambas, con su dirección correspondiente. Para refutar una dirección universal basta un paso que la contradiga. En $r_n = (-1)^n$, tenemos $r_0 = 1 > r_1 = -1$, por lo que no es no decreciente. También $r_1 = -1 < r_2 = 1$, por lo que no es no creciente. Estas dos comparaciones refutan las dos alternativas de la definición: r no es monótona. Una sola caída habría refutado únicamente el no decrecimiento; todavía habría que examinar la otra dirección.

Sucesión	No decreciente	No creciente	Comparación decisiva
$a_n = 1$	Sí	Sí	Igualdad en cada paso

Sucesión	No decreciente	No creciente	Comparación decisiva
$p_{2k} = p_{2k+1} = k$	Sí	No	Igualdad o subida; de índice 1 a 2 pasa de 0 a 1
$x_n = 1 - 1/(n+1)$	Sí	No	Diferencia positiva para todo n
$z_n = 1/(n+1)$	No	Sí	Diferencia negativa para todo n
$r_n = (-1)^n$	No	No	Baja de índice 0 a 1 y sube de 1 a 2

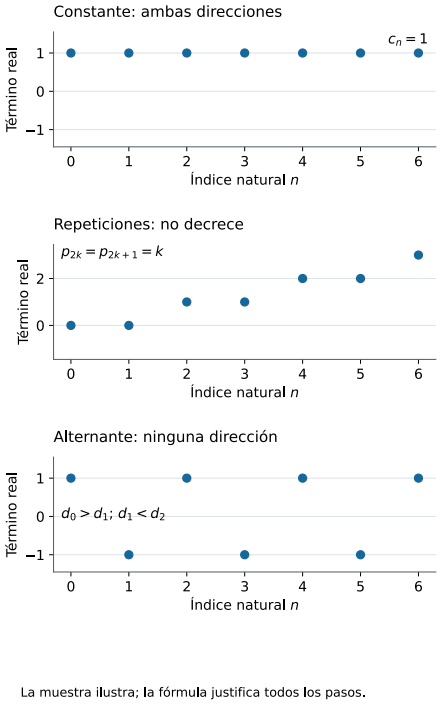


Figura 7.1. Pasos iguales, aumentos y cambios de dirección en tres sucesiones. La monotonía compara términos en todos los índices; las repeticiones son compatibles con ella.

En la figura de los pasos, índices distintos pueden tener la misma altura. Los puntos representan pares (n, a_n) y quedan separados: la función no asigna valores a posiciones intermedias entre naturales. Las constantes cumplen ambas direcciones. También podemos demostrar la vuelta. Si a es no decreciente y no creciente, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ la comparación con el índice 0 da $a_0 \leq a_n$ y $a_n \leq a_0$. Por antisimetría, $a_n = a_0$. Por tanto, **una sucesión es a la vez no decreciente y no creciente si y sólo si es constante**.

La constancia y los pares repetidos de p son compatibles con la definición de función: cada índice recibe un único valor. Lo que cambia es cuántos índices comparten ese valor. Una muestra creciente tampoco garantiza monotonía global. Definamos $b_n = n$ para $0 \leq n \leq 100$ y $b_n = -1$ para $n \geq 101$. Es una función definida en todo $\mathbb{N}$, y sus primeros 101 términos son $0, 1, \ldots, 100$. Sin embargo, $b_{100} = 100 > b_{101} = -1$ refuta el no decrecimiento. El paso $b_0 = 0 < b_1 = 1$ refuta el no crecimiento, de modo que la sucesión tampoco es monótona. Un listado finito puede ocultar el infractor que queda fuera de él.

Ejercicios de la sección 7.1.

Ejercicio 1. Comparaciones y alcance de los cuantificadores

Para una sucesión $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, considera estas afirmaciones:

- P: para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq a_{n+1}$.
- Q: para todos $n, m \in \mathbb{N}$, si $n \leq m$, entonces $a_n \leq a_m$.
- R: para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n < a_{n+1}$.
- S: para todos $n, m \in \mathbb{N}$, si $n < m$, entonces $a_n < a_m$.
- M: $(\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq a_{n+1}) \ \vee \ (\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} \leq a_n)$.
- V: para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq a_{n+1} \ \vee \ a_{n+1} \leq a_n$.

Demuestra $P \Leftrightarrow Q$ y $R \Leftrightarrow S$, y explica el cambio de $n \leq m$ a $n < m$. Determina cuáles caracterizan el no decrecimiento y cuáles el crecimiento estricto. Justifica $R \Rightarrow P$ y refuta la implicación inversa con una constante. ¿Qué propiedad expresa M? Decide si M y V son equivalentes, justificando tu respuesta con un ejemplo cuando haga falta. En las comparaciones, distingue índices y términos.

Solución. La función a es la sucesión; $n, m, n+1$ son índices naturales y a_n, a_m, a_{n+1} son términos reales. Las desigualdades entre índices determinan qué posiciones se comparan; las desigualdades entre términos expresan la dirección de sus valores. Si vale P y fijamos $n \leq m$, el caso $n = m$ da $a_n \leq a_n$. Para $n < m$, la cadena finita $a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots \leq a_m$ da $a_n \leq a_m$ por transitividad. Así se obtiene Q. Recíprocamente, Q aplicada a $m = n + 1$ da P en cada índice. Por tanto, P y Q caracterizan el no decrecimiento.

El mismo razonamiento con desigualdades estrictas demuestra $R \Rightarrow S$: para $n < m$ hay al menos un paso y la cadena estricta llega de a_n a a_m. Al tomar $m = n+1$, S da R. Ambas caracterizan el crecimiento estricto. En S no se incluye $n = m$, pues exigiría $a_n < a_n$, que es falso. En Q sí puede incluirse, porque la desigualdad no estricta admite igualdad.

Toda desigualdad estricta implica la correspondiente no estricta, de modo que $R \Rightarrow P$. La sucesión constante $a_n = 0$ satisface P y Q, pero no R ni S: sus términos de índices distintos también son iguales. La implicación inversa queda refutada. M es la definición de monotonía. Su disyunción permite una dirección universal o la otra, y admite ambas en una constante. V, en cambio, es verdadera para cualquier sucesión real, porque el orden total compara los dos términos en cada índice. En $r_n = (-1)^n$, V sigue siendo verdadera, pero $r_0 > r_1$ refuta la primera alternativa de M y $r_1 < r_2$ refuta la segunda. Por tanto, M implica V y V no implica M. Permitir que la dirección cambie con el índice elimina la restricción que expresa la monotonía.

Ejercicio 2. Las mismas alturas en otro orden

Sea $E = \{2j : j \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$. Construye dos funciones $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ cuyo conjunto de valores sea E: una estrictamente creciente y otra que no sea monótona. Puedes partir de la enumeración natural de E e intercambiar vecinos. Define ambas para todos los índices, prueba las dos igualdades de conjuntos y acredita cada afirmación sobre dirección. Explica por qué $a(\mathbb{N}) = b(\mathbb{N})$ no implica $a = b$ ni igualdad de sus gráficas discretas.

Solución. Tomamos $a_n = 2n$ y definimos $b_{2k} = 4k + 2$, $b_{2k+1} = 4k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. La paridad asigna a cada índice una única cláusula, de modo que b está definida en todo $\mathbb{N}$. Ambas funciones tienen codominio $\mathbb{R}$ y valores en E. Todo término de a pertenece a E y cada $2j \in E$ se obtiene en el índice j; así, $a(\mathbb{N}) = E$. Los términos de b son $2(2k+1)$ y $2(2k)$, por lo que también pertenecen a E. Para la otra inclusión, si $j = 2k$, el valor $2j = 4k$ aparece en el índice $2k + 1$; si $j = 2k + 1$, el valor $2j = 4k + 2$ aparece en el índice $2k$. Estas dos posibilidades cubren todo $j \in \mathbb{N}$, y prueban $E \subseteq b(\mathbb{N})$. Por tanto, $b(\mathbb{N}) = E$.

Para todo n, $a_{n+1} - a_n = 2 > 0$, así que a es estrictamente creciente. En b, la caída $b_0 = 2 > b_1 = 0$ refuta el no decrecimiento y la subida $b_1 = 0 < b_2 = 6$ refuta el no crecimiento. Por eso b no es monótona. Las funciones son distintas porque $a_0 = 0$ y $b_0 = 2$. Sus gráficas, colecciones de pares (n, a_n) y (n, b_n), también son distintas: la primera contiene

$(0,0)$ y la segunda no. Al formar el conjunto de valores se conserva la altura y se pierde la posición que la sucesión le asignaba. Las dos funciones tienen el mismo dominio, codominio y conjunto de valores, pero esa información no determina su evaluación en cada índice.

Ejercicio 3. Bloques de longitud variable

Fija $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq 2$. Construye una sucesión $a^{(m)} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que tome el valor k exactamente en los m índices del bloque $mk, mk+1, \ldots, mk+m-1$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Justifica que la regla asigna un único valor a cada índice. Demuestra el no decrecimiento distinguiendo el interior de un bloque de su frontera y prueba que los valores no tienen cota superior real. Decide si la sucesión es estrictamente creciente o no creciente, y explica por qué las repeticiones no impiden que sea función.

Solución. Usamos la división con resto de naturales: como $m > 0$, cada $n \in \mathbb{N}$ se escribe de manera única como $n = mk + r$, con $k, r \in \mathbb{N}$ y $0 \leq r < m$. Definimos $a_n^{(m)} = k$, considerado como número real. La existencia de esa escritura cubre el dominio entero y su unicidad evita asignar dos valores al mismo índice. Para un k fijo, el cociente es k precisamente en los m índices $mk, \ldots, mk+m-1$; los otros bloques tienen cocientes distintos.

Fijemos un índice $n = mk + r$. Si $r < m-1$, entonces $n+1 = mk + (r+1)$ sigue en el mismo bloque, y $a_{n+1}^{(m)} = k = a_n^{(m)}$. Si $r = m-1$, entonces $n+1 = m(k+1)$ comienza el bloque siguiente, y $a_{n+1}^{(m)} = k+1 > k = a_n^{(m)}$. Los casos son exhaustivos y ambos dan $a_n^{(m)} \leq a_{n+1}^{(m)}$. Queda probado el no decrecimiento en todo índice.

Para probar que no hay cota superior real, sea $U \in \mathbb{R}$ arbitrario. La propiedad arquimediana disponible desde C03 permite elegir $k \in \mathbb{N}$ con $k > U$. El índice mk es natural y satisface $a_{mk}^{(m)} = k > U$. Como la construcción da un término que supera cada candidato U, ninguna cota superior real existe. La sucesión no es estrictamente creciente: $m \geq 2$ garantiza que $a_0^{(m)} = a_1^{(m)} = 0$. Tampoco es no creciente, pues $a_{m-1}^{(m)} = 0 < 1 = a_m^{(m)}$. La repetición en cada bloque no afecta la definición de función: a cada índice se le asigna un solo valor, aunque varios índices compartan ese valor. Cuando $m = 2$, la construcción recupera los pares repetidos de §7.1; el argumento de las fronteras sirve para todas las longitudes admitidas.

Ejercicio 4. Una suma que no cambia

Sean $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dos sucesiones no decrecientes y sea $c \in \mathbb{R}$. Supón que $a_n + b_n = c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demuestra que cada sucesión es constante. Localiza dónde se usa la dirección común. Si se sustituye esa hipótesis por «cada sucesión es monótona, con direcciones posiblemente distintas», decide si la conclusión sigue siendo válida y justifica tu decisión. ¿Las hipótesis originales obligan además a que $a = b$ como funciones?

Solución. La dirección común permite comparar incrementos del mismo signo. Para cada $n \in \mathbb{N}$, el no decrecimiento da $a_{n+1} - a_n \geq 0$ y $b_{n+1} - b_n \geq 0$. Al restar las igualdades de la suma en los índices $n+1$ y n, obtenemos $(a_{n+1} - a_n) + (b_{n+1} - b_n) = c - c = 0$. Dos reales no negativos con suma cero deben ser ambos cero: si uno fuera positivo, al sumarle el otro la suma seguiría siendo positiva. Por tanto, $a_{n+1} = a_n$ y $b_{n+1} = b_n$ para todo n. La inducción desde el índice 0 da $a_n = a_0$ y $b_n = b_0$ en todos los índices. Cada sucesión es constante, y sus valores constantes satisfacen $a_0 + b_0 = c$.

Si las direcciones pueden ser distintas, los incrementos pueden cancelarse sin ser cero. Para cualquier $c \in \mathbb{R}$, las funciones $a_n = n$ y $b_n = c - n$ tienen suma c en cada índice. La primera es estrictamente creciente y la segunda estrictamente decreciente; ninguna es constante. La hipótesis debilitada no implica la conclusión. La conclusión original tampoco exige igualdad de las dos funciones. Por ejemplo, $a_n = c/2 - 1$ y $b_n = c/2 + 1$ son constantes, ambas no decrecientes y con suma c, pero difieren en cada índice. Bajo las hipótesis originales, $a = b$ se cumple si y sólo si $a_0 = b_0$; junto con la suma, esto equivale a $a_0 = b_0 = c/2$. La constancia de cada función y la igualdad entre funciones son afirmaciones distintas.

7.2. El conjunto de valores y su mejor barrera

Para estudiar cotas podemos reunir los términos en $S_a = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$. Este conjunto siempre es no vacío, pues contiene a_0, pero registra cada valor una sola vez, sin conservar los índices en que aparece. En p, cada natural aparece dos veces como término y $S_p = \{0, 1, 2, ...\}$ como subconjunto de $\mathbb{R}$. La repetición desaparece al formar el conjunto, al igual que la información sobre el orden de aparición.

Esa pérdida incluye el orden de aparición. La sucesión $a_n = n$ y la función b dada por $b_0 = 0$, $b_1 = 2$, $b_2 = 1$ y $b_n = n$ para $n \geq 3$ tienen el mismo conjunto de valores. Sin embargo, a es estrictamente creciente y b no es monótona: sube de índice 0 a 1 y baja de 1 a 2. El conjunto sirve para estudiar cotas, pero no sustituye a la función cuando importa la monotonía.

Un real U domina la sucesión si y sólo si domina S_a: cada término pertenece a ese conjunto y cada elemento suyo es algún término. Esta equivalencia permite aplicar los resultados de C02 sobre cotas a una función sin confundirla con su conjunto de valores. Recordemos la distinción de C02. Un número s es el **supremo** de S_a si es cota superior y, además, $s \leq U$ para toda cota superior U de S_a. Un **máximo** es un elemento del conjunto que es mayor o igual que todos los demás. Por tanto, si un conjunto tiene máximo, ese máximo es también su supremo: al pertenecer al conjunto, cualquier cota superior debe estar por encima de él. La vuelta exige pertenencia. Si $s = \sup S_a$ y $s \in S_a$, entonces s es máximo; si $s \notin S_a$, el conjunto no tiene máximo, pues cualquier máximo tendría que ser su supremo.

Con una cota superior real ya podemos invocar C03 §3.2: **todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado superiormente tiene supremo real**. El conjunto S_a cumple la no vaciedad gracias a a_0 y recibe la cota de la sucesión. La completitud proporciona así su supremo, aunque la sucesión no sea monótona; la dirección de sus términos tendrá otro papel en la prueba de convergencia.

Tampoco es necesario que una cota superior sea el supremo. Si U es cota y $V \geq U$, entonces $a_n \leq U \leq V$ para todo n, por lo que V también es cota. El supremo selecciona la menor entre ellas, aunque ese número no sea un término de la sucesión. La menor cota superior deja valores inmediatamente por debajo de ella: para cada $\varepsilon > 0$, la franja $(s - \varepsilon, s]$ debe contener algún a_j. Si estuviera vacía, podríamos bajar la cota hasta $s - \varepsilon$. Ésta es la caracterización de C02 §2.5 expresada mediante los índices de la sucesión.

> **Caracterización de la barrera superior.** Para una sucesión real a y un número real s, son equivalentes:
>
> 1. $s = \sup S_a$.
> 2. s es cota superior de S_a y para cada $\varepsilon > 0$ existe un $j \in \mathbb{N}$ con $s - \varepsilon < a_j$.

La condición de cota impide términos por encima de s y la aproximación impide bajar esa cota. Las dos obligaciones permiten reconocer el supremo sin ninguna hipótesis de monotonía.
Demostración. Supongamos que $s = \sup S_a$ y fijemos $\varepsilon > 0$. El número $s - \varepsilon$ es menor que s, por lo que no puede ser cota superior: si lo fuera, la minimalidad daría $s \leq s - \varepsilon$, contradicción. Ser cota superior equivale a $a_n \leq s - \varepsilon$ para todo n. La negación clásica de esa afirmación universal proporciona un índice j con $a_j > s - \varepsilon$. Como s sí es cota, también $a_j \leq s$. Así se obtiene el valor en la franja.

Recíprocamente, supongamos que s es cota superior y que cumple la aproximación indicada. Sea U cualquier cota superior de S_a. Si $U < s$, la tolerancia $\varepsilon = s - U > 0$ daría un índice j con $a_j > s - \varepsilon = U$, contradiciendo que U sea cota. Por tanto $s \leq U$ para toda cota superior U. Junto con la condición de cota de s, esto demuestra $s = \sup S_a$.

Esta prueba reconoce un candidato; la existencia del supremo bajo no vaciedad y acotación sigue procediendo de C03. Para una tolerancia fijada basta justificar que existe un índice apropiado, aunque no dispongamos de una fórmula que lo encuentre. No hace falta elegir a la vez todos los testigos. Volvamos a $x_n = 1 - 1/(n + 1)$. Como $n + 1 > 0$, todos sus

términos son menores que 1; por tanto 1 y 2 son cotas superiores, y ningún término vale 1. Para comprobar que 1 es el supremo, falta la obligación de aproximación.

En C06 §6.3 demostramos que $1/(n+1)$ converge a cero. Dada $\varepsilon > 0$, esa prueba proporciona un índice j con $1/(j+1) < \varepsilon$. De ahí $x_j = 1 - 1/(j+1) > 1 - \varepsilon$. Por la caracterización anterior, $\sup S_x = 1$. Como $1 \notin S_x$, no hay máximo. Esta verificación usa una herramienta ya disponible y no presupone el teorema de convergencia monótona que demostraremos en §7.3.

En la constante $c_n = 1$, el conjunto de valores es $S_c = \{1\}$. Tiene supremo y máximo iguales a 1, y para cualquier $\varepsilon > 0$ el término $c_0 = 1$ satisface $1 - \varepsilon < c_0 \leq 1$. La propiedad de aproximación incluye este caso de error cero; no exige que los términos se acerquen desde puntos distintos del supremo. Los dos supremos valen 1, pero las funciones difieren ya en el índice cero: $x_0 = 0$ y $c_0 = 1$. También sus imágenes son distintas, pues sólo la constante contiene 1. La cota 2, disponible para ambas, deja un margen que impide que sea su supremo.

Con $\varepsilon = 1/4$, la franja es $(3/4, 1]$. Tenemos $x_3 = 3/4$, sobre la frontera inferior excluida, y $x_4 = 4/5$, dentro de la franja. El término constante 1 también está dentro. El contraste se lee sobre un eje de **valores**, sin necesidad de usar el eje de índices de una gráfica de sucesión. Marcar el punto 1 como barrera en el caso de x no lo añade a su conjunto de valores.

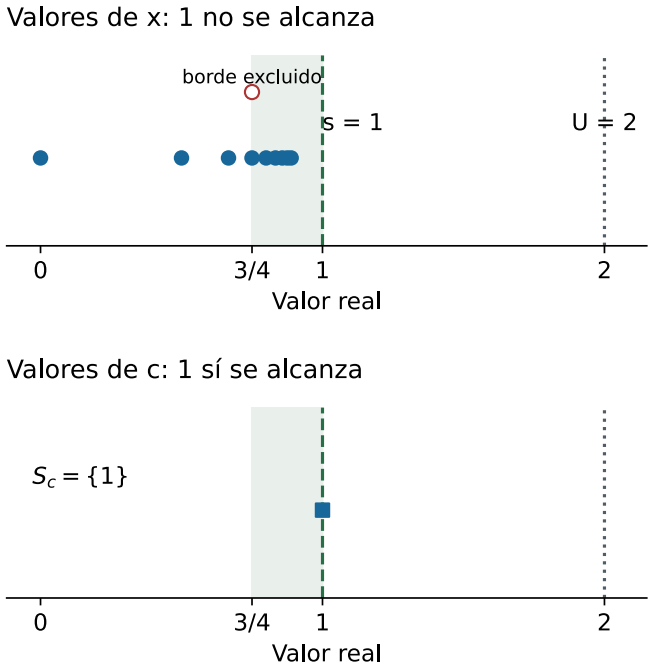


Figura 7.2. La cota 2 deja margen; el supremo 1 no. La misma barrera se alcanza en la constante y no se alcanza en x.

Por abajo, una cota inferior ℓ cumple $\ell \leq a_n$ para todo índice. C03 §3.3 garantiza un ínfimo real cuando S_a está acotado inferiormente, pues ya sabemos que no es vacío. Ese ínfimo es la mayor cota inferior, y será mínimo exactamente si pertenece al conjunto. La caracterización correspondiente afirma que $t = \inf S_a$ si y sólo si t es cota inferior y para cada $\varepsilon > 0$ hay un índice j con $a_j < t + \varepsilon$. La cota añade $t \leq a_j$, así que el valor está en $[t, t+\varepsilon)$, con frontera superior excluida.

Para justificarla, si t es ínfimo, $t + \varepsilon$ no puede ser cota inferior: sería una cota mayor que la mayor de ellas. La negación de $t + \varepsilon \leq a_n$ para todos los índices da un j con $a_j < t + \varepsilon$. En la vuelta, supongamos cota y aproximación y sea ℓ cualquier cota inferior. Si $\ell > t$, tomamos

$\varepsilon = \ell - t$ y obtenemos $a_j < t + \varepsilon = \ell$, contradicción. Así $\ell \leq t$ para todas las cotas inferiores, que es la maximalidad requerida.

En $z_n = 1/(n+1)$, el número 0 es cota inferior y, por la prueba de C06, hay valores menores que cualquier $\varepsilon > 0$. Luego $\inf S_z = 0$. Ningún término es cero, de modo que no hay mínimo. La ausencia de alcanzamiento es compatible con una barrera extremal también en esta dirección. Encontrar un valor en cada franja sigue dejando abiertos los índices posteriores al testigo. La aproximación $\forall \varepsilon > 0\ \exists j \in \mathbb{N} :\ s - \varepsilon < a_j \leq s$ carece del control de toda una cola que exige C06.

En $r_n = (-1)^n$, el conjunto de valores es $\{-1, 1\}$ y su supremo es 1. Para cualquier tolerancia positiva, el índice $j = 0$ proporciona un término igual al supremo y satisface la aproximación. Sin embargo, r no converge a 1: con $\varepsilon = 1$, ante cualquier corte N el índice impar $2N + 1 \geq N$ tiene término -1 y error $|-1-1| = 2 \geq 1$. Esta refutación se refiere al candidato 1; no inferimos de ella por sí sola una afirmación sobre todos los candidatos.

Ejercicios de la sección 7.2.

Ejercicio 5. Cota, barrera mínima y posición de alcanzamiento

Sean $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $S_a = a(\mathbb{N})$ y $U, s \in \mathbb{R}$. Justifica la equivalencia entre $a_n \leq U$ para todo n, $S_a \subseteq (-\infty, U]$ y $S_a \cap (U, \infty) = \emptyset$. Escribe con cuantificadores qué obligación adicional convierte una cota s en $\sup S_a$. Demuestra que s es máximo de S_a si y sólo si es su supremo y el conjunto de índices $I_s = \{j \in \mathbb{N} : a_j = s\}$ es no vacío.

Aplica estas distinciones a $d_0 = -1$ y $d_n = 4$ para $n \geq 1$: determina S_d, clasifica la cota superior 6, calcula el supremo y el máximo, y describe I_4. Distingue el tipo del número 4, del conjunto de valores, del conjunto de índices y de la función d.

Solución. Si todos los términos son $\leq U$, cada elemento $x \in S_a$ tiene la forma $x = a_n$ y pertenece a $(-\infty, U]$. Recíprocamente, la inclusión del conjunto implica $a_n \leq U$ porque cada término pertenece a S_a. Para cualquier real x, $x \leq U$ equivale a $x \notin (U, \infty)$; así, esa inclusión equivale a que la intersección indicada sea vacía. Se ha traducido una misma condición entre función, inclusión e intersección.

Para que la cota s sea supremo se exige además que esté por debajo de toda cota superior. Con los dominios explícitos, las dos obligaciones son

$$(\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq s) \quad \text{y} \quad \forall U \in \mathbb{R} : \quad (\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq U) \Rightarrow s \leq U.$$

Si s es máximo, domina todos los elementos y pertenece a S_a. La pertenencia proporciona un índice j con $a_j = s$, así que I_s es no vacío. Toda cota U domina ese término y cumple $s \leq U$; por ello s es supremo. En la vuelta, si s es supremo e I_s es no vacío, s domina el conjunto y pertenece a él por el índice testigo. Es, por definición, su máximo.

Para d, la imagen es $S_d = \{-1, 4\}$. El número 6 es cota superior, pero no la menor, pues 4 también es cota y es menor que 6. Como 4 pertenece al conjunto y domina sus dos elementos, es máximo y supremo. Se alcanza precisamente en los índices $I_4 = \{1, 2, 3, ...\}$. El máximo y el supremo son el mismo número real; I_4 es un conjunto de índices naturales y S_d es un conjunto de valores reales. La sucesión d es la función que asigna esos valores, no ninguno de esos conjuntos.

La figura de la mejor barrera permite comparar cota, supremo y alcanzamiento. Ilustra los valores 1 y 2 de otro ejemplo; los valores 4 y 6 de esta solución se justifican con sus propios datos.

Ejercicio 6. Una barrera prescrita, con y sin alcanzamiento

Para cada $s \in \mathbb{R}$ y $h \geq 0$, construye dos sucesiones reales $a^{s,h}$ y $b^{s,h}$ con todos sus términos en $[s-h, s]$ y con supremo del conjunto de valores igual a s. Si $h > 0$, exige que la primera no alcance s y que la segunda lo alcance en un único índice. Si $h = 0$, determina qué funciones permite la condición sobre el intervalo y qué ocurre con el alcanzamiento. Verifica cota y aproximación para tus construcciones y declara sus dominios; no necesitas calcular límites.

Solución. Para cada par de parámetros admitido, definimos funciones de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$ mediante $a_n^{s,h} = s - h/(n+1)$ y

$$b_0^{s,h} = s, \qquad b_n^{s,h} = s - \frac{h}{n} \quad (n \geq 1).$$

Los denominadores son positivos en sus respectivos dominios; la cláusula especial de b evita dividir por cero. Como $0 \leq h/(n+1) \leq h$ y $0 \leq h/n \leq h$ para $n \geq 1$, todos los términos de ambas funciones están en $[s-h, s]$. En particular, s es cota superior. Sea $\varepsilon > 0$. Si $h > 0$, la arquimedianidad de C03 permite elegir $j \in \mathbb{N}$ con $j+1 > h/\varepsilon$. Entonces $h/(j+1) < \varepsilon$ y $s - \varepsilon < a_j^{s,h} \leq s$. Si $h = 0$, el índice $j = 0$ da la misma aproximación con error cero. Por la caracterización de §7.2, el supremo de la imagen de $a^{s,h}$ es s. Para $b^{s,h}$, el índice 0 proporciona directamente el término s para toda tolerancia; junto con la cota, demuestra que su supremo también es s.

Cuando $h > 0$, cada $h/(n+1)$ es positivo, así que ningún término de $a^{s,h}$ vale s; su imagen no tiene máximo. En $b^{s,h}$, el término inicial vale s y todos los de índice $n \geq 1$ son menores que s. El máximo se alcanza sólo en el índice 0. Si $h = 0$, el intervalo permitido es $[s, s] = \{s\}$. Toda función que satisfaga la condición debe ser la constante s; nuestras dos fórmulas coinciden en esa función y alcanzan s en todos los índices. La exigencia de alcanzamiento único se aplica únicamente al caso $h > 0$.

Ejercicio 7. Aproximar con una escala numerable

Supón que $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ y que $s \in \mathbb{R}$ es cota superior de S_a. Demuestra que $s = \sup S_a$ equivale a la condición $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists j \in \mathbb{N} :\quad 0 \leq s - a_j < \frac{1}{k+1}$. Señala cómo se pasa de una tolerancia real arbitraria a una de las tolerancias indicadas y de qué dato puede depender el índice j. Decide si la condición mostrada, por sí sola, seguiría caracterizando el supremo al omitir la hipótesis global de cota. No uses el teorema de convergencia monótona.

Solución. Si $s = \sup S_a$, dado $k \in \mathbb{N}$ la tolerancia $1/(k+1)$ es positiva. La caracterización por aproximación proporciona un índice j con $s - 1/(k+1) < a_j \leq s$, que equivale a $0 \leq s - a_j < 1/(k+1)$. Queda probada la condición en cada k, incluido $k = 0$. Para la vuelta, conservamos la hipótesis de que s domina todos los términos. Recibida una tolerancia real $\varepsilon > 0$, usamos la arquimedianidad para elegir $k \in \mathbb{N}$ con $k + 1 > 1/\varepsilon$. Así, $1/(k+1) < \varepsilon$. La condición del enunciado para ese k da un índice j con $0 \leq s - a_j < \varepsilon$, y por tanto $s - \varepsilon < a_j \leq s$. La cota y la aproximación para toda tolerancia demuestran $s = \sup S_a$ por §7.2. La elección sigue el orden ε, luego k y después un testigo j para ese k; no se exige que el mismo j sirva para todas las escalas, ni se ha probado control sobre los índices posteriores a él.

La hipótesis global de cota es necesaria. En $a_n = n$ y $s = 0$, para cada k el índice $j = 0$ satisface $0 \leq s - a_j = 0 < 1/(k+1)$. Sin embargo, s no es cota superior, pues $a_1 = 1 > 0$, y por eso no puede ser supremo. El control del error en los términos elegidos no controla los demás términos.

Ejercicio 8. Igual imagen acotada, distinto comportamiento

Sea $E = \{0\} \cup \{1/(j+1) : j \in \mathbb{N}\}$. Construye $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ con $a(\mathbb{N}) = b(\mathbb{N}) = E$, tales que a converja a 0 y b no converja a ningún real. Puedes cambiar cuántas veces aparece cada valor. Prueba la igualdad de ambas imágenes, da cotas comunes y justifica las afirmaciones de convergencia desde los cuantificadores de C06. Explica por qué tu construcción no representa una permutación biyectiva de los índices de la sucesión convergente.

Solución. Definimos $a_0 = 0$ y $a_n = 1/n$ para $n \geq 1$. Para la segunda función ponemos $b_{3k} = 0$, $b_{3k+1} = 1$ y $b_{3k+2} = 1/(k+1)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Todo índice tiene una escritura única $3k + r$ con $r \in \{0, 1, 2\}$, así que las tres cláusulas definen b en todo $\mathbb{N}$ sin ambigüedad. Todos los denominadores utilizados son positivos.

Cada término de a está en E; 0 aparece en el índice 0 y el valor $1/(j+1)$ aparece en el índice $j+1$. Esto prueba $a(\mathbb{N}) = E$ por ambas inclusiones. En b, los valores 0 y 1 pertenecen

a E, al igual que cada $1/(k+1)$, de modo que su imagen está contenida en E. Además, 0 aparece en el índice 0 y cada $1/(j+1)$ aparece en el índice $3j+2$. De ahí $E \subseteq b(\mathbb{N})$ y la igualdad de imágenes. Ambas sucesiones satisfacen las cotas comunes $0 \leq a_n \leq 1$ y $0 \leq b_n \leq 1$ en todo índice.

Para $a_n \to 0$, sea $\varepsilon > 0$. Elegimos por arquimedianidad un natural $N > \max\{1, 1/\varepsilon\}$. Si $n \geq N$, entonces $n \geq 1$ y $|a_n| = 1/n \leq 1/N < \varepsilon$. Este único corte controla todos los índices posteriores y prueba la convergencia a 0. Para refutar todo límite real de b, fijemos un candidato $L \in \mathbb{R}$ y la tolerancia $\varepsilon_0 = 1/2$. Si $|L| \geq 1/2$, ante cualquier corte $N \in \mathbb{N}$ el índice $n = 3N \geq N$ da $|b_n - L| = |L| \geq \varepsilon_0$. Si $|L| < 1/2$, la desigualdad triangular da $|1 - L| \geq 1 - |L| > 1/2$; el índice $n = 3N + 1 \geq N$ tiene $b_n = 1$ y también infringe la tolerancia. Los dos casos cubren todo candidato, y en cada uno existe un infractor después de cada corte. Por tanto, b no converge a ningún número real, sin recurrir a resultados sobre subsucesiones.

Una permutación biyectiva de índices conserva cuántas posiciones toman cada valor. En a, el valor 1 aparece únicamente en el índice 1; en b aparece en todos los índices $3k+1$, además del índice 2. Si $b_n = a_{\pi(n)}$ con $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ biyectiva, los índices distintos 1 y 4 de b tendrían que satisfacer $\pi(1) = \pi(4) = 1$, contradiciendo la inyectividad. La igualdad de conjuntos de valores permite cambiar multiplicidades; no convierte la construcción en una permutación de la sucesión convergente.

Ejercicio 9. Un testigo convertido indebidamente en corte

La siguiente es una **prueba defectuosa**: «Como $s = \sup S_a$, para cada $\varepsilon > 0$ hay un índice j con $s - \varepsilon < a_j \leq s$. Tomo $N = j$; entonces $|a_n - s| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$, y por tanto $a_n \to s$». Localiza la inferencia sin justificación y compara los cuantificadores de la premisa con los de la conclusión. Refútala mediante una sucesión cuyo supremo sea 3, no se alcance y para la que el candidato 3 falle como límite. Construye la sucesión usando, para cada $k \in \mathbb{N}$, tres posiciones consecutivas: un valor que se aproxime a 3, un valor 0 y un valor 1. Justifica el supremo y da una tolerancia fija con un infractor posterior a cada corte. Repara después el argumento general incorporando una hipótesis de comparación entre términos que permita usar §7.1; demuestra el paso reparado directamente, sin invocar el teorema de §7.3.

Solución. La premisa ofrece $\forall \varepsilon > 0\ \exists j \in \mathbb{N}$ con $s - \varepsilon < a_j \leq s$. La conclusión requiere $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}$, con $n \geq N \Rightarrow |a_n - s| < \varepsilon$. La inferencia defectuosa añade el control universal sobre $n \geq j$ sin una hipótesis que compare esos términos con a_j. La cota $a_n \leq s$ sí vale para todos los índices; la comparación inferior $s - \varepsilon < a_n$ sólo se ha acreditado en el índice testigo.

Como contraejemplo, definimos $r_{3k} = 3 - 1/(k+1)$, $r_{3k+1} = 0$ y $r_{3k+2} = 1$ para $k \in \mathbb{N}$. La división con resto por 3 hace la regla exhaustiva y única. Todos los valores son menores que 3: los de la primera cláusula están en $[2, 3)$ y los otros son 0 y 1. Por tanto, 3 es cota y no se alcanza. Dada $\varepsilon > 0$, elegimos k con $k + 1 > 1/\varepsilon$; en el índice $j = 3k$ tenemos $3 - \varepsilon < r_j < 3$. La caracterización de §7.2 demuestra que $3 = \sup S_r$ y que la imagen no tiene máximo.

El candidato 3 falla como límite: fijamos $\varepsilon_0 = 1$. Para cada $N \in \mathbb{N}$, el índice $n = 3N + 1 \geq N$ cumple $r_n = 0$ y $|r_n - 3| = 3 \geq 1$. Ningún corte controla esa tolerancia, aunque existan términos tan próximos al supremo como se pida. Una reparación suficiente consiste en añadir que a es no decreciente. Dada $\varepsilon > 0$, la aproximación al supremo proporciona j con $s - \varepsilon < a_j \leq s$. Tomamos $N = j$. Para cualquier $n \geq N$, la comparación entre índices de §7.1 da $a_j \leq a_n$ y la condición de cota da $a_n \leq s$. Se obtiene $s - \varepsilon < a_j \leq a_n \leq s$, de donde $|a_n - s| = s - a_n < \varepsilon$. El índice testigo se ha convertido en corte gracias a la dirección añadida; este argumento comprueba directamente la definición de C06 y no invoca el teorema posterior. La reparación establece una condición suficiente, sin afirmar que sea necesaria para converger al supremo.

La figura del testigo y la captura distingue obtener un término próximo de controlar todos los posteriores. Ilustra el mecanismo válido bajo monotonía; no representa la trayectoria del contraejemplo de este ejercicio.

7.3. La completitud convierte una barrera en límite

El alternante alcanza su supremo y regresa después al otro valor. Para una sucesión no decreciente ese regreso queda excluido: una vez encontrado $a_N > s-\varepsilon$, la comparación entre índices sostiene la misma desigualdad para todos los posteriores. Si además existe una cota superior U, la completitud proporciona $s = \sup S_a$. El término próximo que obtenemos de su minimalidad inicia entonces una cola atrapada entre $s-\varepsilon$ y s, exactamente la estimación que necesita el candidato s.

> **Convergencia de una sucesión no decreciente y acotada superiormente.** Sea $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una sucesión no decreciente. Si existe $U \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \le U$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces a converge y su límite es $s = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

La hipótesis admite constantes y repeticiones; el supremo puede alcanzarse o permanecer fuera del conjunto de valores. La prueba construye primero ese número real y después responde a cada tolerancia. **Demostración.** Sea $S_a = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. El conjunto es no vacío porque contiene a_0. La hipótesis $a_n \le U$ para todo índice implica que U es cota superior de S_a. Por el principio del supremo de C03 §3.2 existe un real $s = \sup S_a$. En particular, $a_n \le s$ para todo n.

Fijemos una tolerancia real $\varepsilon > 0$. Como $s-\varepsilon < s$, el número $s-\varepsilon$ no es cota superior de S_a: si lo fuera, la minimalidad de s daría $s \le s-\varepsilon$. Negar la afirmación universal $a_n \le s-\varepsilon$ proporciona, por lógica clásica y el orden real, un índice $N \in \mathbb{N}$ con $a_N > s-\varepsilon$. Ésta es la propiedad de aproximación recuperada en §7.2; no requiere una segunda invocación de completitud.

Para cualquier índice natural $n \ge N$, el no decrecimiento y §7.1 dan $a_N \le a_n$, mientras que la cota s da $a_n \le s$. Reunimos ambas comparaciones: $s-\varepsilon < a_N \le a_n \le s, \qquad 0 \le s-a_n < \varepsilon$. Como $a_n \le s$, el error es $|a_n - s| = s - a_n < \varepsilon$ para todo $n \ge N$. El corte obtenido para la tolerancia arbitraria cumple la definición de $a_n \to s$; por unicidad, s es el límite.

El candidato depende de la sucesión y queda fijado antes de recibir ε. El índice testigo se elige después y controla todos los $n \ge N$, sin que necesitemos conocer el menor corte posible ni un procedimiento computable para hallarlo. Si resulta $N = 0$, la misma prueba controla la sucesión entera. La desigualdad final permite $a_n = s$, pues entonces el error es cero. La frontera inferior $s-\varepsilon$, en cambio, queda excluida: allí el error sería exactamente ε. Una comparación no estricta $s-\varepsilon \le a_N$ no daría con esta misma tolerancia la estimación estricta requerida.

La recurrencia $u_0 = 0$, $u_{n+1} = (u_n + 1)/2$ permite usar el resultado sin conocer todavía el valor numérico del límite. Cada paso suma y divide por el real no nulo 2, por lo que determina un único término real a partir del anterior y define u en todo $\mathbb{N}$. Primero verificamos por inducción que $0 \le u_n \le 1$ para todos los índices. En la base, $u_0 = 0$ cumple ambas desigualdades. Si $0 \le u_n \le 1$, sumar 1 y dividir por 2, positivo, da $1/2 \le u_{n+1} \le 1$, y en particular $0 \le u_{n+1} \le 1$. Queda probado el invariante y la cota superior 1.

Con esa cota ya podemos determinar el signo de cada incremento: $u_{n+1} - u_n = \frac{1-u_n}{2} \ge 0$. La desigualdad usa el invariante ya demostrado. Por tanto u es no decreciente. El teorema recién probado se aplica: existe un límite real $L = \sup S_u$. Además, $0 = u_0 \le L \le 1$, porque el supremo domina cada valor y es menor o igual que la cota superior 1.

Ya existe, por tanto, un límite real. La ecuación que impone la recurrencia permitirá identificarlo en §7.6, cuando el desplazamiento y las reglas de C06 tengan esta existencia como hipótesis. Los primeros términos $0, 1/2, 3/4, 7/8$ ilustran el invariante; su validez en todos los índices procede de la inducción. El ejemplo $x_n = 1 - 1/(n+1)$ permite separar visualmente los papeles de cada paso. En §7.1 probamos que no decrece y en §7.2 acreditamos $\sup S_x = 1$. Para $\varepsilon = 1/4$, el índice $N = 4$ proporciona $x_4 = 4/5 > 3/4$. En cambio, $x_3 = 3/4$ está sobre la frontera inferior y no sirve para iniciar una captura con esa tolerancia: su error respecto de 1 es $1/4$.

Para cualquier $n \geq 4$, la monotonía da $x_4 \leq x_n$ y la cota da $x_n \leq 1$. También podemos verificar directamente el error del ejemplo: $1 - x_n = 1/(n+1) \leq 1/5 < 1/4$. Los términos desde el corte 4 quedan en la franja $(3/4, 1]$, contenida en la ventana abierta $(1-1/4, 1+1/4)$ de C06. La figura del testigo y la captura sitúa el corte 4 en el eje de índices y las fronteras 1 y 3/4 en el de valores. Sólo dibuja los índices 0–8; la estimación anterior acredita también los que quedan fuera de la muestra. El corte 4 corresponde a este ejemplo y a esta tolerancia.

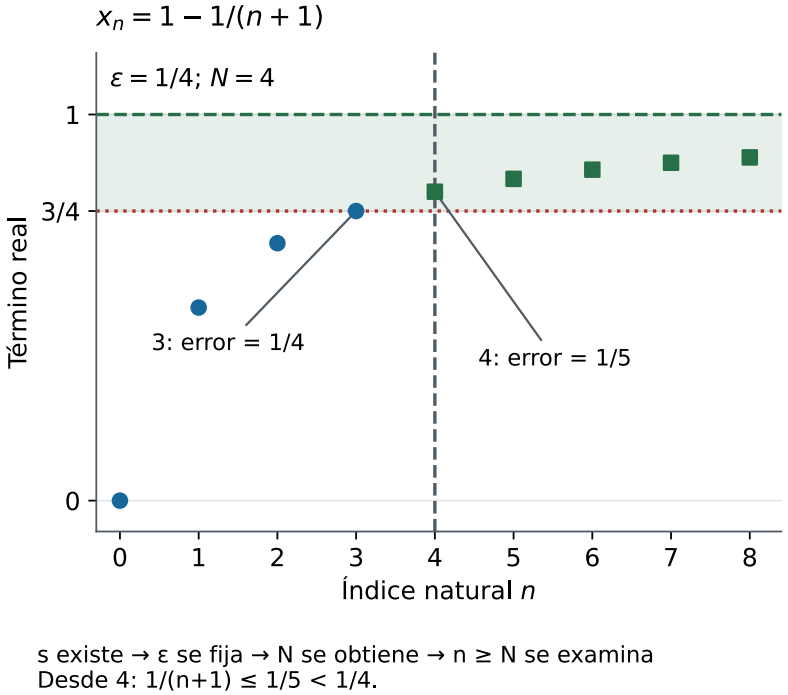


Figura 7.3. El testigo 4 entra estrictamente en la franja; la monotonía y la cota mantienen allí los términos posteriores. El supremo existe antes de elegir la tolerancia.

La cota inicial U garantiza que el conjunto sea admisible para completitud; no tiene por qué ser el candidato al límite. Si $U > s$, tomando $\varepsilon = (U - s)/2$ se obtiene $U - \varepsilon = (U + s)/2 > s$. Todos los términos quedan por debajo de esa frontera inferior, pues $a_n \leq s$. En consecuencia, esta ventana alrededor de U no captura ningún término y U no puede ser límite. El supremo elimina ese margen que una cota arbitraria puede dejar.

Si el supremo se alcanza en un índice K, la misma estructura da una conclusión adicional. Para todo $n \geq K$, el no decrecimiento implica $s = a_K \leq a_n$, y la cota implica $a_n \leq s$. Así $a_n = s$ desde K. En una sucesión no decreciente, alcanzar el supremo obliga a que la cola sea constante. El teorema incluye este caso y el de la constante desde el índice 0; no exige una aproximación sin alcanzamiento.

Ejercicios de la sección 7.3.

Ejercicio 10. Reensamblar el argumento y localizar las hipótesis

Sea $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ no decreciente y supón que $a_n \leq U$ para todo n, con $U \in \mathbb{R}$. Los siguientes fragmentos de prueba están desordenados:

- A: para todo $n \geq N$, $s - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq s$; por tanto $|a_n - s| < \varepsilon$.
- B: se forma $S_a = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ y se verifica que es no vacío y acotado superiormente.
- C: dada $\varepsilon > 0$, se obtiene un índice N con $s - \varepsilon < a_N$.
- D: existe un real $s = \sup S_a$.

Ordénalos, completa sus justificaciones e identifica qué dato o hipótesis autoriza cada paso. Distingue el papel de U del de s, y registra el orden en que se fijan s, ε, N y n. Para $w_n = 2 - 1/(n+1)$, acredita las hipótesis y el supremo, y comprueba que $N = 0$ sirve con tolerancia 2. Decide si sigue sirviendo con tolerancia 1 y proporciona un corte válido en ese caso.

Solución. El orden es B, D, C, A. En B, $S_a \subseteq \mathbb{R}$ es no vacío porque contiene a_0, y U lo domina porque domina todos los términos. En D se usa completitud, mediante el principio del supremo de C03: esas dos condiciones garantizan un real $s = \sup S_a$. La cota U garantiza que el conjunto es admisible; el supremo s será el candidato al límite. No se exige $U = s$.

En C fijamos $\varepsilon > 0$. El número $s - \varepsilon$ no puede ser cota superior, pues suponerlo contradice la minimalidad de s. Negar $a_n \le s - \varepsilon$ para todos los índices da un $N \in \mathbb{N}$ con $a_N > s - \varepsilon$. Este paso usa la propiedad del supremo ya obtenido, no una nueva aplicación de completitud. En A, para cualquier $n \ge N$, el no decrecimiento y §7.1 dan $a_N \le a_n$; la condición de cota de s da $a_n \le s$. Luego $0 \le s - a_n < \varepsilon$ y $|a_n - s| = s - a_n < \varepsilon$. La definición de C06 queda satisfecha. El orden de elección es: candidato s fijado por a, tolerancia ε, índice testigo N y, después, índice arbitrario $n \ge N$.

En $w_n = 2 - 1/(n+1)$, el denominador es positivo y $w_{n+1} - w_n = 1/[(n+1)(n+2)] > 0$. La sucesión es no decreciente y 2 es cota superior. Para toda $\eta > 0$, la arquimedianidad permite elegir j con $j + 1 > 1/\eta$, lo que da $2 - \eta < w_j < 2$. La caracterización de §7.2 demuestra que el supremo es 2. Con tolerancia 2, $N = 0$ sirve: para todo $n \ge 0$, $|w_n - 2| = 1/(n+1) \le 1 < 2$. Con tolerancia 1 no sirve, porque el índice 0 tiene error 1 y la definición exige error menor que 1. El corte $N = 1$ sí controla todos los índices posteriores, ya que $1/(n+1) \le 1/2 < 1$. Un corte 0 es tan admisible como cualquier otro natural; lo que decide su validez es la estimación para todos los términos desde él.

La figura del testigo y la captura permite volver a localizar las obligaciones: completitud fija el candidato y monotonía propaga la comparación.

Ejercicio 11. Una familia con denominador desplazado

Sean $\alpha, \beta, q \in \mathbb{R}$, con $\beta \ge 0$ y $q > 0$. Estudia la sucesión $a_n = \alpha - \beta/(n+q)$ para $n \in \mathbb{N}$: verifica su buena definición, dirección, cotas y existencia de límite mediante §7.3. Identifica después su supremo y su límite. Separa $\beta = 0$ de $\beta > 0$, indica cuándo la dirección es estricta y justifica la elección de un índice para cada tolerancia. Explica por qué hay que controlar el denominador también en $n = 0$.

Solución. Los parámetros α, β, q son reales; el índice n es natural y a_n es un término real. Como $q > 0$ y $n \ge 0$, el denominador $n + q$ es positivo en todo el dominio, incluido $n = 0$. La fórmula define una función de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$. Si se admitiese $q = 0$, la fórmula no definiría el término inicial cuando se presenta como ese cociente, incluso si $\beta = 0$.

La diferencia adyacente es $a_{n+1} - a_n = \frac{\beta}{n+q} - \frac{\beta}{n+1+q} = \frac{\beta}{(n+q)(n+1+q)} \ge 0$. Por tanto, a no decrece. Los denominadores positivos y $n + q \ge q$ dan $0 \le \beta/(n+q) \le \beta/q$, así que $a_0 = \alpha - \beta/q \le a_n \le \alpha$. Ya están acreditadas las hipótesis de §7.3: existe un límite real y es el supremo de S_a.

Si $\beta = 0$, todos los términos valen α, la dirección no es estricta y el supremo y el límite son α. Si $\beta > 0$, la diferencia adyacente es positiva en todo índice, de modo que la sucesión es estrictamente creciente; además, ningún término alcanza α. Para identificar el supremo, sea $\varepsilon > 0$. Elegimos por arquimedianidad un natural $N > \max\{0, \beta/\varepsilon - q\}$. Entonces $N + q > \beta/\varepsilon$ y $\alpha - \varepsilon < a_N < \alpha$. La cota superior α y esta aproximación demuestran $\sup S_a = \alpha$. El límite cuya existencia ya se obtuvo es, por ello, α. La misma elección controla toda la cola: si $n \ge N$, $|a_n - \alpha| = \beta/(n+q) \le \beta/(N+q) < \varepsilon$.

Ejercicio 12. Reconocer el supremo desde un límite ya conocido

Sea $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ no decreciente y supón que $a_n \to L \in \mathbb{R}$. Sin aplicar el teorema de §7.3 para obtener una cota, demuestra que $a_k \le L$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Usa esa cota y la convergencia para demostrar que $L = \sup S_a$. En el primer paso, explica cómo se coordina un índice k

previamente fijado con un corte de convergencia elegido después de una tolerancia. ¿Hace falta suponer de entrada una cota superior adicional?

Solución. Fijemos $k \in \mathbb{N}$. Si $a_k > L$, tomamos $\varepsilon = (a_k - L)/2 > 0$. La convergencia proporciona un corte N para esa tolerancia. El índice $n = \max\{k, N\}$ está después de k y después del corte: la monotonía da $a_k \le a_n$ y la convergencia da $a_n < L+\varepsilon = (a_k+L)/2 < a_k$. Las dos desigualdades se contradicen. Por tanto, $a_k \le L$ para cada k, y L es cota superior de S_a.

Recibida ahora cualquier tolerancia $\eta > 0$, la convergencia permite elegir un corte M con $|a_M - L| < \eta$. En particular, $L - \eta < a_M$, mientras que la cota recién probada da $a_M \le L$. Así se cumplen cota y aproximación para el candidato L; por §7.2, $L = \sup S_a$. No hizo falta suponer una cota adicional ni usar el teorema de §7.3 para fabricarla. En el primer argumento se fija k, se construye una tolerancia a partir del supuesto $a_k > L$, se obtiene N y se elige un índice que reúna ambas exigencias. La convergencia se usa para impedir que un término por encima de L pueda propagarse a todos los posteriores.

Ejercicio 13. Recuperar la desigualdad estricta

Supón que $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es no decreciente, que $s \in \mathbb{R}$ domina todos sus términos y que para cada $\delta > 0$ puedes obtener un índice N_δ con $s - \delta \le a_{N_\delta}$. Adapta la prueba ε–N para concluir $a_n \to s$, aunque el testigo sólo dé una desigualdad no estricta. Justifica también que $s = \sup S_a$. Explica por qué usar $\delta = \varepsilon$ y conservar cualquier testigo recibido no garantiza el error estricto; ilústralo con una sucesión no decreciente cuyo supremo sea 0, tolerancia 1 y testigo inicial situado en la frontera. Da una elección auxiliar que repare la prueba para toda tolerancia, no sólo para ese ejemplo.

Solución. La tolerancia auxiliar debe ser menor que la tolerancia pedida. Sea $\varepsilon > 0$ y tomemos $\delta = \varepsilon/2$. La hipótesis proporciona un índice $N = N_\delta$ con $s - \delta \le a_N$. Para todo $n \ge N$, §7.1 y la cota superior dan $s-\delta \le a_N \le a_n \le s$. Luego $|a_n - s| = s - a_n \le \delta = \varepsilon/2 < \varepsilon$. Aunque el primer control admita igualdad, el margen reservado entre δ y ε recupera el error estricto en toda la cola. Esto prueba $a_n \to s$ desde la definición.

También identifica el supremo sin circularidad. Para cada $\varepsilon > 0$, ese mismo testigo satisface $a_N \ge s - \varepsilon/2 > s - \varepsilon$. Junto con la cota global de s, la caracterización de §7.2 da $s = \sup S_a$. Si se usase $\delta = \varepsilon$, sólo se obtendría error $\le \varepsilon$ desde el testigo, insuficiente para conservar ese corte. Por ejemplo, definamos $a_0 = -1$ y $a_n = 0$ para $n \ge 1$. Es no decreciente y tiene supremo $s = 0$, alcanzado desde el índice 1. La condición de aproximación no estricta se cumple para toda $\delta > 0$, pues el índice 1 siempre sirve. Para $\delta = \varepsilon = 1$, también es admisible el testigo $N_1 = 0$, ya que $s - 1 = -1 = a_0$. Sin embargo, ese corte falla en la definición de convergencia con tolerancia 1: el término inicial tiene error 1. La elección $\delta = \varepsilon/2$ evita esta frontera para toda sucesión con las hipótesis indicadas.

La figura de la frontera estricta muestra por qué un punto en el borde no sirve con esa tolerancia. El margen auxiliar de esta prueba se obtiene por el argumento anterior, no de la muestra dibujada.

Ejercicio 14. Sumar valores con el mismo índice

Sean $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ no decrecientes y acotadas superiormente. Escribe $s = \sup S_a$ y $t = \sup S_b$, y define $c_n = a_n + b_n$. Demuestra que $\sup S_c = s + t$, coordinando los testigos de aproximación de ambas sucesiones. Verifica las hipótesis de §7.3 para c y deduce su límite. Distingue $S_c = \{a_n + b_n : n \in \mathbb{N}\}$ del conjunto $T = \{x + y : x \in S_a,\ y \in S_b\}$. ¿Son necesariamente iguales? Justifica la inclusión que siempre vale y construye un ejemplo con las hipótesis indicadas en el que la inclusión sea estricta.

Solución. Las imágenes S_a, S_b son conjuntos reales no vacíos y acotados superiormente; C03 garantiza los reales s, t. La fórmula $c_n = a_n + b_n$ define una sucesión real en todos los índices. Como $a_n \le s$ y $b_n \le t$, tenemos $c_n \le s+t$: la suma de los supremos es cota superior de S_c. Sea $\varepsilon > 0$. La aproximación a cada supremo, con tolerancia $\varepsilon/2$, proporciona índices j y k tales que $s-\varepsilon/2 < a_j$ y $t-\varepsilon/2 < b_k$. Tomamos $N = \max\{j, k\}$. Las dos direcciones no decrecientes

permiten reunir los testigos: $a_j \le a_N$ y $b_k \le b_N$. Al sumar, $s+t-\varepsilon < a_N + b_N = c_N \le s+t$. Por la caracterización de §7.2, $\sup S_c = s+t$. Elegir un índice común es necesario porque S_c contiene sumas de términos evaluados en la misma posición.

Además, $c_n = a_n + b_n \le a_{n+1} + b_{n+1} = c_{n+1}$ para todo n. La sucesión c es no decreciente y tiene la cota superior real $s+t$. §7.3 garantiza que converge a su supremo, por tanto $c_n \to s+t$. Siempre $S_c \subseteq T$: cada valor $a_n + b_n$ suma un elemento de S_a y uno de S_b. La inclusión puede ser estricta. Tomemos $a_0 = b_0 = 0$ y $a_n = b_n = 1$ para $n \ge 1$. Las dos funciones son no decrecientes y están acotadas superiormente por 1. Sus imágenes son $\{0,1\}$, de modo que $T = \{0,1,2\}$, mientras que $S_c = \{0,2\}$. El valor 1 combina alturas disponibles en posiciones distintas y nunca aparece como suma con el mismo índice. La igualdad de supremos demostrada no exige igualdad de esos conjuntos.

Ejercicio 15. Promedios finitos que conservan el destino

Sea $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ no decreciente y acotada superiormente. Define $s = \sup S_a$ y la sucesión de promedios finitos $c_n = (a_0 + \cdots + a_n)/(n+1)$. Prueba que está definida, que $a_0 \le c_n \le a_n \le s$ y que no decrece. Obtén la existencia de su límite con §7.3 y demuestra que ese límite coincide con el de a. Para identificarlo, compara los términos de un bloque final con un término a_K previamente fijado y separa la contribución de los K términos anteriores. Controla el error desde la definición ε–N, incluido el caso $K = 0$. No invoques un teorema general sobre promedios de sucesiones convergentes ni teoría de series.

Solución. Cada suma tiene $n+1$ términos reales y su denominador $n+1$ es positivo, incluido el índice 0. La fórmula define $c : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ y da $c_0 = a_0$. Para $0 \le j \le n$, §7.1 implica $a_0 \le a_j \le a_n$. Al sumar las $n+1$ comparaciones y dividir por $n+1$, se obtiene $a_0 \le c_n \le a_n \le s$.

El siguiente promedio se expresa como $c_{n+1} = ((n+1)c_n + a_{n+1})/(n+2)$. Por tanto, $c_{n+1} - c_n = \frac{a_{n+1} - c_n}{n+2} \ge 0$, porque $c_n \le a_n \le a_{n+1}$. Así, c no decrece y tiene cota superior s. El teorema de §7.3 garantiza un límite real $t = \sup S_c$. El mismo teorema aplicado a a da $a_n \to s$. Para identificar t, falta controlar cuánto pueden rebajar el promedio los términos iniciales.

Sea $\varepsilon > 0$. La aproximación al supremo permite fijar $K \in \mathbb{N}$ con $s - \varepsilon/2 < a_K \le s$. En un índice $n \ge K$, los primeros K términos tienen errores $0 \le s - a_j \le s - a_0$; los restantes, de índices $K, \dots, n$, tienen errores $0 \le s - a_j \le s - a_K$ por monotonía. Separando esas dos sumas finitas,

$$0 \le s - c_n = \frac{\sum_{j=0}^{n}(s - a_j)}{n+1} \le \frac{K(s-a_0)}{n+1} + \frac{n-K+1}{n+1}(s - a_K) \le \frac{K(s-a_0)}{n+1} + s - a_K.$$

Después de fijar K, el número $D = K(s - a_0)$ es un real no negativo fijo. Si $D = 0$, tomamos $N = K$. Si $D > 0$, la construcción del piso de C06 permite tomar $N = \max\{K, \lfloor 2D/\varepsilon \rfloor + 1\}$. En ambos casos $N \ge K$ y $N + 1 > 2D/\varepsilon$. Para todo $n \ge N$ se cumple $D/(n+1) < \varepsilon/2$, y la elección de K da $s - a_K < \varepsilon/2$. Luego $|c_n - s| = s - c_n < \varepsilon$. Esto demuestra directamente $c_n \to s$; la unicidad del límite de C06 identifica el límite ya obtenido como $t = s$.

Si $K = 0$, el prefijo separado es vacío y su suma y contribución son cero. La estimación sigue válida: todos los términos están en el bloque final y $s - c_n \le s - a_0 < \varepsilon/2$. La prueba controla un prefijo de longitud fija y el bloque restante; no emplea sumas infinitas ni un teorema general de promedios.

7.4. Cambiar la dirección y descartar un prefijo

Al cambiar el signo de cada término, una sucesión no creciente se vuelve no decreciente y una cota inferior se vuelve superior. Esa reflexión nos permite aprovechar el resultado anterior para la otra dirección. Dada $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definimos $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ por $b_n = -a_n$. Ambas funciones tienen el mismo dominio; el índice n se conserva y el término cambia de

signo. En general las funciones no son iguales. Sus conjuntos de valores se relacionan por $S_b = -S_a = \{-v : v \in S_a\}$: cada valor de una es el opuesto de un valor de la otra.

Si $a_{n+1} \le a_n$, multiplicar por -1 da $b_n = -a_n \le -a_{n+1} = b_{n+1}$. Si $\ell \le a_n$ para todo índice, entonces $b_n \le -\ell$. Quedan verificadas las dos hipótesis que necesita §7.3 para b. Todavía falta identificar qué significa para a el supremo de esos valores reflejados.

> **Convergencia de una sucesión no creciente y acotada inferiormente.** Si $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es no creciente y tiene una cota inferior real, entonces converge a $\inf S_a$.

Demostración. Sea $\ell_0 \in \mathbb{R}$ una cota inferior de a y definamos $b_n = -a_n$ en todo $\mathbb{N}$. Las comparaciones anteriores acreditan que b es no decreciente y tiene cota superior $-\ell_0$. Por §7.3, existe $t = \sup S_b$ y $b_n \to t$. Como $b_n \le t$, tenemos $-t \le a_n$ para todo índice, de modo que $-t$ es cota inferior de S_a. Para comprobar que es la mayor, sea ℓ cualquier cota inferior de S_a. De $\ell \le a_n$ se sigue $b_n \le -\ell$, así que $-\ell$ es cota superior de S_b. La minimalidad de t da $t \le -\ell$, y cambiar el signo da $\ell \le -t$. Por tanto $-t$ es mayor o igual que toda cota inferior de S_a y cumple $-t = \inf S_a$.

La regla del escalar de C06 §6.6, aplicada a $b_n \to t$ y al escalar -1, da $a_n = -b_n \to -t = \inf S_a$. También podemos verificar el transporte del error directamente: $|a_n - (-t)| = |-b_n + t| = |b_n - t|$, por lo que cualquier umbral de b para una tolerancia sirve para a con esa misma tolerancia. Quedan acreditados existencia, identificación extremal y convergencia en la dirección no creciente.

Hemos obtenido $\inf S_a = -\sup(-S_a)$. La reflexión cambia el signo de los valores y de las barreras, conserva los índices y no requiere que ninguno de esos extremos sea un término. Consideremos $a_n = 1 + 1/(n+1)$. La diferencia $a_{n+1} - a_n = -1/[(n+1)(n+2)]$ es negativa para todo n, y $a_n > 1$. Así, a es no creciente y tiene cota inferior 1. Además, C06 §6.3 proporciona para cualquier $\varepsilon > 0$ un índice j con $1/(j+1) < \varepsilon$, que da $a_j < 1 + \varepsilon$. La caracterización inferior de §7.2 acredita $\inf S_a = 1$, sin mínimo porque ningún término vale 1. El resultado recién probado da $a_n \to 1$.

La función reflejada tiene términos $b_n = -1 - 1/(n+1)$, es no decreciente y tiene supremo -1. Empieza en $b_0 = -2$, mientras que $a_0 = 2$. Los pares (n, a_n) y (n, b_n) tienen la misma coordenada de índice y alturas opuestas; no hay desplazamiento horizontal. Las referencias inferior 1 y superior -1 se corresponden por signo. Una muestra de índices 0–5 permite leer esa relación, pero las comparaciones y la aproximación anteriores son las que la justifican para todos los índices.

Una sucesión puede mantener una dirección sólo después de algunos términos. Diremos que es **eventualmente no decreciente** si existe $T \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \le a_{n+1}$ para todo $n \ge T$. Es **eventualmente no creciente** si desde algún índice vale la desigualdad opuesta. Es **eventualmente monótona** si cumple al menos una de esas propiedades. La dirección se fija para toda la cola; no se permite elegirla de nuevo en cada paso.

Para aplicar los resultados globales, debemos presentar esa cola como una sucesión con dominio natural. Fijado T, definimos $c : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ por $c_k = a_{T+k}$. La restricción de a al conjunto $D_T = \{n \in \mathbb{N} : n \ge T\}$ tiene dominio D_T; la función c tiene dominio $\mathbb{N}$. Si $T > 0$, estos dominios son distintos. Ambas recorren el mismo conjunto de valores de cola,

$S_{a,T} = \{a_n : n \in \mathbb{N},\ n \ge T\} = S_c$. La igualdad de conjuntos se comprueba en los dos sentidos: $c_k = a_{T+k}$ es un valor de cola; si $n \ge T$, el natural $k = n - T$ satisface $c_k = a_n$. El conjunto es no vacío porque contiene $a_T = c_0$.

> **Convergencia de una cola monótona con cota pertinente.** Sean $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ y $T \in \mathbb{N}$. Si $a_n \le a_{n+1}$ para todo $n \ge T$ y existe $U \in \mathbb{R}$ con $a_n \le U$ para todo $n \ge T$, entonces $a_n \to \sup S_{a,T}$. Si $a_{n+1} \le a_n$ para todo $n \ge T$ y existe $\ell \in \mathbb{R}$ con $\ell \le a_n$ para todo $n \ge T$, entonces $a_n \to \inf S_{a,T}$.

Demostración. Definamos $c_k = a_{T+k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. En el primer caso, $T + k \ge T$ y por tanto $c_k = a_{T+k} \le a_{T+k+1} = c_{k+1}$. Si U es la cota superior de la cola, también $c_k \le U$ para todo k. §7.3 da $c_k \to L = \sup S_c = \sup S_{a,T}$. En el segundo caso, las hipótesis dan

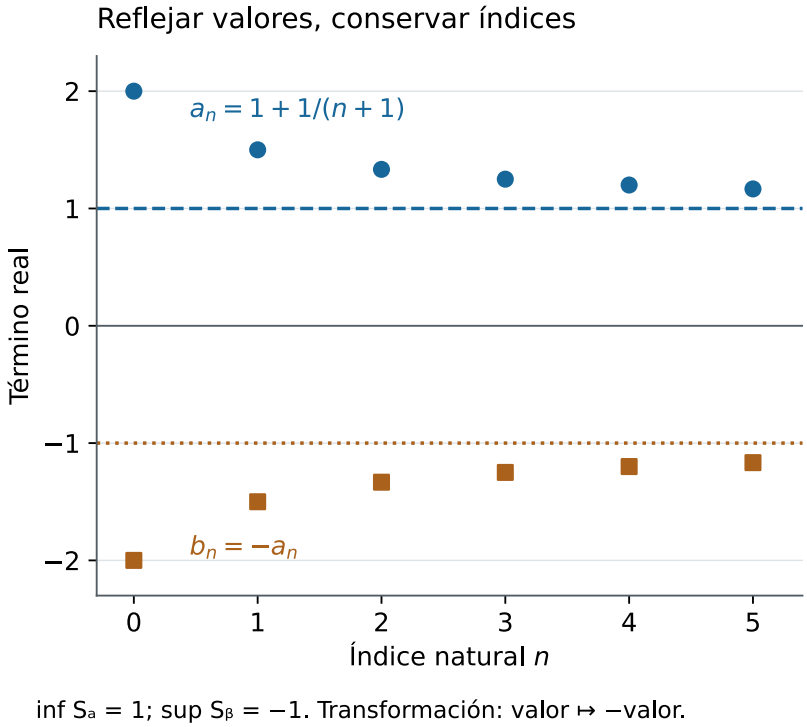


Figura 7.4. La reflexión cambia el signo de los valores y la dirección de monotonía; conserva cada índice y transporta el ínfimo al negativo del supremo.

$c_{k+1} = a_{T+k+1} \le a_{T+k} = c_k$ para todo k, y la cota inferior de la cola también es cota inferior de c. El resultado no creciente demostrado en esta sección da $c_k \to L = \inf S_c = \inf S_{a,T}$.

En cualquiera de los dos casos, fijemos $\varepsilon > 0$. La convergencia de c proporciona un $K \in \mathbb{N}$ tal que $|c_k - L| < \varepsilon$ para todo $k \ge K$. Tomamos el umbral $N = T + K$ para a. Si $n \ge N$, entonces $k = n - T$ es natural y $k \ge K$, de modo que $|a_n - L| = |c_{n-T} - L| < \varepsilon$. Esto demuestra $a_n \to L$ desde la definición y coincide con la transferencia de cola de C06 §6.4.

El extremo corresponde al conjunto de valores de la cola $S_{a,T}$. El prefijo sigue perteneciendo a la sucesión original, pero queda fuera del corte $T + K$ que controla su error; por eso no tiene que compartir aquel extremo. Si la monotonía empieza desde T_m y la cota pertinente vale desde T_c, podemos reunir las hipótesis en $T = \max\{T_m, T_c\}$. Todo índice desde ese corte cumple ambas. Para un corte T' mayor que uno ya admisible, el mismo resultado identifica el límite con el extremo de $S_{a,T'}$. Como C06 garantiza unicidad del límite de a, ambos extremos de cola son iguales. Esta afirmación se refiere a colas que cumplen las mismas hipótesis, no a cualquier conjunto obtenido eliminando valores sin atender a los índices.

Definamos $a_0 = 10$ y $a_n = 1 - 1/n$ para $n \ge 1$. Las cláusulas cubren todo $\mathbb{N}$ y evitan evaluar $1/n$ en cero. La sucesión no es no decreciente globalmente, porque baja de $a_0 = 10$ a $a_1 = 0$; tampoco es no creciente, porque $a_1 = 0 < a_2 = 1/2$. Desde $T = 1$, sin embargo, la cola no decrece. Su reindexación es $c_k = a_{1+k} = 1 - 1/(k+1)$, que coincide como función con x de §§7.1–7.3. Esa función tiene supremo de valores 1 y converge a 1. Por el resultado eventual, $a_n \to 1$. El supremo global es 10: es un término y domina los demás, que están entre 0 y 1. En cambio, $\sup S_{a,1} = 1$, y 1 no pertenece a ese conjunto de cola. El límite de a es el supremo de la cola monótona, no el supremo global 10.

Objeto	Dominio	Valores iniciales	Supremo del conjunto de valores
a	$\mathbb{N}$	$10, 0, 1/2, 2/3, \ldots$	10

Objeto	Dominio	Valores iniciales	Supremo del conjunto de valores
Restricción de a desde 1	D_1	En índices $1, 2, 3, \ldots$: $0, 1/2, 2/3, \ldots$	1
$c_k = a_{1+k}$	$\mathbb{N}$	En índices $0, 1, 2, \ldots$: $0, 1/2, 2/3, \ldots$	1

Las dos últimas filas comparten conjunto de valores, pero sus funciones tienen dominios distintos. a y c comparten dominio natural, pero no son iguales: $a_0 = 10$ y $c_0 = 0$. Su igualdad de límites es una igualdad entre números reales. En la figura del prefijo y la cola, la vista global conserva la altura 10 y la ampliación declarada usa la escala 0–1. Las filas de índices relacionan $n = 1 + k$ con las posiciones de la reindexación, sin unir los términos por una curva.

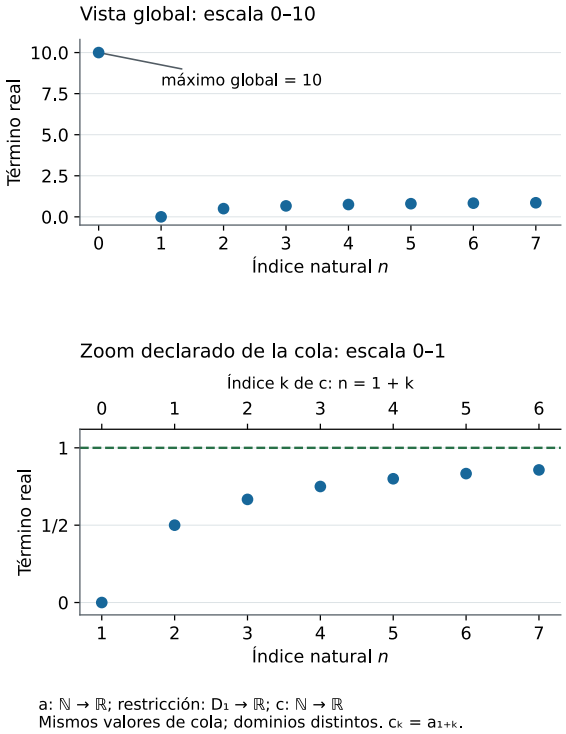


Figura 7.5. El prefijo fija el máximo global 10; la cola monótona tiene supremo y límite 1. Restringir y reindexar conserva sus valores, pero cambia el dominio.

Una cota global sigue siendo cota al restringirnos a una cola. La vuelta necesita incluir los valores del prefijo, aunque son sólo una cantidad finita. Si U es cota superior desde T, el conjunto finito $\{U\} \cup \{a_n : n < T\}$ es no vacío y tiene máximo M. Para $n < T$, $a_n \leq M$ porque el término pertenece a ese conjunto; para $n \geq T$, $a_n \leq U \leq M$. Así M es cota superior global.

Para una cota inferior ℓ de cola, tomamos el mínimo m del conjunto finito no vacío $\{\ell\} \cup \{a_n : n < T\}$. Si $n < T$, $m \leq a_n$; si $n \geq T$, $m \leq \ell \leq a_n$. Por tanto m es cota inferior global. Cuando $T = 0$, el prefijo está vacío y los conjuntos siguen conteniendo U o ℓ, por lo que el argumento también cubre ese caso.

En este ejemplo, incorporar el término inicial obliga a elevar la cota superior de 1 a 10. Los máximos y mínimos finitos extienden cotas a toda la función, aunque el límite conserve el extremo de la cola admisible.

Ejercicios de la sección 7.4.

Ejercicio 16. Reflexión con una altura de referencia

Sean $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$ fijo. Define $b_n = c - a_n$. Describe el dominio, codominio y conjunto de valores de b, y demuestra las equivalencias que transportan no decrecimiento a no crecimiento y viceversa. Transporta una cota inferior ℓ y una superior U de a. Cuando los extremos correspondientes existan, prueba $\sup S_b = c - \inf S_a$ y $\inf S_b = c - \sup S_a$.

Si $a_n \to L$, identifica el límite de b mediante una igualdad de errores. Describe qué cambia en los puntos de la gráfica y qué se conserva en sus coordenadas de índice. ¿Las funciones a y b son necesariamente iguales?

Solución. b es una función de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$, y su conjunto de valores es $S_b = \{c - x : x \in S_a\}$. Cada término b_n tiene esa forma; recíprocamente, si $x = a_j$, entonces $c - x = b_j$. La transformación conserva el índice y cambia el término real. Para cada n, $a_n \le a_{n+1}$ equivale a $c - a_{n+1} \le c - a_n$, es decir, a $b_{n+1} \le b_n$. Al exigirlo en todos los índices, el no decrecimiento de a equivale al no crecimiento de b. Del mismo modo, $a_{n+1} \le a_n$ equivale a $b_n \le b_{n+1}$; el no crecimiento de a equivale al no decrecimiento de b. Las implicaciones son reversibles porque $a_n = c - b_n$.

Una cota inferior $\ell \le a_n$ se transforma en la cota superior $b_n \le c - \ell$, y una cota superior $a_n \le U$ en la cota inferior $c - U \le b_n$. También estas correspondencias son equivalencias. Si $t = \inf S_a$, $c - t$ es cota superior de S_b. Sea V cualquier otra cota superior de S_b. Entonces $c - V$ es cota inferior de S_a, por lo que $c - V \le t$ y $c - t \le V$. Así $\sup S_b = c - t$. Si $s = \sup S_a$, $c - s$ es cota inferior de S_b. Toda cota inferior v de S_b da una cota superior $c - v$ de S_a; de $s \le c - v$ resulta $v \le c - s$. Por ello $\inf S_b = c - s$. No se requiere que los extremos sean términos.

Si $a_n \to L$, la identidad $|b_n - (c - L)| = |-(a_n - L)| = |a_n - L|$ muestra que el mismo corte sirve para la misma tolerancia, y prueba $b_n \to c - L$. En las gráficas discretas, (n, a_n) se convierte en $(n, c - a_n)$: la coordenada horizontal no cambia y la altura se refleja respecto de $c/2$. La igualdad $a = b$ no es necesaria; se cumple exactamente cuando $a_n = c/2$ para todo n, pues $a_n = c - a_n$ equivale a $2a_n = c$. Por ejemplo, las constantes $a_n = c/2 + 1$ y $b_n = c/2 - 1$ son distintas.

La figura de la reflexión representa el caso de altura de referencia cero. El transporte con la altura arbitraria de este ejercicio se justifica mediante las identidades anteriores.

Ejercicio 17. Un prefijo arbitrario y una barrera no alcanzada

Fija $T \in \mathbb{N}$, $L \in \mathbb{R}$, $h > 0$ y datos reales $x_0, \dots, x_{T-1}$, entendiendo que no hay datos si $T = 0$. Construye una sucesión $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ con ese prefijo y una cola cuyo término de posición reindexada k esté a distancia $h/(k+1)$ por debajo de L. Define la restricción a $D_T = \{n \in \mathbb{N} : n \ge T\}$ y la sucesión reindexada. Comprueba la dirección y el supremo de la cola, determina el límite de a y calcula el supremo global. Si $T > 0$, clasifica el alcanzamiento según el máximo del prefijo sea menor, igual o mayor que L. Trata también $T = 0$, sin tomar el máximo de un conjunto vacío.

Solución. Definimos $a_n = x_n$ si $n < T$ y $a_n = L - h/(n - T + 1)$ si $n \ge T$. Las cláusulas son disjuntas y cubren $\mathbb{N}$. En la segunda, $n - T$ es natural y el denominador es positivo. La restricción $a|_{D_T}$ tiene dominio D_T, mientras que la sucesión reindexada $v : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tiene términos $v_k = a_{T+k} = L - h/(k+1)$. Sus conjuntos de valores son iguales: cada v_k procede del índice $T + k$, y cada índice $n \ge T$ corresponde a $k = n - T$. Si $T = 0$, los dominios también coinciden y $v = a$; si $T > 0$, la restricción y v tienen dominios distintos.

La diferencia $v_{k+1} - v_k = h/[(k+1)(k+2)]$ es positiva porque $h > 0$. Además, $v_k < L$ para todo k. Para cada $\varepsilon > 0$, la arquimedianidad permite elegir k con $k + 1 > h/\varepsilon$, y entonces $L - \varepsilon < v_k < L$. Por §7.2, el supremo del conjunto de valores de la cola es L y no se alcanza. El teorema eventual de §7.4 da $a_n \to L$. Explícitamente, un corte K de v se transfiere al corte $T + K$ de a.

Si $T > 0$, el conjunto finito no vacío del prefijo tiene máximo $H = \max\{x_0, \dots, x_{T-1}\}$. El número $G = \max\{H, L\}$ domina el prefijo y la cola, así que es cota superior global. Cualquier

cota superior global U domina el prefijo y por tanto $H \le U$; también domina la cola, por lo que su supremo cumple $L \le U$. Se sigue $G \le U$, y queda demostrado $\sup S_a = G$ por minimalidad.

Si $H < L$, el supremo global es L, pero ningún valor del prefijo ni de la cola lo alcanza; no hay máximo. Si $H = L$, el supremo es L y se alcanza en los índices del prefijo cuyo valor es H; la cola no lo alcanza. Si $H > L$, el supremo es H y también se alcanza en el prefijo, pues todos los términos de la cola son menores que $L < H$. En los dos últimos casos el supremo es máximo. Si $T = 0$, no se define H: el conjunto global es el de la cola, tiene supremo L y carece de máximo. El límite vale L en todos los casos, aunque el prefijo pueda elevar el supremo global.

La figura del prefijo y la cola ilustra el caso T=1 con término inicial 10. La clasificación para el prefijo y el corte generales de este ejercicio procede de la prueba anterior.

Ejercicio 18. Incorporar el prefijo a los extremos

Sea $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ y sea $T \in \mathbb{N}$. Supón que $Q = \{a_n : n \ge T\}$ está acotado por ambos lados y escribe $s = \sup Q$, $t = \inf Q$ y $P = \{a_n : n < T\}$. Prueba que $\sup S_a = \max(\{s\} \cup P)$, $\inf S_a = \min(\{t\} \cup P)$. Justifica que las expresiones están definidas y demuestra sus propiedades extremales, no sólo que proporcionan cotas. Explica el caso $T = 0$ y por qué no hace falta que la cola sea monótona. Distingue los conjuntos P, Q de sus extremos reales, que pueden no pertenecer a Q.

Solución. El conjunto de valores de la cola Q es no vacío porque contiene a_T. Al estar acotado por ambos lados, C03 garantiza sus extremos reales s, t. El conjunto P es finito, posiblemente vacío. Por tanto, $\{s\} \cup P$ y $\{t\} \cup P$ son finitos y no vacíos, y tienen máximo y mínimo respectivamente. Denotemos esos números por G y g. Como $S_a = P \cup Q$, todo valor del prefijo es $\le G$ por la definición del máximo finito, y todo valor de la cola es $\le s \le G$. Así G es cota superior de S_a. Si U es cualquier cota superior global, domina P y domina Q; de lo segundo se obtiene $s \le U$. Luego U domina todos los elementos de $\{s\} \cup P$, así que $G \le U$. Queda probada la minimalidad de G y, por tanto, $G = \sup S_a$.

En la dirección inferior, cada valor del prefijo es $\ge g$ y cada valor de la cola es $\ge t \ge g$. Por ello g es cota inferior global. Si ℓ es otra cota inferior global, está por debajo de todos los valores de P y es cota inferior de Q, de modo que $\ell \le t$. Entonces está por debajo de todos los elementos de $\{t\} \cup P$, incluido su mínimo g. Esto prueba $\ell \le g$ y la maximalidad de g como cota inferior; así $g = \inf S_a$.

Si $T = 0$, $P = \emptyset$ y los conjuntos finitos son los singletones $\{s\}$ y $\{t\}$: las fórmulas dan directamente $\sup S_a = s$ e $\inf S_a = t$. La monotonía no se ha usado; sólo se requieren extremos de la cola y finitud del prefijo. Los números s, t se añaden a los conjuntos auxiliares para calcular sus extremos finitos, sin añadirlos al conjunto de valores Q. Pueden no pertenecer a la cola.

Ejercicio 19. Dos extensiones de la misma cola

Sea $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una sucesión monótona y acotada por ambos lados. Fija $T \in \mathbb{N}$ con $T \ge 2$. Construye $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tales que $a_{T+k} = b_{T+k} = u_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, con a globalmente monótona y b globalmente no monótona. La construcción debe servir también cuando u sea constante. Verifica todas las comparaciones de los prefijos y las fronteras necesarias, demuestra que ambas extensiones tienen el mismo límite e identifica ese límite según la dirección de u. Explica por qué un único término de prefijo no permitiría garantizar la construcción de b para toda cola constante. Distingue igualdad de cola, igualdad de límite e igualdad de funciones.

Solución. Para $n < T$, ponemos $a_n = u_0$. Para la otra extensión, fijamos $b_0 = u_0 + 1$ y $b_n = u_0 - 1$ en los índices $1 \le n < T$. Desde T, definimos $a_n = b_n = u_{n-T}$. La condición $T \ge 2$ permite las dos primeras posiciones del prefijo, y todas las cláusulas quedan dentro de sus dominios. Las funciones resultantes están definidas en todo $\mathbb{N}$. En a, las comparaciones interiores al prefijo son igualdades; la frontera también lo es, pues $a_{T-1} = u_0 = a_T$. Desde T,

las comparaciones son las de u. Así a conserva globalmente cualquier dirección de monotonía que satisfaga u. En b, la caída $b_0 = u_0 + 1 > b_1 = u_0 - 1$ refuta el no decrecimiento. La subida en la frontera $b_{T-1} = u_0 - 1 < b_T = u_0$ refuta el no crecimiento. Ambos infractores existen incluso si u es constante; b no es monótona.

Si u es no decreciente, su cota superior permite aplicar §7.3 y obtener $u_k \to L = \sup S_u$. Si es no creciente, su cota inferior permite aplicar §7.4 y obtener $u_k \to L = \inf S_u$. Si cumple ambas direcciones, es constante y esos dos extremos coinciden con su valor. Dada una tolerancia, un corte K para u se transfiere a $N = T + K$ para ambas extensiones: para $n \geq N$, el índice $k = n - T$ satisface $k \geq K$ y $a_n = b_n = u_k$. Por ello $a_n \to L$ y $b_n \to L$.

Con un único término de prefijo y una cola constante $u_k = d$, cualquier extensión tiene la forma $x, d, d, \ldots$. Si $x \leq d$, es no decreciente; si $x \geq d$, es no creciente. Nunca puede refutar ambas direcciones. Dos posiciones de prefijo permiten garantizar los dos infractores para toda cola admitida. En nuestra construcción, las extensiones tienen igual restricción al dominio D_T e igual límite, pero son funciones distintas porque $a_0 = u_0 \neq u_0 + 1 = b_0$.

Ejercicio 20. Mínimo y máximo de dos colas alineadas

Sean $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eventualmente no decrecientes y acotadas superiormente. Define $m_n = \min\{a_n, b_n\}$ y $M_n = \max\{a_n, b_n\}$. Demuestra que ambas sucesiones son eventualmente no decrecientes y tienen cota superior, y determina sus límites en términos de los límites de a y b. Reúne los cortes de monotonía, reindexa las dos colas desde un corte común y usa aproximaciones a sus supremos para identificar los supremos de los valores alineados de mínimo y máximo. Justifica la transferencia a las funciones originales. No uses continuidad de mínimo o máximo ni fórmulas de límites que se hayan supuesto antes de acreditar existencia.
Solución. Sean T_a, T_b cortes de no decrecimiento y U_a, U_b cotas superiores globales. Tomamos $T = \max\{T_a, T_b\}$ y definimos $x_k = a_{T+k}$, $y_k = b_{T+k}$ en $\mathbb{N}$. Ambas funciones no decrecen y tienen sus respectivas cotas superiores. Sus imágenes son los conjuntos de valores de las colas desde T. Por §7.3 existen $s = \sup S_x$, $t = \sup S_y$, con $x_k \to s$ e $y_k \to t$; la transferencia de §7.4 da $a_n \to s$ y $b_n \to t$.

Las funciones originales m, M tienen dominio $\mathbb{N}$ y codominio $\mathbb{R}$, pues mínimo y máximo de dos reales están definidos. Sus reindexaciones son $p_k = m_{T+k} = \min\{x_k, y_k\}$ y $q_k = M_{T+k} = \max\{x_k, y_k\}$. Para cada k, $p_k \leq x_k \leq x_{k+1}$ y $p_k \leq y_k \leq y_{k+1}$, de modo que $p_k \leq \min\{x_{k+1}, y_{k+1}\} = p_{k+1}$. Asimismo, q_{k+1} domina $x_{k+1} \geq x_k$ e $y_{k+1} \geq y_k$, y por tanto domina su máximo q_k. Así p, q no decrecen, y m, M son eventualmente no decrecientes desde T.

Como $x_k \leq s$ y $y_k \leq t$, se obtiene $p_k \leq v = \min\{s, t\}$ y $q_k \leq w = \max\{s, t\}$. Para identificar estos candidatos como supremos de las imágenes alineadas, sea $\varepsilon > 0$. La aproximación a s y t proporciona índices j, ℓ con $x_j > s - \varepsilon$ e $y_\ell > t - \varepsilon$. Tomamos $K = \max\{j, \ell\}$; la monotonía implica $x_K > s - \varepsilon$ e $y_K > t - \varepsilon$. Ambos términos son mayores que $v - \varepsilon$, por lo que $p_K > v - \varepsilon$. Para el máximo, si $s \geq t$, $q_K \geq x_K > s - \varepsilon = w - \varepsilon$; si $t > s$, $q_K \geq y_K > t - \varepsilon = w - \varepsilon$. Las cotas y estas aproximaciones prueban $\sup S_p = v$ y $\sup S_q = w$ por §7.2.

Aplicando §7.3 a p, q y transfiriendo sus cortes desde T, resulta $m_n \to \min\{s, t\}$ y $M_n \to \max\{s, t\}$. En términos de los límites originales, son respectivamente $\min\{\lim a_n, \lim b_n\}$ y $\max\{\lim a_n, \lim b_n\}$. Además, las funciones completas están acotadas superiormente: $m_n \leq a_n \leq U_a$ y $M_n \leq \max\{U_a, U_b\}$ en todo índice. La prueba usa los extremos de colas comunes, no supone que coincidan con los extremos globales afectados por prefijos. No se ha utilizado continuidad de mínimo o máximo ni una fórmula de límites para acreditar su propia existencia.

7.5. Qué falla al retirar una hipótesis

Una sucesión no decreciente ya tiene cota inferior: $a_0 \leq a_n$ para todo índice. Eso deja abierta la posibilidad de subir más allá de cualquier barrera. Para garantizar un límite necesitamos la cota del otro lado. En la dirección no creciente, a_0 proporciona

automáticamente una cota superior y sigue haciendo falta una inferior. El lado de la cota que debemos buscar depende de la dirección.

La sucesión $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por $a_n = n$ muestra la primera dificultad. Es estrictamente creciente y tiene cota inferior 0. Sin embargo, no tiene cota superior real: por la propiedad arquimediana, para cualquier $M \in \mathbb{R}$ existe un natural $N > M$, y entonces $a_N > M$. El término a_N y el índice N tienen aquí el mismo valor numérico; siguen desempeñando papeles diferentes en la función.

La falta de cota superior dice que cada barrera real es superada por algún término. Por sí sola, esa afirmación no exige que todos los términos posteriores la superen. La monotonía permite dar precisamente ese paso.

> **Escape por arriba.** Si $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es no decreciente y no tiene cota superior, entonces para cada $M \in \mathbb{R}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > M$ para todo $n \geq N$.

Demostración. Fijemos una barrera $M \in \mathbb{R}$. Como no es cota superior, existe $N \in \mathbb{N}$ con $a_N > M$. Si $n \geq N$, la monotonía da $a_n \geq a_N > M$. Este mismo N sirve para todos los índices posteriores. Hemos demostrado $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\qquad n \geq N \implies a_n > M$.

El corte responde a la barrera M y puede depender de ella. No podría funcionar uno solo para todas: tomando $M = a_N$, el propio índice N incumpliría $a_N > M$. La monotonía es la que convierte superar una barrera una vez en superarla durante toda una cola. Este escape excluye cualquier límite real. Para comprobarlo con todos los candidatos, fijemos $A \in \mathbb{R}$ y la tolerancia $\varepsilon_0 = 1$. Aplicando el escape a la barrera $M = A + 1$, obtenemos un corte T desde el cual $a_n > A + 1$. Dado cualquier corte propuesto $K \in \mathbb{N}$, tomamos $n = \max\{K, T\}$. Entonces $n \geq K$ y $|a_n - A| > 1$. Por tanto ningún corte hace que todos los errores posteriores sean menores que 1. Como el argumento vale para cada A, la sucesión no converge a ningún número real.

El escape describe términos reales frente a todas las barreras reales; no añade un número infinito al codominio. La prueba anterior excluye cada candidato mediante una tolerancia fija y un infractor después de cualquier corte.

> **Escape por abajo.** Si $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es no creciente y no tiene cota inferior, entonces para cada $M \in \mathbb{R}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < M$ para todo $n \geq N$. Tampoco tiene límite real.

Demostración. Definamos $b_n = -a_n$ en todo $\mathbb{N}$. La dirección de a hace que b sea no decreciente. Si b tuviera una cota superior U, tendríamos $a_n \geq -U$ para todo n, contradiciendo la ausencia de cota inferior. Así, b no tiene cota superior. Aplicamos el escape por arriba a b con la barrera $-M$: existe N tal que $b_n > -M$ para todo $n \geq N$, lo que equivale a $a_n < M$.

Para excluir un candidato real A, usamos ahora la barrera $M = A - 1$. Existe T tal que $a_n < A - 1$ para todo $n \geq T$. Con $\varepsilon_0 = 1$, cualquier corte K admite el índice $n = \max\{K, T\}$, que cumple $n \geq K$ y $|a_n - A| > 1$. Queda refutado cada candidato. La sucesión $a_n = -n$ realiza este caso: es no creciente, tiene cota superior 0 y carece de cota inferior real.

La otra hipótesis también hace trabajo. Para $d_n = (-1)^n$, todos los valores están en $[-1, 1]$, pero $d_0 > d_1$ y $d_1 < d_2$ refutan las dos direcciones. Los mismos cambios reaparecen después de cualquier corte. La acotación tampoco le proporciona un límite. Fijemos cualquier candidato $A \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon_0 = 1$. Si $A \geq 0$, para cualquier corte K elegimos el índice impar $n = 2K + 1 \geq K$. Entonces $d_n = -1$ y $|d_n - A| = 1 + A \geq 1$. Si $A < 0$, elegimos el índice par $n = 2K \geq K$. Entonces $d_n = 1$ y $|d_n - A| = 1 - A > 1$. En ambos casos, ningún corte mantiene todos los errores estrictamente por debajo de 1. Esta prueba, coherente con la refutación de límites de C06, cubre todos los candidatos; las cotas sólo controlan el tamaño de los valores.

Para una sucesión monótona de valores reales podemos reunir los resultados en una equivalencia:

> Una sucesión monótona converge a un número real si y sólo si está acotada.

En la dirección de convergencia a acotación usamos el resultado ya demostrado en C06 §6.5, que vale para toda sucesión real convergente. En la dirección inversa, la acotación proporciona una cota superior si la sucesión es no decreciente, y §7.3 da la convergencia. Si es no creciente, proporciona una cota inferior y aplicamos §7.4. Una sucesión constante cumple ambas direcciones y converge a su valor constante. No se necesita monotonía estricta.

El alternante impide retirar la dirección de la implicación acotación–convergencia, mientras que $a_n = n$ impide retirar la cota de la afirmación para sucesiones monótonas. Bajo no decrecimiento basta la cota superior porque a_0 ya acota por abajo; bajo no crecimiento basta la inferior. Retirar una hipótesis elimina la garantía del teorema; no obliga a que toda sucesión fuera de sus hipótesis diverja. Por ejemplo, $e_n = (-1)^n/(n+1)$ converge a 0, como se acreditó en C06 §6.3. No es siquiera eventualmente monótona: dado un corte K, el paso de $2K$ a $2K+1$ disminuye de un valor positivo a uno negativo, mientras que el paso de $2K+1$ a $2K+2$ aumenta de uno negativo a uno positivo. Ambas infracciones aparecen desde ese corte. Así, converger no implica monotonía, y las cotas no deciden por sí solas entre d y e.

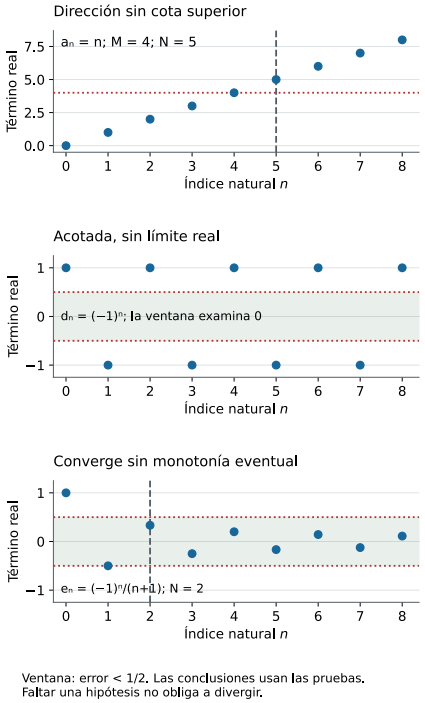


Figura 7.6. La dirección sin cota y la acotación sin dirección no garantizan convergencia. El alternante amortiguado sí converge: faltar una hipótesis no obliga a divergir.

La figura de las hipótesis reúne tres gráficas discretas. Para $a_n = n$, la muestra supera $M = 4$ desde $N = 5$; la monotonía justifica que la desigualdad continúe fuera de ella. Para $d_n = (-1)^n$, la ventana de radio $1/2$ centrada en 0 excluye todos los valores, pero sólo examina ese candidato: la prueba anterior refuta los demás. Para $e_n = (-1)^n/(n+1)$, $|e_n| \leq 1/3 < 1/2$ desde $N = 2$, mientras que $|e_1| = 1/2$ queda en la frontera excluida. Las fórmulas justifican estas afirmaciones para todos los índices pertinentes. El contraste permite ver por qué faltar una hipótesis elimina la garantía sin obligar a divergir. Ninguno de los paneles asigna valores entre índices naturales.

Ejercicios de la sección 7.5.

Ejercicio 21. Superar una barrera y controlar una cola

Para $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, escribe con todos sus dominios estas cuatro afirmaciones: no tiene cota superior, escapa eventualmente por arriba, no tiene cota inferior y escapa eventualmente por abajo. Obtén las negaciones de las dos afirmaciones de escape. Compara las obligaciones sobre índices en ausencia de cota y en escape, e indica qué propiedad de comparación permite pasar de una a otra en cada dirección.

Demuestra que escape implica ausencia de la cota correspondiente. ¿Puede el corte de escape depender de la barrera real? ¿Podría existir un único corte válido para todas las barreras? Explica por qué los cuantificadores deben incluir barreras de ambos signos.

Solución. La ausencia de cota superior, obtenida al negar $\exists U \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} :\ a_n \leq U$, es $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists j \in \mathbb{N} :\ a_j > M$. El escape por arriba exige $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} :\quad n \geq N \Rightarrow a_n > M$. La ausencia de cota inferior es $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists j \in \mathbb{N} :\ a_j < M$. El escape por abajo exige

$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} :\quad n \geq N \Rightarrow a_n < M$. Sus negaciones respectivas son $\exists M \in \mathbb{R}\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N} :\ n \geq N$ y $a_n \leq M$, y $\exists M \in \mathbb{R}\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N} :\ n \geq N$ y $a_n \geq M$. En cada negación se fija una barrera antes de recibir cortes arbitrarios y se construye un infractor después de cada corte.

La ausencia de cota pide un término que supere la barrera en la dirección indicada. El escape pide un corte desde el que todos los términos la superen. Si a no decrece, un testigo $a_j > M$ se propaga a cada $n \geq j$ por $a_j \leq a_n$, y podemos tomar $N = j$. Si a no crece, un testigo $a_j < M$ se propaga mediante $a_n \leq a_j$ para $n \geq j$. Estas son las comparaciones que añaden el control universal de la cola. En sentido inverso, el escape por arriba o por abajo proporciona un testigo para ausencia de cota tomando $j = N$.

El corte puede depender de M, como indica el orden de cuantificadores. No puede haber un único corte N para todas las barreras: por arriba, la barrera $M = a_N$ contradice el requisito $a_N > M$; por abajo, la misma barrera contradice $a_N < M$. Las barreras se cuantifican sobre todo $\mathbb{R}$, incluidos ambos signos, pues las definiciones no restringen las cotas ni las posiciones de los valores a una semirrecta. El índice N es natural y el término a_N, usado como barrera en este argumento, es real.

Ejercicio 22. Valores grandes con retornos arbitrariamente tardíos

Fijado $r \in \mathbb{R}$, construye $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sin cota superior que vuelva al valor r después de cualquier corte. Da una definición completa por paridades y justifica ambas propiedades con sus cuantificadores. Refuta el escape eventual por arriba mediante una barrera real explícita y un índice infractor construido después de cada corte. ¿Qué paso de la prueba de escape monótono queda sin justificación en tu ejemplo? No uses resultados sobre subsucesiones.

Solución. Definimos $a_{2k} = r + k$ y $a_{2k+1} = r$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Todo índice tiene una única paridad, así que la regla define una función de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$. Sea $U \in \mathbb{R}$ cualquier candidato a cota superior. La arquimedianidad permite elegir $k \in \mathbb{N}$ con $k > U - r$. Entonces el índice $2k$ tiene término $a_{2k} = r + k > U$. Por tanto, a carece de cota superior. Para cada corte $N \in \mathbb{N}$, el índice $n = 2N + 1 \geq N$ cumple $a_n = r$, de modo que las visitas a r ocurren después de cualquier corte.

Fijamos la barrera $M = r$. Ante cualquier N, ese mismo índice $n = 2N + 1$ satisface $a_n = r \leq M$, y refuta el requisito $a_n > M$ de toda una cola. Ésta es la negación cuantificada del escape por arriba, aunque la sucesión no tenga cota superior. La propagación monótona no está disponible: por ejemplo, $a_2 = r + 1 > a_3 = r$. En general, los pasos de $2k$ a $2k + 1$ con $k \geq 1$ vuelven de $r + k$ a r. Encontrar un término grande no obliga a los posteriores a permanecer por encima de la barrera. La refutación se construye directamente por índices, sin usar teoría de subsucesiones.

Ejercicio 23. Dos garantías de convergencia defectuosas

Audita estas dos afirmaciones defectuosas:

1. «Si una sucesión real no decrece y tiene cota inferior, entonces converge a un real por el teorema monótono».
2. «Si todos los términos de una sucesión real están en un intervalo cerrado acotado, entonces converge a un real».

Refuta la primera con una familia de la forma $r + hn$, donde $r \in \mathbb{R}$ y $h > 0$. Refuta la segunda mediante una sucesión periódica de tres valores distintos en $[r-h, r+h]$, excluyendo todos los candidatos reales a límite. Identifica la hipótesis ausente y formula una reparación suficiente para cada afirmación. Explica por qué la falta de una garantía no permite declarar divergente a toda sucesión que no sea eventualmente monótona; construye una familia convergente que lo demuestre y verifica su convergencia y sus infractores de dirección.

Solución. La primera afirmación aporta una cota del lado equivocado. Para $u_n = r + hn$, con $h > 0$, la diferencia adyacente es $h > 0$ y todos los términos son $\geq r$. Sin embargo, ante cualquier barrera M, elegimos un natural $N > \max\{0, (M - r)/h\}$. Para todo $n \geq N$, $u_n \geq r + hN > M$. La familia escapa por arriba y, por §7.5, no tiene límite real. Una reparación suficiente consiste en exigir una cota superior además del no decrecimiento; §7.3 da entonces convergencia al supremo de los valores. La cota inferior ya está disponible en u_0 para toda sucesión no decreciente.

Para la segunda afirmación, definimos $v_{3k} = r - h$, $v_{3k+1} = r$ y $v_{3k+2} = r + h$. Las tres cláusulas cubren el dominio natural y todos los términos están en $[r - h, r + h]$. Los valores son distintos porque $h > 0$. Fijemos un candidato $A \in \mathbb{R}$ y la tolerancia h. Si $A \geq r$, para cada corte N el índice $n = 3N$ tiene $|v_n - A| = A - r + h \geq h$. Si $A < r$, el índice $n = 3N + 2$ tiene $|v_n - A| = r + h - A > h$. Ambos índices están después del corte recibido, así que queda refutado todo candidato real. La acotación por sí sola no garantiza un límite. Una reparación suficiente es añadir monotonía global, o monotonía eventual usando §7.4 y las cotas del intervalo para la cola.

La falta de esa hipótesis de dirección no obliga a divergir. La familia $e_n = r + h(-1)^n/(n+2)$ está definida en todo $\mathbb{N}$ y converge a r: dada $\varepsilon > 0$, elegimos un natural $N > h/\varepsilon$; para $n \geq N$, $|e_n - r| = h/(n + 2) \leq h/(N + 2) < \varepsilon$. No es eventualmente monótona. Después de cualquier corte T, $e_{2T} > r > e_{2T+1}$ refuta el no decrecimiento, y $e_{2T+1} < r < e_{2T+2}$ refuta el no crecimiento. Los contraejemplos anteriores muestran que las premisas defectuosas no aseguran convergencia; no establecen que toda sucesión ajena a la garantía monótona carezca de límite.

La figura de las hipótesis contrapone dirección sin cota, acotación sin convergencia y convergencia sin monotonía eventual. La comparación recuerda qué garantía se pierde al retirar una hipótesis.

Ejercicio 24. Una tolerancia de refutación prescrita

Fija de antemano $\varepsilon_0 > 0$. Supón que $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ escapa eventualmente por arriba. Para cada candidato $A \in \mathbb{R}$, usa la barrera $A + \varepsilon_0$ para construir, después de cualquier corte propuesto $K \in \mathbb{N}$, un índice $n \geq K$ con $|a_n - A| \geq \varepsilon_0$. Formula y demuestra la versión de escape por abajo con la barrera $A - \varepsilon_0$. Registra el orden de los datos y elecciones, y concluye la ausencia de límite real en ambos casos. ¿La refutación exige error estrictamente mayor que la tolerancia o también admite igualdad? ¿Necesitas monotonía una vez que el escape ya está acreditado?

Solución. Fijada $\varepsilon_0 > 0$, recibamos un candidato $A \in \mathbb{R}$. El escape por arriba aplicado a $M = A + \varepsilon_0$ proporciona un corte T tal que $a_n > A + \varepsilon_0$ para todo $n \geq T$. Ante cualquier corte propuesto $K \in \mathbb{N}$, tomamos $n = \max\{K, T\}$. Entonces $n \geq K$ y $|a_n - A| = a_n - A > \varepsilon_0$, lo que en particular cumple $|a_n - A| \geq \varepsilon_0$.

En escape por abajo usamos $M = A - \varepsilon_0$. Obtenemos T con $a_n < A - \varepsilon_0$ para todo $n \geq T$ y, después de recibir K, elegimos de nuevo $n = \max\{K, T\}$. Se cumple $n \geq K$ y $|a_n - A| = A - a_n > \varepsilon_0$. En cualquiera de los dos casos hemos probado, para la tolerancia prescrita,

$$\forall A \in \mathbb{R}\ \forall K \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N} : \quad n \geq K \text{ y } |a_n - A| \geq \varepsilon_0.$$

La tolerancia se fija al comienzo; el candidato determina la barrera y el corte de escape T puede depender de ambos. El índice infractor se elige después del corte propuesto K, al reunirlo con T. La definición de convergencia exige error estrictamente menor que la tolerancia, de modo que un error igual a ε_0 también bastaría para refutarla. Aquí se obtiene una desigualdad mayor. El argumento excluye todos los candidatos reales y no requiere monotonía: usa sólo la propiedad de escape, cualquiera que haya sido el método para demostrarla.

Ejercicio 25. Escape y monotonía eventual no son conversas

Para cada $c \in \mathbb{R}$, define $a_n^{(c)} = n + c(-1)^n$ en $\mathbb{N}$. Demuestra el escape eventual por arriba para todo parámetro y clasifica cuándo la sucesión es no decreciente o estrictamente creciente. Decide si puede ser no creciente, y si las clasificaciones cambian al exigir las propiedades sólo eventualmente. Trata los valores frontera $c = 1/2$ y $c = -1/2$, indicando dónde hay pasos de igualdad. Para los parámetros fuera del intervalo que admite no decrecimiento, construye después de cualquier corte infractores de ambas direcciones. Usa la familia para decidir si el escape eventual por arriba implica monotonía eventual, y distingue ese escape de la convergencia a un número real.

Solución. Para cada real fijo c, la fórmula asigna un único término real a cada índice natural. Como $c(-1)^n \geq -|c|$, se cumple $a_n^{(c)} \geq n - |c|$. Dada una barrera $M \in \mathbb{R}$, elegimos por arquimedianidad un natural $N > M + |c|$. Para todo $n \geq N$, $a_n^{(c)} \geq N - |c| > M$. Por tanto, todas las sucesiones de la familia escapan por arriba, con corte dependiente de M y del parámetro fijo c.

La diferencia adyacente es

$$a_{n+1}^{(c)} - a_n^{(c)} = 1 - 2c(-1)^n = \begin{cases} 1 - 2c, & n \text{ par}, \\ 1 + 2c, & n \text{ impar}. \end{cases}$$

El no decrecimiento exige $1 - 2c \geq 0$ y $1 + 2c \geq 0$, equivalentes a $-1/2 \leq c \leq 1/2$. El crecimiento estricto exige ambas desigualdades estrictas y equivale a $-1/2 < c < 1/2$. Para $c = 1/2$, los pasos de índice par son igualdades y los de índice impar tienen incremento 2. Para $c = -1/2$, los pasos de índice impar son igualdades y los de índice par tienen incremento 2. En ambos extremos la sucesión no decrece, pero no es estrictamente creciente.

El no crecimiento exigiría $1 - 2c \leq 0$ y $1 + 2c \leq 0$, es decir, simultáneamente $c \geq 1/2$ y $c \leq -1/2$, imposible. Estas clasificaciones no cambian al restringirse a una cola: después de todo corte T hay un índice par $2T$ y uno impar $2T + 1$, así que ambos incrementos vuelven a aparecer. En particular, los pasos de igualdad en los valores frontera impiden crecimiento estricto también eventualmente. Ningún parámetro permite no crecimiento eventual.

Para $c > 1/2$, después de cualquier T el paso de $2T$ a $2T + 1$ tiene incremento negativo y refuta el no decrecimiento; el paso de $2T + 1$ a $2T + 2$ tiene incremento positivo y refuta el no crecimiento. Para $c < -1/2$, el paso par tiene incremento positivo y el impar negativo, por lo que refutan las direcciones opuestas. Los infractores aparecen después de cualquier corte; en esos parámetros no existe una cola monótona. Por ejemplo, $c = 1$ da escape por arriba sin monotonía eventual, y refuta la conversa propuesta.

El escape frente a todas las barreras reales no es convergencia a un número real. La refutación de §7.5, o la versión con tolerancia prescrita del ejercicio 24, excluye todo candidato real para cada parámetro de la familia. Los términos y el codominio siguen siendo reales; el escape describe una condición sobre colas y barreras.

7.6. Una recurrencia: existir antes de calcular

La sucesión $u_0 = 0$, $u_{n+1} = (u_n + 1)/2$ ya tiene un límite real por §7.3. Llamémoslo L_u. La recurrencia puede ayudarnos a identificarlo porque sus dos miembros son sucesiones convergentes que coinciden término a término. La recurrencia relaciona dos sucesiones: $n \mapsto u_n$ y $n \mapsto u_{n+1}$, ambas con dominio $\mathbb{N}$. Son funciones distintas, pues sus evaluaciones en 0 son 0 y 1/2. Sin embargo, la regla de desplazamiento de C06 §6.4 da $u_{n+1} \to L_u$. El desplazamiento conserva el límite: si un corte N controla el error de u, entonces $n \geq N$ implica $n + 1 \geq N$, por lo que ese corte también controla el error de la sucesión desplazada.

Por las reglas de suma y escalar de C06 §6.6, $(u_n + 1)/2 \to (L_u + 1)/2$. Los dos lados de la recurrencia son iguales para cada índice y, por tanto, tienen el mismo límite. La unicidad demostrada en C06 permite escribir $L_u = (L_u+1)/2$. Multiplicar por 2 y restar L_u da $L_u = 1$. La ecuación identifica el límite cuya existencia obtuvimos del teorema monótono. Por sí sola podría imponer una condición necesaria incluso a una sucesión que no convergiera.

Por ejemplo, la recurrencia $w_0 = 1$, $w_{n+1} = -w_n$ produce $w_n = (-1)^n$: la base coincide y cada paso cambia el signo. Si supusiéramos $w_n \to W$, el desplazamiento y la regla del escalar darían $W = -W$, luego $W = 0$. La ecuación tiene una única solución real, pero §7.5 demostró que esta sucesión no converge. Sólo hemos obtenido una condición necesaria para un límite supuesto; no hemos demostrado que ese límite exista.

En una recurrencia con división aparece una dificultad anterior a cualquier cálculo de límites. Consideremos

$$y_0 = 2, \qquad y_{n+1} = \frac{y_n + 2/y_n}{2} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Para evaluar el paso siguiente necesitamos $y_n \neq 0$. La positividad resulta más útil: además de garantizar el inverso, se conserva porque tanto y_n como $2/y_n$ son positivos. Una vez construidos todos los términos, una identidad cuadrática permitirá deducir el descenso y la cota que necesitamos. La base $y_0 = 2$ es real y positiva. Si ya se ha construido $y_n > 0$, su inverso existe en $\mathbb{R}$; además, $2/y_n > 0$. La suma $y_n + 2/y_n$ y su mitad son positivas, de modo que la fórmula define un único real $y_{n+1} > 0$. La construcción recursiva elemental, con esta inducción, produce un término positivo para cada $n \in \mathbb{N}$. Ninguna división se ejecuta sobre un término cuya no anulación esté pendiente.

Con dato inicial $y_0 = 0$ no podríamos evaluar siquiera y_1. El dato 2 proporciona una base positiva desde la que la inducción permite continuar indefinidamente. El primer término nuevo es $y_1 = 3/2$, cuyo cuadrado todavía supera 2. Para saber si esa desigualdad puede mantenerse, calculemos su error cuadrático usando la regla de iteración, ya legítima porque $y_n > 0$: $y_{n+1}^2 - 2 = \frac{y_n^2+4+4/y_n^2}{4} - 2 = \frac{y_n^4-4y_n^2+4}{4y_n^2} = \frac{(y_n^2-2)^2}{4y_n^2}$.

El denominador es positivo. Si $y_n^2 > 2$, también el numerador es positivo, porque se está elevando al cuadrado un número estrictamente positivo. En la base, $y_0^2 = 4 > 2$; la identidad demuestra por inducción que $y_n^2 > 2$ para todos los índices. Hemos conservado una desigualdad estricta, no sólo $y_n^2 \geq 2$. De $y_n > 0$ y $y_n^2 > 2$ se deduce $y_n > 1$: si $0 < y_n \leq 1$, tendríamos $y_n^2 \leq 1 < 2$, contradicción. En particular, 1 es una cota inferior conocida sin haber construido todavía una raíz ni demostrado la existencia del límite.

Para determinar la dirección, restamos y_n de la fórmula de iteración: $y_{n+1} - y_n = \frac{2/y_n - y_n}{2} = \frac{2-y_n^2}{2y_n} < 0$. El signo usa dos hechos ya probados: $2 - y_n^2 < 0$ y $2y_n > 0$. Así, y es estrictamente decreciente y, en particular, no creciente. Comparando con el primer término obtenemos $y_n \leq y_0 = 2$. Quedan reunidas las barreras $1 \leq y_n \leq 2$ y la dirección necesaria para aplicar §7.4.

Los primeros valores, calculados con fracciones exactas, son

Índice n	Término y_n
0	2

Índice n	Término y_n
1	3/2
2	17/12
3	577/408

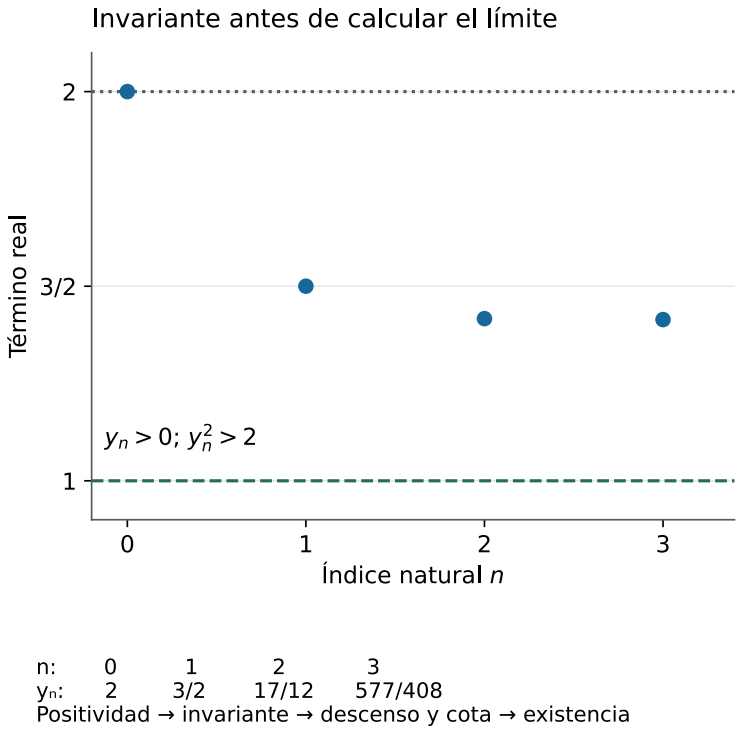


Figura 7.7. Positividad e invariante cuadrático justifican cada paso, el descenso y la barrera 1. Esas hipótesis permiten probar existencia antes de calcular un límite.

La figura del invariante usa sólo las barreras conocidas 1 y 2. Los cuatro puntos sitúan los valores de la tabla; el descenso en todos los índices procede de la identidad y del invariante demostrado. El teorema de §7.4 se aplica a la sucesión real y: es no creciente y tiene cota inferior 1. Por tanto existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $y_n \to L$, y $L = \inf S_y$, donde $S_y = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$. La existencia de ese ínfimo recibe la completitud utilizada al demostrar el teorema. No se deduce de la apariencia de los primeros términos.

El orden de límites de C06 §6.7, aplicado a $1 \le y_n \le 2$, da $1 \le L \le 2$. En particular, $L > 0$. Este margen es necesario antes de calcular con $2/L$: que ningún término sea cero no bastaría para asegurar un límite distinto de cero. Por ejemplo, todos los términos de $1/(n+1)$ son positivos y su límite es 0. Tenemos ya los datos para el cociente de C06 §6.6: la sucesión constante de valor 2 converge a 2; el denominador y_n converge a $L \neq 0$ y no se anula en ningún índice. Así, $2/y_n \to 2/L$. Las reglas de suma y escalar dan $(y_n + 2/y_n)/2 \to (L + 2/L)/2$. A su vez, el desplazamiento de C06 §6.4 da $y_{n+1} \to L$. Como ambos lados de la recurrencia son iguales en cada índice, la unicidad del límite produce

$L = \frac{L+2/L}{2}$. Multiplicando por 2 obtenemos $2L = L + 2/L$, de donde $L = 2/L$. Multiplicar por el real no nulo L da $L^2 = 2$. La existencia del límite y el margen positivo estaban acreditados antes de estas operaciones. Podemos identificar L como la raíz positiva de 2. Para justificar que esa descripción determina un único número, sea $r > 0$ otro real con $r^2 = 2$. Entonces $(L-r)(L+r) = L^2 - r^2 = 0$. Como $L + r > 0$, el segundo factor no se anula y resulta $L = r$. El símbolo $\sqrt{2}$ designa ese único real positivo; hemos demostrado $y_n \to \sqrt{2}$ mediante esta construcción.

También podemos precisar la posición de todos los términos respecto del límite. Puesto que $y_n^2 > 2 = L^2$, tenemos $(y_n - L)(y_n + L) > 0$. El factor $y_n + L$ es positivo, por lo que $y_n - L > 0$. Así, $y_n > L$ para cada índice: la sucesión se aproxima por arriba y ningún término alcanza su límite. La ecuación del límite se pudo usar porque el teorema monótono acreditó existencia y la cota 1 aseguró que el denominador límite no fuera cero. Cada operación se justificó mediante reglas de sucesiones de C06, sin apelar a continuidad de la función de iteración.

Ejercicios de la sección 7.6.

Ejercicio 26. Una combinación que conserva el lado de una barrera

Sean $c, r \in \mathbb{R}$ y $0 < \lambda < 1$. Define $v : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ por $v_0 = r$ y $v_{n+1} = \lambda v_n + (1 - \lambda)c$. Estudia por separado $r < c$, $r > c$ y $r = c$: buena definición, posición respecto de c, dirección, cotas y existencia de límite. Identifica después ese límite usando la recurrencia. No necesitas obtener una fórmula geométrica para v_n.

Solución. La regla afín produce un único real en cada paso, sin denominadores variables. Las dos identidades útiles son

$$v_{n+1} - c = \lambda(v_n - c), \qquad v_{n+1} - v_n = (1 - \lambda)(c - v_n).$$

Si $r < c$, la primera identidad conserva $v_n < c$ por inducción porque $\lambda > 0$. La segunda da incremento positivo porque $1 - \lambda > 0$. Por tanto $r \le v_n < c$ y §7.3 garantiza un límite real. Si $r > c$, se conserva $v_n > c$, el incremento es negativo y $c < v_n \le r$; §7.4 garantiza un límite. Si $r = c$, la inducción da $v_n = c$ para todo n, con límite c.

En los dos casos no constantes ya existe $L \in \mathbb{R}$. Desplazamiento, suma y multiplicación por escalares de C06 dan $L = \lambda L + (1 - \lambda)c$. Como $1 - \lambda \neq 0$, resulta $L = c$. Así, las tres sucesiones convergen a c; los casos estrictos no alcanzan ese valor en ningún índice. La completitud interviene mediante el teorema monótono, antes de resolver la ecuación.

Ejercicio 27. Una ecuación necesaria presentada como garantía

Sean $c \in \mathbb{R}$ y $h > 0$. Se prescribe $a_0 = c + h$ y $a_{n+1} = 2c - a_n$. Audita el razonamiento: «La ecuación del límite es $A = 2c - A$; tiene la única solución $A = c$, de modo que $a_n \to c$». Localiza la obligación omitida, determina todos los términos y refuta la convergencia a cualquier real mediante una tolerancia explícita y un índice posterior a cualquier corte. ¿Qué cambiaría con dato inicial $a_0 = c$?

Solución. La regla define una sucesión real en todos los índices. La inducción da

$$a_{2k} = c + h, \qquad a_{2k+1} = c - h \quad (k \in \mathbb{N}).$$

En efecto, el paso transforma $c + h$ en $c - h$ y viceversa. El razonamiento sólo obtiene una condición necesaria bajo la hipótesis $a_n \to A$. Desplazamiento y operaciones de C06 permitirían entonces $A = 2c - A$, luego $A = c$. Falta demostrar que tal límite existe; la unicidad de la solución de una ecuación no suple esa obligación. Para cualquier candidato $A \in \mathbb{R}$, fija $\varepsilon_0 = h$. Dado cualquier $N \in \mathbb{N}$, si $A \le c$ elige $n = 2N$, para el que $|a_n - A| = c + h - A \ge h$. Si $A > c$, elige $n = 2N + 1$ y obtiene $|a_n - A| = A - c + h > h$. En ambos casos $n \ge N$ y falla el error estrictamente menor que ε_0. No hay límite real. Con $a_0 = c$, la inducción produce la sucesión constante de valor c, y la existencia sí queda acreditada.

Ejercicio 28. Descenso desde un dato inicial variable

Sea $r \in \mathbb{R}$ con $r > 0$ y $r^2 > 2$. Para $y_0 = r$ y $y_{n+1} = (y_n + 2/y_n)/2$, demuestra que la prescripción define $y : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Reconstruye la conservación estricta de $y_n^2 > 2$, una cota inferior positiva conocida y el descenso. Demuestra la existencia de límite antes de calcularlo, identifica su destino y decide si algún término puede alcanzarlo. No deduzcas propiedades universales de una tabla de valores.

Solución. Si $y_n > 0$, el inverso existe y la regla produce un único $y_{n+1} > 0$. La base $r > 0$ permite esta inducción para todos los índices. Para cada término construido, $y_{n+1}^2 - 2 = \frac{(y_n^2-2)^2}{4y_n^2}$, $y_{n+1} - y_n = \frac{2-y_n^2}{2y_n}$. La base $r^2 > 2$, la primera identidad y el denominador positivo conservan $y_n^2 > 2$ estrictamente: el numerador nunca es cero. Como $y_n > 0$, se deduce $y_n > 1$, pues $0 < y_n \leq 1$ implicaría $y_n^2 \leq 1$. La segunda identidad tiene numerador negativo y denominador positivo, luego y es estrictamente decreciente y $1 < y_n \leq r$.

§7.4, que recibe aquí la completitud real, da $y_n \to L$. El orden de límites de C06 da $L \geq 1$, de modo que $L \neq 0$. Ahora están verificadas las hipótesis del cociente: los denominadores son no nulos y su límite también. Por desplazamiento y operaciones de límites,

$$L = \frac{L + 2/L}{2}, \qquad L^2 = 2, \qquad L > 0.$$

El único real positivo con ese cuadrado es $R = \sqrt{2}$, construido en §7.6: si $q > 0$ y $q^2 = 2$, $(L-q)(L+q) = 0$ y $L+q > 0$ fuerzan $L = q$. Finalmente $(y_n - L)(y_n + L) = y_n^2 - 2 > 0$, con segundo factor positivo, da $y_n > L$ para todo n. Ningún término alcanza el límite. La figura del invariante ilustra el dato inicial 2. Para el dato variable de este ejercicio, positividad, invariante y dirección se acreditan con la prueba anterior.

Ejercicio 29. Cruzar la barrera en el primer paso

Mantén la recurrencia del ejercicio 28 y toma ahora $r > 0$. Resuelve los casos $r^2 < 2$ y $r^2 = 2$. En el primer caso, sitúa el primer término respecto de r y de la raíz positiva de 2, determina la dirección desde el índice 1 y justifica la existencia y el destino del límite. Decide si la sucesión completa es monótona. En el segundo caso, prueba que la sucesión es constante. Reúne estos casos con el ejercicio 28 para clasificar todos los datos iniciales positivos.

Solución. Todos los términos se construyen positivos como en 28. Sea $R > 0$ la raíz de 2 construida en §7.6. Si $r^2 < 2$, la positividad da $r < R$. Además, $y_1 - r = \frac{2-r^2}{2r} > 0$, $y_1^2 - 2 = \frac{(r^2-2)^2}{4r^2} > 0$. Por tanto $y_1 > R$ y $y_1 > r$. Desde el índice 1, el argumento de 28 conserva cuadrado mayor que 2, descenso estricto y cota inferior 1. La sucesión $b_k = y_{k+1}$, con dominio $\mathbb{N}$, cumple exactamente las hipótesis de 28; converge a R. La transferencia de una cola de C06 da $y_n \to R$. La sucesión completa no es no creciente porque $y_1 > y_0$, ni no decreciente porque $y_2 < y_1$: sólo la cola desde 1 es decreciente.

Si $r^2 = 2$, entonces $2/r = r$ y la regla conserva $y_n = r = R$ por inducción. La sucesión es constante. La clasificación positiva queda completa: $r > R$ produce descenso estricto global por encima de R; $0 < r < R$ produce una subida inicial que cruza R y después descenso estricto por encima de R; $r = R$ produce constancia. En todos los casos el límite es R.

Ejercicio 30. Construir la raíz de un parámetro positivo

Sean $\rho > 0$ y $r > 0$ reales con $r^2 > \rho$. Define $x_0 = r$ y $x_{n+1} = (x_n + \rho/x_n)/2$. Construye la sucesión, conserva una desigualdad cuadrática estricta y deduce descenso. Justifica la cota inferior $m = \min\{1, \rho\} > 0$ sin presuponer una raíz de ρ. Obtén existencia de límite, comprueba su no anulación antes de usar cocientes y demuestra que es el único real positivo cuyo cuadrado es ρ. Sitúa cada término respecto de ese límite.

Solución. La base $x_0 = r > 0$ y la positividad de ρ/x_n cuando $x_n > 0$ construyen todos los términos positivos. Las identidades algebraicas son $x_{n+1}^2 - \rho = \frac{(x_n^2-\rho)^2}{4x_n^2}$, $x_{n+1} - x_n = \frac{\rho - x_n^2}{2x_n}$. Por inducción desde $r^2 > \rho$, la primera conserva la desigualdad estricta; la segunda implica descenso estricto. Para una barrera independiente de una raíz, fija $m = \min\{1, \rho\}$. Si $\rho \geq 1$, $0 < x_n \leq 1$ implicaría $x_n^2 \leq 1 \leq \rho$, imposible. Si $0 < \rho < 1$, $0 < x_n \leq \rho$ implicaría $x_n^2 \leq \rho^2 < \rho$, también imposible. Así $0 < m < x_n \leq r$.

§7.4 aplica monotonía, cota y completitud para dar un límite L. Por orden de límites, $L \geq m > 0$. Sólo ahora pueden usarse el cociente, suma, escalar y desplazamiento de C06 para obtener $L = \frac{L+\rho/L}{2}$, $L^2 = \rho$. La construcción ha demostrado la existencia de un real positivo con ese cuadrado. Si $q > 0$ también satisface $q^2 = \rho$, entonces $(L-q)(L+q) = 0$

y $L + q > 0$ dan $q = L$: es único. Finalmente $(x_n - L)(x_n + L) = x_n^2 - \rho > 0$ da $x_n > L$. La barrera m acreditó la no anulación del límite; la sola positividad de los términos no habría bastado.

Ejercicio 31. Datos negativos y una prescripción que no define sucesión

Para la prescripción $y_0 = r$, $y_{n+1} = (y_n + 2/y_n)/2$, considera todos los datos reales $r < 0$ y el dato $r = 0$. En el caso negativo, construye una sucesión positiva auxiliar por reflexión y clasifica posición, dirección y límite según $r^2 > 2$, $r^2 < 2$ y $r^2 = 2$. Distingue dirección global de dirección desde el índice 1. En el caso cero, identifica el primer paso que falla y explica por qué no corresponde llamar divergente a una sucesión definida por esta prescripción.

Solución. Para $r < 0$, pon $z_0 = -r > 0$ y construye la sucesión positiva z por la regla de 28–29. Define $y_n = -z_n$. Es una sucesión $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ de términos negativos, ninguno cero, y $\frac{y_n + 2/y_n}{2} = -\frac{z_n + 2/z_n}{2} = -z_{n+1} = y_{n+1}$. Así cumple la prescripción original; en cada paso la regla determina un único real. La reflexión invierte las desigualdades y el límite es $-R$, donde $R = \sqrt{2}$.

Si $r^2 > 2$, 28 da $z_n > R$ y descenso estricto global. Por reflexión, $y_n < -R$ y y crece estrictamente hacia $-R$ en todos los índices. Si $r^2 < 2$, tenemos $r > -R$. Por 29, $z_1 > z_0$ y $z_1 > R$, luego $y_1 < y_0$ y $y_1 < -R$. Desde el índice 1, y crece estrictamente, siempre por debajo de $-R$. No es monótona globalmente: tiene una bajada inicial y después subidas estrictas. La regla del escalar de C06 o la transferencia de la cola justifican su límite $-R$.

Si $r^2 = 2$, el dato negativo es $r = -R$ y la sucesión es constante por reflexión del caso positivo constante. Con $r = 0$, el cálculo de y_1 exige $2/0$, que no es un real definido. La prescripción no produce una función $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. La divergencia es una propiedad de una sucesión que sí está definida; aquí falta el objeto al que se atribuiría esa propiedad.

Ejercicio 32. Dos trayectorias ordenadas con un destino común

Sea $R > 0$ la raíz de 2 ya construida en §7.6, y sean $R < r < s$. Define dos sucesiones $y, z : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ con datos iniciales $y_0 = r$, $z_0 = s$ y la regla del ejercicio 28. Para la función de paso $F : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $F(t) = (t + 2/t)/2$, deriva $F(x) - F(t) = \frac{x-t}{2}\left(1 - \frac{2}{xt}\right)$.

Determina el signo relevante cuando $x, t > R$ y demuestra que $y_n < z_n$ para todo índice. Justifica que ambas sucesiones tienen el mismo límite y, sin embargo, son funciones distintas. ¿Qué ocurre si $r = s$? No estimes velocidades de aproximación.

Solución. La función F tiene dominio $(0, \infty)$ y codominio $(0, \infty)$; sus argumentos x, t son valores reales, no índices. Como ambos son no nulos, $F(x) - F(t) = \frac{x-t+2(1/x-1/t)}{2} = \frac{x-t}{2}\left(1 - \frac{2}{xt}\right)$. Si $x, t > R > 0$, entonces $xt > R^2 = 2$, de modo que el factor $1 - 2/(xt)$ es estrictamente positivo. Por tanto el signo de la diferencia de los pasos coincide con el signo de $x - t$ en esa región.

Por 28, las sucesiones y, z están bien definidas, todos sus términos son mayores que R y ambas convergen a R. La base $y_0 = r < s = z_0$ y la identidad, aplicada con $x = z_n$ y $t = y_n$, dan $z_{n+1} - y_{n+1} = \frac{z_n - y_n}{2}\left(1 - \frac{2}{z_n y_n}\right) > 0$ si $z_n - y_n > 0$. La inducción demuestra $y_n < z_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Son funciones distintas desde sus evaluaciones en 0, aunque el número que es su límite sea el mismo. La igualdad de límites no es igualdad de sucesiones. Si $r = s > R$, la igualdad inicial y la misma regla determinista dan $y_n = z_n$ por inducción: en ese caso sí son la misma función. No se ha utilizado una estimación de velocidad.

7.7. La misma construcción sobre los racionales

Los términos 2, 3/2, 17/12 y 577/408 sugieren que esta construcción puede ejecutarse dentro de $\mathbb{Q}$: suma, producto e inverso no nulo conservan racionalidad. Sin embargo, que todos los términos sean racionales deja pendiente si el destino real también lo será. Para examinarlo, llamaremos y a la construcción racional y $\tilde{y}$ a su composición con la inclusión:

$$y : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}, \qquad \iota : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}, \qquad \tilde{y} = \iota \circ y : \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$

La aplicación ι es la inclusión canónica de los racionales en los reales. Conserva suma, producto, inversos de números no nulos y orden. Por eso podemos identificar un racional con su imagen al escribir números en la recta real; esa identificación de valores no identifica funciones con codominios distintos. En comparaciones de un término racional y_n con un número real, su valor se interpreta mediante $\iota(y_n) = \tilde{y}_n$. Mantendremos la tilde en los argumentos de límites para dejar visible esa interpretación.

Definimos en $\mathbb{Q}$ la misma recurrencia: $y_0 = 2$ y $y_{n+1} = (y_n + 2/y_n)/2$. La base es un racional positivo. Si y_n es racional positivo, su inverso es racional, $2/y_n$ es racional positivo y la suma y la mitad siguen siendo racionales positivas. El paso define, por tanto, un único $y_{n+1} \in \mathbb{Q}$ con $y_{n+1} > 0$. Por inducción, la construcción produce una sucesión racional positiva en todo $\mathbb{N}$, sin denominadores nulos.

La inclusión transporta cada paso: $\tilde{y}_0 = 2$ y, como conserva las operaciones, $\tilde{y}_{n+1} = \iota\left(\frac{y_n+2/y_n}{2}\right) = \frac{\tilde{y}_n+2/\tilde{y}_n}{2}$. Así, $\tilde{y}$ es exactamente la sucesión real de §7.6. La igualdad puede comprobarse por inducción: coinciden en el índice 0; si coinciden en n, la misma operación, ya definida, produce iguales términos en $n+1$. Esta coincidencia de las dos funciones reales permite reutilizar todos los resultados de aquella sección.

En particular, $\tilde{y}_n^2 > 2$, $1 \le \tilde{y}_n \le 2$ y $\tilde{y}_{n+1} < \tilde{y}_n$ para todo índice. Como la inclusión preserva y refleja el orden, la sucesión racional y también es estrictamente decreciente y tiene las cotas racionales 1 y 2. Los índices no cambian: componer con la inclusión cambia el codominio de la sucesión y conserva las evaluaciones correspondientes, sin reindexarla.

Aplicado en $\mathbb{R}$, el teorema de §7.4 ya dio un límite $L = \inf S_{\tilde{y}}$; §7.6 acreditó $L > 0$, $L^2 = 2$ y $\tilde{y}_n > L$ para todo n. Cada término de $\tilde{y}$ pertenece a la imagen de $\mathbb{Q}$. Falta decidir si L pertenece a ella. Para decidir la pertenencia de L a la imagen racional usamos que todo racional admite una fracción reducida p/q, con $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$ y sin divisor común mayor que 1. Se obtiene cancelando el máximo común divisor. La propiedad de paridad necesaria para excluir esa representación se comprueba en el propio argumento.

El límite L no es racional. Supongamos, para obtener una contradicción, que L es la imagen de una fracción reducida p/q. De $L^2 = 2$, multiplicando por $q^2 \neq 0$, se sigue $p^2 = 2q^2$. Por tanto p^2 es par. Si un entero es impar, puede escribirse como $2k+1$, con $k \in \mathbb{Z}$, y su cuadrado es $(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, que es impar. En consecuencia, un cuadrado par sólo puede proceder de un entero par. Aplicando esta observación a p, escribimos $p = 2h$ para algún $h \in \mathbb{Z}$. La igualdad anterior se convierte en $4h^2 = 2q^2$, luego $q^2 = 2h^2$. El cuadrado de q también es par, y la misma observación obliga a que q sea par.

Hemos obtenido que 2 divide tanto p como q, contradiciendo que la fracción estuviera reducida. Así, L no pertenece a la imagen de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$. Bajo la identificación usual $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, esto se escribe $L \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. La irracionalidad procede de la ecuación y la paridad; no de inspeccionar términos ni de contar cifras decimales.

Para pedir que y tenga límite en $\mathbb{Q}$, el candidato debe ser un racional r. La distancia es la misma que usamos al incluir los valores en la recta real. Con tolerancias reales positivas, la condición sería $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \ge N, \quad |\iota(y_n) - \iota(r)| < \varepsilon$. Como $\iota(y_n) = \tilde{y}_n$, esta condición dice precisamente que la sucesión real $\tilde{y}$ converge a $\iota(r)$. Pero ya converge a L. Por unicidad del límite real, tendríamos $\iota(r) = L$, en contradicción con la irracionalidad probada. Por tanto y no tiene límite racional, aunque $\tilde{y}$ sí tenga límite real.

También podemos ver dónde falla la captura de una cola alrededor de cualquier candidato racional. Fijado $r \in \mathbb{Q}$, la distancia $d = |L - \iota(r)|$ es positiva. La convergencia a L proporciona un corte T tal que $|\tilde{y}_n - L| < d/2$ para todo $n \ge T$. Por la desigualdad triangular, $d \le |L - \tilde{y}_n| + |\tilde{y}_n - \iota(r)|$, de modo que $|\tilde{y}_n - \iota(r)| > d/2$ desde ese corte. Con la tolerancia fija $\varepsilon_0 = d/2$, cualquier corte propuesto K admite el índice $n = \max\{K, T\}$, cuyo error supera ε_0. Cada candidato racional queda excluido. La tolerancia puede depender de r, mientras que el índice que refuta un corte se elige después de conocerlo.

Los índices y los valores correspondientes se conservan al componer con la inclusión, pero se amplía el conjunto de candidatos. La completitud real proporcionó el destino L; la contradicción de paridad muestra por qué no está disponible en $\mathbb{Q}$.

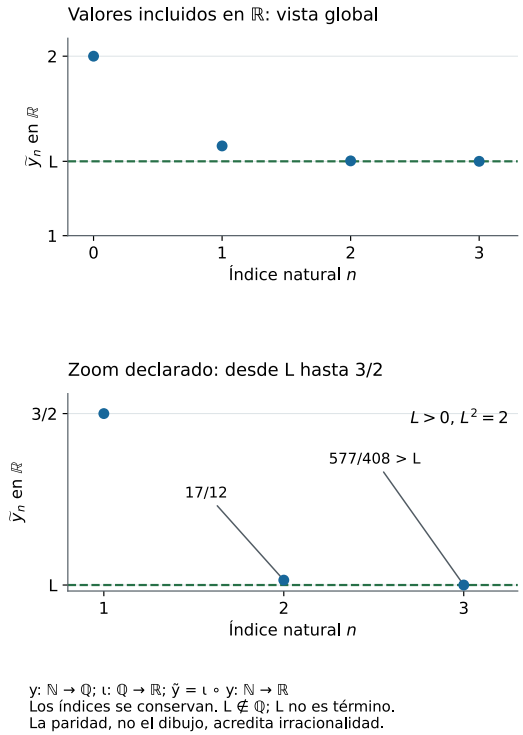


Figura 7.8. La inclusión conserva índices y valores; el límite real positivo cuyo cuadrado es 2 queda fuera del codominio racional de la sucesión original.

La figura de la inclusión racional–real muestra la vista global y una ampliación declarada entre L y $3/2$, donde pueden distinguirse $17/12$ y $577/408$. La referencia L, caracterizada por $L > 0$ y $L^2 = 2$, se distingue de los puntos que representan términos. La ampliación conserva los valores; la desigualdad $\tilde{y}_n > L$ y la irracionalidad proceden de las pruebas.

En $\mathbb{Q}$ se construyen todos los términos, se conservan la positividad y la desigualdad cuadrática, y se prueban descenso y cotas. El teorema monótono se aplica después en $\mathbb{R}$: la completitud garantiza allí el ínfimo del conjunto de valores y la monotonía permite convertirlo en límite. Las reglas de C06 identifican ese límite existente y la paridad excluye que sea racional. Por tanto, una sucesión racional monótona y acotada puede carecer de límite racional, aunque su composición real converja.

El ejemplo localiza el uso de completitud en una construcción concreta; no demuestra una equivalencia general entre todas sus posibles formulaciones.

Ejercicios de la sección 7.7.

Ejercicio 33. Una iteración racional y su inclusión real

Sean $\rho, r \in \mathbb{Q}$ con $\rho > 0$, $r > 0$ y $r^2 > \rho$. Construye en $\mathbb{Q}$ la iteración $q_0 = r$, $q_{n+1} = (q_n + \rho/q_n)/2$. Declara los tipos de q, de la inclusión $\iota : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ y de $\tilde{q} = \iota \circ q$. Justifica racionalidad, positividad, invariante cuadrático y dirección; explica qué conserva la inclusión. Demuestra que $\tilde{q}$ coincide como función real con la iteración de parámetros $\iota(\rho), \iota(r)$ del ejercicio 30 y declara su límite real. ¿Se ha demostrado con ello que ese límite sea racional?

Solución. Los objetos son

$$q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}, \qquad \iota : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}, \qquad \tilde{q} = \iota \circ q : \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$

El índice n es natural; q_n es un valor racional. La base r es racional positiva. Si $q_n \in \mathbb{Q}$ y $q_n > 0$, su inverso existe en $\mathbb{Q}$; ρ/q_n es racional positivo y la suma y la mitad también lo son. Esto construye un único término racional positivo en cada paso, sin denominadores nulos. Dentro de $\mathbb{Q}$, el álgebra da $q_{n+1}^2 - \rho = \frac{(q_n^2-\rho)^2}{4q_n^2}$, $\qquad q_{n+1} - q_n = \frac{\rho - q_n^2}{2q_n}$.

La base $r^2 > \rho$ y la primera identidad conservan $q_n^2 > \rho$ estrictamente. La segunda tiene numerador negativo y denominador positivo: q es estrictamente decreciente. El argumento de 30, válido también en el cuerpo ordenado racional, da $\min\{1, \rho\} < q_n \leq r$. La inclusión conserva operaciones de cuerpo, inversos no nulos y orden; también refleja el orden. En consecuencia, $\tilde{q}_0 = \iota(r)$, $\qquad \tilde{q}_{n+1} = \frac{\tilde{q}_n + \iota(\rho)/\tilde{q}_n}{2}$.

Los parámetros reales satisfacen las hipótesis de 30. La igualdad con aquella sucesión real se prueba por inducción: mismos términos iniciales y, a partir de términos iguales, la misma regla definida produce términos siguientes iguales. Por 30, existe $L > 0$ con $\tilde{q}_n \to L$, $L^2 = \iota(\rho)$ y $\tilde{q}_n > L$ para todo n; ese L es la única raíz real positiva del parámetro.

Componer con la inclusión conserva los índices y transporta cada evaluación; no identifica q y $\tilde{q}$ como objetos con sus codominios declarados. La existencia se obtuvo en $\mathbb{R}$ mediante completitud. Todavía no se ha decidido si $L \in \iota(\mathbb{Q})$: esa pertenencia exige un argumento adicional sobre el parámetro. La figura de la inclusión racional–real separa sucesión racional, composición con la inclusión y candidato real. Sus datos corresponden al cuadrado 2; los parámetros de esta solución conservan su justificación propia.

Ejercicio 34. Una nueva ecuación y la misma obstrucción de paridad

Construye $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ mediante $q_0 = 3$ y $q_{n+1} = (q_n + 8/q_n)/2$. Usa el ejercicio 33 para acreditar un límite real positivo L de $\tilde{q} = \iota \circ q$ con $L^2 = 8$. Demuestra que L no pertenece a $\iota(\mathbb{Q})$ reduciendo la ecuación a un cuadrado igual a 2 y reconstruyendo la contradicción de paridad. Deduce que q no tiene límite racional. No importes una teoría nueva de divisibilidad.
Solución. Los parámetros racionales $\rho = 8$ y $r = 3$ cumplen $r > 0$ y $r^2 = 9 > 8$. Por 33, la construcción es racional positiva, y su composición real converge a un único $L > 0$ con $L^2 = 8$. Supón que $L \in \iota(\mathbb{Q})$. Entonces $L/2$ también es imagen de un racional y $(L/2)^2 = 2$. Representa ese racional por una fracción reducida p/d, con $p \in \mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{Z}$, $d > 0$ y sin divisor común mayor que 1. La inclusión conserva las operaciones y es inyectiva; multiplicar la ecuación por $d^2 \neq 0$ da la igualdad entera

$p^2 = 2d^2$. Si un entero es impar, su forma $2k + 1$ da cuadrado $2(2k^2 + 2k) + 1$, también impar. Por tanto p^2 par obliga a p par. Escribe $p = 2h$; la ecuación produce $4h^2 = 2d^2$, luego $d^2 = 2h^2$. La misma observación obliga a d par. Así 2 divide a numerador y denominador, contradiciendo la reducción. No existe tal racional; por tanto $L \notin \iota(\mathbb{Q})$.

Si q tuviera límite racional r, con la distancia de §7.7 y todas las tolerancias reales positivas, la definición diría que $\tilde{q}_n \to \iota(r)$. La unicidad del límite real obligaría a $L = \iota(r)$, contradicción. Por ello q no tiene límite racional, mientras que $\tilde{q}$ sí tiene límite real. La contradicción no depende de una aproximación decimal.

Ejercicio 35. Dos destinos para sucesiones de términos racionales

Se afirma: «Como todos los términos de una sucesión pertenecen a $\mathbb{Q}$, su límite real, si existe, pertenece a $\mathbb{Q}$». Se propone además la corrección: «Si todos los términos son racionales y ninguno alcanza el límite, entonces éste es irracional». Audita ambas afirmaciones comparando estas construcciones en $\mathbb{Q}$:

$$u_0 = 0, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2}; \qquad q_0 = 3, \quad q_{n+1} = \frac{q_n + 8/q_n}{2}.$$

Justifica su buena definición racional, sus límites después de la inclusión real y el no alcanzamiento de esos límites. Explica qué permite y qué no permite concluir el codominio

racional de los términos. Distingue la existencia de límite real de la existencia de límite racional.

Solución. El dato $u_0 = 0$ es racional y la suma con 1 y la división por 2 conservan racionalidad, por lo que $u : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ está definida. Por inducción, $0 \leq u_n < 1$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1-u_n}{2} > 0$. La base satisface la desigualdad y $u_n < 1$ implica $(u_n + 1)/2 < 1$, cerrando la inducción. Después de incluir los términos en $\mathbb{R}$, §7.3 garantiza existencia por dirección y cota superior 1. Si el límite es U, desplazamiento y operaciones de C06 dan $U = (U + 1)/2$, luego $U = 1$. Ningún término alcanza 1 porque $u_n < 1$ para todo índice. El límite es racional; la misma condición de error acredita que u tiene límite racional 1.

Por 33–34, $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ está definida, sus términos son positivos, la composición real converge a $L > 0$ con $L^2 = 8$ y $L \notin \iota(\mathbb{Q})$. Además $\tilde{q}_n > L$ para todo n, así que tampoco alcanza su límite. En este caso no hay límite racional, por unicidad del límite real. La segunda construcción refuta la primera afirmación: pertenecer a $\mathbb{Q}$ en cada índice no fuerza que el límite real pertenezca a su imagen. La primera construcción refuta la corrección propuesta: no alcanzar un límite no implica que sea irracional. Ambas tienen términos racionales y un límite real no alcanzado; una tiene destino racional y la otra irracional.

El codominio declarado exige que cada término esté en $\mathbb{Q}$; no decide por sí solo qué candidatos reales satisfacen la condición de límite. Si el límite real de la composición pertenece a $\iota(\mathbb{Q})$, su preimagen racional satisface esa misma condición de error. Si no pertenece, la unicidad excluye cualquier límite racional. En todo caso deben acreditarse primero la existencia real y después la pertenencia del destino.

Ejercicio 36. Excluir candidatos con tolerancias racionales

Sea $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, sea $\tilde{a} = \iota \circ a$ y supón que $\tilde{a}_n \to L \in \mathbb{R} \setminus \iota(\mathbb{Q})$. Define «límite racional con tolerancias racionales» por

$$\forall \eta \in \mathbb{Q},\ \eta > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N, \quad |\iota(a_n) - \iota(r)| < \iota(\eta),$$

para un candidato $r \in \mathbb{Q}$. Prueba que, para un candidato racional fijo, usar todas las tolerancias racionales positivas equivale a usar todas las tolerancias reales positivas. Construye las tolerancias necesarias mediante arquimedianidad. Refuta después cada candidato racional mediante una tolerancia racional explícitamente elegida por debajo de la distancia al límite real y un índice posterior a cualquier corte propuesto. Declara el orden de dependencia de las elecciones. No uses topología de $\mathbb{Q}$.

Solución. Fija $r \in \mathbb{Q}$. Si la condición vale para todas las tolerancias reales positivas, vale en particular para las imágenes de tolerancias racionales positivas.

Recíprocamente, supón la condición con tolerancias racionales. Dado $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, tomamos $m = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1$, usando el piso construido en C06. Se cumple $m > 1/\varepsilon$ y, por tanto, $m \geq 1$ y $\eta = 1/m \in \mathbb{Q}$ satisface $0 < \iota(\eta) < \varepsilon$. El corte dado por la condición racional para esa η asegura, para todo $n \geq N$, $|\iota(a_n) - \iota(r)| < \iota(\eta) < \varepsilon$.

Así se obtiene la condición con tolerancias reales. El entero m puede depender de ε y el corte de la tolerancia racional escogida. Fija ahora un racional r. Como L no está en la imagen racional, $d = |L - \iota(r)| > 0$. Toma $m = \lfloor 2/d \rfloor + 1 \in \mathbb{N}$. La propiedad del piso da $m > 2/d > 0$, por lo que m no es nulo y podemos fijar la tolerancia racional $\eta_0 = 1/m$. Entonces $0 < \iota(\eta_0) < d/2$. La convergencia real a L proporciona $T \in \mathbb{N}$ con $|\tilde{a}_n - L| < d/2$ para todo $n \geq T$.

Por la desigualdad triangular, para esos índices,

$$d \leq |L - \tilde{a}_n| + |\tilde{a}_n - \iota(r)|, \qquad |\tilde{a}_n - \iota(r)| > d/2 > \iota(\eta_0).$$

Dado cualquier corte propuesto $K \in \mathbb{N}$, toma $n = \max\{K, T\}$. Es un índice posterior a K cuyo error supera la tolerancia fija. Queda refutada la condición racional para ese candidato. El orden de elecciones es: candidato r, distancia d, entero m y tolerancia η_0, corte T, corte propuesto K e índice infractor n. La tolerancia puede depender del candidato, pero queda

fijada antes de los cortes propuestos. Como r era arbitrario, no hay límite racional ni siquiera usando sólo tolerancias racionales; la composición conserva su límite real L.

7.8. Elegir el argumento y declarar su alcance

La fórmula $x_n = 1 - 1/(n+1)$ permite comparar dos pruebas que responden a datos distintos. Si proponemos el candidato 1, basta examinar el error. Si sólo usamos dirección y cota, el teorema monótono construye primero un destino como supremo y deja por identificar ese extremo. Para la prueba directa, fijamos $\varepsilon > 0$ y usamos el piso positivo de C06 para elegir $N = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor$. Si $n \geq N$, entonces $n+1 \geq N+1 > 1/\varepsilon$, de donde $|x_n - 1| = 1/(n+1) < \varepsilon$. Así se acredita el candidato 1 sin necesitar monotonía como hipótesis.

En la prueba por orden, $x_{n+1} - x_n = 1/[(n+1)(n+2)] > 0$ y $x_n < 1$. El teorema de §7.3 da convergencia a $s = \sup S_x$. Para identificarlo sin usar la prueba directa, tomemos $B < 1$ y elijamos $m = \lfloor 1/(1-B) \rfloor + 1$. Entonces $m > 1/(1-B)$ y $1/(m+1) < 1 - B$, por lo que $x_m > B$. Ningún $B < 1$ es cota superior y 1 sí lo es; luego $s = 1$.

La primera ruta controla un error alrededor de un candidato; la segunda construye un límite por completitud e identifica después su extremo. El piso usado en la primera procede de la propiedad arquimediana que C03 dedujo de completitud, de modo que la distinción entre rutas no afirma independencia lógica respecto de ella. Ninguna evaluación alcanza el destino, pues $1/(n+1) > 0$ mantiene $x_n < 1$.

Si después estudiamos $b_n = 2x_n - 3$, la convergencia de x ya acreditada habilita suma y escalar de C06, y obtenemos $b_n \to 2 \cdot 1 - 3 = -1$. Esta aplicación de reglas comienza con un límite conocido. Para una recurrencia, §7.6 mostró el mismo orden lógico: las reglas identifican el destino después de que el teorema monótono haya garantizado su existencia. El extremo debe corresponder al conjunto en el que verificamos la dirección. En el ejemplo de §7.4,

$$a_0 = 10, \qquad a_n = 1 - \frac{1}{n} \quad (n \geq 1).$$

La fórmula recíproca no se evalúa en 0; ese término está definido por separado. La sucesión completa no es monótona: baja de $a_0 = 10$ a $a_1 = 0$ y después aumenta. La cola desde $T = 1$ sí es no decreciente y tiene cota superior 1. Definamos $c : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ por $c_k = a_{1+k}$. Entonces $c_k = 1 - 1/(k+1) = x_k$, de modo que c y x son la misma función. La restricción de a a $\{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\}$ tiene otro dominio; la reindexación c tiene dominio $\mathbb{N}$. Su conjunto de valores coincide con el conjunto de cola $S_{a,1}$, cuyo supremo es 1. El teorema eventual de §7.4 da $a_n \to 1$.

El traslado de cortes también queda declarado: si K controla el error de c para una tolerancia, $N = 1 + K$ controla el de a. Para $n \geq N$, el natural $k = n - 1$ cumple $k \geq K$ y $|a_n - 1| = |c_k - 1|$. El prefijo se excluye mediante ese corte; no se elimina del conjunto global de valores cuando se calcula su extremo. El supremo global sigue siendo 10, porque es un término que domina los demás; el límite 1 es el supremo de la cola admisible. Por eso una afirmación sobre monotonía eventual debe nombrar el conjunto de cola, sin sustituirlo por la imagen global.

La elección de una prueba depende también de qué hipótesis podemos acreditar. Las cotas -1 y 1 de $d_n = (-1)^n$ no habilitan el teorema monótono, y la refutación de §7.5 excluye todos sus límites reales. Para $e_n = (-1)^n/(n+1)$ tampoco hay dirección eventual, pero el error sí acredita el límite cero. La falla de una hipótesis impide aquella aplicación sin decidir por sí sola la convergencia.

En $a_n = n$ sí hay monotonía y cota inferior 0; falta la superior pertinente. El escape de §7.5 describe una cola por encima de cada barrera real y excluye un límite finito. La recurrencia de §7.6 exigía distinguir tres cuestiones: $y_n > 0$ permitía construir el siguiente término; descenso y cota inferior daban existencia de L; y $L \geq 1$ permitía dividir por ese límite. Si se omitiera la última cota, el hecho de que todos los términos fueran no nulos

no bastaría para autorizar $2/L$. Resolver la ecuación tampoco reemplazaría la prueba de existencia.

La construcción racional añade una exigencia sobre el candidato. Para $y : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ y $\tilde{y} = \iota \circ y : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, los valores correspondientes conservan orden y distancia, pero el límite real $L > 0$ con $L^2 = 2$ queda fuera de la imagen racional. Afirmar que es racional porque lo son todos los términos atribuiría a $\mathbb{Q}$ una propiedad que este ejemplo refuta.

Estas conclusiones tienen obligaciones distintas sobre los índices. Para convergencia, cada tolerancia recibe un corte que controla todos los posteriores. Para escape, cada barrera real recibe su corte. Para refutar un candidato, se fija una tolerancia y se encuentra un infractor después de cualquier corte propuesto. El conjunto sobre el que tomamos el extremo y el universo al que exigimos pertenencia del límite forman parte de lo que cada prueba establece.

Ejercicios de la sección 7.8.

Ejercicio 37. Qué conclusión cierra cada argumento

Audita este dossier de argumentos. En cada entrada decide si la conclusión está acreditada, identifica la hipótesis que falta cuando corresponda y repara el argumento o su conclusión con una prueba. No uses una muestra finita como garantía universal.

1. Para $a_n = 2n + 1$, se observa que es no decreciente y que $a_n \geq 1$; se concluye que tiene límite real por el teorema monótono.
2. Para $b_0 = 7$ y $b_n = 2 - 1/n$ cuando $n \geq 1$, se observa que la cola desde 1 es creciente y acotada; se concluye que el límite es $\sup S_b = 7$.
3. Para $c_0 = 0$ y $c_{n+1} = 3 - c_n$, se resuelve $C = 3 - C$ y se concluye $c_n \to 3/2$.
4. Para $d_n = 4 - 1/(n+2)$, se verifica no decrecimiento y cota superior 4, y se propone concluir $d_n \to 4$ después de demostrar que ningún real menor que 4 es cota superior.

Declara dominio y codominio de las sucesiones, el conjunto sobre el que se toma cada extremo y el orden lógico entre existencia e identificación.

Solución. Las cuatro prescripciones definen funciones $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$: las fórmulas recíprocas se evalúan sólo en índices con denominador no nulo, y la recurrencia afín siempre produce un real. **Entrada 1.** El incremento $a_{n+1} - a_n = 2$ es positivo, pero la cota inferior 1 no es la cota superior requerida para una sucesión no decreciente. Para cada barrera $M \in \mathbb{R}$, la arquimedianidad permite elegir $N \in \mathbb{N}$ con $N > (M - 1)/2$. Todo $n \geq N$ cumple $a_n = 2n + 1 > M$. Hay escape por arriba y, por §7.5, no hay límite real. La reparación consiste en esa conclusión; la falta de cota superior no puede suplirse aquí.

Entrada 2. La cola reindexada $u_k = b_{k+1} = 2 - 1/(k + 1)$ tiene dominio $\mathbb{N}$ y conjunto de valores $S_{b,1}$. Su incremento es positivo y $u_k < 2$. Para cualquier $B < 2$, elige $k \in \mathbb{N}$ con $k > 1/(2 - B)$; entonces $u_k > B$. Así $\sup S_{b,1} = 2$, y §7.3 da $u_k \to 2$. La transferencia de cola da $b_n \to 2$. En cambio, $\sup S_b = 7$ porque el primer término es 7 y los demás son menores que 2. La hipótesis monótona se verificó sobre la cola, no sobre el conjunto global.

Entrada 3. Por inducción, $c_{2k} = 0$ y $c_{2k+1} = 3$. La ecuación $C = 3 - C$ sólo sería necesaria si existiera el límite. Para cualquier candidato A, fija $\varepsilon_0 = 3/2$. Dado N, si $A \leq 3/2$, el índice $2N + 1$ tiene error $|3 - A| \geq 3/2$; si $A > 3/2$, el índice $2N$ tiene error $|A| > 3/2$. Ambos índices son al menos N. Ningún candidato es límite. La reparación es excluir límites reales, no aceptar la solución formal de la ecuación.

Entrada 4. El argumento sí cierra su conclusión cuando completa la comprobación propuesta. El incremento es $1/[(n + 2)(n + 3)] > 0$ y $d_n < 4$. Si $B < 4$, elige $m > 1/(4 - B)$ natural; entonces $d_m > B$. De ello resulta $\sup S_d = 4$, y §7.3 da $d_n \to 4$. La completitud proporciona existencia mediante el teorema; la prueba extremal identifica el límite. No basta mencionar una cota superior cualquiera para identificarla como supremo.

Ejercicio 38. Dos recorridos hacia una misma barrera

Sean $c \in \mathbb{R}$ y $h > 0$. Para la familia $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $x_n = c - h/(n + 1)^2$, demuestra $x_n \to c$ por dos recorridos completos: estimación del error con un corte $N(\varepsilon)$ explícitamente

construido y teorema monótono con identificación del supremo. Justifica dirección, cotas y no alcanzamiento del destino. Señala dónde se usa directamente completitud y dónde se recibe su consecuencia arquimediana. No invoques el límite ya obtenido por una ruta para cerrar la otra.

Solución. Fija $\varepsilon > 0$. La construcción del piso de C06 da el corte explícito $N = \lfloor \max\{1, h/\varepsilon\} \rfloor + 1 \in \mathbb{N}$, que satisface $N > \max\{1, h/\varepsilon\}$. Para todo $n \geq N$, se tiene $(n+1)^2 > n+1 > N > h/\varepsilon$, y por tanto $|x_n - c| = \frac{h}{(n+1)^2} < \varepsilon$. El corte depende de ε y del parámetro fijo h; funciona para todos los índices posteriores. Esta prueba acredita directamente el candidato c.

Para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} - x_n = \frac{h(2n+3)}{(n+1)^2(n+2)^2} > 0, \qquad c - h = x_0 \leq x_n < c.$$

El conjunto real no vacío S_x tiene cota superior c. El teorema de §7.3 recibe completitud para dar un límite $s = \sup S_x$. Para identificar el extremo sin invocar la primera ruta, fija $B < c$ y elige $m \in \mathbb{N}$ con $m > \max\{1, h/(c-B)\}$. Entonces $(m+1)^2 > h/(c-B)$ y $x_m > B$. Ningún $B < c$ es cota superior, luego $s = c$. Esta segunda prueba también da $x_n \to c$.

La positividad de $h/(n+1)^2$ demuestra que ningún término alcanza c. En la primera ruta se reutiliza arquimedianidad, cuya dependencia de completitud fue probada en C03; en la segunda se usa directamente completitud para obtener el supremo y además arquimedianidad para identificarlo. La separación de rutas no afirma independencia lógica respecto de completitud.

Ejercicio 39. Dos barreras que se encuentran

Sean $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ con a no decreciente, b no creciente y $a_n \leq b_n$ para todo n. No se supone que sus términos sean positivos. Supón además $b_n - a_n \to 0$. Demuestra que ambas sucesiones tienen límite real y que sus límites coinciden. Si $c : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ satisface $a_n \leq c_n \leq b_n$ desde un índice T, demuestra que c converge a ese mismo destino y construye un corte común para una tolerancia dada. Distingue lo que se obtiene sin la hipótesis sobre la distancia y da un ejemplo que muestre su necesidad para la igualdad de límites. No uses un teorema de intervalos encajados.

Solución. Las direcciones y el orden entre términos dan, para todo n, $a_0 \leq a_n \leq b_n \leq b_0$. Así a tiene cota superior b_0 y b cota inferior a_0, sin exigir signo positivo. §§7.3–7.4 dan $a_n \to A$ y $b_n \to B$, con $A, B \in \mathbb{R}$. El orden de límites de C06 da $A \leq B$. La regla de resta da $b_n - a_n \to B - A$, mientras que la hipótesis da límite 0 para esa misma sucesión. Por unicidad, $B - A = 0$. Denota el destino común por $L = A = B$.

Dado $\varepsilon > 0$, toma cortes N_a, N_b que aseguren $|a_n - L| < \varepsilon$ y $|b_n - L| < \varepsilon$ respectivamente. Define $N = \max\{T, N_a, N_b\}$. Para $n \geq N$, $L - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < L + \varepsilon$, de donde $|c_n - L| < \varepsilon$. Ésta es la captura por sándwich de C06 con un corte común explícito; el prefijo de c no influye. Sin la hipótesis de distancia, se conservan la existencia de A, B y $A \leq B$, pero no necesariamente su igualdad ni la convergencia de c. Por ejemplo, $a_n = -1$ y $b_n = 1$ son barreras constantes con límites distintos y distancia 2. La sucesión $c_n = (-1)^n$ permanece entre ambas y no tiene límite real, como se probó en §7.5. La condición sobre la distancia es la que obliga a encontrar un único destino común.

Ejercicio 40. Medias simultáneas y un producto conservado

Sean $0 < a_0 \leq b_0$ reales. Construye simultáneamente $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mediante $a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}$, $\quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$. Demuestra buena definición, positividad y conservación de $a_n \leq b_n$. Obtén las dos direcciones monótonas, cotas y conservación del producto. Acredita existencia de los dos límites antes de usar las recurrencias para identificarlos; demuestra que tienen un destino común y caracteriza éste por una ecuación y su signo. Trata el caso $a_0 = b_0$ y decide si, partiendo de desigualdad estricta, alguna evaluación alcanza el destino.

Si a_0, b_0 son racionales, declara las dos construcciones con codominio $\mathbb{Q}$ y sus composiciones reales. Para $a_0 = 1$, $b_0 = 2$, determina si existe un límite racional y justifica tu conclusión. No uses continuidad, compactitud ni teoría general de iteraciones.

Solución. Supón $0 < a_n \le b_n$. Entonces $a_n + b_n > 0$, por lo que el paso armónico está definido, y ambos términos siguientes son positivos. Las identidades

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n(b_n - a_n)}{a_n + b_n} \ge 0, \qquad b_n - b_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} \ge 0,$$

$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{(b_n - a_n)^2}{2(a_n + b_n)} \ge 0$ conservan el orden y dan las dos direcciones. La base $0 < a_0 \le b_0$ cierra la inducción y construye las sucesiones completas. Por ello $a_0 \le a_n \le b_n \le b_0$ para todo índice. Además, $a_{n+1}b_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}\frac{a_n+b_n}{2} = a_nb_n$. Por inducción, $a_nb_n = P = a_0b_0 > 0$ para todo n.

Los teoremas monótonos aplicados a estas cotas dan $a_n \to A$ y $b_n \to B$. Aquí se recibe completitud real. El orden de límites da $a_0 \le A \le B \le b_0$, en particular $A + B \ge 2a_0 > 0$. Todos los denominadores $a_n + b_n$ son positivos y su límite es no nulo; así están verificadas las hipótesis del cociente de C06. Por desplazamiento y operaciones de límites, las recurrencias dan

$A = \frac{2AB}{A+B}$, $\qquad B = \frac{A+B}{2}$. La segunda igualdad implica $A = B = L > 0$. La primera es coherente con esa igualdad y se ha usado con sus hipótesis acreditadas. La regla de producto y la constancia del producto dan $AB = P$, luego $L^2 = P$. Si $R > 0$ es otro real con $R^2 = P$, $(L - R)(L + R) = 0$ y $L + R > 0$ fuerzan $R = L$. El destino es el único real positivo de cuadrado P; su existencia ha quedado construida.

Si $a_0 = b_0 = t > 0$, ambas reglas conservan t por inducción: las sucesiones son constantes e iguales. Si $a_0 < b_0$, la identidad de la diferencia conserva $a_n < b_n$ estrictamente en cada índice, y los dos incrementos anteriores son estrictos. Como $a_nb_n = L^2$, la positividad implica $a_n < L < b_n$: si $a_n \ge L$, el producto con $b_n > a_n$ sería mayor que L^2; si $b_n \le L$, el producto con $a_n < b_n$ sería menor. Ninguna evaluación alcanza el destino común.

Para datos racionales positivos, las operaciones conservan racionalidad y el denominador racional positivo tiene inverso racional. Así se construyen $a^{\mathbb{Q}}, b^{\mathbb{Q}} : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. Sus composiciones $\tilde{a} = \iota \circ a^{\mathbb{Q}}$ y $\tilde{b} = \iota \circ b^{\mathbb{Q}}$ tienen codominio $\mathbb{R}$ y cumplen las mismas reglas reales, porque la inclusión conserva operaciones y orden. Coinciden por inducción con las construcciones reales de los datos incluidos; no se identifica una función racional con otra de codominio real.

Con $a_0 = 1$, $b_0 = 2$, el producto es 2. Ambas composiciones convergen al real positivo L con $L^2 = 2$. La prueba de paridad de §7.7 excluye $L \in \iota(\mathbb{Q})$: una fracción reducida cuyo cuadrado fuera 2 tendría numerador y denominador pares. Si cualquiera de las sucesiones racionales tuviera límite racional r, su composición convergería también a $\iota(r)$; la unicidad real forzaría $\iota(r) = L$, contradicción. Hay destino real común y ningún límite racional para estas dos construcciones.

Las obligaciones de existencia y la distinción de codominios sirven para comparar el método. Esas figuras representan la iteración de §7.6–§7.7, no las dos medias de este ejercicio; aquí el producto conservado y las desigualdades anteriores justifican el destino común.

Capítulo 8

Subsucesiones, acumulación y Bolzano–Weierstrass

La sucesión $(-1)^n$ permanece entre -1 y 1, pero ninguna de sus colas se acerca a un único número. Si conservamos sólo los índices impares, todos los valores elegidos son -1. La acotación no dio convergencia a la sucesión entera; al seleccionar términos aparece, sin embargo, un comportamiento estable que la oscilación ocultaba. Buscamos hasta dónde puede llevarse esa selección en una sucesión real acotada cualquiera. Los términos elegidos deberán mantener su orden y avanzar indefinidamente en los índices originales. Para encontrar un destino sin conocerlo de antemano, iremos estrechando intervalos que todavía reciban infinitos índices; los intervalos cerrados encajados de C03 proporcionarán después el punto al que dirigir la extracción.

Conservamos $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$. Las bolas y los puntos de acumulación de C04 permitirán relacionar este problema de sucesiones con los conjuntos de valores, y las pruebas de convergencia seguirán usando la definición y las reglas de C06.

8.1. Seleccionar términos sin perder el orden

Al leer los términos impares de $a_n = (-1)^n$, las posiciones originales $1, 3, 5, ...$ pasan a ocupar las nuevas posiciones $0, 1, 2, ...$ El término original $a_5 = -1$, por ejemplo, queda en la posición nueva 2. Los valores conservan su altura; los índices necesitan una regla de traducción. Esa regla es $\varphi(k) = 2k + 1$: $\varphi(0) = 1$, $\varphi(2) = 5$ y $b_2 = a_{\varphi(2)} = -1$. El índice nuevo y el original son naturales, mientras que la evaluación produce un término real.

Definición. Sea $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Una **subsucesión** de a es una sucesión $b = a \circ \varphi$, donde $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es estrictamente creciente. Así, $b_k = a_{\varphi(k)}$, y $i < j$ implica $\varphi(i) < \varphi(j)$. Conservamos $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$. El índice nuevo k y el índice original $\varphi(k)$ son naturales; $a_{\varphi(k)}$ es un real. Cuando un natural aparece en una expresión real como $1/(k + 1)$, se entiende su imagen mediante la inclusión canónica. La coincidencia de numerales no identifica los objetos de ambos sistemas.

El crecimiento estricto impide reutilizar un índice o volver hacia atrás. Se pueden saltar términos o conservarlos todos: la identidad $\varphi(k) = k$ produce la propia sucesión. También $\varphi(k) = k + 3$ es un selector, pues $\varphi(k + 1) = \varphi(k) + 1$; da la cola desde 3 reindexada desde cero. En cambio, $\varphi(k) = 0$ define una composición constante sin ser selector: usa siempre el mismo índice. En la selección impar los índices son distintos y los valores coinciden, de modo que el requisito de crecimiento afecta a las posiciones elegidas.

Lema de los índices. Todo selector estrictamente creciente satisface $\varphi(k) \geq k$. Además, la composición de dos selectores estrictamente crecientes vuelve a serlo. Para la primera afirmación usamos inducción. En cero, $\varphi(0) \geq 0$ porque su valor es natural. Si $\varphi(k) \geq k$, el crecimiento estricto entre naturales da $\varphi(k+1) \geq \varphi(k)+1 \geq k+1$. La comparación de índices consecutivos basta para acreditar crecimiento estricto universal: si $i < j$, se encadenan las desigualdades desde i hasta j. Para la composición, si $i < j$, entonces $\psi(i) < \psi(j)$, y aplicar el crecimiento de φ da $\varphi(\psi(i)) < \varphi(\psi(j))$.

La desigualdad $\varphi(k) \geq k$ asegura que avanzar en la nueva sucesión nos lleva al menos igual de lejos en la original. Si extraemos de una extracción, $b_{\psi(j)} = a_{(\varphi\circ\psi)(j)}$: primero se recorre $j \mapsto \psi(j)$ y después $\psi(j) \mapsto \varphi(\psi(j))$. Para $\varphi(k) = 2k + 1$ y $\psi(j) = 3j$, el selector compuesto es $6j + 1$.

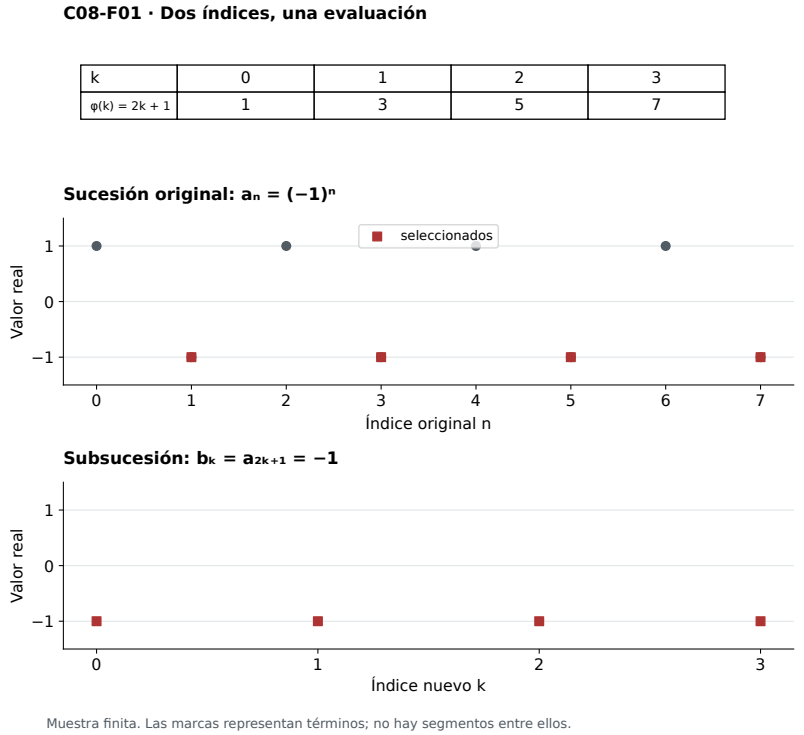


Figura 8.1. La selección impar cambia el índice horizontal y conserva la altura menos uno. Los índices elegidos son distintos, aunque los valores se repiten.

En la figura 8.1, el punto original $(3,-1)$ corresponde al nuevo $(1,-1)$, y $(5,-1)$ pasa a $(2,-1)$. Las dos gráficas conservan puntos discretos, sin segmentos entre posiciones naturales.

Ejercicios de la sección 8.1.

Ejercicio 1. Mapas de selección

Para cada mapa $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ dado por $\varphi(k)=2k$, $\psi(k)=k^2$, $\eta(k)=\lfloor k/2\rfloor$ y $\theta(k)=k+5$, decide si es selector de subsucesión. Si lo es, calcula los tres primeros términos seleccionados de $a_n=1/(n+1)$.

Solución. Los mapas φ y θ tienen incrementos dos y uno, respectivamente; son estrictamente crecientes. $\psi(k+1)-\psi(k)=2k+1>0$, también desde cero. Sus primeros valores seleccionados son, respectivamente, $(1,1/3,1/5)$, $(1,1/2,1/5)$ y $(1/6,1/7,1/8)$. En cambio, $\eta(0)=\eta(1)=0$, por lo que no es estrictamente creciente. El hecho de que η sea no decreciente no satisface la definición: permite reutilizar un índice.

La distinción entre índices y alturas también se aprecia en la figura 8.1.

Ejercicio 2. Enumerar índices sin saltos ocultos

Sea $E\subseteq\mathbb{N}$ infinito. Define $e_0=\min E$ y $e_{k+1}=\min\{n\in E : n>e_k\}$. Prueba que la construcción existe y que $\{e_k : k\in\mathbb{N}\}=E$.

Solución. La base existe por buen orden. En cada paso, E no está contenido en el prefijo finito hasta e_k, de modo que el conjunto siguiente es no vacío y tiene mínimo. Los índices obtenidos crecen estrictamente y pertenecen a E, lo que prueba una inclusión. Para la otra, fija $m\in E$. Como $e_k\geq k$, existe un primer j con $e_j\geq m$. Si $j=0$, la minimalidad de e_0 fuerza $e_0=m$. Si $j>0$, tenemos $e_{j-1}<m$, y m era admisible al definir e_j; por eso $e_j\leq m$, luego $e_j=m$. No basta decir que la lista es infinita: la regla del mínimo es lo que evita omitir un elemento de E.

Ejercicio 3. Dos extracciones consecutivas

Sea $a_n = n/(n+1)$, $b_k = a_{3k+2}$ y $c_j = b_{2j+1}$. Escribe los tres dominios de índices, el selector compuesto y una fórmula para c_j. ¿Conmutan los dos selectores?

Solución. Tanto n como k y j recorren $\mathbb{N}$, pero indexan funciones distintas. El recorrido es $j \mapsto 2j+1 \mapsto 3(2j+1)+2 = 6j+5$, así que $c_j = (6j+5)/(6j+6)$. Ambos mapas y su composición crecen estrictamente. Invertir el orden produciría $2(3j+2)+1 = 6j+5$ en este caso: sí conmutan. Esta igualdad particular se verifica por cálculo y no por una ley general. Por ejemplo, los selectores $2k$ y $k+1$ dan composiciones $2k+2$ y $2k+1$, distintas.

Ejercicio 4. Misma imagen, distinta selección

Construye dos subsucesiones diferentes de una misma sucesión que tengan exactamente la misma imagen, y demuestra que son diferentes como funciones aunque sus imágenes coincidan.

Solución. Toma $a_n = (-1)^n$, la identidad $\varphi(k) = k$ y el selector $\psi(k) = k+1$. Resultan $b_k = (-1)^k$ y $c_k = (-1)^{k+1}$. Ambos tienen imagen $\{-1, 1\}$ porque ambas paridades aparecen, pero $b_0 = 1$ y $c_0 = -1$. Por tanto las funciones son distintas. Comparar las imágenes elimina el orden y no permite recuperar la función.

8.2. Lo que conserva una subsucesión

Una ventana que contiene una cola completa conserva el control al descartar términos, siempre que los índices seleccionados sigan avanzando. La desigualdad del lema anterior permite transportar el corte de convergencia al dominio nuevo. **Proposición.** Si $a_n \to L$ y φ es un selector estrictamente creciente, entonces $a_{\varphi(k)} \to L$. Fijemos $\varepsilon > 0$. La convergencia original proporciona $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ implica $|a_n - L| < \varepsilon$. Para verificar la definición en el dominio nuevo, tomamos $K = N$. Si $k \geq K$, entonces $\varphi(k) \geq k \geq N$, por lo que $|a_{\varphi(k)} - L| < \varepsilon$. Se ha obtenido un umbral válido para cada tolerancia, y eso demuestra la proposición.

El corte transportado es suficiente, aunque un selector rápido puede haber omitido antes todos los términos que incumplían la tolerancia. Tampoco necesitamos que los valores seleccionados sean distintos. En $(-1)^n$, la selección par converge a 1 y la impar a -1. Un límite global L sería límite de ambas por la proposición; la unicidad de C06 §6.4 obligaría a $1 = L = -1$. Queda así descartada la convergencia global mediante dos destinos incompatibles.

Una única selección convergente deja sin controlar lo descartado. Definamos $a_{2j} = 1/(j+1)$ y $a_{2j+1} = 2$ para cada $j \in \mathbb{N}$. La paridad asigna un único valor en todo el dominio. La selección par $b_k = 1/(k+1)$ converge a cero y la impar es constante dos, por lo que la sucesión completa tampoco tiene límite real.

En la figura 8.2, la ventana de radio $1/2$ excluye $b_1 = 1/2$, cuyo error está en la frontera. Para $k \geq 2$, $b_k \leq 1/3 < 1/2$, así que el corte $K = 2$ funciona en la selección. En la sucesión original siguen apareciendo doses después de cualquier corte. La convergencia de b exige además el control para todas las tolerancias ya demostrado en C06.

También se conservan cotas: si $|a_n| \leq M$ para todo n, sustituir n por $\varphi(k)$ da $|a_{\varphi(k)}| \leq M$. Si a es no decreciente, el orden $\varphi(k) < \varphi(k+1)$ da $a_{\varphi(k)} \leq a_{\varphi(k+1)}$; una subsucesión de una sucesión no creciente conserva de la misma manera esa dirección. Ninguna de estas afirmaciones obliga a que la sucesión original tenga las propiedades de una selección particular. Por ejemplo, una cota global 7 sigue dando $|a_{\varphi(k)}| \leq 7$ en todos los índices nuevos.

Ejercicios de la sección 8.2.

Ejercicio 5. Un umbral transportado y uno propio

Para $a_n = 3 + 1/(n+1)$ y $b_k = a_{2k+1}$, encuentra el menor umbral para la tolerancia $\varepsilon = 1/10$ en cada sucesión. Compáralos con el umbral transportado de §8.2.

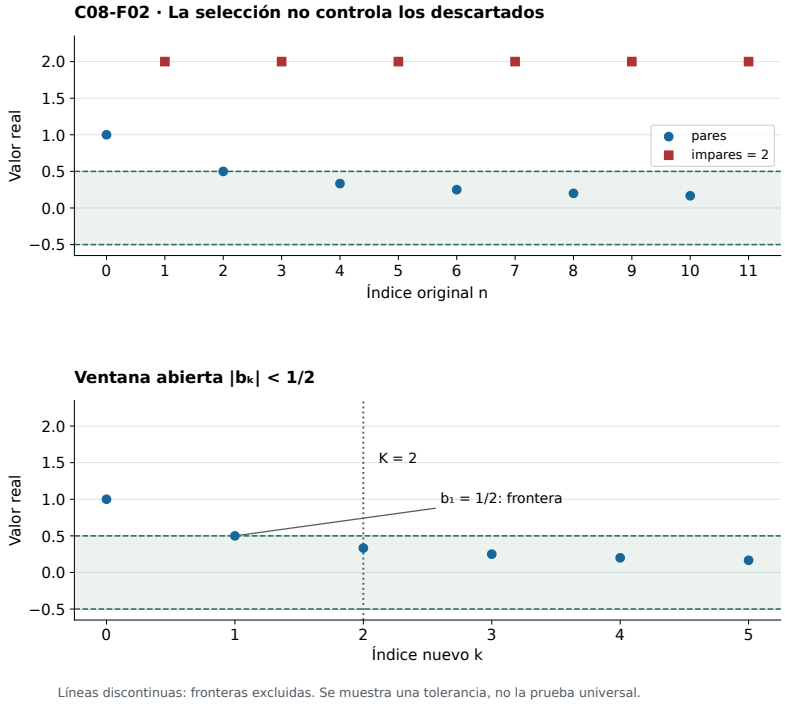


Figura 8.2. La ventana de radio medio captura la selección par desde k=2, pero los términos impares de la sucesión original permanecen en dos. La frontera no pertenece a la ventana.

Solución. En a se requiere $1/(n+1) < 1/10$, equivalente a $n > 9$; el menor umbral es $N = 10$, pues en nueve hay igualdad. Para $b_k = 3 + 1/(2k+2)$, la condición equivale a $k > 4$, así que el menor umbral es $K = 5$. El transporte general $K = N = 10$ también sirve, pero no es mínimo. La estrictitud de la tolerancia explica ambos casos de frontera.

La figura 8.2 permite comprobar por qué un punto de frontera obliga a retrasar el corte.

Ejercicio 6. Intercalar dos límites iguales

Supón que $a_{2k} \to L$ y $a_{2k+1} \to L$. Demuestra directamente que $a_n \to L$.

Solución. Fija $\varepsilon > 0$ y toma umbrales K_0, K_1 para las dos selecciones. Sea $K = \max\{K_0, K_1\}$ y $N = 2K$. Si $n \geq N$ es par, $n = 2k$ con $k \geq K$; si es impar, $n = 2k+1 \geq 2K$ obliga también a $k \geq K$, pues $k \leq K-1$ daría $n \leq 2K-1$. En ambos casos $|a_n - L| < \varepsilon$. Se ha cubierto toda la cola, que era lo que una selección aislada no permitía hacer.

Ejercicio 7. Una partición finita de índices

Sea $m \geq 2$ natural. Prueba que $a_n \to L$ si y sólo si $a_{mk+r} \to L$ para cada $r \in \{0, \dots, m-1\}$.

Solución. La dirección directa aplica §8.2 a cada selector $k \mapsto mk+r$. Para la recíproca, fija $\varepsilon > 0$ y elige un umbral K_r para cada uno de los finitísimos residuos. Toma $K = \max_r K_r$ y $N = mK$. La división euclídea escribe cualquier $n \geq N$ como $n = mk + r$, con $0 \leq r < m$. Si $k < K$, entonces $n \leq m(K-1) + (m-1) = mK - 1$, contradicción. Luego $k \geq K_r$ y el término está a distancia menor que ε de L. La finitud de la partición permite reunir los umbrales en un máximo.

Ejercicio 8. Todos los términos salvo algunos

Una prueba afirma: «Hay una subsucesión convergente a cero que selecciona todos los índices pares; los pares son infinitos, luego la sucesión converge a cero». Localiza el fallo, da un contraejemplo y demuestra una reparación si la selección omite sólo finitos índices.

Solución. Infinitud de índices seleccionados no implica control de todos los posteriores. El ejemplo $a_{2k} = 0$, $a_{2k+1} = 1$ refuta la afirmación: las dos paridades tienen límites diferentes. Para la reparación, supón $a_{\varphi(k)} \to 0$ y que $E = \varphi(\mathbb{N})$ tiene complemento finito. Dado $\varepsilon > 0$, toma K para la selección. El conjunto de índices omitidos junto con $\{\varphi(0), \dots, \varphi(K-1)\}$ es finito. Escoge N mayor que todos ellos, o cero si está vacío. Todo $n \geq N$ es $\varphi(k)$ con $k \geq K$; por tanto $|a_n| < \varepsilon$. Lo decisivo es que las excepciones sean finitas.

La figura 8.2 recuerda qué términos quedan fuera del control de una selección.

Ejercicio 9. Selección convergente de una monótona

Sea a monótona y supón que una subsucesión converge a $L \in \mathbb{R}$. Demuestra que $a_n \to L$ sin aplicar Bolzano–Weierstrass.

Solución. Supón primero que a es no decreciente. Para un índice fijo n, los índices seleccionados son eventualmente mayores que n, por lo que $a_n \leq a_{\varphi(k)}$ eventualmente. El orden de límites de C06 da $a_n \leq L$. Dado $\varepsilon > 0$, toma un término seleccionado $a_{\varphi(K)} > L - \varepsilon$ y pon $N = \varphi(K)$. Para $n \geq N$, la monotonía y la cota recién probada dan $L - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq L$, así que $|a_n - L| < \varepsilon$. Si a es no creciente, aplica el argumento a $-a$, cuya selección converge a $-L$, y cambia de signo. La dirección monótona propaga a toda una cola la información de un solo término seleccionado.

8.3. Regresar cerca de un punto

La selección par del ejemplo anterior puede volver cerca de cero después de cualquier corte, mientras los términos impares siguen fuera de la ventana. Esa persistencia pide cercanía y un índice tardío a la vez; una visita inicial aislada no la satisface.

Definición. Un real L es un **punto de acumulación de la sucesión** a si

$\forall \varepsilon > 0 \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n \geq N : |a_n - L| < \varepsilon$. Llamaremos también *punto de acumulación secuencial* a este L para distinguirlo de la acumulación de un conjunto. Cada bola $B(L, \varepsilon)$ recibe infinitos índices: si no hubiera visitas, el corte 0 ya impediría encontrarlas; si hubiera una cantidad finita no vacía, el corte $1 + \max E$, para ese conjunto E de índices de visita, las dejaría atrás. Si los índices son infinitos, no pueden estar contenidos en ningún prefijo finito y hay uno después de cada corte.

La convergencia exige, para cada tolerancia, un corte que controle **todos** los términos posteriores. La acumulación secuencial exige **alguno** después de cada corte, permitiendo varios destinos: 1 y -1 lo son para $(-1)^n$. **Proposición.** Un real L es punto de acumulación secuencial de a si y sólo si existe una subsucesión de a que converge a L. Podemos reunir las visitas persistentes en una selección convergente si coordinamos dos exigencias. La escala $1/(k+1)$ hará pequeños los errores y el corte posterior al índice elegido impedirá detenernos en una misma posición.

Supongamos primero que L cumple la definición. El conjunto de índices con $|a_n - L| < 1$ es no vacío; sea n_0 su mínimo. Una vez elegido n_k, la definición aplicada al corte $n_k + 1$ y al radio $1/(k+2)$ garantiza que el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : n \geq n_k + 1, \ |a_n - L| < 1/(k+2)\}$ es no vacío. Definimos n_{k+1} como su mínimo. El buen orden de los naturales permite continuar la recursión, y las desigualdades $n_{k+1} > n_k$ convierten $\varphi(k) = n_k$ en un selector estrictamente creciente. Por construcción, $|a_{n_k} - L| < 1/(k+1)$ para todo k.

Para comprobar la convergencia, recibimos $\varepsilon > 0$ y tomamos $K = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor$, con el piso positivo construido en C06. Si $k \geq K$, entonces $K + 1 > 1/\varepsilon$ y $|a_{n_k} - L| < 1/(k+1) \leq 1/(K+1) < \varepsilon$. El corte responde a la tolerancia y controla toda la selección desde él.

Recíprocamente, supongamos que $a_{\varphi(k)} \to L$. Dados $\varepsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$, sea K un umbral para esa subsucesión. Tomamos $k = \max\{K, N\}$ y $n = \varphi(k)$. El lema de §8.1 da $n \geq k \geq N$, y la convergencia da $|a_n - L| < \varepsilon$. Esto cumple exactamente la definición de acumulación secuencial. En $a_{2j} = 1/(j+1)$, $a_{2j+1} = 2$ y $L = 0$, el primer mínimo es $n_0 = 2$: $a_0 = 1$ y $a_1 = 2$ fallan el error menor que uno, mientras $a_2 = 1/2$ lo cumple. Siguen $n_1 = 4$, $n_2 = 6$ y, por inducción, $n_k = 2(k+1)$. Para el paso k, el error elegido es $1/(k+2) < 1/(k+1)$; el par

anterior tiene error exactamente $1/(k+1)$ y los impares valen 2. La frontera estricta explica por qué el mínimo puede ir más allá del corte impuesto.

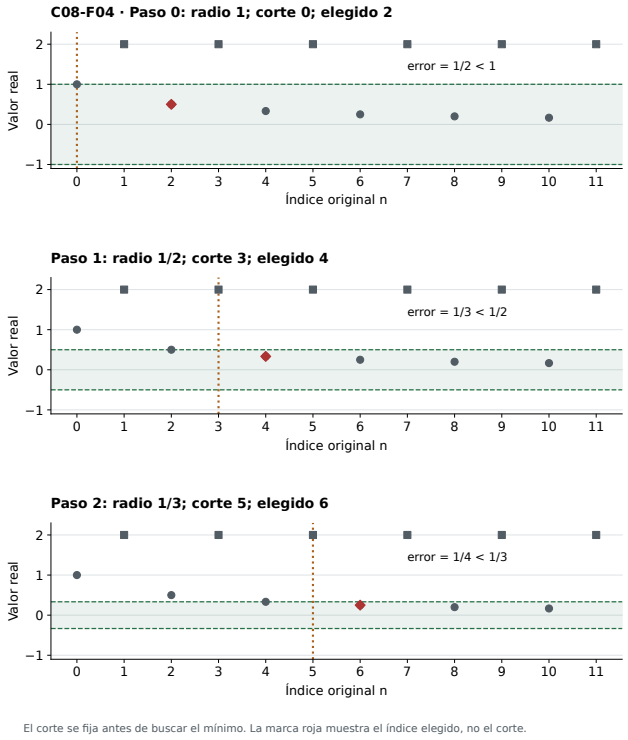


Figura 8.3. El corte impuesto y el índice elegido son diferentes. Cada paso conserva el avance temporal y obtiene un error menor que la tolerancia solicitada.

El mínimo natural fija cada elección sin ambigüedad. La construcción usa recursión y existencia de testigos; no garantiza un algoritmo efectivo para decidir las condiciones sobre reales abstractos.

Ejercicios de la sección 8.3.

Ejercicio 10. Una escala de radios basta

Demuestra que L es punto secuencial de a si y sólo si para cada $q \in \mathbb{N}$ y cada $N \in \mathbb{N}$ hay $n \geq N$ con $|a_n - L| < 1/(q+1)$.

Solución. La definición aplicada a los radios $1/(q+1)$ da una dirección. Para la otra, dados $\varepsilon > 0$ y N, arquimedianidad permite escoger q con $1/(q+1) < \varepsilon$. La hipótesis proporciona $n \geq N$ con error menor que ese radio, luego menor que ε. El orden es fijar la tolerancia, reducirla a una escala disponible y después elegir el índice.

Ejercicio 11. Un destino prescrito con escapes

Dados $L, H \in \mathbb{R}$ distintos, construye una sucesión acotada cuyo conjunto de puntos secuenciales sea exactamente $\{L, H\}$. Prueba que no tiene otros.

Solución. Toma $a_{2k} = L$ y $a_{2k+1} = H$. Las selecciones constantes muestran que ambos son puntos secuenciales y la cota $\max\{|L|, |H|\}$ acredita acotación. Si $T \notin \{L, H\}$, el radio $r = \frac{1}{2}\min\{|T - L|, |T - H|\} > 0$ define una bola que no contiene ningún término. Así T no satisface la condición de visitas. Como los dos destinos son distintos, la sucesión no converge.

Ejercicio 12. Alejar los índices tanto como se quiera

Si L es punto secuencial de a y $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es cualquier función, prueba que existe un selector φ con $\varphi(k) \geq h(k)$ y $|a_{\varphi(k)} - L| < 1/(k+1)$ para todo k.

Solución. Elige $\varphi(0)$ como el mínimo índice al menos $h(0)$ con error menor que uno. Para el paso siguiente utiliza el corte $\max\{\varphi(k)+1, h(k+1)\}$ y radio $1/(k+2)$. La acumulación secuencial garantiza un testigo después de cada corte, por lo que el mínimo existe. Por inducción se cumplen ambas desigualdades y el crecimiento estricto. El control de errores prueba convergencia como en §8.3. No hace falta que h sea monótona: el máximo incorpora por separado el corte heredado y la nueva exigencia.

Ejercicio 13. El conjunto de destinos es cerrado

Sea C el conjunto de puntos de acumulación secuencial de una sucesión real a. Demuestra que C es cerrado, sin suponer que a sea acotada.

Solución. Por C04 basta probar que todo punto adherente a C pertenece a C. Sea L adherente a C. Dados $\varepsilon > 0$ y un corte N, elige $H \in C$ con $|H - L| < \varepsilon/2$. Como H es punto secuencial de a, existe $n \geq N$ con $|a_n - H| < \varepsilon/2$. La desigualdad triangular da $|a_n - L| < \varepsilon$. Esto vale para cada tolerancia y cada corte, por lo que $L \in C$. Si C es vacío, no tiene puntos adherentes y es cerrado. La estrategia consiste en gastar la mitad de la tolerancia en aproximar el centro y la otra mitad en aproximar un término.

Ejercicio 14. Destinos de una partición finita

Sea $m \geq 2$ natural. Prueba que el conjunto de puntos secuenciales de a es la unión de los conjuntos de puntos secuenciales de las m sucesiones $b_k^{(r)} = a_{mk+r}$.

Solución. Un punto secuencial de alguna $b^{(r)}$ es límite de una extracción de ella; componiendo selectores resulta límite de una extracción de a, así que es punto secuencial de a. Para la inclusión inversa, sea L punto secuencial de a y supón que no lo es de ninguna $b^{(r)}$. Para cada residuo existen $\varepsilon_r > 0$ y K_r tales que $|b_k^{(r)} - L| \geq \varepsilon_r$ si $k \geq K_r$. Toma $\varepsilon = \min_r \varepsilon_r > 0$ y $N = m \max_r K_r$. La división euclídea y el argumento de cortes del ejercicio 8.7 muestran que todo $n \geq N$ tiene error al menos ε. Esto contradice que L sea punto secuencial. La finitud de residuos permite obtener un radio positivo común.

8.4. Puntos de una sucesión y puntos de un conjunto

La imagen olvida cuándo aparece un valor y cuántas veces se repite. En la constante $c_n = 0$, cero aparece después de cualquier corte y es punto secuencial. Su imagen $\{0\}$ no tiene acumulación como conjunto: alrededor de cero, ninguna bola perforada contiene un valor de la imagen; para un centro $x \neq 0$, el radio $|x|/2 > 0$ excluye el único valor 0. Así quedan descartados todos los centros reales.

Para un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, C04 llama **adherente** a un punto L si toda bola $B(L, r)$, $r > 0$, corta a A, y **punto de acumulación de** A si cada bola contiene un punto de A distinto de L. La acumulación puede ocurrir dentro o fuera del conjunto; la diferencia está en que el testigo nunca puede ser el propio centro.

Proposición. Un real L es adherente a A si y sólo si existe una sucesión $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ con valores en A que converge a L. Si L es adherente, cada conjunto $A \cap B(L, 1/(k+1))$ es no vacío. Elegimos un punto x_k en cada uno. Entonces $|x_k - L| < 1/(k+1)$, y el mismo control arquimediano usado en §8.3 prueba que $x_k \to L$. En sentido inverso, si $x_k \in A$ y $x_k \to L$, una bola de radio $r > 0$ contiene todos los términos desde un umbral; en particular contiene uno de ellos y corta a A. Para $A = \emptyset$, ambas afirmaciones son falsas: no hay punto adherente ni una función de dominio no vacío con valores allí.

Para precisar esas elecciones de puntos reales, trabajamos en el marco clásico con elección. Fijado A, disponemos de una función c que asigna a cada subconjunto no vacío $S \subseteq A$ un elemento $c(S) \in S$. Podemos escribir $x_k = c(A \cap B(L, 1/(k+1)))$ y usar la misma función cuando el conjunto admisible dependa de elecciones anteriores. Esto no toma un mínimo real, que podría no existir, ni procede de completitud. En §8.3 los conjuntos admisibles eran de índices naturales y su buen orden bastaba para tomar mínimos.

Proposición. Un real L es punto de acumulación de A si y sólo si existe una sucesión de puntos de $A \setminus \{L\}$ que converge a L. Si L es punto de acumulación, los conjuntos $A \cap B(L, 1/(k+1)) \setminus \{L\}$ son no vacíos; la función de elección permite tomar x_k en cada uno. El error $|x_k - L| < 1/(k+1)$ acredita convergencia. En sentido inverso, una sucesión de valores en $A \setminus \{L\}$ que converge a L aporta en cada bola un término distinto del centro, que es el testigo requerido.

La acumulación permite incluso elegir valores dos a dos distintos. Tomamos primero $x_0 \in A \cap B(L, 1) \setminus \{L\}$. Para evitar los valores $x_0, \ldots, x_{k-1}$ ya elegidos, con $k \geq 1$, reducimos el radio por debajo de todas sus distancias al centro: $r_k = \min\left\{\frac{1}{k+1}, \frac{1}{2}\min_{0 \leq j < k} |x_j - L|\right\} > 0$. El mínimo interior existe y es positivo porque reúne finitas distancias positivas y no está vacío. Elegimos $x_k \in A \cap B(L, r_k) \setminus \{L\}$ mediante la función fijada. Su distancia al centro es menor que la mitad de cualquiera de las distancias anteriores, lo que impide repetir esos valores; también es menor que $1/(k+1)$, de modo que $x_k \to L$. La elección inicial separada evita tomar un mínimo vacío.

En particular, cada bola alrededor de un punto de acumulación contiene infinitos puntos del conjunto. Si una bola de radio r sólo contuviera finitos puntos distintos de L, y hubiera alguno, el mínimo positivo de sus distancias permitiría reducir el radio y excluirlos a todos. Si no hubiera ninguno, la propia bola ya contradiría acumulación. A la inversa, infinitos puntos en una bola garantizan alguno distinto del centro.

Comparemos $c_n = 0$ con $d_0 = 0$ y $d_n = 1$ para $n \geq 1$.

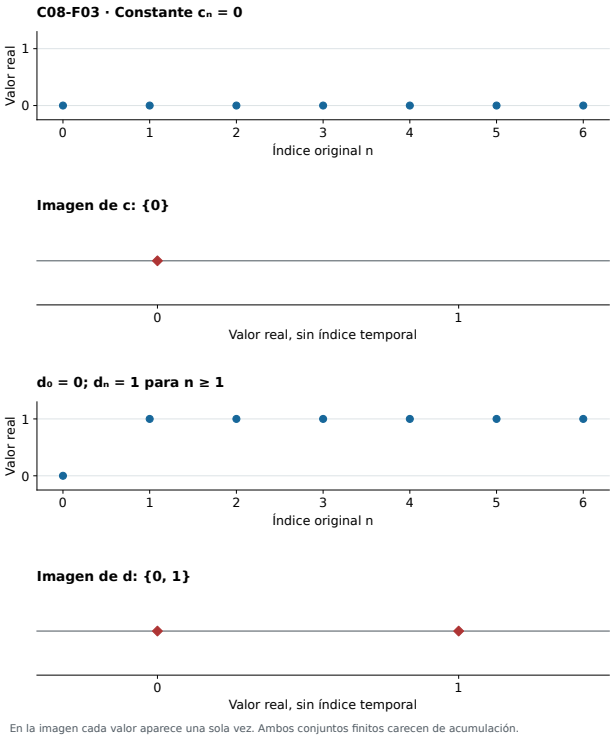


Figura 8.4. Las visitas tardías de una sucesión no equivalen a acumulación de su imagen. Los conjuntos finitos dibujados no tienen puntos de acumulación.

En d, cero pertenece a la imagen y es adherente a ella, pero no es punto secuencial: el corte $N = 1$ y el radio $1/2$ eliminan todas las visitas a cero. Uno sí es un punto secuencial y es el único, porque la sucesión converge a uno. La imagen $\{0, 1\}$ no tiene puntos de acumulación como conjunto. Para un centro perteneciente a ella basta un radio menor que uno; para un centro exterior basta un radio menor que la distancia a ambos puntos. La imagen conserva el cero inicial y pierde la persistencia temporal del uno.

Ejercicios de la sección 8.4.

Ejercicio 15. Tres conjuntos diferentes

Para $a_0 = 3$ y $a_n = 1/n$ cuando $n \geq 1$, determina la imagen, su clausura, su conjunto de acumulación y los puntos secuenciales de a. Justifica las exclusiones.

Solución. La imagen es $A = \{3\} \cup \{1, 1/2, 1/3, ...\}$. La sucesión converge a cero, pues el prefijo no afecta el límite, así que su único punto secuencial es cero. Cero es punto de acumulación de A por los recíprocos. Para excluir cualquier $x \neq 0$ como punto de acumulación, elige $J \geq 1$ natural con $1/J < |x|/2$. Para $n \geq J$, la triangular inversa da $|x - 1/n| \geq |x| - 1/n > |x|/2$. Sólo queda el conjunto finito $F = \{3\} \cup \{1/n : 1 \leq n < J\}$. Si $F \setminus \{x\}$ es no vacío, toma

$r = \min\left\{\frac{|x|}{2}, \frac{1}{2}\min_{y \in F\setminus\{x\}} |x - y|\right\} > 0$. Si es vacío, toma $r = |x|/2$. Esta bola excluye todos los puntos de A distintos de x: los recíprocos tardíos quedan fuera por la primera estimación y los puntos finitos restantes por la elección del radio. Por tanto x no es de acumulación. Si además $x \notin A$, la misma bola no contiene ningún punto de A y excluye adherencia. Los puntos de A sí son adherentes por pertenencia, y 0 por los recíprocos. En consecuencia $\overline{A} = A \cup \{0\}$ y $\mathrm{Acc}(A) = \{0\}$.

La figura 8.4 ayuda a distinguir los tres conjuntos que se han calculado.

Ejercicio 16. Cambios finitos del conjunto

Sea $F \subseteq \mathbb{R}$ finito y $A \subseteq \mathbb{R}$. Demuestra que $\mathrm{Acc}(A \setminus F) = \mathrm{Acc}(A) = \mathrm{Acc}(A \cup F)$.

Solución. La inclusión por monotonía da $\mathrm{Acc}(A \setminus F) \subseteq \mathrm{Acc}(A) \subseteq \mathrm{Acc}(A \cup F)$. Si $L \in \mathrm{Acc}(A)$, cada bola contiene infinitos puntos de A; retirar $F \cup \{L\}$ aún deja un testigo, así que $L \in \mathrm{Acc}(A \setminus F)$. Finalmente, si $L \in \mathrm{Acc}(A \cup F)$, cada bola contiene infinitos puntos de la unión, y al retirar los finitísimos de F quedan puntos de A distintos de L. Esto prueba la última inclusión necesaria. El argumento usa infinitud de valores, no multiplicidad de una lista.

Ejercicio 17. Cuando no se repiten valores

Supón que cada valor real aparece sólo finitas veces en a. Si $A = a(\mathbb{N})$, prueba que los puntos secuenciales de a coinciden con $\mathrm{Acc}(A)$.

Solución. Si L es punto secuencial, cada bola alrededor de L recibe infinitos índices. Si sólo contuviera finitos valores de A, cada uno aportaría finitos índices por hipótesis, dando una unión finita de conjuntos finitos: contradicción. Así hay infinitos valores y $L \in \mathrm{Acc}(A)$. Recíprocamente, si $L \in \mathrm{Acc}(A)$, cada bola contiene infinitos valores de A. Dado un corte N, el prefijo $a_0, \ldots, a_{N-1}$ sólo aporta finitos valores; existe un valor de esa bola fuera del prefijo y un índice que lo realiza, necesariamente al menos N. Esto prueba acumulación secuencial. La segunda dirección no necesita la hipótesis de multiplicidad finita.

Ejercicio 18. Misma imagen y destinos diferentes

Construye dos sucesiones con imagen $A = \{1, 1/2, 1/3, ...\}$ cuyos conjuntos de puntos secuenciales sean diferentes. Determina ambos conjuntos.

Solución. La primera es $a_n = 1/(n + 1)$; converge a cero y sus puntos secuenciales son exactamente $\{0\}$. Para la segunda, sea $B_m = m(m - 1)/2$ el índice inicial del bloque de longitud $m \geq 1$. Los naturales B_m crecen estrictamente y sin cota, así que cada n pertenece a un único bloque $B_m \leq n < B_{m+1}$. Definimos $b_n = 1/(n - B_m + 1)$. Se obtienen los bloques (1), $(1, 1/2)$, $(1, 1/2, 1/3)$ y así sucesivamente; todos sus valores están en A, y cada $1/j$ aparece en el bloque $m = j$.

Para un $j \geq 1$ fijo y cualquier corte N, toma $m \geq \max\{j, N+2\}$. El índice $n = B_m + j - 1 \geq N$ tiene $b_n = 1/j$, por lo que ese valor es punto secuencial. Para 0, recibidos $\varepsilon > 0$ y N, toma $m \geq N + 2$ con $m > 1/\varepsilon$. El último índice del bloque, $n = B_m + m - 1 \geq N$, tiene $0 < b_n = 1/m < \varepsilon$. Así también 0 es punto secuencial. No hay otros, pues todo punto secuencial es adherente a la imagen y la clausura de A es $A \cup \{0\}$, demostrada mediante finitud

local fuera de cero como en el ejercicio 8.15. La imagen por sí sola no fija las multiplicidades temporales.

Ejercicio 19. Una elección mal justificada

Audita esta frase: «Si L es adherente a A, elegimos el menor punto de $A \cap B(L, 1/(k+1))$». Da un ejemplo en que esa elección no exista y repara la prueba.

Solución. Toma $A = (0, 1)$, $L = 0$ y $k = 0$. La intersección es $(0, 1)$ y no tiene menor elemento: si x pertenece, $x/2$ es menor y también pertenece. La adherencia sólo garantiza no vacuidad. La reparación usa la función de elección c sobre los subconjuntos no vacíos de A: $x_k = c(A \cap B(L, 1/(k+1)))$. Entonces $|x_k - L| < 1/(k+1)$ y el argumento arquimediano da convergencia. No hay que imponer a A un orden con mínimos que el enunciado no ofrece.

Los testigos elegidos se interpretan como aproximaciones al centro, como en la figura 8.4; su existencia procede de adherencia y de la elección fijada.

Ejercicio 20. Caracterizar los cerrados por límites

Demuestra que $F \subseteq \mathbb{R}$ es cerrado si y sólo si el límite de toda sucesión convergente con valores en F pertenece a F. Trata el caso vacío.

Solución. Si F es cerrado y $x_n \in F$ converge a L, cada bola alrededor de L contiene términos de F, así que L es adherente y pertenece a F. Recíprocamente, si todos esos límites pertenecen a F, toma cualquier punto adherente L. Por §8.4 existe una sucesión de puntos de F que converge a L; la hipótesis da $L \in F$. Así F contiene todos sus puntos adherentes y es cerrado por C04. Si $F = \emptyset$, no existen sucesiones con valores en él; la propiedad universal es vacua y el vacío es cerrado. La equivalencia no requiere acotación porque sólo considera sucesiones que ya convergen.

8.5. Dividir el espacio y conservar índices

Para construir una extracción hacia L hemos supuesto que ya conocíamos un punto secuencial. La sola acotación no lo señala. Podemos buscarlo estrechando la región que contiene los valores, sin exigir que los términos originales sigan una dirección monótona. Cada región elegida deberá conservar infinitos índices de visita. Si sólo conserváramos algún término, todos los intervalos podrían encerrar la misma evaluación, sin dejar un índice posterior para continuar la extracción. La reserva se refiere a índices, aunque sus valores puedan coincidir.

Sea $|a_n| \le M$ para todo n, con $M \ge 0$. Si $M = 0$, la sucesión es constante cero y el selector identidad ya converge. Para $M > 0$, empezamos por $I_0 = [-M, M]$, que contiene todos los términos. Supongamos construido un intervalo cerrado $I_k = [u_k, v_k]$ cuyo conjunto de índices de visita $E_k = \{n \in \mathbb{N} : a_n \in I_k\}$ es infinito. Su punto medio es $m_k = (u_k + v_k)/2$. Las mitades cerradas $[u_k, m_k]$ y $[m_k, v_k]$ cubren I_k. Si cada una recibiera sólo finitos índices, la unión de esos dos conjuntos finitos contendría todos los índices de E_k, contradiciendo su infinitud.

Al menos una mitad conserva, por tanto, infinitos índices. Elegimos la izquierda cuando cumple esa condición y la derecha en caso contrario; la regla también decide cuando ambas sirven. Las dos mitades comparten su punto medio, pero la unión de dos conjuntos finitos seguiría siendo finita aunque se solaparan. La decisión usa la propiedad matemática de infinitud, sin pretender deducirla de una muestra finita. La construcción comienza porque $E_0 = \mathbb{N}$. Por inducción, todos los E_k son infinitos, todos los intervalos son cerrados y no vacíos, $I_{k+1} \subseteq I_k$ y su anchura es $w_k = v_k - u_k = 2M/2^k$. Aquí la acotación permitió crear I_0; el argumento de finitud permite repetir cada partición.

Para ilustrar la regla, tomemos $a_n = (-1)^n/(n+1)$ y $M = 1$. La mitad izquierda de $[-1, 1]$ conserva todos los términos impares. Después se elige siempre la mitad que llega a cero: una mitad negativa separada de cero sólo contiene finitos términos, pues $1/(n+1)$ llega a ser menor que cualquier distancia positiva fijada. Así $I_k = [-2^{1-k}, 0]$ para $k \ge 1$.

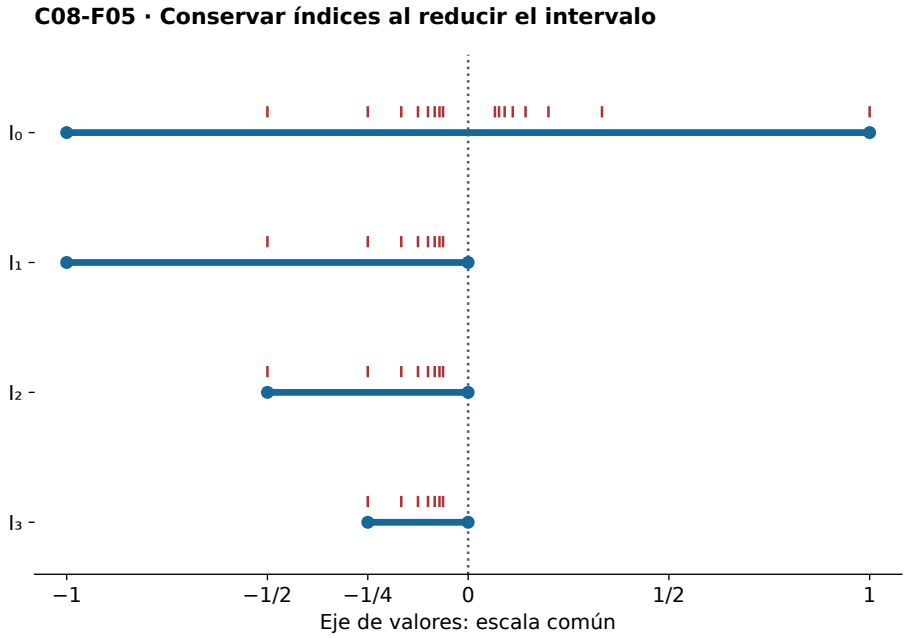


Figura 8.5. Los intervalos se estrechan y siguen recibiendo infinitos índices impares. La prueba de esa infinitud usa la fórmula, no el número de puntos dibujados; las mitades cerradas comparten su extremo.

La figura 8.5 muestra intervalos del eje de valores. Sus segmentos representan esos conjuntos cerrados, sin interpolar la sucesión; las visitas infinitas proceden de la fórmula de los términos impares. En este ejemplo el punto común es conocido, mientras que la construcción general todavía debe obtenerlo. Para aplicar el teorema de intervalos cerrados encajados de C03 §§3.5–3.6, ajustamos la indexación escribiendo $J_m = I_{m-1}$ para $m \geq 1$. Los intervalos son cerrados, acotados, no vacíos y cumplen $J_{m+1} \subseteq J_m$. La completitud garantiza un real L en todos ellos y, por tanto, en todos los I_k. La disminución de anchuras tendrá que probar después que ese punto es único.

Por inducción, $2^k \geq k+1$: vale para $k = 0$ y el paso usa $2^{k+1} \geq 2(k+1) \geq k+2$. Así $w_k \leq 2M/(k+1)$. Para $\varepsilon > 0$, tomamos $K = \lfloor 2M/\varepsilon \rfloor + 1$, cuyo argumento es positivo porque estamos en el caso $M > 0$. Entonces $K + 1 > 2M/\varepsilon$ y $w_K < \varepsilon$. Se reutiliza la consecuencia arquimediana de C03 a través del piso de C06, sin recurrir a un teorema posterior de límites de potencias.

Si L y H fueran puntos comunes distintos, con distancia $d = |L - H| > 0$, el corte $K = \lfloor 2M/d \rfloor + 1$ daría $w_K \leq 2M/(K+1) < d$. Pero ambos pertenecen a I_K, de modo que $d \leq w_K < d$, contradicción. Para $M = 0$ la unicidad ya era inmediata en el singleton inicial $\{0\}$. El punto común y las reservas E_k proporcionan datos diferentes: la región de valores se estrecha alrededor de L, pero todavía hay que enlazar índices crecientes dentro de esas regiones. Ése es el paso que convertirá los intervalos en una subsucesión.

Ejercicios de la sección 8.5.

Ejercicio 21. Primeras mitades y reserva

Para $a_n = (-1)^n/(n+1)$ e $I_0 = [-1, 1]$, aplica la regla de preferencia izquierda durante los tres primeros pasos. Explica por qué la reserva de índices es infinita en cada intervalo obtenido.

Solución. Se obtiene $I_1 = [-1, 0]$, $I_2 = [-1/2, 0]$ e $I_3 = [-1/4, 0]$. En el primer paso la mitad izquierda contiene todos los índices impares. Para I_2, la otra mitad $[-1, -1/2]$ recibe sólo el índice uno; la mitad que llega a cero recibe todos los impares. Para I_3, $[-1/2, -1/4]$ recibe sólo los índices uno y tres, mientras que $[-1/4, 0]$ recibe todos los impares desde tres. Compartir el extremo $-1/4$ no afecta la infinitud. La justificación general usa $1/(n+1) \to 0$, no el recuento de los primeros puntos dibujados.

La figura 8.5 permite seguir el encajamiento; la reserva infinita se acredita con las desigualdades sobre los recíprocos.

Ejercicio 22. Un invariante demasiado débil

Sea $a_0 = 0$ y $a_n = 1$ para $n \geq 1$. Los intervalos $I_k = [-2^{-k}, 2^{-k}]$ son cerrados, encajados, de anchura tendente a cero y contienen algún término de a. ¿Puede extraerse una subsucesión con $a_{n_k} \in I_k$ para todo k? Explica.

Solución. Para $k \geq 1$, $I_k \subseteq [-1/2, 1/2]$ y sólo recibe el índice original cero. Por ello la pertenencia exigiría $n_k = 0$ para todos los $k \geq 1$, incompatible con crecimiento estricto. El punto común existe y es cero, pero no hay reserva infinita de índices alrededor de él. De hecho la sucesión converge a uno y cero no es punto secuencial. La condición «contiene algún término» no permite la extracción temporal.

La condición de reserva de la figura 8.5 excluye precisamente la reutilización de un único índice que haría fallar esta extracción.

Ejercicio 23. Dividir en más partes

Sea $m \geq 2$ natural. Adapta la construcción de §8.5 dividiendo cada intervalo en m subintervalos cerrados de igual anchura. Fija una regla inequívoca de elección y prueba las propiedades necesarias para obtener un punto común único.

Solución. Los m subintervalos cubren al anterior, aunque compartan extremos. Si cada conjunto de índices fuese finito, su unión finita sería finita; alguno conserva infinitos índices. Elegimos el primero de izquierda a derecha entre los que sirven. Esto define una familia encajada de intervalos cerrados no vacíos con anchuras $2M/m^k$. Como $m^k \geq 2^k \geq k + 1$, arquimedianidad permite hacer la anchura menor que cualquier tolerancia. C03 da un punto común por completitud, y la anchura arbitrariamente pequeña da unicidad mediante la comparación de dos supuestos puntos. Para $M = 0$ se trata directamente la constante cero. La prueba no depende específicamente de dos mitades, sino de una partición finita con reducción uniforme de anchura.

Ejercicio 24. Anchuras pequeñas sin intersección

Exhibe una familia de intervalos abiertos no vacíos y encajados de anchuras arbitrariamente pequeñas cuya intersección sea vacía. Explica qué paso de §8.5 deja de estar autorizado.

Solución. Toma $I_k = (0, 1/(k+1))$. Son abiertos, no vacíos y encajados, y su anchura puede hacerse tan pequeña como se quiera por arquimedianidad. Un punto común tendría que ser positivo; para un $x > 0$ fijado existe k con $1/(k + 1) < x$, por lo que $x \notin I_k$. Cero tampoco pertenece a ninguno. La intersección es vacía. Falla la hipótesis de intervalos cerrados en la interfaz de C03; la disminución de anchuras no reemplaza esa hipótesis.

El carácter cerrado de los intervalos de la figura 8.5 es esencial para garantizar el punto común.

Ejercicio 25. El punto común como supremo

Para los intervalos $I_k = [u_k, v_k]$ de §8.5, reconstruye la existencia del punto común tomando $L = \sup\{u_k : k \in \mathbb{N}\}$. Verifica ambas desigualdades para cada intervalo y después la unicidad.

Solución. El conjunto de extremos izquierdos es no vacío y está acotado superiormente por v_0, así que completitud da su supremo L. Para cada k, $u_k \le L$. Además v_k es cota superior de todos los u_j: si $j \ge k$, el encajamiento da $u_j \le v_j \le v_k$; si $j < k$, da $u_j \le u_k \le v_k$. Por minimalidad del supremo, $L \le v_k$. Luego $L \in I_k$ para todo k. Si dos puntos comunes distaran $d > 0$, una anchura menor que d lo impediría. Esta prueba abre la interfaz de C03 y muestra que completitud se usa en la existencia del supremo, no en calcular una fórmula del candidato.

8.6. Bolzano–Weierstrass: construir la extracción

Teorema de Bolzano–Weierstrass para sucesiones reales. Toda sucesión real acotada tiene una subsucesión convergente. La conclusión garantiza una selección convergente a algún real, incluso cuando no disponemos de una fórmula para el selector. En $(-1)^n$ podemos elegir cualquiera de las paridades, con destinos distintos; la existencia afirmada no obliga a que converja la sucesión entera. Para el caso $M > 0$, usamos los intervalos de §8.5, su punto común L y las reservas infinitas $E_k = \{n \in \mathbb{N} : a_n \in I_k\}$. Para elegir dentro del intervalo siguiente necesitaremos un índice posterior al ya utilizado.

Definimos $n_0 = \min E_0$. Una vez elegido n_k, el conjunto $E_{k+1} \setminus \{0, \dots, n_k\}$ es no vacío: si no lo fuera, E_{k+1} estaría contenido en un conjunto finito y sería finito. Sus elementos son precisamente los índices de E_{k+1} mayores que n_k, y su buen orden permite definir $n_{k+1} = \min\{n \in E_{k+1} : n > n_k\}$.

La recursión da un índice en cada paso, $n_{k+1} > n_k$ y $a_{n_k} \in I_k$. La primera propiedad, encadenada entre dos índices cualesquiera, demuestra que $\varphi(k) = n_k$ es un selector estrictamente creciente. Así $b_k = a_{n_k}$ es efectivamente una subsucesión de a. Para $\varepsilon > 0$, elegimos primero K con $w_K < \varepsilon$, mediante la fórmula de §8.5. Si $k \ge K$, tanto a_{n_k} como L están en $I_k \subseteq I_K$. Sus distancias quedan controladas por la anchura del mismo intervalo:

$|b_k - L| = |a_{n_k} - L| \le w_K < \varepsilon$. La estimación demuestra $b_k \to L$. Junto con la selección identidad del caso $M = 0$, queda probado el teorema para toda sucesión real acotada. Volvamos al ejemplo $a_n = (-1)^n/(n+1)$. Los seis primeros mínimos de la construcción son $0, 1, 3, 5, 7, 15$, con valores $1, -1/2, -1/4, -1/6, -1/8, -1/16$. El salto de siete a quince es real: los índices impares intermedios aún tienen valores menores que el extremo izquierdo de $I_5 = [-1/16, 0]$.

Paso k	Intervalo I_k	Índice n_k	Valor a_{n_k}
0	[−1,1]	0	1
1	[−1,0]	1	−1/2
2	[−1/2,0]	3	−1/4
3	[−1/4,0]	5	−1/6
4	[−1/8,0]	7	−1/8
5	[−1/16,0]	15	−1/16

Para $\varepsilon = 1/4$ podemos usar $K = 4$, porque $I_4 = [-1/8, 0]$ tiene anchura $1/8 < 1/4$. Ese umbral es suficiente; no se afirma que sea mínimo. La tabla separa el contador k de refinamientos, el índice original n_k y el valor a_{n_k}. Una ampliación gráfica debe conservar esa distinción y declarar su escala. Los intervalos reducen la región de valores; las reservas infinitas permiten seguir eligiendo índices posteriores. La completitud aportó L y la estimación por anchura verifica la convergencia de la función construida.

Por ejemplo, toda sucesión con valores en $[-3, 7]$ admite una extracción convergente, aunque oscile o repita valores. Para decidir si el límite permanece en el conjunto que contiene los términos, importa además que ese conjunto sea cerrado.

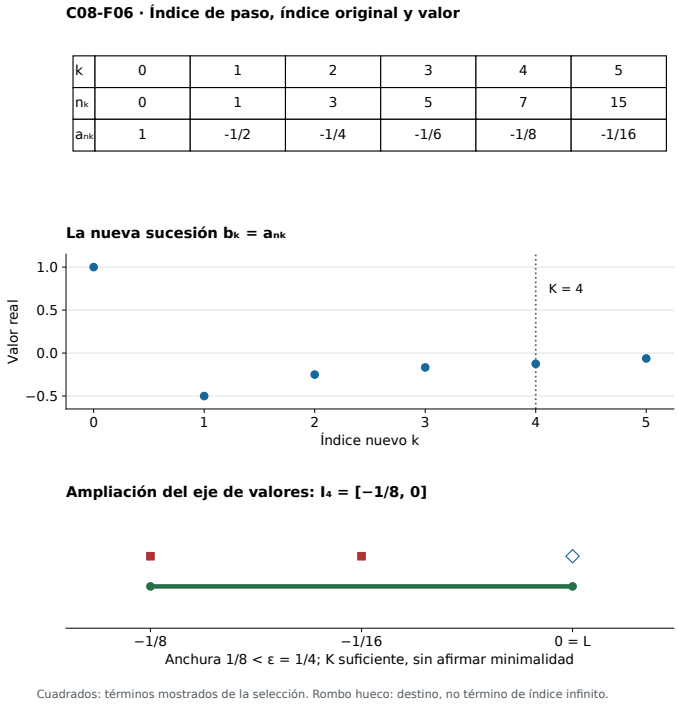


Figura 8.6. Los índices originales 0,1,3,5,7,15 se convierten en los índices nuevos 0 a 5. Para k≥4 la anchura 1/8 de I4 controla el error y es menor que la tolerancia 1/4.

Ejercicios de la sección 8.6.

Ejercicio 26. Los mínimos de la extracción

Para el ejemplo alternante recíproco de §§8.5–8.6, verifica los seis índices $n_0, \dots, n_5$ y demuestra que $n_k = 2^{k-1} - 1$ para $k \geq 4$.

Solución. Como $E_0 = \mathbb{N}$, $n_0 = 0$. En $I_1 = [-1, 0]$ el primer índice posterior es uno; en $I_2 = [-1/2, 0]$ el primero posterior a uno es tres; en $I_3 = [-1/4, 0]$ el primero posterior a tres es cinco. Para $k \geq 1$, la pertenencia de un término exige índice impar y $1/(n+1) \leq 2^{1-k}$, equivalente a $n \geq 2^{k-1} - 1$. Para $k = 4$ ese primer impar admisible es siete, mayor que cinco; para $k = 5$ es quince. Si la fórmula vale en algún $k \geq 4$, el primer impar admisible en I_{k+1} es $2^k - 1$, mayor que n_k. La recursión de mínimos da la fórmula por inducción. Se obtiene $0, 1, 3, 5, 7, 15$; la fórmula no debe extenderse a los primeros pasos, donde la condición de ser posterior puede dominar a la cota espacial.

En la figura 8.6 se separan la pertenencia al intervalo y la obligación de avanzar en los índices; ambas intervienen en estos mínimos.

Ejercicio 27. Una extracción todavía más tardía

En la prueba de Bolzano–Weierstrass, sustituye la regla por $n_0 = \min\{n \in E_0 : n \geq h(0)\}$ y $n_{k+1} = \min\{n \in E_{k+1} : n > n_k,\ n \geq h(k+1)\}$, donde $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Prueba que la extracción sigue convergiendo al mismo punto común.

Solución. Cada conjunto admisible es no vacío porque E_k es infinito y la nueva exigencia sólo excluye un prefijo finito. El mínimo existe por buen orden. Las elecciones mantienen $n_{k+1} > n_k$ y $a_{n_k} \in I_k$, así que forman una subsucesión. Dado $\varepsilon > 0$, elige K con $w_K < \varepsilon$. Para $k \geq K$, los puntos a_{n_k} y L siguen estando en I_K, de donde $|a_{n_k} - L| \leq w_K < \varepsilon$. El tamaño de los saltos temporales no interviene en la estimación espacial.

La estimación por anchura de la figura 8.6 sigue funcionando al retrasar las elecciones de índices.

Ejercicio 28. Lo que no promete la existencia

Construye una sucesión acotada con una subsucesión convergente y otra no convergente, ambas distintas de la sucesión original. Justifica todas las afirmaciones.

Solución. Toma $a_n = (-1)^n$. El selector $\varphi(k) = 2k$ produce la constante uno. El selector $\psi(k) = k + 1$ produce $b_k = (-1)^{k+1}$, cuyas selecciones par e impar son constantes menos uno y uno; por §8.2 y unicidad no converge. La primera sucesión difiere de a en el índice uno y la segunda difiere ya en cero. Ambas son subsucesiones porque sus selectores crecen estrictamente. La existencia garantizada por el teorema no convierte toda elección en convergente.

La figura 8.2 permite contrastar lo que controla una selección con lo que permanece en la sucesión original.

Ejercicio 29. Extracciones simultáneas

Sean a y b dos sucesiones reales acotadas. Prueba que existe un mismo selector θ tal que $a_{\theta(j)}$ y $b_{\theta(j)}$ convergen, posiblemente a límites diferentes. Extiende el argumento a una familia finita de sucesiones acotadas.

Solución. Aplica Bolzano–Weierstrass a a y obtiene φ con $a_{\varphi(k)} \to A$. La sucesión $b_{\varphi(k)}$ sigue acotada; extrae de ella mediante ψ una sucesión convergente a B. Pon $\theta = \varphi \circ \psi$, estrictamente creciente. La selección $a_{\theta(j)}$ converge a A porque es una subsucesión de una sucesión que ya convergía, mientras que $b_{\theta(j)} \to B$ por construcción. Para una familia finita se procede por inducción: la siguiente extracción conserva los límites previamente obtenidos y añade uno nuevo. No se afirma que el selector sea determinado de forma única; muchos pueden servir. La técnica transferible consiste en conservar las propiedades adquiridas al hacer cada extracción posterior.

Ejercicio 30. Un selector para numerables sucesiones

Sea $(a^{(r)})_{r\in\mathbb{N}}$ una familia de sucesiones reales, cada una acotada. Demuestra que hay un selector θ tal que $a^{(r)}_{\theta(k)}$ converge para cada r fijo. No se exige una cota común a toda la familia.

Solución. Construimos selectores originales φ_r anidados. Aplica la construcción determinada de Bolzano–Weierstrass a $a^{(0)}$ y obtiene φ_0. Dado φ_r, extrae de $a^{(r+1)}_{\varphi_r(k)}$ mediante un selector ψ_{r+1} y define $\varphi_{r+1} = \varphi_r \circ \psi_{r+1}$. Para cada $s \le r$, $a^{(s)}_{\varphi_r(k)}$ converge, por conservación de límites. Las elecciones pueden fijarse usando la menor cota natural positiva disponible y las reglas de mitades y mínimos ya especificadas; no se precisa escoger arbitrariamente entre selectores.

Define la diagonal $\theta(k) = \varphi_k(k)$. Como $\psi_{k+1}(k+1) \ge k+1$, se tiene $\theta(k+1) = \varphi_k(\psi_{k+1}(k+1)) \ge \varphi_k(k+1) > \varphi_k(k) = \theta(k)$. Por tanto θ es selector. Fija r. Para $k \ge r$, el anidamiento permite escribir $\theta(k) = \varphi_r(t_k)$, con $t_k \ge k$; esto se deduce componiendo los selectores posteriores, cada uno mayor o igual a la identidad. Como θ crece y φ_r es estrictamente creciente, los t_k también crecen. Dada una tolerancia para el límite de $a^{(r)}_{\varphi_r(j)}$, toma su umbral J y luego $K = \max\{r, J\}$. Para $k \ge K$, $t_k \ge k \ge J$ y el término diagonal cumple la tolerancia. Cada r fijo queda controlado; no se ha afirmado un umbral uniforme en r.

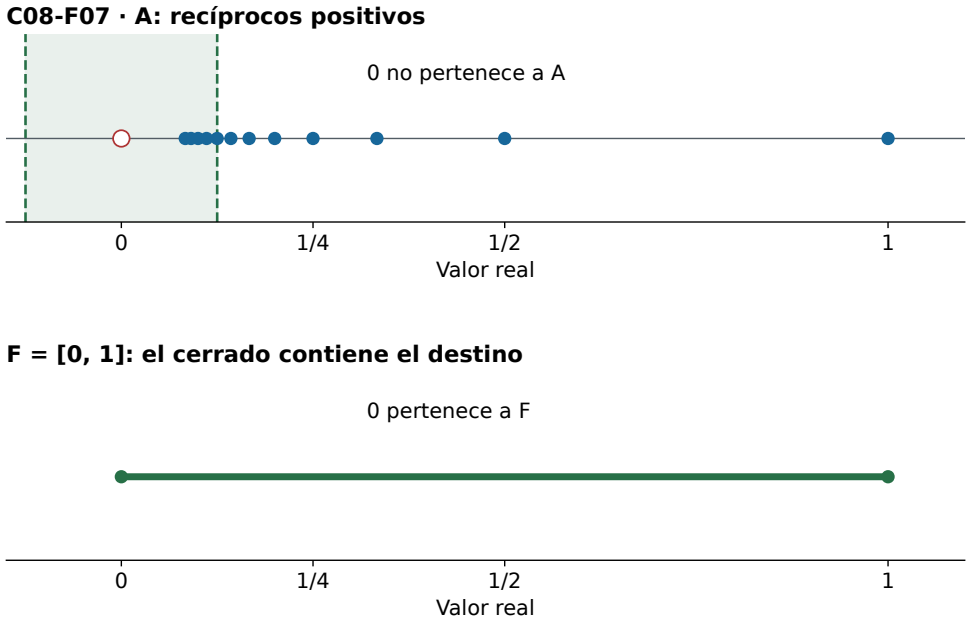
8.7. De la extracción a los conjuntos

Una sucesión tiene infinitos índices aunque repita un único valor. Para deducir acumulación de un conjunto infinito necesitaremos conservar su infinitud de **valores distintos**, evitando que la extracción obtenida sea sólo una constante repetida. **Teorema.** Todo conjunto infinito y acotado $A \subseteq \mathbb{R}$ tiene al menos un punto de acumulación en $\mathbb{R}$. Fijemos la función de elección sobre los subconjuntos no vacíos de A descrita en §8.4. Elegimos $x_0 \in A$ y, construidos $x_0, \dots, x_k$, elegimos x_{k+1} en $A \setminus \{x_0, \dots, x_k\}$. Este conjunto

sigue siendo no vacío, porque quitar finitos puntos no agota un conjunto infinito. Se obtiene una sucesión de valores dos a dos distintos; no se afirma que enumere todo A.

Como A es acotado, la sucesión también lo es. Bolzano–Weierstrass produce una subsucesión $y_j = x_{\varphi(j)}$ que converge a algún real L. Los valores de y siguen siendo distintos. En consecuencia, a lo sumo uno coincide con L. Si ninguno coincide, y ya tiene valores en $A \setminus \{L\}$. Si $y_{j_0} = L$, consideramos $z_k = y_{j_0+1+k}$: esta cola reindexada conserva el límite por C06 y evita el centro. En ambos casos la caracterización de §8.4 demuestra que L es punto de acumulación de A.

Repetir siempre el mismo punto de A habría producido una constante y, por tanto, sólo un límite adherente. Elegir valores distintos permite retirar a lo sumo una aparición del centro y obtener un testigo diferente de L en cada bola, que es lo que exige acumulación. El punto obtenido puede quedar fuera de A. Para $A = \{1/(n+1) : n \in \mathbb{N}\}$, todos los valores son positivos y cero no pertenece a A. Sin embargo, para cada $r > 0$ existe n con $0 < 1/(n+1) < r$, de modo que cero es punto de acumulación de A.



Fila A: círculo hueco = referencia excluida. Fila F: extremo lleno = incluido. Muestra de 12 recíprocos.

Figura 8.7. Cero es punto de acumulación de los recíprocos positivos y no pertenece a su conjunto. Sí pertenece al intervalo cerrado [0,1] que contiene todos esos puntos.

Corolario. Toda sucesión con valores en un conjunto cerrado y acotado $F \subseteq \mathbb{R}$ tiene una subsucesión que converge a un punto de F. La acotación proporciona una extracción convergente a L por el teorema de §8.6. Puesto que sus términos están en F, §8.4 muestra que L es adherente a F. Un conjunto cerrado contiene sus puntos adherentes, por C04, y por tanto $L \in F$. Si F es vacío, no existe una sucesión de dominio $\mathbb{N}$ con valores allí; la afirmación universal no requiere construir una extracción en ese caso.

En particular, si todos los términos están en $[u, v]$, con $u \le v$, se obtiene un límite subsucesional en ese mismo intervalo, incluidos sus extremos. Para un intervalo abierto la pertenencia puede fallar: $1/(n+2)$ tiene valores en $(0, 1)$ y converge a cero. La infinitud y la acotación desempeñan papeles separados. Un conjunto finito carece de puntos de acumulación: para cualquier centro, si quedan puntos distintos de él, sus distancias forman una familia finita no vacía con mínimo positivo y un radio menor los excluye; si no quedan, cualquier bola perforada falla ya.

El conjunto $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ es infinito y no acotado, y tampoco tiene puntos de acumulación reales. Para un centro $x < 0$, el radio $-x/2$ deja la bola en los negativos. Si $x \in \mathbb{N}$, el radio $1/2$ excluye los demás naturales. En el caso restante, $x > 0$ no es natural: $q = \lfloor x \rfloor$ satisface $q < x < q + 1$, y el radio $\min\{x - q, q + 1 - x\}/2 > 0$ deja la bola dentro de $(q, q + 1)$, sin naturales. Se han excluido todos los centros, mediante el piso de C06 y la separación de naturales consecutivos.

Ejercicios de la sección 8.7.

Ejercicio 31. Dos hipótesis de un conjunto

Exhibe un conjunto acotado sin puntos de acumulación y un conjunto infinito sin puntos de acumulación. Prueba ambos casos y explica por qué ninguno contradice §8.7.

Solución. El conjunto $\{0, 2\}$ es acotado y finito. En cada centro real una bola suficientemente pequeña excluye todos los puntos distintos del centro; si el centro no pertenece, toma radio menor que ambas distancias. No tiene acumulación. El conjunto $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ es infinito y no acotado. Cualquier bola acotada contiene sólo finitísimos naturales, y puede reducirse para excluir todos los distintos de su centro; por tanto tampoco tiene acumulación. El primer caso carece de infinitud y el segundo de acotación: ninguno cumple las dos hipótesis del teorema.

Ejercicio 32. Un cerrado que retiene el destino

Sean $u \leq v$ reales y $a_n \in [u, v]$. Demuestra que existe una subsucesión convergente a $L \in [u, v]$. Después muestra que la conclusión con $L \in (u, v)$ puede fallar para términos en un intervalo abierto no vacío.

Solución. La cota $|a_n| \leq \max\{|u|, |v|\}$ permite aplicar Bolzano–Weierstrass. Si una extracción converge a L, el orden de límites da $u \leq L \leq v$; también puede usarse que el intervalo es cerrado. Esto incluye $u = v$, caso constante. Para $u < v$, define $a_n = u + (v - u)/(n + 2)$. Sus valores están estrictamente entre u y v y converge a u, por las reglas de C06. Toda subsucesión tiene el mismo límite u y por unicidad ninguna converge a un punto del intervalo abierto. El carácter cerrado decide si el destino permanece dentro.

La figura 8.7 distingue que exista un destino real de que pertenezca al conjunto que contiene los términos.

Ejercicio 33. Conjunto cerrado acotado sin acumulación

Prueba que un conjunto acotado $A \subseteq \mathbb{R}$ sin puntos de acumulación es finito. ¿Hace falta que sea cerrado? Justifica.

Solución. Si A fuera infinito y acotado, el teorema de §8.7 le daría un punto de acumulación, contradicción. Por tanto es finito. No hace falta cerradura: la existencia de acumulación para conjuntos infinitos acotados ocurre en $\mathbb{R}$, sin prometer pertenencia a A. De hecho todo conjunto finito es cerrado por C04, pero esa conclusión adicional no se usó como hipótesis. El argumento es la contrapositiva del teorema con la acotación mantenida.

Ejercicio 34. Conjuntos de destinos acotados

Sea a acotada por $|a_n| \leq M$. Demuestra que su conjunto C de puntos secuenciales es no vacío, cerrado y contenido en $[-M, M]$.

Solución. Bolzano–Weierstrass da una extracción convergente, cuyo límite pertenece a C por §8.3; así C es no vacío. El ejercicio 8.13 probó cerradura sin requerir acotación; alternativamente, si L es adherente a C, aproxima L por un $H \in C$ a error $\varepsilon/2$ y después elige un término tardío cerca de H al mismo error. Eso demuestra $L \in C$. Finalmente, si $H \in C$, una extracción converge a H y todos sus términos están entre $-M$ y M. El orden de límites da $-M \leq H \leq M$. Las tres conclusiones proceden de obligaciones distintas: existencia, estabilidad por aproximación y cota heredada.

Ejercicio 35. Distancia positiva entre dos cerrados

Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ cerrados, no vacíos y disjuntos. Supón que A es acotado. Demuestra que existe $\delta > 0$ tal que $|x - y| \geq \delta$ para todo $x \in A$ y $y \in B$.

Solución. Supón que no existe tal δ. Para cada n hay $x_n \in A$ y $y_n \in B$ con $|x_n - y_n| < 1/(n+1)$. Se eligen estos testigos bajo la base clásica de elección; puede hacerse eligiendo primero un x admisible en A y luego un y admisible en B. La sucesión x es acotada; una extracción $x_{\varphi(k)}$ converge a un real L, y como A es cerrado, $L \in A$. Además

$$|y_{\varphi(k)} - L| \leq |y_{\varphi(k)} - x_{\varphi(k)}| + |x_{\varphi(k)} - L| < \frac{1}{\varphi(k)+1} + |x_{\varphi(k)} - L|.$$

El primer sumando está acotado por $1/(k+1)$ y el segundo tiende a cero. Para cualquier tolerancia se hacen ambos menores que su mitad reuniendo los umbrales. Así $y_{\varphi(k)} \to L$; como B es cerrado, $L \in B$, contradiciendo $A \cap B = \emptyset$. No necesitábamos acotación global de B: la proximidad a la extracción de A produjo la convergencia necesaria.

8.8. Cuándo las extracciones determinan la sucesión

Una extracción convergente deja sin controlar los términos descartados. Si la sucesión es acotada, cualquier nueva selección seguirá admitiendo un destino por Bolzano–Weierstrass; por eso conocer un único punto secuencial puede recuperar el control global.

Teorema. Para una sucesión real acotada a y un real L, son equivalentes:

1. $a_n \to L$;
2. L es el único punto de acumulación secuencial de a.

Si $a_n \to L$, la identidad es una selección convergente a L, de modo que L es punto secuencial por §8.3. Si H es cualquier otro punto secuencial, existe una subsucesión convergente a H. Por §8.2 también converge a L; la unicidad del límite da $H = L$. Esta dirección no requiere suponer acotación por separado, pues toda sucesión convergente ya es acotada. Si falla la convergencia a L, su negación proporciona **una tolerancia fija** $\varepsilon_0 > 0$ y, después de cualquier corte N, algún término con $|a_n - L| \geq \varepsilon_0$. Reuniremos esos infractores manteniendo el mismo margen durante toda la extracción.

Sea n_0 el menor índice con $|a_{n_0} - L| \geq \varepsilon_0$. Dados n_k, tomamos el menor índice $n \geq n_k + 1$ con esa propiedad como n_{k+1}. La negación de convergencia garantiza que cada conjunto admisible es no vacío. Así $b_k = a_{n_k}$ es una subsucesión y todos sus términos distan al menos ε_0 de L. Aquí se utiliza la acotación de a: también b es acotada y Bolzano–Weierstrass proporciona un selector ψ y un real H con $b_{\psi(j)} \to H$. La composición de selectores de §8.1 identifica esta nueva sucesión con una subsucesión de a. Por §8.3, H es punto de acumulación secuencial de a; la hipótesis de unicidad obliga a que $H = L$.

Pero la convergencia a L exige $|b_{\psi(j)} - L| < \varepsilon_0$ para todos los índices suficientemente grandes, mientras que la construcción garantiza $|b_{\psi(j)} - L| \geq \varepsilon_0$ para **todos** ellos. La contradicción demuestra $a_n \to L$. La acotación permitió encontrar un destino para la selección de infractores; sin ella esa selección podría escapar de todas las regiones acotadas. También asegura existencia cuando sólo sabemos que hay «a lo sumo un» punto secuencial: Bolzano–Weierstrass aporta al menos uno y el criterio anterior aplica entonces a ese único destino.

La sucesión $c_{2j} = 0$, $c_{2j+1} = j + 1$ muestra la necesidad de aquella hipótesis. La selección par converge a cero. Para excluir cualquier $H \neq 0$, fijamos $r = \min\{|H|/2, 1\} > 0$, elegimos un natural $K > \max\{0, H + 1\}$ y tomamos el corte $N = 2K$. Los términos pares tienen error $|H| > r$. Si $n = 2j + 1 \geq 2K$, la aritmética natural da $j \geq K$; entonces $c_n = j + 1 \geq K + 1 > H + r$ y también queda fuera de $B(H, r)$. No hay visitas después de ese corte, de modo que H no es punto secuencial. Cero es el único.

Sin embargo, c no converge: no es acotada, ya que los términos impares superan cualquier cota real. Toda sucesión convergente es acotada por C06. La hipótesis del teorema no puede suprimirse.

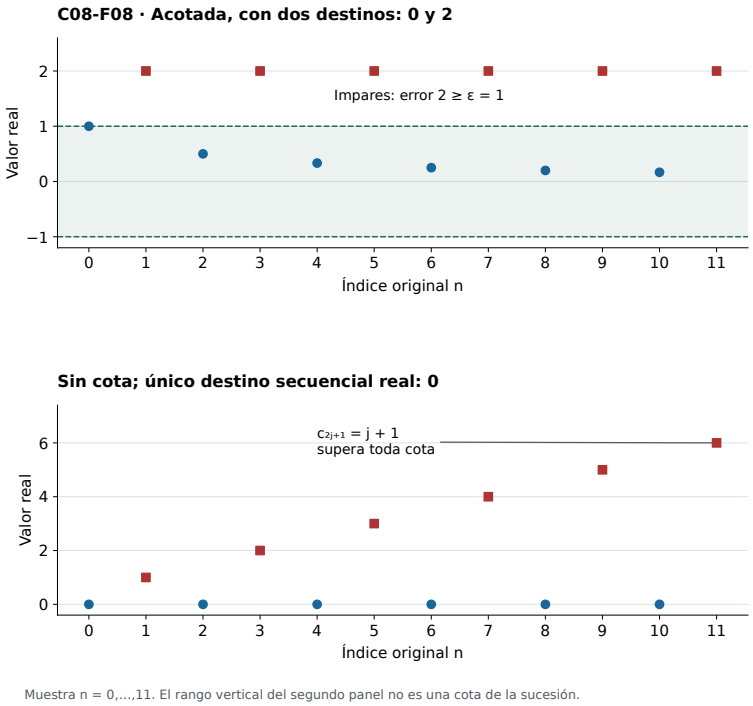


Figura 8.8. El ejemplo acotado tiene dos destinos y una selección constante de infractores. El no acotado sólo tiene el destino secuencial cero: sus términos impares superan toda cota, como demuestra la fórmula.

En la figura 8.8, el primer panel corresponde a $a_{2j} = 1/(j+1)$, $a_{2j+1} = 2$, que es acotada y tiene los dos destinos 0 y 2. Sus términos impares refutan el control alrededor de cero; no ejemplifica unicidad. El segundo panel representa la construcción no acotada anterior. La escala dibujada contiene una muestra de sus términos, sin constituir una cota.

El criterio de destino único usa Bolzano–Weierstrass para someter a prueba lo que quedó fuera de una ventana: de persistir allí infinitos índices, permitirían construir otro destino. La acotación garantiza esa posibilidad de extraer y la unicidad la vuelve incompatible con el margen fijo que conservaron los infractores.

Ejercicios de la sección 8.8.

Ejercicio 36. Toda extracción puede refinarse

Prueba que $a_n \to L$ si y sólo si toda subsucesión de a tiene a su vez una subsucesión que converge a L. No supongas acotación.

Solución. Si $a_n \to L$, toda subsucesión ya converge a L por §8.2 y la identidad sirve como extracción adicional. Recíprocamente, si a no converge a L, existe $\varepsilon_0 > 0$ con términos tardíos de error al menos ε_0. Construyendo mínimos después de cada corte se obtiene una subsucesión b con $|b_k - L| \geq \varepsilon_0$ para todo k. Ninguna extracción suya puede converger a L, porque todas conservan esa desigualdad y contradicen la captura estricta para la tolerancia ε_0. Esto contradice la hipótesis. Aquí ésta garantiza directamente la extracción hacia L, por lo que no se necesita Bolzano–Weierstrass ni acotación.

Ejercicio 37. Clasificar una familia intercalada

Para $p, q \in \mathbb{R}$, define $a_{2k} = p + 1/(k+1)$ y $a_{2k+1} = q - 1/(k+1)$. Determina sus puntos secuenciales y para qué parámetros converge.

Solución. La selección par converge a p y la impar a q, así que ambos son puntos secuenciales, posiblemente iguales. No hay otros: por el resultado de partición finita del ejercicio 8.14, cada punto secuencial proviene de una de esas dos selecciones, y una sucesión convergente sólo tiene su límite como punto secuencial. Por tanto el conjunto es $\{p, q\}$. La sucesión es acotada por $\max\{|p|, |q|\} + 1$. Si $p = q$, el criterio de §8.8 da convergencia a ese valor; también sirve intercalar dos límites iguales. Si $p \neq q$, los dos destinos diferentes impiden convergencia.

La figura 8.8 sitúa el papel de acotación y unicidad del destino; aquí los dos límites se han identificado por paridades.

Ejercicio 38. Un radio que depende del corte

Explica por qué la condición «para cada N existen $n \geq N$ y $\varepsilon_N > 0$ con $|a_n - L| \geq \varepsilon_N$» no niega la convergencia. Da un contraejemplo y formula la negación correcta.

Solución. Toma $a_n = 1/(n+1)$ y $L = 0$. Para cada N, el índice $n = N$ y el radio $\varepsilon_N = 1/(N+1)$ cumplen la condición, aunque $a_n \to 0$. Los radios pueden disminuir y no establecen un margen de error persistente. La negación correcta fija primero $\varepsilon_0 > 0$: para todo N existe $n \geq N$ con $|a_n - L| \geq \varepsilon_0$. Con ese orden sí se construye una extracción cuyos términos nunca entran en una misma ventana, lo que refuta convergencia.

La figura 8.8 permite leer la refutación con una sola ventana fijada antes de todos los cortes.

Ejercicio 39. Acercarse a un conjunto finito de destinos

Supón que a es acotada y que su conjunto de puntos secuenciales es el conjunto finito no vacío $\{L_1, \dots, L_m\}$. Prueba que para todo $\varepsilon > 0$, todos los términos suficientemente tardíos pertenecen a $\bigcup_{i=1}^{m} B(L_i, \varepsilon)$.

Solución. Si falla para algún $\varepsilon_0 > 0$, hay términos después de todo corte fuera de la unión. Extrae por mínimos una subsucesión b que satisfaga $|b_k - L_i| \geq \varepsilon_0$ para todos los k y todos los i. Como b es acotada, Bolzano–Weierstrass proporciona una extracción convergente a H. Por composición y §8.3, H es punto secuencial de a, así que $H = L_j$ para algún j. La convergencia a ese L_j contradice la desigualdad de error fijo. La conclusión encierra la cola en varias ventanas, sin afirmar que permanezca en una sola ni que converja.

Ejercicio 40. Saltos pequeños y destinos intermedios

Sea a una sucesión real acotada con $|a_{n+1} - a_n| \to 0$. Si $p < q$ son puntos secuenciales, demuestra que todo $t \in (p, q)$ también es punto secuencial.

Solución. Fija $t \in (p, q)$, una tolerancia $\varepsilon > 0$ y un corte N. Toma $\eta = \min\{\varepsilon, t-p, q-t\}/2 > 0$; es menor que las tres cantidades. Existe $N_0 \geq N$ tal que $|a_{n+1} - a_n| < \eta$ para $n \geq N_0$. Como p es punto secuencial, hay $i \geq N_0$ con $|a_i - p| < \eta$, luego $a_i < t$. Como q es punto secuencial, hay $j > i$ con $|a_j - q| < \eta$, luego $a_j > t$.

En el conjunto finito de índices entre $i+1$ y j existe un primer r con $a_r \geq t$. Entonces $a_{r-1} < t \leq a_r$ y $r-1 \geq N_0$, por lo que $0 \leq a_r - t \leq a_r - a_{r-1} < \eta < \varepsilon$. Además $r \geq N$. Hemos encontrado una visita a la bola de t después de cualquier corte, así que t es punto secuencial. El paso transferible es localizar el primer cruce: saltos pequeños impiden atravesar una altura sin acercarse a ella. La acotación pertenece al contexto de destinos de la sucesión, pero este argumento concreto sólo necesita los dos destinos y la condición sobre saltos.

Capítulo 9

Límite superior e inferior: las envolventes de una cola

Un único término puede fijar el supremo de toda una sucesión y desaparecer de cualquier descripción de su comportamiento tardío. En $10, 0, 0, ...$, por ejemplo, la mayor altura es 10, aunque la sucesión converge a cero. Para una sucesión acotada que siga oscilando, necesitamos fronteras que se ajusten al retirar el comienzo. Las obtendremos mirando el supremo y el ínfimo de cada cola.

Aunque los términos salten en ambas direcciones, al eliminar posiciones no aparecen valores nuevos. Los supremos de cola sólo podrán bajar y los ínfimos sólo podrán subir; esa monotonía permitirá aplicar C07 y obtener dos límites reales. Trabajaremos con sucesiones acotadas y extremos finitos, usando las nociones de cola de C05, supremo e ínfimo de C02–C03 y convergencia y extracciones de C06–C08.

9.1. Conservar la cola y olvidar el prefijo

En la sucesión $a_0 = 10$, $a_n = 0$ para $n \geq 1$, la imagen completa contiene 10, pero la cola desde 1 ya no lo contiene. El corte temporal determina qué conjunto de valores debemos estudiar. Fijemos una sucesión real acotada $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, con $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$. Para cada $N \in \mathbb{N}$, escribimos $T_N = \{a_n : n \geq N\} \subseteq \mathbb{R}$. El corte y los índices de la cola son naturales; los elementos de T_N son términos reales. El conjunto pierde el orden y las multiplicidades: una cola constante dispone de infinitos índices y sólo un valor.

Cada T_N contiene a_N y es acotado. La completitud asegura los reales $\ell_N = \inf T_N$, $\quad u_N = \sup T_N$. Los extremos satisfacen $\ell_N \leq a_n \leq u_N$ para todo $n \geq N$. Al variar el corte obtenemos dos funciones $\ell, u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, las **envolventes inferior y superior**. Son nuevas sucesiones y pueden tomar valores que ninguna evaluación de a alcance, por lo que en general no son subsucesiones de ella.

La propiedad extremal permite aproximarse a ambas barreras desde la propia cola. Dados N y $\eta > 0$, existen $p, q \geq N$ con $\ell_N \leq a_p < \ell_N + \eta$ y $u_N - \eta < a_q \leq u_N$. Si todos los términos fueran a lo sumo $u_N - \eta$, ese real sería una cota superior menor que el supremo. Si todos fueran al menos $\ell_N + \eta$, tendríamos una cota inferior mayor que el ínfimo. Ambas contradicciones proporcionan valores en T_N y, por tanto, índices al menos N. No se exige que las barreras se alcancen ni se eligen simultáneamente todos los testigos.

En $a_n = 1/(n+1)$, el término de índice N domina los posteriores, así que $u_N = 1/(N+1)$ se alcanza. Todos los términos son positivos. Para $\eta > 0$, el índice $n = \max\{N, \lfloor 1/\eta \rfloor\} + 1$ pertenece a la cola y cumple $0 < a_n < \eta$, usando el piso de C06. Por tanto $\ell_N = 0$ y no se alcanza. También puede faltar el supremo entre los términos: para $x_n = 1 - 1/(n+1)$, cada cola tiene la cota superior 1 y ningún término igual a ella. Con el mismo índice anterior obtenemos $x_n > 1 - \eta$, lo que acredita $\sup T_N(x) = 1$. En la sucesión del prefijo excepcional, en cambio, $u_0 = 10$ y $u_N = 0$ desde $N = 1$, mientras $\ell_N = 0$ siempre. El alcanzamiento y la dependencia del corte son cuestiones distintas.

Ejercicios de la sección 9.1.

Ejercicio 1. Un extremo inicial

Sea $a_0 = 7$, $a_1 = -4$ y $a_n = 1$ para $n \geq 2$. Determina todos los conjuntos de cola y sus extremos.

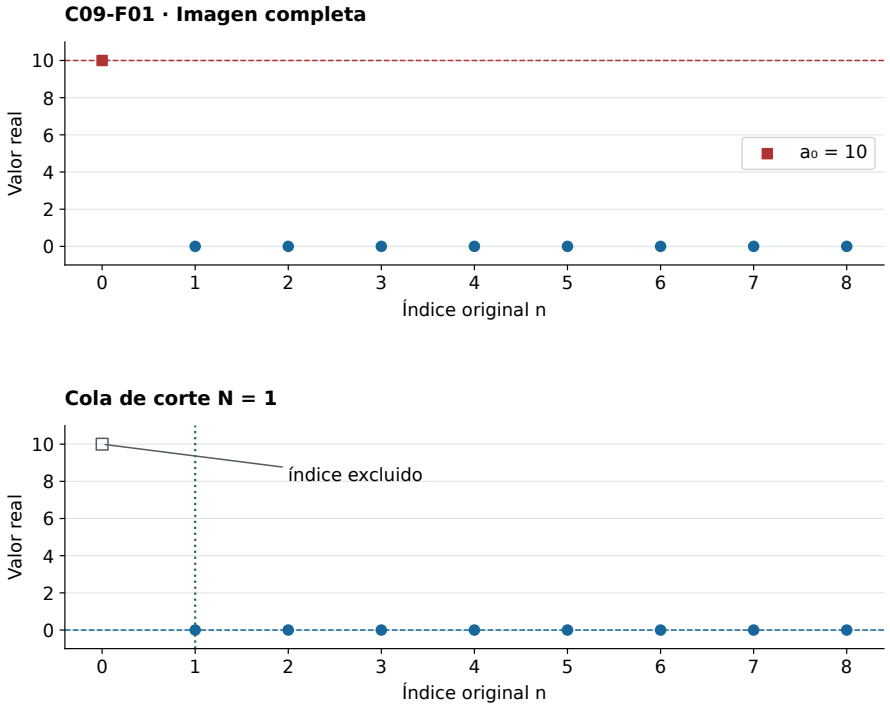


Figura 9.1. El valor inicial diez determina el supremo total, pero desaparece del conjunto de valores de cola desde el corte uno.

Solución. $T_0 = \{-4, 1, 7\}$, $T_1 = \{-4, 1\}$ y $T_N = \{1\}$ para $N \geq 2$. Así $(\ell_0, u_0) = (-4, 7)$, $(\ell_1, u_1) = (-4, 1)$ y $(\ell_N, u_N) = (1, 1)$ desde el corte dos. Se distinguen los conjuntos de valores de los infinitos conjuntos de índices. La figura 9.1 permite separar el efecto del prefijo de los extremos de las colas posteriores.

Ejercicio 2. Una frontera ausente

Para $a_n = 2 - 1/(n+1)$, calcula ℓ_N, u_N y decide cuáles se alcanzan.

Solución. Los términos crecen desde a_N, así $\ell_N = 2 - 1/(N+1)$ y se alcanza en N. Todos son menores que dos. Para $\eta > 0$, escoger $n \geq N$ con $1/(n+1) < \eta$ da $a_n > 2 - \eta$, por lo que $u_N = 2$ y no se alcanza.

Ejercicio 3. Aproximación bilateral

Demuestra directamente desde las definiciones que para $\eta > 0$ existen $p, q \geq N$ con $a_p > u_N - \eta$ y $a_q < \ell_N + \eta$, sin suponer máximos o mínimos.

Solución. Si todo término posterior fuera a lo sumo $u_N - \eta$, ese real sería cota superior estrictamente menor que u_N. Si todo término fuera al menos $\ell_N + \eta$, sería cota inferior estrictamente mayor que ℓ_N. Ambas conclusiones contradicen la optimalidad respectiva. Los valores que evitan esas contradicciones pertenecen a T_N y por tanto tienen índices posteriores al corte.

Ejercicio 4. Cuándo se retira una altura

Prueba $T_N = \{a_N\} \cup T_{N+1}$. ¿Cuándo puede ser estricta la inclusión $T_{N+1} \subseteq T_N$?

Solución. Cada índice al menos N es N o es al menos $N+1$, lo que prueba la igualdad; la inclusión inversa se sigue de los mismos índices. La inclusión es estricta exactamente cuando a_N no reaparece en ningún índice posterior. Que se retire un índice no obliga a retirar su valor.

Ejercicio 5. Acotación eventual

Una sucesión real satisface $|a_n| \le M$ para $n \ge N_0$, donde $M \ge 0$. Demuestra que es acotada globalmente y que puede entrar en este capítulo.

Solución. Si $N_0 = 0$, sirve M. Si $N_0 > 0$, el prefijo contiene finitos términos y $B = \max\{M, |a_0|, \dots, |a_{N_0-1}|\}$ es una cota de todas las magnitudes. Por tanto cada cola es no vacía y acotada y la construcción de ambos extremos finitos queda autorizada.

9.2. Dos envolventes que sí tienen dirección

La inclusión $T_{N+1} \subseteq T_N$ obliga a las envolventes a mantener una dirección. Cada cota superior de T_N sigue dominando T_{N+1}, y cada cota inferior sigue por debajo de sus valores. La optimalidad de sus extremos da $\ell_N \le \ell_{N+1} \le u_{N+1} \le u_N$. Si $m \le a_n \le M$ para todo índice, también $m \le \ell_N \le u_N \le M$. La envolvente inferior es no decreciente y acotada superiormente; la superior es no creciente y acotada inferiormente. Los teoremas de C07 garantizan sus límites reales y permiten definir

$$\alpha = \liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{N\to\infty} \ell_N = \sup_{N\in\mathbb{N}} \ell_N, \qquad \beta = \limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{N\to\infty} u_N = \inf_{N\in\mathbb{N}} u_N.$$

El supremo exterior reúne los valores de ℓ; el ínfimo exterior reúne los de u. Cambiar el orden altera la pregunta: $\sup_N \sup T_N = u_0$ sigue describiendo la imagen completa. La completitud proporcionó primero los extremos de cada cola y, mediante C07, proporciona los límites de las envolventes. La unicidad de C06 hace unívocas esas definiciones. El orden $\ell_N \le u_N$ pasa al límite y da $\alpha \le \beta$. Como α es supremo de la envolvente inferior y β es ínfimo de la superior, tenemos $\ell_N \le \alpha$ y $\beta \le u_N$ para cada corte. Esto deja abierta la posición de los términos respecto del intervalo $[\alpha, \beta]$, incluso en colas muy tardías.

Para $a_n = (-1)^n(1 + 1/(n+1))$, definamos $e(N) = N$ si N es par y $e(N) = N + 1$ si es impar; definamos $o(N) = N$ si N es impar y $o(N) = N + 1$ si es par. Son los primeros índices de cada paridad disponibles en la cola. Los valores pares son positivos y disminuyen dentro de su paridad; los impares son negativos y aumentan. Por ello $u_N = 1 + 1/(e(N)+1)$ y $\ell_N = -1 - 1/(o(N)+1)$. Como $e(N), o(N) \ge N$, las correcciones están acotadas por $1/(N+1)$ y tienden a cero: $\alpha = -1$, $\beta = 1$. Todos los términos siguen fuera de $[-1, 1]$.

La figura 9.2 representa esa diferencia: la sucesión original alterna y sus dos envolventes se mueven monótonamente hacia fronteras distintas. Hacer converger las envolventes no ha hecho converger a a.

Ejercicios de la sección 9.2.

Ejercicio 6. Alternancia con margen decreciente

Calcula las envolventes y los extremos de $a_n = 3 + (-1)^n(2 + 1/(n+1))$.

Solución. Con $e(N)$ par y $o(N)$ impar mínimos posteriores, $u_N = 5 + 1/(e(N)+1)$ y $\ell_N = 1 - 1/(o(N)+1)$. Aquí $e(N) = N$ para N par y $N+1$ para N impar; $o(N) = N$ para N impar y $N+1$ para N par. Todo valor par es mayor que 5 y decrece dentro de esa paridad; todo valor impar es menor que 1 y aumenta. Así los dos primeros índices disponibles dan, respectivamente, el máximo y el mínimo de la cola. Las correcciones tienden a cero porque sus índices son al menos N. Así $\alpha = 1$, $\beta = 5$.

La figura 9.2 ayuda a leer la dirección de cada envolvente aunque la sucesión original alterne.

Ejercicio 7. Orden en dos niveles

Prueba $\inf T_0 \le \alpha \le \beta \le \sup T_0$ e indica los dos niveles de completitud usados.

Solución. Cada cola está dentro de T_0, de modo que $\inf T_0 \le \ell_N \le u_N \le \sup T_0$. El paso al límite conserva orden y da la cadena. Completitud da primero sup/inf reales de cada cola y después, mediante C07, los límites reales de las envolventes monótonas acotadas.

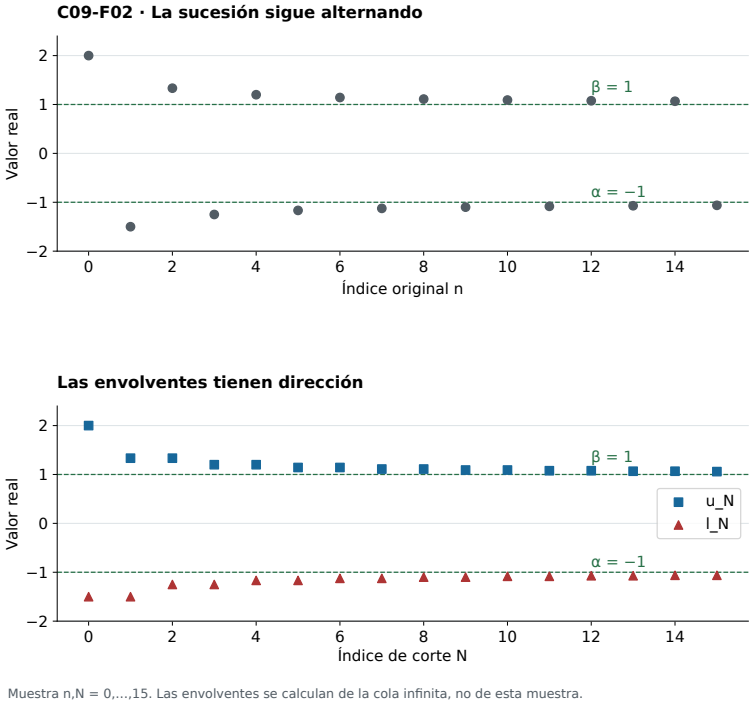


Figura 9.2. La sucesión alterna fuera de la banda final; sus envolventes avanzan monótonamente hacia menos uno y uno sin exigir que los términos entren en esa banda exacta.

Ejercicio 8. Invertir operaciones

Compara $\inf_N \sup_{n\geq N} a_n$ con $\sup_N \inf_{n\geq N} a_n$ para la alternancia cero–uno. ¿Son operaciones intercambiables?

Solución. Cada cola contiene cero y uno. La primera expresión vale uno y la segunda cero. Son β y α, respectivamente; no se intercambian en general. El orden de las dos operaciones de extremos se distingue en la figura 9.2.

Ejercicio 9. Monotonía original

Si a es acotada y no decreciente, identifica sus dos envolventes y sus extremos.

Solución. $\ell_N = a_N$ porque es el menor término posterior. Sea $s = \sup T_0$. Es también supremo de cada cola: cualquier cota de una cola acota los términos anteriores porque son a lo sumo a_N. Así $u_N = s$ para todo N. C07 da $a_N \to s$, y por tanto $\alpha = \beta = s$.

Ejercicio 10. Igualdad de límites, desigualdad de objetos

Construye dos sucesiones distintas con las mismas envolventes superior e inferior en todos los cortes.

Solución. La alternancia $a_n = 0$ para pares y uno para impares, y la alternancia inversa $b_n = 1 - a_n$, son distintas en cada índice. Cada cola de ambas contiene cero y uno, por lo que sus envolventes son idénticas: $\ell_N = 0, u_N = 1$. Igualdad de envolventes no implica igualdad de las funciones originales. La figura 9.2 permite comparar las envolventes; aquí la coincidencia se ha demostrado para dos funciones diferentes.

9.3. Fronteras eventuales y visitas tardías

Podemos reconocer una frontera superior sin calcular por separado cada u_N. Debe quedar toda una cola por debajo de cualquier altura ligeramente mayor y deben sobrevivir visitas por encima de cualquier altura ligeramente menor. Para una sucesión acotada, un real b es su límite superior si y sólo si cumple

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N : a_n < b + \varepsilon, \qquad \forall \varepsilon > 0\ \forall K\ \exists n \geq K : a_n > b - \varepsilon.$$

Supongamos primero que $b = \beta$. La convergencia $u_N \to \beta$ proporciona, para $\varepsilon > 0$, un corte con $u_N < \beta + \varepsilon$; todos los términos de esa cola quedan por debajo. Para cualquier corte K, aproximamos su supremo y obtenemos algún $n \geq K$ con $a_n > u_K - \varepsilon \geq \beta - \varepsilon$. Esta visita puede cambiar al recibir otra tolerancia o corte; no controla por sí sola los demás términos.

A la inversa, la primera condición da $u_N \leq b + \varepsilon$ para algún corte. La desigualdad puede dejar de ser estricta al tomar supremo, pero basta para deducir $\beta \leq b + \varepsilon$. La segunda condición da $u_K > b - \varepsilon$ para cada K, y el paso al límite proporciona $\beta \geq b - \varepsilon$. Si $\beta \neq b$, tomar como tolerancia la mitad de su distancia contradice una de esas dos comparaciones; luego $\beta = b$.

Por abajo, $c = \alpha$ si y sólo si, para cada $\varepsilon > 0$, alguna cola satisface $a_n > c - \varepsilon$ y, después de cualquier corte K, existe $n \geq K$ con $a_n < c + \varepsilon$. La convergencia $\ell_N \to \alpha$ acredita la primera condición y la aproximación del ínfimo acredita la segunda. Recíprocamente, la cota eventual da $\alpha \geq c - \varepsilon$, y las visitas dan $\ell_K < c + \varepsilon$ para cada K, luego $\alpha \leq c + \varepsilon$. La misma elección de la mitad de una supuesta distancia positiva prueba $\alpha = c$.

Un conjunto infinito de índices no cabe en un prefijo finito y supera cualquier corte. A la inversa, un conjunto finito no vacío queda antes de 1 más su máximo, y el vacío no aporta visitas ni desde 0. Por eso «arbitrariamente tarde» equivale a «para infinitos índices», aun cuando éstos repitan un mismo valor. Si $t > \beta$, usamos $\varepsilon = (t - \beta)/2$: alguna cola queda por debajo de $\beta + \varepsilon < t$, por lo que sólo hay finitos índices con $a_n \geq t$. Si $t < \beta$, la tolerancia $\varepsilon = \beta - t$ da un término con $a_n > t$ después de cada corte, es decir, infinitas visitas. En $t = \beta$ no hay una respuesta única: la constante 1 alcanza su frontera siempre y $1 - 1/(n+1)$ no la alcanza nunca. Dualmente, para $t < \alpha$ hay sólo finitos índices con $a_n \leq t$, mientras que para $t > \alpha$ hay infinitos con $a_n < t$.

Reuniendo por máximo los cortes de las dos cotas eventuales, para cada $\varepsilon > 0$ una cola queda en $(\alpha - \varepsilon, \beta + \varepsilon)$. El ejemplo alternante anterior muestra por qué no podemos reducir esa garantía al intervalo exacto $[\alpha, \beta]$. En la figura 9.3, con tolerancia $1/4$, el corte 4 basta para que todos los términos sean menores que $5/4$. Recibido el corte 9, el índice 10 aporta además una visita mayor que $3/4$, pues $a_{10} = 12/11$. Los términos negativos quedan fuera de esa ventana alrededor de $\beta = 1$ sin contradecir la caracterización.

Ejercicios de la sección 9.3.

Ejercicio 11. Umbral persistente

Para una sucesión acotada define $A = \{t \in \mathbb{R} : \{n : a_n > t\}$ es infinito$\}$. Prueba que A es no vacío, acotado superiormente y $\sup A = \beta$.

Solución. Una cota inferior global m hace que $m - 1 \in A$, por lo que es no vacío. Una cota superior global M acota a A. Si $t > \beta$, sólo hay finitas visitas sobre t, luego $t \notin A$; así β acota A. Todo $t < \beta$ pertenece a A por §9.3; en particular $\beta - \varepsilon \in A$ para toda tolerancia. Ninguna cota menor que β puede acotar a A, por lo que su supremo es β.

Ejercicio 12. Umbral eventual

Define $B = \{t \in \mathbb{R} : \{n : a_n > t\}$ es finito$\}$. Prueba $\inf B = \beta$ y explica por qué β puede o no pertenecer a B.

Solución. B contiene una cota superior global y es no vacío. Ningún $t < \beta$ pertenece a B, pues hay infinitas visitas sobre él; así β es cota inferior. Todo $t > \beta$ pertenece a B, luego hay elementos arbitrariamente próximos por arriba y $\inf B = \beta$. Para la constante uno, $\beta = 1 \in B$ porque no hay términos mayores que uno. Para $1 + 1/(n+1)$, $\beta = 1 \notin B$ porque todos los términos son mayores.

Ejercicio 13. Probar una frontera candidata

Supón que para cada $\varepsilon > 0$ una cola satisface $a_n < 4 + \varepsilon$ y que después de cada corte existe $a_n > 4 - \varepsilon$. Demuestra $\beta = 4$ sin suponer que la sucesión converge.

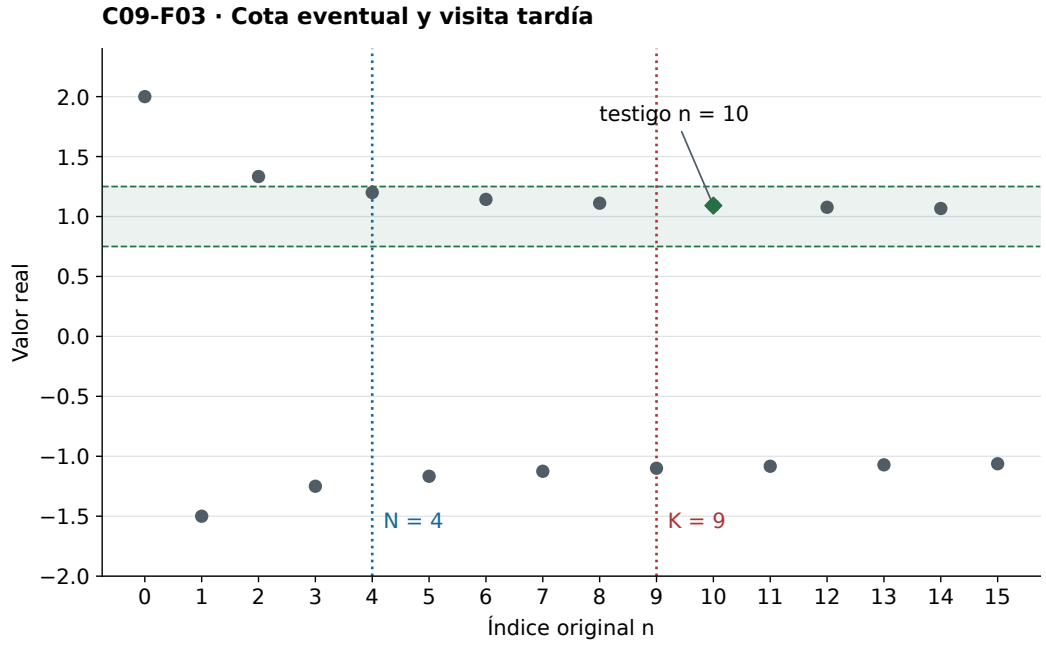


Figura 9.3. Desde el corte cuatro todos los términos quedan bajo cinco cuartos. Después del corte nueve, el término de índice diez visita la ventana de radio un cuarto de la frontera superior; los términos negativos siguen fuera de ella.

Solución. La cota eventual implica $u_N \leq 4+\varepsilon$ para algún corte, y por tanto $\beta \leq 4+\varepsilon$. Las visitas implican $u_K > 4-\varepsilon$ para cada corte y por límite $\beta \geq 4-\varepsilon$. Si β difiriera de cuatro, elegir la mitad de la distancia como tolerancia contradiría una desigualdad. Por tanto $\beta = 4$, sin control sobre un posible extremo inferior distinto. En la figura 9.3 se distinguen la cota de toda una cola y la visita que sobrevive a cada corte; la prueba necesita ambas.

Ejercicio 14. Visitas con una sola tolerancia

¿Basta que haya infinitos términos con $a_n > 2 - 1/2$ para concluir $\beta = 2$? Da un contraejemplo acotado.

Solución. No. La constante $a_n = 7/4$ satisface la visita con esa tolerancia y tiene $\beta = 7/4$. Falta exigir todas las tolerancias y la cota eventual superior. Incluso todas las visitas por abajo sólo darían $\beta \geq 2$. Las dos condiciones de la figura 9.3 muestran lo que queda pendiente al comprobar una sola tolerancia.

Ejercicio 15. Versión inferior por umbrales

Prueba $\alpha = \inf\{t : \{n : a_n < t\} \text{ es infinito}\}$.

Solución. El conjunto es no vacío: si M acota superiormente a a, $M+1$ pertenece a él. Está acotado inferiormente por una cota inferior global. Si $t < \alpha$, las visitas por debajo de t son finitas por la cota inferior eventual con tolerancia $(\alpha - t)/2$. Si $t > \alpha$, la condición de visitas con tolerancia $t - \alpha$ da infinitos términos menores que t. Por ello α es cota inferior y hay elementos arbitrariamente próximos por arriba, lo que identifica el ínfimo.

9.4. Alcanzar las fronteras mediante extracciones

Las fronteras son reales construidos a partir de colas. Para relacionarlas con los puntos secuenciales de C08, llamaremos $\mathrm{LimSub}(a)$ al conjunto de límites de todas las subsucesiones convergentes. Demostraremos que sus mínimo y máximo son α y β: habrá que obtener extracciones hacia ambos y después comparar cualquier otro destino con ellos. Dados $\delta > 0$ y un corte K, elegimos un corte H desde el que $a_n < \beta + \delta$. La condición de visitas

aplicada después de $\max\{H, K\}$ proporciona un término que cumple también $a_n > \beta - \delta$. Así encontramos $|a_n - \beta| < \delta$ en un mismo índice posterior al corte solicitado. Coordinar ambas restricciones convierte el control por un lado en proximidad al centro.

Definimos n_0 como el mínimo del conjunto no vacío $\{n : |a_n - \beta| < 1\}$. Una vez definido n_{k-1}, para $k \geq 1$ ponemos $n_k = \min\{n \geq n_{k-1} + 1 : |a_n - \beta| < 1/(k+1)\}$. Cada conjunto admisible es no vacío antes de tomar su mínimo natural. La recursión da un selector estrictamente creciente $k \mapsto n_k$ y $|a_{n_k} - \beta| < 1/(k+1)$. Para $\varepsilon > 0$, tomamos $K = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor$; si $k \geq K$, $1/(k+1) \leq 1/(K+1) < \varepsilon$. Esto prueba $a_{n_k} \to \beta$, sin tomar mínimos reales ni escoger testigos arbitrarios.

Para la frontera inferior reunimos la cota eventual $a_n > \alpha - \delta$ y una visita $a_n < \alpha + \delta$ después de su corte y del K solicitado. Queda $|a_n - \alpha| < \delta$. Definimos $m_0 = \min\{n : |a_n - \alpha| < 1\}$ y, para $k \geq 1$, $m_k = \min\{n \geq m_{k-1} + 1 : |a_n - \alpha| < 1/(k+1)\}$. La no vacuidad justifica los mínimos, el corte obliga a avanzar y la misma estimación con el piso demuestra $a_{m_k} \to \alpha$.

Sea ahora $a_{\varphi(k)} \to x$. Fijamos primero un corte original N. Para cada $k \geq N$, C08 da $\varphi(k) \geq k \geq N$, de modo que $\ell_N \leq a_{\varphi(k)} \leq u_N$. Al pasar al límite en el índice nuevo k, obtenemos $\ell_N \leq x \leq u_N$ con N todavía fijo. Esta conclusión vale para todos los cortes originales; pasando después al límite en N resulta $\alpha \leq x \leq \beta$. El primer paso controla una extracción y el segundo recorre las envolventes.

Los extremos pertenecen al conjunto de destinos y acotan a todos sus elementos. Por ello $\min \operatorname{LimSub}(a) = \alpha$, $\max \operatorname{LimSub}(a) = \beta$. En la alternancia cero–uno, las selecciones por paridad muestran que 0 y 1 son destinos. Si $x \notin \{0, 1\}$, el radio $\frac{1}{2}\min\{|x|, |x-1|\} > 0$ excluye todos los valores y refuta cualquier extracción hacia x. Por tanto $\operatorname{LimSub}(a) = \{0, 1\}$: estar entre los extremos no basta para ser destino.

Para la alternancia $(-1)^n(1+1/(n+1))$ de §9.2, la selección par tiene términos $1+1/(2k+1)$ y converge a $\beta = 1$. La figura 9.4 y su tabla distinguen el índice nuevo k, el original $2k$ y el valor seleccionado. Ninguno de esos términos vale 1, aunque su límite pertenezca a $\operatorname{LimSub}(a)$. Las extracciones extremas se han construido directamente; no se ha usado Bolzano–Weierstrass para sustituir sus pruebas.

Índice nuevo k	Índice original ϕ(k)	Valor seleccionado
0	0	2
1	2	4/3
2	4	6/5
3	6	8/7
4	8	10/9
5	10	12/11

Ejercicios de la sección 9.4.

Ejercicio 16. Un selector explícito

Para $a_n = (-1)^n + 1/(n+1)$ construye selectores de subsucesiones que converjan a los dos extremos.

Solución. Las selecciones $\varphi(k) = 2k$ y $\psi(k) = 2k+1$ son estrictamente crecientes en $\mathbb{N}$. Sus términos son $1 + 1/(2k+1)$ y $-1 + 1/(2k+2)$, que convergen a uno y menos uno. Para cada ε>0, una cola cumple $-1-\varepsilon$<a_n<$1+\varepsilon$, por la pequeñez del recíproco; así todos sus destinos están en [−1,1]. Como las dos selecciones alcanzan los extremos de ese intervalo, el carácter mínimo/máximo de §9.4 identifica α=−1 y β=1. La convergencia recíproca se verifica por arquimedianidad.

La figura 9.4 sitúa las extracciones que alcanzan las fronteras como límites, sin exigir que sean términos de la sucesión.

C09-F04 · Selección par y nuevo dominio

k	0	1	2	3	4	5
φ(k)	0	2	4	6	8	10
a_φ(k)	2	4/3	6/5	8/7	10/9	12/11

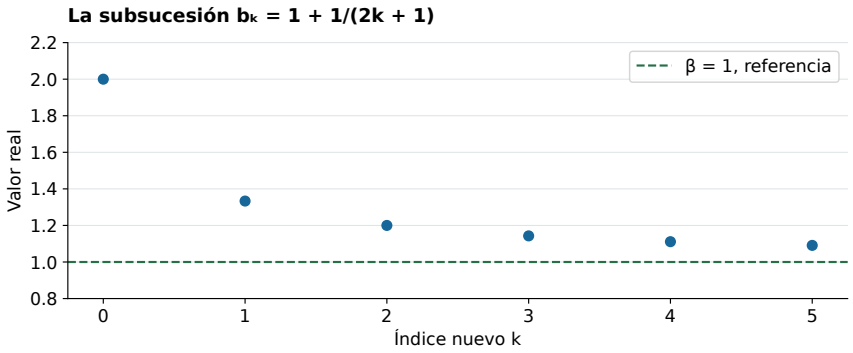


Tabla y gráfica: muestra k = 0,...,5. La línea destino no representa un término de índice infinito.

Figura 9.4. La selección par conserva valores y cambia el dominio de lectura al índice k. Sus términos se acercan a uno, aunque ningún término seleccionado vale uno.

Ejercicio 17. Construcción sin elección arbitraria

Reconstruye la extracción que converge a β usando mínimos naturales. Justifica no vacuidad y convergencia.

Solución. Para cualquier δ, K, la cota superior eventual fija H y las visitas por abajo después de $\max\{H, K\}$ dan un índice con $|a_n - \beta| < \delta$. Por ello existen los mínimos $n_0 = \min\{n : |a_n - \beta| < 1\}$ y $n_k = \min\{n \geq n_{k-1} + 1 : |a_n - \beta| < 1/(k+1)\}$ para $k \geq 1$. La recursión da aumento estricto. Para $\varepsilon > 0$, elegir K con $1/(K+1) < \varepsilon$; todo $k \geq K$ tiene error menor, luego la extracción converge a β.

La figura 9.4 ayuda a separar el avance de índices de la aproximación espacial que controla el error.

Ejercicio 18. Extracción de una extracción

Sea $b_k = a_{\varphi(k)}$ una subsucesión. Prueba $\alpha_a \leq \alpha_b \leq \beta_b \leq \beta_a$.

Solución. b es acotada. Sus extremos son límites de subsucesiones $b_{\psi(j)}$ por §9.4. La composición $\varphi \circ \psi$ es estrictamente creciente, de modo que ambos son destinos de a y quedan en $[\alpha_a, \beta_a]$. Además $\alpha_b \leq \beta_b$ por §9.2. Esto reúne toda la cadena; una extracción puede estrechar la banda.

Ejercicio 19. Un punto intermedio ausente

Prueba que $1/2$ no es destino de ninguna subsucesión de la alternancia cero–uno, pese a estar entre sus extremos.

Solución. Cada término de cualquier extracción vale cero o uno y está a distancia exactamente $1/2$ de $1/2$. La tolerancia $1/4$ impide convergencia a ese candidato. Los destinos cero y uno se obtienen por paridad; así el confinamiento no es una caracterización de todos los puntos interiores. El confinamiento de la figura 9.4 incluye los extremos; por sí solo no proporciona destinos en el interior.

Ejercicio 20. Destinos extremos y conjunto

¿Por qué los extremos asintóticos son máximo y mínimo del conjunto de destinos incluso cuando nunca aparecen como términos? Ilustra con una sucesión.

Solución. El conjunto contiene límites, no necesariamente términos. Las extracciones probadas llevan α, β a él y el confinamiento los compara con todos sus elementos, dando mínimo y máximo. Para $a_n = 1/(n+1)$ ambos extremos son cero y el conjunto de destinos es $\{0\}$, aunque ningún término valga cero.

9.5. Medir la oscilación y reconocer convergencia

Si ambas fronteras coinciden, la banda abierta que contiene una cola puede estrecharse alrededor de un único centro. Para una sucesión real acotada,

$$a_n \to L \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = \beta = L.$$

Si $a_n \to L$, C08 obliga a que las dos extracciones extremas de §9.4 converjan también a L; por unicidad, $\alpha = \beta = L$. Para la vuelta, supongamos esa igualdad y fijemos $\varepsilon > 0$. Las convergencias de las envolventes proporcionan cortes N_1, N_2 desde los que $\ell_n > L - \varepsilon$ y $u_n < L + \varepsilon$, respectivamente. Con $N = \max\{N_1, N_2\}$, para todo $n \geq N$ se tiene $L - \varepsilon < \ell_n \leq a_n \leq u_n < L + \varepsilon$. La captura de toda la cola prueba $a_n \to L$.

Podemos medir lo que queda de la oscilación mediante $d_N = u_N - \ell_N \geq 0$. Como u decrece y ℓ crece, d decrece. Las reglas de límites reales de C06 dan $d_N \to \beta - \alpha$. Llamaremos **oscilación asintótica** al número $\omega(a) = \beta - \alpha$. Así $\omega(a) = 0$ si y sólo si a converge. El número cero registra desaparición de amplitud, aunque los términos alternen de lado para siempre.

La anchura también mide el supremo de todas las distancias entre términos de la cola: $d_N = \sup\{|a_p - a_q| : p, q \geq N\}$. Todo par de términos está en $[\ell_N, u_N]$, luego su distancia es a lo sumo d_N. Para comprobar que ninguna cota menor sirve, fijemos $\eta > 0$. La aproximación de §9.1 ofrece $a_p > u_N - \eta/2$ y $a_q < \ell_N + \eta/2$, ambos en la cola. Entonces $|a_p - a_q| \geq a_p - a_q > d_N - \eta$. El conjunto de distancias es no vacío y acotado, y estas dos propiedades identifican su supremo. Los índices pueden depender de η y N; no afirmamos que el supremo de distancias sea un máximo. En $a_n = 1/(n+1)$, por ejemplo, $d_N = 1/(N+1)$, pero la distancia entre dos términos positivos nunca alcanza esa anchura.

En $a_n = (-1)^n/(n+1)$, las envolventes son $u_N = 1/(e(N)+1)$ y $\ell_N = -1/(o(N)+1)$, con $e(N), o(N)$ definidos en §9.2. Su diferencia tiende a cero, aunque la sucesión cambie de signo indefinidamente. En la alternancia cero–uno, $d_N = 1$ en toda cola. La figura 9.5 usa una escala común para comparar disminución y persistencia de esas anchuras.

Ejercicios de la sección 9.5.

Ejercicio 21. La igualdad captura toda la cola

Demuestra directamente desde las envolventes que $\alpha = \beta = L$ implica $a_n \to L$.

Solución. Fijar $\varepsilon > 0$. Elegir N_1 con $\ell_n > L - \varepsilon$ para $n \geq N_1$ y N_2 con $u_n < L + \varepsilon$ para $n \geq N_2$. Con $N = \max\{N_1, N_2\}$, el encierro $\ell_n \leq a_n \leq u_n$ prueba $|a_n - L| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. No basta tomar sólo uno de los cortes. Los dos controles de la figura 9.5 se reúnen para capturar toda la cola.

Ejercicio 22. Dos amplitudes

Calcula las oscilaciones asintóticas de $a_n = 5 + (-1)^n/(n+1)$ y $b_n = 5 + (-1)^n$.

Solución. Para a, las correcciones recíprocas van a cero y ambos extremos son cinco, luego $\omega(a) = 0$. Para b, toda cola contiene cuatro y seis, luego $\alpha_b = 4$, $\beta_b = 6$ y $\omega(b) = 2$. La primera converge aunque alterna; la segunda no. La figura 9.5 permite interpretar las amplitudes calculadas: el signo alternante y la anchura persistente son datos distintos.

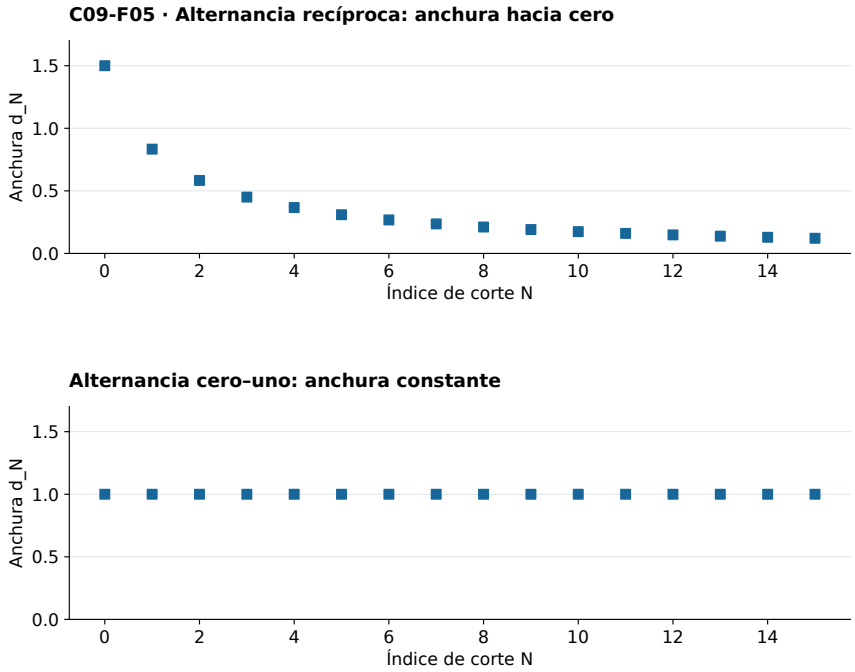


Figura 9.5. La anchura de las colas amortiguadas tiende a cero; la de la alternancia cero–uno permanece en uno. Ambas envolventes son monótonas, pero sólo la primera pareja se reúne.

Ejercicio 23. Supremo de distancias

Prueba que $u_N - \ell_N = \sup\{|a_p - a_q| : p, q \geq N\}$, sin suponer extremos alcanzados.
Solución. Todas las distancias son a lo sumo $u_N - \ell_N$. Para $\eta > 0$ escoger términos con $a_p > u_N - \eta/2$ y $a_q < \ell_N + \eta/2$ por aproximación. Su distancia es al menos $a_p - a_q > u_N - \ell_N - \eta$. El conjunto de distancias contiene cero y es acotado; la cota y su aproximación identifican su supremo.

Ejercicio 24. Único destino

Para una sucesión acotada, prueba la equivalencia entre tener un único destino de subsucesiones y tener oscilación asintótica cero.
Solución. Si el conjunto de destinos es $\{L\}$, sus mínimo y máximo probados en §9.4 son ambos L, luego $\omega = 0$. Si $\omega = 0$, $\alpha = \beta = L$; el confinamiento fuerza a todos los destinos a ser L y la extracción extrema garantiza que existe. No se omite la no vacuidad.

Ejercicio 25. Cuánto ve una tolerancia fija

Si para un corte N todas las distancias de términos posteriores son menores que ε, ¿qué concluyes sobre d_N? ¿Basta para deducir convergencia?
Solución. El supremo de esas distancias da $d_N \leq \varepsilon$, sin garantizar desigualdad estricta. Para ver que la igualdad es posible, toma $a_n = \varepsilon/(n+1)$ y el corte $N = 0$. Dos términos cualesquiera son positivos y están en $(0, \varepsilon]$, por lo que su distancia es menor que ε. Sin embargo, $u_0 = \varepsilon$ e $\ell_0 = 0$ por aproximación de los recíprocos, así que $d_0 = \varepsilon$. Una sola tolerancia no prueba convergencia: la alternancia cero–uno tiene todas sus distancias menores que dos y no converge. Si la condición existiera para cada tolerancia positiva, entonces $0 \leq \omega \leq \varepsilon$ para toda ε y el criterio de §9.5 daría convergencia.

La figura 9.5 relaciona la disminución de anchuras con la convergencia; una sola tolerancia deja abierta esa disminución.

9.6. Cambiar términos sin cambiar las fronteras

Si $a_n = b_n$ desde N_0, entonces $T_N(a) = T_N(b)$ para $N \geq N_0$, y las dos parejas de envolventes coinciden desde ese corte. Sus límites son iguales. Modificar finitos términos conserva además la acotación: basta incorporar sus nuevas magnitudes a la cota mediante un máximo finito. Por tanto se conservan α, β y ω, aunque el supremo de toda la imagen pueda cambiar. Para un desplazamiento fijo $r \in \mathbb{N}$, definimos $b_k = a_{k+r}$. Entonces $T_K(b) = T_{K+r}(a)$ y, por tanto, $\ell_K(b) = \ell_{K+r}(a)$ y $u_K(b) = u_{K+r}(a)$. Las colas reindexadas de las envolventes conservan sus límites por C06, de modo que el desplazamiento conserva las fronteras. Si $r = 0$ es la función original; para $r > 0$ descarta un prefijo y reindexa, operación diferente de cambiar sólo algunos valores.

La misma estabilidad admite un error que no se anula exactamente. Supongamos a acotada y $b_n - a_n \to 0$. La diferencia es acotada por C06 y la triangular da una cota global para b. Para $\varepsilon > 0$, elegimos N_0 con $|b_n - a_n| < \varepsilon$ desde él. En cualquier cola con corte $N \geq N_0$ se cumplen, para todo $n \geq N$, las dos comparaciones

$$\ell_N(a) - \varepsilon \leq b_n \leq u_N(a) + \varepsilon, \qquad \ell_N(b) - \varepsilon \leq a_n \leq u_N(b) + \varepsilon.$$

Tomando extremos de cola, obtenemos $u_N(b) \leq u_N(a) + \varepsilon$ y $u_N(a) \leq u_N(b) + \varepsilon$; además $\ell_N(b) \geq \ell_N(a) - \varepsilon$ y $\ell_N(a) \geq \ell_N(b) - \varepsilon$. Al pasar al límite en N, resulta $|\beta(b) - \beta(a)| \leq \varepsilon$ y $|\alpha(b) - \alpha(a)| \leq \varepsilon$. La tolerancia es arbitraria, así que ambas diferencias son cero. No suponemos que el error se anule exactamente en una cola.

Así, $(-1)^n + 1/(n+1)$ conserva los extremos $-1, 1$ de $(-1)^n$, aunque cambie todos sus términos. Si sólo tenemos $|a_n - b_n| \leq \delta$ eventualmente, con $\delta \geq 0$ fijo, la misma prueba da diferencias de extremos a lo sumo δ; para $\delta = 0$ obtenemos igualdad directamente, sin dividir por el margen. Una traslación constante cumple $\ell_N(a+c) = \ell_N(a)+c$ y $u_N(a+c) = u_N(a)+c$, porque trasladar conserva el orden y la optimalidad de las cotas. En consecuencia, las dos fronteras aumentan en c y su distancia se conserva.

Sin control del error, cambiar infinitos términos puede alterar las fronteras: reemplazar todos los unos de la alternancia cero–uno por ceros produce una constante. La cantidad infinita de cambios por sí sola no decide su efecto; en el ejemplo recíproco anterior también se modificaban todos los términos y las fronteras permanecían.

Ejercicios de la sección 9.6.

Ejercicio 26. Modificar y desplazar

Para $a_n = (-1)^n$, compara los extremos al cambiar a_0 por cien y al definir $b_k = a_{k+1}$.

Solución. Ambas operaciones conservan los extremos menos uno y uno. La primera cambia un valor del prefijo y deja idénticas las colas desde uno. La segunda invierte la paridad y reindexa; sus colas son las de a con corte desplazado. Son funciones diferentes y operaciones diferentes. La figura 9.2 permite seguir qué parte de la información de cola permanece al modificar o desplazar el comienzo.

Ejercicio 27. Perturbación que desaparece

Sea a acotada y $r_n \to 0$. Demuestra que $a_n + r_n$ tiene los mismos extremos y oscilación que a.

Solución. r es acotada, luego $a + r$ lo es. Para $\varepsilon > 0$, en colas suficientemente tardías $a_n - \varepsilon < a_n + r_n < a_n + \varepsilon$. Comparando supremos e ínfimos en ambas direcciones, sus extremos difieren a lo sumo en ε. Como vale para toda tolerancia, coinciden los dos extremos. Al restarlos coincide la oscilación. La figura 9.2 representa las fronteras cuya estabilidad se obtiene aquí con un control de error que tiende a cero.

Ejercicio 28. Estabilidad con margen

Si a, b son acotadas y $|a_n - b_n| \leq \delta$ eventualmente, prueba $|\alpha_a - \alpha_b| \leq \delta$, $|\beta_a - \beta_b| \leq \delta$ y $|\omega(a) - \omega(b)| \leq 2\delta$.

Solución. En colas posteriores, $b_n \le a_n + \delta$ y $a_n \le b_n + \delta$, por lo que ambos supremos difieren a lo sumo en δ. Las desigualdades inferiores hacen lo mismo con los ínfimos. Pasar al límite conserva todas las desigualdades. Finalmente la desigualdad triangular aplicada a $(\beta_a - \beta_b) - (\alpha_a - \alpha_b)$ da el margen 2δ.

Ejercicio 29. El margen puede alcanzarse

Para $\delta > 0$, da dos sucesiones con $|a_n - b_n| = \delta$ en todos los índices y $|\omega(a) - \omega(b)| = 2\delta$.
Solución. Tomar $a_n = (-1)^n\delta$ y $b_n = 0$. La distancia término a término es δ, los extremos de a son $-\delta, \delta$ y los de b son cero; así sus oscilaciones difieren en 2δ. La cota anterior es óptima.

Ejercicio 30. Error persistente

¿Se conservan los extremos al sumar $r_n = (-1)^n$ a cualquier sucesión acotada? Da un ejemplo que decida.
Solución. No. Si $a_n = 0$, la suma es la alternancia menos uno–uno. Los extremos cambian de cero y cero a menos uno y uno. El error es acotado pero no tiende a cero; acotación sola no da invariancia.

9.7. Comparar y combinar comportamientos

Sean a, b sucesiones reales acotadas, con extremos α_a, β_a y α_b, β_b. Si $a_n \le b_n$ desde un corte T, para cualquier $N \ge T$ tenemos $a_n \le b_n \le u_N(b)$ en toda la cola, así que $u_N(a) \le u_N(b)$. También $\ell_N(a) \le a_n \le b_n$ hace de $\ell_N(a)$ una cota inferior de los valores de b; luego $\ell_N(a) \le \ell_N(b)$. El paso al límite en las envolventes da

$\alpha_a \le \alpha_b, \qquad \beta_a \le \beta_b$. Una desigualdad estricta entre términos puede dar igualdad en sus extremos. Por ejemplo, $0 < 1/(n+1)$ en todos los índices, pero ambos límites superiores valen cero. Si $c > 0$, la multiplicación preserva orden y optimalidad de cotas, luego $\ell_N(ca) = c\ell_N(a)$ y $u_N(ca) = cu_N(a)$. Si $c < 0$, invierte el orden: $\ell_N(ca) = cu_N(a)$ y $u_N(ca) = c\ell_N(a)$. Para justificar optimalidad en este caso, una cota inferior de cT_N dividida por c es cota superior de T_N, y una cota superior dividida por c es cota inferior. Al pasar al límite obtenemos $\alpha(ca) = c\alpha_a$, $\beta(ca) = c\beta_a$ para $c > 0$, y $\alpha(ca) = c\beta_a$, $\beta(ca) = c\alpha_a$ para $c < 0$. Si $c = 0$, ambas fronteras son cero. En particular, $\alpha(-a) = -\beta_a$ y $\beta(-a) = -\alpha_a$.

La suma es acotada y cada término cumple $\ell_N(a) + \ell_N(b) \le a_n + b_n \le u_N(a) + u_N(b)$ para $n \ge N$. No necesitamos que los extremos de los dos sumandos se aproximen en las mismas posiciones: sus sumas proporcionan cotas de toda la cola. Al tomar extremos y después límites resulta $\alpha_a + \alpha_b \le \alpha(a+b) \le \beta(a+b) \le \beta_a + \beta_b$.

Para $a_n = (-1)^n$ y $b_n = -a_n$, los máximos de una aparecen en los mínimos de la otra y la suma vale cero en todos los índices. Ambas tienen extremos $-1, 1$, de modo que las dos desigualdades exteriores pueden ser estrictas. La figura 9.6 conserva la suma nula y la referencia $\beta_a + \beta_b = 2$. Si $b_n \to B$, en cambio, escribimos $a_n + b_n = (a_n + B) + (b_n - B)$. La traslación y la estabilidad de §9.6 dan $\alpha(a+b) = \alpha_a + B$ y $\beta(a+b) = \beta_a + B$. Un sumando convergente basta para recuperar esas igualdades, y al restarlas obtenemos $\omega(a+b) = \omega(a)$.

Para multiplicar cotas necesitamos controlar los signos. Si $a_n, b_n \ge 0$ para todos los índices, los ínfimos y supremos de cada cola son no negativos y podemos escribir $\ell_N(a)\ell_N(b) \le a_n b_n \le u_N(a)u_N(b)$. El producto es acotado y las comparaciones anteriores dan $\ell_N(ab) \ge \ell_N(a)\ell_N(b)$ y $u_N(ab) \le u_N(a)u_N(b)$. Las reglas de límites de C06 proporcionan $\alpha(ab) \ge \alpha_a\alpha_b$ y $\beta(ab) \le \beta_a\beta_b$.

Si los factores son sólo eventualmente no negativos, reunimos sus cortes de signo en T y trabajamos con $N \ge T$. Los supremos de esas colas siguen siendo no negativos, por lo que $0 \le a_n \le u_N(a)$ y $0 \le b_n \le u_N(b)$ para $n \ge N$ dan la misma cota del producto; los ínfimos se tratan del mismo modo. El paso al límite ignora el prefijo de cortes y no requiere dividir por una frontera que pudiera ser cero. Sin el signo, la regla puede fallar: si $a_n = b_n$ alterna entre -2 y -1, tenemos $\beta(ab) = 4 > 1 = \beta_a\beta_b$.

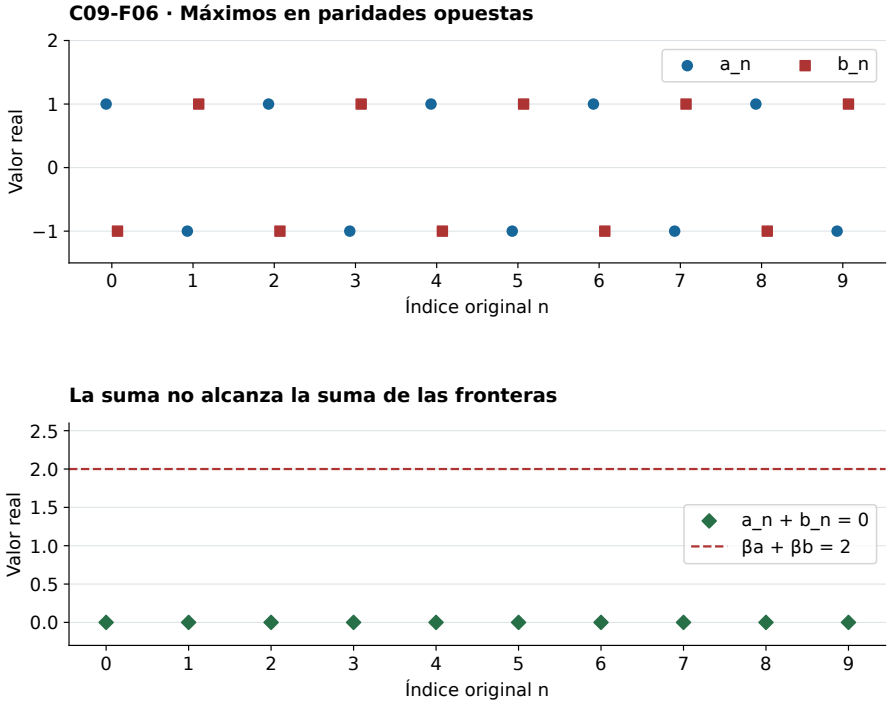


Figura 9.6. Los máximos de los sumandos ocurren en paridades opuestas. La suma es cero en cada índice, por debajo de la suma dos de sus fronteras superiores.

Ejercicios de la sección 9.7.

Ejercicio 31. Escala negativa

Si $\alpha_a = -2$ y $\beta_a = 3$, calcula los extremos y la oscilación de $-4a_n + 1$.

Solución. La escala negativa intercambia los extremos: $\alpha(-4a) = -12$ y $\beta(-4a) = 8$. Al trasladar por uno resultan -11 y nueve; la oscilación es veinte, también igual a $4(3-(-2))$.

Ejercicio 32. Suma con desacuerdo temporal

Para $a_n = (-1)^n$ y $b_n = -(-1)^n$, compara $\beta(a+b)$ con $\beta_a + \beta_b$ y $\alpha(a+b)$ con $\alpha_a + \alpha_b$.

Solución. La suma es cero, por lo que ambos extremos de la suma son cero. Las fronteras superiores separadas suman dos y las inferiores menos dos. Ambas desigualdades generales son estrictas, porque las alturas extremas de los sumandos aparecen en paridades opuestas. La figura 9.6 muestra por qué las alturas extremas de los sumandos pueden ocurrir en posiciones distintas.

Ejercicio 33. Intervalo más preciso para la suma

Prueba $\beta(a+b) \geq \max\{\beta_a + \alpha_b, \alpha_a + \beta_b\}$ y $\alpha(a+b) \leq \min\{\alpha_a + \beta_b, \beta_a + \alpha_b\}$.

Solución. Tomemos una extracción $a_{\varphi(k)} \to \beta_a$. Fijados $\varepsilon > 0$ y un corte original N, sea K_a un umbral con $a_{\varphi(k)} > \beta_a - \varepsilon$ para $k \geq K_a$, y sea T_b un corte con $b_n > \alpha_b - \varepsilon$ para $n \geq T_b$. Elegimos $k \geq \max\{K_a, T_b, N\}$. Como $\varphi(k) \geq k$, el índice original $n = \varphi(k)$ está después de ambos cortes originales y cumple

$a_n + b_n > \beta_a + \alpha_b - 2\varepsilon$. Para cada N hemos obtenido un término de esa cola por encima de la misma barrera. Por tanto $u_N(a+b) > \beta_a + \alpha_b - 2\varepsilon$ para todo N, y al pasar al límite resulta $\beta(a+b) \geq \beta_a + \alpha_b - 2\varepsilon$. Al ser ε arbitraria, $\beta(a+b) \geq \beta_a + \alpha_b$. Intercambiar a, b da la otra cota y, juntas, el máximo pedido.

Para la frontera inferior, tomemos una extracción hacia α_a y la cota eventual $b_n < \beta_b + \varepsilon$. Coordinando los tres cortes del mismo modo, después de cada N se obtiene un término con $a_n + b_n < \alpha_a + \beta_b + 2\varepsilon$. Entonces $\ell_N(a+b) < \alpha_a + \beta_b + 2\varepsilon$ para todo N y $\alpha(a+b) \leq \alpha_a + \beta_b + 2\varepsilon$.

La arbitrariedad de ε da $\alpha(a+b) \le \alpha_a + \beta_b$; al intercambiar los sumandos se obtiene la otra desigualdad y el mínimo pedido.

Ejercicio 34. Producto y signo

Prueba las cotas de producto para factores acotados no negativos y da un contraejemplo a la cota superior al retirar la hipótesis de signo.

Solución. En cada cola los extremos son no negativos y $\ell_N(a)\ell_N(b) \le a_n b_n \le u_N(a)u_N(b)$. El producto es acotado; tomar extremos y límites da $\alpha(ab) \ge \alpha_a\alpha_b$ y $\beta(ab) \le \beta_a\beta_b$. Si $a_n = b_n$ alternan entre menos dos y menos uno, los extremos superiores son menos uno y su producto es uno, pero $\beta(ab) = 4$. La cota superior falla sin control de signo.

Ejercicio 35. Un sumando convergente

Si $b_n \to B$ y a es acotada, prueba las fórmulas exactas de los extremos de $a + b$ y decide su oscilación.

Solución. La suma es acotada porque ambos sumandos lo son. Escribir $a_n + b_n = (a_n + B) + (b_n - B)$, donde el segundo término tiende a cero. La estabilidad y la traslación dan $\alpha(a+b) = \alpha_a + B$ y $\beta(a+b) = \beta_a + B$. Al restar, $\omega(a+b) = \omega(a)$: el sumando convergente traslada las fronteras y conserva su distancia. La comparación de fronteras de la figura 9.6 se vuelve exacta cuando uno de los sumandos tiene un límite.

9.8. Qué describen los extremos y qué dejan abierto

El supremo de la imagen completa, las fronteras de las colas y el conjunto de destinos responden a preguntas diferentes. Los resultados anteriores los relacionan mediante

$$\inf T_0 \le \alpha \le \beta \le \sup T_0, \qquad \{\alpha, \beta\} \subseteq \operatorname{LimSub}(a) \subseteq [\alpha, \beta].$$

La primera cadena procede de las cotas de las envolventes y el paso al límite. Las extracciones extremas dan la pertenencia de α, β a $\operatorname{LimSub}(a)$, y el confinamiento da la otra inclusión. Tener los mismos extremos tampoco identifica funciones: la constante cero y $1/(n+1)$ comparten ambas fronteras, pero difieren en cada evaluación. Definamos $a_n = 1$ si $n = 2^j$ para algún $j \in \mathbb{N}$, y $a_n = 0$ en los demás índices. Dado cualquier corte N, los índices $n = 2^{N+1} \ge N$ y $m = 2^{N+1} + 1 \ge N$ aportan un uno y un cero. La inducción $2^j \ge j + 1$ garantiza que están después del corte, y $2^{N+1} < m < 2^{N+2}$ impide que m sea potencia de dos. Cada cola tiene exactamente la imagen $\{0, 1\}$: $\ell_N = 0$, $u_N = 1$, $\alpha = 0$ y $\beta = 1$. La separación creciente entre picos no elimina su efecto, pues siguen apareciendo después de todo corte; las fronteras no miden su frecuencia.

La alternancia cero–uno y el patrón periódico $0, 1/2, 1, 0, 1/2, 1, \ldots$ tienen extremos $0, 1$, pero destinos $\{0, 1\}$ y $\{0, 1/2, 1\}$, respectivamente. Cada valor periódico se obtiene como límite de una selección de su clase de índices. Si un real quedara fuera de la imagen finita, la mínima distancia positiva a sus valores impediría que ninguna extracción convergiera a él. Las fronteras acotan la estructura interna sin determinarla.

La acotación mantiene todos estos objetos en $\mathbb{R}$. En $a_n = n$, cada cola tiene ínfimo N y carece de supremo real; además, la envolvente inferior N no converge a un real. En $a_n = (-1)^n(n+1)$, toda cola contiene valores positivos y negativos sin cota y carece de ambos extremos reales. La definición finita del capítulo no se aplica a estos ejemplos. El escape frente a barreras reales fue tratado en C07 §7.5; una teoría de límites extremos extendidos necesitaría declarar otro espacio de valores y sus reglas.

Conocer α y β decide la convergencia cuando coinciden y proporciona los destinos extremos cuando se separan. Entre ellos pueden faltar destinos o aparecer muchos más; para distinguir esas situaciones hace falta volver a la distribución de los términos y a sus extracciones, conservando las condiciones que cada prueba utiliza.

Ejercicios de la sección 9.8.

Ejercicio 36. Picos cada vez más separados

Define $a_n = 1$ cuando $n = 2^j$ para algún natural j y cero en los demás índices. Determina extremos y destinos.

Solución. Las potencias superan cualquier corte porque $2^j \geq j+1$. Los índices 2^j+1 para $j \geq 1$ crecen y están estrictamente entre 2^j y 2^{j+1}, por lo que no son potencias. Cada cola contiene cero y uno, y sus extremos son cero y uno. Ambos son destinos por selecciones crecientes de esos índices; ningún otro real puede ser destino porque la imagen es el conjunto finito $\{0,1\}$.

Ejercicio 37. Todos los puntos de un intervalo

Enumera por bloques, para $m = 1, 2, ...$, los valores $0, 1/m, 2/m, \dots, 1$, y reindexa la concatenación desde cero. Determina los extremos y demuestra que sus destinos son exactamente $[0,1]$.

Solución. El bloque de parámetro $m \geq 1$ tiene longitud $m+1$ y comienza en $B_m = (m-1)(m+2)/2$. Cada índice n pertenece a un único bloque $B_m \leq n < B_{m+1}$, y su valor es $a_n = (n - B_m)/m$. Así la concatenación define una sucesión real desde el índice 0. Todos los términos están en $[0,1]$ y cada bloque contiene ambos extremos, por lo que cada cola contiene cero y uno y $\alpha = 0, \beta = 1$. Para $x \in [0,1]$, en cada bloque escoger el menor entero $j_m \in \{0, \dots, m\}$ con $j_m/m \geq x$. Existe porque $m/m = 1$. Si $j_m > 0$, minimalidad da $(j_m - 1)/m < x$, luego $0 \leq j_m/m - x < 1/m$; si $j_m = 0$, $x = 0$ y el error es cero. Definimos el selector $\theta(k) = B_{k+1} + j_{k+1}$ para $k \in \mathbb{N}$. El índice elegido en el bloque m es a lo sumo $B_m + m$, mientras que el elegido en el siguiente es al menos $B_{m+1} = B_m + m + 1$; por tanto θ crece estrictamente. Además, $|a_{\theta(k)} - x| < 1/(k+1)$, incluido el caso de error cero. Para $\varepsilon > 0$, el corte $K = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1$ garantiza que todo $k \geq K$ cumple ese error menor que ε. La extracción converge a x. Ningún destino queda fuera del intervalo por confinamiento.

Ejercicio 38. Misma banda, distintos destinos

Construye dos sucesiones con extremos -2 y tres y diferentes conjuntos de destinos, y justifica ambos conjuntos.

Solución. La alternancia menos dos–tres tiene destinos exactamente $\{-2, 3\}$. El patrón periódico menos dos–cero–tres tiene destinos exactamente $\{-2, 0, 3\}$. Cada valor del patrón aparece en una clase de índices y produce una subsucesión constante. Ningún real externo a la imagen finita puede ser destino porque su distancia mínima a esa imagen es positiva. Las colas contienen todos los valores del patrón, luego ambas bandas son $[-2, 3]$.

Ejercicio 39. Un destino sin acotación

Sea $a_{2k} = 0$, $a_{2k+1} = k+1$. Demuestra que su único destino real es cero y que no converge. Explica por qué no contradice §9.5.

Solución. Los pares dan una extracción constante cero. Si una subsucesión convergente incluyera infinitos términos impares, éstos formarían una extracción con índices $2k+1$ crecientes y valores $k+1$ sin cota; eso contradice que toda convergente y sus subsucesiones son acotadas. Por tanto toda extracción convergente es eventualmente par y su límite es cero. La sucesión original no es acotada, así que no converge en $\mathbb{R}$. Sus colas carecen de supremo real; los extremos finitos del capítulo y el criterio que los usa requieren acotación.

Ejercicio 40. Saltos pequeños llenan la banda

Sea a acotada con $|a_{n+1} - a_n| \to 0$ y $\alpha < \beta$. Demuestra que cada $L \in (\alpha, \beta)$ es destino de una subsucesión. Concluye $\operatorname{LimSub}(a) = [\alpha, \beta]$.

Solución. Fijar L interior y $\varepsilon > 0$. Las visitas de §9.3 proporcionan términos menores que L arbitrariamente tarde, porque escoger tolerancia $(L-\alpha)/2$ los mantiene debajo. También hay términos mayores que L después de cualquier corte por tolerancia $(\beta - L)/2$. Elegir H con saltos menores que ε para $n \geq H$. Dado cualquier corte K, escoger $p \geq \max\{H, K\}$ con $a_p < L$ y después $q > p$ con $a_q > L$. Sea r el primer índice de $\{p+1, \ldots, q\}$ con $a_r \geq L$. Entonces $a_{r-1} < L \leq a_r$ y $0 \leq a_r - L \leq a_r - a_{r-1} < \varepsilon$. Se obtienen visitas a la bola de L después de cualquier corte; C08 o la construcción de mínimos de §9.4 produce una extracción convergente a L. Los extremos ya son destinos y todos los destinos están confinados en la banda. La condición de saltos se usa en el primer cruce, y la acotación en la existencia de las fronteras.

Capítulo 10

Cauchy: converger sin conocer el destino

Tomemos una suma que podemos prolongar tanto como queramos: empezamos con 1, añadimos 1/4, después 1/9, 1/16, y continuamos tomando los recíprocos de los cuadrados de los enteros. Para no suponer que la expresión infinita representa ya un número, trabajaremos por ahora únicamente con sumas finitas. Escribamos $s_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots$.

Conocemos exactamente el significado de cada término s_n y podemos calcular tantos como necesitemos. La pregunta aparece cuando dejamos de mirar un término concreto: ¿se acercan estas sumas a algún número real a medida que prolongamos el cálculo? Si conociéramos de antemano el valor L de ese posible resultado, intentaríamos demostrar que $|s_n - L|$ se hace arbitrariamente pequeño. Pero sería extraño que para justificar la existencia del destino tuviéramos que empezar por conocerlo.

Al pasar de s_n a s_{n+1} solo agregamos $1/(n+2)^2$, una cantidad que tiende a cero. Ese dato es alentador, aunque todavía no resuelve el problema. Entre dos sumas s_q y s_p, con $p > q$, se acumulan $p - q$ sumandos nuevos; por pequeños que sean individualmente, no podemos ignorar que su cantidad puede ser enorme. Si queremos averiguar si las aproximaciones se estabilizan, necesitamos una estimación que siga siendo válida incluso cuando p se aleje indefinidamente de q.

La resta elimina la parte común de ambas sumas y deja precisamente el bloque que debemos controlar: $s_p - s_q = \sum_{k=q+2}^{p+1} \frac{1}{k^2}$. ¿Cómo acotar ese bloque sin tener que saber de antemano cuántos sumandos contendrá? Podemos buscar una expresión ligeramente mayor que $1/k^2$ y que tenga la ventaja de cancelarse al sumar términos consecutivos. Para $k \geq 2$ se cumple $k(k-1) < k^2$, de donde

$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$. La elección de esa fracción tiene un motivo preciso: en una suma de diferencias consecutivas, casi todos los términos desaparecen por cancelación. En consecuencia, para cualesquiera $p > q \geq 0$,

$$0 \leq s_p - s_q \leq \sum_{k=q+2}^{p+1} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1} < \frac{1}{q+1}.$$

No hemos utilizado una suma infinita ni la existencia de un límite. Hemos controlado un bloque finito de longitud arbitraria mediante una cantidad que depende solamente de dónde empieza. Si fijamos q y seguimos prolongando la suma, la diferencia nunca sobrepasa $1/(q+1)$; y si avanzamos el comienzo del bloque, esa cota se hace tan pequeña como queramos. En particular, para todos los índices $p, q \geq N$, intercambiándolos si fuera necesario, obtenemos

$|s_p - s_q| < \frac{1}{N+1}$. Recibida una precisión $\varepsilon > 0$, la propiedad arquimediana nos permite escoger N con $1/(N+1) < \varepsilon$. Desde ese momento, dos sumas cualesquiera de la cola difieren menos que ε, aunque sus índices estén muy separados. Hemos descubierto así una forma de reconocer la estabilización de un procedimiento a partir de sus propias aproximaciones, sin haber calculado el número al que se dirigen. Queda una dificultad genuina: ¿por qué ese control mutuo garantiza que hay un número real al que todas ellas se acercan? La respuesta requerirá precisamente la completitud de $\mathbb{R}$.

10.1. Comparar términos sin nombrar un límite

La estimación anterior aprovechó una propiedad especial de las sumas de recíprocos: pudimos dominar un bloque entero mediante una cancelación algebraica. Pero la idea que apareció al final no depende de esa fórmula. Tiene sentido para cualquier sucesión real, incluso si sus términos no son sumas, si cambian de signo o si no conocemos ninguna expresión sencilla para su posible límite: dada una precisión, queremos encontrar un índice a partir del cual todos los valores de la sucesión queden próximos entre sí.

El requisito decisivo está en el orden de las elecciones. Podemos tener que avanzar más cuando pedimos una tolerancia menor, pero el lugar al que lleguemos debe servir para **cualquier par** de índices posteriores. Un corte que hubiera que modificar cada vez que se elige un par no controlaría ninguna cola completa. Esa dependencia queda recogida en la siguiente definición. **Definición.** Una sucesión real $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, donde $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$, es **de Cauchy** si

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall p, q \in \mathbb{N} : \quad p, q \geq N \implies |a_p - a_q| < \varepsilon.$$

Leída en el orden de sus cuantificadores, la afirmación dice lo siguiente: alguien fija primero una tolerancia positiva ε; nosotros encontramos un índice N, que puede depender de ella; después se eligen libremente p y q, con la única condición de que ambos sean al menos N. Debemos garantizar entonces la desigualdad escrita. Es la distancia entre los **valores** a_p y a_q la que se hace pequeña; los índices pueden estar separados por una cantidad arbitrariamente grande. También pueden coincidir, pues $|a_p - a_p| = 0$, y podemos intercambiarlos porque $|a_p - a_q| = |a_q - a_p|$. Por eso basta a menudo demostrar la estimación para $p > q \geq N$ y añadir el caso de igualdad. Comprobar únicamente parejas consecutivas no es suficiente: los desplazamientos pequeños pueden acumularse, como veremos al estudiar las sumas armónicas en §10.5.

En la sucesión s_n con la que iniciamos el capítulo, el control de todos los pares nació de una suma telescópica. A veces es posible obtenerlo sin sumar nada, simplemente encerrando los valores tardíos en un intervalo pequeño. Consideremos $a_n = 1/(n + 1)$. Si $p, q \geq N$, ambos términos son positivos y no exceden $1/(N + 1)$; por tanto, pertenecen al intervalo $(0, 1/(N + 1)]$, y su distancia satisface

$|a_p - a_q| \leq \frac{1}{N+1}$. Para que esta cota sea estrictamente menor que una tolerancia $\varepsilon > 0$, basta elegir un natural N con $N + 1 > 1/\varepsilon$. La propiedad arquimediana garantiza que podemos hacerlo. Una sola elección controla todos los pares de la cola, tanto si los índices están próximos como si uno de ellos es muchísimo mayor que el otro. La figura 10.1 muestra, para $\varepsilon = 1/4$, un corte posible: $N = 4$. Todos los valores posteriores quedan en la franja $(0, 1/5]$, más estrecha que la tolerancia pedida. Entre los términos de índices 6 y 10, por ejemplo, hay una distancia $|1/7 - 1/11| = 4/77$; comprobar ese par puede ayudarnos a leer la figura, pero es la estimación del intervalo la que demuestra la afirmación para los infinitos pares restantes.

Los dos ejemplos han exigido estimaciones distintas. En el primero, la cancelación de una suma finita controló cuánto podían separarse dos resultados parciales; en el segundo, bastó observar que toda la cola cabía en un intervalo de longitud pequeña. Ninguno de los dos razonamientos tuvo que partir de un candidato a límite. Esta libertad es especialmente útil cuando el procedimiento que produce los términos resulta más fácil de describir que su resultado final.

La definición tampoco exige que una sucesión sea monótona ni que todos sus términos sean diferentes. Una sucesión constante $a_n = c$ es de Cauchy desde $N = 0$, puesto que cualquier distancia entre sus términos vale cero. En cambio, $a_n = (-1)^n$ no lo es: después de cualquier corte N, los índices N y $N + 1$ ofrecen valores separados por dos unidades, de modo que la tolerancia fija $\varepsilon = 1$ nunca puede satisfacerse. No es el cambio de signo lo que causa el fracaso; una alternancia de amplitud decreciente sí puede ser de Cauchy, como comprobaremos en la sección siguiente.

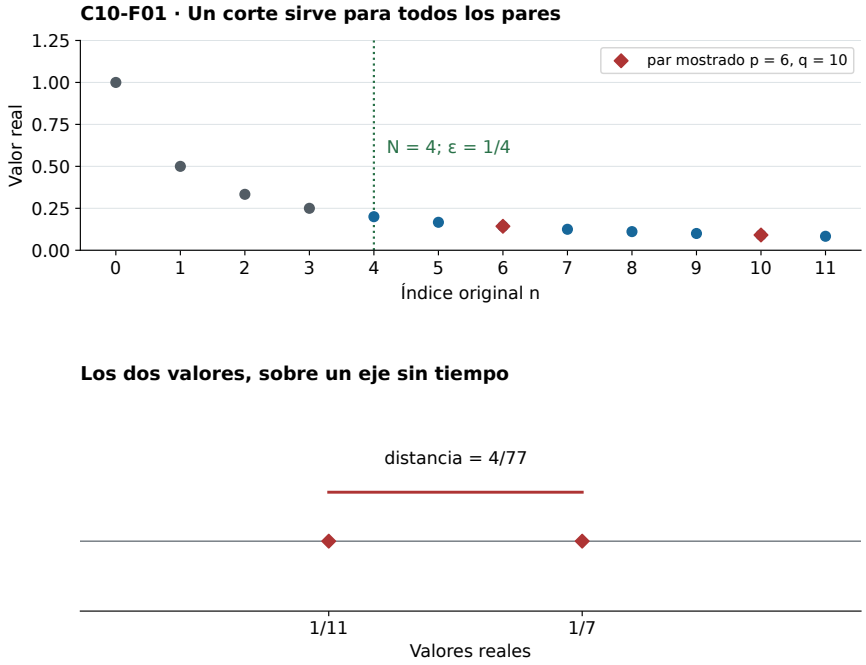


Figura 10.1. En los recíprocos, desde el corte cuatro toda la cola cabe en una banda de anchura un quinto, menor que un cuarto. El par de índices seis y diez muestra una distancia cuatro setenta y sieteavos dentro del mismo control.

Hay, por último, una distinción entre afirmar que existe un corte y saber calcularlo. La definición de Cauchy expresa una condición matemática: para toda precisión debe existir algún índice que funcione. En nuestros ejemplos hemos hecho algo más, porque las desigualdades permiten dar un corte suficiente a partir de ε. En otras situaciones podremos demostrar la existencia de esos índices sin disponer de una regla efectiva para encontrarlos a partir de los datos disponibles. Cuando estudiemos la acumulación de errores en §10.8 veremos cómo una estimación concreta puede proporcionar ambas cosas: la existencia de un límite y un modo de certificar cuán cerca estamos de él.

Ejercicios de la sección 10.1.

Ejercicio 1. Dos índices universales

Compara la definición de Cauchy con la condición: para todo $\varepsilon > 0$ y todo p, existe $q \geq p$ con $|a_p - a_q| < \varepsilon$. ¿La segunda impone control?

Solución. La definición de Cauchy exige un corte antes de todos los pares posteriores. La segunda condición es verdadera para cualquier sucesión tomando $q = p$, con distancia cero. No impone Cauchy: $(-1)^n$ la satisface y no es de Cauchy. En la segunda condición el testigo q puede elegirse después de conocer p, y nada exige que sea diferente de él. La elección $q = p$ hace que el enunciado sea verdadero para toda sucesión. En Cauchy, en cambio, tras fijar el corte la desigualdad debe valer para cualquier elección de ambos índices. En la alternancia, los índices consecutivos $N, N+1$ tienen distancia dos; así se ve concretamente el control que falta en la condición propuesta.

Ejercicio 2. Un corte recíproco

Prueba directamente que $a_n = 1/(n+1)$ es de Cauchy, dando un corte que incluya el índice cero cuando sirva.

Solución. Los términos posteriores a N están en $(0, 1/(N+1)]$, luego cualquier distancia es a lo sumo $1/(N+1)$. Para $\varepsilon > 0$ tomar el mínimo natural con $N + 1 > 1/\varepsilon$; existe por arquimedianidad y garantiza distancia menor que ε. Si $\varepsilon \geq 1$, podemos tomar directamente $N = 0$, porque todas las distancias son estrictamente menores que uno. Si $\varepsilon < 1$, cero no sirve: una distancia $1 - 1/(n+1)$ lo bastante tardía alcanza esa tolerancia. No es necesario proponer un destino.

Después de la prueba, puede retomarse la figura 10.1 para contrastar el mecanismo con el ejemplo del capítulo. El corte cero requiere un examen separado porque la cota del diámetro es no estricta. Si ambos valores están en $(0, 1]$, su distancia es estrictamente menor que uno, incluso cuando uno de ellos es el valor uno. Para $0 < \varepsilon < 1$, escogemos un natural q con $1/(q+1) \leq 1 - \varepsilon$: el par $0, q$ tiene distancia al menos ε y demuestra que ese corte no sirve. Un corte posterior con $1/(N+1) < \varepsilon$ evita el problema para todos los pares a la vez.

Ejercicio 3. Constantes y repetición

Prueba que toda sucesión constante es de Cauchy y explica por qué no se exigen valores distintos.

Solución. Si $a_n = c$ para todos los índices, $|a_p - a_q| = 0$ para todo par. El corte cero sirve para toda tolerancia positiva. La sucesión sigue siendo una función aunque repita un valor; Cauchy controla distancias, no inyectividad. Leamos todos los cuantificadores: recibimos una tolerancia positiva arbitraria, respondemos con $N = 0$ y consideramos cualesquiera $p, q \geq 0$. La igualdad de los valores da distancia cero, que satisface la desigualdad estricta por la positividad de la tolerancia. Esto prueba la condición completa. Repetir valores no impide ser una función: lo exigido es un valor único para cada índice, no un índice único para cada valor.

Ejercicio 4. Simetría de los pares

Prueba que en la definición basta exigir el control para $p > q \geq N$, además de recordar el caso de igualdad.

Solución. Para pares iguales la distancia es cero. Para $p < q$, intercambiar los índices usa $|a_p - a_q| = |a_q - a_p|$ y reduce al caso comprobado. El corte es el mismo y no se altera el orden de cuantificadores. Esta reducción no permite limitar la separación a un desplazamiento fijo. Después de la prueba, puede retomarse la figura 10.1 para contrastar el mecanismo con el ejemplo del capítulo.

La implicación desde la definición completa es inmediata, porque los pares con $p > q$ son una parte de los pares permitidos. Para la implicación inversa, fijamos el corte entregado por la condición reducida y clasificamos cualquier par posterior según $p > q$, $p = q$ o $p < q$. Cada caso cumple la desigualdad con ese mismo corte. Es necesario que el control reducido abarque todos los pares ordenados, no sólo los consecutivos.

Ejercicio 5. Una escala discreta de tolerancias

Demuestra que basta probar: para todo entero $k \geq 1$ existe N_k que controla todos los pares posteriores con distancia menor que $1/k$.

Solución. La condición de Cauchy implica cada una de esas condiciones al usar $\varepsilon = 1/k$. Recíprocamente, dada $\varepsilon > 0$, arquimedianidad da $k \geq 1$ con $1/k < \varepsilon$; el corte de esa condición controla cualquier par posterior con distancia menor que ε. No se intercambia el índice universal de par con el corte. No necesitamos que los cortes N_k formen una sucesión creciente. Para una tolerancia concreta basta seleccionar un entero $k > 1/\varepsilon$ y conservar únicamente el corte asociado a él. Entonces $p, q \geq N_k$ implica $|a_p - a_q| < 1/k < \varepsilon$. La escala discreta funciona porque contiene tolerancias arbitrariamente pequeñas. Una lista finita de tolerancias no tendría esa propiedad y dejaría sin comprobar precisiones menores que todas ellas.

10.2. Del destino común al control interno

En los ejemplos anteriores hemos conseguido controlar las diferencias entre términos sin recurrir al valor de un límite. Podemos preguntarnos ahora qué sucede cuando ese valor sí se conoce. Si los términos de una sucesión se acercan a un mismo número L, parece razonable que también terminen acercándose unos a otros; pero necesitamos convertir esa intuición en una estimación válida para cualquier par de índices tardíos. La desigualdad triangular nos proporciona el camino: compararemos cada término con L y dejaremos que ambos errores contribuyan a la distancia que queremos acotar.

Supongamos, entonces, que $a_n \to L$. Si queremos medir la distancia entre a_p y a_q, podemos pasar algebraicamente por L: $a_p - a_q = (a_p - L) + (L - a_q)$. La desigualdad triangular nos da la estimación adecuada, $|a_p - a_q| \leq |a_p - L| + |a_q - L|$. La elección de L como punto intermedio no es una ilustración añadida a la prueba; es lo que convierte la distancia que queremos controlar en dos distancias de las que ya sabemos algo. La convergencia nos permite hacer pequeño cada error $|a_n - L|$. Como tenemos **dos** de esos errores, debemos reservar para cada uno una parte de la tolerancia total.

Proposición. Toda sucesión real convergente es de Cauchy.

Demostración. Sea $a_n \to L$ y fijemos $\varepsilon > 0$. Para asegurar una distancia final menor que ε, apliquemos la definición de convergencia con la tolerancia $\varepsilon/2$. Existe, pues, un índice N tal que $|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n \geq N$. La condición vale para cualquier índice posterior, de manera que podemos aplicarla **dos veces sin cambiar de corte**: una con $n = p$ y otra con $n = q$. Así, si $p, q \geq N$,

$|a_p - a_q| \leq |a_p - L| + |a_q - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Hemos encontrado un único corte para todos los pares de la cola, tal como pide la definición de Cauchy. □ La prueba muestra por qué una ventana de radio r alrededor de L no tiene, en general, diámetro r. Si dos términos se encuentran a lados opuestos del centro, uno puede estar casi a distancia r por la izquierda y otro casi a distancia r por la derecha; entre ellos habrá entonces una separación cercana a $2r$. Por ejemplo, $L - 3r/4$ y $L + 3r/4$ pertenecen ambos a $(L - r, L + r)$ y, sin embargo, distan $3r/2 > r$. Pedimos por eso una ventana de radio $\varepsilon/2$ cuando buscamos una separación menor que ε. La figura 10.2 permite seguir sobre el eje de valores cómo se suman dos errores respecto de un mismo centro.

También merece atención lo que *no* hemos utilizado. El límite L existía por hipótesis; nuestra tarea consistía únicamente en comparar términos. El razonamiento seguiría siendo correcto en un espacio donde no toda sucesión de Cauchy convergiera, pues ninguna de las desigualdades anteriores necesita construir un límite. Será la dirección contraria la que nos obligue a utilizar la completitud. Volvamos ahora a la sucesión alternante, pero con amplitud decreciente: $b_n = (-1)^n/(n+1)$. A diferencia de $(-1)^n$, sus oscilaciones se hacen cada vez menores. Como $|b_n| = 1/(n+1) \to 0$, sabemos que converge a cero; la proposición asegura entonces que es de Cauchy. Podemos comprobarlo directamente para ver que el cambio de signo no altera la esencia de la definición. Si $p, q \geq N$,

$$\begin{aligned} |b_p - b_q| &= \left| \frac{(-1)^p}{p+1} - \frac{(-1)^q}{q+1} \right| \\ &\leq \frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} \leq \frac{2}{N+1}. \end{aligned}$$

La estimación vale tanto para índices de la misma paridad como para índices de paridades contrarias, y el corte $N + 1 > 2/\varepsilon$ garantiza Cauchy. Se trata de una sucesión no monótona con el mismo comportamiento de concentración que la sucesión positiva de los recíprocos. No necesitamos separar todas las posibles combinaciones de signos para demostrarlo: tomar valores absolutos deja una cota válida para todas.

Queda una cuestión considerablemente más difícil. Hemos empezado con un límite y, gracias a él, hemos obtenido control entre términos. Si empezamos **solo** con esas distancias pequeñas, ¿de dónde saldrá el número L? Escribir un símbolo para el supuesto límite no basta

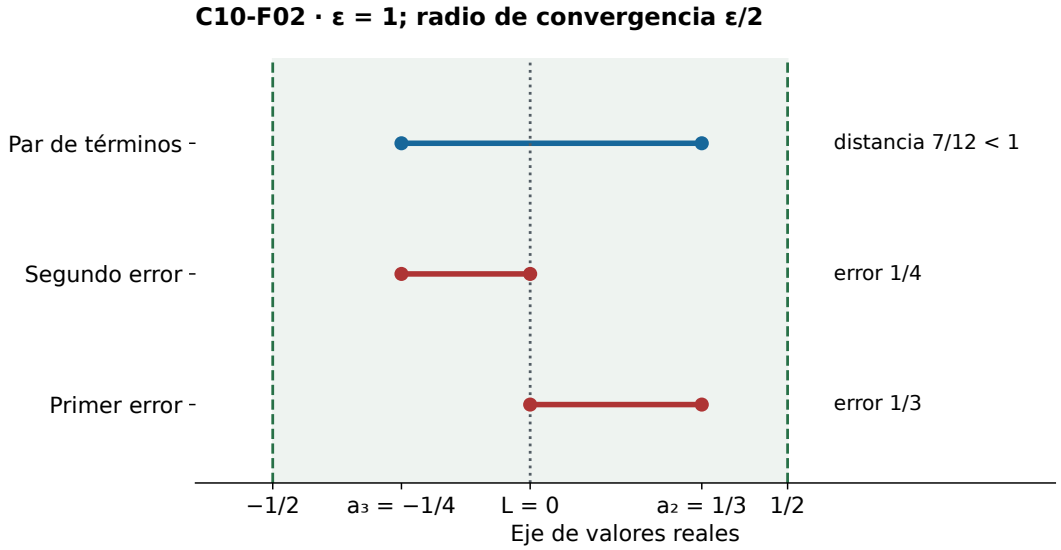


Figura 10.2. La ventana de radio medio controla dos errores, un tercio y un cuarto. Su suma siete doceavos acota la distancia entre los términos y es menor que la tolerancia uno.

para crearlo. Antes de responder, usaremos Cauchy para encerrar la sucesión en una región acotada y después aprovecharemos los extremos de las colas para construir el candidato.

Ejercicios de la sección 10.2.

Ejercicio 6. Dos errores

Demuestra convergente implica Cauchy e identifica dónde se reparte la tolerancia.

Solución. Si $a_n \to L$, para $\varepsilon > 0$ escoger un corte que haga $|a_n - L| < \varepsilon/2$ en toda la cola. Para p, q posteriores, la desigualdad triangular da $|a_p - a_q| \leq |a_p - L| + |a_q - L| < \varepsilon$. La división en dos errores se hace antes de fijar p, q. El límite viene dado por hipótesis; no se utiliza completitud. Después de la prueba, puede retomarse la figura 10.2 para contrastar el mecanismo con el ejemplo del capítulo.

Introducimos el destino como punto intermedio: $a_p - a_q = (a_p - L) + (L - a_q)$. Cada diferencia está controlada por la convergencia, siempre que ambos índices estén en su cola. Repartir el presupuesto en mitades permite sumar las dos cotas y conservar la tolerancia requerida. No podemos concluir distancia menor que ε si sólo sabemos que cada error es menor que ε: eso daría únicamente una distancia menor que 2ε.

Ejercicio 7. Alternancia amortiguada

Prueba Cauchy directamente para $a_n = (-1)^n/(n+1)$ y compara el corte con el de la sucesión positiva.

Solución. $|a_p - a_q| \leq 1/(p+1) + 1/(q+1) \leq 2/(N+1)$ para pares posteriores a N. Tomar cualquier natural con $N+1 > 2/\varepsilon$ garantiza control. Para términos positivos bastaba $N + 1 > 1/\varepsilon$; aquí pueden sumarse las magnitudes de signos opuestos. Ambos son cortes suficientes, sin afirmar optimalidad. Después de la prueba, puede retomarse la figura 10.2 para contrastar el mecanismo con el ejemplo del capítulo.

Cuando los índices tienen paridades opuestas, los valores quedan a ambos lados de cero y su distancia es la suma de sus magnitudes. La triangular proporciona una sola cota que también sirve cuando las paridades coinciden. Por eso $2/(N+1)$ es un presupuesto seguro. Escogido N con esa cota menor que la tolerancia, el argumento ya no depende de cuáles sean los dos índices. No se necesita obtener el mejor corte para demostrar Cauchy.

Ejercicio 8. Radio no es diámetro

Si todos los términos de una cola están en $(L-r, L+r)$, prueba que sus distancias son menores que $2r$. Da dos puntos de esa ventana separados por más de r.

Solución. Por triangular, dos errores menores que r suman menos que $2r$. Los puntos $L - 3r/4$ y $L + 3r/4$ pertenecen a la ventana y están separados por $3r/2 > r$. Una ventana de radio r no proporciona automáticamente tolerancia de Cauchy r. Después de la prueba, puede retomarse la figura 10.2 para contrastar el mecanismo con el ejemplo del capítulo.

Cada punto de la ventana satisface $|x - L| < r$. Para dos puntos x, y, la triangular da $|x-y| \leq |x-L|+|y-L| < 2r$. Los puntos propuestos tienen errores individuales $3r/4$, pero distancia $3r/2$. Por tanto, el radio mide distancia al centro y el diámetro mide separación entre puntos. Para transformar una ventana en un control de Cauchy con tolerancia ε, basta usar radio $\varepsilon/2$.

Ejercicio 9. Transportar un corte conocido

Supón que $|a_n - L| \leq C/(n+1)$ para todos los índices y $C \geq 0$. Da un corte de Cauchy para cada tolerancia.

Solución. Si $C = 0$, la sucesión es constante L y sirve cero. Si $C > 0$, para $p, q \geq N$ la distancia es a lo sumo $2C/(N+1)$. Cualquier N con $N + 1 > 2C/\varepsilon$ garantiza la condición. La cota no estricta inicial se convierte en estricta al escoger el corte. La estimación frente a L entrega dos errores, cada uno a lo sumo $C/(N+1)$, y por eso la distancia entre términos es a lo sumo $2C/(N+1)$. La propiedad arquimediana permite escoger N haciendo esa última cantidad estrictamente menor que ε. Si $C = 0$, la hipótesis implica $|a_n - L| = 0$ para todo n: todos los términos son L y ninguna división por C resulta necesaria.

Ejercicio 10. Una recíproca pendiente

Explica qué obligación falta después de demostrar que una convergente es de Cauchy. ¿La desigualdad triangular por sí sola la resuelve?

Solución. Falta demostrar que cada sucesión con control interno tiene un destino dentro del codominio. La desigualdad triangular relaciona distancias con un centro ya dado; no crea ese centro. La prueba de §10.4 lo construirá por completitud. El contraste racional de §10.7 mostrará por qué esa obligación no es meramente formal. Demostrar «si converge, es de Cauchy» parte de un número L que ya existe. La recíproca parte únicamente de distancias entre términos y debe producir ese número. Por ejemplo, las bisecciones racionales de §10.7 satisfacen el control interno, aunque su destino no pertenece a los racionales. La construcción real funciona porque permite tomar los extremos y supremos necesarios dentro del codominio. La completitud resuelve una obligación de existencia que la triangular no aborda.

10.3. Encerrar una cola y recuperar la acotación

Una sucesión de Cauchy controla las distancias entre sus términos tardíos, pero no parece ofrecer una cota respecto de cero. La diferencia entre ambas cosas puede desconcertar: si todos los valores posteriores a un corte se encuentran próximos unos a otros, podrían estar agrupados cerca de un número grande, y la definición no nos dice cuál es ese número. Sin embargo, para demostrar acotación no necesitamos descubrir un centro privilegiado. Podemos **escoger uno de los propios términos** como referencia; el control de Cauchy ya asegura que el resto de la cola no se alejará demasiado de él.

Fijemos, por ejemplo, la tolerancia 1. Puesto que la condición vale para *toda* tolerancia positiva, debe existir un índice N_0 tal que $|a_p - a_q| < 1$ siempre que $p, q \geq N_0$. Tomemos $q = N_0$. Ahora a_{N_0} deja de ser una variable: es un número real fijo que podemos usar como ancla para medir los demás valores. La desigualdad triangular da $|a_n| \leq |a_n - a_{N_0}| + |a_{N_0}| < 1 + |a_{N_0}| \qquad (n \geq N_0)$.

Es una cota de toda la cola. Aún no es, necesariamente, una cota de la sucesión completa: podrían existir términos muy grandes antes de N_0. Pero solo hay **finitos** términos anteriores al corte y podemos incorporarlos a una cota global.

Proposición. Toda sucesión de Cauchy de números reales es acotada.

Demostración. La estimación anterior proporciona una cota $1 + |a_{N_0}|$ para todos los términos con índice $n \geq N_0$. Si $N_0 > 0$, consideramos la lista finita de magnitudes anteriores y definimos $B = \max\{|a_{N_0}| + 1, |a_0|, \dots, |a_{N_0-1}|\}$. Entonces $|a_n| \leq B$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, tanto si se encuentra antes del corte como después de él. Si $N_0 = 0$, no hay prefijo anterior y basta tomar $B = 1 + |a_0|$. En ambos casos la sucesión es acotada. □

El número 1 no tiene nada de especial; elegimos esa tolerancia porque basta una región de anchura fija para demostrar acotación. Tampoco hizo falta la completitud de $\mathbb{R}$: una desigualdad y el máximo de una lista finita resolvieron todo. La implicación contraria, en cambio, falla. Los términos de $(-1)^n$ permanecen en $[-1, 1]$, pero ninguna cola se concentra en un intervalo arbitrariamente estrecho.

La separación entre cola y prefijo puede parecer un detalle técnico hasta que consideramos una sucesión que comienza con $a_0 = 9$, $a_1 = -6$ y continúa según $a_n = 1/(n-1)$ para $n \geq 2$. Su cola recíproca tiene valores pequeños y se concentra, sin que eso reduzca en absoluto los dos términos que aparecieron al principio. La figura 10.3 muestra las dos escalas: el corte permite controlar la parte tardía, mientras que el prefijo debe incorporarse a la cota global por separado. Esa distinción volverá a aparecer cuando estudiemos propiedades que dependen únicamente de lo que sucede a partir de un cierto índice.

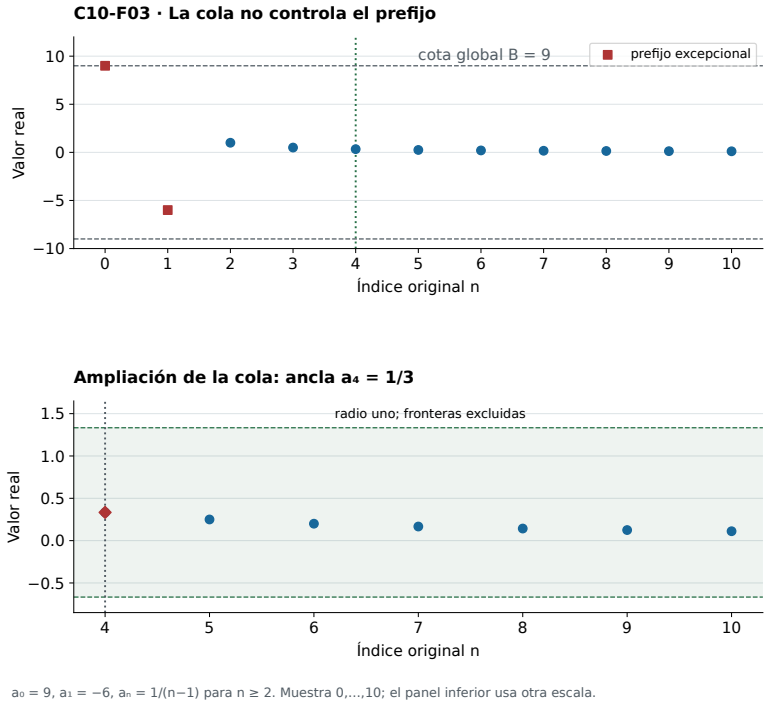


Figura 10.3. Para el ejemplo con términos iniciales nueve y menos seis y a_n=1/(n−1) desde n=2, el corte cuatro permite anclar la cola en un tercio. La cota de esa cola no controla el prefijo; la cota global nueve sí lo incorpora.

Con la acotación ya podemos construir algo más útil que una ventana alrededor de un término escogido arbitrariamente. Para cada N consideremos el conjunto de los valores que todavía quedan, $T_N = \{a_n : n \geq N\}$. Es no vacío, pues contiene a_N, y es acotado porque toda la sucesión lo es. Por la propiedad del supremo, tanto su extremo superior como su extremo inferior existen en $\mathbb{R}$. Los denotaremos por

$$\ell_N = \inf T_N, \qquad u_N = \sup T_N, \qquad I_N = [\ell_N, u_N].$$

Los extremos son barreras: todos los términos de la cola están entre ellos, pero no tienen por qué ser valores efectivamente alcanzados. Para $a_n = 1/(n+1)$, por ejemplo, $u_N = 1/(N+1)$ y $\ell_N = 0$. El cero pertenece al intervalo I_N, aunque ningún término de la sucesión sea cero. Esta pequeña diferencia entre *pertenecer al intervalo que contiene la cola* y *ser un valor de la cola* será decisiva cuando queramos construir un límite nuevo.

Al aumentar el índice N descartamos términos; nunca añadimos otros. Por eso $T_{N+1} \subseteq T_N$. Una cola más pequeña no puede tener un ínfimo inferior al de la cola anterior ni un supremo superior al de ella; en símbolos, $\ell_N \le \ell_{N+1} \le u_{N+1} \le u_N$. Los intervalos I_N están, por tanto, encajados. Cada nuevo intervalo es una región en la que quedan encerrados *todos* los términos suficientemente tardíos. Para convertirlos en una construcción del límite falta mostrar que esas regiones se estrechan de verdad y no se estabilizan, por ejemplo, en un intervalo grande.

La condición de Cauchy nos da exactamente ese estrechamiento, pero debemos justificar con cuidado el paso de una estimación sobre términos a otra sobre sus extremos. Fijemos $\eta > 0$ y escojamos un corte N_0 tal que $|a_p - a_q| < \eta$ para todos $p, q \ge N_0$. Tomemos cualquier $N \ge N_0$ y fijemos un valor $y \in T_N$. Todos los demás valores $x \in T_N$ satisfacen $x - y < \eta$, de modo que $y + \eta$ es cota superior de la cola. Por la definición de supremo, $u_N \le y + \eta$.

Esta última desigualdad vale para **cualquier** y de la cola, no solo para el primero que elegimos. Al reordenarla obtenemos $u_N - \eta \le y$ para todo $y \in T_N$. Así $u_N - \eta$ es una cota inferior y, puesto que ℓ_N es la mayor de esas cotas, tenemos $u_N - \eta \le \ell_N$. Hemos deducido $0 \le u_N - \ell_N \le \eta \qquad (N \ge N_0)$. ¿Por qué hemos obtenido $\le \eta$ y no $< \eta$ si todas las diferencias de términos eran estrictas? Porque supremo e ínfimo pueden ser puntos frontera no alcanzados: las distancias individuales pueden ser todas menores que una cantidad y tener precisamente esa cantidad como supremo. Los recíprocos ofrecen un ejemplo en su cola inicial: todos los pares distan menos de uno, aunque el intervalo de extremos es $[0, 1]$ y tiene anchura uno. Para garantizar anchura **estrictamente** menor que una precisión ε, basta aplicar Cauchy con $\eta = \varepsilon/2$; entonces $u_N - \ell_N \le \varepsilon/2 < \varepsilon$.

Ya contamos con los ingredientes del argumento principal. La sucesión queda dentro de una familia de intervalos cerrados encajados, cuyas anchuras pueden hacerse tan pequeñas como queramos. Necesitamos demostrar que existe un real común a todos ellos. Ese paso es donde la completitud dejará de ser una propiedad de fondo para intervenir en la construcción misma del destino.

Ejercicios de la sección 10.3.

Ejercicio 11. Ancla y prefijo

Reconstruye la prueba de acotación de una sucesión de Cauchy y trata por separado el corte cero.

Solución. Con tolerancia uno obtener N_0, fijar el índice ancla en N_0 y deducir $|a_n| < |a_{N_0}| + 1$ para $n \ge N_0$. Si $N_0 = 0$, esa cota es global. Si $N_0 > 0$, el máximo de ella y las finitas magnitudes anteriores acota toda la sucesión. El conjunto del máximo es no vacío y no se usa completitud. Después de la prueba, puede retomarse la figura 10.3 para contrastar el mecanismo con el ejemplo del capítulo.

Fijado el ancla a_{N_0}, la triangular da $|a_n| \le |a_n - a_{N_0}| + |a_{N_0}| < 1 + |a_{N_0}|$ para toda la cola. El prefijo contiene sólo los índices $0, \dots, N_0 - 1$. Si existe, ponemos $B = \max\{1 + |a_{N_0}|, |a_0|, \dots, |a_{N_0-1}|\}$. Cada término queda cubierto por una de esas dos partes y satisface $|a_n| \le B$. Tomar el máximo de una lista finita requiere orden lineal, no completitud.

Ejercicio 12. La cota no basta

Da una sucesión real acotada que no sea de Cauchy y prueba ambas afirmaciones.

Solución. $a_n = (-1)^n$ tiene magnitud uno. Para cualquier corte, $p = N, q = N + 1$ dan distancia dos. La tolerancia fija uno impide la condición de Cauchy en cualquier cola. La acotación sólo evita escape; no obliga a proximidad mutua. Para probar acotación basta observar $-1 \leq a_n \leq 1$. Para negar Cauchy necesitamos otra comprobación: fijamos $\varepsilon_0 = 1$ antes de recibir el corte. Los índices consecutivos posteriores tienen signos opuestos, de modo que $|a_N - a_{N+1}| = 2 \geq \varepsilon_0$. La misma tolerancia falla en todas las colas. Hemos probado por separado las dos propiedades pedidas, sin deducir una de la apariencia del gráfico.

Ejercicio 13. Intervalos de cola

Para $a_n = 1/(n + 1)$, calcula I_N y sus anchuras. ¿Son intervalos de valores alcanzados?
Solución. $I_N = [0, 1/(N + 1)]$ y su anchura es $1/(N + 1)$. El extremo superior se alcanza en N; el inferior cero no es término. El intervalo encierra toda la cola y también valores que ésta nunca toma. Los extremos se calculan por optimalidad y arquimedianidad. Después de la prueba, puede retomarse la figura 10.4 para contrastar el mecanismo con el ejemplo del capítulo.

El mayor valor de la cola es $a_N = 1/(N + 1)$. Cero es una cota inferior, y ninguna cota positiva es válida: para cualquier $b > 0$, arquimedianidad permite encontrar $n \geq N$ con $1/(n + 1) < b$. Por tanto el ínfimo es cero. El intervalo cerrado une ambos extremos, pero la sucesión sólo toma los valores recíprocos discretos; por ejemplo, cero nunca aparece. Un intervalo de extremos es una envolvente y no el conjunto exacto de valores.

Ejercicio 14. Ancho no estricto

Prueba que si todos los pares de una cola tienen distancia menor que η, entonces su intervalo de extremos tiene anchura a lo sumo η.
Solución. Para cada valor fijo y de la cola, todos sus valores x cumplen $x < y+\eta$. Tomando supremo, $u_N \leq y + \eta$. Así $u_N - \eta$ acota inferiormente todos los y, y $u_N - \eta \leq \ell_N$. Restar da anchura a lo sumo η. No se supone que existan valores extremos alcanzados. Después de la prueba, puede retomarse la figura 10.4 para contrastar el mecanismo con el ejemplo del capítulo.

La justificación se hace en dos pasos porque los extremos pueden no alcanzarse. Con y fijo, $y + \eta$ es una cota superior de la cola, luego su supremo no la supera. Al reorganizar esa desigualdad obtenemos $u_N - \eta \leq y$ para todo valor de la cola; así $u_N - \eta$ es cota inferior y no supera su ínfimo. Este paso sólo conserva desigualdad no estricta: que cada valor quede estrictamente antes de una barrera no obliga a que su supremo quede estrictamente antes.

Ejercicio 15. La igualdad puede sobrevivir

Construye una sucesión de Cauchy cuya cola de corte cero tenga todas sus distancias menores que uno y anchura exactamente uno.
Solución. Tomar $a_n = 1/(n+1)$. Todos sus valores son positivos y a lo sumo uno, de modo que cada distancia es menor que uno. El supremo es uno y el ínfimo cero, luego anchura uno. La sucesión es de Cauchy por el control recíproco. Se verifica que pasar a extremos puede perder la desigualdad estricta. Después de la prueba, puede retomarse la figura 10.4 para contrastar el mecanismo con el ejemplo del capítulo.

Para dos valores $x, y \in (0, 1]$, si $x \geq y$ tenemos $x - y < x \leq 1$, y en el otro orden usamos simetría. Así todos los pares tienen distancia menor que uno. Sin embargo, el valor uno está presente y los valores se acercan arbitrariamente a cero, por lo que el intervalo de extremos es $[0, 1]$. La anchura uno puede ser el supremo de las distancias aunque ninguna distancia individual valga uno.

10.4. La completitud construye el destino

Los intervalos I_N se van estrechando alrededor de lo que parecería un punto de llegada. El dibujo sugiere que debería haber un real atrapado en todos ellos, pero una demostración no puede dar por existente un punto solo porque las regiones que lo rodearían se hacen

pequeñas. En especial, no conocemos todavía ningún L al que podamos aplicar la definición de convergencia. Tenemos que **construirlo con las herramientas disponibles**, y la herramienta que garantiza la existencia de extremos de conjuntos acotados es la completitud de $\mathbb{R}$.

Podríamos pensar en tomar un extremo inferior de algún intervalo y declararlo candidato, pero el intervalo escogido puede ser todavía demasiado ancho. Además, sus extremos cambiarán al avanzar el corte. En cambio, los extremos inferiores ℓ_N forman una familia ordenada que no desciende: cada nueva cola puede subir la barrera inferior, nunca bajarla. Tiene sentido buscar la barrera inferior más alta compatible con todas las colas. La propiedad del supremo permite dar a esa intuición una formulación exacta.

Teorema (criterio de Cauchy en $\mathbb{R}$). Una sucesión $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ converge a algún número real si y solo si es de Cauchy para la distancia usual. **Demostración.** La dirección que parte de la convergencia ya quedó probada en §10.2. Supongamos ahora que (a_n) es de Cauchy. Por §10.3, es acotada y, para cada N, posee un intervalo de cola $I_N = [\ell_N, u_N]$. El conjunto de todos sus extremos inferiores,

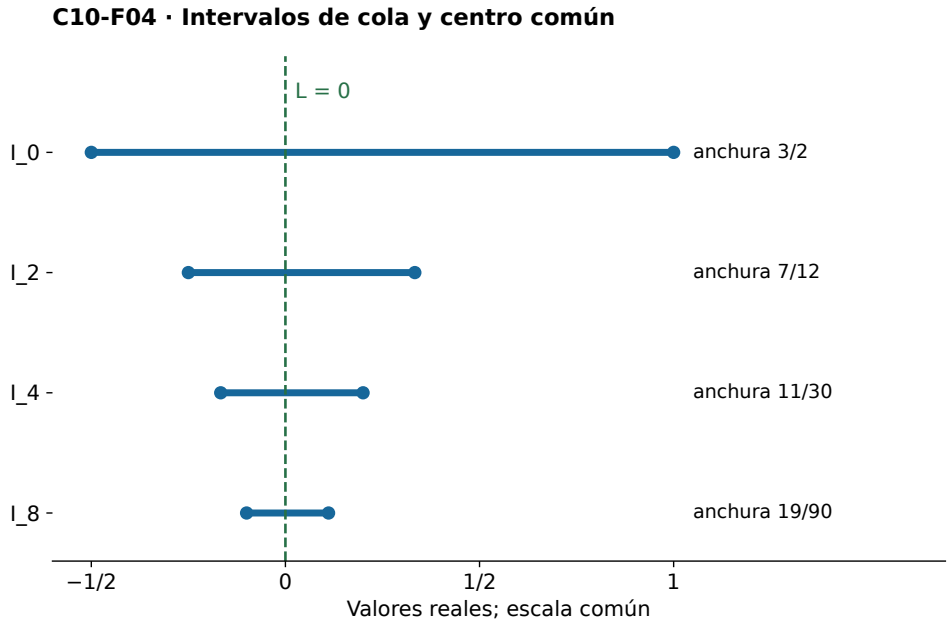
$E = \{\ell_N : N \in \mathbb{N}\}$, no es vacío, porque contiene ℓ_0, y está acotado superiormente por cualquier cota superior global de la sucesión. Por completitud tiene un supremo. Definamos $L = \sup E$. Acabamos de obtener un número real que no habíamos supuesto existente. La definición de supremo garantiza que $\ell_N \le L$ para todo N. La dificultad verdadera empieza aquí: aún debemos demostrar que L no haya quedado *por encima* del extremo superior de algún intervalo.

Es tentador responder que $\ell_N \le u_N$; por supuesto que es cierto, pero **no es suficiente**. Esa desigualdad compara los extremos de *una misma* cola, mientras que L reúne la información de *todas* las colas. Para concluir $L \le u_N$ necesitamos demostrar que u_N es cota superior de **todos** los ℓ_M, incluso cuando M sea distinto de N. Fijemos, pues, dos índices arbitrarios M, N y tomemos $r = \max\{M, N\}$. El término a_r pertenece a las dos colas T_M y T_N. Como ℓ_M es cota inferior de la primera y u_N es cota superior de la segunda, podemos encadenar

$\ell_M \le a_r \le u_N$. Ahora N permanece fijo y M puede variar sin restricción. La desigualdad dice que u_N domina **cada** elemento del conjunto E; por ser L su supremo, concluimos $L \le u_N$. Con la otra mitad de la estimación obtenida antes, resulta $\ell_N \le L \le u_N$ para todo $N \in \mathbb{N}$. Éste era el obstáculo de existencia: hemos probado que los intervalos no solo se estrechan, sino que contienen todos al **mismo número real**. Todavía nos falta verificar que los términos de la sucesión se acercan a él. Para una tolerancia arbitraria $\varepsilon > 0$, la condición de Cauchy y la estimación de §10.3 permiten escoger N con $u_N - \ell_N \le \varepsilon/2$. Todos los términos posteriores y el propio L pertenecen a I_N, y la distancia entre dos puntos de ese intervalo no supera su anchura. Por consiguiente,

$|a_n - L| \le u_N - \ell_N \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ $(n \ge N)$. Ésta es exactamente la definición de $a_n \to L$. Hemos construido un límite real a partir del control interno y verificado que es, en efecto, el destino de la sucesión. □ La distinción entre las dos direcciones del teorema es importante. Cuando partimos de una convergencia, el límite L ya estaba dado y una desigualdad triangular bastó para comparar dos términos. Cuando partimos de Cauchy, no había tal número: utilizamos dos veces la completitud —primero para formar los extremos reales de las colas y después para tomar el supremo de los extremos inferiores—. La elección $r = \max\{M, N\}$ fue el paso que permitió reunir esas construcciones sin suponer una intersección que aún debíamos demostrar. No fue necesario invocar Bolzano–Weierstrass ni el teorema de convergencia monótona.

Podemos comprobar el significado geométrico del resultado con la sucesión alternante $(-1)^n/(n+1)$. Sus intervalos de cola van estrechándose y todos contienen cero; en este ejemplo conocemos ese punto y la figura 10.4 lo muestra. La prueba del teorema funciona de manera más general: si ignoramos cuál es el centro, la fórmula $L = \sup\{\ell_N\}$ proporciona uno y las anchuras decrecientes obligan a que sea el límite. La figura ilustra un mecanismo matemático, pero no sustituye el argumento de existencia.



Ejemplo $a_n = (-1)^n/(n+1)$. Cuatro cortes mostrados; la existencia y unicidad se prueban en el texto.

Figura 10.4. Los intervalos de cola de la alternancia recíproca se estrechan y contienen el mismo real cero. La prueba construye el centro como supremo de todos los inferiores; la muestra de cuatro intervalos sólo ilustra ese mecanismo.

También podemos probar que la intersección de todos los I_N no tiene otro punto. Si L' perteneciera a cada uno de ellos y fuese distinto de L, su distancia $d = |L - L'|$ sería positiva. Sin embargo, podríamos escoger un intervalo de cola de anchura menor que $d/2$; al contener ambos puntos, su anchura tendría que ser al menos d, lo que es imposible. Por tanto, $L' = L$. Hemos identificado así un único centro, aunque la unicidad del límite también podría recuperarse directamente del capítulo 6.

Lo que acabamos de demostrar es un criterio de **existencia**, no necesariamente una fórmula para evaluar L ni una medida de la rapidez de aproximación. Esa diferencia se hará visible en el ejemplo racional del §10.7 y en las cotas de error del §10.8. Antes veremos hasta qué punto podemos negar la condición de Cauchy y cómo se comporta al operar con sucesiones.

Ejercicios de la sección 10.4.

Ejercicio 16. Comparar cortes distintos

Prueba $\ell_M \le u_N$ para cualesquiera cortes M, N y explica por qué se necesita en la construcción del destino.

Solución. El índice $r = \max\{M, N\}$ pertenece a ambas colas y da $\ell_M \le a_r \le u_N$. Por ello cada u_N acota a todo el conjunto de inferiores. Esto permite deducir $\sup_M \ell_M \le u_N$. La desigualdad de extremos con el mismo corte no proporciona por sí sola esa cota de todo el conjunto. Después de la prueba, puede retomarse la figura 10.4 para contrastar el mecanismo con el ejemplo del capítulo.

El punto común a ambas colas funciona como puente: pertenece a la cola de M, por lo que está por encima de ℓ_M, y pertenece a la de N, por lo que está por debajo de u_N. Manteniendo N fijo y variando M, comprobamos que u_N es una cota de todos los inferiores. Sólo entonces podemos tomar el supremo de ese conjunto y situarlo por debajo de cada u_N.

Ejercicio 17. Existencia y comprobación

Construye L para una sucesión de Cauchy sin invocar convergencia monótona ni Bolzano–Weierstrass y verifica el límite.

Solución. Por acotación existen extremos reales de cada cola. El conjunto no vacío de inferiores es acotado superiormente y tiene supremo L por completitud. La comparación entre cortes da $\ell_N \le L \le u_N$ para todo N. Dada $\varepsilon > 0$, usar Cauchy con $\varepsilon/2$ para obtener anchura a lo sumo $\varepsilon/2$ en una cola. Todos sus términos y L están en ese intervalo, de modo que $|a_n - L| \le \varepsilon/2 < \varepsilon$.

Después de la prueba, puede retomarse la figura 10.4 para contrastar el mecanismo con el ejemplo del capítulo. La acotación global obtenida antes garantiza que cada cola es no vacía y tiene extremos reales. El conjunto de inferiores contiene ℓ_0 y, por la comparación cruzada, está acotado por u_0. Su supremo L existe. Para cualquier N, $\ell_N \le L$ por definición de supremo y $L \le u_N$ por la cota cruzada. El intervalo estrecho contiene así tanto el destino construido como todos los términos posteriores. La última estimación verifica, en vez de presuponer, que ese destino es el límite.

Ejercicio 18. Intersección única

Demuestra que la intersección de los intervalos de cola de una sucesión real de Cauchy es un singleton.

Solución. El real L construido pertenece a todos los intervalos. Si x, y estuvieran en la intersección y su distancia fuera $d > 0$, Cauchy con tolerancia $d/2$ daría un intervalo de anchura a lo sumo $d/2$ que contiene a ambos. Eso contradice su distancia d. Por tanto sólo contiene a L. Después de la prueba, puede retomarse la figura 10.4 para contrastar el mecanismo con el ejemplo del capítulo.

La existencia no se obtiene únicamente de que las anchuras se hagan pequeñas: usamos primero el L real construido y verificamos su pertenencia a cada intervalo. Para unicidad, cualquier par de puntos de un intervalo está separado a lo sumo por su anchura. Si dos puntos de la intersección fueran distintos, un intervalo más estrecho que su distancia no podría contenerlos a ambos. La intersección no es vacía y tiene a lo sumo un elemento, luego es exactamente $\{L\}$.

Ejercicio 19. Recuperar el criterio desde anchuras

Para una sucesión real acotada, prueba que es de Cauchy si y sólo si $u_N - \ell_N \to 0$, sin usar el criterio de convergencia.

Solución. Cauchy con tolerancia $\varepsilon/2$ fuerza anchura a lo sumo $\varepsilon/2$ en todos los cortes posteriores, por §10.3; así las anchuras tienden a cero. Recíprocamente, dada $\varepsilon > 0$, escoger un corte con anchura menor que ε. Todo par posterior está en su intervalo, por lo que su distancia es a lo sumo la anchura y menor que ε. Se compara control de pares y geometría sin usar aún existencia de límite.

Después de la prueba, puede retomarse la figura 10.4 para contrastar el mecanismo con el ejemplo del capítulo. En la dirección de Cauchy a anchuras, el corte para $\varepsilon/2$ controla también todas las colas que empiezan más tarde, porque son subconjuntos de esa cola. El lema de extremos da anchuras a lo sumo $\varepsilon/2 < \varepsilon$. En la otra dirección sólo hace falta una cola cuya anchura sea menor que la tolerancia pedida; cualquier par de términos de esa cola queda dentro de sus extremos. Ninguna de las dos direcciones usa un límite de los términos.

Ejercicio 20. Conocer una extracción basta con Cauchy

Supón que a es de Cauchy y que $a_{\varphi(k)} \to L$, donde $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es estrictamente creciente. Demuestra directamente $a_n \to L$.

Solución. Una inducción da $\varphi(k) \ge k$. Para $\varepsilon > 0$, tomar el corte N_1 de Cauchy con tolerancia $\varepsilon/2$ y el corte K de la extracción para la misma tolerancia respecto de L. Fijar $k = \max\{K, N_1\}$, así $\varphi(k) \ge N_1$ y $|a_{\varphi(k)} - L| < \varepsilon/2$. Para todo $n \ge N_1$, $|a_n - L| \le |a_n - a_{\varphi(k)}| + |a_{\varphi(k)} - L| < \varepsilon$. Se necesita una extracción ya dada, no BW.

El término extraído que sirve de ancla se escoge una sola vez para la tolerancia dada, antes de considerar el índice arbitrario n. Su índice original es suficientemente tardío para aplicar Cauchy, y su valor es suficientemente cercano a L por convergencia de la extracción. La triangular conecta cualquier término posterior con ese ancla. Cauchy elimina así las excursiones que una subsucesión convergente podría dejar sin observar en una sucesión general.

10.5. Negar Cauchy: encontrar pares separados

Ya sabemos cómo usar Cauchy para demostrar convergencia en $\mathbb{R}$. Para demostrar que una sucesión *no* converge, podemos buscar un defecto en ese control. No hace falta probar que sus términos crecen sin límite ni descubrir todas sus posibles oscilaciones: bastará encontrar una separación positiva que reaparezca por mucho que avancemos en la sucesión. La dificultad suele estar menos en calcular una distancia que en demostrar que podemos encontrarla **después de cualquier corte**.

Neguemos con cuidado la definición. Ser de Cauchy significaba que para cada $\varepsilon > 0$ existía un índice N que controlaba todos los pares posteriores. Si la propiedad falla, debe haber al menos una tolerancia positiva para la cual *ningún* corte logra ese control. Recibido cualquier N, tendremos entonces que exhibir dos índices $p, q \geq N$ cuya distancia alcance o supere esa tolerancia. Escribimos

$\exists \varepsilon_0 > 0 \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists p, q \geq N : \quad |a_p - a_q| \geq \varepsilon_0$. Hay dos detalles que conviene entender, pues de ellos depende que el razonamiento funcione. El número ε_0 debe elegirse **antes** de recibir N y mantenerse fijo; si lo redujéramos después de cada corte, podríamos encontrar distancias positivas en una sucesión que, sin embargo, sí es de Cauchy. Por otra parte, la negación de $|a_p - a_q| < \varepsilon_0$ es $|a_p - a_q| \geq \varepsilon_0$, con igualdad incluida. Para refutar una condición estricta no necesitamos superar estrictamente la barrera: basta alcanzarla.

La alternancia $a_n = (-1)^n$ permite verlo sin cálculos largos. Elegimos $\varepsilon_0 = 1$. Cualquiera que sea el corte N, tomamos $p = N$ y $q = N + 1$. Ambos pertenecen a la cola y $|a_p - a_q| = 2 \geq 1$. Así queda negado Cauchy con una tolerancia que no ha cambiado. Para $a_n = n$ podemos utilizar exactamente la misma pareja y obtener distancia uno. La primera sucesión permanece acotada y la segunda crece sin límite, pero la condición de Cauchy fracasa por la misma razón verificable: siempre encontramos pares demasiado separados.

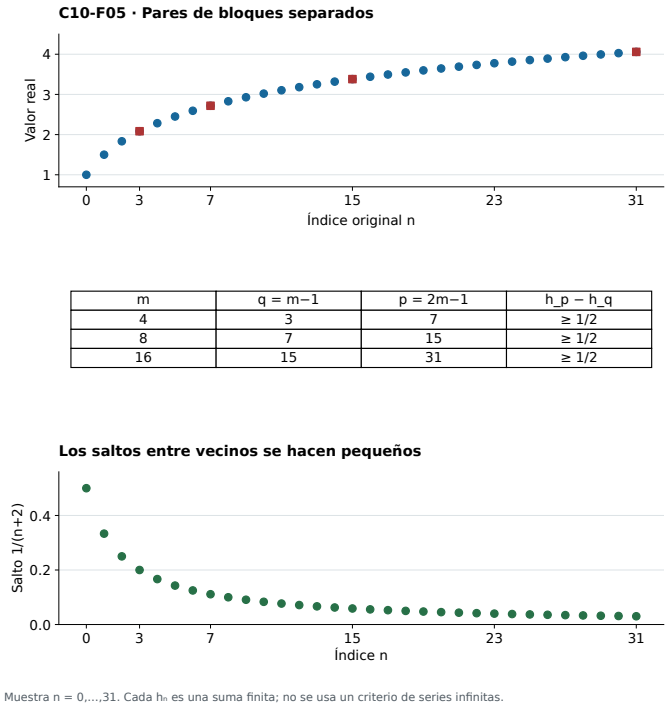
La condición de Cauchy sí obliga a que los saltos vecinos tiendan a cero. Dada $\varepsilon > 0$, su corte N controla todos los pares posteriores y, en particular, $(n+1, n)$ para cada $n \geq N$. Así $|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$ desde ese corte. Lo que queda por decidir es si esa consecuencia basta para recuperar el control de todos los pares. El ejemplo verdaderamente instructivo es menos evidente. Pensemos en una sucesión que, a partir de cierto momento, avance mediante pasos cada vez más pequeños. ¿No debería acabar estabilizándose? El tamaño de un paso aislado no decide lo que ocurre después de muchos pasos. Si damos una cantidad suficientemente grande de pasos pequeños en una misma dirección, todavía podemos recorrer una distancia considerable. La condición $|a_{n+1} - a_n| \to 0$ mira únicamente los saltos; la condición de Cauchy mira la distancia acumulada entre dos posiciones arbitrarias.

Construyamos una sucesión que exhiba esa diferencia sin recurrir a una serie infinita. Definamos las sumas **finitas** $h_n = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{j}, \qquad n \in \mathbb{N}$. Cada término se obtiene añadiendo a la suma anterior un recíproco nuevo. En consecuencia, $h_{n+1} - h_n = \frac{1}{n+2} \longrightarrow 0$. Si observáramos solamente estos incrementos, veríamos un progreso cada vez más lento. Pero para aplicar Cauchy no basta comparar h_n con h_{n+1}: debemos comparar, por ejemplo, una suma con otra que contenga muchos términos adicionales. Elijamos un bloque que comienza después de m sumandos y contiene otros m. Su distancia acumulada es

$$h_{2m-1} - h_{m-1} = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{2m}$$
$$\geq m \cdot \frac{1}{2m} = \frac{1}{2}.$$

La razón de la última cota merece leerse despacio: hay exactamente m sumandos y ninguno es menor que $1/(2m)$. Cada uno, considerado por separado, puede ser diminuto cuando m crece, pero **el número de sumandos crece al mismo tiempo**. Por eso la suma del bloque conserva una separación de al menos medio. Tenemos ya la tolerancia fija que buscábamos: $\varepsilon_0 = 1/2$. Si alguien propone un corte N, respondemos con $m = N+1$. Entonces $m-1 = N$ y $2m-1 = 2N+1$ son índices posteriores al corte, mientras sus valores distan por lo menos $1/2$. Como esta elección puede repetirse después de cualquier N, la sucesión (h_n) no es de Cauchy; en virtud del criterio probado en §10.4, tampoco converge en $\mathbb{R}$. Todo lo utilizado ha sido aritmética de sumas finitas, de modo que no hay ninguna dependencia oculta de la teoría de series del capítulo siguiente.

Podemos ir un poco más lejos. Fijemos de antemano un desplazamiento entero $r \geq 1$ y comparemos h_n con h_{n+r}. La diferencia contiene solo r sumandos y satisface $0 < h_{n+r} - h_n = \sum_{j=n+2}^{n+r+1} \frac{1}{j} \leq \frac{r}{n+2} \longrightarrow 0$. Así, para **cada** r fijo, esas distancias también tienden a cero. No hay contradicción con lo que acabamos de probar: el corte necesario para controlar $h_{n+r} - h_n$ puede depender de r. La definición de Cauchy exige elegir el corte antes de conocer cuánto se separarán los índices; nuestros bloques de longitud creciente aprovechan precisamente esa diferencia de cuantificadores.



m	q = m−1	p = 2m−1	h_p − h_q
4	3	7	≥ 1/2
8	7	15	≥ 1/2
16	15	31	≥ 1/2

Figura 10.5. En las sumas finitas de recíprocos, los saltos entre vecinos disminuyen. Los pares al final de bloques de longitud creciente siguen separados por al menos medio; un desplazamiento temporal creciente detecta el fallo de Cauchy.

El ejemplo da una pauta útil para leer y construir contraejemplos. Cuando una hipótesis controla objetos vecinos o un número fijo de operaciones, conviene preguntar si una acumulación suficientemente larga podría escapar de ese control. Aquí el escape queda cuantificado por la desigualdad $h_{2m-1} - h_{m-1} \geq 1/2$, que muestra por qué ningún corte es suficiente.

Ejercicios de la sección 10.5.

Ejercicio 21. Negación exacta

Escribe la negación de Cauchy y úsala para $a_n = (-1)^n$.

Solución. Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para cada N existen $p, q \geq N$ con $|a_p - a_q| \geq \varepsilon_0$. Para la alternancia escoger $\varepsilon_0 = 1$ y los índices $N, N+1$, cuya distancia es dos. La tolerancia se fija primero; los testigos se escogen después del corte. Negamos sucesivamente los cuantificadores de la definición: «para todo ε existe N para todos p, q» se convierte en «existe ε_0 para todo N existen p, q». También cambia $< \varepsilon_0$ por $\geq \varepsilon_0$. La alternancia proporciona testigos que dependen del corte, pero la tolerancia queda fija. Una sola pareja separada sólo descartaría ciertos cortes; la construcción para cada N descarta todas las colas posibles.

Ejercicio 22. Tolerancia móvil

¿Niega Cauchy que para cada corte haya dos términos distintos? Da un ejemplo que decida.

Solución. No. $1/(n+1)$ tiene términos distintos después de cada corte, pero es de Cauchy. La distancia de los testigos puede hacerse tan pequeña como se quiera al mover el corte; no hay una tolerancia positiva fija que todas las colas infrinjan. En la sucesión recíproca, $a_N \neq a_{N+1}$ después de cualquier corte. Sus distancias, sin embargo, no están separadas de cero por una constante positiva. De hecho, todos los valores de una cola están en un intervalo cuya anchura $1/(N+1)$ tiende a cero. La propiedad de ser distintos conserva información cualitativa, mientras Cauchy exige un control cuantitativo que permita cualquier precisión. Distinguirse no impide acercarse arbitrariamente.

Ejercicio 23. Bloques separados

Prueba que $h_n = \sum_{j=1}^{n+1} 1/j$ no es de Cauchy aunque $h_{n+1} - h_n \to 0$.

Solución. El salto es $1/(n+2)$ y tiende a cero. Para $m \geq 1$, la diferencia $h_{2m-1} - h_{m-1}$ contiene m sumandos, cada uno al menos $1/(2m)$, y por tanto es al menos $1/2$. Dado N, tomar $m = N+1$ deja ambos índices posteriores. La tolerancia fija $1/2$ niega Cauchy. Todas las sumas usadas son finitas. Después de la prueba, puede retomarse la figura 10.5 para contrastar el mecanismo con el ejemplo del capítulo.

El salto vecino se calcula cancelando el prefijo común de las dos sumas parciales, lo que deja $1/(n+2)$. Para pares lejanos, la cancelación deja un bloque entero y cada aporte pequeño se suma a los demás. El bloque de longitud m entre los extremos indicados tiene denominadores no mayores que $2m$ y suma al menos $m/(2m)$. Este contraste demuestra que controlar un aporte nuevo no controla la separación entre dos acumulados arbitrariamente tardíos.

Ejercicio 24. Vecindad de longitud fija

Prueba que para cada natural fijo r, $h_{n+r} - h_n \to 0$ en el ejemplo anterior. ¿Por qué sigue fallando Cauchy?

Solución. Si $r = 0$ la diferencia es cero. Si $r > 0$, contiene r sumandos con denominadores al menos $n+2$, luego $0 \leq h_{n+r} - h_n \leq r/(n+2) \to 0$. El corte suficiente puede depender de r. Cauchy exige un único corte para todas las separaciones posibles, y los bloques con longitud creciente mantienen distancia al menos $1/2$. Después de la prueba, puede retomarse la figura 10.5 para contrastar el mecanismo con el ejemplo del capítulo.

Para $r > 0$ y $\varepsilon > 0$, un corte con $N + 2 > r/\varepsilon$ garantiza $h_{n+r} - h_n \leq r/(n+2) < \varepsilon$ para $n \geq N$. Ese corte es válido después de fijar r. La condición de Cauchy invierte esa dependencia: el corte debe servir antes de escoger la distancia entre los índices. Los bloques armónicos con separación creciente muestran que esa exigencia adicional no se deduce de los límites para cada r fijo.

Ejercicio 25. Acotada con saltos pequeños

Construye una sucesión acotada con saltos que tienden a cero y que no sea de Cauchy. Sugerencia: concatena para $m = 1, 2, \ldots$ los bloques $0, 1/m, \ldots, 1, (m-1)/m, \ldots, 0$.

Solución. Concatenar los bloques de la sugerencia y reindexar desde cero. Todos los valores están en $[0, 1]$. Dentro del bloque m, cada salto es $1/m$; entre bloques ambos valores de unión son cero y el salto es cero. Dada $\varepsilon > 0$, después de los finitos bloques con m pequeño todos los saltos son menores que ε. Pero cada bloque tardío contiene cero y uno; después de cualquier corte se puede elegir un bloque completo y dos índices con distancia uno. La tolerancia fija uno niega Cauchy. La acotación no repara el fallo de controlar sólo vecinos.

Cada bloque contiene $2m + 1$ valores, y sólo hay finitos índices en los bloques anteriores a cualquiera dado. Por eso, para hacer pequeños todos los saltos posteriores, basta descartar los primeros bloques hasta que $1/m < \varepsilon$; la unión entre bloques introduce un salto cero. Para negar Cauchy escogemos un bloque completo que empiece después del corte propuesto. Sus posiciones con valores cero y uno proporcionan dos testigos de distancia uno, aunque sus muchos saltos individuales sean pequeños.

10.6. Conservar el control al operar

El criterio de Cauchy nos permite saber que una sucesión real converge sin calcular su límite. Sería una ventaja limitada si, en cuanto sumáramos o multiplicáramos dos de esas sucesiones, tuviéramos que abandonar el criterio y descubrir primero sus destinos. Podemos trabajar directamente con las distancias y averiguar qué propiedades se conservan bajo las operaciones conocidas. Las demostraciones también mostrarán por qué algunas operaciones necesitan hipótesis adicionales.

Sean a y b dos sucesiones de Cauchy. Si consideramos su suma, la distancia entre los términos de índices p y q se escribe como la diferencia de dos sumas. Agrupar los incrementos correspondientes permite estimarla mediante la desigualdad triangular: $|(a_p+b_p)-(a_q+b_q)| \leq |a_p - a_q| + |b_p - b_q|$. Para que esa suma sea menor que ε, podemos exigir que cada diferencia sea menor que $\varepsilon/2$. La condición de Cauchy da un corte N_a para la primera sucesión y otro N_b para la segunda; no tenemos por qué esperar que coincidan. Tomamos $N = \max\{N_a, N_b\}$ y ambas estimaciones valen después de ese único corte. Por tanto, $a + b$ es de Cauchy. La resta se trata del mismo modo, pues cambiar el signo de un incremento no altera su valor absoluto. Si multiplicamos por un escalar $c \neq 0$, pedimos a la sucesión original la tolerancia $\varepsilon/|c|$; para $c = 0$ obtenemos una sucesión constante y no hay división alguna que realizar.

El producto exige una maniobra que vale la pena comprender. No disponemos de una desigualdad que compare directamente $a_p b_p$ y $a_q b_q$ en términos solo de $|a_p - a_q|$ y $|b_p - b_q|$, porque los valores de cada factor también influyen en el producto. Para separar las dos variaciones podemos imaginar que cambiamos **un factor a la vez**: pasamos de $a_p b_p$ a $a_p b_q$, y después a $a_q b_q$. Algebraicamente, introducimos y retiramos el producto intermedio $a_p b_q$:

$a_p b_p - a_q b_q = a_p(b_p - b_q) + b_q(a_p - a_q)$. Ya reconocemos dos diferencias pequeñas, pero están acompañadas por a_p y b_q. Ésta es la razón de haber demostrado antes que toda sucesión de Cauchy es acotada. Podemos elegir $A, B \geq 0$ tales que $|a_n| \leq A$ y $|b_n| \leq B$ para todos los índices; entonces $|a_p b_p - a_q b_q| \leq A|b_p - b_q| + B|a_p - a_q|$. Para convertir la desigualdad en una prueba completa, fijemos $\varepsilon > 0$. Escojamos un corte de b para la tolerancia $\varepsilon/[2(A + 1)]$ y otro de a para $\varepsilon/[2(B + 1)]$. Después del máximo de ambos cortes tendremos

$|a_p b_p - a_q b_q| \leq \frac{\varepsilon}{2}\frac{A}{A+1} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{B}{B+1} < \varepsilon$. Añadimos 1 a los denominadores porque A o B podrían ser cero, y necesitamos tolerancias bien definidas en todos los casos. Si $A = B = 0$, ambas sucesiones son nulas y la primera comparación de la cadena es una igualdad; la desigualdad final sigue siendo estricta porque $\varepsilon > 0$. El argumento muestra algo general: las diferencias pequeñas pueden transportarse a un producto cuando los valores que las multiplican están uniformemente acotados. El producto de dos sucesiones reales de Cauchy es, por tanto, de Cauchy, sin que hayamos tenido que calcular ninguno de sus límites.

En los recíprocos aparece otro fenómeno. La identidad algebraica $\left|\frac{1}{a_p} - \frac{1}{a_q}\right| = \frac{|a_p - a_q|}{|a_p a_q|}$ sugiere que una diferencia pequeña en el numerador debería producir una diferencia pequeña entre recíprocos. Pero eso solo es seguro si el denominador no se acerca demasiado a cero.

Supongamos que existe N_0 y una constante $c > 0$ tales que $|a_n| \geq c$ para todo $n \geq N_0$. Entonces los recíprocos están definidos en esa cola y $\left|\frac{1}{a_p} - \frac{1}{a_q}\right| \leq \frac{|a_p - a_q|}{c^2}$ $(p, q \geq N_0)$. Pedimos ahora a a un corte de Cauchy para la tolerancia $c^2\varepsilon$ y lo combinamos con N_0. El mismo control demuestra que los recíprocos de la cola son de Cauchy. Si algún término anterior fuese cero, no podríamos definir $1/a_n$ para *todos* los índices; podemos trabajar con la cola reindexada, o prolongarla asignando valores reales arbitrarios al prefijo.

La condición $|a_n| \geq c > 0$ es más fuerte que pedir únicamente $a_n \neq 0$. Los recíprocos $a_n = 1/(n+1)$, por ejemplo, son positivos y forman una sucesión de Cauchy, pero sus inversos $1/a_n = n+1$ no son de Cauchy: después de cualquier corte, dos vecinos siguen separados por una unidad. La inversión amplifica las distancias cerca del cero, y por eso la hipótesis sobre el denominador no es una precaución de notación, sino una condición matemática necesaria.

Otras operaciones se controlan con menos esfuerzo. La desigualdad triangular inversa, $\big||a_p| - |a_q|\big| \leq |a_p - a_q|$, permite usar el mismo corte de Cauchy para la sucesión de magnitudes. La implicación inversa no es cierta: los valores absolutos de $(-1)^n$ son constantemente uno, aunque la sucesión original oscile entre dos valores separados. Por otra parte, si a es de Cauchy y una perturbación $e_n = b_n - a_n$ converge a cero, entonces e es de Cauchy por §10.2 y $b = a + e$ también lo es. El criterio real de §10.4 garantiza límites para ambas, y el álgebra de límites demuestra que coinciden.

Sumar una constante c conserva exactamente las distancias, pues $|(a_p + c) - (a_q + c)| = |a_p - a_q|$. Para suprimir y reindexar un prefijo de longitud $r \in \mathbb{N}$, ponemos $b_k = a_{k+r}$. Un corte N de Cauchy para a sirve también como corte suficiente para b, ya que $p, q \geq N$ implican $p + r, q + r \geq N$. En la dirección inversa, si K controla b, los índices originales $n, m \geq K + r$ se escriben como $n = p + r, m = q + r$ con $p, q \geq K$. Por tanto, descartar ese prefijo conserva la condición en ambas direcciones.

Cambiar finitos términos tampoco altera Cauchy. Podemos escoger el corte después del último índice modificado y todas las comparaciones posteriores serán iguales a las anteriores. Cuando trabajamos con aproximaciones numéricas, este hecho permite separar las decisiones provisionales de los primeros pasos de aquello que verdaderamente determina el comportamiento de la sucesión a largo plazo.

Ejercicios de la sección 10.6.

Ejercicio 26. Álgebra por distancias

Prueba directamente que suma, diferencia y escala real de sucesiones de Cauchy son de Cauchy, tratando el escalar cero.

Solución. Para suma y diferencia, triangular acota su diferencia de términos por la suma de las diferencias de cada factor; tomar máximo de cortes con tolerancia $\varepsilon/2$. Para escalar no cero, usar la tolerancia $\varepsilon/|c|$, ya que la nueva distancia es $|c|$ veces la original. Si $c = 0$, la sucesión es constante y sirve corte cero. Para la diferencia se escribe $(a_p - b_p) - (a_q - b_q) = (a_p - a_q) - (b_p - b_q)$ y se aplica la misma triangular que para la suma. El máximo de los dos cortes asegura que los dos controles estén disponibles simultáneamente. Para escala $c \neq 0$, la identidad $|ca_p - ca_q| = |c||a_p - a_q|$ indica exactamente la precisión que hay que pedir. Todos estos argumentos actúan directamente sobre pares y no necesitan conocer los límites de las sucesiones.

Ejercicio 27. Producto sin conocer destinos

Prueba que el producto de dos sucesiones reales de Cauchy es de Cauchy usando sus cotas globales.

Solución. Por acotación, fijar $A, B \geq 0$ con magnitudes de a, b a lo sumo esos números. La identidad $a_p b_p - a_q b_q = a_p(b_p - b_q) + b_q(a_p - a_q)$ da cota $A|b_p - b_q| + B|a_p - a_q|$. Escoger cortes con tolerancias $\varepsilon/[2(A+1)]$ para b y $\varepsilon/[2(B+1)]$ para a. Después del máximo la cota

es a lo sumo la suma de dos cantidades menores que $\varepsilon/2$, con casos de cota cero igualmente controlados. No se requiere signo positivo de términos.

Añadir y restar $a_p b_q$ separa la diferencia del producto en una diferencia de b multiplicada por a_p y una diferencia de a multiplicada por b_q. Las cotas globales controlan esos multiplicadores. Los denominadores $A+1$ y $B+1$ son positivos incluso cuando una cota es cero. El máximo de los cortes garantiza las dos estimaciones y deja un margen respecto de ε. Esta prueba explica por qué diferencias pequeñas necesitan multiplicadores acotados.

Ejercicio 28. Recíprocos y prefijo

Sea a de Cauchy y $|a_n| \geq c > 0$ para $n \geq N_0$. Prueba que la sucesión $b_k = 1/a_{k+N_0}$ es de Cauchy. ¿Qué ocurre con términos cero anteriores?

Solución. Los recíprocos de esta cola están definidos. Para un corte original H que controle a con tolerancia $c^2\varepsilon$, tomar un corte nuevo $K = \max\{H, N_0\}$. Si $p, q \geq K$, sus índices originales $p + N_0, q + N_0$ superan ambos cortes y la distancia de recíprocos es a lo sumo la distancia de términos dividida por c^2, menor que ε. Los ceros previos no afectan a esta cola reindexada, pero impedirían definir recíprocos en todos los índices de a.

Para dos índices reindexados tardíos, la identidad es $|b_p - b_q| = \frac{|a_{p+N_0} - a_{q+N_0}|}{|a_{p+N_0} a_{q+N_0}|} \leq \frac{|a_{p+N_0} - a_{q+N_0}|}{c^2}$. El corte elegido asegura el control del numerador y que se aplique la cota inferior positiva del denominador. La reindexación comienza precisamente donde los recíprocos están definidos; no asignamos un valor artificial a los recíprocos de ceros anteriores.

Ejercicio 29. Diferencia de Cauchy no es error nulo

Si a, b son de Cauchy y $a - b$ también lo es, ¿deben tener el mismo límite? ¿Qué condición basta?

Solución. No. Las constantes $a_n = 0$ y $b_n = 1$ son de Cauchy y su diferencia constante menos uno también, con destinos distintos. Basta que $a_n - b_n \to 0$: ambos tienen límites reales por el criterio y la regla de resta de C06 da diferencia de límites cero. Ser de Cauchy para la diferencia sólo asegura que ésta tiene algún límite, no que sea cero. La hipótesis de que $a-b$ sea de Cauchy no añade aquí una restricción: ya se sigue del cierre por diferencias de dos sucesiones de Cauchy. Si sus límites son A y B, la diferencia converge a $A-B$, que puede ser cualquier real. Para forzar $A = B$ hace falta que esa diferencia tienda específicamente a cero. Las constantes del contraejemplo permiten verificar todos estos hechos sin cálculos de cortes complicados.

Ejercicio 30. Valor absoluto no tiene recíproca

Prueba que a de Cauchy implica $|a|$ de Cauchy y muestra que la vuelta falla.

Solución. La triangular inversa $\big||a_p| - |a_q|\big| \leq |a_p - a_q|$ permite usar el mismo corte. Para la vuelta, $a_n = (-1)^n$ no es de Cauchy, mientras $|a_n| = 1$ es constante. La operación olvida el signo y puede borrar separaciones. La operación valor absoluto es capaz de juntar dos valores opuestos: uno y menos uno tienen la misma magnitud. La triangular inversa demuestra que nunca aumenta la separación, por lo que transporta un control de Cauchy en la dirección indicada. Pero juntar valores destruye información y puede convertir una sucesión oscilante en una constante. El contraejemplo comprueba que no podemos reconstruir el control de los signos a partir del control de las magnitudes.

10.7. La distancia permanece; el codominio cambia

En el criterio de Cauchy demostramos que las colas cuya separación interna se hace arbitrariamente pequeña terminan acercándose a un número **real**. ¿Por qué era necesario nombrar ese conjunto en el enunciado? Los cálculos de distancias también tienen sentido entre números racionales, y nada cambia en el valor de $|p - q|$ cuando consideramos esos

mismos racionales dentro de $\mathbb{R}$. Lo que puede cambiar es la existencia de un número del propio conjunto al que lleguen las aproximaciones.

Podemos expresar esto con la inclusión usual $\iota : \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$. Una sucesión $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ tiene exactamente las mismas distancias entre términos que la sucesión real $\iota \circ q$. Los cortes que prueban Cauchy para una prueban Cauchy para la otra. Pero si decimos que la sucesión converge **en** $\mathbb{Q}$, estamos exigiendo que su destino sea racional; si decimos que converge **en** $\mathbb{R}$, permitimos un destino real. La condición sobre las distancias no menciona dónde debe encontrarse ese destino, de modo que la diferencia entre ambos conjuntos solo puede manifestarse cuando intentemos construirlo.

Construyamos una sucesión racional que ponga en evidencia el problema. Queremos aproximar un número positivo cuyo cuadrado sea dos, aunque todavía no vamos a suponer que tal número existe. Sabemos, por simple aritmética, que $1^2 < 2 < 2^2$. Podemos conservar dos números racionales que acoten la solución esperada y reducir sucesivamente el intervalo entre ellos, sin tener que escribir la raíz que buscamos. Antes conviene resolver una cuestión: **ningún número racional tiene cuadrado dos**. Si s/t fuese tal número y la fracción estuviese reducida, con $s, t \in \mathbb{Z}$ y $t > 0$, tendríamos $s^2 = 2t^2$. El cuadrado de un impar es impar; por tanto $s = 2v$ para algún entero v. Al sustituir, $4v^2 = 2t^2$, de donde $t^2 = 2v^2$ y t también es par. Esto contradice que el numerador y el denominador no tengan factores comunes. Esa demostración no construye ninguna raíz real: únicamente afirma que, si la raíz existe, no será racional.

Empecemos con $l_0 = 1$ y $u_0 = 2$. Calculamos el punto medio $t_0 = 3/2$ y su cuadrado $9/4$. Como $9/4 > 2$, el punto medio queda del lado superior y podemos sustituir el extremo 2 por $3/2$, conservando el intervalo $[1, 3/2]$. El nuevo punto medio es $5/4$, cuyo cuadrado $25/16$ es menor que dos; ahora sustituimos el extremo inferior y obtenemos $[5/4, 3/2]$. Un paso más nos lleva al punto medio $11/8$, con cuadrado $121/64 < 2$, y al intervalo $[11/8, 3/2]$. Cada decisión es un cálculo exacto con racionales, realizado sin conocer la respuesta final.

Formalmente, dados $l_n, u_n \in \mathbb{Q}$ con $l_n^2 < 2 < u_n^2$, ponemos $t_n = (l_n + u_n)/2$. Si $t_n^2 < 2$, definimos $l_{n+1} = t_n$ y $u_{n+1} = u_n$; si $t_n^2 > 2$, conservamos l_n y ponemos $u_{n+1} = t_n$. El caso de igualdad no ocurre por la irracionalidad que acabamos de demostrar. La inducción verifica tanto el encajamiento como las desigualdades

$$1 \le l_n < u_n \le 2, \qquad l_n^2 < 2 < u_n^2, \qquad u_n - l_n = 2^{-n}.$$

El detalle que nos interesa ahora es que la anchura se reduce a la mitad *independientemente de cuál de los extremos hayamos sustituido*. Si $p, q \ge N$, tanto l_p como l_q están en el intervalo cerrado $[l_N, u_N]$ y, por eso, $|l_p - l_q| \le u_N - l_N = 2^{-N}$. La cota depende solo del inicio de la cola, nunca de la separación entre los índices. Además 2^{-N} tiende a cero: la inducción da $2^N \ge N + 1$, de manera que $2^{-N} \le 1/(N+1)$, y los recíprocos tienden a cero. Así hemos probado que (l_n) es de Cauchy utilizando exclusivamente las reglas de la bisección. El mismo razonamiento sirve para (u_n).

El criterio demostrado en §10.4 nos permite tratar (l_n) como sucesión *real* y obtener un límite $L \in \mathbb{R}$. Puesto que $u_n - l_n = 2^{-n} \to 0$, las reglas de límites del capítulo 6 garantizan que también $u_n \to L$. Los dos extremos se acercan, pues, al mismo punto, y las desigualdades que preservamos durante toda la construcción nos dicen algo sobre él. Al pasar al límite en $l_n^2 < 2 < u_n^2$, las desigualdades estrictas pueden hacerse no estrictas. Por continuidad de los productos de sucesiones convergentes, obtenemos $L^2 \le 2$ y $2 \le L^2$; por consiguiente, $L^2 = 2$. Como $L \in [1, 2]$, es positivo. También es el único real positivo con ese cuadrado: si $x, y > 0$ y $x^2 = y^2$, entonces $(x - y)(x + y) = 0$, y $x + y > 0$ fuerza $x = y$. Hemos **construido** el número positivo que llamamos $\sqrt{2}$ partiendo de intervalos racionales, y ahora sabemos por qué la construcción lo determina de manera única.

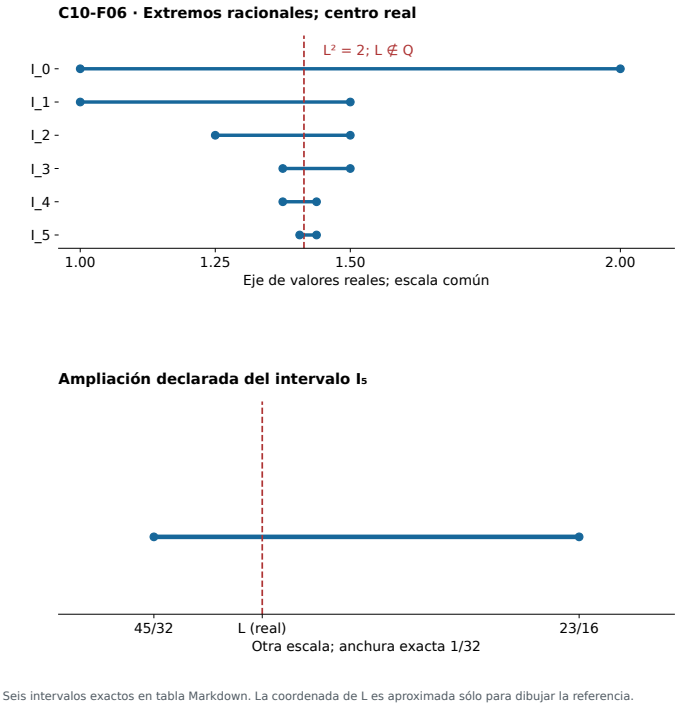


Figura 10.6. Los extremos racionales de la bisección conservan el cuadrado dos entre sus cuadrados y reducen la anchura. El centro común existe en la recta real; ningún punto racional puede ocuparlo.

n	Extremo inferior racional	Extremo superior racional	Anchura
0	1	2	1
1	1	3/2	1/2
2	5/4	3/2	1/4
3	11/8	3/2	1/8
4	11/8	23/16	1/16
5	45/32	23/16	1/32

Supongamos ahora que esta misma sucesión racional tuviera un límite r **en** $\mathbb{Q}$. Al considerar sus términos dentro de $\mathbb{R}$, las distancias no cambian, así que también convergería a r como sucesión real. Pero ya hemos probado que converge a L, y la unicidad del límite real obligaría $r = L$. Eso es imposible porque $L^2 = 2$ y acabamos de demostrar que ningún racional tiene ese cuadrado. Hemos encontrado, por tanto, una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$ que no converge en $\mathbb{Q}$.

El fracaso no está en las aproximaciones: los intervalos se estrechan correctamente, y las distancias satisfacen la definición de Cauchy con cortes explícitos. Tampoco está en haber elegido un algoritmo inadecuado: hemos podido demostrar que existe un destino real y determinar una propiedad exacta de él. El problema es que **ese destino falta en el conjunto racional**. Diremos que un subconjunto de $\mathbb{R}$, con su distancia usual, es *secuencialmente completo* cuando toda sucesión de Cauchy con valores en ese conjunto converge a un elemento del mismo conjunto. El criterio demuestra que $\mathbb{R}$ posee esta propiedad; nuestro ejemplo demuestra que $\mathbb{Q}$ no. La pertenencia del límite también importa en conjuntos más sencillos: $1/(n+1)$ toma sus valores en $(0, 1]$ y es de Cauchy, pero converge en $\mathbb{R}$ a cero. La unicidad del límite impide que tenga otro destino dentro de $(0, 1]$, de modo que ese conjunto tampoco es secuencialmente completo.

Raíces generales: reunir una herramienta ya demostrada. El ejercicio 30 de C07 y su solución construyeron la raíz de cualquier parámetro positivo. Recuperemos aquí el argumento para que la herramienta quede disponible en el manuscrito, sin depender de que el lector haya resuelto ese ejercicio. Sea $\rho > 0$, tomemos $x_0 = \rho + 1$ y definamos $x_{n+1} = (x_n + \rho/x_n)/2$. La positividad y las identidades finitas $x_{n+1}^2 - \rho = \frac{(x_n^2-\rho)^2}{4x_n^2}$, $\qquad x_n - x_{n+1} = \frac{x_n^2-\rho}{2x_n}$ conservan $x_n^2 > \rho$ y hacen decrecer estrictamente la sucesión, porque $x_0^2 - \rho = \rho^2 + \rho + 1 > 0$. Con $m = \min\{1, \rho\} > 0$, se tiene $m^2 \le \rho$; por ello $x_n \le m$ contradiría $x_n^2 > \rho$. C07 da un límite $L \ge m > 0$. Las reglas de C06 permiten pasar al límite en la recurrencia, incluido el cociente, y dan $L = (L + \rho/L)/2$, luego $L^2 = \rho$.

Si $u, v > 0$ tienen ese cuadrado, $(u - v)(u + v) = 0$ y $u + v > 0$ fuerzan $u = v$. Para $\rho = 0$, la única raíz no negativa es cero. Así queda definida para todo $\rho \ge 0$ una única raíz no negativa $\sqrt{\rho}$. Su orden también está acreditado: si $0 \le \rho \le \sigma$ pero $\sqrt{\rho} > \sqrt{\sigma}$, la comparación de cuadrados no negativos daría $\rho > \sigma$, contradicción. Este resultado sólo usa monotonía, completitud y álgebra de límites anteriores; no continuidad de funciones, valor intermedio ni derivadas. La continuidad de la función raíz se probará después en su lugar correspondiente.

El ejercicio complementario resuelto 10.41 retoma esta construcción con el parámetro λ y desarrolla los casos necesarios para justificar la cota inferior positiva.

Ejercicios de la sección 10.7.

Ejercicio 31. Tres pasos racionales

Calcula los intervalos de bisección de §10.7 para $n = 0, 1, 2, 3$ y comprueba los cuadrados de sus extremos.

Solución. Los intervalos son $[1, 2]$, $[1, 3/2]$, $[5/4, 3/2]$, $[11/8, 3/2]$. Los puntos medios $3/2$, $5/4$, $11/8$ tienen cuadrados $9/4 > 2$, $25/16 < 2$, $121/64 < 2$, respectivamente. Así se elige cada mitad correcta, las anchuras son uno, medio, cuarto y octavo, y los extremos siguen encerrando el valor dos entre sus cuadrados. Después de la prueba, puede retomarse la figura 10.6 para contrastar el mecanismo con el ejemplo del capítulo.

Los extremos inferiores tienen cuadrados 1, 1, $25/16$ y $121/64$, todos menores que dos; los superiores tienen cuadrados 4, $9/4$, $9/4$ y $9/4$, todos mayores que dos. En cada paso el punto medio es racional y su cuadrado determina cuál extremo sustituir. Las longitudes se reducen a la mitad sin usar todavía la existencia de una raíz. La bisección construye primero datos racionales verificables y deja para después la cuestión de su destino.

Ejercicio 32. Cauchy racional sin raíz presupuesta

Demuestra que los extremos inferiores de esa bisección son de Cauchy antes de construir su límite real.

Solución. Los intervalos están encajados y tienen anchura 2^{-N}. Para $p, q \ge N$, los extremos inferiores posteriores pertenecen a $[l_N, u_N]$, luego su distancia es a lo sumo 2^{-N}. Escoger por arquimedianidad N con $2^{-N} < \varepsilon$ garantiza todos los pares. La existencia de una raíz real aún no se ha usado: sólo extremos racionales y anchuras conocidas. Después de la prueba, puede retomarse la figura 10.6 para contrastar el mecanismo con el ejemplo del capítulo.

La pertenencia de ambos extremos inferiores tardíos al mismo intervalo se sigue del encajamiento, no de conocer su valor límite. Como la anchura inicial es uno y cada paso la divide por dos, la longitud del intervalo de corte N es 2^{-N}. Ésta domina la distancia entre cualquier par posterior. Que $2^{-N} \to 0$ permite escoger el corte para cada tolerancia; así la prueba de Cauchy precede a la construcción de una raíz real.

Ejercicio 33. El destino no es racional

Prueba que el límite real de los extremos inferiores tiene cuadrado dos y no puede ser límite en $\mathbb{Q}$.

Solución. El criterio real proporciona $l_n \to L$, y $u_n - l_n = 2^{-n} \to 0$ da $u_n \to L$. Por regla de producto y orden, $l_n^2 < 2 < u_n^2$ implica $L^2 \leq 2 \leq L^2$. Si un racional reducido s/t tuviera cuadrado dos, $s^2 = 2t^2$ obligaría a que s y luego t fueran pares, contradicción. Un límite racional de l también sería un límite real y por unicidad igual a L, imposible.

Después de la prueba, puede retomarse la figura 10.6 para contrastar el mecanismo con el ejemplo del capítulo. Las dos sucesiones de extremos tienen el mismo límite porque su diferencia es una anchura que tiende a cero. Las desigualdades estrictas de sus cuadrados pasan al límite como desigualdades no estrictas, y juntas fuerzan $L^2 = 2$. La prueba de irracionalidad descarta un límite dentro de $\mathbb{Q}$. Si alguien propusiera un límite racional distinto, su inclusión en los reales conservaría las distancias y la unicidad lo identificaría con L, produciendo la misma contradicción.

Ejercicio 34. Un intervalo retiene el destino

Prueba que toda sucesión de Cauchy con valores en $[A, B]$, con $A \leq B$ reales, converge a un punto de ese mismo intervalo. Contrasta con $(0, 1)$.

Solución. El criterio real proporciona un límite L. Las cotas $A \leq a_n \leq B$ pasan al límite por C06, luego $A \leq L \leq B$. En $(0, 1)$, la sucesión $1/(n + 2)$ es de Cauchy y converge en $\mathbb{R}$ a cero, fuera del conjunto; unicidad impide otro destino interior. La pertenencia del límite al codominio no se sigue sólo de proximidad. El intervalo cerrado retiene el destino porque las dos desigualdades que lo definen se conservan al pasar al límite. Para el intervalo abierto, las desigualdades estrictas pueden convertirse en igualdad: $0 < 1/(n+2) < 1$ en cada índice, pero el límite es cero. Este ejemplo muestra concretamente dónde se pierde pertenencia. Para $A = B$, toda la sucesión es igual a ese valor y la conclusión para el intervalo cerrado sigue siendo válida.

Ejercicio 35. Conjunto finito

Demuestra que una sucesión con valores en un conjunto real finito no vacío es de Cauchy si y sólo si es eventualmente constante.

Solución. Si el conjunto tiene un único valor, la afirmación es inmediata. Si tiene varios, sea $\delta > 0$ la mínima distancia entre dos valores distintos, existente por finitud. Cauchy con tolerancia δ fuerza que todos los términos posteriores sean iguales entre sí, pues distintos darían distancia al menos δ. Así la cola es constante. Recíprocamente, una cola constante tiene todas sus distancias cero y prueba Cauchy.

Si el conjunto tiene al menos dos elementos, la lista de distancias entre elementos distintos es finita, no vacía y contiene sólo números positivos. Su mínimo δ es por tanto positivo. Un corte de Cauchy con tolerancia δ prohíbe cualquier pareja de valores distintos en la cola. Fijando el término del corte, todos los posteriores deben coincidir con él. En la recíproca, el corte donde empieza la constancia funciona para todas las tolerancias positivas.

10.8. Estimar el error antes de conocer la respuesta

El criterio de Cauchy responde una pregunta de existencia, pero en un cálculo efectivo necesitamos algo más. Saber que los términos se acercan a un límite no nos dice por sí solo cuántos pasos debemos dar para garantizar, por ejemplo, un error menor que una milésima. Como el límite puede ser desconocido, sería especialmente útil obtener esa garantía a partir de cantidades que sí sabemos medir: las diferencias entre términos sucesivos.

El ejemplo de las sumas finitas de recíprocos nos advirtió de un peligro. Que cada salto sea pequeño no garantiza que la suma de muchos saltos sea pequeña. Para controlar el recorrido entre dos índices cualesquiera necesitamos una estimación sobre **todo el bloque de incrementos**. Una manera de lograrlo es que los saltos decrezcan con una razón geométrica común, de modo que los aportes posteriores sean cada vez menores de una forma suficientemente fuerte como para controlar su acumulación.

Supongamos que existen constantes $C \geq 0$ y $0 < \rho < 1$ tales que $|a_{n+1} - a_n| \leq C\rho^n \qquad (n \geq 0)$. Tomemos dos índices $p > q$. La diferencia $a_p - a_q$ se puede descomponer

exactamente como una suma *finita* de los saltos desde q hasta $p-1$; los términos intermedios se cancelan. La desigualdad triangular permite sumar las cotas conocidas de cada salto y obtenemos

$$\begin{aligned} |a_p - a_q| &\le \sum_{j=q}^{p-1} |a_{j+1} - a_j| \\ &\le C \sum_{j=q}^{p-1} \rho^j = \frac{C\rho^q(1-\rho^{p-q})}{1-\rho} \le \frac{C\rho^q}{1-\rho}. \end{aligned}$$

La igualdad geométrica se comprueba sin series infinitas: multiplicamos la suma finita por $1-\rho$ y se cancelan todos los términos interiores, quedando $\rho^q - \rho^p$. El beneficio de la cota final es que **ya no contiene** p. Podemos comparar con a_q un término que esté cien posiciones más adelante o uno que esté un millón de posiciones más adelante, y ambos quedarán sujetos al mismo presupuesto de distancia $C\rho^q/(1-\rho)$.

Debemos justificar que ese presupuesto termina siendo pequeño. Como $0 < \rho < 1$, escribamos $\rho^{-1} = 1 + t$ para algún $t > 0$. La desigualdad elemental $(1+t)^N \ge 1 + Nt$, que se prueba por inducción, proporciona $0 < \rho^N \le \frac{1}{1+Nt} \longrightarrow 0$. Si $C = 0$, todos los saltos son cero y la sucesión es constante. Cuando $C > 0$, dada una tolerancia $\varepsilon > 0$ podemos escoger un corte N tal que $C\rho^N/(1-\rho) < \varepsilon$. Para $p > q \ge N$, la estimación anterior da $|a_p - a_q| < \varepsilon$. Los casos $p < q$ y $p = q$ se resuelven respectivamente por simetría y por distancia cero. Hemos demostrado Cauchy y, gracias a la completitud de $\mathbb{R}$, la existencia de algún límite L.

La misma desigualdad contiene una información que no habíamos pedido todavía. Fijemos q y permitamos que p crezca. El miembro derecho no depende de p, mientras que $a_p \to L$. El paso al límite, justificado por el álgebra de límites y la continuidad del valor absoluto ya estudiadas, conserva la cota no estricta:

$$\boxed{|L - a_q| \le \frac{C\rho^q}{1-\rho}}$$

Antes de demostrar la existencia de L solo podíamos hablar de la distancia entre dos aproximaciones; después de demostrarla, esa misma cota nos dice a qué distancia máxima puede quedar una aproximación del destino, aunque no sepamos calcular el destino. El procedimiento tiene dos fases lógicas diferentes: primero certifica convergencia y luego transforma una estimación entre términos en una **estimación del error**. No afirmamos que esta cota sea siempre el error exacto; es una garantía suficiente que podemos evaluar con los datos C, ρ y q.

Veamos cómo aparece este mecanismo en un algoritmo iterativo. Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que satisface, para alguna constante $0 < \rho < 1$, $|F(x) - F(y)| \le \rho|x - y| \qquad (x, y \in \mathbb{R})$. La desigualdad dice que, al aplicar F a dos puntos, la nueva distancia no supera la fracción ρ de la anterior. Partimos de un x_0 cualquiera y definimos $x_{n+1} = F(x_n)$. Como F está definida en toda la recta, ningún paso queda fuera de su dominio. Llamemos $D = |x_1 - x_0|$ al tamaño del primer salto. Al aplicar la condición a los pares (x_{n+1}, x_n) obtenemos

$|x_{n+2} - x_{n+1}| = |F(x_{n+1}) - F(x_n)| \le \rho|x_{n+1} - x_n|$. La inducción comienza con $|x_1 - x_0| = D$ y proporciona $|x_{n+1} - x_n| \le D\rho^n$ para todo n. No hemos supuesto que exista un punto fijo ni que conozcamos la forma de los iterados. La estimación de saltos prueba ahora que x_n converge a algún $L \in \mathbb{R}$ y que

$|L - x_n| \le \frac{D\rho^n}{1-\rho}$. Una cuestión permanece abierta: que los iterados converjan no significa automáticamente que el destino satisfaga $F(L) = L$. Tenemos que verificar esa ecuación. Aquí sabemos que L pertenece al dominio de F, porque el dominio es toda $\mathbb{R}$; podemos, por tanto, comparar $F(L)$ con $F(x_n)$ y aprovechar que $F(x_n) = x_{n+1}$. La desigualdad triangular da

$$|F(L) - L| \le |F(L) - F(x_n)| + |x_{n+1} - L|$$
$$\le \rho|L - x_n| + |x_{n+1} - L|.$$

Los dos términos de la derecha tienden a cero. La distancia $|F(L) - L|$, en cambio, es un número fijo no negativo, independiente de n, que queda por debajo de cantidades arbitrariamente pequeñas; solo puede ser cero. Así $F(L) = L$. Tampoco puede existir otro punto fijo M: la condición contractiva daría $|L - M| = |F(L) - F(M)| \le \rho|L - M|$, lo que, al ser $1 - \rho > 0$, obliga a $L = M$. Hemos demostrado existencia, unicidad y error de aproximación de un punto fijo directamente a partir de una desigualdad de distancias, sin invocar un teorema general de espacios métricos.

El ejemplo $F(x) = (x+3)/2$ permite ver simultáneamente lo que garantiza el método y lo que puede aportar una fórmula especial. Se cumple $|F(x) - F(y)| = |x - y|/2$, de modo que $\rho = 1/2$. Si empezamos en $x_0 = 0$, el primer paso es $x_1 = 3/2$ y $D = 3/2$. La teoría demuestra que los iterados convergen a un punto fijo único y que su error satisface $|L - x_n| \le 3\,2^{-n}$. Después podemos identificar el destino resolviendo $L = (L+3)/2$, que da $L = 3$. En este caso incluso obtenemos por inducción $x_n = 3(1 - 2^{-n})$, y comprobamos que la cota de error es exacta. Para garantizar error menor que $1/4$ basta avanzar hasta $n = 4$, ya que $3/16 < 1/4$.

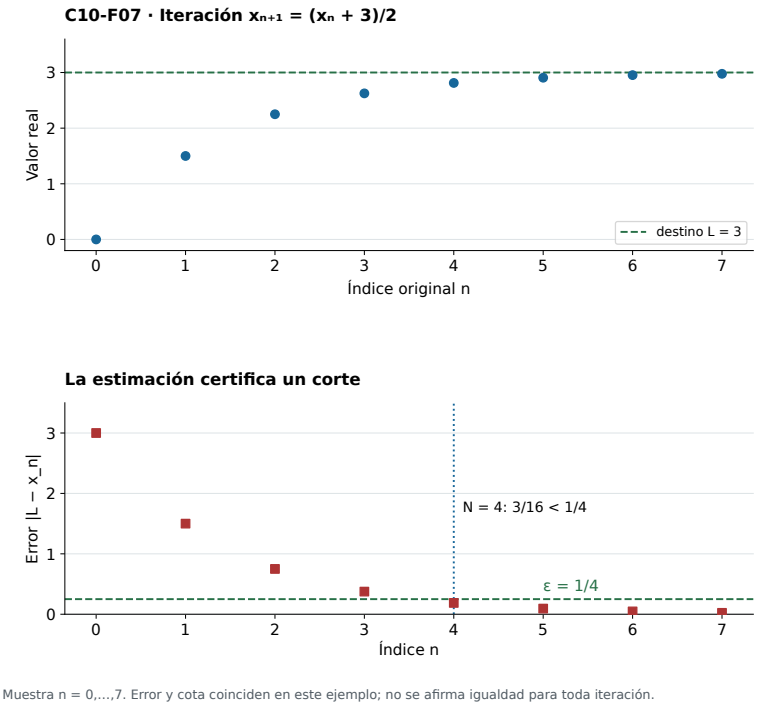


Figura 10.7. En esta iteración los saltos se reducen a la mitad y la cota de error $3\,2^{-n}$ coincide con el error exacto. Desde el índice cuatro el error es menor que un cuarto; el corte es suficiente y está justificado por la estimación.

En otros procedimientos tal vez no encontremos ninguna fórmula cómoda para los términos ni para el punto fijo. La desigualdad de los saltos seguirá siendo útil: hace posible afirmar que el límite existe y calcular cuántas iteraciones bastan para alcanzar una precisión prescrita. Allí se aprecia la utilidad práctica del criterio de Cauchy: la convergencia se establece desde las relaciones internas de la sucesión y la completitud asegura que las aproximaciones tienen un destino en la recta real.

Ejercicios de la sección 10.8.

Ejercicio 36. Saltos geométricos

Supón $|a_{n+1} - a_n| \le 5\,2^{-n}$. Prueba existencia de límite y da un corte que asegure error menor que ε.

Solución. La estimación de §10.8 con $C = 5, \rho = 1/2$ da $|a_p - a_q| \le 10\,2^{-q}$ para $p > q$. Escoger N con $10\,2^{-N} < \varepsilon$ garantiza Cauchy. Completitud real aporta L y el paso al límite en el primer índice da $|L - a_n| \le 10\,2^{-n}$. El mismo corte suficiente asegura error estricto al límite. Después de la prueba, puede retomarse la figura 10.7 para contrastar el mecanismo con el ejemplo del capítulo.

Para $p > q$, telescopamos la diferencia y sumamos las cotas de los saltos:

$$|a_p - a_q| \le 5 \sum_{j=q}^{p-1} 2^{-j} = 10\,2^{-q}(1 - 2^{-(p-q)}) \le 10\,2^{-q}.$$

Con $q \ge N$, la cota no supera $10\,2^{-N}$. Una vez obtenido el límite, dejamos $p \to \infty$ manteniendo $q = n$ fijo. Queda una cota de error que tiende a cero. El índice N debe hacerla estrictamente menor que la tolerancia, no sólo menor o igual.

Ejercicio 37. Sumar antes de tomar un límite

Prueba la identidad geométrica finita usada en §10.8 y explica por qué no presupone una serie convergente.

Solución. Para $p > q$, multiplicar $S = \rho^q + \cdots + \rho^{p-1}$ por $1 - \rho$ deja $S - \rho S = \rho^q - \rho^p$ tras cancelar términos. Como $1-\rho \neq 0$, $S = \rho^q(1-\rho^{p-q})/(1-\rho)$. Todas las operaciones son finitas; el control de pares y luego Cauchy construyen el límite de la sucesión, sin asignar valor a una suma infinita. Después de la prueba, puede retomarse la figura 10.7 para contrastar el mecanismo con el ejemplo del capítulo.

La cancelación se comprueba comparando los exponentes: la suma original empieza en q y termina en $p - 1$; la multiplicada por ρ empieza en $q + 1$ y termina en p. Sólo sobreviven el primer aporte de la original y el último de la multiplicada. Como $0 < \rho < 1$, la división por $1 - \rho$ está permitida. La fórmula proporciona una cota de cualquier bloque finito; la existencia de un límite es una conclusión posterior de ese control.

Ejercicio 38. Error exacto en una iteración

Para $x_0 = 0$ y $x_{n+1} = (x_n + 3)/2$, demuestra $x_n = 3(1 - 2^{-n})$ y compara su error con la cota general.

Solución. En cero la fórmula da cero. Si vale en n, entonces $(3(1 - 2^{-n}) + 3)/2 = 3(1 - 2^{-(n+1)})$, lo que cierra inducción. Su límite es tres y el error exacto $3\,2^{-n}$. La contracción tiene $\rho = 1/2$ y $D = 3/2$, por lo que la cota general $D\rho^n/(1 - \rho)$ coincide aquí con el error exacto. No todas las iteraciones saturan esa cota.

Después de la prueba, puede retomarse la figura 10.7 para contrastar el mecanismo con el ejemplo del capítulo. La sustitución en la recurrencia muestra que el error respecto de tres se divide por dos en cada paso: $3 - x_{n+1} = (3 - x_n)/2$. Con error inicial tres obtenemos $3 - x_n = 3\,2^{-n}$ por inducción. El destino tres es además punto fijo porque $(3 + 3)/2 = 3$. La comparación con la cota general acredita en este caso igualdad, pero la prueba general sólo promete una cota superior y no impone que todas las estimaciones sean exactas.

Ejercicio 39. Iterar dentro de un intervalo

Sea $F : [A, B] \to [A, B]$ con $A \le B$ y $|F(x) - F(y)| \le \rho|x - y|$, $0 < \rho < 1$. Prueba que desde cualquier $x_0 \in [A, B]$ la iteración converge a un único punto fijo en ese intervalo.

Solución. La imagen en el mismo intervalo permite definir todos los iterados por recursión. Con $D = |x_1 - x_0|$, la inducción de §10.8 da saltos a lo sumo $D\rho^n$, por lo que es de Cauchy y converge en $\mathbb{R}$. Las cotas $A \le x_n \le B$ pasan al límite y retienen L en el dominio de F. La desigualdad $|F(L) - L| \le \rho|L - x_n| + |x_{n+1} - L|$ prueba que es fijo. Dos puntos fijos cumplen

distancia a lo sumo ρ veces sí misma, luego coinciden. Si $A = B$, la iteración es constante y la conclusión sigue.

Después de la prueba, puede retomarse la figura 10.7 para contrastar el mecanismo con el ejemplo del capítulo. Hay que verificar la pertenencia del límite antes de escribir $F(L)$, pues la función sólo está dada en $[A, B]$. Primero la invariancia mantiene todos los iterados en ese intervalo; luego Cauchy aporta un límite real; finalmente las cotas del intervalo pasan al límite. Ya con L en el dominio, la condición contractiva controla $F(L) - F(x_n)$ y la recurrencia sustituye $F(x_n)$ por x_{n+1}. La unicidad viene de $(1 - \rho)|L - M| \leq 0$ para dos puntos fijos.

Ejercicio 40. La misma contracción con codominio incompleto

En $X = \mathbb{Q} \cap [1, 2]$, define $F(x) = (x + 2/x)/2$. Prueba que $F : X \to X$ contrae distancias con factor $1/2$ pero no tiene punto fijo en X. Explica qué falla al trasladar el resultado anterior.

Solución. Es racional para todo racional no cero. Para $1 \leq x \leq 2$, $F(x) - 1 = (x^2 - 2x + 2)/(2x) = ((x - 1)^2 + 1)/(2x) > 0$ y $2 - F(x) = (4x - x^2 - 2)/(2x) \geq 1/(2x) > 0$, pues $4x - x^2 - 2 = 2 - (x - 2)^2 \geq 1$ en ese intervalo. Así $F(x) \in X$. Además $|F(x) - F(y)| = |x - y|\,|1 - 2/(xy)|/2$. Como $1 \leq xy \leq 4$, $1/2 \leq 2/(xy) \leq 2$ y el último factor absoluto es a lo sumo uno, dando contracción por $1/2$. Un punto fijo resolvería $x^2 = 2$, imposible en $\mathbb{Q}$. Los iterados son de Cauchy y convergen en $\mathbb{R}$; el centro real no tiene por qué pertenecer a X. Falta completitud del codominio, y por eso no se puede evaluar allí $F(L)$ como una función sobre X.

Después de la prueba, puede retomarse la figura 10.6 para contrastar el mecanismo con el ejemplo del capítulo. La identidad para las distancias se obtiene de $1/x - 1/y = (y - x)/(xy)$. Sobre $[1, 2]$ el producto xy está entre uno y cuatro, lo que controla uniformemente el factor de la diferencia. La contracción asegura Cauchy de los iterados, pero el límite obtenido en los reales tiene cuadrado dos y queda fuera de X. Evaluar F en ese real requeriría extender la función a otro dominio. El fracaso no está en la estimación contractiva, sino en retener el límite en el codominio original.

Capítulo 11

Series como laboratorio de convergencia

Si vamos añadiendo $1, 1/2, 1/4, 1/8, ...$, cada aporte es menor que el anterior y los totales se acercan a dos. Al añadir $1, 1/2, 1/3, 1/4, ...$ también disminuyen los aportes, pero los totales superan cualquier barrera. La diferencia entre ambos procesos no puede leerse en el hecho de que los términos tiendan a cero: necesitamos controlar lo que pueden acumular muchos términos juntos.

En C10 aprendimos a reconocer la convergencia comparando dos términos tardíos de una sucesión. Para una acumulación, esos dos términos serán los totales calculados hasta dos índices distintos; su diferencia recogerá exactamente los aportes añadidos entre ambos. Esa identidad finita permite trasladar el criterio de Cauchy al problema de sumar indefinidamente sin dar por existente la suma que buscamos.

11.1. De los términos a las sumas parciales

Los primeros totales de los aportes geométricos son $1, 3/2, 7/4, 15/8$. El aporte de índice 3 vale $1/8$, mientras que el total de ese mismo índice vale $15/8$: el primero registra lo que acabamos de añadir y el segundo incorpora todo lo anterior. La pregunta por una suma infinita se refiere al comportamiento de los totales. Para formularla debemos construir esa nueva sucesión a partir de los aportes.

Dada $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, con $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$, definimos su **sucesión de sumas parciales** $s = \mathrm{PS}(a)$ mediante $s_0 = a_0, \qquad s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$. La condición inicial ya incorpora a_0; s_0 no es el total vacío. Una vez conocido s_n, la regla siguiente determina un único real s_{n+1}, de modo que la recursión produce una sucesión en todos los naturales. Si otra sucesión satisficiera las mismas reglas, coincidiría en cero y cada coincidencia obligaría a la del índice siguiente: la inducción prueba su unicidad. La abreviatura $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ contiene $n + 1$ aportes. Reservamos el valor cero para una suma sin términos, que aparecerá al eliminar un prefijo de longitud cero o al comparar un total consigo mismo.

La **serie de términos** a es este proceso de sumación. Decimos que converge si $s_n \to S$ para algún $S \in \mathbb{R}$, y entonces llamamos a S su suma y escribimos $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$. Mientras no hayamos probado que los totales convergen, el símbolo de serie nombra el proceso y deja abierta la existencia de ese real. Si existe, C06 garantiza su unicidad. Por eso podemos estudiar una serie divergente sin asignarle una suma: sus totales siguen estando definidos en cada índice, aunque crezcan sin barrera o persistan en oscilar.

Conocer todos los totales permite además reconstruir cada aporte. El primero está dado por la condición inicial; para los demás basta restar dos totales consecutivos: $a_0 = s_0, \qquad a_{n+1} = s_{n+1} - s_n$. La resta elimina el prefijo que ambos totales comparten y deja sólo el aporte nuevo. En consecuencia, $\mathrm{PS}(a) = \mathrm{PS}(b)$ obliga a que $a = b$. Si sólo conocemos el límite de los totales, hemos perdido esa información: $(1, 0, 0, ...)$ y $(1/2, 1/2, 0, ...)$ suman uno, pero sus primeros totales son distintos. Una sucesión de aportes, su sucesión de totales y el real al que éstos convergen cumplen funciones diferentes; los dos primeros objetos son funciones $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ y el tercero es un número.

En $a_n = (-1)^n$, cada pareja consecutiva suma cero. Hasta el índice $2k + 1$ hay $k + 1$ parejas completas, por lo que $s_{2k+1} = 0$; hasta $2k$ quedan k parejas y un uno, por lo que $s_{2k} = 1$. Los totales están acotados y, sin embargo, después de cualquier corte hay dos de ellos separados por uno. La tolerancia fija $1/2$ impide Cauchy. Estar en una región acotada

no decide la convergencia de una acumulación. Para $a_n = 0$, la recursión da $s_n = 0$ en cada índice.

Para los aportes $a_n = 2^{-n}$ podemos identificar el destino antes de disponer de un criterio general. En cero, $s_0 = 1 = 2^{-0}$. Si $s_n = 2 - 2^{-n}$, al añadir $2^{-(n+1)}$ queda $s_{n+1} = 2 - 2^{-(n+1)}$. La inducción prueba $s_n = 2 - 2^{-n}$. Otra inducción da $2^n \geq n + 1$, de donde $2^{-n} \leq 1/(n+1)$. Dada $\varepsilon > 0$, elegir $N + 1 > 1/\varepsilon$ controla tanto $|a_n|$ como $|s_n - 2|$ para $n \geq N$. Los aportes tienden a cero y los totales a dos, como distingue la figura 11.1.

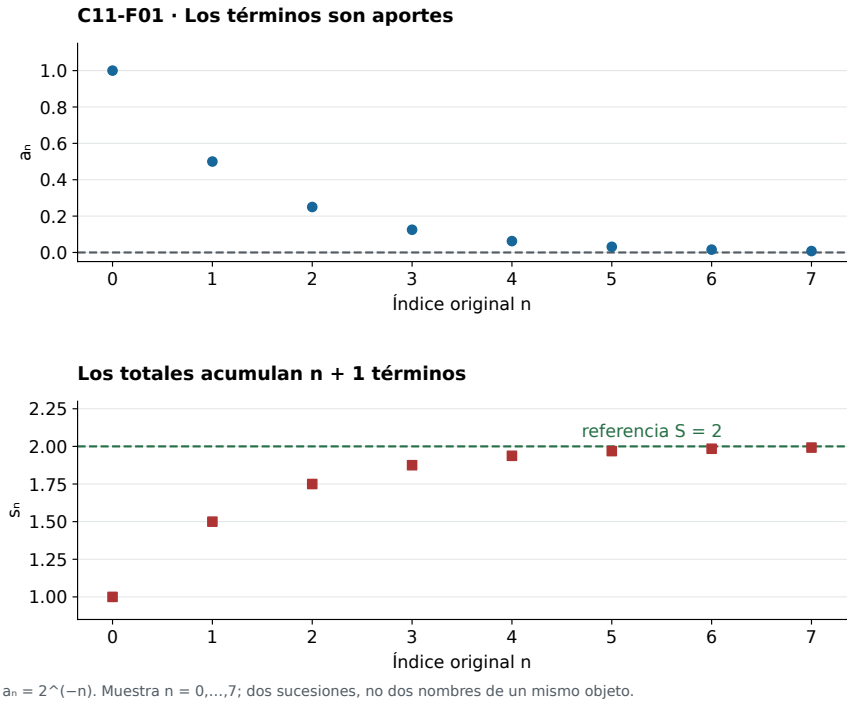


Figura 11.1. Los aportes geométricos disminuyen hacia cero mientras los totales aumentan hacia dos. En el índice n se han acumulado n+1 términos: los paneles representan dos sucesiones distintas.

Ejercicios de la sección 11.1.

Ejercicio 1. Aportes y totales

Calcula s_0, s_1, s_2, s_3 para $a_n = 2^{-n}$. Distingue ambos objetos.

Solución. Los términos son $1, 1/2, 1/4, 1/8$ y los totales $1, 3/2, 7/4, 15/8$. a y s son sucesiones reales distintas; s_n acumula $n+1$ valores de a. Después del argumento, la figura 11.1 permite contrastar el mecanismo con el ejemplo del capítulo. Calculemos acumulando un aporte cada vez: $s_0 = 1$, $s_1 = 1 + 1/2 = 3/2$, $s_2 = 3/2 + 1/4 = 7/4$ y $s_3 = 7/4 + 1/8 = 15/8$. La fórmula de los aportes indica lo que se añade; la de los totales indica lo que ya se ha reunido. Así, aunque $a_3 = 1/8$ sea pequeño, $s_3 = 15/8$ no lo es. La convergencia de la serie pregunta por el destino de los totales, no por el de los aportes.

Ejercicio 2. Recuperar una serie

Si se prescribe $s_n = (n+1)/(n+2)$, encuentra la única sucesión de términos que produce esos totales y decide convergencia.

Solución. $a_0 = s_0 = 1/2$. Para $n \geq 1$, $a_n = s_n - s_{n-1} = (n+1)/(n+2) - n/(n+1) = 1/((n+1)(n+2))$. La recursión verifica los totales, y su recuperación demuestra unicidad. Como $s_n = 1 - 1/(n+2) \to 1$, la serie tiene suma uno. La misma fórmula también da el término inicial si se evalúa en cero. Al restar los dos cocientes, el numerador común es $(n+1)^2 - n(n+2) = 1$. Eso justifica la fórmula, en vez de limitarse a anunciarla. Para comprobar

existencia, sumamos los términos recuperados: los recíprocos consecutivos se cancelan y dejan $1 - 1/(n+2)$, exactamente el total prescrito. Para comprobar unicidad, cualquier sucesión que produzca esos mismos totales debe tener el mismo primer aporte y las mismas diferencias posteriores. El límite de los totales es uno, aunque cada aporte tienda a cero.

Ejercicio 3. Misma suma, distinto proceso

Construye dos sucesiones distintas de soporte finito con la misma suma y prueba que sus procesos son distintos.

Solución. Tomemos $a = (1, 0, 0, ...)$ y $b = (0, 1, 0, ...)$. Sus totales son $s_n = 1$ en todo índice y $t_0 = 0$, $t_n = 1$ para $n \geq 1$. Ambas sumas valen uno, pero $a_0 \neq b_0$ y $s_0 \neq t_0$. Igualdad numérica de sumas no implica igualdad de funciones. Después del argumento, la figura 11.1 permite contrastar el mecanismo con el ejemplo del capítulo.

El soporte de cada sucesión es finito: sólo tiene un índice con aporte distinto de cero. Por eso, tras incorporar ese aporte, los totales permanecen iguales a uno y convergen a uno. Sin embargo, basta comparar el índice cero para mostrar que tanto los aportes como sus procesos son diferentes. La suma conserva un número final, pero no indica en qué momento se incorporó cada aporte. Conocer todos los totales contiene más información que conocer únicamente su límite.

Ejercicio 4. Una transformación reversible

Prueba que toda sucesión real s es el proceso de sumación de una única sucesión real a.

Solución. Definamos $a_0 = s_0$ y $a_{n+1} = s_{n+1} - s_n$. Si $u = \mathrm{PS}(a)$, entonces $u_0 = s_0$. Suponiendo $u_n = s_n$, la recursión da $u_{n+1} = s_n + s_{n+1} - s_n = s_{n+1}$. Inducción prueba $u = s$. Si otro b produce s, la recuperación de §11.1 fuerza $b_0 = a_0$ y $b_{n+1} = a_{n+1}$. Es una correspondencia entre sucesiones, sin exigir convergencia.

Después del argumento, la figura 11.1 permite contrastar el mecanismo con el ejemplo del capítulo. La prueba tiene dos obligaciones. Para existencia, construimos a y demostramos por inducción que su proceso de sumación coincide con s en cada índice. Para unicidad, partimos de cualquier otra candidata y usamos las identidades $a_0 = s_0$ y $a_{n+1} = s_{n+1} - s_n$, que son forzadas por los totales. No se necesita que s tenga límite: la transformación entre aportes y totales es reversible incluso cuando la serie diverge.

Ejercicio 5. Totales acotados y término nulo

Construye una serie con términos que tienden a cero y sumas parciales acotadas que no convergen.

Solución. Prescribamos bloques: para cada $m \geq 1$, m términos $1/m$ seguidos de m términos $-1/m$. El bloque ocupa $m(m-1) \leq n \leq m(m+1) - 1$; sus extremos consecutivos cubren todos los naturales. Los totales van de cero a uno y regresan a cero, así que están en $[0, 1]$. Dada $\varepsilon > 0$, tomar M con $1/M < \varepsilon$ hace $|a_n| \leq 1/M < \varepsilon$ desde el comienzo del bloque M. Los totales de mitad y final de cada bloque son uno y cero en índices arbitrariamente grandes; falla Cauchy con tolerancia $1/2$.

Después del argumento, la figura 11.5 permite contrastar el mecanismo con el ejemplo del capítulo. El primer bloque tiene dos aportes; los primeros $m - 1$ bloques contienen $2(1 + \cdots + (m-1)) = m(m-1)$ aportes, lo que explica la posición inicial del bloque m. Su mitad positiva eleva el total a uno y su mitad negativa lo devuelve a cero. Para negar Cauchy, recibido un corte escogemos un bloque posterior completo y comparamos sus totales de mitad y final. Su separación es uno. Los saltos individuales se hacen pequeños, pero el número creciente de aportes permite mantener una excursión de tamaño fijo.

11.2. Cauchy mide bloques completos

Para comparar dos totales, restemos primero la parte que ya estaba sumada en ambos. Si $p > q$, la diferencia debe contener los aportes de índices $q + 1, \ldots, p$, exactamente los que se añadieron después del corte q. La recursión permite demostrarlo sin hablar todavía

de convergencia: $s_p - s_q = \sum_{k=q+1}^{p} a_k$. Con $p = q+1$ la igualdad es la propia regla de construcción. Fijado q, si vale hasta p, entonces $s_{p+1} - s_q = (s_p - s_q) + a_{p+1}$ prolonga el bloque hasta $p+1$. La inducción sobre su longitud $p-q$ prueba todos los casos. El índice inicial importa: incluir a_q contaría dos veces un aporte que ya estaba incorporado en s_q.

Criterio de Cauchy para series reales. La serie de a converge si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall p, q \in \mathbb{N} : \quad p > q \geq N \implies \left| \sum_{k=q+1}^{p} a_k \right| < \varepsilon.$$

La definición de serie convergente pregunta por la convergencia de s. Según C10, en $\mathbb{R}$ eso equivale a controlar $|s_p - s_q|$ después de un único corte. La identidad de bloques sustituye esa diferencia por una suma finita cuando $p > q$. Si los bloques satisfacen la condición escrita, los pares en el otro orden se reducen a éstos por $|s_p - s_q| = |s_q - s_p|$, y los pares iguales tienen distancia cero. Por tanto todos los pares tardíos satisfacen Cauchy y la completitud, a través de C10, proporciona un destino real. La identidad finita traduce el control; la completitud garantiza existencia.

El corte se elige después de recibir la tolerancia y antes de escoger los dos extremos del bloque. Debe servir aunque la longitud $p-q$ sea enorme. Para apreciar la diferencia, fijemos una longitud $r \geq 1$ en la armónica: un bloque desde $q+1$ hasta $q+r$ tiene suma a lo sumo $r/(q+2)$ y se hace pequeño al avanzar q. El corte que da $N+2 > r/\varepsilon$ depende de r. El criterio de Cauchy exige un corte que funcione antes de saber qué longitud habrá que controlar.

Condición necesaria. Si una serie converge, entonces $a_n \to 0$. Para comprobarlo, recibamos $\varepsilon > 0$ y tomemos el corte N del criterio de bloques. Si $n \geq N+1$, podemos elegir $q = n-1$ y $p = n$: los extremos cumplen $p > q \geq N$ y el bloque sólo contiene a_n, así que $|a_n| < \varepsilon$. El corte de los términos se ha desplazado una unidad. Hemos probado una consecuencia de controlar todos los bloques; los bloques de un término por sí solos todavía no controlan los más largos.

Volvamos a los aportes $a_n = 1/(n+1)$, que tienden a cero. Para poner a prueba todos los bloques necesitamos permitir que su longitud aumente con su posición. Dado un corte N, tomemos $m = N+1$, $q = m-1 = N$ y $p = 2m-1 = 2N+1$. Al restar los totales, quedan los m denominadores desde $m+1$ hasta $2m$: ninguno de sus recíprocos es menor que $1/(2m)$. Por tanto,

$s_{2m-1} - s_{m-1} = \sum_{j=m+1}^{2m} \frac{1}{j} \geq m \frac{1}{2m} = \frac{1}{2}$. La misma tolerancia $1/2$ falla después de cada corte, aunque cada aporte individual se haga pequeño. Los bloques conservan una separación porque su número de términos crece al mismo tiempo que éstos disminuyen. Así la serie armónica diverge por una estimación sobre sumas finitas; no se ha presupuesto el valor de ninguna expresión infinita.

m	q = m−1	p = 2m−1	Cota inferior exacta del bloque
4	3	7	$\geq 1/2$
8	7	15	$\geq 1/2$
16	15	31	$\geq 1/2$

Ejercicios de la sección 11.2.

Ejercicio 6. Identidad de bloques

Prueba por inducción que $s_p - s_q = \sum_{j=q+1}^{p} a_j$ cuando $p > q$.

Solución. Fijemos q. Para $p = q+1$, la recursión da la identidad. Si vale para p, entonces $s_{p+1} - s_q = (s_p - s_q) + a_{p+1} = \sum_{j=q+1}^{p+1} a_j$. La inducción sobre $p - q \geq 1$ cubre todos los extremos; no interviene una suma infinita. El índice q permanece fijo durante la inducción y la variable es la longitud $p-q$. La base tiene un solo aporte nuevo: $s_{q+1} - s_q = a_{q+1}$. En

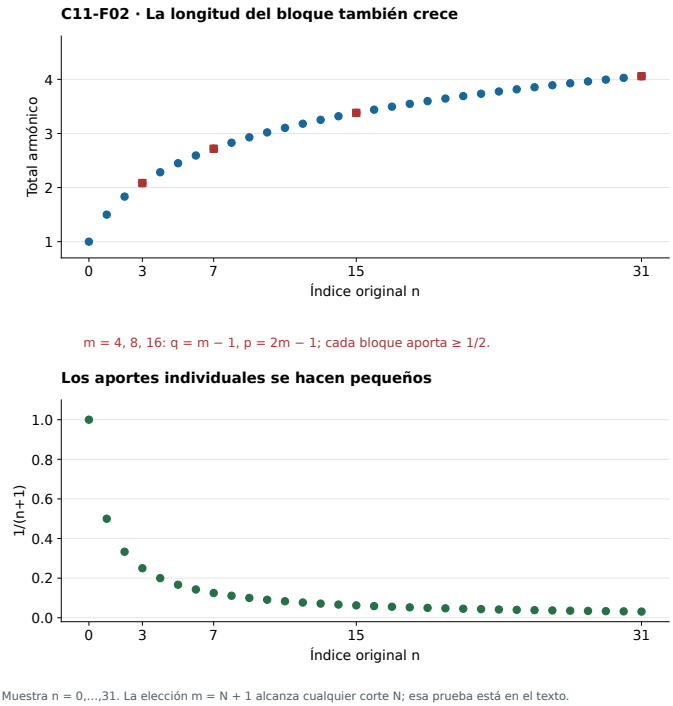


Figura 11.2. Los bloques de m aportes armónicos entre los denominadores m+1 y 2m conservan suma al menos un medio. Los términos individuales se reducen, pero la longitud del bloque puede crecer.

el paso inductivo, incorporar a_{p+1} prolonga el bloque y el total exactamente de la misma manera. Así la identidad vale para cada q y todos los extremos posteriores. La suma comienza en $q+1$ porque a_q ya estaba incluido en el total que se resta.

Ejercicio 7. La longitud no puede elegir el corte

En la armónica $a_n = 1/(n+1)$, muestra que los bloques de cualquier longitud fija tienden a cero al alejar su inicio. Explica por qué la serie diverge.

Solución. Para un natural fijo $r \geq 1$, $0 \leq \sum_{j=q+1}^{q+r} 1/(j+1) \leq r/(q+2) \to 0$. El corte de esta estimación depende de r. Cauchy exige uno solo para todas las longitudes. Tomando $q = m-1$, $p = 2m-1$, se obtiene un bloque al menos $1/2$ después de cualquier corte, así que no converge. Después del argumento, la figura 11.2 permite contrastar el mecanismo con el ejemplo del capítulo.

Para una longitud fijada r y una tolerancia positiva, basta escoger N con $N+2 > r/\varepsilon$. Entonces todo bloque de longitud r iniciado después de N tiene suma menor que ε. Pero la negación de Cauchy permite escoger la longitud después del corte: con $m = N+1$, el bloque de denominadores $m+1, \ldots, 2m$ tiene m aportes de tamaño al menos $1/(2m)$. Su suma no baja de $1/2$. La dependencia del corte respecto de la longitud es precisamente lo que impide el criterio completo.

Ejercicio 8. Términos que no desaparecen

Descarta convergencia de las series con términos $a_n = (-1)^n$ y $b_n = (n+1)/(n+2)$.

Solución. En la primera, $|a_n| = 1$ en cada índice; en la segunda, $b_n \geq 1/2$. Ninguna sucesión de términos tiende a cero, y la condición necesaria de §11.2 descarta ambas convergencias. No hace falta calcular sus totales para aplicar esa condición. Si una serie convergiera, la diferencia de dos totales consecutivos tendría que tender a cero, por lo que sus aportes desaparecerían. Aquí la primera sucesión mantiene magnitud uno. La segunda mantiene una cota inferior $1/2$, así que ninguna cola puede satisfacer, por ejemplo, la tolerancia $1/4$ respecto de cero.

Hemos hecho fallar una condición necesaria. Eso basta para descartar ambas series, aunque sus comportamientos de totales sean distintos.

Ejercicio 9. Acumulación en potencias de dos

Prueba $s_{2^m-1} \geq 1 + m/2$ para las sumas parciales armónicas, con $m \in \mathbb{N}$.

Solución. En la notación de denominadores, $s_{2^m-1} = \sum_{j=1}^{2^m} 1/j$. Para cada $i = 1, \ldots, m$, el bloque $j = 2^{i-1} + 1, \ldots, 2^i$ tiene 2^{i-1} términos, cada uno al menos $1/2^i$, de modo que aporta al menos $1/2$. Añadiendo el término $j = 1$ resulta la cota, también válida para $m = 0$. Es una partición finita; prueba que los totales carecen de barrera superior.

Después del argumento, la figura 11.2 permite contrastar el mecanismo con el ejemplo del capítulo. Los bloques duplican sus extremos: después del aporte inicial uno, reunimos denominadores 2, luego $3, 4$, después $5, \ldots, 8$, y así sucesivamente. Cada grupo aporta al menos medio, porque duplica su cantidad de sumandos mientras divide por dos la cota inferior de cada uno. Para cualquier barrera B, arquimedianidad permite escoger m con $1 + m/2 > B$. El total correspondiente la supera. No estamos asignando un valor a una suma infinita: todos los bloques y totales usados son finitos.

Ejercicio 10. Reparar una falsa prueba

Diagnostica: «Como $a_n \to 0$, cada término de un bloque tardío es menor que ε; por tanto su suma es menor que ε». Repara el argumento cuando todo bloque tiene longitud a lo sumo $M \geq 1$.

Solución. Una suma de muchos términos puede exceder ε, y los signos tampoco autorizan ignorar magnitudes. Si la longitud está acotada por M, basta hacer $|a_j| < \varepsilon/M$ en la cola. La triangular finita da magnitud del bloque menor que $r\varepsilon/M \leq \varepsilon$ para $1 \leq r \leq M$; el bloque vacío vale cero. Esto controla sólo bloques de esas longitudes, no el criterio completo sin otra hipótesis.

Después del argumento, la figura 11.2 permite contrastar el mecanismo con el ejemplo del capítulo. La reparación debe pedir control del valor absoluto, porque «menor que ε» como desigualdad firmada no controla aportes negativos grandes. Si un bloque tiene $r \leq M$ términos, hacemos cada magnitud menor que ε/M. La triangular da una suma de magnitudes estrictamente menor que $r\varepsilon/M \leq \varepsilon$. El factor M reparte el presupuesto entre el máximo número de errores permitidos. Si las longitudes no están acotadas, esta elección no controla todos los bloques.

11.3. Fórmulas finitas y restos exactos

En algunas series podemos calcular cada total y dejar que una fórmula finita resuelva el problema del límite. Las cancelaciones deben producirse en ese cálculo, donde sólo intervienen finitos reales; una supuesta suma infinita no puede usarse como si ya fuera un número antes de demostrar que existe. Si $a_n = c_n - c_{n+1}$, las primeras sumas son $c_0 - c_1$, $(c_0 - c_1) + (c_1 - c_2) = c_0 - c_2$, y así sucesivamente. Cada valor interior aparece una vez con cada signo. La misma cancelación se justifica por inducción: si el total de corte n es $c_0 - c_{n+1}$, añadir $c_{n+1} - c_{n+2}$ produce $c_0 - c_{n+2}$ en el corte siguiente. En general,

$s_n = c_0 - c_{n+1}$. La identidad reduce la convergencia de la serie a la de c. Si $c_n \to C$, las reglas de C06 dan $s_n \to c_0 - C$. En la otra dirección, si $s_n \to S$, entonces $c_{n+1} = c_0 - s_n \to c_0 - S$. Un corte N para esta última sucesión se convierte en el corte $N+1$ de c, de modo que también converge la sucesión completa. La cancelación no crea un destino cuando c carece de él. Una vez probada la convergencia, llamamos **resto** a $R_n = S - s_n$ y obtenemos

$R_n = S - s_n = c_{n+1} - C$. La fracción $1/((n+1)(n+2))$ permite esta cancelación porque $1/(n+1) - 1/(n+2)$ tiene numerador $(n+2) - (n+1) = 1$ sobre el mismo denominador. Sus totales son $s_n = 1 - 1/(n+2)$, luego la suma es uno y el resto exacto $1/(n+2)$. Si se pide error menor que $1/100$, necesitamos $n + 2 > 100$: $n = 99$ sirve y utiliza cien aportes; $n = 98$ sólo da igualdad con la tolerancia.

Para los aportes geométricos $a_n = r^n$, con $r \in \mathbb{R}$, usamos $r^0 = 1$ y $r^{n+1} = r^n r$. Esta convención fija también $0^0 = 1$ en el término de exponente cero de la serie. Escribamos $s_n = 1 + r + \cdots + r^n$ y multipliquemos por r: los términos interiores coinciden con los de $rs_n = r + \cdots + r^{n+1}$. Restar las dos sumas finitas deja

$(1-r)s_n = 1 - r^{n+1}$. La identidad vale para todo r, incluido $r = 1$, donde sólo dice $0 = 0$. Si $|r| < 1$, podemos dividir por $1 - r$ y estudiar la potencia restante. Para $0 < \rho = |r| < 1$, pongamos $\rho^{-1} = 1+t$ con $t > 0$. La inducción en $(1+t)^n \geq 1+nt$ da $0 < \rho^n \leq 1/(1+nt) \to 0$ por arquimedianidad; por ello también $r^{n+1} \to 0$. Para $r = 0$, el primer aporte es uno y los demás cero, así que todos los totales son uno. Las reglas de límites aplicadas a la fórmula finita proporcionan

$$S = \frac{1}{1-r}, \qquad R_n = \frac{r^{n+1}}{1-r}, \qquad |R_n| = \frac{|r|^{n+1}}{|1-r|}.$$

El denominador del error exacto es $|1-r|$. Si $r < 0$, ese valor es $1+|r|$, mayor que $1-|r|$, y conservarlo mejora la estimación. Fuera de $(-1, 1)$, las magnitudes $|r^n| \geq 1$ no tienden a cero y la condición necesaria descarta convergencia. En $r = 1$, los totales son $n + 1$; en $r = -1$, alternan entre uno y cero. La geométrica converge exactamente para $|r| < 1$, con los extremos tratados sin efectuar ninguna división prohibida.

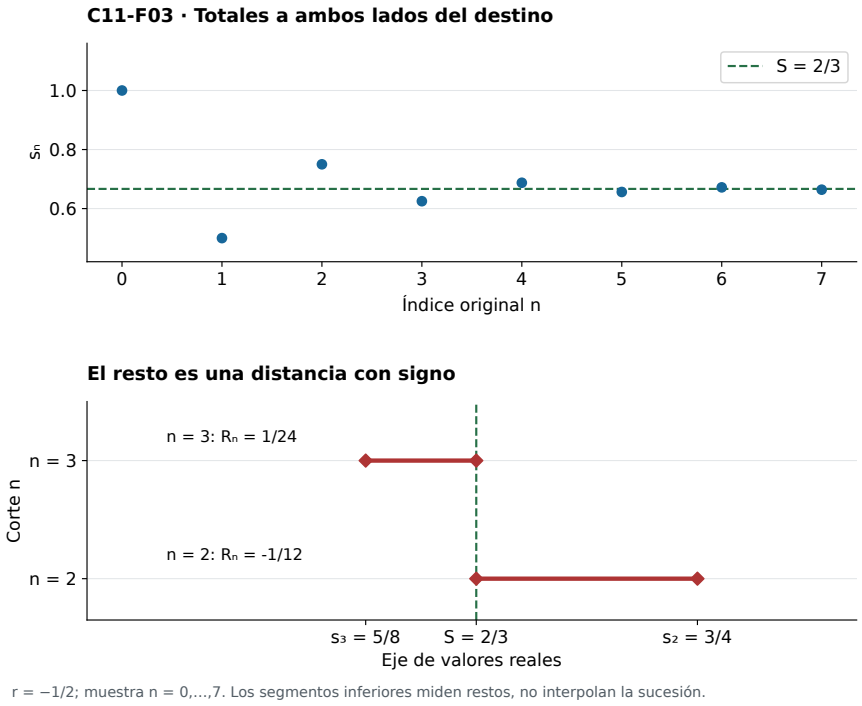


Figura 11.3. La geométrica de razón menos un medio alterna sus totales alrededor de dos tercios. La identidad finita determina el resto con signo, no sólo una cota de su magnitud.

Con $r = -1/2$, la suma es $2/3$ y el resto firmado $(2/3)(-1/2)^{n+1}$ cambia de signo con la paridad. Por ejemplo, $s_2 = 3/4$ está por encima de la suma y deja resto $-1/12$, mientras $s_3 = 5/8$ queda por debajo y deja $1/24$, como muestra la figura. Su magnitud es $(2/3)2^{-(n+1)} = 1/(3 \cdot 2^n)$. En $n = 5$ vale $1/96$ y en $n = 6$ vale $1/192$, de modo que el primer corte con error menor que $1/100$ es seis. Podemos afirmar esa minimalidad porque conocemos el error exacto.

Ejercicios de la sección 11.3.

Ejercicio 11. Telescopaje y corte

Para $a_n = 1/((n+1)(n+2))$, calcula el total, suma y resto; encuentra un corte que garantice error menor que $1/100$.

Solución. La descomposición $a_n = 1/(n+1) - 1/(n+2)$ da $s_n = 1 - 1/(n+2)$. La suma es uno y el resto $1/(n+2)$. Error estrictamente menor que $1/100$ equivale a $n+2 > 100$; basta $n = 99$ y todos los cortes posteriores. $n = 98$ sólo da igualdad con la tolerancia. Después del argumento, la figura 11.3 permite contrastar el mecanismo con el ejemplo del capítulo.

La identidad telescópica se obtiene restando recíprocos: $1/(n+1) - 1/(n+2) = 1/((n+1)(n+2))$. Después de sumar hasta n, sobreviven el primer recíproco uno y el último $-1/(n+2)$. Para el error estricto, $n+2 > 100$ equivale a $n > 98$. El primer natural posible es 99 y el total usa cien aportes, desde el índice cero hasta el 99. Con 99 aportes, el índice final sería 98 y el error sería exactamente $1/100$.

Ejercicio 12. Razón negativa

Calcula la suma y resto de la geométrica $r = -1/2$. Encuentra un corte que certifique error menor que $1/100$.

Solución. Por §11.3, $S = 2/3$ y $R_n = (2/3)(-1/2)^{n+1}$. Su magnitud es $1/(3 \cdot 2^n)$. Para $n = 6$ vale $1/192 < 1/100$, y para $n = 5$ vale $1/96 > 1/100$; por ello seis es el primer corte suficiente en la cota exacta. Hasta él se suman siete términos. Después del argumento, la figura 11.3 permite contrastar el mecanismo con el ejemplo del capítulo.

La fórmula finita da $s_n = (1-(-1/2)^{n+1})/(1+1/2)$. Al tomar el límite obtenemos $S = 2/3$ y, al restar, el resto firmado. Su magnitud vale $(2/3)2^{-(n+1)} = 1/(3 \cdot 2^n)$. Comparar los índices cinco y seis decide el primer corte porque esta magnitud disminuye al aumentar el índice. El signo del resto cambia con la paridad; ese cambio no modifica la certificación del error absoluto.

Ejercicio 13. Todos los casos geométricos

Clasifica la convergencia de $\sum r^n$ para todos los reales r, incluyendo cero y ambos extremos.

Solución. Si $|r| < 1$, la identidad finita y $r^{n+1} \to 0$ dan suma $1/(1-r)$. En cero se usa $r^0 = 1$: suma uno. Para $|r| \geq 1$, $|r^n| \geq 1$, por lo que falla el término nulo. En particular $r = 1$ tiene totales $n+1$, y $r = -1$ totales uno/cero; ambas divergen. Después del argumento, la figura 11.3 permite contrastar el mecanismo con el ejemplo del capítulo.

Dentro de $(-1, 1)$ las potencias tienden a cero y la identidad finita determina el límite de los totales. La razón cero se comprueba directamente: el aporte de exponente cero es uno y todos los posteriores son cero. Fuera del intervalo, incluida su frontera, las magnitudes de los aportes son al menos uno. Esto descarta convergencia antes de intentar dividir o calcular un destino. En particular, la fórmula con denominador $1 - r$ no puede usarse para $r = 1$.

Ejercicio 14. La diferencia puede sumar sin magnitudes

Para $c_n = (-1)^n/(n+1)$, prueba convergencia de la serie $a_n = c_n - c_{n+1}$ y decide si la serie de magnitudes $|a_n|$ converge.

Solución. $c_n \to 0$, así que por telescopaje $s_n = 1 - c_{n+1} \to 1$. Además $a_n = (-1)^n[1/(n+1) + 1/(n+2)]$, luego $|a_n| \geq 1/(n+1)$. Si sus magnitudes tuvieran totales acotados, los armónicos quedarían acotados por comparación finita, contradiciendo 11.9. La serie original converge y la de magnitudes diverge. La prueba sólo usa telescopaje y la acumulación armónica ya establecida; no necesita el criterio alternado ni el de convergencia absoluta.

Los signos de c_n y c_{n+1} son opuestos; restarlos suma sus magnitudes y mantiene el signo de c_n. Por eso $|a_n| = 1/(n+1) + 1/(n+2)$. La cancelación telescópica controla los totales originales mediante $c_{n+1} \to 0$, pero al tomar magnitudes esa cancelación desaparece. Las sumas de magnitudes dominan las armónicas y no pueden permanecer acotadas. Este ejemplo

permite separar los dos tipos de convergencia sin utilizar un criterio que se presenta más adelante.

Ejercicio 15. Telescopar no crea destino

Sea $a_n = c_n - c_{n+1}$. Prueba que su serie converge si y sólo si c_n converge, y relaciona ambos límites.

Solución. Siempre $s_n = c_0 - c_{n+1}$. Si $c_n \to C$, la serie tiene suma $c_0 - C$. Si $s_n \to S$, entonces $c_{n+1} = c_0 - s_n \to c_0 - S$; para $n \geq 1$ se traslada el corte en una unidad, y el término c_0 no afecta el límite. Así $c_n \to c_0 - S$. El telescopaje proporciona una equivalencia, no convergencia automática. Para la vuelta, conocer $s_n \to S$ da el límite de c_{n+1} por la identidad $c_{n+1} = c_0 - s_n$. Si ese control funciona desde $n \geq N$, el control de c_j funciona desde $j \geq N + 1$. El valor inicial no afecta la convergencia porque queda fuera de una cola suficientemente tardía. El telescopaje reduce el problema a otra sucesión; si ésta oscila o carece de destino, la cancelación algebraica por sí sola no lo remedia.

11.4. Acumulación positiva y barreras

Si todos los aportes son no negativos, los totales sólo pueden aumentar o permanecer iguales: $s_{n+1} - s_n = a_{n+1} \geq 0$. En esta situación, una barrera superior tiene más fuerza que en una sucesión oscilante. Una vez que un total se acerca a la menor barrera posible, los siguientes no pueden retroceder ni sobrepasarla. **Barrera positiva.** Una serie de términos no negativos converge si y sólo si sus sumas parciales están acotadas superiormente. La necesidad se sigue de C06. Para probar suficiencia desde las bases de completitud, sea

$S = \sup\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$. El conjunto contiene s_0 y está acotado superiormente por hipótesis, de modo que C03 asegura un supremo real. Dada $\varepsilon > 0$, el número $S - \varepsilon$ es menor que la menor cota superior y no puede acotar todos los totales: existe N con $S - \varepsilon < s_N \leq S$. La no negatividad conserva ese acercamiento, pues $s_N \leq s_n \leq S$ para $n \geq N$. Así $|S - s_n| = S - s_n < \varepsilon$. La completitud construye la barrera y el signo de los aportes mantiene toda la cola cerca de ella.

Si, por el contrario, los totales no están acotados superiormente, dado cualquier real M existe N con $s_N > M$; la monotonía obliga a que todos los posteriores también excedan M. Esa divergencia hacia arriba describe el comportamiento de los totales. La definición de suma utilizada aquí exige un real y no asigna al proceso un nuevo número llamado infinito.

Comparación directa. Si $0 \leq a_n \leq b_n$ en todos los índices y la serie de b converge, entonces la de a también converge y sus sumas cumplen $0 \leq S_a \leq S_b$. Para demostrarlo, llamemos s_n, t_n a los totales respectivos. Sumar las desigualdades finitas da $0 \leq s_n \leq t_n \leq S_b$, donde la última cota usa que los totales no negativos de b crecen hacia S_b. La barrera positiva proporciona S_a, y el paso al límite conserva el orden. Si la comparación sólo vale desde un índice m, se aplica a las colas reindexadas y luego se añaden sus prefijos finitos; éstos pueden alterar el orden de las sumas completas. Por ejemplo, $(100, 0, 0, ...)$ y la sucesión nula coinciden desde uno, pero sus sumas son cien y cero. Una comparación eventual prueba convergencia de las colas, sin imponer por sí sola $S_a \leq S_b$.

Para los aportes $a_n = 1/(n+2)^2$ no disponemos de una cancelación exacta como la anterior. Podemos usarla como barrera: los denominadores son positivos y $(n+2)^2 \geq (n+1)(n+2)$, por lo que $0 \leq \frac{1}{(n+2)^2} \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)}$. La serie que domina tiene suma uno por telescopaje. Los totales de a quedan entre cero y uno, y por tanto existe S_a. Para estimar lo que falta, apliquemos la misma comparación sólo al bloque posterior al corte n. Si $p > n$, obtenemos $0 \leq s_p - s_n \leq 1/(n+2) - 1/(p+2)$. En este punto ya conocemos la existencia de S_a; mantener n fijo y tomar $p \to \infty$ permite concluir

$0 \leq S_a - s_n \leq \frac{1}{n+2}$. La comparación ha resuelto dos obligaciones distintas: primero proporcionó una barrera común para demostrar existencia y después una cota del bloque posterior para medir el error. Ninguno de esos pasos necesita una fórmula para S_a.

Ejercicios de la sección 11.4.

Ejercicio 16. Dónde se usa la barrera

Reconstruye desde el supremo la convergencia de una serie no negativa con totales acotados superiormente.

Solución. Sea $S = \sup\{s_n\}$, real por no vacuidad y cota. Dada $\varepsilon > 0$, existe N con $s_N > S - \varepsilon$ por optimalidad del supremo. La no negatividad hace $s_N \le s_n \le S$ para todo $n \ge N$, así que $|s_n - S| < \varepsilon$. Completitud construye S y el signo mantiene cerca toda la cola. El conjunto de totales contiene s_0 y tiene una cota superior común, así que la completitud permite tomar su supremo real. La optimalidad asegura un total por encima de $S - \varepsilon$: de lo contrario, esa cantidad menor que S sería otra cota superior. Después, la monotonía conserva el acercamiento y la cota S impide sobrepasar la barrera. Ambas hipótesis cumplen funciones diferentes: una construye el destino y la otra retiene la cola dentro de la franja de precisión.

Ejercicio 17. Comparar y estimar

Prueba convergencia de $\sum 1/(n+2)^2$ y una cota de resto usando el telescopaje de §11.3.

Solución. Para todo n, $0 \le 1/(n+2)^2 \le 1/((n+1)(n+2))$. Sus totales están entre cero y los telescópicos, por tanto entre cero y uno. La barrera positiva prueba existencia de S. Para $p > n$, comparar sólo la cola da $0 \le s_p - s_n \le 1/(n+2) - 1/(p+2)$. Al tomar $p \to \infty$, $0 \le S - s_n \le 1/(n+2)$. La comparación término a término vale porque $(n+2)^2 \ge (n+1)(n+2) > 0$, y al invertir denominadores positivos se invierte el orden. La serie telescópica ofrece una barrera uno para los totales, lo que demuestra primero la existencia de la suma buscada. Sólo después podemos dejar el extremo posterior p tender a infinito en la comparación de bloques. Así obtenemos un resto certificado sin conocer una fórmula para S. La misma cota sirve para todos los cortes con $n + 2 > 1/\varepsilon$.

Ejercicio 18. Comparación eventual

Sea $a_0 = 100$ y $a_n = 2^{-n}$ para $n \ge 1$, y sea $b_n = 2^{-n}$ en todos los índices. Compara las convergencias y las sumas.

Solución. Coinciden desde uno y difieren en $a_0 - b_0 = 99$. La geométrica de b tiene suma dos, así que los totales de a son los de b más 99 y su suma es 101. La comparación eventual no da $S_a \le S_b$; conserva convergencia pero debe incorporar el prefijo. Los prefijos iniciales difieren en cien menos uno, es decir, 99. Desde el segundo aporte las dos sucesiones son idénticas, por lo que cada total de a es el correspondiente total geométrico de b más esa constante. Al pasar al límite, la diferencia 99 se conserva: las sumas son 101 y dos. Comparar únicamente la cola no compara el total acumulado antes de ella. Una modificación finita conserva convergencia, pero puede cambiar la suma en una cantidad arbitraria.

Ejercicio 19. Una barrera para series con signos

Explica por qué la prueba positiva no se aplica a una serie arbitraria cuyas sumas parciales son acotadas superiormente; aporta un contraejemplo.

Solución. El supremo puede existir, pero tras encontrar un total cercano no sabemos que los posteriores sean mayores. Para $a_n = (-1)^n$, el supremo de los totales es uno y éstos alternan uno/cero; no se conserva cercanía al supremo. Falta la no negatividad de los incrementos. Después del argumento, la figura 11.1 permite contrastar el mecanismo con el ejemplo del capítulo.

Tener un supremo de los totales sólo dice que existe una menor cota superior. Para identificarlo con el límite hace falta que, después de aproximarse a él, los totales no retrocedan. La serie alternada de unos produce un total igual al supremo en cada índice par y un total cero en cada índice impar. Así ningún corte asegura cercanía permanente a uno. La no negatividad de los aportes es la hipótesis que proporcionaba monotonía en la prueba positiva.

Ejercicio 20. Barrera sin fórmula de suma

Para cualquier sucesión $0 \le \theta_n \le 1$, prueba convergencia de $a_n = \theta_n/((n+1)(n+2))$ y estima su resto sin identificar su suma.

Solución. La comparación finita con $b_n = 1/((n+1)(n+2))$ acota todos los totales por uno y prueba convergencia por §11.4. Comparando bloques y tomando el límite del extremo posterior resulta $0 \le S - s_n \le 1/(n+2)$. Se conserva uniformidad en la elección de θ, pero no se afirma que las diferentes sucesiones tengan la misma suma. Después del argumento, la figura 11.1 permite contrastar el mecanismo con el ejemplo del capítulo.

Multiplicar el aporte telescópico positivo por una cantidad entre cero y uno lo mantiene entre cero y ese aporte original. Por eso todos los totales son crecientes y no superan uno. La comparación de bloques da una cota de resto independiente de las elecciones de θ_n. No obstante, esas elecciones cambian la suma: si todas valen cero, la suma es cero; si todas valen uno, es uno. Una garantía uniforme de error no implica que los destinos coincidan.

11.5. Control absoluto de la acumulación

Cuando los signos varían, los totales pueden retroceder y una barrera superior deja de retenerlos cerca de un destino. Podemos exigir un control que sobreviva incluso al borrar todas las cancelaciones: sumar las magnitudes de los aportes. La desigualdad triangular relacionará ese nuevo proceso, no negativo, con las distancias entre los totales originales. La serie de a **converge absolutamente** cuando converge la serie de $|a_n|$. Si la original converge y la de magnitudes diverge, la convergencia es **condicional**. Este segundo término sólo se aplica cuando existe la suma de la original.

Escribamos $u_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$. Una inducción basada en la desigualdad triangular prueba

$$|s_n| \le u_n, \qquad |s_p - s_q| \le u_p - u_q = \sum_{k=q+1}^{p} |a_k| \quad (p > q).$$

Para un bloque de un término hay igualdad entre su magnitud y la suma de magnitudes. Si la estimación vale hasta p, la desigualdad triangular da $|\sum_{k=q+1}^{p+1} a_k| \le |\sum_{k=q+1}^{p} a_k| + |a_{p+1}|$, y la hipótesis inductiva completa el paso. La prueba de $|s_n| \le u_n$ procede del mismo modo desde cero. Son desigualdades entre sumas finitas, válidas aunque ninguna de las series tenga todavía un destino.

La convergencia absoluta implica convergencia. Supongamos $u_n \to A$. El criterio de Cauchy aplicado a u da, para cada $\varepsilon > 0$, un corte N con $u_p - u_q = |u_p - u_q| < \varepsilon$ cuando $p > q \ge N$, pues u es creciente. La desigualdad finita transmite ese mismo corte a $|s_p - s_q|$. Así los totales originales son de Cauchy y C10 proporciona $S \in \mathbb{R}$, sin haber supuesto su existencia al comenzar. Para pasar al límite en $|s_n| \le u_n$, la desigualdad $\big||s_n| - |S|\big| \le |s_n - S|$ demuestra $|s_n| \to |S|$; la conservación del orden de C06 da $|S| \le A$. Acotar sólo cada $|s_n|$ no habría demostrado convergencia: lo que hizo funcionar el argumento fue controlar diferencias de totales.

El control global $|S| \le A$ mide el resultado completo, pero para aproximarlo necesitamos saber lo que queda después del corte. Fijemos n. Para todos los extremos posteriores $p > n$ vale $|s_p - s_n| \le u_p - u_n$. Los dos totales de corte n permanecen constantes mientras p tiende a infinito. El límite y la conservación del orden dan $|R_n| = |S - s_n| \le A - u_n$. Una cota geométrica de las magnitudes produce una garantía explícita. Si $|a_n| \le C\rho^n$ con $C \ge 0$ y $0 < \rho < 1$, la comparación positiva con la geométrica demuestra primero convergencia absoluta. Al sumar la comparación sólo desde $n+1$ hasta p y después tomar $p \to \infty$, obtenemos

$|R_n| \le \frac{C\rho^{n+1}}{1-\rho}$. El exponente $n+1$ corresponde al primer aporte que no está incluido en s_n. Para $C = 0$, todos los aportes y el resto son cero. Para $C > 0$, el límite de ρ^n permite escoger un corte con la cota estrictamente menor que la tolerancia solicitada. Los signos pueden variar de cualquier manera: por ejemplo, si $a_n = \sigma_n 2^{-n}$ con $\sigma_n \in \{-1, 1\}$, las magnitudes

suman dos y el resto está acotado por 2^{-n}, independientemente de cómo se hayan elegido los signos.

Ese control renuncia a aprovechar las cancelaciones. Queda abierta la posibilidad de que los totales originales converjan precisamente gracias a ellas, aunque los de magnitudes no lo hagan. La alternancia permitirá reconocer esa situación con una estimación de bloques diferente.

Ejercicios de la sección 11.5.

Ejercicio 21. Triangular finita

Prueba la desigualdad $|\sum_{j=q+1}^{p} a_j| \leq \sum_{j=q+1}^{p} |a_j|$ sin suponer convergencia.

Solución. Para longitud uno es igualdad. Si vale hasta p, la triangular da $|\sum_{j=q+1}^{p+1} a_j| \leq |\sum_{j=q+1}^{p} a_j| + |a_{p+1}| \leq \sum_{j=q+1}^{p+1} |a_j|$. Inducción sobre la longitud cubre todos los bloques finitos. En el paso inductivo, distinguimos la suma ya controlada del aporte que se añade. La triangular para esos dos números da la primera desigualdad; la hipótesis inductiva da la segunda. El bloque inicial de un término satisface igualdad, así que la inducción empieza sin ninguna condición adicional. Como todas las operaciones son finitas, la conclusión se aplica incluso a aportes cuyas series divergen. La convergencia será una aplicación posterior del control, no una hipótesis de esta desigualdad.

Ejercicio 22. Signos libres

Sea $\sigma_n \in \{-1, 1\}$ en cada índice. Prueba convergencia absoluta de $a_n = \sigma_n 2^{-n}$ y estima el resto.

Solución. Las magnitudes son 2^{-n} y su serie geométrica tiene suma dos. Por §11.5, la original converge absolutamente. La cola de magnitudes posterior a n tiene suma 2^{-n}, por tanto $|S - s_n| \leq 2^{-n}$. La estimación es independiente de cómo cambian los signos. Después del argumento, la figura 11.4 permite contrastar el mecanismo con el ejemplo del capítulo.

Tomar magnitudes elimina exactamente los signos libres: $|\sigma_n 2^{-n}| = 2^{-n}$. Los totales de magnitudes tienen suma dos y el bloque posterior al índice n tiene suma geométrica 2^{-n}. El criterio absoluto prueba existencia de S y domina su resto por esa cola. La cota no supone regularidad en los signos; permite incluso elegirlos de manera completamente irregular. Para asegurar precisión ε basta hacer $2^{-n} < \varepsilon$.

Ejercicio 23. Orden de las hipótesis

Diagnostica: «Como $|s_n| \leq u_n$ y u_n converge, s_n converge». Escribe una prueba correcta de convergencia absoluta implica convergencia.

Solución. Una cota de valores sólo da acotación. Para reparar, usar $|s_p - s_q| \leq u_p - u_q$. Si u converge, es Cauchy; para $p > q$ tardíos, su incremento no negativo es menor que la tolerancia. El mismo corte controla los bloques originales y C10 produce un límite real de s. Después del argumento, la figura 11.4 permite contrastar el mecanismo con el ejemplo del capítulo.

Una sucesión puede permanecer dentro de una barrera y oscilar indefinidamente: estar acotada no es converger. Lo que caracteriza Cauchy es la distancia entre dos totales tardíos, no la magnitud de cada total. La desigualdad correcta compara esa distancia con el incremento de los totales de magnitudes. Convergencia de estos últimos proporciona un corte que sirve para todos los pares. La completitud produce luego el límite original, evitando asumirlo al comienzo de la prueba.

Ejercicio 24. Sumas y restos

Si las series de a y $|a|$ tienen sumas S, A, demuestra $|S| \leq A$ y $|S - s_n| \leq A - u_n$.

Solución. La triangular finita da $|s_p| \le u_p$; la desigualdad inversa de valor absoluto y C06 permiten pasar al límite, dando $|S| \le A$. Fijado n, para todos $p > n$ vale $|s_p - s_n| \le u_p - u_n$; al tomar el límite de p, el lado izquierdo tiende a $|S - s_n|$ y el derecho a $A - u_n$. El orden de límites da la cota solicitada. La continuidad del valor absoluto puede justificarse sin un teorema adicional: $\big||s_p| - |S|\big| \le |s_p - S| \to 0$. Para el resto, mantenemos el corte n fijo y sólo dejamos variar p. Así s_n y u_n son constantes en ese paso al límite. La comparación finita conserva el orden en el límite y produce una cota no estricta. Como $A - u_n \to 0$, esa cota permite certificar precisiones cada vez menores.

Ejercicio 25. Localizar igualdad

Supón que la serie de a converge absolutamente. Prueba que $|S| = A$ si y sólo si todos los términos tienen un signo común, permitiendo ceros.

Solución. Si todos son no negativos, $S = A$; si todos son no positivos, $S = -A$, por identidades finitas y límites. Para la recíproca definamos $p_n = (|a_n| + a_n)/2 \ge 0$ y $m_n = (|a_n| - a_n)/2 \ge 0$. Sus totales convergen a $P = (A + S)/2$ y $M = (A - S)/2$ por álgebra de límites; $P, M \ge 0$. La igualdad $|S| = A$ fuerza $M = 0$ si $S \ge 0$, o $P = 0$ si $S \le 0$. Una serie no negativa de suma cero tiene cada término cero, pues cada término es menor o igual a un total posterior, que es a lo sumo cero. Así en el primer caso $m_n = 0$ y $a_n \ge 0$; en el segundo $p_n = 0$ y $a_n \le 0$. Si $A = 0$, todos los términos son cero y ambas descripciones sirven.

Las sucesiones p_n y m_n separan los aportes positivos y las magnitudes de los negativos: $a_n = p_n - m_n$ y $|a_n| = p_n + m_n$. Si ambas partes acumuladas fueran positivas, la resta tendría magnitud estrictamente menor que su suma. La igualdad obliga a que una parte acumule cero. Como sus aportes son no negativos, ni uno solo puede ser positivo si la suma es cero. Por eso todos los aportes originales tienen un mismo signo débil, y los ceros son compatibles con cualquiera de las dos descripciones.

11.6. Alternancia: encerrar sin sumar magnitudes

Consideremos $a_n = (-1)^n b_n$ bajo las hipótesis $0 \le b_{n+1} \le b_n$ y $b_n \to 0$. Aquí decrecer significa no crecer: se permiten magnitudes iguales y colas enteramente nulas. En una pareja, la segunda magnitud no supera a la primera; esa comparación permite aprovechar la cancelación. Para que el argumento sirva a Cauchy necesitamos un control que valga para bloques de cualquier longitud, empiecen y terminen en la paridad que sea.

Lema de bloque alternado. Si $c_0 \ge c_1 \ge \cdots \ge c_m \ge 0$, entonces

$0 \le c_0 - c_1 + c_2 - \cdots + (-1)^m c_m \le c_0$. Podemos leer la misma suma de dos maneras. Para verla no negativa, agrupamos desde el comienzo: $(c_0 - c_1) + (c_2 - c_3) + \cdots$. Si el último índice m es par, queda el aporte positivo c_m; si es impar, todos los aportes quedan emparejados. Para acotarla superiormente, dejamos c_0 fuera y escribimos $c_0 - (c_1 - c_2) - (c_3 - c_4) - \cdots$. Si m es impar, restamos también el último c_m; si es par, las diferencias cubren los términos restantes. En ambos casos sólo se restan cantidades no negativas a c_0. Las dos escrituras usan asociatividad de una suma finita y prueban las dos cotas.

Criterio alternado. La serie de $(-1)^n b_n$ converge. Para aplicarle el lema a un bloque desde $q + 1$ hasta p, multipliquemos por el signo de su primer aporte, $(-1)^{q+1}$. La primera magnitud queda positiva y las siguientes alternan; como siguen decreciendo, el lema proporciona $0 \le (-1)^{q+1}(s_p - s_q) \le b_{q+1}$, $\quad |s_p - s_q| \le b_{q+1}$.

Dada $\varepsilon > 0$, el límite $b_j \to 0$ proporciona un corte N con $b_j < \varepsilon$ para $j \ge N$. Si $p > q \ge N$, el primer índice del bloque también satisface $q + 1 \ge N$, y la cota anterior da $|s_p - s_q| < \varepsilon$ para cualquier longitud. Queda probado Cauchy de los totales, y C10 asegura una suma real S. El decrecimiento hizo posible el encierro de bloques; el límite cero hizo pequeño su ancho. Ninguna de las dos hipótesis sustituye a la otra.

La estimación contiene también la orientación del error. Conservemos fijo el corte n y dejemos $p \to \infty$ en la desigualdad firmada del bloque. El orden se conserva en forma no estricta y resulta $0 \le (-1)^{n+1} R_n \le b_{n+1}$, $\quad |R_n| \le b_{n+1}$.

Para n par, el signo $(-1)^{n+1}$ es negativo y la desigualdad dice $s_{n+1} = s_n - b_{n+1} \le S \le s_n$; para n impar, dice $s_n \le S \le s_n + b_{n+1} = s_{n+1}$. El resto tiene el signo del próximo aporte cuando no es cero. Las fronteras pueden coincidir con S, de modo que no corresponde exigir desigualdades estrictas. En particular, cada intervalo $[s_{2k+1}, s_{2k}]$ contiene la suma. Sus inferiores aumentan porque $s_{2k+3} - s_{2k+1} = b_{2k+2} - b_{2k+3} \ge 0$; sus superiores disminuyen porque $s_{2k+2} - s_{2k} = -b_{2k+1} + b_{2k+2} \le 0$. La anchura $s_{2k} - s_{2k+1} = b_{2k+1}$ tiende a cero. Estos intervalos precisan la localización de una suma cuya existencia ya se probó con Cauchy.

En la armónica alternada, $b_n = 1/(n+1)$ cumple las hipótesis y obtenemos $|R_n| \le 1/(n+2)$. La serie converge; su serie de magnitudes es la armónica divergente de §11.2. Se cumplen así las dos obligaciones de una convergencia condicional. Identificar la suma con un logaritmo no hace falta para demostrar su existencia, clasificarla ni estimar su error.

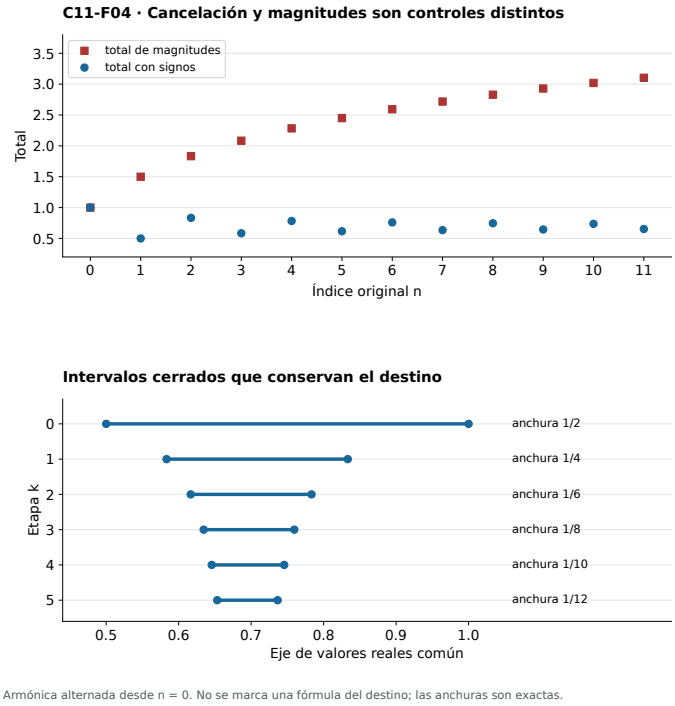


Figura 11.4. La cancelación mantiene los totales alternados en intervalos que se estrechan, aunque los totales de magnitudes crezcan sin barrera. Los extremos de paridad encierran la suma y la anchura es la siguiente magnitud.

k	Extremo inferior s_{2k+1}	Extremo superior s_{2k}	Anchura
0	1/2	1	1/2
1	7/12	5/6	1/4
2	37/60	47/60	1/6
3	533/840	319/420	1/8
4	1627/2520	1879/2520	1/10
5	18107/27720	20417/27720	1/12

La tabla mantiene valores racionales exactos para los dos extremos. Al avanzar una etapa, ambos quedan dentro del intervalo anterior, de modo que cada nueva pareja conserva toda la información previa y reduce la anchura. El eje común de la figura permite leer ese encajamiento sin desplazar artificialmente el destino. Si se suprime el decrecimiento, la alternancia y el término nulo no bastan. Tomemos $d_k = 1/(k+1)$, $b_{2k} = 2d_k$ y $b_{2k+1} = d_k$.

Para cualquier tolerancia, un corte común de las dos paridades muestra $b_n \to 0$. Sin embargo, en $a_n = (-1)^n b_n$ cada pareja suma d_k, y $s_{2m+1} = \sum_{k=0}^{m} 1/(k+1)$ son los totales armónicos. Éstos no están acotados, así que tampoco puede converger la sucesión completa de totales: una extracción de una sucesión convergente hereda su límite por la definición ε–N. La hipótesis que falla se ve entre parejas: $2/(k+2) > 1/(k+1)$ para $k > 0$, por lo que las magnitudes aumentan en esos pasos. La compensación deja cada vez un residuo positivo que vuelve a acumularse.

Ejercicios de la sección 11.6.

Ejercicio 26. Lema alternado

Prueba que una suma finita alternada de magnitudes decrecientes no negativas está entre cero y la primera magnitud.

Solución. Para la cota inferior agrupar pares $c_0 - c_1$, $c_2 - c_3$, etc., dejando el último término positivo si sobra. Todos los sumandos son no negativos. Para la superior, escribir $c_0 - (c_1 - c_2) - (c_3 - c_4) - \cdots$ y restar el último término si el índice final es impar. Las cantidades restadas son no negativas. Ambas escrituras provienen de la misma suma finita. Después del argumento, la figura 11.4 permite contrastar el mecanismo con el ejemplo del capítulo.

Las dos agrupaciones sirven a fines distintos. Agrupar desde el primer aporte muestra que el resultado no es negativo; dejar el primero fuera y agrupar desde el segundo muestra que no supera ese primer aporte. Hay que comprobar la paridad del número de sumandos para tratar el aporte que queda sin pareja. Si termina con signo positivo, se añade en la prueba inferior; si termina con signo negativo, se resta en la superior. Todas las diferencias emparejadas son no negativas por el decrecimiento.

Ejercicio 27. Un corte alternado

Para $a_n = (-1)^n/(n+1)$, prueba convergencia y encuentra un corte que garantice error menor que $1/100$.

Solución. Las magnitudes decrecen y tienden a cero, así que el criterio probado en §11.6 aporta un real S. Su resto satisface $|S - s_n| \le 1/(n+2)$. Tomar $n = 99$ hace esta cota $1/101 < 1/100$ y controla todo corte posterior. No se calcula S para certificar esa precisión. Después del argumento, la figura 11.4 permite contrastar el mecanismo con el ejemplo del capítulo.

El criterio de alternancia se aplica porque $b_n = 1/(n+1)$ es no negativo, no creciente y tiende a cero. El resto se domina por la siguiente magnitud $b_{n+1} = 1/(n+2)$. La elección 99 garantiza el requisito estricto mediante $1/101 < 1/100$. Este corte es suficiente según la cota del criterio; no se afirma que sea el primer índice cuyo error real cumpla la tolerancia. Esa afirmación exigiría información adicional sobre el error exacto, no sólo una cota superior.

Ejercicio 28. El signo del resto

Para una serie $(-1)^n b_n$ bajo las hipótesis de §11.6, demuestra que s_n queda por encima de la suma si n es par y por debajo si es impar.

Solución. El control finito $0 \le (-1)^{n+1}(s_p - s_n) \le b_{n+1}$ pasa al límite con n fijo. Para n par, $0 \le -(S - s_n)$, así que $S \le s_n$; para n impar, $0 \le S - s_n$, así que $s_n \le S$. Las desigualdades son débiles: puede haber igualdad si desaparece el resto. Después del argumento, la figura 11.4 permite contrastar el mecanismo con el ejemplo del capítulo.

La suma del bloque posterior comienza con el signo $(-1)^{n+1}$. Multiplicar por ese signo permite usar el lema con primer aporte positivo. Al pasar al límite obtenemos el resto firmado, y la paridad decide de qué lado de S queda el total. Si las magnitudes posteriores son cero, el resto es cero y el total coincide con S. Por eso «por encima» y «por debajo» deben entenderse con desigualdades no estrictas.

Ejercicio 29. Borrar el decrecimiento

Construye una serie de signos alternados y términos nulos que diverja; explica la hipótesis que falla.

Solución. Tomemos $a_{2k} = 2/(k+1)$ y $a_{2k+1} = -1/(k+1)$. Ambas paridades de magnitudes tienden a cero, así que $a_n \to 0$ por un corte común. Cada pareja suma $1/(k+1)$, y los totales s_{2m+1} son armónicos no acotados. Por tanto la serie diverge. Las magnitudes no decrecen: para $k \geq 1$, $2/(k+2) > 1/(k+1)$. La desigualdad de parejas del lema no puede aplicarse.

Después del argumento, la figura 11.4 permite contrastar el mecanismo con el ejemplo del capítulo. Cada pareja aporta $2/(k+1) - 1/(k+1) = 1/(k+1)$. La subsecuencia de totales al final de las parejas es entonces la armónica y no puede converger. En cambio, los aportes individuales sí tienden a cero: basta un corte común para las dos subsecuencias de magnitudes. Entre parejas, el paso de $1/(k+1)$ a $2/(k+2)$ aumenta para $k > 0$, así que falla el decrecimiento global. Alternar signos y tener término nulo no bastan para aplicar el criterio alternado.

Ejercicio 30. Alternancia eventual

Supón que desde un índice m los términos son $a_{m+k} = \eta(-1)^k b_k$, con $\eta \in \{-1, 1\}$ y b_k decreciente no negativa hacia cero. Prueba convergencia y estima el error en cortes $n \geq m$.

Solución. Aplique §11.6 a la cola reindexada, con un signo global η que no altera las magnitudes de bloques. La serie de términos $(-1)^k b_k$ tiene suma T; la cola con el signo global tiene suma ηT, y añadir el prefijo finito P_m da $S = P_m + \eta T$. En el corte original $n \geq m$, la siguiente magnitud es b_{n-m+1}, por lo que $|S - s_n| \leq b_{n-m+1}$. El resto tiene el signo de $\eta(-1)^{n-m+1}$ salvo cero. No se exige comportamiento alternado del prefijo.

La reindexación hace que el aporte de índice original n corresponda a $k = n - m$. Tras incorporarlo, el siguiente aporte de la cola tiene magnitud b_{n-m+1}, lo que explica el desplazamiento del resto. El prefijo P_m se suma tanto al total como al destino y se cancela al calcular su diferencia. El signo global η cambia la orientación del encierro, pero no la cota de error absoluto. Para $m = 0$ el prefijo es vacío y se recupera el caso inicial.

11.7. Agrupar términos y conservar el recorrido

Agrupar varios aportes consecutivos parece una operación inocente porque sólo modifica paréntesis en sumas finitas. En los totales que observamos sí hay un cambio: al registrar únicamente el final de cada grupo dejamos de ver los índices interiores. Para especificar cuáles conservamos, elijamos una función estrictamente creciente $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y definamos

$$g_0 = \sum_{j=0}^{\phi(0)} a_j, \qquad g_k = \sum_{j=\phi(k-1)+1}^{\phi(k)} a_j \quad (k \geq 1).$$

El primer grupo empieza en cero y cada uno de los siguientes empieza justo después del anterior. La estricta monotonía de ϕ hace que sean finitos y no vacíos. Si t es la sucesión de totales agrupados, entonces $t_0 = g_0 = s_{\phi(0)}$; suponiendo la igualdad hasta $k-1$, añadir $g_k = s_{\phi(k)} - s_{\phi(k-1)}$ da $t_k = s_{\phi(k)}$. Por inducción, los totales agrupados son exactamente una extracción de los originales. Además $\phi(0) \geq 0$ y $\phi(k+1) \geq \phi(k) + 1$ implican $\phi(k) \geq k$. Si $s_n \to S$, un corte N de esa convergencia sirve para t_k cuando $k \geq N$. Agrupar conserva la suma de una serie convergente sin permutar sus términos.

La vuelta no se sigue de esa identidad. Para los aportes $(1, -1, 1, -1, \ldots)$, elijamos $\phi(k) = 2k + 1$: cada grupo suma cero y todos los t_k son cero. Los totales originales pares siguen valiendo uno y no convergen. La agrupación observó sólo una extracción convergente y ocultó los otros totales. Para recuperar el recorrido completo necesitamos medir cuánto puede alejarse un total interior del final de su grupo. Si $n > \phi(0)$, existe un único $k \geq 1$ con $\phi(k-1) < n \leq \phi(k)$: el menor índice cuyo extremo alcanza n existe porque $\phi(k) \geq k$, y la

estricta monotonía determina el intervalo. Supongamos que $t_k \to S$ y que, para todo $\varepsilon > 0$, existe K tal que

$$k \geq K, \quad \phi(k-1) < n \leq \phi(k) \quad \Longrightarrow \quad |s_n - s_{\phi(k)}| < \varepsilon,$$

entonces $s_n \to S$. En efecto, para una tolerancia dada elegimos un corte de grupos que haga menores que $\varepsilon/2$ tanto las distancias interiores como $|t_k - S|$, y tomamos un corte común $K \geq 1$. Todo índice original $n \geq \phi(K-1)+1$ pertenece a un grupo con $k \geq K$. La desigualdad $|s_n - S| \leq |s_n - s_{\phi(k)}| + |t_k - S| < \varepsilon$ controla todos esos índices, incluidos los finales, donde el primer sumando es cero. El control interior es uniforme dentro de cada grupo: no se limita a una posición elegida de antemano.

Una cota común de longitudes permite obtener ese control a partir de $a_n \to 0$. Supongamos que cada grupo tiene a lo sumo $M \geq 1$ aportes. La diferencia $s_{\phi(k)} - s_n$, para un índice n de ese grupo, suma a lo sumo M de sus aportes. Dada $\varepsilon > 0$, escojamos J con $|a_j| < \varepsilon/M$ para $j \geq J$. Si $k \geq \max\{1, J\}$, todo índice del grupo satisface $j \geq \phi(k-1)+1 \geq k \geq J$. La triangular finita da una magnitud estrictamente menor que ε para cada bloque no vacío; para el bloque vacío vale cero. Junto con convergencia de los finales, esto prueba la de todos los totales. El número M impide acumular una cantidad ilimitada de errores pequeños.

Las longitudes crecientes pueden ocultar excursiones persistentes aun cuando $a_n \to 0$. En el bloque $m \geq 1$ coloquemos m aportes $1/m$ seguidos de m aportes $-1/m$. Los bloques anteriores contienen $2(1+\cdots+(m-1)) = m(m-1)$ aportes, de modo que el bloque ocupa desde $m(m-1)$ hasta $m(m+1)-1$; el siguiente empieza justo después y estos intervalos cubren $\mathbb{N}$. Cada bloque deja el total cero al terminar, mientras que la mitad positiva alcanza uno en el índice $m^2 - 1$. Para hacer pequeños todos los aportes tardíos basta escoger M con $1/M < \varepsilon$ y cortar en el comienzo del bloque M: después, $|a_n| \leq 1/M < \varepsilon$. Pero dado cualquier corte de totales podemos elegir un bloque completo posterior y comparar su mitad y su final, separados por uno. Los totales no son de Cauchy. Si agrupamos cada bloque entero, en cambio, todos los totales agrupados valen cero.

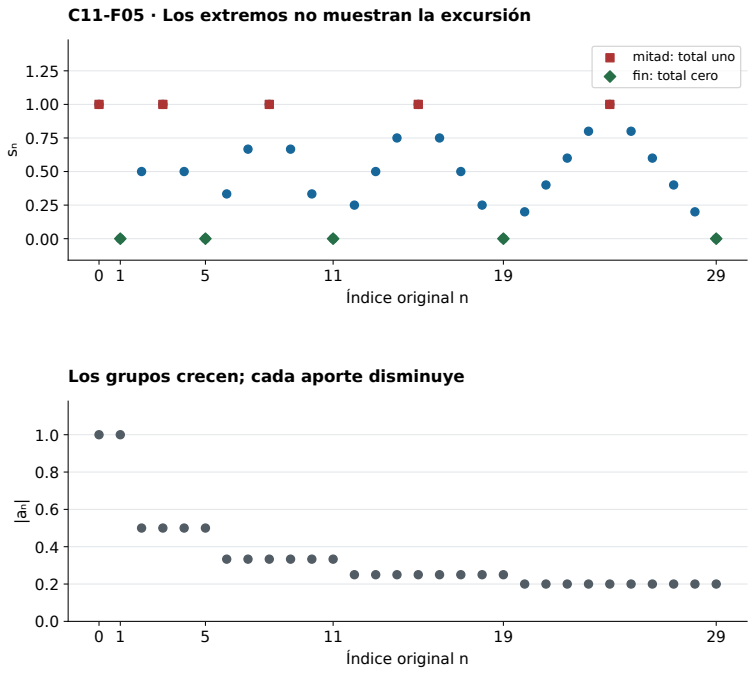


Figura 11.5. Cada grupo termina con total cero, pero su mitad alcanza uno. Los términos se hacen pequeños y los grupos más largos: conservar sólo sus extremos borra excursiones que impiden convergencia.

La figura conserva precisamente las posiciones que una agrupación completa de bloques omitiría. La cota de longitud no es necesaria para toda agrupación: una serie ya convergente permite grupos arbitrariamente largos y conserva su suma. Su función en el resultado anterior es suficiente y concreta: junto con término nulo, garantiza que la convergencia observada en los finales se extienda a los índices interiores.

Ejercicios de la sección 11.7.

Ejercicio 31. Extremos de grupos

Prueba la identidad $t_k = s_{\phi(k)}$ para los grupos consecutivos de §11.7.

Solución. Para $k = 0$, $t_0 = g_0 = s_{\phi(0)}$. Si vale para $k-1$, sumar el bloque desde $\phi(k-1)+1$ hasta $\phi(k)$ da $t_k = s_{\phi(k-1)} + [s_{\phi(k)} - s_{\phi(k-1)}] = s_{\phi(k)}$. Inducción prueba la identidad sin reordenar términos. Después del argumento, la figura 11.5 permite contrastar el mecanismo con el ejemplo del capítulo.

El primer grupo debe incorporar todos los aportes desde cero hasta $\phi(0)$. Cada grupo posterior comienza justo una posición después del extremo previo y termina en el nuevo extremo. Por eso sumar grupos consecutivos no duplica ni omite ningún aporte del prefijo. La identidad de bloques expresa exactamente ese hecho y hace funcionar el paso inductivo. Estamos cambiando la frecuencia con que observamos los totales; no estamos cambiando el orden original de los términos.

Ejercicio 32. Una agrupación engañosa

Agrupa por parejas la serie $(-1)^n$ y compara su convergencia con la original.

Solución. Con $\phi(k) = 2k + 1$, cada grupo es $1 - 1 = 0$, así que la serie agrupada tiene suma cero. La original tiene totales par uno e impar cero y no es Cauchy. La agrupación sólo conserva una extracción de sus totales y no suministra control de los índices pares omitidos. Después del argumento, la figura 11.5 permite contrastar el mecanismo con el ejemplo del capítulo.

Los extremos elegidos son los índices impares $1, 3, 5, ...$, donde los totales originales valen cero. La agrupación los observa y no registra los totales pares, iguales a uno. Por eso todos los grupos pueden sumar cero sin que el recorrido completo converja. El ejemplo no contradice que agrupar una serie convergente conserve su suma: la serie de partida no cumple esa hipótesis. Una subsucesión convergente no demuestra por sí sola convergencia de toda la sucesión.

Ejercicio 33. Grupos de longitud acotada

Prueba que si $a_n \to 0$, los grupos tienen longitud a lo sumo $M \geq 1$ y la serie agrupada converge, entonces la original converge a la misma suma.

Solución. Escojamos J con $|a_j| < \varepsilon/(2M)$ para $j \geq J$ y un corte $K \geq \max\{1, J\}$ de grupos con $|t_k - S| < \varepsilon/2$. Para $k \geq K$, todo índice del grupo es al menos $\phi(k-1)+1 \geq k \geq J$. La diferencia de un total interior al extremo suma a lo sumo M magnitudes, luego es menor que $\varepsilon/2$ o cero. Todo $n \geq \phi(K-1)+1$ pertenece a esos grupos, así que $|s_n - S| \leq |s_n - t_k| + |t_k - S| < \varepsilon$.

Después del argumento, la figura 11.5 permite contrastar el mecanismo con el ejemplo del capítulo. Para cada índice original tardío existe un grupo que lo contiene, porque los extremos crecen y los grupos cubren los índices sin huecos. Su distancia al total del extremo se controla por a lo sumo M aportes pequeños. La triangular reparte el error en esa separación interior y la distancia del extremo a S, con presupuestos de $\varepsilon/2$. El corte original se fija en el comienzo del grupo K: desde allí todos los índices están cubiertos por ambos controles. Los totales anteriores a ese corte no afectan la conclusión.

Ejercicio 34. Longitud no necesaria

Construye una serie convergente agrupada en bloques de longitud no acotada y explica por qué eso no contradice la condición suficiente de grupos cortos.

Solución. La geométrica $a_n = 2^{-n}$ converge a dos. Tomemos $\phi(k) = (k+1)^2 - 1$: el grupo inicial tiene un término y el grupo $k \geq 1$ tiene longitud $2k+1$, no acotada. Por la dirección directa de §11.7, la agrupada conserva suma dos. La cota de longitud es suficiente para recuperar convergencia a partir de extremos y término nulo, no necesaria para toda agrupación de una serie ya convergente.

La longitud del grupo $k \geq 1$ es $\phi(k) - \phi(k-1) = (k+1)^2 - k^2 = 2k+1$, que crece sin cota. Aun así, sus totales son $s_{\phi(k)}$ y forman una subsecuencia de una sucesión ya convergente a dos. Una condición suficiente describe una vía para probar una conclusión bajo ciertas hipótesis; no afirma que la conclusión falle siempre que alguna de ellas falte. Aquí la convergencia completa está establecida antes de elegir la agrupación.

Ejercicio 35. Excursiones que se reducen

En el bloque $m \geq 1$, coloca m términos h_m/m y luego m términos $-h_m/m$, donde $0 \leq h_m \leq 1$. Demuestra que la serie converge si y sólo si $h_m \to 0$, y decide su suma.

Solución. El bloque ocupa $m(m-1) \leq n \leq m(m+1) - 1$. Sus totales empiezan en cero, suben a h_m y vuelven a cero. Si $h_m \to 0$, todo total de los bloques tardíos está entre cero y h_m, así que converge a cero por un corte en el comienzo de un bloque. Si la serie converge, los totales finales cero fuerzan suma cero por una extracción con índices crecientes; los totales de mitad son h_m y deben tender también a cero. Por tanto la equivalencia y suma quedan establecidas. Además $|a_n| \leq 1/m \to 0$ en todo caso: ese control por sí solo no decide el resultado.

Después del argumento, la figura 11.5 permite contrastar el mecanismo con el ejemplo del capítulo. Después de cada bloque completo el total es cero, porque las dos mitades se compensan exactamente. Dentro del bloque, todos los totales están entre cero y h_m, y la cima alcanza h_m. Si esas alturas tienden a cero, el encierro controla todos los índices posteriores, no sólo los finales. Si la serie converge, los finales fuerzan límite cero y las cimas deben acercarse a ese mismo límite. La serie converge exactamente cuando desaparecen las excursiones interiores, aunque las longitudes crezcan.

11.8. Elegir un control y certificar el error

Una prueba de convergencia puede dejar sin calcular la suma y, aun así, proporcionar una aproximación útil. En la armónica alternada conocemos dos totales que la encierran y podemos calcularlos exactamente. La cuestión pasa a ser qué número elegir dentro de ese intervalo y qué error queda garantizado por sus fronteras. Supongamos que ya está probada la existencia de S y disponemos de $L_n \leq S \leq U_n$. Si usamos un extremo como aproximación, la anchura completa controla su distancia a S. El punto medio $M_n = (L_n + U_n)/2$ equilibra las dos distancias a las fronteras y reduce a la mitad el peor error:

$|S - M_n| \leq \frac{U_n - L_n}{2}$. Al restar M_n del encierro, obtenemos $-(U_n - L_n)/2 \leq S - M_n \leq (U_n - L_n)/2$, que prueba la cota. Ese promedio es un nuevo real y no tiene por qué coincidir con un total. Por ejemplo, los dos primeros totales geométricos 1 y $3/2$ tienen promedio $5/4$, que no aparece en su sucesión creciente; esos dos totales distinguen los objetos, aunque no encierren la suma dos. La garantía de error requiere fronteras ya demostradas, no una ventana sugerida sólo por la apariencia de algunos valores.

Para la armónica alternada sí tenemos fronteras certificadas: $L_k = s_{2k+1}$ y $U_k = s_{2k}$, con anchura $1/(2k+2)$. Su promedio tiene error a lo sumo $1/(4k+4)$. En $k = 2$, la suma finita $s_4 = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 = 47/60$ y el aporte siguiente dan $s_5 = 37/60$. Por ello,

$$\frac{37}{60} \leq S \leq \frac{47}{60}, \qquad M_2 = \frac{7}{10}, \qquad |S - M_2| \leq \frac{1}{12} < \frac{1}{10}.$$

Seis aportes bastan para construir ambos extremos y obtener error menor que $1/10$, sin identificar el valor exacto de S. El número $7/10$ es la aproximación elegida: una cota positiva de error permite otros valores de S dentro del encierro y no fuerza igualdad con el promedio.

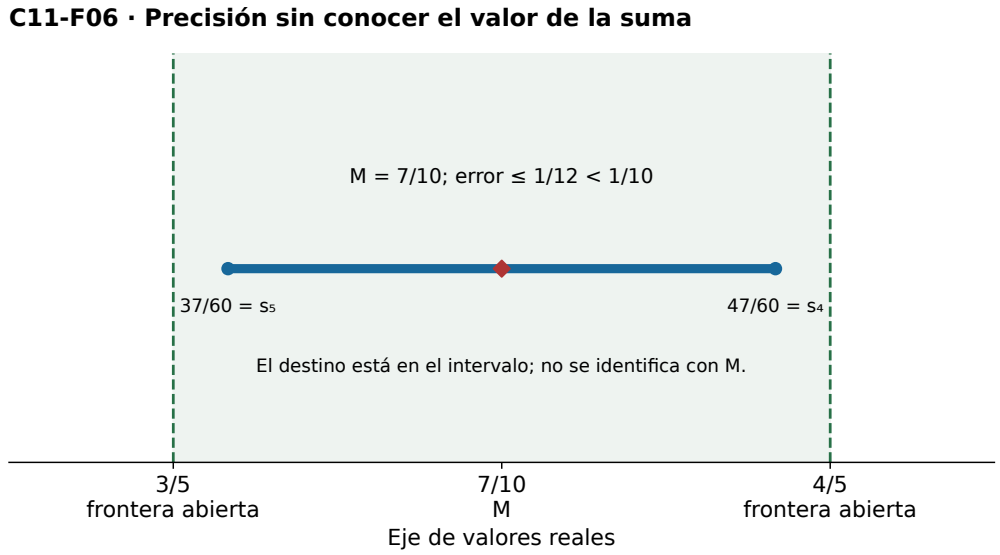


Figura 11.6. El intervalo entre s_5 y s_4 contiene la suma de la armónica alternada. Su punto medio, siete décimos, tiene error a lo sumo un doceavo, menor que un décimo, sin afirmar que sea la suma exacta.

En general, de $|S - s_n| \leq E_n$ sólo obtenemos un error estrictamente menor que ε si la información adicional lo garantiza; la condición suficiente es $E_n < \varepsilon$. Pedir únicamente $E_n \leq \varepsilon$ deja abierta la igualdad. En la geométrica 2^{-n}, el resto exacto 2^{-n} vale $1/16$ en $n = 4$ y sólo baja de esa tolerancia en $n = 5$, que incorpora seis términos. El origen de los índices y el carácter estricto de la precisión forman parte del certificado.

También las operaciones entre series se justifican empezando por los totales finitos. Sean las series de a, b convergentes a A, B y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Distribuir los escalares y sumar término a término, o demostrarlo por inducción, proporciona $\sum_{j=0}^{n}(\alpha a_j + \beta b_j) = \alpha \sum_{j=0}^{n} a_j + \beta \sum_{j=0}^{n} b_j$.

Las reglas de límites de C06 dan entonces convergencia y suma $\alpha A + \beta B$. Las hipótesis de convergencia son necesarias para esa aplicación: los aportes constantemente uno y constantemente menos uno producen dos series divergentes, aunque al sumarlos término a término obtengamos la serie nula. No existen en ese caso dos sumas reales previas a las que aplicar la regla. Para eliminar un prefijo de longitud m, pongamos $c_k = a_{m+k}$ y $P_m = \sum_{j=0}^{m-1} a_j$, con $P_0 = 0$. Sus totales t_n son $s_{m+n} - P_m$. Si $s_n \to S$, convergen a $S - P_m$; recíprocamente, si la cola converge a T, escribir $s_j = P_m + t_{j-m}$ para $j \geq m$ prueba que la original converge a $P_m + T$. El caso $m = 0$ devuelve el proceso inicial sin formar un prefijo no vacío.

Una muestra finita de totales puede orientar la búsqueda de un control, pero no determina lo que vendrá después. Podemos conservar todos los aportes observados y continuar con ceros, obteniendo una serie convergente, o continuar con unos, obteniendo totales que crecen sin barrera. La prueba necesita una regla que alcance la cola completa. Cuando esa regla proporciona además una cota evaluable de resto, podemos convertir la existencia de la suma en un corte útil para la precisión solicitada.

Ejercicios de la sección 11.8.

Ejercicio 36. Una tolerancia estricta

Para $\sum 2^{-n}$, encuentra el primer índice de corte que garantiza error estrictamente menor que $1/16$, y el número de términos utilizados.

Solución. El resto exacto es 2^{-n}. Se necesita $2^{-n} < 1/16 = 2^{-4}$, así que el primer índice es $n = 5$ y se suman seis términos. En $n = 4$ el error es exactamente la tolerancia. Después del argumento, la figura 11.3 permite contrastar el mecanismo con el ejemplo del capítulo. Para razón $1/2$, $s_n = 2(1 - 2^{-(n+1)}) = 2 - 2^{-n}$, así que $S - s_n = 2^{-n}$. La función del índice disminuye estrictamente; en cuatro vale $1/16$ y en cinco vale $1/32$. Todos los índices menores tienen un error mayor o igual que $1/16$, lo que demuestra que cinco es realmente el primero. Contar desde cero da seis aportes. Aquí podemos afirmar minimalidad porque conocemos el error exacto, no sólo una estimación.

Ejercicio 37. Certificado sin suma conocida

En la armónica alternada, usa s_4, s_5 para obtener un intervalo y una aproximación de error menor que $1/10$.

Solución. La prueba de §11.6 da $s_5 \le S \le s_4$. Sumando finitamente, $s_4 = 47/60$ y $s_5 = 37/60$. El punto medio es $7/10$ y el semiancho $1/12 < 1/10$. Por tanto $|S - 7/10| \le 1/12$; no se identifica S con ese punto medio. Después del argumento, la figura 11.6 permite contrastar el mecanismo con el ejemplo del capítulo.

La alternancia proporciona primero un encierro válido: el total par s_4 está arriba y el impar s_5 abajo. Luego hacemos el cálculo finito con denominador común 60. La anchura es $10/60 = 1/6$, y el punto medio reduce el peor error a $1/12$. Como $1/12 < 1/10$, satisface la precisión solicitada. El promedio no se presenta como valor exacto ni requiere una expresión cerrada para la suma de la serie.

Ejercicio 38. Linealidad con dominio de validez

Prueba linealidad de la suma para dos series convergentes. Muestra por qué no permite asignar sumas a dos series divergentes.

Solución. La identidad finita de §11.8 da totales $\alpha s_n + \beta t_n$. C06, con $s_n \to A$ y $t_n \to B$, prueba suma $\alpha A + \beta B$. Las hipótesis no se borran: las series de términos uno y menos uno divergen, pero su suma término a término es la serie cero convergente. No existen dos sumas reales previas que puedan sumarse en ese ejemplo. La identidad para totales se verifica antes de tomar límites: sumar hasta n los aportes $\alpha a_j + \beta b_j$ da $\alpha s_n + \beta t_n$. El álgebra de límites sólo puede usarse cuando $s_n \to A$ y $t_n \to B$ son hipótesis demostradas. La cancelación de los aportes uno y menos uno produce una serie cero, pero los dos procesos originales carecen de sumas reales. Una combinación puede converger sin que esté permitido atribuir sumas a sus componentes divergentes.

Ejercicio 39. Cambiar sólo un prefijo

Si a y b coinciden para $n \ge m$, demuestra equivalencia de convergencia y relaciona sus sumas, incluyendo $m = 0$.

Solución. Para todo $n \ge m$, sus totales difieren en $D = \sum_{j=0}^{m-1}(a_j - b_j)$; en $m = 0$ la suma vacía es cero. Si un proceso converge, el otro converge sumando o restando la constante D en su cola. Cuando ambas sumas existen, $S_a - S_b = D$. Los términos pueden ser distintos y tener convergencia equivalente sin igualdad de sumas. Para $n \ge m$, la diferencia de los totales contiene un prefijo de diferencias y una cola de ceros. Por eso queda la constante D y ya no depende de n. Si $s_n^b \to S_b$, entonces $s_n^a = s_n^b + D \to S_b + D$; la dirección inversa usa $-D$. Para $m = 0$ no hay prefijo, $D = 0$, y las sucesiones coinciden desde el inicio. Convergencia equivalente no significa suma idéntica cuando el prefijo sí cambia.

Ejercicio 40. Dos mecanismos en una sola serie

Sea $a_n = (-1)^n/(n + 1) + e_n$ con $|e_n| \le 2^{-n}$. Prueba convergencia, una cota de resto y que la convergencia es condicional.

Solución. La alternada tiene suma B y error a lo sumo $1/(n+2)$. La perturbación geométricamente dominada converge absolutamente a E, con error a lo sumo 2^{-n}. Linealidad da suma $S = B + E$, y triangular da $|S - s_n| \leq 1/(n+2) + 2^{-n}$. Para demostrar que no es absoluta, la triangular implica $1/(n+1) \leq |a_n| + |e_n|$. Si la serie de $|a_n|$ convergiera, sus totales y los de $|e_n|$ estarían acotados; sumando esta desigualdad, los totales armónicos quedarían acotados, contradicción. La original converge y sus magnitudes no, de modo que es condicional.

Después del argumento, la figura 11.4 permite contrastar el mecanismo con el ejemplo del capítulo. La suma combina dos controles compatibles: cancelación alternada para el componente armónico y control absoluto para la perturbación. La triangular suma sus restos y proporciona un certificado que tiende a cero. Para excluir convergencia absoluta de la mezcla, escribimos el componente armónico como $a_n - e_n$ y tomamos magnitudes. La comparación obliga a que una hipotética suma absoluta de la mezcla, junto con la suma absoluta de la perturbación, acote la armónica. Como eso es imposible, la perturbación no puede eliminar su carácter condicional.

Capítulo 12

Qué hace una función

Al elevar al cuadrado, las entradas -2 y 2 llegan a la misma salida 4. Si sólo conocemos ese resultado, hemos perdido la posibilidad de reconocer cuál de las dos entradas se utilizó. Pero la regla también deja salidas sin alcanzar: ningún real tiene cuadrado negativo. Para describir ambas cosas necesitamos saber dónde se permiten las entradas y dónde se declaran las salidas; la expresión x^2 por sí sola no contiene esos datos.

Las sucesiones que hemos estudiado son funciones cuyo dominio es el conjunto de los naturales. Al admitir otros dominios podremos transportar intervalos, seleccionar entradas por sus salidas y encadenar transformaciones. Las bolas y vecindades de C04 servirán para medir conjuntos de entradas próximos a un punto. Las preguntas iniciales son algebraicas y conjuntistas: qué se alcanza, qué se identifica y qué puede deshacerse, antes de introducir límites de funciones o continuidad.

12.1. Una función tiene un tipo

Consideremos dos maneras de declarar la regla del cuadrado:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2, \qquad g : [0,\infty) \to [0,\infty), \quad g(x) = x^2.$$

En ambas podemos introducir 2 y obtener 4, pero -2 sólo está admitido en la primera. También difieren los conjuntos declarados de salidas. La coincidencia de algunos cálculos no identifica esos objetos: cada evaluación debe hacerse dentro del dominio de la función que estamos utilizando. Una función $f : D \to E$ consta de un dominio D, un codominio E y una asignación que a cada $x \in D$ hace corresponder exactamente un $f(x) \in E$. «Cada» impide dejar entradas sin salida; «exactamente un» impide asignar dos salidas distintas a una misma entrada. No impide que entradas distintas compartan salida.

Su **grafo** es el conjunto $G_f = \{(x, f(x)) : x \in D\} \subseteq D \times E$. Adoptamos la convención tipada: dos funciones son iguales cuando sus dominios, sus codominios y sus asignaciones coinciden. El grafo registra todas las evaluaciones, pero puede dejar invisible una parte del codominio. Por ejemplo, las aplicaciones $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\mathbb{R} \to [0,\infty)$ dadas por x^2 tienen los mismos pares (x, x^2). La primera declara además las salidas negativas, aunque no las alcance; la segunda declara únicamente salidas que sí alcanza. Bajo nuestra convención son funciones distintas, y esa diferencia será decisiva al pedir una inversa.

La unicidad de la definición se comprueba después de fijar una entrada. Si se permiten simultáneamente los dos valores $\pm\sqrt{x}$ para $x > 0$, esa entrada recibe dos salidas y la regla no define una función real. En $f(x) = x^2$, en cambio, tanto 2 como -2 reciben una sola salida, aunque sea la misma. La propiedad de impedir esa coincidencia entre entradas distintas se llama inyectividad; no forma parte de la definición de función.

La notación también distingue niveles: f es la asignación completa, $f(2) = 4$ es un valor cuando 2 pertenece al dominio y G_f es un conjunto de pares. La gráfica cartesiana representa ese conjunto cuando dominio y codominio están en $\mathbb{R}$. Una tabla o un dibujo de flechas pueden mostrar las mismas evaluaciones desde otra perspectiva, pero una tabla parcial deja abiertas las entradas que no aparecen en ella.

Si fijamos el mismo tipo $f, g : D \to E$, la igualdad se prueba comparando $f(x)$ y $g(x)$ para toda entrada $x \in D$. Cada par de un grafo pertenecerá entonces al otro; recíprocamente, si los grafos coinciden, el par $(x, f(x))$ también pertenece al de g y su salida única obliga a

$f(x) = g(x)$. Tres evaluaciones sólo prueban tres igualdades. Si las entradas observadas son r_1, r_2, r_3, las funciones reales $f(x) = 0$ y $g(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$ coinciden en ellas y difieren en cualquier real distinto de las tres.

Para una sucesión $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $a_n = n^2$, el grafo contiene $(0, 0), (1, 1), (2, 4), \ldots$. La entrada $1/2$ no está autorizada y el par $(1/2, 1/4)$ no pertenece a ese grafo. Sí pertenece al de la función real $x \mapsto x^2$. Una curva que una los puntos de la sucesión puede ayudar a compararlos, pero añade evaluaciones de otra función; no amplía el dominio original.

El dominio también impide evaluar fórmulas en entradas prohibidas. Para $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $h(x) = 1/x$, la expresión $h(0)$ no designa un valor. Asignar un número en cero supondría construir otra función, con nuevo dominio y una regla adicional en esa entrada. La función ya declarada no se modifica al escribir una evaluación que su tipo excluye. El dibujo de flechas del cuadrado en un dominio finito permite ver las dos cuestiones que estudiaremos: hay salidas compartidas y hay salidas declaradas sin entrada. Para pasar de unas pocas evaluaciones a conjuntos enteros, necesitamos definir con precisión qué significa reunir todas las salidas o seleccionar todas las entradas que cumplen una condición.

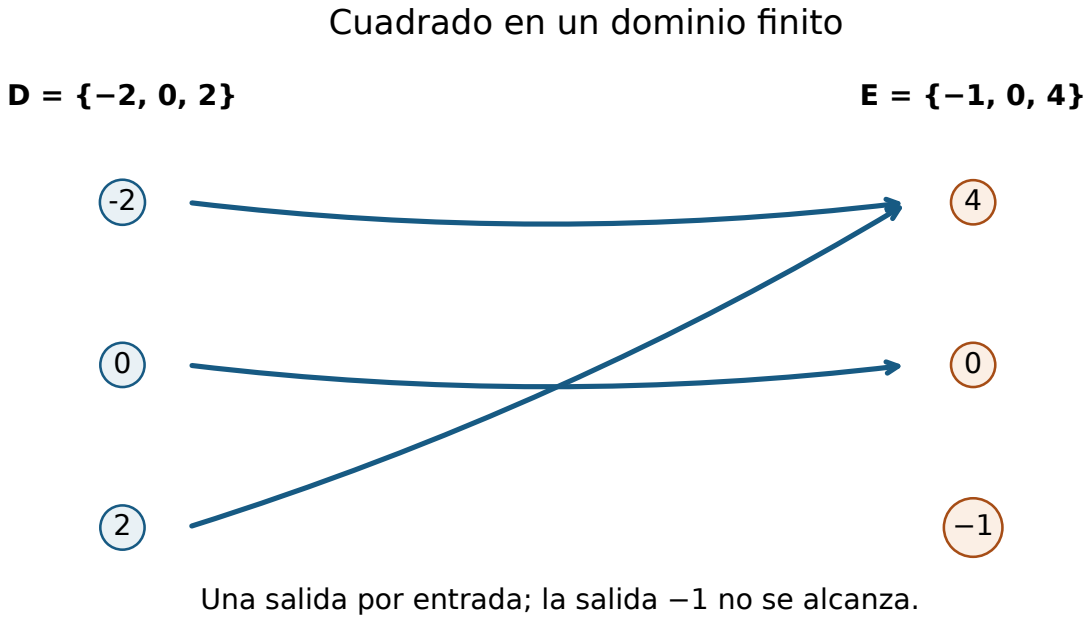


Figura 12.1. En el dominio finito {-2,0,2}, el cuadrado asigna una salida a cada entrada; dos entradas comparten 4 y el codominio {-1,0,4} contiene una salida no alcanzada.

Ejercicios de la sección 12.1.

Ejercicio 1. La misma regla, tres objetos

Compara $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ y $h : [0, \infty) \to [0, \infty)$, todas dadas por x^2. Determina cuáles tienen el mismo grafo y cuáles son iguales como funciones tipadas.

Solución. g y h tienen exactamente los pares (x, x^2) con $x \geq 0$, luego el mismo grafo. Sus codominios difieren, así que no son iguales. El grafo de f contiene además, por ejemplo, $(-1, 1)$, ausente de los otros dos. f tiene distinto dominio de g y h. Ningún par es igual como función tipada. Todas coinciden numéricamente en entradas no negativas. Conviene comparar los datos uno por uno. Las funciones g y h tienen el mismo dominio y los mismos valores, por lo que sus grafos coinciden, pero sus codominios no. La función f tiene otro dominio y admite pares con primera coordenada negativa. La igualdad numérica $f(x) = g(x) = h(x)$ para $x \geq 0$ sólo compara evaluaciones compartidas. Bajo la convención tipada del capítulo, ninguna pareja coincide en los tres datos necesarios para ser el mismo objeto.

Ejercicio 2. Una relación que debe repararse

En $D = \{0, 1, 2\}$ y $E = \{0, 1, 4\}$ considera $R = \{(0, 0), (1, 1), (1, 4)\}$. Explica por qué no es el grafo de una función $D \to E$ y construye una reparación eliminando un par y añadiendo otro.

Solución. La entrada 1 tiene dos salidas distintas y la entrada 2 no tiene ninguna. Eliminamos $(1, 4)$ y añadimos $(2, 4)$; quedan $(0, 0), (1, 1), (2, 4)$. Cada entrada de D tiene exactamente una salida en E. Sólo borrar o sólo añadir no repararía las dos deficiencias. Hay dos fallos independientes: falta existencia de salida para la entrada dos y falta unicidad para la entrada uno. Eliminar $(1, 4)$ deja una sola salida para uno; añadir $(2, 4)$ proporciona la salida ausente. La relación reparada es $\{(0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$. Verificar que cada primera coordenada de D aparece una vez acredita ambas condiciones. También hay otras reparaciones posibles; no se exige que la nueva función sea sobreyectiva.

Ejercicio 3. Ninguna tabla finita decide toda la función

Dado un conjunto finito $A \subseteq \mathbb{R}$, construye dos funciones distintas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que coincidan en todas las entradas de A.

Solución. Como A es finito y $\mathbb{R}$ infinito, existe $t \in \mathbb{R} \setminus A$. Por ejemplo, si A no es vacío, $t = 1 + \sum_{a \in A} |a|$ supera todo elemento de A; si es vacío, sirve $t = 0$. Definimos $f(x) = 0$ para todo real y $g(x) = 1$ cuando $x = t$, $g(x) = 0$ en otro caso. Son funciones del mismo tipo, coinciden en A y difieren en t. La tabla de A no determina sus valores restantes.

La elección explícita de t evita depender de una tabla concreta. Si A no es vacío, cada $a \in A$ satisface $a \leq |a| \leq \sum_{z \in A} |z| < t$, por lo que t está fuera de A. Las funciones construidas asignan una salida única a cada real y tienen el mismo tipo. Para toda entrada observada ambas valen cero, pero en t valen cero y uno. Incluso una tabla con muchísimas entradas finitas deja sin determinar otras evaluaciones.

Ejercicio 4. Identidad extensional

Prueba que para $f, g : D \to E$ la igualdad $G_f = G_g$ equivale a $f(x) = g(x)$ para todo $x \in D$. Explica por qué deben fijarse los tipos para concluir $f = g$.

Solución. Si los grafos coinciden, $(x, f(x)) \in G_g$, de modo que por unicidad de salida de g, $f(x) = g(x)$. Recíprocamente, igualdad de valores para toda entrada hace que cada par $(x, f(x))$ sea $(x, g(x))$ y viceversa; los grafos coinciden. Con dominio y codominio iguales, la convención tipada da $f = g$. Con codominios diferentes, la igualdad de grafos no basta, como muestran las dos versiones del cuadrado.

Para deducir igualdad de valores desde igualdad de grafos, el par $(x, f(x))$ debe aparecer también en el grafo de g. Como su primera coordenada es la misma entrada x y g tiene salida única, su segunda coordenada sólo puede ser $g(x)$. La dirección contraria compara cada par en ambos sentidos. El grafo no registra elementos del codominio que nunca se alcanzan; por eso hay que fijar también los codominios para concluir igualdad de objetos tipados.

Ejercicio 5. Discreto frente a real

Para $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $a_n = 2n + 1$, y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$, determina la relación entre sus grafos. ¿Es la sucesión una recta?

Solución. $G_a = \{(n, 2n + 1) : n \in \mathbb{N}\} \subsetneq G_f$. La inclusión es estricta porque $(1/2, 2)$ pertenece a G_f y no a G_a. La sucesión tiene dominio $\mathbb{N} = \{0, 1, ...\}$ y grafo discreto; la recta representa el grafo de f. El mismo cálculo en entradas naturales no identifica los dos objetos. Cada índice natural también es real, y ambas asignaciones producen $2n + 1$ allí; esto prueba la inclusión de grafos. La entrada $1/2$ demuestra que la inclusión es propia. Un dibujo que una los puntos de la sucesión añade evaluaciones para entradas que no pertenecen a $\mathbb{N}$. Esos puntos intermedios forman parte del grafo de la función real, no del grafo de la sucesión. La expresión algebraica compartida no elimina la diferencia de dominios.

12.2. Imagen: transportar un conjunto

Si introducimos un conjunto A de entradas permitidas, podemos reunir las salidas que produce alguna de ellas. Para $f : D \to E$ y $A \subseteq D$, la **imagen directa** es

$$f[A] = \{y \in E : \text{existe } x \in A \text{ con } f(x) = y\}.$$

Los corchetes distinguen una operación sobre conjuntos de la evaluación en un elemento. Por ejemplo, $f(2)$ es una salida, mientras $f[\{2\}] = \{f(2)\}$ es el conjunto que contiene esa salida. La imagen total $f[D]$ está contenida en el codominio E, pero puede dejar fuera elementos declarados: una cosa es permitir una salida y otra encontrar una entrada que la produzca. Pertenecer a $f[A]$ exige un testigo: una entrada $x \in A$ con $f(x) = y$. Resolver la ecuación sólo cumple una parte de la tarea; el testigo debe estar en el conjunto de entradas considerado. Para determinar exactamente una imagen probamos dos inclusiones: que toda salida producida está en el conjunto anunciado y que cada elemento de ese conjunto se produce realmente.

Sea $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $q(x) = x^2$, y $A = [-2, 1]$. Afirmamos $q[A] = [0, 4]$. Si $x \in A$, entonces $|x| \le 2$ y $0 \le x^2 \le 4$, de modo que $q[A] \subseteq [0, 4]$. Recíprocamente, para $y \in [0, 4]$, la raíz real no negativa $\sqrt{y}$ existe y satisface $0 \le \sqrt{y} \le 2$. La entrada $x = -\sqrt{y}$ está en $[-2, 0] \subseteq A$ y $x^2 = y$. Por tanto $[0, 4] \subseteq q[A]$. La existencia y unicidad de la raíz no negativa se acreditaron en §10.7; no las deducimos de un teorema posterior sobre funciones.

La elección de la raíz negativa conserva el testigo dentro de A. La candidata positiva $\sqrt{4} = 2$ quedaría fuera de $[-2, 1]$, mientras que $-\sqrt{4} = -2$ sí pertenece. La misma ecuación puede tener varias soluciones reales y sólo algunas ser entradas admitidas en el problema. Ese recorte explica por qué la imagen depende del conjunto de partida.

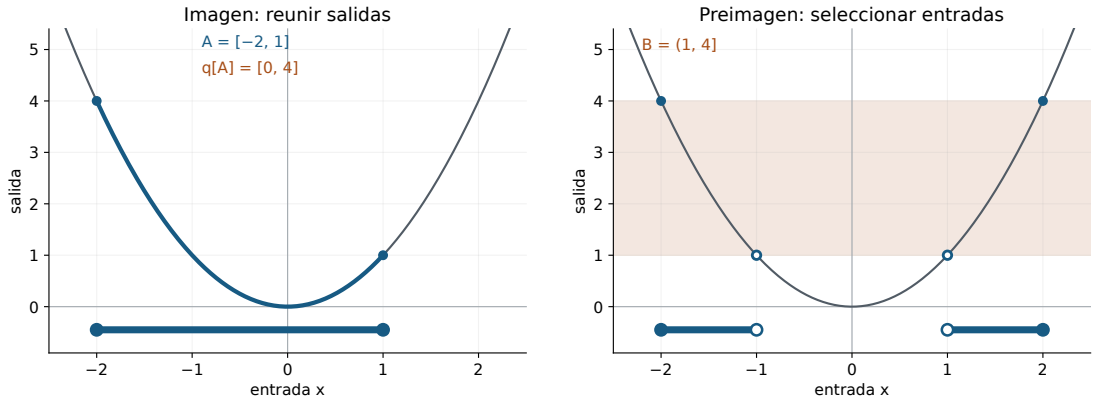


Figura 12.2. El cuadrado transporta [-2,1] a [0,4]. Seleccionar las salidas (1,4] recupera dos ramas: [-2,-1) y (1,2]. Imagen y preimagen responden preguntas distintas.

En $A = \{-2, -1, 1, 2\}$, las cuatro evaluaciones del cuadrado sólo producen $q[A] = \{1, 4\}$. Todo valor de la imagen está en esa lista y ambos se alcanzan, por ejemplo en -1 y -2. Los conjuntos no conservan multiplicidades: que 1 tenga dos entradas no crea dos elementos llamados uno. La pérdida de información aparece al reunir las salidas. La operación de imagen conserva inclusiones: si $A \subseteq C \subseteq D$ y $y \in f[A]$, un testigo $x \in A$ también pertenece a C, de modo que $y \in f[C]$. Es una monotonía respecto del orden de inclusión entre conjuntos. No requiere que f preserve el orden numérico: el cuadrado cumple esta propiedad aunque no sea creciente en toda la recta.

Además, $f[\emptyset] = \emptyset$, $f[\{x\}] = \{f(x)\}$. En el vacío no hay entradas que puedan servir de testigo, por lo que su imagen es vacía. En $\{x\}$ sólo está permitida la entrada x, que alcanza exactamente $f(x)$. Estas afirmaciones incluyen el dominio vacío: la asignación vacía $\emptyset \to E$ es una función y su imagen es vacía para cualquier E. Los extremos de un intervalo tampoco

bastan para transportar sus puntos. Si intentáramos escribir $q[(-2,2)] = (q(-2), q(2))$, obtendríamos $(4,4) = \emptyset$, aunque cero está en la imagen. Las entradas extremas ni siquiera pertenecen a ese intervalo. El cálculo correcto es $[0,4)$: de $-2 < x < 2$ se sigue $0 \leq x^2 < 4$, y para cada $0 \leq y < 4$ la entrada $\sqrt{y} \in [0,2) \subset (-2,2)$ alcanza y. Cero se incluye porque se alcanza; cuatro se excluye porque sus únicas entradas son ± 2, ambas prohibidas.

Ejercicios de la sección 12.2.

Ejercicio 6. Imagen exacta de un intervalo

Calcula la imagen de $[-3,2)$ por $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $q(x) = x^2$, probando ambas inclusiones.

Solución. La imagen es $[0,9]$. Toda entrada tiene $|x| \leq 3$, así que su cuadrado está en ese intervalo. Para $0 \leq y \leq 9$, la entrada $x = -\sqrt{y} \in [-3,0] \subseteq [-3,2)$ alcanza y. En particular 9 se alcanza en -3, aunque 3 no esté disponible; y cero se alcanza en cero. La inclusión hacia $[0,9]$ usa que toda entrada del intervalo tiene magnitud a lo sumo tres. Para la vuelta, elegimos la raíz negativa, no la positiva: $-\sqrt{y}$ está siempre entre menos tres y cero, incluso para salidas mayores o iguales que cuatro. Así evita el extremo dos excluido del dominio. Nueve sí se alcanza gracias al extremo menos tres incluido. Calcular la imagen exige considerar todas las ramas disponibles, no transportar sólo los dos extremos por orden.

Ejercicio 7. Unión con dos piezas

Calcula $q[[-2,-1] \cup (0,1)]$ para el cuadrado real. Justifica extremos y huecos.

Solución. La primera pieza tiene imagen $[1,4]$: sus cuadrados están allí y $-\sqrt{y}$ alcanza cada y de ese intervalo. La segunda tiene imagen $(0,1)$, con testigo $\sqrt{y}$. Por tanto la imagen de la unión es $(0,4]$. El valor 1 sí se alcanza en -1, cero no se alcanza porque ninguna entrada es cero, y 4 sí se alcanza en -2. La unión de imágenes es $[1,4] \cup (0,1) = (0,4]$. No queda un hueco en uno, porque la rama negativa lo incluye aunque la positiva lo excluya. Cero queda fuera porque las dos piezas excluyen la entrada cero; cuatro queda dentro porque menos dos pertenece al dominio seleccionado. Para cualquier salida intermedia elegimos una raíz en la pieza adecuada. Esta comprobación de testigos explica por qué los extremos de cada pieza pueden compensarse al reunir las imágenes.

Ejercicio 8. Imagen y cardinalidad finita

Si $A \subseteq D$ es finito y $f : D \to E$, prueba que $|f[A]| \leq |A|$ y que hay igualdad si y sólo si $f|_A$ es inyectiva.

Solución. Enumeramos $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ con entradas distintas. Su imagen consta de los n valores listados, eliminando repeticiones, por lo que tiene a lo sumo n elementos. Si la restricción es inyectiva, todos son distintos y hay n. Si no lo es, dos valores de la lista coinciden, y tras eliminar esa repetición quedan a lo sumo $n-1$. Para $A = \emptyset$, ambas cardinalidades son cero y la restricción es inyectiva de manera vacua.

La lista de salidas tiene tantos lugares como entradas, pero varios lugares pueden contener el mismo valor. El conjunto imagen elimina esas repeticiones. Si existe una colisión entre dos entradas distintas, al menos un lugar de la lista no aporta un elemento nuevo y la cardinalidad baja. Si no hay colisiones, cada entrada aporta un elemento distinto y las cardinalidades coinciden. La afirmación trata la inyectividad de la restricción a A, no exige inyectividad en todo D.

Ejercicio 9. La inclusión no estudia el orden

Construye una función real que no sea no decreciente ni no creciente y demuestra que su operación de imagen conserva inclusiones de conjuntos.

Solución. Sirve $q(x) = x^2$. No es no decreciente porque $-2 < -1$ pero $4 > 1$; no es no creciente porque $1 < 2$ pero $1 < 4$. Sin embargo, para $A \subseteq C$, cada salida de $q[A]$ tiene testigo $x \in A \subseteq C$, luego pertenece a $q[C]$. Son propiedades distintas: inclusión de conjuntos frente a comparación de valores. Los dos pares elegidos refutan por separado los dos sentidos de monotonía. Después, para cualquier inclusión de conjuntos $A \subseteq C$, la prueba de inclusión

de imágenes sólo reutiliza el testigo de cada salida. No compara qué entrada es mayor ni cómo se ordenan sus salidas. La operación $A \mapsto f[A]$ conserva el orden dado por inclusión para cualquier función, aunque $x \mapsto f(x)$ no conserve ninguno de los órdenes numéricos de la recta.

Ejercicio 10. Imagen de una diferencia

Prueba $f[A] \setminus f[C] \subseteq f[A \setminus C]$ para $A, C \subseteq D$ y da un ejemplo en que la inclusión sea estricta.

Solución. Si $y \in f[A] \setminus f[C]$, existe $a \in A$ con $f(a) = y$. Ese a no puede estar en C, pues entonces $y \in f[C]$. Así $a \in A \setminus C$, que prueba la inclusión. Para $q(x) = x^2$, $A = \{-1, 1\}$ y $C = \{1\}$, el lado izquierdo es vacío y el derecho es $q[\{-1\}] = \{1\}$. Una entrada fuera de C puede compartir salida con otra dentro de C.

La condición $y \notin f[C]$ impide que cualquier testigo de esa salida pertenezca a C. Por eso un testigo en A debe estar fuera de C. La vuelta puede fallar: una entrada fuera de C puede compartir su salida con otra dentro de C. En el ejemplo, menos uno está en $A \setminus C$, pero su salida uno también es producida por la entrada uno de C, y se elimina al restar los conjuntos de salidas.

12.3. Preimagen: seleccionar por la salida

Podemos invertir la pregunta sin intentar invertir la función. En lugar de dar entradas y reunir salidas, fijemos un conjunto de salidas aceptables $B \subseteq E$ y conservemos las entradas que llegan a él. Para $f : D \to E$, la **preimagen** es $f^{-1}[B] = \{x \in D : f(x) \in B\}$. El resultado vive en D. Para decidir si una entrada pertenece, la evaluamos y comprobamos si su salida está en B. Este procedimiento funciona aunque una salida tenga varias entradas o ninguna. La notación $f^{-1}[B]$ nombra una selección de entradas y no supone todavía la existencia de una función inversa.

La preimagen $f^{-1}[\{y\}]$ se llama **fibra sobre** y. Para $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $q(x) = x^2$,

$$q^{-1}[\{4\}] = \{-2, 2\}, \qquad q^{-1}[\{0\}] = \{0\}, \qquad q^{-1}[\{-1\}] = \emptyset.$$

La fibra sobre cuatro tiene dos entradas: $x^2 = 4$ equivale a $(x - 2)(x + 2) = 0$, así que sólo pueden ser -2 y 2, y ambas sirven. Sobre cero sólo está cero; sobre menos uno no hay entrada porque todo cuadrado real es no negativo. Son tres resultados compatibles con una función: cada entrada conserva una única salida. Escribir $q^{-1}(4)$ como evaluación de una inversa, en cambio, no está autorizado para $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que no es biyectiva.

Las fibras sobre salidas diferentes son disjuntas. Una entrada común a las fibras de y y z cumpliría simultáneamente $f(x) = y$ y $f(x) = z$; la unicidad de su salida obliga a $y = z$. Las fibras sobre los elementos de $f[D]$ son además no vacías y cubren D, pues cada x pertenece a la fibra de $f(x)$. Si se indexaran por todo E, podrían aparecer fibras vacías correspondientes a salidas no alcanzadas.

Para el mismo cuadrado,

$$q^{-1}[(1, 4]] = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x^2 \leq 4\} = [-2, -1) \cup (1, 2].$$

Resolver $1 < x^2 \leq 4$ equivale a $1 < |x| \leq 2$. La rama positiva da $(1, 2]$ y la negativa $[-2, -1)$. Los puntos ± 2 se incluyen por el extremo cerrado cuatro de las salidas; ± 1 se excluyen por el extremo abierto uno. Las dos ramas satisfacen la misma condición y ambas deben conservarse. Si cambiamos la función a $r : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $r(x) = x^2$, la misma condición produce

$r^{-1}[(1, 4]] = (1, 2]$. La desigualdad sobre la salida no ha cambiado. Lo que cambia es el lugar donde buscamos entradas: intersectamos $[-2, -1) \cup (1, 2]$ con $[0, \infty)$ y queda $(1, 2]$. Resolver una condición y recortarla por el dominio son obligaciones distintas. Una solución real fuera del dominio no entra en la preimagen de la función restringida. Para toda función $f : D \to E$,

$f^{-1}[E] = D$, $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$. Toda entrada tiene salida en E, lo que prueba $D \subseteq f^{-1}[E]$; la inclusión contraria forma parte de la definición de preimagen. Ninguna entrada tiene salida en el vacío. Si $B \subseteq H \subseteq E$, la condición $f(x) \in B$ implica $f(x) \in H$ para la misma entrada, luego $f^{-1}[B] \subseteq f^{-1}[H]$. La selección hacia atrás conserva inclusiones sin ninguna condición de inyectividad o sobreyectividad.

Para entender cuánto recuperamos al seleccionar hacia atrás y volver hacia delante, calculemos $f[f^{-1}[B]] = B \cap f[D]$. Si y está a la izquierda, existe $x \in f^{-1}[B]$ con $f(x) = y$. Esa entrada está en D y su salida pertenece a B, así que $y \in B \cap f[D]$. Para la inclusión inversa, partimos de $y \in B \cap f[D]$: la pertenencia a la imagen ofrece un testigo $x \in D$ con $f(x) = y$, y la pertenencia a B hace que ese testigo esté en $f^{-1}[B]$. Así vuelve a producir y al tomar imagen. La operación recupera las salidas solicitadas que realmente podían alcanzarse.

Por ejemplo, para el cuadrado y $B = \{-1, 4\}$, la selección da $\{-2, 2\}$ y su imagen es $\{4\}$. La salida imposible -1 no reaparece. Si exigiéramos recuperar exactamente todo B para cualquier subconjunto del codominio, estaríamos exigiendo sobreyectividad; basta tomar $B = E$ para ver esa obligación.

Ejercicios de la sección 12.3.

Ejercicio 11. Selección de dos bandas

Calcula $q^{-1}[[0, 1) \cup \{4\}]$ para $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $q(x) = x^2$.

Solución. La condición $0 \leq x^2 < 1$ equivale a $|x| < 1$, y $x^2 = 4$ equivale a $x = -2$ o $x = 2$. Por tanto la preimagen es $(-1, 1) \cup \{-2, 2\}$. Se excluyen ± 1 por la desigualdad estricta, y se incluyen cero y las dos raíces de cuatro. La preimagen conserva la unión, así que podemos resolver las dos condiciones por separado. Para la banda $[0, 1)$, la no negatividad del cuadrado ya es automática y la condición restante es $|x| < 1$. Para la salida aislada cuatro, las entradas son dos y menos dos. Estos puntos están separados de la banda central y permanecen aislados en la respuesta. No debemos rellenar los intervalos entre ellos: sus cuadrados no pertenecen al conjunto de salidas solicitado.

Ejercicio 12. El dominio recorta la respuesta

Sea $f : [-1, 3) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Calcula $f^{-1}[(1, 4]]$.

Solución. En toda la recta la condición da $[-2, -1) \cup (1, 2]$. Intersectando con el dominio $[-1, 3)$ desaparece la rama negativa, incluido -1 que además no cumple $x^2 > 1$. Queda $(1, 2]$. Ambas inclusiones siguen de resolver la condición y exigir pertenencia al dominio. Primero resolvemos la desigualdad $1 < x^2 \leq 4$ sin el recorte de dominio; después intersectamos el resultado con $[-1, 3)$. La rama negativa $[-2, -1)$ queda totalmente fuera de ese dominio. El punto menos uno, aunque está en el dominio, tampoco cumple la condición estricta de la salida. La rama positiva $(1, 2]$ sí queda completa dentro. Resolver la condición algebraica y verificar el dominio son dos obligaciones distintas y ambas son necesarias.

Ejercicio 13. Las fibras particionan el dominio

Para $f : D \to E$, demuestra que las fibras sobre los elementos de $f[D]$ son no vacías, disjuntas dos a dos y su unión es D.

Solución. Cada $y \in f[D]$ tiene un testigo de entrada, así que su fibra no es vacía. Si una entrada pertenece a las fibras de y, z, su única salida es tanto y como z, luego $y = z$. Cada $x \in D$ pertenece a la fibra sobre $f(x) \in f[D]$, y toda fibra es subconjunto de D; su unión es exactamente D. Si D es vacío, la familia es vacía y su unión también.

La familia se indexa por la imagen $f[D]$, no por todo el codominio: así cada pieza tiene al menos una entrada. Dos fibras distintas no pueden compartir una entrada, porque ésta tendría dos salidas distintas. Para cubrir el dominio basta escoger, para cada entrada x, la fibra cuyo índice es su propia salida $f(x)$. No se necesita elegir una entrada representativa en cada fibra. Cada entrada pertenece a exactamente una pieza y las piezas pueden contener varias entradas.

Ejercicio 14. Recuperar todas las salidas solicitadas

Prueba que $f[f^{-1}[B]] = B$ para todo $B \subseteq E$ si y sólo si $f : D \to E$ es sobreyectiva.

Solución. Si es sobreyectiva, $f[D] = E$ y la identidad del texto da $f[f^{-1}[B]] = B \cap E = B$. Recíprocamente, aplicamos la hipótesis a $B = E$: como $f^{-1}[E] = D$, obtenemos $f[D] = E$, que es sobreyectividad. No se necesita inyectividad: puede haber varias entradas para cada salida. La dirección directa usa que una función sobreyectiva no deja salidas imposibles en E, por lo que intersectar B con su imagen no elimina nada. Para la recíproca no necesitamos probar la identidad con todos los subconjuntos uno por uno: la hipótesis universal permite escoger el subconjunto concreto $B = E$. Recuperar todas sus salidas obliga a $f[D] = E$. La unicidad de sus entradas no interviene, así que no hace falta inyectividad.

Ejercicio 15. La preimagen conoce la función

Sean $f, g : D \to E$. Si $f^{-1}[B] = g^{-1}[B]$ para todo $B \subseteq E$, demuestra que $f = g$.

Solución. Para una entrada cualquiera $x \in D$, tomamos $B = \{f(x)\}$. Entonces $x \in f^{-1}[B] = g^{-1}[B]$, luego $g(x) \in \{f(x)\}$ y $g(x) = f(x)$. Vale para toda entrada y los tipos coinciden, así que las funciones son iguales. Si D es vacío, los dos grafos son vacíos y la conclusión también vale. El conjunto de prueba puede elegirse después de fijar la entrada porque la hipótesis cubre todos los subconjuntos.

El conjunto B se elige después de fijar una entrada x, y eso es legítimo porque la hipótesis cubre todos los subconjuntos del codominio. En el conjunto unitario $\{f(x)\}$ sólo hay un valor disponible. La igualdad de preimágenes obliga a que la salida de g para esa misma entrada sea ese valor. Repetimos el razonamiento para una entrada arbitraria, no para una muestra finita. Con tipos iguales, la coincidencia de todas las evaluaciones identifica ambas funciones.

12.4. Qué operaciones sobreviven al transporte

Las imágenes de una unión pueden reunirse sin perder salidas: un testigo pertenece a una pieza o a la otra. Al intersectar imágenes aparece una dificultad distinta: la misma salida puede tener un testigo en cada pieza sin que esas entradas coincidan. Esa diferencia entre uno y dos testigos decide qué operaciones se conservan. Fijemos $f : D \to E$, $A, C \subseteq D$ y $B, H \subseteq E$.

Tenemos

$$f[A \cup C] = f[A] \cup f[C], \qquad f[A \cap C] \subseteq f[A] \cap f[C].$$

Para la unión, tomemos $y \in f[A \cup C]$ y una entrada $x \in A \cup C$ con $f(x) = y$. Si $x \in A$, entonces $y \in f[A]$; si $x \in C$, entonces $y \in f[C]$. En la dirección contraria, cualquier testigo en una de las piezas también pertenece a la unión. El mismo testigo acredita las dos implicaciones y prueba la igualdad.

Un testigo en $A \cap C$ sirve a la vez en ambas imágenes, lo que prueba la inclusión de la segunda fórmula. Para intentar la vuelta, $y \in f[A] \cap f[C]$ sólo ofrece $a \in A$ y $c \in C$ con $f(a) = f(c) = y$. Nos falta una razón para que $a = c$: dos pertenencias a imágenes no proporcionan por sí solas una entrada común.

En el cuadrado, $A = \{-1\}$ y $C = \{1\}$ no comparten entrada, pero ambas imágenes son $\{1\}$. La inclusión es estricta. Si f es **inyectiva**, es decir, si $f(a) = f(c)$ implica $a = c$, los dos testigos de una salida común coinciden y pertenecen a $A \cap C$; entonces hay igualdad. Esta hipótesis resuelve exactamente el paso que faltaba. A la inversa, exigir esa igualdad para todos los pares de conjuntos prohíbe cualquier colisión, como se comprobará con conjuntos unitarios en los problemas.

En una preimagen la entrada $x \in D$ permanece fija. Cada condición consulta su única salida $f(x)$, de modo que podemos combinar las condiciones lógicas sobre ella:

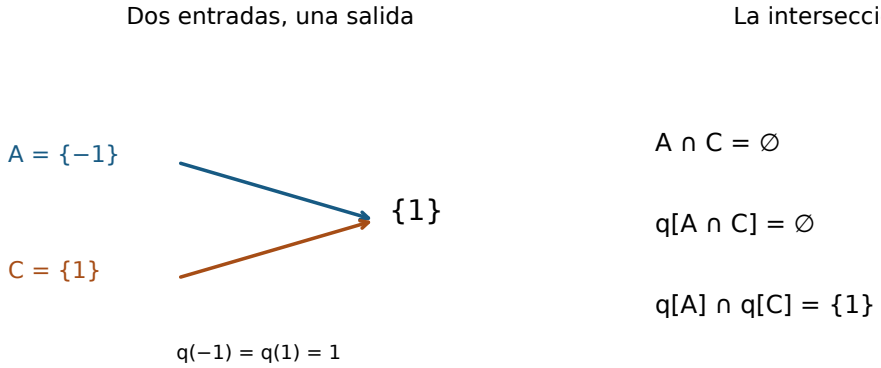


Figura 12.3. Una salida en ambas imágenes puede tener dos testigos diferentes. Para convertirlos en una entrada común se necesita inyectividad.

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}[B \cup H] &\iff f(x) \in B \text{ o } f(x) \in H, \\ x \in f^{-1}[B \cap H] &\iff f(x) \in B \text{ y } f(x) \in H, \\ x \in f^{-1}[E \setminus B] &\iff f(x) \notin B. \end{aligned}$$

La alternativa de la primera fila selecciona $f^{-1}[B] \cup f^{-1}[H]$; la conjunción de la segunda selecciona $f^{-1}[B] \cap f^{-1}[H]$; negar la pertenencia en la tercera selecciona $D \setminus f^{-1}[B]$. Las equivalencias valen para toda entrada de D y proporcionan ambas inclusiones de cada identidad. Por extensionalidad,

$$\begin{aligned} f^{-1}[B \cup H] &= f^{-1}[B] \cup f^{-1}[H], \\ f^{-1}[B \cap H] &= f^{-1}[B] \cap f^{-1}[H], \\ f^{-1}[E \setminus B] &= D \setminus f^{-1}[B]. \end{aligned}$$

No hemos reunido testigos distintos ni pedido que toda salida tenga entrada. Por eso las leyes no requieren inyectividad o sobreyectividad. Los complementos sí deben respetar sus universos: $E \setminus B$ es un conjunto de salidas y $D \setminus f^{-1}[B]$ un conjunto de entradas. La condición $f(x) \in B \setminus H$ dice $f(x) \in B$ y $f(x) \notin H$; al traducir esas dos exigencias a preimágenes obtenemos también

$f^{-1}[B \setminus H] = f^{-1}[B] \setminus f^{-1}[H]$. El viaje en el otro sentido conserva todas las entradas originales: $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$, porque $f(a) \in f[A]$ para cada $a \in A$. Puede recuperar otras entradas que compartan sus salidas. Con el cuadrado y $A = \{1\}$ obtenemos $f^{-1}[f[A]] = \{-1, 1\}$. Llamaremos a este conjunto la **saturación de A por las fibras**: reúne cada fibra que toca A con todas sus entradas.

Si f es inyectiva, una entrada x de esa saturación comparte salida con algún $a \in A$ y debe coincidir con él. La inclusión se convierte en igualdad. Para una función cualquiera, saturar puede ampliar A, pero no produce salidas nuevas: la identidad de §12.3 da $f[f^{-1}[f[A]]] = f[A]$. Una segunda saturación seleccionaría las mismas fibras completas. Los complementos de imágenes también pueden fallar por una colisión. Para el cuadrado, quitar la entrada 1 no elimina su salida, porque -1 todavía produce uno: $q[\mathbb{R} \setminus \{1\}] = [0, \infty)$. En cambio, $\mathbb{R} \setminus q[\{1\}] = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, que excluye uno e incluye negativos. La identificación de entradas y las salidas no alcanzadas del codominio son dos obstáculos diferentes a una ley de complementos.

Ejercicios de la sección 12.4.

Ejercicio 16. Álgebra de una selección

Prueba directamente $f^{-1}[(B \cup H) \setminus K] = (f^{-1}[B] \cup f^{-1}[H]) \setminus f^{-1}[K]$ para $B, H, K \subseteq E$.

Solución. Para $x \in D$, pertenecer al lado izquierdo significa ($f(x) \in B$ o $f(x) \in H$) y $f(x) \notin K$. Esto equivale a ($x \in f^{-1}[B]$ o $x \in f^{-1}[H]$) y $x \notin f^{-1}[K]$, exactamente el lado derecho. Como la equivalencia vale para toda entrada, extensionalidad da igualdad. No se han supuesto inyectividad o sobreyectividad.

La prueba traduce operaciones de conjuntos a condiciones lógicas: unión se convierte en «o» y diferencia en «y no». La preimagen evalúa siempre la misma entrada x, de modo que esas condiciones pueden combinarse sin elegir testigos diferentes. Al traducirlas de vuelta obtenemos exactamente el conjunto del segundo miembro. La equivalencia para cada entrada acredita ambas inclusiones de una sola vez y evita suponer reglas de imágenes que no siempre son válidas.

Ejercicio 17. La intersección detecta inyectividad

Prueba que $f[A \cap C] = f[A] \cap f[C]$ para todos $A, C \subseteq D$ si y sólo si f es inyectiva.
Solución. La dirección inyectiva está probada en el texto: los dos testigos de una salida común coinciden. Para la recíproca, supongamos $f(a) = f(c)$ y $a \neq c$. Tomando $A = \{a\}$, $C = \{c\}$, la imagen de su intersección es vacía, mientras que la intersección de imágenes es $\{f(a)\}$, contradicción. Luego no hay entradas distintas con igual salida. **Retorno visual.** Véase C12-F03, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Para la vuelta, los conjuntos unitarios permiten detectar cualquier colisión. Si dos entradas distintas comparten salida, sus conjuntos unitarios son disjuntos, pero sus imágenes se intersectan en esa salida. La identidad exigida para todos los conjuntos no puede tolerar esta diferencia. En la dirección directa, la inyectividad junta los dos testigos de una salida común en una sola entrada de la intersección. Por eso la ley universal caracteriza exactamente la ausencia de colisiones.

Ejercicio 18. Saturar dos veces

Define $S(A) = f^{-1}[f[A]]$. Prueba $A \subseteq S(A)$, que $A \subseteq C$ implica $S(A) \subseteq S(C)$ y que $S(S(A)) = S(A)$.
Solución. Cada $a \in A$ tiene salida en $f[A]$, luego está en $S(A)$. Si $A \subseteq C$, las inclusiones conservadas por imagen y preimagen dan $S(A) \subseteq S(C)$. Finalmente $f[S(A)] = f[f^{-1}[f[A]]] = f[A] \cap f[D] = f[A]$. Tomando preimagen, $S(S(A)) = f^{-1}[f[S(A)]] = f^{-1}[f[A]] = S(A)$. La saturación añade fibras completas una sola vez.

La saturación reúne todas las entradas que comparten alguna salida con una entrada de A. La primera aplicación puede añadir entradas nuevas, pero no añade salidas nuevas: $f[S(A)] = f[A]$. Por eso una segunda aplicación selecciona las mismas fibras completas y no cambia el resultado. Las tres propiedades se comprueban con inclusiones y la identidad de imagen de una preimagen; no exigen que f sea inyectiva. Si lo fuera, no habría nada que añadir y $S(A) = A$.

Ejercicio 19. Complementos y biyectividad

Prueba que $f[D \setminus A] = E \setminus f[A]$ para todo $A \subseteq D$ si y sólo si $f : D \to E$ es biyectiva.
Solución. Si f es biyectiva, toda $y \in E$ tiene una única entrada x; está en la imagen de $D \setminus A$ exactamente cuando $x \notin A$, lo que equivale a $y \notin f[A]$. Para la recíproca, usar $A = \emptyset$ da $f[D] = E$, sobreyectividad. Si $a \neq c$ y $f(a) = f(c)$, tomando $A = \{a\}$, la salida común pertenece a $f[D \setminus A]$ por el testigo c y también a $f[A]$, contradiciendo la igualdad con el complemento. Por tanto es inyectiva.

La igualdad de complementos impone dos cosas a la vez. Usar el conjunto vacío obliga a alcanzar todo el codominio. Después, cualquier par de entradas distintas con la misma salida haría que esa salida apareciera tanto en $f[A]$ como en $f[D \setminus A]$ para un A adecuado, lo que un complemento prohíbe. A la inversa, para una biyectiva cada salida tiene una entrada única, que está exactamente en una de las dos partes del dominio. Esto prueba la identidad y explica las dos hipótesis necesarias.

Ejercicio 20. Seleccionar una partición

Sea $E = B_1 \cup \cdots \cup B_k$ una partición finita en piezas no vacías. Prueba que sus preimágenes cubren D y son disjuntas, y explica por qué pueden no formar una partición en piezas no vacías.

Solución. Toda entrada tiene salida en alguna pieza, de modo que pertenece a alguna preimagen. Si pertenece a dos, su salida está en ambas piezas; la disjunción de las B_i lo impide cuando los índices son distintos. Pero una pieza puede no contener salidas alcanzadas. Por ejemplo, para el cuadrado real, las piezas $(-\infty, 0)$ y $[0, \infty)$ particionan $\mathbb{R}$ y la primera tiene preimagen vacía. Tras eliminar piezas vacías, las restantes sí particionan D si éste no es vacío.

Cubrir todo E garantiza que cada salida esté en alguna pieza y, por tanto, cada entrada en alguna preimagen. La disjunción garantiza que una entrada no caiga en dos preimágenes distintas. Pero que una pieza de salidas sea no vacía no obliga a que contenga una salida alcanzada. Para el cuadrado, la pieza negativa existe y tiene preimagen vacía. El transporte hacia atrás conserva cobertura y disjunción, pero puede perder la no vacuidad de las piezas.

12.5. Componer, restringir y deshacer

Una transformación puede entregar las entradas de otra. Si $f : D \to E$ y $g : E \to F$, definimos $g \circ f : D \to F$ por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Primero $x \in D$ produce un elemento de E y después g puede evaluarse en él. Más generalmente basta que $f[D]$ esté contenido en el dominio de g, aunque no coincidan los conjuntos intermedios declarados; hay que comprobarlo y declarar el tipo de la composición. Una fórmula como $1/(x-1)$ no autoriza la entrada $x = 1$ si la segunda etapa consiste en invertir $x - 1$.

Si $A \subseteq D$ y $C \subseteq F$, $(g \circ f)[A] = g[f[A]]$, $\quad (g \circ f)^{-1}[C] = f^{-1}[g^{-1}[C]]$. Para transportar A hacia delante, cada salida compuesta tiene forma $g(f(x))$ con $x \in A$ y, por tanto, pertenece a $g[f[A]]$. Recíprocamente, un testigo intermedio $y \in f[A]$ de una salida $z = g(y)$ tiene a su vez una entrada $x \in A$ con $f(x) = y$; sustituir da $z = g(f(x))$. Para seleccionar hacia atrás fijamos $x \in D$: $g(f(x)) \in C$ equivale a que $f(x)$ esté en $g^{-1}[C]$, es decir, a que x esté en $f^{-1}[g^{-1}[C]]$. La última etapa de evaluación es la primera condición que resolvemos al regresar.

En $f(x) = x^2$ y $g(y) = y + 1$, ambas de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, la composición es $x^2 + 1$. Para seleccionar salidas en $(2, 5]$, empezamos con $2 < y + 1 \leq 5$, equivalente a $1 < y \leq 4$. Después resolvemos $1 < x^2 \leq 4$ y recuperamos $[-2, -1) \cup (1, 2]$. La exclusión de las raíces de uno y la inclusión de las de cuatro vienen de los extremos de las salidas finales. Ninguna etapa ha requerido una inversa del cuadrado.

Para $A \subseteq D$, la **restricción** $f|_A : A \to E$ conserva las asignaciones en A. Su imagen es $f[A]$ y, para $B \subseteq E$, $(f|_A)^{-1}[B] = A \cap f^{-1}[B]$. Pertenecer a cualquiera de los dos lados exige exactamente $x \in A$ y $f(x) \in B$. La restricción conserva los valores y el codominio E; no lo sustituye automáticamente por la imagen. Para el cuadrado, restringir entradas a $[0, \infty)$ elimina las colisiones y da inyectividad, pero con codominio $\mathbb{R}$ siguen faltando entradas para todas las salidas negativas. Sólo al declarar además codominio $[0, \infty)$ obtenemos sobreyectividad, gracias a la existencia y unicidad de la raíz no negativa de §10.7.

$f : D \to E$ es **sobreyectiva** si $f[D] = E$, y **biyectiva** si además es inyectiva. Sólo entonces existe una función inversa $h : E \to D$ que deshace f en ambas direcciones: $h \circ f = \mathrm{id}_D$, $\quad f \circ h = \mathrm{id}_E$. La sobreyectividad proporciona, para cada $y \in E$, alguna entrada $x \in D$ con $f(x) = y$; la inyectividad impide que haya dos. Definimos $h(y)$ como esa única entrada. Para $x \in D$, la entrada que produce $f(x)$ sólo puede ser x, luego $h(f(x)) = x$. Para $y \in E$, la propia definición da $f(h(y)) = y$. Si otra función $k : E \to D$ deshiciera f, entonces $f(k(y)) = y = f(h(y))$ y la inyectividad daría $k(y) = h(y)$ para todo y. Así la inversa existe y es única; la definición por entrada única no obliga a escoger arbitrariamente entre varias candidatas.

Las dos identidades también obligan a las hipótesis. Si $f(x) = f(z)$, aplicar h y usar $h \circ f = \mathrm{id}_D$ da $x = z$. Para una salida cualquiera $y \in E$, la identidad $f \circ h = \mathrm{id}_E$ proporciona la entrada $h(y)$ que la alcanza. La primera recupera entradas y fuerza inyectividad; la segunda alcanza salidas y fuerza sobreyectividad. Se necesitan ambas para deshacer la función en los dos sentidos.

Tras probarlo, escribimos $h = f^{-1}$. La evaluación $f^{-1}(y)$ es entonces una entrada única. Para $B \subseteq E$, su imagen por h coincide con la preimagen ya definida: si $f(x) \in B$, entonces $x = h(f(x)) \in h[B]$; si $x = h(y)$ con $y \in B$, entonces $f(x) = y \in B$. Por tanto $f^{-1}[B] = h[B]$. Esta coincidencia explica la notación, pero la selección de preimágenes estaba disponible incluso cuando no existía h.

Para $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$, despejar $y = 2x + 1$ da $x = (y - 1)/2$, una entrada real única para cualquier y. La candidata $h(y) = (y-1)/2$ verifica $h(f(x)) = x$ y $f(h(y)) = y$ por sustitución. El cuadrado en toda la recta carece de inversa; como aplicación $[0, \infty) \to [0, \infty)$ sí la tiene, dada por la raíz no negativa. El mismo cálculo de una raíz cambia de función cuando cambian los tipos.

Ejercicios de la sección 12.5.

Ejercicio 21. La última etapa se filtra primero

Para $f(x) = x^2$ y $g(y) = 3 - y$, ambas reales, calcula $(g \circ f)^{-1}[[1, 3)]$ por etapas.

Solución. Primero $1 \leq 3 - y < 3$ equivale a $0 < y \leq 2$, luego $g^{-1}[[1, 3)] = (0, 2]$. Después $0 < x^2 \leq 2$ da $[-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2}]$. Cero se excluye porque su salida compuesta es 3; ambas raíces de dos se incluyen porque su salida es 1. La última etapa se resuelve primero: $1 \leq 3-y$ da $y \leq 2$, y $3-y < 3$ da $y > 0$. Así el conjunto intermedio es $(0, 2]$. Aplicar luego el cuadrado exige $0 < x^2 \leq 2$, que admite las dos ramas y excluye cero. El extremo tres abierto de las salidas finales explica esa exclusión; el extremo uno cerrado explica que se incluyan las raíces de dos. El procedimiento mantiene los extremos correctos en cada etapa.

Ejercicio 22. Una composición sin tipo

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 1$, y $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $g(y) = 1/y$. ¿Define $g \circ f$ una función en todo $\mathbb{R}$? Declara la composición válida y su regla.

Solución. No: $f(1) = 0$ no pertenece al dominio de g. Las entradas admisibles son $f^{-1}[\mathbb{R} \setminus \{0\}] = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Restringiendo f a ese dominio, la composición válida es $h : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $h(x) = 1/(x - 1)$. Cada evaluación de la segunda etapa está ahora autorizada. El problema no es calcular una fórmula formal, sino comprobar que cada evaluación intermedia está permitida. En la entrada uno, la primera etapa entrega cero y la segunda no está definida allí. El dominio máximo admitido por esa fórmula compuesta es el conjunto de entradas con $x - 1 \neq 0$. La restricción debe además declarar que sus salidas intermedias pertenecen a $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, el dominio de g. Con esos datos, la regla $1/(x - 1)$ queda bien definida.

Ejercicio 23. Dos identidades distintas

Para $f : D \to E$ y $h : E \to D$, prueba que $h \circ f = \mathrm{id}_D$ implica inyectividad de f y que $f \circ h = \mathrm{id}_E$ implica sobreyectividad de f. Da un ejemplo donde sólo se cumpla la primera.

Solución. Si $f(x) = f(z)$, aplicar h y la primera identidad da $x = z$. Con la segunda, cada $y \in E$ tiene entrada $h(y)$ y $f(h(y)) = y$. Para distinguirlas, sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ la inclusión $f(x) = x$, y $h : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $h(y) = \max(y, 0)$. Para $x \geq 0$, $h(f(x)) = x$. Pero $f(h(-1)) = 0 \neq -1$, así que no hay segunda identidad y f no es sobreyectiva.

La primera identidad permite recuperar cualquier entrada después de aplicar f; por eso dos entradas con salida común tendrían que recuperarse como la misma. La segunda identidad asegura que toda salida se produce a partir de la entrada $h(y)$; por eso garantiza sobreyectividad. En el ejemplo, las entradas no negativas sí se recuperan, pero las salidas negativas se reemplazan por cero y no pueden recuperarse. Una identidad por sí sola no demuestra que h sea una inversa en ambos sentidos.

Ejercicio 24. Inversa sobre la imagen

Si $f : D \to E$ es inyectiva, demuestra que cambiando el codominio a $f[D]$ se obtiene una biyectiva. ¿Por qué su inversa no tiene necesariamente dominio E?

Solución. La asignación $\tilde{f} : D \to f[D]$ es válida y mantiene inyectividad. Es sobreyectiva por definición de imagen: cada $y \in f[D]$ tiene una entrada. Luego tiene inversa $f[D] \to D$. Si hay $y \in E \setminus f[D]$, no existe entrada que alcance y, por lo que esa inversa no puede deshacer la asignación en tal salida. Ejemplo: inclusión $[0, \infty) \to \mathbb{R}$, cuya imagen es $[0, \infty)$.

Cambiar el codominio a la imagen no modifica las evaluaciones ni el grafo, pero sí el objeto tipado. La nueva función alcanza todo lo declarado por definición, y la inyectividad original proporciona unicidad. Su inversa acepta únicamente salidas alcanzadas. Si el codominio original contenía salidas sin testigo, una inversa definida allí no podría cumplir $f(f^{-1}(y)) = y$. La construcción distingue una inversa sobre la imagen de una inversa sobre todo el codominio original.

Ejercicio 25. La inversa de una composición

Sean $f : D \to E$ y $g : E \to F$ biyectivas. Prueba que $g \circ f$ es biyectiva y su inversa es $f^{-1} \circ g^{-1}$.

Solución. La candidata $h = f^{-1} \circ g^{-1} : F \to D$ está tipada. Para $x \in D$, $h(g(f(x))) = f^{-1}(g^{-1}(g(f(x)))) = f^{-1}(f(x)) = x$. Para $z \in F$, $g(f(h(z))) = g(f(f^{-1}(g^{-1}(z)))) = g(g^{-1}(z)) = z$. Las dos identidades probadas en el texto garantizan biyectividad y unicidad de la inversa. El orden se invierte porque primero debe deshacerse la última etapa.

Una salida final $z \in F$ se deshace primero mediante g^{-1}, que la lleva al conjunto intermedio E. Después f^{-1} la lleva a la entrada inicial en D. Invertir ese orden daría, en general, una composición sin tipos compatibles. Las dos identidades verificadas garantizan tanto recuperar todas las entradas como producir todas las salidas; juntas prueban biyectividad. La comprobación debe hacerse para variables arbitrarias de ambos conjuntos, no para ejemplos puntuales.

12.6. Transportar el orden no rellena los huecos

Ya sabemos transportar conjuntos. En la recta podemos preguntar además si una transformación conserva la comparación entre entradas. Sea $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$. Diremos que es **no decreciente** cuando

$$x, y \in D, \quad x \leq y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leq f(y).$$

Es **estrictamente creciente** cuando $x < y$ implica $f(x) < f(y)$. «No creciente» y «estrictamente decreciente» invierten las desigualdades entre salidas. Siempre declaramos cuál sentido usamos: algunas convenciones llaman creciente al caso no estricto. Una función estrictamente creciente es inyectiva. Dos entradas distintas se ordenan por tricotomía: si $x < y$, sus salidas satisfacen $f(x) < f(y)$, y si $y < x$ sucede lo contrario; no pueden coincidir. El mismo argumento sirve para una función estrictamente decreciente y no requiere que el dominio sea un intervalo. Una constante es no decreciente y no creciente a la vez; en un dominio con al menos dos entradas distintas no es inyectiva.

Si f es no decreciente y $a, b \in D$ con $a \leq b$, entonces $f[D \cap [a, b]] \subseteq [f(a), f(b)]$. Para cada $x \in D \cap [a, b]$, las dos comparaciones $a \leq x$ y $x \leq b$ dan $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$. Esto sitúa todas las salidas producidas entre las extremas. Para convertir la inclusión en igualdad faltaría producir una entrada para cada número intermedio; la prueba de monotonía todavía no ha ofrecido esos testigos.

Definamos $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$s(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ x + 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Para demostrar que es estrictamente creciente debemos comprobar todos los pares $x < y$. Si ambos son negativos, las salidas conservan esas entradas; si ambos son no negativos, sumar uno conserva su orden estricto. En el caso que cruza cero, $x < 0 \leq y$ da $s(x) = x < 0 < 1 \leq y + 1 = s(y)$. Los tres casos agotan las posiciones posibles y prueban el crecimiento en toda la recta.

Sin embargo, $s[[-1, 1]] = [-1, 0) \cup [1, 2]$. La rama de entradas $[-1, 0)$ mantiene exactamente esas salidas, mientras $[0, 1]$ se traslada a $[1, 2]$. Cada valor de la primera pieza se alcanza en sí mismo y cada valor t de la segunda en $t-1$. El número $1/2$ está entre $s(-1) = -1$ y $s(1) = 2$, pero ninguna rama lo alcanza. Ordenar estrictamente las salidas existentes permite un hueco en la imagen. Para garantizar todas las salidas intermedias hará falta otra hipótesis.

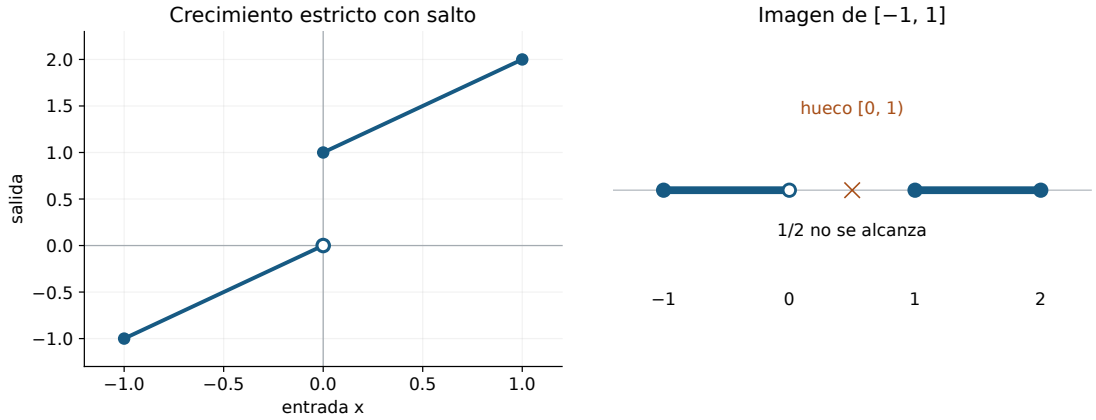


Figura 12.4. El salto conserva el orden estricto entre todas las entradas, pero la imagen de [-1,1] es [-1,0) unión [1,2]. Ordenar salidas existentes no produce las que faltan.

En una aplicación afín $h(x) = mx + b$, la diferencia $h(y) - h(x) = m(y - x)$ decide el orden. Para $x < y$, el factor $y - x$ es positivo: si $m > 0$ la diferencia es positiva y hay crecimiento estricto; si $m < 0$ es negativa y hay decrecimiento estricto; si $m = 0$ todas las salidas coinciden. La constante de traslación se cancela. Escribamos el término independiente como c al calcular la imagen de $[a, b]$, para no confundirlo con el extremo derecho. Para $a \leq b$ obtenemos

$h[[a, b]] = [ma + c, mb + c] \quad (m > 0)$, $h[[a, b]] = [mb + c, ma + c] \quad (m < 0)$. El orden prueba la inclusión de cada imagen en el intervalo indicado. Para la vuelta, fijamos una salida t entre las extremas y despejamos $x = (t - c)/m$. Si $m > 0$, dividir mantiene las desigualdades; si $m < 0$, las invierte. En ambos casos obtenemos $a \leq x \leq b$ y $h(x) = t$, que acredita todas las salidas del intervalo. La misma resolución con desigualdades estrictas trata intervalos abiertos o semiabiertos y decide cuál extremo se incluye. Cuando $m = 0$, la fórmula de despeje no se usa: todo intervalo no vacío tiene imagen $\{c\}$.

Las dos ramas del cuadrado muestran por qué el dominio importa también para el orden. Si $0 \leq x < y$, entonces $y - x > 0$ y $y + x > 0$, de modo que $y^2 - x^2 = (y - x)(y + x) > 0$. Si $x < y \leq 0$, el primer factor sigue siendo positivo y el segundo es negativo, luego $y^2 - x^2 < 0$. Así el cuadrado crece estrictamente en $[0, \infty)$ y decrece estrictamente en $(-\infty, 0]$, con cero incluido en ambas ramas, pero no tiene un mismo sentido de monotonía en toda la recta.

Ejercicios de la sección 12.6.

Ejercicio 26. Imagen con orientación invertida

Calcula la imagen de $[-1, 2)$ por $h(x) = -3x + 2$ con codominio real. Justifica ambas inclusiones.

Solución. De $-1 \leq x < 2$, al multiplicar por -3 y sumar 2, resulta $-4 < h(x) \leq 5$. Para $t \in (-4, 5]$, $x = (2 - t)/3$ satisface $-1 \leq x < 2$ y $h(x) = t$. La imagen es $(-4, 5]$. El extremo abierto de entrada pasa a extremo inferior abierto, y el cerrado a superior cerrado. La pendiente negativa invierte las desigualdades al multiplicar por menos tres. El extremo izquierdo incluido menos uno produce la salida superior cinco incluida; el extremo derecho excluido dos correspondería a la salida inferior menos cuatro excluida. Para la inclusión contraria, despejamos $x = (2-t)/3$ y comprobamos directamente que cada salida $-4 < t \leq 5$ da una entrada válida. Así calculamos toda la imagen sin depender de la apariencia de una gráfica.

Ejercicio 27. Dos sentidos estrictos

Si $f : D \to E \subseteq \mathbb{R}$ y $g : E \to \mathbb{R}$ son estrictamente decrecientes, prueba que $g \circ f$ es estrictamente creciente.

Solución. Para $x < y$ en D, $f(x) > f(y)$. Como $f(y) < f(x)$ y ambas salidas pertenecen a E, el decrecimiento estricto de g da $g(f(y)) > g(f(x))$. Así $(g \circ f)(x) < (g \circ f)(y)$. La compatibilidad de dominios permite aplicar la segunda hipótesis. El primer decrecimiento invierte el orden de las entradas y el segundo vuelve a invertirlo. Para $x < y$, las salidas intermedias cumplen $f(y) < f(x)$; al aplicar g a ese par ordenado obtenemos $g(f(x)) < g(f(y))$. Las desigualdades siguen siendo estrictas, por lo que la composición es estrictamente creciente. La compatibilidad de tipos es indispensable para usar la segunda hipótesis con esas salidas intermedias.

Ejercicio 28. La inclusión de extremos puede ser propia

Para la función s de §12.6, prueba que $s[[-2, 2]]$ es un subconjunto propio de $[s(-2), s(2)]$ aun siendo s estrictamente creciente.

Solución. El transporte por ramas da $[-2, 0) \cup [1, 3]$ y los valores extremos dan $[s(-2), s(2)] = [-2, 3]$. Hay inclusión y es propia porque $1/2$ pertenece al segundo conjunto y no al primero. La prueba del crecimiento estricto en el texto incluye el caso que cruza cero; el hueco no lo contradice, pues crecimiento compara salidas existentes sin construir nuevas. **Retorno visual.** Véase C12-F04, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

La rama negativa conserva $[-2, 0)$ y la no negativa traslada $[0, 2]$ a $[1, 3]$. Los extremos originales producen menos dos y tres, de modo que el intervalo entre ellos es $[-2, 3]$. Una salida como $1/2$ acredita que la inclusión es propia. El crecimiento estricto sigue válido al cruzar cero, porque toda salida de la rama izquierda es negativa y toda salida de la derecha es al menos uno. Ese orden no garantiza que se alcancen los valores del hueco.

Ejercicio 29. Orden de la inversa

Si $f : D \to E$ es estrictamente creciente y biyectiva, con $D, E \subseteq \mathbb{R}$, prueba que f^{-1} es estrictamente creciente.

Solución. Para $u < v$ en E, sean $x = f^{-1}(u)$, $y = f^{-1}(v)$. Si $x = y$, entonces $u = v$, imposible. Si $x > y$, crecimiento estricto da $u = f(x) > f(y) = v$, también imposible. Por tricotomía queda $x < y$. Así la inversa conserva el orden estricto en su propio dominio E. La biyectividad asegura que las entradas inversas x, y existen y son únicas. Para determinar su orden, descartamos las otras dos posibilidades de la tricotomía: igualdad daría salidas iguales y orden inverso daría salidas en orden inverso por el crecimiento de f. Queda necesariamente $x < y$. No se supone que D o E sean intervalos; basta que sus elementos hereden el orden real y que la función preserve estrictamente ese orden.

Ejercicio 30. Inyectividad no decide monotonía

Construye una biyectiva $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que no sea no decreciente ni no creciente.

Solución. Intercambiamos 0 y 1 y fijamos todo otro real: $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(x) = x$ para $x \notin \{0, 1\}$. Aplicarla dos veces devuelve cada entrada, así que es biyectiva. No es no decreciente porque $0 < 1$ pero $f(0) > f(1)$. No es no creciente porque $2 < 3$ y $f(2) < f(3)$. Reversibilidad y orden son propiedades independientes. La asignación intercambia dos entradas y deja todas las demás fijas. Aplicarla dos veces restaura cada real, lo que proporciona una inversa igual a ella misma y prueba biyectividad. Un par de entradas prueba el fallo del crecimiento no estricto y otro prueba el fallo del decrecimiento no estricto. La conclusión no se deriva sólo de que la función parezca irregular: cada propiedad universal se refuta mediante testigos explícitos.

12.7. Distancia y escala: medir la deformación

La función $x \mapsto -x$ invierte el orden y conserva todas las distancias; $x \mapsto 2x$ conserva el orden y duplica las distancias. Para distinguir esos efectos debemos comparar separaciones, además de posiciones relativas. Las aplicaciones afines permiten calcular ambos cambios exactamente. Si $h(x) = mx + c$, entonces para todo $x, y \in \mathbb{R}$, $|h(x) - h(y)| = |m(x - y)| = |m|\,|x - y|$. La constante c desaparece al restar. La magnitud $|m|$ fija la escala métrica y el signo de m fija la orientación. Con $m = -1$ las salidas se ordenan al revés y mantienen su distancia; con $m = 2$ mantienen el orden y duplican la separación; con $m = 0$ las distancias se anulan. El factor $|m|$ es además la menor cota no negativa posible en toda la recta: cualquier cota debe funcionar para las entradas cero y uno y, por tanto, ser al menos $|m|$.

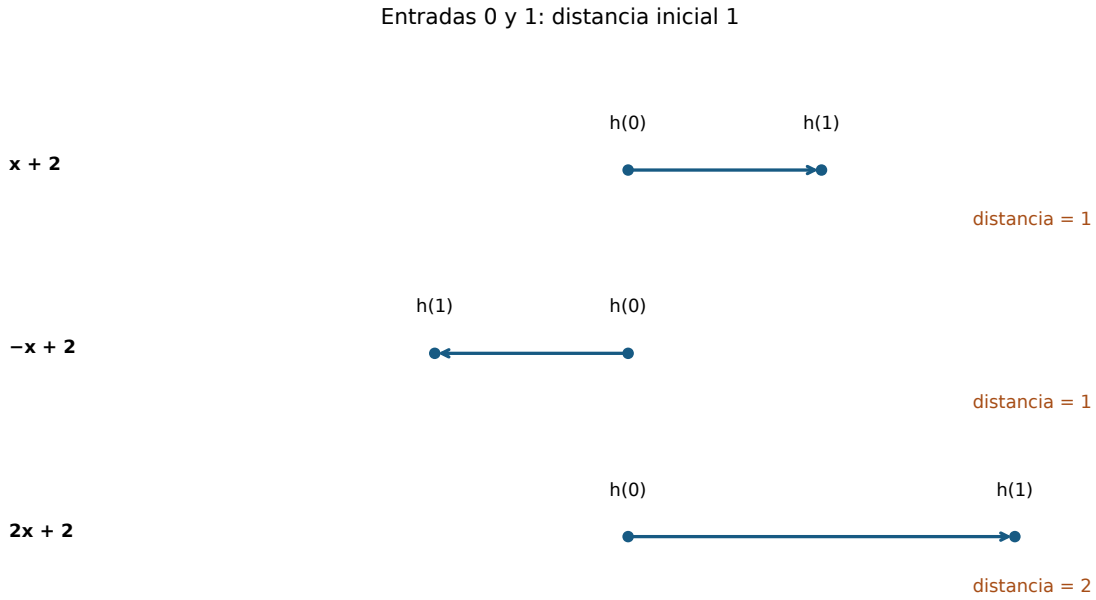


Figura 12.5. La traslación cambia posición, el signo de m cambia orientación y |m| cambia distancia. Los tres papeles se separan en h(x)=mx+c.

Una función $f : D \to \mathbb{R}$ tiene **cota de expansión** L, o es L-Lipschitz, si $L \geq 0$ y

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \qquad \text{para todos } x, y \in D.$$

La constante L puede depender de la función y del dominio, pero se fija antes de elegir el par y debe servir para todos sus elementos. La estimación también incluye $x = y$, donde ambos miembros valen cero; formularla sin cocientes evita dividir por esa distancia nula. Si $0 \leq L < 1$, expresa contracción; si $L = 1$, prohíbe expansión, aunque algunas distancias puedan disminuir. Una muestra de pares comprueba esos casos particulares y deja pendiente la afirmación universal.

Por la desigualdad triangular, $|x| \leq |x - y| + |y|$ y $|y| \leq |x - y| + |x|$. Restando obtenemos $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$. Así $x \mapsto |x|$ tiene cota de expansión uno. Esa cota es óptima: las entradas

cero y uno conservan distancia uno. Sin embargo, las entradas x y $-x$ comparten salida. Un control superior limita cuánto pueden separarse las salidas y permite que dos de ellas colapsen en una sola.

Para $q(x) = x^2$, $|q(x)-q(y)| = |x-y|\,|x+y|$. La fórmula contiene un factor variable $|x+y|$. Si el dominio es $[-R, R]$ con $R > 0$, la triangular da $|x + y| \leq |x| + |y| \leq 2R$. Al sustituir, obtenemos $|q(x) - q(y)| \leq 2R|x - y|$ para todos los pares del intervalo. La restricción del dominio proporciona la misma cota para ese factor antes de conocer las entradas.

En toda la recta no existe tal cota finita. Recibamos cualquier $L \geq 0$ propuesto y elijamos después $x = L+1$, $y = L+2$. Las entradas distan uno y sus cuadrados distan $(L+2)^2-(L+1)^2 = 2L + 3 > L$, contra la estimación. Como el par se construye ante cualquier constante, refuta la existencia de una cota global. El argumento es algebraico y no utiliza derivadas.

Si además existe $c > 0$ con $c|x-y| \leq |f(x)-f(y)| \qquad (x, y \in D)$, entonces f es inyectiva. En efecto, si dos salidas coinciden, el lado derecho es cero y obliga a $c|x-y| = 0$; la positividad de c da $x = y$. Para construir la inversa declaramos codominio $f[D]$, que contiene exactamente las salidas con entrada, y obtenemos $h : f[D] \to D$. Dado cualquier par $u, v \in f[D]$, sus entradas únicas $x = h(u)$, $y = h(v)$ satisfacen $c|h(u) - h(v)| \leq |u - v|$. Dividir por $c > 0$ da $|h(u) - h(v)| \leq |u - v|/c$. La cota inferior original se convierte en una cota superior de la recuperación; la inversa sólo se evalúa en la imagen, aunque el codominio original fuese mayor.

Si $f : D \to E \subseteq \mathbb{R}$ tiene cota de expansión L y $g : E \to \mathbb{R}$ tiene cota M, las salidas intermedias $f(x), f(y)$ pertenecen al dominio donde se aplica la segunda estimación. Por ello, $|g(f(x)) - g(f(y))| \leq M|f(x) - f(y)| \leq ML|x - y|$. Los factores se multiplican: la segunda etapa actúa sobre una distancia ya controlada por la primera. Si uno vale cero, la composición tiene cota cero y las mismas desigualdades siguen siendo válidas. Estas estimaciones se han obtenido comparando valores mediante álgebra; no hemos invocado una teoría posterior de límites o continuidad.

Ejercicios de la sección 12.7.

Ejercicio 31. La mejor escala afín

Para $h(x) = mx + c$ en toda $\mathbb{R}$, prueba que $|m|$ es la menor cota de expansión no negativa.
Solución. La identidad $|h(x) - h(y)| = |m||x - y|$ muestra que $|m|$ sirve. Si L es otra cota, usamos $x = 0$, $y = 1$ y obtenemos $|m| \leq L$. Vale también para $m = 0$: la menor cota no negativa es cero. La traslación no influye en el resultado. Para demostrar que una cota es la menor hay que probar dos afirmaciones: que sirve para todos los pares y que cualquier otra cota debe ser al menos esa. La identidad exacta de distancias prueba la primera. El par cero y uno, separado por una unidad, convierte la condición de otra cota L en $|m| \leq L$. El caso $m = 0$ queda incluido y alcanza la menor cota no negativa cero. La constante c desaparece al restar salidas.

Ejercicio 32. Una cota sin reversibilidad

Prueba que $f(x) = \max(x, 0)$ tiene cota de expansión 1 en $\mathbb{R}$ y no es inyectiva.
Solución. Si ambas entradas son no negativas, la distancia de salidas es $|x-y|$; si ambas son no positivas, es cero. Si $x < 0 < y$, es $y \leq y - x = |x - y|$; el caso invertido es simétrico. Los extremos cero están incluidos en los primeros casos. Así la cota es 1. Pero $f(-1) = f(-2) = 0$, por lo que no es inyectiva. La verificación separa las regiones donde cambia la fórmula. En la región positiva la función es la identidad, en la negativa es constante cero y entre regiones la distancia de salidas sólo recoge la parte positiva de la separación original. En todos los casos no aumenta distancias. Sin embargo, muchas entradas negativas comparten la salida cero. Una cota superior de distancias limita la expansión, pero no impide colapsar entradas distintas; para eso haría falta otro argumento.

Ejercicio 33. La cota del cuadrado depende del radio

Prueba que $2R$ es la menor cota de expansión del cuadrado en $[-R, R]$, $R > 0$, sin derivadas.

Solución. La factorización del texto prueba la cota $2R$. Para refutar $0 \le L < 2R$, elegimos $t = \min(R, (2R - L)/2) > 0$, $x = R$, $y = R - t \in [0, R)$. El cociente de distancias, permitido porque $t > 0$, es $x + y = 2R - t > L$: si $t = (2R - L)/2$, el resultado es $(2R + L)/2 > L$; si $t = R$, esta rama exige $L \le 0$ y, como $L \ge 0$, $L = 0 < R$. Se viola la cota. Por tanto ninguna menor sirve.

La cota superior viene de $|x + y| \le 2R$. Para mostrar optimalidad, buscamos pares muy próximos al extremo R, cuyos cocientes de distancias son $x + y$ y se aproximan a $2R$. Ante cualquier $L < 2R$, la elección de $t > 0$ hace $2R - t > L$ sin salir del intervalo. No necesitamos un par que alcance exactamente el cociente $2R$: basta refutar cada factor menor con un par admisible. La prueba usa desigualdades algebraicas y no derivadas.

Ejercicio 34. Deshacer con control de distancia

Supón $c|x - y| \le |f(x) - f(y)| \le L|x - y|$ para $x, y \in D$, con $0 < c \le L$. Prueba las cotas de la inversa sobre la imagen.

Solución. La cota inferior hace inyectiva a f, así que existe $h : f[D] \to D$. Para $u = f(x)$, $v = f(y)$, las desigualdades dan $c|h(u) - h(v)| \le |u - v| \le L|h(u) - h(v)|$. Dividiendo por constantes positivas, $(1/L)|u - v| \le |h(u) - h(v)| \le (1/c)|u - v|$. Todo par de la imagen tiene entradas únicas, así que las cotas cubren el dominio completo de h. No se exige sobreyectividad hacia el codominio original.

La cota inferior positiva impide que dos entradas distintas compartan salida, por lo que permite definir la inversa sobre $f[D]$. Sustituir $x = h(u)$ y $y = h(v)$ convierte las cotas originales en cotas para la distancia de entradas recuperadas. Al dividir, el factor superior original produce una cota inferior $1/L$ para la inversa, y el factor inferior original produce una cota superior $1/c$. Controlar expansión y colapso permite deshacer la transformación con control cuantitativo.

Ejercicio 35. Cota compuesta con restricción

Sean $q : [-2, 2] \to [0, 4]$, $q(x) = x^2$, y $h : [0, 4] \to \mathbb{R}$, $h(y) = 3y - 1$. Obtén una cota para $h \circ q$ y demuestra si es la menor posible.

Solución. q tiene cota 4 y h tiene escala exacta 3, luego la composición tiene cota 12. Si $0 \le L < 12$, tomamos $t = \min(1, (12 - L)/6) > 0$, $x = 2$, $y = 2 - t \in [1, 2)$. El cociente de distancias de salidas es $3(x + y) = 12 - 3t$. Como $t \le (12 - L)/6$, ese valor es al menos $(12 + L)/2 > L$. Se contradice la cota L. Así 12 es la menor.

El factor cuatro del cuadrado en $[-2, 2]$ se multiplica por la escala exacta tres de la segunda etapa, dando doce. Que el producto sea una cota no demuestra por sí solo optimalidad; ésta requiere otro argumento. Los pares cercanos al extremo dos tienen cociente de distancias $3(x + y)$ próximo a doce. La elección indicada mantiene ambas entradas en el dominio y supera cualquier factor menor propuesto. Así la cota compuesta resulta óptima en este caso concreto.

12.8. Representaciones y ventanas de control

Un dibujo del grafo coloca una entrada real en el eje horizontal y su salida en el vertical. Una transformación de una rejilla hace algo diferente: recibe un punto del plano entero y devuelve otro punto. Aunque ambos objetos puedan dibujarse en una hoja, sus tipos y el papel de las coordenadas no coinciden. Para transformar una rejilla declaramos una función entre planos: $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\quad T(u, v) = (u + v, v)$.

La salida $(u+v, v)$ es un único elemento de $\mathbb{R}^2$, con dos coordenadas; no son dos resultados alternativos. Para recuperar la entrada a partir de (a, b), las ecuaciones $a = u + v$, $b = v$ dan $v = b$ y $u = a - b$. La candidata $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $S(a, b) = (a - b, b)$, verifica $S(T(u, v)) = (u, v)$

y $T(S(a,b)) = (a,b)$. Así se prueba la inversa para todo punto, sin deducirla de la apariencia del dibujo.

En la horizontal $v = k$, los puntos se transforman en $(u+k, k)$: la segunda coordenada permanece fija y la primera recorre todos los reales, por lo que se obtiene toda la misma horizontal. En la vertical $u = j$, las salidas $(j+v, v)$ cumplen $a - b = j$. Recíprocamente, cualquier punto con $a - b = j$ proviene de (j, b), así que se obtiene toda esa recta oblicua. El cuadrado de vértices $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$ tiene vértices imagen $(0,0), (1,0), (2,1), (1,1)$. De hecho, toda su imagen se describe por $0 \le b \le 1$ y $b \le a \le b+1$: las desigualdades equivalen a que su entrada recuperada $(a-b, b)$ esté en $[0,1]^2$. Así se controla también el interior y la frontera del paralelogramo.

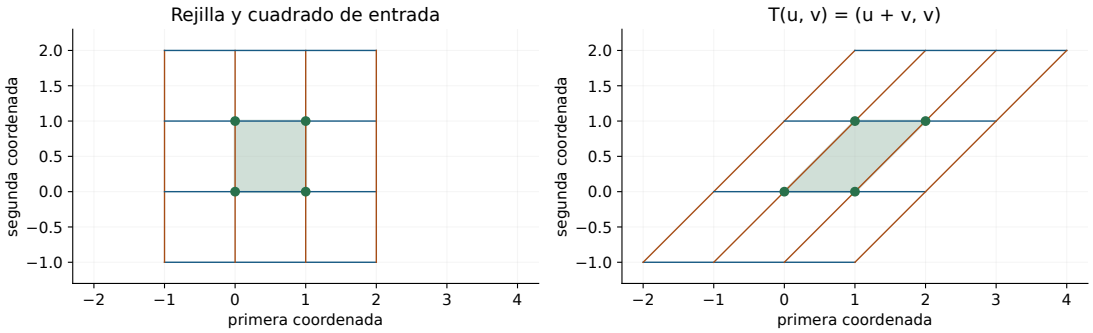


Figura 12.6. T:R²→R² transporta el cuadrado unitario a un paralelogramo. Su inversa (a,b)↦(a−b,b) recupera las entradas; la escala depende de la dirección.

La distancia euclídea entre (a,b) y (c,d) es $\sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$. El segmento horizontal de $(0,0)$ a $(1,0)$ conserva longitud uno bajo T; el vertical de $(0,0)$ a $(0,1)$ pasa al segmento de $(0,0)$ a $(1,1)$ y tiene longitud $\sqrt{2}$. Un factor exacto común tendría que ser uno por el primer segmento y $\sqrt{2}$ por el segundo, lo que es imposible. Las fórmulas de las rectas y la inversa justifican el transporte de la rejilla entera; la muestra finita sólo lo representa.

Regresemos a $f : D \to E$, con $D, E \subseteq \mathbb{R}$. Para $A \subseteq D$ y $B \subseteq E$,

$$f[A] \subseteq B \quad \Longleftrightarrow \quad A \subseteq f^{-1}[B].$$

En la primera dirección, $x \in A$ implica $f(x) \in f[A] \subseteq B$ y, por definición, $x \in f^{-1}[B]$. En la vuelta, una salida $y \in f[A]$ tiene un testigo $x \in A$; la inclusión de entradas lo sitúa en $f^{-1}[B]$ y da $y = f(x) \in B$. La equivalencia expresa el mismo control en dos conjuntos distintos y no exige que f sea invertible.

Con $x_0 \in D$ y radios $r, \rho > 0$, podemos aplicar esta equivalencia a $U = D \cap B(x_0, r)$, $V = E \cap B(f(x_0), \rho)$. La ventana U sólo contiene entradas donde podemos evaluar f. Si, por ejemplo, $D = [0, \infty)$ y $x_0 = 0$, una bola real también contiene negativos y es necesario recortarla por D. De modo análogo, V conserva las salidas permitidas por E. La equivalencia dice que transportar toda U dentro de V es lo mismo que incluir U en $f^{-1}[V]$. Los radios son fijos: todavía no se ha formulado una condición de límite ni asegurado que la inclusión valga para una función arbitraria.

Para el cuadrado real, tomemos $x_0 = 1$, $r = 1/4$ y $\rho = 1$. La ventana de entrada es $U = (3/4, 5/4)$ y la de salida $(0,2)$. Si $|x-1| < 1/4$, la triangular da $|x+1| = |(x-1)+2| < 9/4$. Factorizar la diferencia de cuadrados aprovecha precisamente ese control: $|q(x) - q(1)| = |x-1|\,|x+1| < \frac{1}{4}\frac{9}{4} = \frac{9}{16} < 1$.

La estimación vale para cada entrada de U, de modo que certifica $q[U] \subseteq (0,2)$ y, equivalentemente, $U \subseteq q^{-1}[(0,2)]$. La preimagen completa es $(-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2})$; U ocupa sólo una parte de ella. Para asegurar la inclusión basta una cota de todos sus puntos, sin calcular ni observar por separado infinitas evaluaciones. La función de salto de §12.6 ofrece una selección de otro tipo. Como $s(0) = 1$, consideremos $B(1, 1/4) = (3/4, 5/4)$. Ninguna entrada negativa

sirve: su salida es negativa. Para las no negativas, la condición $3/4 < x + 1 < 5/4$ equivale a $-1/4 < x < 1/4$, y recortarla por $x \geq 0$ deja $s^{-1}[B(1, 1/4)] = [0, 1/4)$.

La preimagen contiene cero, pero no es una vecindad real de cero. Para cualquier radio $r > 0$, la entrada $-r/2$ pertenece a $B(0, r)$ y queda fuera de $[0, 1/4)$. Por tanto ninguna bola real centrada en cero está contenida en esa selección. El universo importa: una vecindad relativa a un dominio restringido a los no negativos respondería a otra pregunta. Aquí seguimos en toda la recta, como en C04.

La comparación entre las dos ventanas termina en una diferencia precisa. En el cuadrado hemos encerrado las salidas de toda una bola alrededor de la entrada; la preimagen del salto contiene el centro y excluye todas las entradas negativas, por próximas que estén a él. Para estudiar cómo se comporta una función cerca de un punto tendremos que seguir controlando conjuntos completos de entradas próximas, conservando los dominios y los radios en cada afirmación.

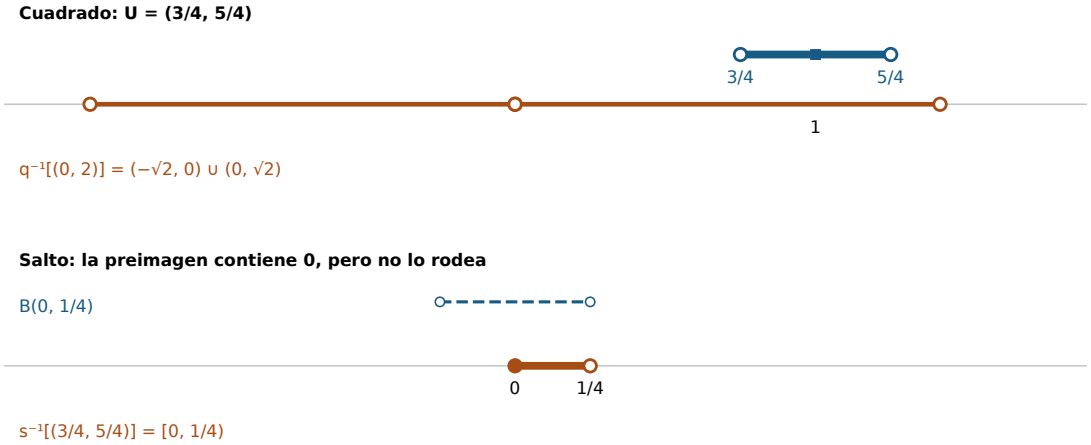


Figura 12.7. En el cuadrado, una estimación certifica que una ventana completa cabe en la preimagen. En el salto, la preimagen contiene el centro pero no es vecindad. La pertenencia y el margen alrededor del centro son datos distintos.

Ejercicios de la sección 12.8.

Ejercicio 36. Transportar el cuadrado entero

Para $T(u, v) = (u + v, v)$, calcula la imagen de $[0, 1]^2$ mediante desigualdades en las coordenadas de salida (a, b); prueba ambas inclusiones.

Solución. La imagen es $P = \{(a, b) : 0 \leq b \leq 1,\ b \leq a \leq b + 1\}$. Si $0 \leq u, v \leq 1$, entonces $b = v$ y $a = u + v$, de donde las desigualdades. Si $(a, b) \in P$, la entrada $(u, v) = (a - b, b)$ satisface $0 \leq u, v \leq 1$ y $T(u, v) = (a, b)$. Los vértices son los del paralelogramo mostrado en el texto; el argumento cubre también su interior y frontera.

Retorno visual. Véase C12-F06, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba. Las desigualdades de salida no se obtienen sólo enviando los cuatro vértices. La coordenada $b = v$ queda entre cero y uno, y $a - b = u$ también queda entre cero y uno, lo que describe todos los puntos enviados. Para la vuelta, esas mismas condiciones garantizan que la entrada recuperada $(a - b, b)$ está en el cuadrado. Al comprobar las dos direcciones incluimos toda la región y su frontera, y no únicamente su contorno dibujado.

Ejercicio 37. Una rejilla no es un grafo escalar

Explica por qué la imagen por T de la recta $v = 0$ puede ser una parte de un dibujo de rejilla y también el grafo de una función escalar, pero T no es esa función escalar.

Solución. Para $v = 0$, $T(u, 0) = (u, 0)$, así que la imagen es la recta horizontal de pares $(a, 0)$. Ese conjunto es el grafo de la función escalar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(a) = 0$. Sin embargo, T recibe pares (u, v) y devuelve pares; f recibe un real y devuelve cero. Su tipo, asignación y dominio difieren. Un mismo conjunto dibujado puede representar objetos en papeles distintos.

La recta horizontal es un conjunto de pares del plano. Puede describirse como imagen de un conjunto bajo una transformación del plano o como grafo de una función de una variable real. En el primer papel, cada punto de la recta inicial es una entrada completa de T; en el segundo, la primera coordenada es la entrada y la segunda la salida de la función constante. Coincidir en el conjunto representado no identifica las funciones que lo producen ni sus tipos.

Ejercicio 38. Ventana certificada para una afín

Sea $f(x) = mx + c$ en $\mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\rho > 0$. Si $m \neq 0$, calcula $f^{-1}[B(f(x_0), \rho)]$ y decide para qué $r > 0$ vale $f[B(x_0, r)] \subseteq B(f(x_0), \rho)$. Trata $m = 0$.

Solución. Para $m \neq 0$, la condición es $|m||x - x_0| < \rho$, por lo que la preimagen es $B(x_0, \rho/|m|)$. La inclusión de ventanas vale exactamente para $r \leq \rho/|m|$: con esa condición todo punto de la bola menor satisface la desigualdad; si r es mayor, la entrada $x = x_0 + \rho/|m|$ está dentro de la primera bola pero su salida tiene distancia exactamente ρ, excluida de la segunda. Si $m = 0$, la salida es siempre $c = f(x_0)$, la preimagen es toda $\mathbb{R}$ y cualquier $r > 0$ sirve.

Retorno visual. Véase C12-F07, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba. El caso frontera $r = \rho/|m|$ sí funciona: pertenecer a una bola abierta da $|x - x_0| < r$, y al multiplicar se conserva una distancia de salida estrictamente menor que ρ. Si r es mayor, el punto situado exactamente a distancia $\rho/|m|$ de x_0 está dentro de la ventana de entrada, pero su salida cae en la frontera excluida. Para $m = 0$ no se divide por cero; se comprueba directamente que todas las salidas coinciden con el centro solicitado.

Ejercicio 39. Pertenencia sin vecindad

Define $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $p(0) = 0$ y $p(x) = 1$ si $x \neq 0$. Calcula $p^{-1}[B(0, 1/2)]$ y prueba que no es vecindad de cero.

Solución. $B(0, 1/2) = (-1/2, 1/2)$ contiene cero y no contiene uno. Por tanto la preimagen es $\{0\}$. Para cualquier $r > 0$, el punto $r/2$ es distinto de cero y pertenece a $B(0, r)$, pero no a la preimagen. Ninguna bola positiva centrada en cero cabe en ella. Contener el centro no garantiza ser vecindad. **Retorno visual.** Véase C12-F07, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Sólo la entrada cero produce una salida dentro de $(-1/2, 1/2)$; todas las otras entradas producen uno, que queda fuera. El conjunto seleccionado es entonces un punto aislado. Para ser vecindad real de cero tendría que contener alguna bola de radio positivo, pero cualquier radio propuesto admite una entrada no nula todavía más cercana. El testigo $r/2$ muestra ese fallo para todos los radios, no sólo para una ventana particular.

Ejercicio 40. Reconstruir imagen desde todas las selecciones

Sean $A \subseteq D$ y $C \subseteq E$. Supón que para todo $B \subseteq E$ se cumple $C \subseteq B$ si y sólo si $A \subseteq f^{-1}[B]$. Prueba que $C = f[A]$.

Solución. Por la equivalencia del manuscrito, la segunda condición equivale a $f[A] \subseteq B$. Así C y $f[A]$ tienen exactamente los mismos conjuntos que los contienen. Tomando $B = C$, la inclusión $C \subseteq C$ implica $f[A] \subseteq C$. Tomando $B = f[A]$, la inclusión $f[A] \subseteq f[A]$ implica $C \subseteq f[A]$. Las dos inclusiones dan igualdad. La caracterización recupera el transporte hacia delante a partir de su relación con todas las selecciones hacia atrás, incluidos los casos vacíos.

La hipótesis describe qué conjuntos contienen a C y los compara con una selección de entradas. La equivalencia entre imagen y preimagen convierte esa selección en la condición de contener a $f[A]$. Para recuperar la igualdad elegimos dos conjuntos de prueba: C y $f[A]$. Cada uno se contiene a sí mismo, y la equivalencia obliga a que contenga al otro. Las dos

inclusiones concluyen la prueba sin escoger elementos concretos y abarcan también los casos vacíos.

Capítulo 13

Límites de funciones: control de dos escalas

La identidad $x^2-1=(x-1)(x+1)$ permite relacionar la proximidad de x a 1 con la de x^2 a 1. Para convertir esa relación en una prueba hay que dominar el segundo factor y obtener una estimación que sirva para todas las entradas suficientemente próximas. El límite expresa esa posibilidad de responder a cualquier precisión de salida mediante una misma restricción sobre las entradas de una ventana.

Las bolas y la acumulación de C04 dan los conjuntos en que se formula ese control; las imágenes y preimágenes de C12 permiten escribirlo como una inclusión. Al pasar a las sucesiones de C06 aparecerá una diferencia adicional: controlar una ruta ya dada y construir una ruta que detecte un fallo son tareas con obligaciones distintas.

13.1. Aproximarse sin tocar el centro

En C12 encerramos las salidas de una ventana dentro de otra. Para estudiar la aproximación necesitamos poder repetir ese control ante cualquier precisión solicitada: una banda de salidas más estrecha podrá exigir una ventana de entradas más pequeña. El destino que buscamos tampoco tiene por qué coincidir con la evaluación en el centro. Consideremos $q(x)=x^2$ cerca de 1 y cambiemos únicamente su valor allí: sea $h(1)=4$ y $h(x)=x^2$ para $x\neq 1$. Todas las entradas próximas y distintas de 1 siguen produciendo las mismas salidas que antes del cambio. La aproximación de esas salidas a 1 debe poder estudiarse sin imponer ninguna condición a $h(1)$; de ahí que la definición excluya el centro de las entradas que somete a control.

Sean $D\subseteq\mathbb{R}$ y $a\in\mathbb{R}$. La condición de acumulación de C04, que escribimos $a\in D'$, exige que para cada $r>0$ exista $x\in D$ con $0<|x-a|<r$. La entrada puede variar con el radio. Así cero acumula entradas de $(0,\infty)$: para cualquier $r>0$, el punto $r/2$ pertenece al dominio y está a distancia positiva menor que r de cero, aunque el propio cero no pertenezca al dominio.

Reunimos esas entradas en $U_D(a,r)=\{x\in D : 0<|x-a|<r\}$, la ventana perforada de radio r. La pertenencia a D autoriza cada evaluación y la desigualdad positiva excluye exactamente $x=a$. Decir que $a\in D'$ equivale a afirmar que todas estas ventanas son no vacías. Por el momento sólo necesitamos un testigo para cada radio que se considere, sin reunirlos en una sucesión.

Definición. Para $f:D\to\mathbb{R}$, $a\in D'$ y $L\in\mathbb{R}$, decimos que f tiene límite L en a a través de D si

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in D:\quad 0<|x-a|<\delta\implies|f(x)-L|<\varepsilon.$$

Escribimos $\lim_{x\to a,\ x\in D} f(x)=L$, abreviando el dominio cuando sea inequívoco. En este capítulo todos los límites funcionales son reales finitos en puntos reales finitos. Para cada $\varepsilon>0$, la misma condición pide un $\delta>0$ con $f[U_D(a,\delta)]\subseteq B(L,\varepsilon)$. Toda salida de la imagen tiene una entrada testigo en la ventana y, por la definición, dista menos que ε de L. Recíprocamente, aplicar la inclusión a la salida de cualquier entrada de la ventana recupera la desigualdad. La equivalencia de C12 permite escribir también $U_D(a,\delta)\subseteq f^{-1}[B(L,\varepsilon)]$: estamos seleccionando entradas por sus salidas, sin suponer que f tenga inversa.

La acumulación evita que este control quede vacío. Si $D=\{a\}$, ninguna entrada cumple $0<|x-a|<\delta$ y la implicación de la fórmula es verdadera para todos los candidatos L. Bajo

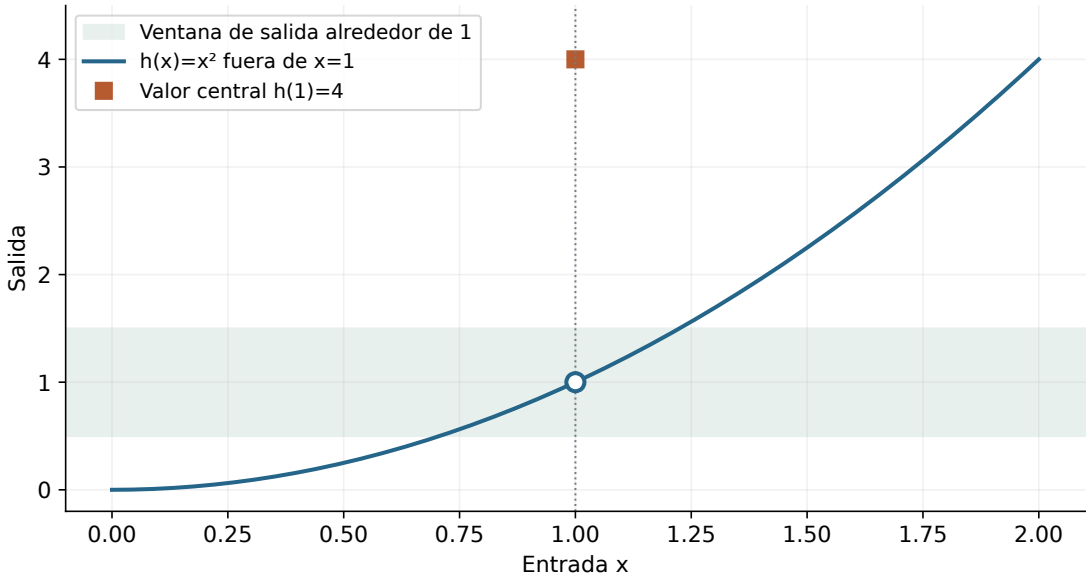


Figura 13.1. C13-F01. La perforación omite el valor h(1)=4. Las entradas no centrales siguen la regla x^2 y se aproximan al destino 1. El círculo vacío distingue el hueco del valor asignado; la banda es un desafío, no una prueba.

nuestra convención no se declara un límite en ese caso. Exigir entradas en todas las ventanas permitirá, además, confrontar dos supuestos destinos mediante una misma evaluación. El control sólo depende de los valores en alguna ventana perforada. Si $f, g : D \to \mathbb{R}$ coinciden en $U_D(a, r)$, con $r > 0$, y $f \to L$, fijamos $\varepsilon > 0$ y tomamos $\delta = \min(r, \delta_f)$, donde $\delta_f > 0$ es válido para f. Cada entrada de la nueva ventana satisface la coincidencia y la estimación, de modo que $|g(x) - L| = |f(x) - L| < \varepsilon$. Intercambiar f y g prueba la equivalencia. Esto permite cambiar valores lejanos o sólo el valor central; añadir o retirar el propio centro tampoco cambia las ventanas perforadas ni su acumulación.

Ejercicios de la sección 13.1.

Ejercicio 1. El agujero no decide el destino

Define $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = 2x + 5$ si $x \neq -1$ y $f(-1) = 100$. Prueba desde la definición el límite en -1 y explica qué dato se excluye.

Solución. El candidato es 3. Para $\varepsilon > 0$ tomamos $\delta = \varepsilon/2$. Si $0 < |x + 1| < \delta$, entonces $x \neq -1$, por lo que $|f(x) - 3| = 2|x + 1| < \varepsilon$. El punto -1 acumula entradas reales, por ejemplo $-1 + \delta/2$. La definición controla entradas distintas del centro; el valor 100 no interviene. **Retorno visual.** Véase C13-F01, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

La condición positiva $0 < |x + 1|$ garantiza que se aplica la rama afín y no la evaluación excepcional. Restar el candidato tres da $2x + 2 = 2(x + 1)$, por lo que el error se controla exactamente mediante la distancia de entrada. El radio elegido es positivo para toda tolerancia positiva y funciona para todas las entradas de la ventana. El valor cien queda excluido por la definición, no porque sea pequeño o despreciable.

Ejercicio 2. Una pregunta sin entradas

Para $D = \{0\} \cup [2, 3]$ y cualquier $f : D \to \mathbb{R}$, analiza la fórmula perforada en $a = 0$. ¿Hay un límite bajo la convención del capítulo?

Solución. Con $\delta = 1$, no existe $x \in D$ con $0 < |x| < 1$. La implicación sería verdadera para todo L y toda tolerancia usando ese mismo radio. Pero 0 no es punto de acumulación de D, así que no asignamos límite. El fallo no depende de los valores de f: depende de las rutas inexistentes. El centro cero pertenece al dominio, pero sus demás entradas están al

menos a distancia dos. Por eso una ventana suficientemente pequeña no contiene entradas perforadas. La fórmula de precisión no discrimina ningún candidato y sería satisfecha incluso por números incompatibles entre sí. La hipótesis de acumulación evita esta ambigüedad: pertenecer al dominio no basta para preguntar por un límite perforado bajo la convención adoptada.

Ejercicio 3. Dos lenguajes del mismo control

Prueba directamente que $f[U_D(a,\delta)] \subseteq B(L,\varepsilon)$ equivale a $U_D(a,\delta) \subseteq f^{-1}[B(L,\varepsilon)]$. Mantén separados valores y conjuntos.

Solución. Si vale la inclusión de imágenes y $x \in U_D(a,\delta)$, entonces $f(x) \in f[U_D(a,\delta)] \subseteq B(L,\varepsilon)$, luego $x \in f^{-1}[B(L,\varepsilon)]$. A la inversa, si toda entrada de la ventana está en esa preimagen y y pertenece a la imagen, existe un testigo x de la ventana con $y = f(x)$; la pertenencia a la preimagen da $y \in B(L,\varepsilon)$. $f(x)$ es un valor; la imagen y la preimagen son conjuntos.

La primera inclusión controla salidas y la segunda selecciona entradas. Para pasar de una a otra se usa la misma evaluación $f(x)$, sin invertir la función. En la vuelta, una salida de la imagen viene acompañada de una entrada testigo de la ventana. La prueba conserva el recorte por D y la exclusión del centro. Así ambas formulaciones expresan el mismo control universal, aunque sus conjuntos vivan en espacios distintos.

Ejercicio 4. Igualdad en un germen perforado

Sean $f, g : D \to \mathbb{R}$ iguales siempre que $0 < |x-a| < r$, con $r > 0$ y $a \in D'$. Prueba que tienen exactamente los mismos candidatos de límite.

Solución. Fijemos un candidato L y supongamos $f \to L$. Para cada $\varepsilon > 0$, un radio δ_f de f se reúne con r mediante $\delta = \min(r, \delta_f) > 0$. En la ventana resultante $g(x) = f(x)$ y $|g(x)-L| < \varepsilon$. Luego $g \to L$. Intercambiar f, g prueba la recíproca para ese mismo candidato. Como L era arbitrario, los conjuntos de candidatos coinciden. El candidato se mantiene fijo durante cada dirección de la prueba. El radio mínimo asegura que las funciones coincidan donde se aplica la estimación del límite, y por eso el error puede trasladarse sin cambiarlo. Después invertimos los papeles. No importa que las funciones difieran en el centro o en entradas lejanas: el límite se decide en alguna ventana perforada donde ambas tienen los mismos datos de salida.

Ejercicio 5. Cambiar valores en infinitos puntos lejanos

Construye dos funciones reales que difieran en infinitos puntos, una no acotada globalmente, y que tengan límite cero en cero por coincidencia local. Prueba las afirmaciones.

Solución. Sea $f(x) = 0$ para todo real, y sea $g(x) = 0$ si $|x| < 1$, $g(x) = x^2$ si $|x| \geq 1$. Difieren en todos los enteros positivos, un conjunto infinito. $g(n) = n^2$ no admite cota global por arquimedianidad. Ambas coinciden en la ventana de radio 1; para toda tolerancia, ese radio hace el error cero. La información fuera de una ventana fija no determina el límite.

Cada entero positivo produce salida cero en f y salida n^2 en g, de modo que existen infinitas discrepancias. Para refutar cualquier barrera global propuesta a g, basta escoger un entero cuyo cuadrado la supere. Cerca de cero, en cambio, ambas funciones valen exactamente cero. El mismo radio uno responde a todas las tolerancias. La cantidad de discrepancias no decide el límite; importa su ubicación respecto de las ventanas locales.

13.2. Diseñar una respuesta para toda la ventana

El orden de los cuantificadores fija cómo se elige el radio. Después de declarar f, D, a, L y recibir $\varepsilon > 0$, debemos producir un $\delta > 0$ que funcione para toda entrada de su ventana. Si lo eligiéramos después de ver $x \neq a$, podríamos tomar $\delta < |x-a|$ y excluir precisamente esa entrada: la implicación no habría controlado su salida. La dependencia permitida es de la tolerancia y de los datos fijados.

Para $f(x) = 3x - 2$ en $a = 1$, la diferencia respecto del candidato $L = 1$ se reduce a $|(3x - 2) - 1| = 3|x - 1|$. El cálculo indica cuánto hay que reducir la distancia de entrada: para que el resultado sea menor que ε, basta pedir $|x - 1| < \varepsilon/3$. Recibida cualquier $\varepsilon > 0$, elegimos por tanto $\delta = \varepsilon/3 > 0$. Para una entrada arbitraria con $0 < |x - 1| < \delta$ obtenemos $|f(x) - 1| = 3|x - 1| < 3\delta = \varepsilon$. La elección se hizo antes de esa entrada y la estimación se verifica en toda la ventana.

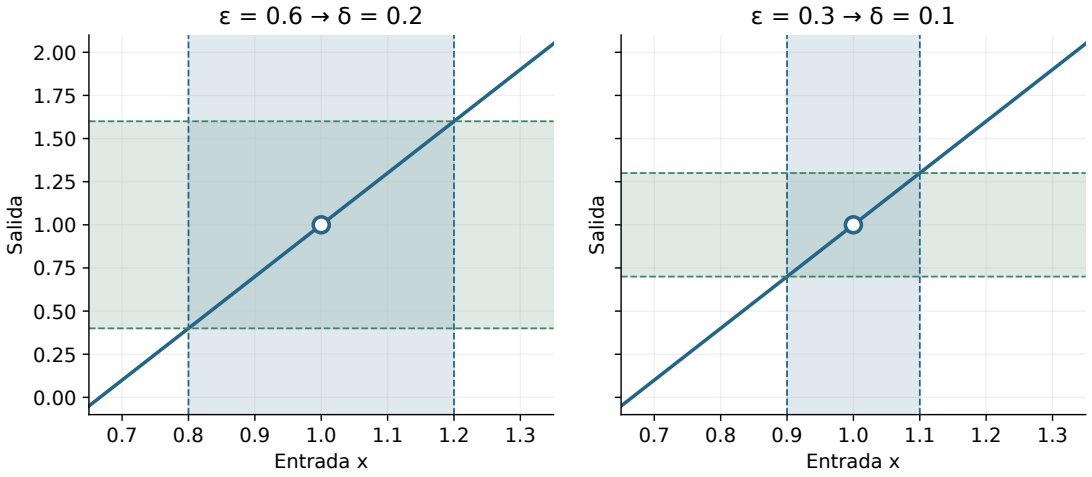


Figura 13.2. C13-F02. Para 3x−2 en a=1, el error de salida es tres veces el de entrada. Cada desafío ε tiene respuesta δ=$\varepsilon/3$; los bordes se excluyen. Dos instancias ilustran la fórmula que la prueba verifica para todo ε.

La misma identidad para $f(x) = mx + c$ es $|f(x) - (ma + c)| = |m||x - a|$. Si $m \neq 0$, sirve $\delta = \varepsilon/|m|$; si $m = 0$, el error es cero y podemos usar cualquier radio positivo. En cambio, para una afín no constante en la recta, un solo radio no responde a todas las tolerancias: fijado $\delta > 0$, la entrada $a + \delta/2$ tiene error $|m|\delta/2 > 0$, que incumple una tolerancia menor. El radio puede adaptarse a la precisión sin depender de la entrada.

En el cuadrado, $|x^2 - a^2| = |x - a||x + a|$ deja un factor variable que debemos acotar antes de diseñar la precisión. La restricción auxiliar $|x - a| < 1$ da $|x + a| \leq |x - a| + 2|a| < 1 + 2|a| =: C$. Esta constante depende del centro y es positiva incluso si $a = 0$. El error queda así dominado por una constante fija multiplicada por la distancia que podemos reducir.

Dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta = \min(1, \varepsilon/C) > 0$. Si $0 < |x - a| < \delta$, la primera restricción acota $|x + a|$ y la segunda ajusta el error: $|x^2 - a^2| < C|x - a| < C\delta \leq \varepsilon$. La primera desigualdad es estricta porque $|x - a| > 0$. El mínimo conserva simultáneamente las dos condiciones necesarias.

Cualquier reducción positiva de un radio válido vuelve a ser válida, pues sólo retira entradas ya controladas. En $a = 1$ la elección $\min(1, \varepsilon/3)$ puede ser menor que el mayor radio posible, como muestra la figura. La existencia del límite sólo requiere la elección que acabamos de verificar; afirmar optimalidad exige además descartar todos los radios mayores, tarea que se desarrolla en el ejercicio 13.8.

Para $r(x) = 1/x$, con dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $a \neq 0$, el factor variable aparece en el denominador. Si $|x - a| < |a|/2$, la triangular inversa da $|x| \geq |a| - |x - a| > |a|/2 > 0$. Todas esas entradas evitan cero con una separación común, y, para $x \neq a$, $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|x-a|}{|x||a|} < \frac{2|x-a|}{|a|^2}$.

Elegimos $\delta = \min(|a|/2, \varepsilon|a|^2/2) > 0$. Para cualquier entrada de su ventana perforada, la barrera anterior permite invertir el denominador y la restricción de precisión da $2|x - a|/|a|^2 < \varepsilon$. Queda probado $\lim_{x \to a} 1/x = 1/a$. Saber sólo que cada denominador es distinto de cero no habría proporcionado la cota uniforme que utiliza esta estimación.

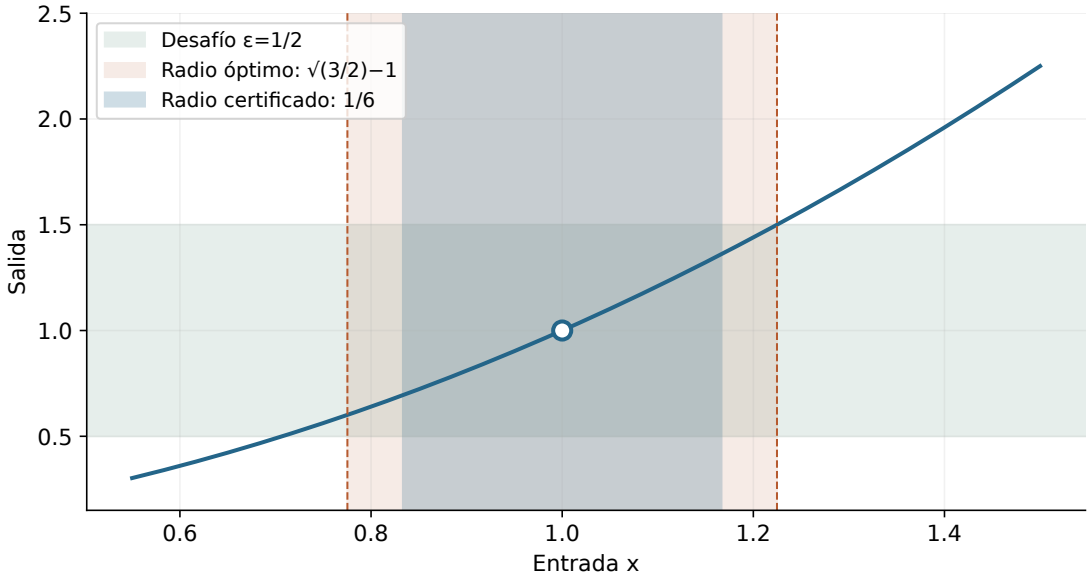


Figura 13.3. C13-F03. En x² alrededor de 1 y con ε=1/2, el certificado de la prueba usa δ=1/6. El mayor radio simétrico es $\sqrt{(3/2)}-1$. El certificado conservador basta para demostrar el límite; la optimización exige el argumento adicional del ejercicio 13.8.

Ejercicios de la sección 13.2.

Ejercicio 6. Diseñar el radio de una afín decreciente

Prueba desde la definición que $-4x + 7$ tiene límite -1 en $a = 2$. Determina el mayor radio simétrico válido para un desafío $\varepsilon > 0$.

Solución. El error es $4|x - 2|$. $\delta = \varepsilon/4$ sirve porque la entrada satisface una desigualdad estricta. Si $\delta > \varepsilon/4$, tomamos $t = (\delta + \varepsilon/4)/2$ y $x = 2 + t$. Entonces $0 < t < \delta$ y $4t > \varepsilon$, infracción. Por tanto el radio dado es el mayor. El signo de la pendiente invierte orden, pero el error depende de su magnitud. **Retorno visual.** Véase C13-F02, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Como la magnitud de la pendiente es cuatro, el error de salida es exactamente cuatro veces el de entrada. El radio $\varepsilon/4$ sirve incluso en el caso frontera, porque las entradas están a distancia estrictamente menor que el radio. Para cualquier radio mayor, la distancia t elegida entre ambos umbrales produce un infractor dentro de la ventana. Estos dos argumentos demuestran validez y maximalidad, que son obligaciones diferentes.

Ejercicio 7. Un radio conservador para un cuadrado

Prueba desde la definición $x^2 \to 4$ en 2 y da un radio explícito que no necesite resolver una desigualdad cuadrática.

Solución. Para $|x-2| < 1$, $|x+2| \le |x-2|+4 < 5$. Dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta = \min(1, \varepsilon/5)$. Entonces $|x^2 - 4| = |x - 2||x + 2| < 5|x - 2| < 5\delta \le \varepsilon$. El radio auxiliar elimina el factor variable. La factorización introduce un factor variable $x + 2$. Antes de ajustar la precisión, imponemos una ventana de radio uno para acotar su magnitud por cinco. Luego la condición $|x - 2| < \varepsilon/5$ hace pequeño el producto. El mínimo conserva ambas condiciones a la vez. No se afirma que sea el mayor radio, ni se necesita resolver la desigualdad exacta para demostrar existencia del límite.

Ejercicio 8. Radio óptimo del cuadrado en uno

Para $0 < \varepsilon < 1$, demuestra que el mayor radio simétrico para $|x^2 - 1| < \varepsilon$ alrededor de 1 es $\delta_* = \sqrt{1 + \varepsilon} - 1$.

Solución. La componente de entradas positivas que satisface el error es $(\sqrt{1-\varepsilon}, \sqrt{1+\varepsilon})$. Los márgenes desde 1 son $1-\sqrt{1-\varepsilon}$ y $\sqrt{1+\varepsilon}-1$. El segundo es menor: racionalizar da $\varepsilon/(1+\sqrt{1-\varepsilon}) > \varepsilon/(1+\sqrt{1+\varepsilon})$. Así el intervalo simétrico de radio δ_* queda dentro de esa componente, pues su extremo inferior supera $\sqrt{1-\varepsilon}$. Si un radio es mayor, incluye $x=\sqrt{1+\varepsilon}$, distinto de 1, cuyo error es exactamente ε, infracción.

Retorno visual. Véase C13-F03, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba. Alrededor de uno, con $0<\varepsilon<1$, las entradas admisibles positivas están entre las dos raíces indicadas. El lado derecho ofrece el margen menor, por lo que determina la mayor ventana simétrica. El radio óptimo aún funciona porque su extremo superior queda fuera de la bola abierta de entradas. Cualquier aumento lo incluye y produce error exactamente igual a la tolerancia, que ya infringe el requisito estricto. Así la frontera permite acreditar la optimalidad.

Ejercicio 9. Reparar una respuesta que depende de la entrada

Un borrador afirma: «Para probar $x^2 \to 1$, tomo $\delta = \varepsilon/(|x+1|+1)$; así el error será pequeño». Localiza el defecto y escribe una prueba válida.

Solución. La expresión de δ utiliza el x que debía verificarse después de fijar el radio. No produce una respuesta única para toda la ventana. La reparación fija primero $|x-1|<1$, que da $|x+1|<3$, y elige $\delta=\min(1,\varepsilon/3)$. Para toda entrada de esa ventana, $|x^2-1|<3|x-1|<\varepsilon$. La fórmula defectuosa queda como objeto de diagnóstico, no como prueba.

La respuesta debe fijarse antes de considerar la entrada arbitraria. El borrador usa precisamente esa entrada para definir el tamaño de su ventana, por lo que no prueba un radio común. La reparación sustituye el factor variable por una constante obtenida en una ventana auxiliar. Con $|x-1|<1$, $|x+1|<3$, y el mínimo propuesto hace $|x^2-1|=|x-1||x+1|<\varepsilon$ para toda la ventana.

Ejercicio 10. Proteger un recíproco desplazado

Prueba desde la definición que $1/(x-3)$ tiene límite $-1/2$ en $a=1$.

Solución. Si $|x-1|<1$, entonces $|x-3|\geq 2-|x-1|>1$; las entradas no alcanzan 3. El error es $|1/(x-3)+1/2| = |x-1|/(2|x-3|) < |x-1|/2$. Tomamos $\delta=\min(1,2\varepsilon)$. Para toda entrada del dominio dentro de esa ventana, el error es menor que $\delta/2\leq\varepsilon$. El dominio natural excluye tres. La ventana auxiliar alrededor de uno permanece separada de ese punto porque $|x-3|>1$. Después de reunir los cocientes, el numerador del error es $x-1$ y el denominador tiene magnitud mayor que dos. El radio de precisión 2ε controla ese error y el mínimo conserva la protección del denominador. La prueba declara por qué cada evaluación está permitida antes de aplicar la estimación.

13.3. Un destino, barreras locales y orden

Dos candidatos distintos podrían exigir radios diferentes. Para compararlos necesitamos reducirnos a la intersección de sus ventanas y encontrar allí una entrada: ésa es la función que cumplirá la acumulación en la prueba de unicidad.

Teorema. Si $a\in D'$ y $f:D\to\mathbb{R}$ tiene límites L y M en a, entonces $L=M$.

Supongamos $L\neq M$ y pongamos $d=|L-M|>0$. Para tolerancia $d/3$, los dos límites entregan radios $\delta_L,\delta_M>0$. Su mínimo sigue siendo positivo y, como $a\in D'$, existe $x\in D$ con $0<|x-a|<\min(\delta_L,\delta_M)$. Ambas estimaciones se aplican a esa misma salida. La triangular da entonces $d\leq|L-f(x)|+|f(x)-M|<2d/3$, contradicción. Sin una entrada común no habríamos podido enlazar las dos cotas.

Una sola tolerancia también produce una consecuencia útil. Si $f\to L$, la tolerancia 1 proporciona un $r>0$ con $|f(x)-L|<1$ en $U_D(a,r)$, y allí $|f(x)|\leq|f(x)-L|+|L|<|L|+1$. Es una acotación local perforada. El cuadrado tiene límite cero en cero y crece sin cota en toda la recta, por lo que esta conclusión sólo se extiende a las entradas de la ventana obtenida.

Si además $a \in D$, la barrera $\max(|L|+1, |f(a)|+1)$ incorpora su valor y acota también las entradas no perforadas de esa ventana. El límite no había estimado $f(a)$; lo hemos añadido por separado como un único valor real. Supongamos $f, g : D \to \mathbb{R}$, $f \to L$, $g \to M$ y $f(x) \leq g(x)$ en alguna ventana perforada. Si $L > M$, tomamos $\varepsilon = (L-M)/3$ y el mínimo de los radios de ambos límites y del radio de orden. La acumulación da una entrada común, donde $f(x) > L - \varepsilon > M + \varepsilon > g(x)$ contradice la desigualdad supuesta. Así $L \leq M$. La desigualdad puede perder su carácter estricto al pasar al límite: en $(0, \infty)$ tenemos $0 < x$, mientras la función cero y la identidad tienden ambas a cero en cero.

Teorema del encierro. Si $p(x) \leq f(x) \leq q(x)$ cerca de a, $p \to L$ y $q \to L$, entonces $f \to L$. Para $\varepsilon > 0$, reúna radios para p, q y para el orden. Allí $L - \varepsilon < p(x) \leq f(x) \leq q(x) < L + \varepsilon$, luego $|f(x) - L| < \varepsilon$. No hemos supuesto existencia previa del límite de f; acabamos de probarla.

Sea ahora $b : D \to \mathbb{R}$, con $0 \in D'$ y $|b(x)| \leq K$ en $U_D(0, r)$ para ciertos $r > 0$, $K \geq 0$. En $h(x) = xb(x)$, la estimación $|h(x)| \leq K|x|$ permite tomar $\delta = \min(r, \varepsilon/K)$ cuando $K > 0$. Si $K = 0$, la función b es cero en esa ventana y el error ya es nulo, sin dividir por K. No hace falta que b tenga límite: puede valer uno en los racionales y menos uno en los irracionales. La cota controla el tamaño de su oscilación y el factor x hace pequeño todo el producto.

Ejercicios de la sección 13.3.

Ejercicio 11. Una cota que incluye el centro

Si $a \in D$, $a \in D'$ y $f \to L$, prueba que f está acotada en alguna ventana no perforada $D \cap B(a, r)$, sin suponer $f(a) = L$.

Solución. La tolerancia 1 entrega $r > 0$ con $|f(x)| < |L| + 1$ para toda entrada no central de la ventana. Elegimos $K = \max(|L| + 1, |f(a)| + 1)$. En el centro, $|f(a)| < K$; fuera del centro, la cota previa da $|f(x)| < K$. La unión de ambos casos prueba acotación. Sólo se añadió un valor finito a una cota local. La definición da una barrera sólo para las entradas no centrales. Para ampliar a la ventana completa hay que añadir el valor particular $f(a)$, que es un real finito porque $a \in D$. Tomar el máximo de ambas barreras cubre los dos casos. No se necesita que ese valor central coincida con L: una evaluación excepcional puede estar lejos del destino y aun así incluirse en una cota local finita.

Ejercicio 12. Encierro sin existencia supuesta

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y supongamos $-x^2 \leq f(x) \leq 2x^2$ para $0 < |x| < 1$. Prueba $f \to 0$ sin usar reglas algebraicas posteriores.

Solución. Las cotas implican $|f(x)| \leq 2x^2$ en esa ventana. Para $\varepsilon > 0$ tomamos $\delta = \min(1, \sqrt{\varepsilon/2}) > 0$. Si $0 < |x| < \delta$, entonces $|f(x)| \leq 2x^2 < 2\delta^2 \leq \varepsilon$. No se supuso que f tuviera límite: el control universal lo establece. Las raíces positivas pertenecen al álgebra real elemental. Si $f(x)$ es no negativo, la cota superior da $|f(x)| \leq 2x^2$; si es negativo, la inferior da $|f(x)| \leq x^2 \leq 2x^2$. Por eso la estimación absoluta es válida en ambos casos. El radio elegido permanece en la región de encierro y hace $2x^2 < \varepsilon$. La prueba parte de desigualdades sobre valores y construye directamente el límite, sin presuponer un destino de f.

Ejercicio 13. Oscilar y aun así converger

Sea $b(x) = 1$ para x racional y $b(x) = -1$ para x irracional. Prueba que $h(x) = xb(x)$ tiene límite cero en cero, sin decidir si b tiene límite.

Solución. Para toda entrada, $|b(x)| = 1$ y $|h(x)| = |x|$. Dado $\varepsilon > 0$ basta $\delta = \varepsilon$. Si $0 < |x| < \delta$, el error de h es menor que ε. El control procede de la magnitud del factor, no de la existencia de su límite. La magnitud de $b(x)$ es uno en cualquiera de sus dos ramas, así que no hace falta conocer su comportamiento de límite. La identidad $|xb(x)| = |x|$ reduce el control de salida al de entrada. La elección $\delta = \varepsilon$ funciona uniformemente para entradas racionales e irracionales. Las oscilaciones del signo pueden mantenerse, mientras el tamaño de las salidas se aproxima a cero.

Ejercicio 14. El orden no conserva separación estricta

Construye $f < g$ en una ventana perforada con el mismo límite, y prueba que en general sí se conserva el orden no estricto de límites.

Solución. En $(0, \infty)$, $f(x) = 0$ y $g(x) = x$ satisfacen $f < g$ y ambas tienen límite cero: para la identidad sirve $\delta = \varepsilon$. Para la afirmación general, si $f \to L$, $g \to M$ y $L > M$, pedimos errores menores que $(L - M)/3$, reunimos radios con la ventana de orden y obtenemos una entrada por acumulación. Allí $f > L - (L - M)/3 > M + (L - M)/3 > g$, contradicción. Luego $L \leq M$.

El ejemplo demuestra que una diferencia positiva entre funciones puede desaparecer en el límite. Para el resultado general, suponemos lo contrario, $L > M$, y usamos una tolerancia menor que la separación de los destinos. Los radios y la ventana de orden deben reunirse para que las tres condiciones valgan en la misma entrada. La acumulación proporciona esa entrada. Las cotas colocarían a f por encima de g, contradiciendo su orden local.

Ejercicio 15. Dos destinos no caben en una misma ventana

Reconstruye la unicidad usando tolerancia $|L-M|/2$ en vez de un tercio. Explica por qué las desigualdades estrictas siguen bastando.

Solución. Si $L \neq M$, $d = |L - M| > 0$. Ambos contratos para $\varepsilon = d/2$ dan radios positivos. Acumulación proporciona una entrada en su mínimo. La triangular da $d \leq |L-f(x)|+|f(x)-M| < d/2+d/2 = d$, contradicción. La igualdad en la suma de tolerancias es admisible porque los errores individuales son estrictamente menores. Cada error es estrictamente menor que la mitad de la distancia entre candidatos. Al sumarlos obtenemos una cantidad estrictamente menor que la distancia completa, aunque los dos presupuestos sumen exactamente esa distancia. Por eso no se exige un margen de un tercio en esta variante. La entrada común sigue siendo indispensable y viene de la acumulación; sin ella, los controles podrían ser vacíos y la triangular no podría aplicarse a una salida real.

13.4. Negar un candidato y construir infracciones

Un candidato falla cuando alguna precisión queda fuera del alcance de todas las ventanas. Aunque reduzcamos el radio, deberá persistir una entrada cuya salida incumpla esa misma precisión. La entrada puede cambiar al reducir la ventana; la tolerancia que acredita el fracaso permanece fija. Con los datos f, D, a, L fijados y $a \in D'$, negar el contrato equivale a

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x \in D : \quad 0 < |x - a| < \delta, \qquad |f(x) - L| \geq \varepsilon_0.$$

Para cada radio propuesto se busca un infractor, que puede depender de él y del candidato fijado. La negación del error estricto incluye la frontera: si $|f(x) - L| = \varepsilon_0$, la salida ya está fuera de $B(L, \varepsilon_0)$. Por eso se exige $\geq \varepsilon_0$ y no solamente $> \varepsilon_0$. Refutar un candidato deja abierta la existencia de otros: la función constante uno incumple el candidato cero y tiene límite uno. Para demostrar que no existe ningún límite habrá que descartar cada $L \in \mathbb{R}$ o encontrar consecuencias incompatibles de cualquier supuesto límite.

Podemos registrar los fallos en escalas numeradas. Para $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, ...\}$, ponemos $\eta_n = 1/(n + 1)$, de modo que todos los términos están definidos y $\eta_n \to 0$ por C06. Un candidato falla si y sólo si existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que todos los conjuntos $E_n = \{x \in D : 0 < |x - a| < \eta_n, \ |f(x) - L| \geq \varepsilon_0\}$ son no vacíos. La negación completa lo implica al proponer el radio η_n. Para la vuelta, dado cualquier $\delta > 0$, la arquimedianidad permite tomar un índice con $\eta_n < \delta$. Un testigo del correspondiente E_n es entonces una entrada de la ventana de radio δ con error al menos ε_0, como se requería. Este argumento usa un solo conjunto de infractores después de recibir el radio.

Una sucesión de infractores exigiría algo más: una función $n \mapsto x_n$ con $x_n \in E_n$ simultáneamente para todo n. La afirmación $\forall n \, \exists x \in E_n$ no especifica esa función. Para pasar de la familia de conjuntos a una ruta utilizaremos una regla de selección dada o una hipótesis adicional, que habrá que declarar.

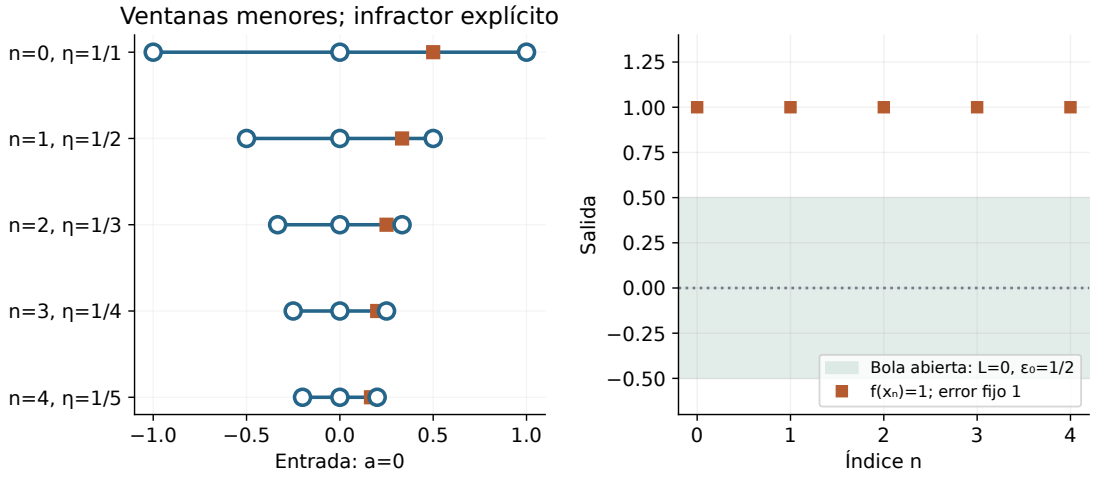


Figura 13.4. C13-F04. Para f(x)=1 y el candidato L=0, x_n=1/(n+2) infringe la tolerancia fija ε_0=1/2 dentro de cada escala η_n=1/(n+1). Esto refuta sólo el candidato 0: la función sí tiene límite 1. La fórmula proporciona aquí la ruta explícita.

Sea $s(x) = -1$ para $x < 0$ y $s(x) = 1$ para $x \geq 0$, en dominio real. Para cualquier L, al menos una de las distancias $|-1-L|$, $|1-L|$ es ≥ 1: si ambas fueran menores que 1, la triangular daría $2 < 2$. Fijado L, escogemos una de las dos ramas cuya distancia a él sea al menos uno. Para cada $\delta > 0$ tomamos $x = -\delta/2$ si la rama es negativa y $x = \delta/2$ si es positiva. En ambos casos $0 < |x| < \delta$ y $|s(x) - L| \geq 1$. La tolerancia uno sirve a cualquier escala: la rama se fija según L y sólo la entrada se adapta al radio. Esto descarta todos los candidatos reales.

También $r(x) = 1/x$ en $(0, \infty)$ carece de límite real finito en cero. Dados $L \in \mathbb{R}$ y $\delta > 0$, ponemos $x = \min(\delta/2, 1/[2(|L|+1)])$. Ambos términos son positivos, así que $0 < x \leq \delta/2 < \delta$, mientras $1/x \geq 2(|L|+1)$. Por la triangular inversa, $|1/x - L| \geq 1/x - |L| \geq |L| + 2 > 1$. La misma tolerancia uno refuta cada destino finito; esta conclusión no introduce una definición de límite infinito.

Ejercicios de la sección 13.4.

Ejercicio 16. La frontera ya es infracción

Para $f(x) = x$ en cero y candidato $L = 1$, da una tolerancia fija y un infractor explícito para cada radio.

Solución. Tomemos $\varepsilon_0 = 1$. Dado $\delta > 0$, sea $x = -\delta/2$. Entonces $0 < |x| < \delta$ y $|x - 1| = 1 + \delta/2 > 1$. El candidato se refuta aunque la función sí tiene otro límite, cero. **Retorno visual.** Véase C13-F04, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba. El candidato uno queda a distancia $1 + \delta/2$ de la salida negativa elegida. La tolerancia uno se fija antes del radio y todos los radios tienen un infractor no central. Esto refuta el candidato uno, mientras la función identidad tiene límite cero por el control $\delta = \varepsilon$. Para ilustrar específicamente la frontera también puede usarse tolerancia 1/2 y una entrada positiva suficientemente pequeña, pero el infractor negativo ya prueba la refutación pedida.

Ejercicio 17. Una escala basta para todos los radios

Sean $r_n > 0$ tales que para cada $\delta > 0$ existe n con $r_n < \delta$. Prueba que la negación del límite equivale a no vaciedad de los infractores en cada escala r_n, para una misma tolerancia.

Solución. La negación completa aplicada a $\delta = r_n$ produce un infractor para cada n con la misma ε_0. A la inversa, dados conjuntos no vacíos y un radio cualquiera δ, la propiedad de la escala da n con $r_n < \delta$. Un único punto infractor de ese conjunto también está en la ventana de radio δ y conserva el error $\geq \varepsilon_0$. No hace falta escoger todos los puntos a la vez.

No se exige que la escala sea monótona: sólo que contenga algún radio menor que cualquier radio propuesto. En la dirección inversa escogemos ese índice y usamos un testigo del conjunto correspondiente. La tolerancia debe ser la misma en todos los conjuntos, para que la infracción persista al cambiar de escala. La prueba refuta el candidato sin construir todavía una función que elija testigos para todos los índices simultáneamente.

Ejercicio 18. Todos los reales quedan descartados

Prueba directamente, sin sucesiones, que $f(x) = 1/|x|$ en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ no tiene límite real finito en cero.

Solución. Fijemos cualquier L. Para tolerancia 1 y cualquier $\delta > 0$, elegimos $x = \min(\delta/2, 1/[2(|L| + 1)]) > 0$. Está en el dominio y en la ventana perforada; $1/|x| \geq 2(|L| + 1)$ implica $|f(x) - L| \geq f(x) - |L| > 1$. Cada candidato tiene infractores arbitrariamente próximos, por lo que no existe límite real finito. El candidato real L es arbitrario, y la tolerancia uno sirve para todos. El segundo término del mínimo hace que la salida sea mayor que la magnitud de L con un margen superior a uno; el primero sitúa la entrada dentro de cualquier ventana propuesta. Se verifican dominio, perforación y error grande. La conclusión descarta todos los límites reales finitos, sin introducir aquí una definición de límite infinito.

Ejercicio 19. Cada entrada favorable no es un límite

Prueba que la condición «para todo $\varepsilon, \delta > 0$ existe x con $0 < |x| < \delta$ y $|f(x)| < \varepsilon$» no garantiza $f \to 0$.

Solución. Sea $f(x) = 0$ para $x > 0$, $f(x) = 1$ para $x \leq 0$. Dadas $\varepsilon, \delta > 0$, el punto $\delta/2$ cumple la condición favorable. Pero el punto $-\delta/2$ tiene error 1 para cada radio, por lo que la tolerancia $\varepsilon_0 = 1/2$ refuta $L = 0$. La condición débil elige una entrada; el límite debe controlar todas. En cada ventana hay una entrada positiva que entrega salida cero, por lo que el enunciado débil encuentra un testigo favorable para cualquier precisión. En la misma ventana hay también una entrada negativa con salida uno. El límite exige controlar ambas, no sólo seleccionar la que conviene. La tolerancia fija $1/2$ y los infractores negativos muestran la diferencia entre existencia de un punto bueno y control universal de la ventana.

Ejercicio 20. Fallo sin magnitud infinita

Construye una función globalmente acotada sin límite en cero y refútala para todo candidato mediante una tolerancia fija.

Solución. El salto con salidas -1 y 1 está acotado por 1. Para cada candidato L una de las distancias a esas dos salidas es ≥ 1, por triangular. Fijado ese signo, el punto con ese signo y magnitud $\delta/2$ infringe el error para cualquier radio, con tolerancia 1. La falta de límite puede deberse a incompatibilidad de destinos sin que los valores sean grandes. Para cada candidato, la distancia entre las dos salidas obliga a que una de ellas quede separada de él al menos por uno. Elegimos esa rama una vez fijado el candidato. Después cada radio proporciona una entrada de la rama con magnitud $\delta/2$. Así se verifican todos los cuantificadores de la refutación. La función mantiene magnitudes iguales a uno, de modo que la inexistencia del límite no puede atribuirse a falta de acotación.

13.5. Lo que detectan las sucesiones

Una ruta numerada sólo visita algunas entradas del dominio. Si existe límite funcional, las estimaciones de una ventana se aplicarán a todos los términos suficientemente tardíos de cualquier ruta que se acerque al centro sin alcanzarlo. Esta consecuencia permite detectar fallos mediante sucesiones explícitas. Llamamos admisible a una sucesión (x_n) con $x_n \in$

$D \setminus \{a\}$ para todo índice y $x_n \to a$. La pertenencia al dominio hace que $f(x_n)$ esté definido; la evitación del centro permite usar el límite perforado. La convergencia de las entradas será la que sitúe cada cola suficientemente tardía dentro del radio requerido.

Proposición. Si $f \to L$ en a, entonces $f(x_n) \to L$ para toda sucesión admisible.

Fijemos una sucesión admisible y $\varepsilon > 0$. El límite funcional proporciona $\delta > 0$ y la convergencia $x_n \to a$ proporciona después N con $|x_n - a| < \delta$ para $n \geq N$. Como todos esos términos están en D y son distintos de a, cumplen el antecedente completo del control funcional. Se sigue $|f(x_n) - L| < \varepsilon$ en toda la cola, que es precisamente la convergencia de las imágenes. El argumento trabaja sobre la sucesión dada y no selecciona otra.

La sucesión constante $x_n = a$ mostraría por qué hay que excluir el centro: si $f(a)$ existe, sus imágenes son constantemente $f(a)$, que puede diferir de L; si no existe, ni siquiera forman una sucesión evaluable. Puede permitirse un prefijo finito de términos centrales cuando todas las evaluaciones estén definidas y la cola los evite. Basta entonces tomar el máximo entre el corte que elimina esos términos y el corte que entra en el radio δ.

Para obtener la recíproca partimos de un fallo y de los conjuntos no vacíos E_n de §13.4. Una ruta con $x_n \in E_n$ se acercaría a a manteniendo sus imágenes a distancia al menos ε_0 de L. La cuestión pendiente es definir todos sus términos. Una enumeración del dominio ofrece una regla mediante el buen orden de los naturales. **Teorema para un dominio enumerado.** Si está dada una sobreyección $e : \mathbb{N} \to D$, entonces $f \to L$ si y sólo si todas las sucesiones admisibles tienen imágenes que convergen a L.

La dirección directa está probada. Para la inversa, supongamos que falla el límite y fijemos la tolerancia ε_0 y los E_n. La sobreyectividad asegura que $I_n = \{k \in \mathbb{N} : e(k) \in E_n\}$ es no vacío. Tiene por tanto un mínimo natural único, y las fórmulas $k_n = \min I_n$, $x_n = e(k_n)$ definen la ruta. Como $0 < |x_n - a| < 1/(n+1)$, tenemos $x_n \to a$; como $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon_0$ para todo índice, sus imágenes no convergen a L. Esto contradice la hipótesis sobre todas las rutas admisibles.

El mínimo se toma entre índices naturales. Un conjunto real no vacío como $(0, 1)$ puede carecer de mínimo, por lo que no podríamos sustituir la regla por $x_n = \min E_n$. Tampoco se exige que los k_n crezcan estrictamente: la ruta no tiene por qué ser una subsucesión de la enumeración. La cota de distancias basta para la convergencia. Aunque haya repeticiones, un punto fijo $t \neq a$ queda excluido desde que $1/(n+1) < |t - a|$, y no puede reaparecer arbitrariamente tarde.

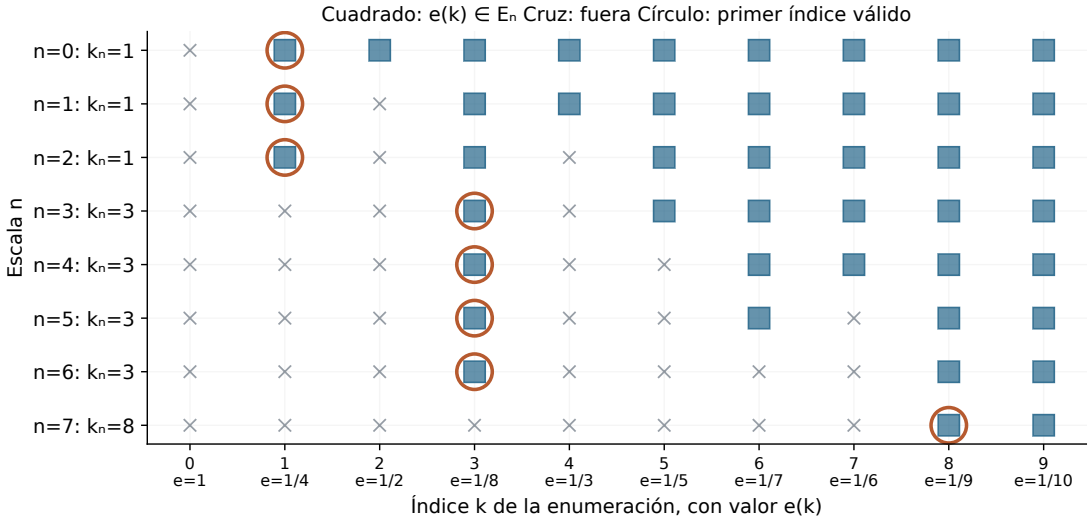


Figura 13.5. C13-F05. En el dominio de recíprocos enteros, con f=1, a=L=0 y ε_0=1/2, la enumeración empieza con los denominadores 1,4,2,8,3,5,7,6 y continúa 9,10,… . Se marca e(k)<1/(n+1) y se rodea el menor índice válido. Los índices seleccionados pueden repetirse; el mínimo es de índices, no de valores reales.

Teorema condicional para dominios arbitrarios. Bajo el principio de elección numerable para subconjuntos de reales, CC($\mathbb{R}$), vale la misma equivalencia para todo $D \subseteq \mathbb{R}$. Este principio dice que cada familia numerable de subconjuntos reales no vacíos admite un selector. Aplicarlo a los E_n produce $x_n \in E_n$; las dos desigualdades anteriores completan la contradicción. Es exactamente el paso adicional. No lo necesitamos para la dirección directa ni para el caso enumerado, y no lo incorporamos silenciosamente como axioma.

En el salto de §13.4 ya disponemos de las fórmulas $u_n = -1/(n+1)$ y $v_n = 1/(n+1)$. Ambas rutas son admisibles en cero y sus imágenes son constantemente -1 y 1. Si hubiera un límite funcional L, la dirección directa y la unicidad del límite de sucesiones de C06 obligarían a $L = -1$ y $L = 1$. Las rutas están definidas antes de invocar el argumento, por lo que esta refutación no usa elección numerable ni la recíproca condicional.

Una ruta que incumpla la convergencia hacia L refuta ese candidato; dos rutas con destinos distintos descartan cualquier límite funcional. Para probar existencia con información secuencial se necesita, en cambio, controlar todas las rutas admisibles y justificar la recíproca bajo las hipótesis que acabamos de distinguir.

Ejercicios de la sección 13.5.

Ejercicio 21. Una ruta favorable engaña

Sea $f(x) = 0$ si $x = 1/(n+1)$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y $f(x) = 1$ en las demás entradas reales. Encuentra dos rutas admisibles en cero que descarten un límite.

Solución. La ruta $u_n = 1/(n+1)$ tiene imágenes cero. La ruta $v_n = -1/(n+1)$ tiene imágenes uno, pues nunca coincide con una entrada positiva de la primera ruta. Ambas evitan cero y convergen a él por C06. Si hubiese límite L, la dirección directa y la unicidad secuencial darían a la vez $L = 0$ y $L = 1$, contradicción. Las dos rutas pertenecen al dominio real, nunca alcanzan cero y sus magnitudes $1/(n+1)$ tienden a cero. La primera coincide por construcción con las entradas de valor cero; la segunda es negativa y por eso siempre produce uno. La dirección directa del criterio secuencial obligaría a ambas imágenes a tener el mismo destino si existiera un límite funcional. Basta esta contradicción y no se utiliza elección numerable, porque las rutas están dadas por fórmulas.

Ejercicio 22. Un prefijo puede tocar el centro

Supón $f \to L$ en a, $x_n \in D$ y $x_n \to a$, con $x_n \neq a$ para todos los índices a partir de cierto N_0. Prueba $f(x_n) \to L$ si f está definida en todos los términos.

Solución. Dado $\varepsilon > 0$, el límite funcional ofrece δ. La convergencia de x_n da N_1 que asegura $|x_n - a| < \delta$. Para $n \geq \max(N_0, N_1)$ también hay distancia positiva, y la implicación funcional produce error menor que ε. Los términos anteriores no afectan la convergencia. El corte máximo reúne aproximación al centro y evitación eventual del centro. A partir de él, cada término satisface todas las condiciones del límite perforado. Los términos iniciales pueden evaluar $f(a)$, pero sólo forman un prefijo finito y no alteran la convergencia de las imágenes. La hipótesis de que todas las evaluaciones estén definidas asegura que la sucesión de imágenes sea un objeto completo, no una lista con términos ausentes.

Ejercicio 23. El mínimo vive en los índices

En un dominio enumerado, justifica la existencia del selector $x_n = e(\min I_n)$ y explica por qué no se toma el mínimo de $E_n \subseteq \mathbb{R}$.

Solución. Por sobreyectividad y no vaciedad de E_n, el conjunto $I_n = \{k : e(k) \in E_n\}$ contiene algún natural. El buen orden da un mínimo único. La regla $n \mapsto \min I_n$ es funcional y su composición con e produce el selector real. Un conjunto real no vacío puede no tener mínimo, por ejemplo $(0, 1)$; no se puede reemplazar el mínimo de índices por uno de valores.

Retorno visual. Véase C13-F05, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba. La enumeración permite convertir una búsqueda entre reales en una búsqueda entre naturales. Por sobreyectividad, algún índice representa un infractor; el conjunto de índices es no vacío y su menor elemento es único. Esa

unicidad define una regla para cada escala. Un conjunto de reales puede no tener un menor valor y, aunque lo tuviera en algunos casos, no se ha supuesto tal propiedad para todos los E_n. El buen orden utilizado pertenece a los índices naturales.

Ejercicio 24. La ruta de infracciones prueba la recíproca

Bajo CC($\mathbb{R}$), prueba la recíproca secuencial y localiza exactamente el uso de la hipótesis.
Solución. Supongamos que todas las rutas admisibles tienen imágenes tendiendo a L y que falla el contrato funcional. Hay $\varepsilon_0 > 0$ y conjuntos reales E_n no vacíos de infractores con $0 < |x - a| < 1/(n + 1)$. Aplicamos aquí, y sólo aquí, CC($\mathbb{R}$) para obtener una función $n \mapsto x_n \in E_n$. Las cotas implican $x_n \to a$, pero $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon_0$ para todos los índices impide convergencia de imágenes a L. La contradicción prueba el límite. No se presenta como prueba incondicional.

La hipótesis adicional sólo aparece al convertir los conjuntos de infractores en una sucesión simultáneamente seleccionada. Una vez dada esa sucesión, las distancias al centro tienden a cero por su cota $1/(n + 1)$, y los errores de salida permanecen por encima de la misma tolerancia positiva. La ruta contradice el supuesto de convergencia de todas las imágenes admisibles. Las demás estimaciones no necesitan una nueva elección, y la conclusión mantiene explícita la condición fundacional.

Ejercicio 25. No hace falta una ruta distinta en cada paso

Para el selector de infractores, demuestra que los términos no necesitan ser distintos entre sí, pero ningún punto fijo distinto de a puede aparecer en índices arbitrariamente grandes.
Solución. La prueba de convergencia sólo necesita $|x_n - a| < 1/(n+1)$; no usa inyectividad. Si un punto fijo $t \neq a$ apareciera en índices arbitrariamente grandes, su distancia $d = |t-a| > 0$ tendría que ser menor que $1/(n + 1)$ para índices con esa escala menor que d, imposible. Puede haber repeticiones finitas de valores, aunque no se hayan exigido términos diferentes. Si $t \neq a$ tiene distancia fija $d > 0$, existe un corte desde el cual $1/(n+1) < d$. La cota de los infractores excluye entonces que $x_n = t$ en cualquier índice posterior. Cada valor no central puede repetirse al principio, pero sólo finitas veces. No se deduce que todos los términos sean distintos ni se necesita imponerlo: la convergencia sigue únicamente de que sus distancias al centro se reduzcan con la escala.

13.6. Combinar límites con presupuestos de error

Las operaciones se pueden tratar directamente mediante las estimaciones de ventanas. Así sus reglas conservarán el alcance de las pruebas por radios, sin recurrir a la recíproca secuencial condicional ni seleccionar entradas de una familia de conjuntos. Sean $f, g : D \to \mathbb{R}$, $a \in D'$, $f \to L$ y $g \to M$. Todas las restricciones siguientes se cumplen en ventanas perforadas de ese mismo dominio.

Para una suma, la triangular descompone el error: $|(f+g)-(L+M)| \leq |f-L|+|g-M|$. Dado $\varepsilon > 0$, pedimos a cada límite un error menor que $\varepsilon/2$ y tomamos el mínimo de los dos radios. En esa ventana ambos controles están disponibles y su suma es menor que ε. Queda probado $f + g \to L + M$. Si $\lambda \neq 0$, la identidad $|\lambda f - \lambda L| = |\lambda||f - L|$ pide una precisión $\varepsilon/|\lambda|$ al límite de f. Si $\lambda = 0$, el error es cero y cualquier radio positivo sirve. Se obtiene $\lambda f \to \lambda L$ en ambos casos, y la elección $\lambda = -1$ junto con la suma prueba la regla de restas. Para las magnitudes, la triangular inversa da $||f| - |L|| \leq |f - L|$, de modo que el mismo radio prueba $|f| \to |L|$.

En el producto, añadir y restar fM da $fg - LM = f(g - M) + M(f - L)$. El primer error está multiplicado por un valor variable de f, que §13.3 permite acotar por $A := |L| + 1$ en una ventana de radio $r > 0$. Ponemos además $B = |M| + 1 > 0$. Dado $\varepsilon > 0$, pedimos $|g - M| < \varepsilon/(2A)$ y $|f - L| < \varepsilon/(2B)$, y tomamos el mínimo de esos radios con r. En la ventana común,

$$|fg - LM| \leq |f||g - M| + |M||f - L| < A\frac{\varepsilon}{2A} + B\frac{\varepsilon}{2B} = \varepsilon.$$

Ambos denominadores son positivos incluso si alguno de los límites es cero. Cada término de la estimación queda por debajo de su presupuesto $\varepsilon/2$: si un multiplicador se anula, el término es cero; en otro caso se utilizan las cotas estrictas. La barrera local es lo que permite tratar el factor variable con un presupuesto fijo. Para invertir g necesitamos primero proteger el denominador. Si $M \neq 0$, la tolerancia $|M|/2$ entrega un radio donde $|g(x)| \geq |M| - |g(x) - M| > |M|/2 > 0$. Allí el recíproco está definido y su error satisface $\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| = \frac{|g(x)-M|}{|g(x)||M|} \leq \frac{2|g(x)-M|}{|M|^2}$.

Se admite igualdad cuando $g(x) = M$, pues ambos errores son cero.[1] Pedimos además $|g(x) - M| < \varepsilon|M|^2/2$ y reunimos los dos radios. La última cota del error es entonces estrictamente menor que ε, también en ese caso nulo. Así $1/g \to 1/M$ en $D_0 = \{x \in D : g(x) \neq 0\}$.

Para formular ese límite debemos comprobar $a \in D_0'$. Dado cualquier radio positivo, la acumulación de D proporciona una entrada dentro del mínimo de ese radio y del radio de no anulación. La entrada pertenece a D_0, es distinta de a y está dentro del radio propuesto. Por tanto el dominio del recíproco también acumula en a. El control de f en D sigue siendo válido al restringir las entradas a D_0. Como acabamos de comprobar su acumulación, podemos aplicar allí la regla del producto a $f|_{D_0}$ y $1/g$, obteniendo $f/g \to L/M$. Los ceros lejanos de g siguen excluidos del dominio del cociente; la barrera sólo garantiza una ventana perforada local sin ceros.

Las constantes tienen error cero y la identidad satisface el límite en a con $\delta = \varepsilon$. Una inducción finita que multiplica potencias y suma términos prueba por estas reglas que todo polinomio P tiene límite $P(a)$. Si $Q(a) \neq 0$, el cociente P/Q tiene límite $P(a)/Q(a)$ en su dominio natural $\{x : Q(x) \neq 0\}$; la barrera anterior acredita que ese dominio acumula en a. La prueba sólo ha usado álgebra y ventanas.

Si $Q(a) = 0$, falta la barrera que utiliza la regla y debemos estudiar el cociente por otro argumento. En $x \neq 1$, la factorización permite cancelar $(x^2 - 1)/(x - 1) = x + 1$, cuyo límite en 1 es 2. En cambio, para $1/(x - 1)$ la refutación de §13.4 se traslada poniendo $t = x - 1 > 0$ y descarta todo límite finito. Tener denominador límite cero es compatible con ambos comportamientos.

Ejercicios de la sección 13.6.

Ejercicio 26. Cancelar antes de usar un cociente

Calcula y prueba el límite en 2 de $(x^2 - 4)/(x - 2)$ en su dominio natural. ¿Por qué no se usa directamente la regla de cociente?

Solución. El dominio es $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Allí la factorización da $(x^2 - 4)/(x - 2) = x + 2$, que tiene límite 4: con $\delta = \varepsilon$ el error es $|x - 2| < \varepsilon$. El límite del denominador es cero, por lo que el criterio de cocientes no se aplica. La cancelación es válida sólo fuera del punto excluido, exactamente el dominio pertinente. Factorizamos el numerador como $(x - 2)(x + 2)$. En el dominio permitido el factor $x - 2$ es no nulo y puede cancelarse, obteniendo igualdad exacta con la afín $x + 2$. No se extiende esa igualdad como evaluación del cociente en dos, donde el cociente no está definido. Para el límite sólo hacen falta las entradas perforadas; allí el error respecto de cuatro es $|x - 2|$. La regla de cocientes no permite dividir por el límite cero del denominador.

Ejercicio 27. Un denominador con ceros lejanos

Sean $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2 - 4$. Prueba el límite de f/g en cero y declara el dominio.

Solución. El dominio es $D_0 = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$. Polinomios dan límites 1 y -4 en cero; el segundo es no nulo. La regla de cocientes prueba límite $-1/4$. Los ceros lejanos no impiden una ventana local: para $|x| < 1$, $|g(x)| = 4 - x^2 > 3$. No se afirma que el cociente esté definido en los puntos excluidos. Los puntos excluidos menos dos y dos no impiden que cero sea punto

[1] Se corrige aquí el signo estricto de la estimación original por una desigualdad no estricta. El caso $g \equiv M \neq 0$ daría $0 < 0$ con aquel signo. La cota final estricta y la conclusión del argumento se conservan.

de acumulación del dominio. En una ventana de radio uno no aparecen esos ceros, y la cota $4 - x^2 > 3$ protege el denominador. Los límites del numerador y denominador son uno y menos cuatro, así que la regla se aplica con destino $-1/4$. Declarar el dominio conserva la diferencia entre una estimación local válida y una fórmula evaluable en todos los reales.

Ejercicio 28. Producto desde una identidad diferente

Prueba la regla de producto utilizando $fg - LM = (f - L)(g - M) + L(g - M) + M(f - L)$ y un solo presupuesto para ambos errores.

Solución. Sea $A = 1 + |L| + |M| > 0$. Dado $\varepsilon > 0$, exigimos ambos errores menores que $t = \min(1, \varepsilon/A)$. En el mínimo de radios, $|(f - L)(g - M)| < t^2 \leq t$, y los otros términos están acotados por $|L|t$ y $|M|t$. Sumando con la estricta cota del primer término obtenemos error $< At \leq \varepsilon$. Esta variante usa el pequeño tamaño del producto de errores en vez de una cota separada de f.

La nueva identidad separa un producto de errores y dos errores multiplicados por destinos fijos. Pedir ambos errores menores que $t \leq 1$ controla su producto por $t^2 \leq t$. Los otros dos términos añaden presupuestos $|L|t$ y $|M|t$, y la constante A reúne los tres. El mínimo de los radios hace disponibles los dos errores a la vez. Incluso si alguno de los destinos es cero, A sigue siendo positivo y la elección está definida.

Ejercicio 29. Norma y diferencia de normas

Si $f \to L$ y $g \to M$, prueba $\big||f| - |g|\big| \to \big||L| - |M|\big|$ y da un control directo del error con los dos errores originales.

Solución. La triangular inversa aplicada primero a los dos reales $|f| - |g|$ y $|L| - |M|$ da error final $\leq \big|(|f| - |g|) - (|L| - |M|)\big|$. La triangular y la inversa de nuevo lo acotan por $||f|-|L||+||g|-|M|| \leq |f-L|+|g-M|$. Pedimos cada error menor que $\varepsilon/2$ y reunimos radios. La cota prueba la conclusión directamente. El error final se estima aplicando la triangular inversa al valor absoluto exterior y luego a los dos valores absolutos interiores. Cada paso reduce el problema a las diferencias originales $f - L$ y $g - M$. La suma de esos dos errores se hace menor que ε usando mitades y el mínimo de radios. Este control directo no exige separar casos según los signos de los valores ni conocer previamente límites de todas las expresiones intermedias.

Ejercicio 30. Un producto converge sin límites de los factores

Construye funciones f, g sin límite en cero cuyo producto sí tenga límite. Prueba todas las afirmaciones.

Solución. Sea $f(x) = g(x) = s(x)$, el salto con valores ± 1. Las rutas positivas y negativas dan destinos distintos y refutan el límite de cada factor. Pero $f(x)g(x) = s(x)^2 = 1$ para toda entrada, así que el producto tiene límite 1 con cualquier radio y error cero. La regla del producto es suficiente, no una condición necesaria para que el producto converja.

Para cada factor, las entradas a ambos lados de cero producen valores constantes diferentes, y las rutas explícitas de cada signo refutan cualquier destino común. Al multiplicar los factores iguales, los signos se cancelan y queda siempre uno. El producto tiene error cero respecto de uno en toda entrada. Por tanto la convergencia de ambos factores es una hipótesis suficiente de la regla del producto, pero no una condición necesaria para que el producto concreto converja.

13.7. Cambiar las rutas disponibles

Al restringir un dominio se retiran entradas que podrían incumplir una precisión. Un control universal en el dominio original seguirá siendo válido en el subconjunto, siempre que allí continúe teniendo sentido la pregunta de límite. La vuelta exigirá asegurarse de que ninguna de las entradas recuperadas quede sin controlar. Si $A \subseteq D$, $a \in A'$ y $f \to L$ a través de D, el mismo radio controla $f|_A$, porque cada entrada de $U_A(a, \delta)$ pertenece a $U_D(a, \delta)$.

La acumulación se exige de nuevo en A: reducir el dominio podría haber dejado al centro aislado o haber eliminado todas las entradas próximas.

Sean más generalmente $D_1, \dots, D_k \subseteq D$, con $k \geq 1$ y $a \in D_i'$ para todos, y supongamos que existe $r > 0$ con $U_D(a, r) \subseteq D_1 \cup \cdots \cup D_k$. Si todas las restricciones tienen límite L, para cada $\varepsilon > 0$ tomamos sus radios y el mínimo de ellos con r. Es positivo porque sólo hay finitos radios. Cualquier entrada de esa ventana pertenece al menos a una pieza, cuyo control basta para asegurar $|f(x) - L| < \varepsilon$, aunque pertenezca también a otras. Esto prueba el límite en D.

Una familia infinita de radios positivos puede no tener ningún margen positivo común: los radios $1/(n+1)$ tienen ínfimo cero y ni siquiera tienen mínimo. Por ello la reunión infinita requiere otro argumento; el ejercicio 13.33 muestra cómo cada pieza puede excluir su propia infracción mientras la unión las recupera arbitrariamente cerca del centro. Los dominios laterales son $D_- = D \cap (-\infty, a)$ y $D_+ = D \cap (a, \infty)$. El límite izquierdo es el de $f|_{D_-}$ en a, cuando $a \in D_-'$; el derecho se define análogamente con D_+. Cada uno exige entradas de su propio lado arbitrariamente próximas. Así, en $D = [a, \infty)$ el lado izquierdo está vacío y no recibe límite bajo nuestra convención.

Si ambos lados acumulan, un límite L en D se restringe a cada uno. Recíprocamente, si ambos límites laterales existen y son L, el mínimo de sus radios controla todas las entradas perforadas, pues cada una pertenece a uno de los dos lados. Queda probada la equivalencia entre el límite completo y la coincidencia de los dos límites laterales, bajo la hipótesis de acumulación en ambos.

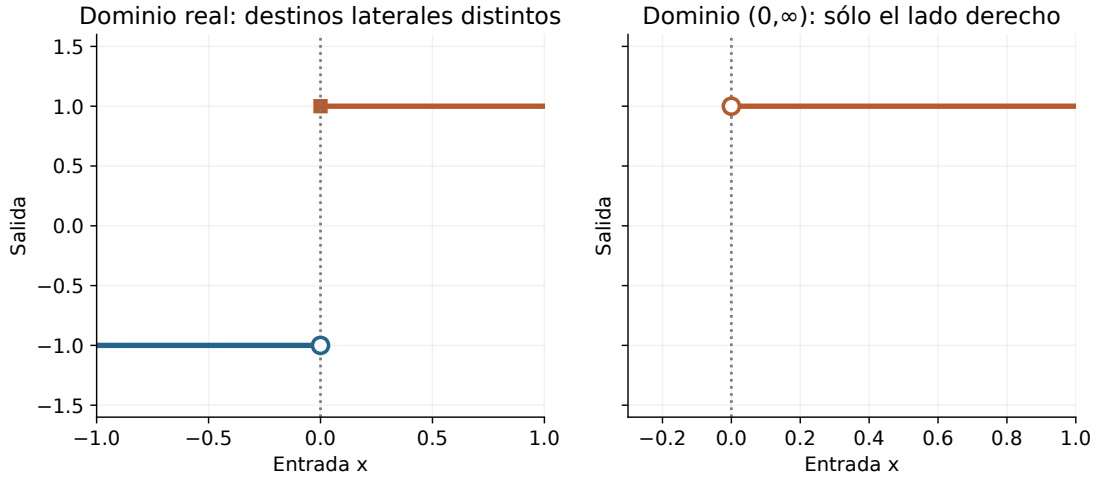


Figura 13.6. C13-F06. El salto tiene destinos laterales -1 y 1 en el dominio real, por lo que no admite un destino común. Restringido a entradas positivas, tiene límite 1 en cero. El lado izquierdo ausente no recibe un límite por vacuidad.

Si sólo D_+ acumula en a, la negación de acumulación en D_- proporciona un radio sin entradas de ese lado. Al reunirlo con un radio del límite derecho, toda entrada pertinente queda a la derecha y recibe su control. Por restricción se obtiene la implicación inversa, así que el límite en D equivale al derecho. El caso izquierdo es simétrico. Además, cuando $a \in D'$ al menos uno de los lados acumula: si ninguno lo hiciera, el mínimo de sus radios sin entradas dejaría vacía una ventana perforada de D, contradicción.

En el salto s, las salidas de la izquierda son siempre -1 y las de la derecha siempre 1, de modo que los límites laterales son esos dos números distintos. Al restringir a $(0, \infty)$ sólo queda el límite 1 en cero. Cero puede ser el centro de este límite aunque no pertenezca al dominio restringido, y no necesitamos atribuir ningún límite al lado eliminado.

Una restricción puede ser densa y aun así omitir todas las entradas problemáticas. Sea $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $d(x) = 0$ si $x \in \mathbb{Q}$ y $d(x) = 1$ en caso contrario, donde $\mathbb{Q}$ designa su copia

canónica real. La restricción racional es constante cero, por lo que tiene límite cero en cada punto de acumulación de ese dominio. La función completa carece de límite en cero. Las rutas explícitas $u_n = 1/(n+1)$ y $v_n = \sqrt{2}/(n+1)$ son no nulas y convergen a cero, pero sus imágenes son constantemente 0 y 1, respectivamente. Para verificar la segunda afirmación, si algún v_n fuese racional, multiplicarlo por el entero positivo $n+1$ haría racional a $\sqrt{2}$, contradiciendo C10. La dirección secuencial directa obliga a que las imágenes de ambas rutas compartan cualquier supuesto límite funcional, lo cual es imposible.

La densidad asegura entradas próximas del subconjunto y no impone relación alguna entre sus valores y los de las entradas omitidas. En este ejemplo las rutas racionales pueden ser favorables en todas las escalas mientras las irracionales conservan un error fijo. La información de la restricción no alcanza para controlar la función arbitraria en el dominio completo.

Ejercicios de la sección 13.7.

Ejercicio 31. El único lado disponible

Sea $D = \{0\} \cup (0, 2)$ y $f(x) = x^2$ para $x > 0$, $f(0) = 9$. Prueba el límite en cero a través de D y analiza los límites laterales.

Solución. El lado derecho acumula y el izquierdo está vacío, por lo que no le asignamos límite. Para $\varepsilon > 0$, $\delta = \min(1, \sqrt{\varepsilon})$ hace que toda entrada perforada sea positiva y tenga $|f(x)| = x^2 < \varepsilon$. El límite en D es cero y coincide con el límite derecho; el valor central 9 se excluye. **Retorno visual.** Véase C13-F06, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Toda entrada perforada del dominio es positiva. La ventana propuesta la mantiene además dentro de la región donde vale la regla x^2 y hace su cuadrado menor que la tolerancia. La acumulación derecha puede verificarse escogiendo un positivo menor que el radio y menor que dos. El lado izquierdo no ofrece ninguna entrada, por lo que no se formula un límite allí. La evaluación nueve en el centro no interviene en el control perforado.

Ejercicio 32. Reunir piezas finitas

Sea $D = D_1 \cup D_2$, $a \in D_1' \cap D_2'$, y supón que las dos restricciones de f tienen el mismo límite L. Prueba el límite en D y la recíproca.

Solución. Para $\varepsilon > 0$, tomamos radios δ_1, δ_2 válidos. Su mínimo es positivo. Toda entrada perforada de D pertenece a una pieza y recibe el error menor que ε de esa pieza, aunque pueda pertenecer a ambas. Luego hay límite en D. Si el límite vale en D, el mismo radio funciona en cada subconjunto; la acumulación supuesta permite formular ambos límites restringidos. El mínimo de dos radios positivos vuelve a ser positivo, y cualquier entrada del dominio unión pertenece al menos a una pieza. El control de esa pieza basta para asegurar la precisión, incluso si la entrada también pertenece a la otra. En la vuelta, restringir sólo elimina entradas y conserva la estimación. La hipótesis de acumulación en cada pieza permite que ambos límites restringidos tengan sentido y no sean fórmulas vacías.

Ejercicio 33. Infinitas piezas no garantizan reunión

Sea $D = (0, \infty)$ y $D_k = \{1/k\} \cup ((0, \infty) \setminus \{1/j : j \in \mathbb{N},\ j \geq 1\})$ para $k \geq 1$. Para $f(x) = 1$ en los puntos $1/j$ y $f(x) = 0$ en las demás entradas, prueba que cada restricción tiene límite cero y su unión no.

Solución. Cada D_k acumula cero: para un radio $r > 0$ existe un real positivo irracional menor que r, que no es un recíproco entero. Tal entrada puede obtenerse explícitamente como $\sqrt{2}/m$ con entero $m > \sqrt{2}/r$. Si $\delta = 1/(2k)$, la ventana de D_k excluye su único punto con valor uno, $1/k$, y el error es cero para toda tolerancia. La unión de las piezas es todo D: los no recíprocos están en todas y cada recíproco en su pieza. La ruta $x_n = 1/(n+1)$ tiene imágenes uno; para cada radio hay tal entrada con error uno, así que el candidato cero falla en la unión. Además, la ruta $\sqrt{2}/(n+1)$ tiene imágenes cero y descarta cualquier límite junto a la primera.

En cada pieza sólo hay un punto con salida uno, y puede excluirse con un radio menor que su distancia a cero. Pero las distancias de esos puntos se reducen al variar la pieza, de modo que no hay una ventana común que los elimine todos. La unión vuelve a incorporar infinitas entradas de valor uno próximas a cero. Las dos rutas finales acreditan destinos incompatibles. Tener un radio adecuado para cada pieza no produce automáticamente un radio positivo para toda su unión.

Ejercicio 34. Una prueba densa puede omitir todo el problema

Para el indicador de irracionales, prueba el límite restringido a los racionales en cero y refuta cualquier límite en el dominio real usando rutas explícitas.

Solución. La restricción racional es constante cero y $\delta = 1$ sirve para cualquier tolerancia; cero acumula racionales por los puntos $1/m$. En el dominio completo, $1/(n+1)$ y $\sqrt{2}/(n+1)$ son rutas no nulas tendiendo a cero. La segunda es irracional en cada índice, pues de lo contrario $\sqrt{2}$ sería racional. Las imágenes son constantes cero y uno. Un límite funcional daría el mismo límite a ambas rutas por la dirección directa, contradicción.

El indicador de irracionales vale cero en cada racional, así que el límite restringido es cero con error nulo. En el dominio completo la ruta racional conserva esa salida, mientras la ruta irracional conserva la salida uno. Ambas están dadas por fórmulas y convergen a cero; el cociente de $\sqrt{2}$ por un entero positivo sigue siendo irracional. La densidad del conjunto favorable no impone ningún control sobre los valores del conjunto omitido.

Ejercicio 35. Al menos un lado acumula

Si $a \in D'$, demuestra que acumula al menos uno de $D \cap (-\infty, a)$ y $D \cap (a, \infty)$. Si exactamente uno acumula, prueba que ese lado decide el límite completo.

Solución. Si ninguno acumulara, habría radios positivos r_-, r_+ sin entradas de cada lado en sus ventanas. En el mínimo no habría ninguna entrada distinta de a del dominio, contradicción. Si sólo el derecho acumula, el izquierdo tiene un radio sin entradas. Todo control del límite derecho se reúne con ese radio y controla el dominio completo; la implicación inversa es restricción. El caso izquierdo es simétrico.

Si ninguno de los lados acumulara, existirían dos radios que eliminan sus respectivas entradas. Su mínimo eliminaría todas las entradas distintas del centro, contradiciendo la acumulación del dominio. Si sólo un lado acumula, el otro está ausente en alguna ventana y puede descartarse al reducir el radio. El límite completo se vuelve exactamente el límite del lado disponible. No se asigna un destino por vacuidad al lado que falta.

13.8. Componer controles sin perder la perforación

En una composición, las salidas de f serán entradas de g. El límite $f \to b$ permite situarlas tan cerca de b como se requiera, pero también permite que coincidan exactamente con b. El límite perforado de g sólo estima las otras entradas, de modo que hay que resolver ese posible contacto antes de aplicarlo. **Teorema.** Sean $f : D \to E$, con $D, E \subseteq \mathbb{R}$, $a \in D'$, $b \in E'$ y $g : E \to \mathbb{R}$. Supongamos $f \to b$ en a, $g \to L$ en b, y que existe $r > 0$ con $f(x) \neq b$ para todo $x \in U_D(a, r)$. Entonces $g \circ f \to L$ en a.

La tolerancia final se presenta primero a g. Su respuesta será una escala intermedia alrededor de b, y ésa será la precisión que pediremos a f. La hipótesis de evitación completará la desigualdad positiva que exige la ventana perforada de la segunda función. Fijemos $\varepsilon > 0$. El límite de g proporciona $\eta > 0$ tal que, si $y \in E$ y $0 < |y - b| < \eta$, entonces $|g(y) - L| < \varepsilon$. El límite de f proporciona después $\delta_f > 0$ con $|f(x) - b| < \eta$ en $U_D(a, \delta_f)$. Tomamos $\delta = \min(r, \delta_f) > 0$. Para cualquier $x \in U_D(a, \delta)$, el tipo $f : D \to E$ autoriza evaluar $g(f(x))$, la estimación de f da la cota superior y la evitación da $f(x) \neq b$. Se cumple por tanto $0 < |f(x) - b| < \eta$, y el control de g concluye $|g(f(x)) - L| < \varepsilon$.

Bajo los mismos supuestos sobre los dos límites, la condición $b \in E$ y $g(b) = L$ permite prescindir de la evitación. Usamos el radio δ_f que responde a la escala η y distinguimos los valores intermedios: si $f(x) \neq b$, se aplica la estimación perforada de g; si $f(x) = b$, el error

final es $|g(b) - L| = 0$. Ambas posibilidades quedan controladas en toda la ventana. Esta condición central permite demostrar la composición antes de introducir el vocabulario de continuidad.

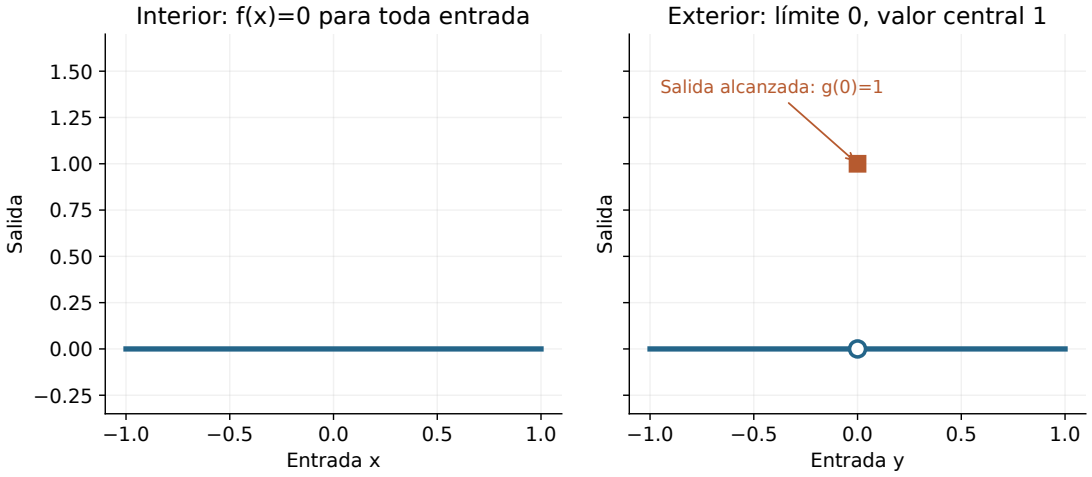


Figura 13.7. C13-F07. La interior envía toda entrada a 0. La exterior tiene límite 0 en 0, pero g(0)=1; su contrato perforado no controla ese valor. La composición es constante 1. La cercanía intermedia necesita además evitación del centro o un valor central compatible.

Sin resolver el caso central, los dos límites pueden ser insuficientes. Sea $f(x) = 0$ en $\mathbb{R}$ y $g(y) = 0$ para $y \neq 0$, con $g(0) = 1$. Tanto $f \to 0$ en cero como $g \to 0$ en cero tienen error nulo en sus ventanas pertinentes. Sin embargo, la composición evalúa siempre el valor excepcional $g(0)$, por lo que es constantemente uno y tiene límite 1. El control exterior nunca había estimado esa evaluación. En el ejercicio 13.40 se precisa cuándo un valor central distinto de L obliga a evitarlo para que la composición tenga ese destino.

El diseño del radio puede escribirse explícitamente cuando ya tenemos una estimación interior. Supongamos $|f(x) - b| \leq C|x - a|$ cerca de a, con $C > 0$, y un radio válido $\eta_g(\varepsilon)$ para cada tolerancia exterior. Si se cumple la evitación o la alternativa $b \in E$, $g(b) = L$, podemos tomar $\delta(\varepsilon) = \min\left(r, \frac{\eta_g(\varepsilon)}{C}\right)$, donde $r > 0$ reúne las restricciones locales. Para toda entrada de esa ventana, $|f(x) - b| \leq C|x - a| < C\delta(\varepsilon) \leq \eta_g(\varepsilon)$. La desigualdad superior no prueba evitación; ésta debe proceder de la hipótesis correspondiente, o bien resolverse el contacto con $g(b) = L$.

Si $C = 0$, la cota obliga a $f(x) = b$ localmente. Como la acumulación hace no vacía cada ventana perforada, ese caso es incompatible con la evitación. El tipo asegura entonces $b \in E$ y la composición es localmente constante $g(b)$: tiene ese límite directamente, con error cero, incluso sin conocer un límite exterior. Para obtener el destino propuesto L es necesario y suficiente que $g(b) = L$.

El radio elegido debe ser positivo y depender sólo de los datos fijados y de la tolerancia. La comprobación posterior toma cualquier entrada del dominio en la ventana perforada y verifica el error estricto, incluidos los denominadores y las evaluaciones intermedias. Una fórmula de radio sólo termina la prueba cuando se ha establecido esa implicación universal. El límite ha permitido mantener separados el valor central y el comportamiento próximo. Exigir que el destino sea precisamente el valor de la función en el centro añadirá una condición que el ejemplo de $g(0) = 1$ deja visible.

Ejercicios de la sección 13.8.

Ejercicio 36. La composición pierde el centro perforado

Construye $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ y $\lim_{y\to 0} g(y) = 0$ pero $\lim_{x\to 0} g(f(x)) = 2$. Explica la falla del argumento usual.

Solución. Tomamos $f(x) = 0$ para todos los reales; $g(y) = 0$ si $y \neq 0$ y $g(0) = 2$. Los dos límites son cero porque sus errores son cero en las ventanas pertinentes. La composición es constante dos y tiene límite dos. El límite perforado de g sólo controla entradas distintas de cero; la interior cae siempre en cero. **Retorno visual.** Véase C13-F07, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

El límite exterior observa sólo entradas distintas de cero y por eso no controla $g(0) = 2$. La interior, en cambio, entrega cero en todas las entradas y obliga a la composición a evaluar ese valor excepcional. Esto separa el límite perforado de la exterior de su evaluación central. El ejemplo satisface los tipos y demuestra todas las conclusiones mediante errores nulos; el fallo de la regla ingenua está en perder la perforación, no en una composición mal definida.

Ejercicio 37. Componer dos cuadrados con certificados

Prueba directamente mediante radios anidados que $x^4 \to 1$ en 1, usando el certificado del cuadrado y la alternativa central para la segunda etapa.

Solución. Para $g(y) = y^2$ en $b = 1$, el radio $\eta = \min(1, \varepsilon/3)$ es válido y $g(1) = 1$. Para $f(x) = x^2$ en 1, tomamos $\delta = \min(1, \eta/3)$. Entonces $|f(x) - 1| < \eta$. Si $f(x) \neq 1$ aplica el control de g; si $f(x) = 1$, el error final es cero. El tipo real de ambas funciones permite componerlas. Así $|x^4 - 1| < \varepsilon$ en toda la ventana.

El diseño empieza con la tolerancia final. La segunda etapa entrega una escala intermedia η, y la primera entrega un radio que sitúa sus salidas dentro de esa escala. Si la salida intermedia coincide con uno, el valor central de la exterior es el destino correcto y el error es cero. Si no coincide, se aplica su certificado perforado. La prueba cubre ambas posibilidades en toda la ventana y evita usar el límite exterior donde su hipótesis no valga.

Ejercicio 38. La alternativa central sin límites conocidos

Sean $f : D \to E$, $g : E \to \mathbb{R}$, $a \in D'$. Supón que $f(x) = b \in E$ en alguna ventana perforada. Determina y prueba el límite de la composición sin suponer que exista un límite de g en b.

Solución. En esa misma ventana la composición tiene valor constante $g(b)$. Para cualquier $\varepsilon > 0$ usamos su radio r y el error es cero. Por tanto el límite es $g(b)$. No importa el comportamiento de g fuera de la salida única localmente alcanzada; las hipótesis del teorema general de composición eran suficientes, no necesarias. Sólo necesitamos saber que la interior es localmente constante y que b está en el dominio de la exterior. Todas las salidas compuestas de esa ventana son exactamente $g(b)$, por lo que el mismo radio responde a cualquier tolerancia. El comportamiento de g en otras entradas resulta irrelevante para esta composición local. No estamos deduciendo un límite exterior: construimos directamente el de la composición mediante las salidas que realmente alcanza.

Ejercicio 39. Composición a través de un subconjunto de salidas

Sean $f : D \to E$, $a \in D'$, $b \in A'$ para $A \subseteq E$, y $g : E \to \mathbb{R}$. Supón $f \to b$, $g|_A \to L$ y que $f(x) \in A \setminus \{b\}$ cerca de a. Prueba el límite de $g \circ f$ aunque g no tenga límite en todo E.

Solución. Fijado $\varepsilon > 0$, el contrato de $g|_A$ ofrece $\eta > 0$ para entradas de A próximas y distintas de b. El límite de f ofrece $\delta_f > 0$ para ese radio. Reunimos δ_f con el radio r de pertenencia y evitación. Para toda entrada de la nueva ventana, $f(x) \in A\setminus\{b\}$ y $|f(x)-b| < \eta$, de modo que $|g(f(x)) - L| < \varepsilon$. El segundo contrato sólo se necesita en las salidas realmente disponibles.

La restricción exterior sólo controla entradas de A diferentes de b. La hipótesis de pertenencia y evitación asegura que la interior entregue precisamente entradas de ese tipo, y su límite las aproxima a b dentro del radio requerido. El mínimo reúne estos dos controles.

La exterior puede comportarse de otra manera en $E \setminus A$ sin afectar la conclusión, porque esas salidas intermedias no aparecen localmente en la composición.

Ejercicio 40. Un criterio exacto para tocar una salida defectuosa

Sean $f : D \to E$, $a \in D'$, $b \in E \cap E'$, $g : E \to \mathbb{R}$, $f \to b$ y $g \to L$ en b, con $g(b) \neq L$. Prueba que $g \circ f \to L$ si y sólo si $f(x) \neq b$ en alguna ventana perforada de a.

Solución. La evitación es suficiente por el teorema del texto. Para probar necesidad, supongamos que la composición tiende a L y sea $d = |g(b) - L| > 0$. Su contrato para $\varepsilon = d/2$ da $\delta > 0$ con error menor que $d/2$ en la ventana. Si alguna entrada allí tuviera $f(x) = b$, el error final sería d, contradicción. Luego todas evitan b. El defecto central convierte una condición suficiente en una condición necesaria para ese destino particular.

Retorno visual. Véase C13-F07, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba. El defecto central tiene magnitud fija $d = |g(b) - L| > 0$. Un control de la composición con tolerancia $d/2$ no puede permitir ni una entrada local que alcance b, porque su salida final tendría error exactamente d. Esto demuestra necesidad de la evitación. La dirección suficiente utiliza después los límites interior y exterior con radios anidados. La equivalencia es para el destino particular L; no afirma que cualquier composición que toque el centro carezca de todo límite.

Capítulo 14

Continuidad: transportar proximidad

La función que vale x^2 fuera de 1 y toma el valor 4 en 1 tiene allí un límite perfectamente determinado. Sus salidas próximas tienden a 1, mientras su valor central es 4. La continuidad exige que ambas informaciones sean compatibles: al acercarnos a una entrada del dominio, las salidas deben aproximarse al valor que la función asigna precisamente a esa entrada. Ese control se expresa mediante las bolas de C04 y las imágenes y preimágenes de C12. La comparación con los límites de C13 será válida en los puntos de acumulación; en los puntos aislados podremos estudiar continuidad directamente, porque su definición incluye el centro. El dominio determina en cada caso qué entradas participan de la aproximación.

14.1. Hacer del valor central el destino

Para comparar las salidas próximas con la evaluación central necesitamos que a pertenezca al dominio. En C13 podíamos preguntar por un límite sin disponer de $f(a)$; al exigir continuidad, el destino queda fijado por ese valor y la ventana de entradas puede incluir también el propio centro. En el ejemplo $h(x) = x^2$ para $x \neq 1$, $h(1) = 4$, cambiar sólo el valor central por 1 deja intactas las salidas perforadas y elimina la incompatibilidad. La definición permite distinguir exactamente qué cambia entre las dos funciones.

Definición. Sean $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ y $a \in D$. Decimos que f es continua en a, relativamente a D, si

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D : \quad |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

La pertenencia $a \in D$ autoriza evaluar $f(a)$. Para $x = a$, tanto la distancia de entrada como el error de salida son cero, de modo que esa entrada satisface cualquier tolerancia positiva. No se requiere que a sea interior del dominio ni que sea punto de acumulación: sólo se controlan las entradas de D que están en la bola. Decimos que f es continua en D cuando lo es en cada $a \in D$.

La afirmación global tiene el orden $\forall a \in D\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D$. El centro y la tolerancia se fijan antes del radio, que puede depender de ambos. Una respuesta común para todos los centros sería una exigencia adicional, estudiada en C17. Que una fórmula concreta dependa de a muestra cómo trabaja esa prueba, pero por sí solo no descarta que pudiera existir otra respuesta común.

La bola relativa $D \cap B(a, \delta)$ reúne todas las entradas que debemos controlar. La continuidad equivale a pedir $f[D \cap B(a, \delta)] \subseteq B(f(a), \varepsilon)$ para cada $\varepsilon > 0$ y algún $\delta > 0$. Una salida de la imagen tiene una entrada testigo en la bola relativa, y la estimación la sitúa en $B(f(a), \varepsilon)$. Recíprocamente, aplicar la inclusión a $f(x)$ recupera el error para cualquier entrada de esa bola. Por C12 también equivale a $D \cap B(a, \delta) \subseteq f^{-1}[B(f(a), \varepsilon)]$. Esta preimagen se define por pertenencia de la salida y no requiere una inversa funcional.

Proposición. Si $a \in D \cap D'$, entonces f es continua en a si y sólo si $\lim_{x \to a,\ x \in D} f(x) = f(a)$. Si f es continua, su radio sigue controlando las entradas distintas de a, y la acumulación permite formular el límite perforado de C13. Para la vuelta, el radio del límite controla cada entrada no central y, si $x = a$, el error es cero. Los dos casos cubren la bola relativa completa con el mismo radio. La hipótesis de acumulación hace posible la comparación con el límite; la continuidad en sí sólo necesita la pertenencia al dominio.

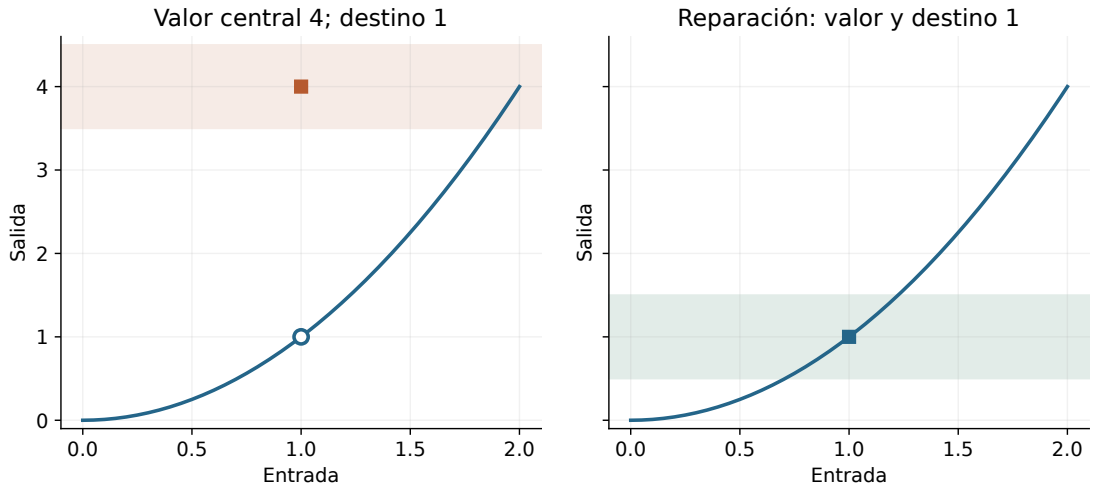


Figura 14.1. C14-F01. A la izquierda, h(1)=4 es incompatible con el límite 1; la banda centrada en el valor efectivo no captura las salidas próximas. A la derecha, asignar el valor 1 repara la continuidad. El punto lleno participa del contrato; el hueco sólo representa la regla sin su valor central.

Para h, el destino perforado 1 difiere de $h(1) = 4$ y la proposición descarta continuidad. También podemos exhibir infractores directamente. Fijemos la tolerancia 1 y recibamos cualquier $\delta > 0$. Con $t = \min(\delta/2, 1/4)$ y $x = 1 + t$ tenemos $0 < t < \delta$, $x \neq 1$ y $h(x) = x^2 \leq (5/4)^2 = 25/16$. Por tanto $|h(x) - 4| \geq 39/16 > 1$. Toda ventana contiene una entrada que mantiene un error mayor que la tolerancia fija.

Ejercicios de la sección 14.1.

Ejercicio 1. Una respuesta afín centrada

Prueba desde la definición que $f(x) = -3x + 2$ es continua en cada real a. Trata explícitamente el centro.

Solución. Fijemos a y $\varepsilon > 0$. Tomamos $\delta = \varepsilon/3 > 0$. Para toda entrada con $|x - a| < \delta$, el error es $|(-3x + 2) - (-3a + 2)| = 3|x - a| < \varepsilon$. Si $x = a$, esa identidad produce cero, así que no necesitamos excluir el centro. La arbitrariedad de a prueba continuidad en toda la recta. Al restar la salida central se cancela la constante dos y queda $-3(x - a)$. Su magnitud es tres veces la distancia de entrada, por lo que el radio responde directamente a la tolerancia. El caso $x = a$ satisface la misma identidad y tiene error cero. Como el centro fue arbitrario y pertenece al dominio real, la prueba acredita continuidad en todos los puntos, no sólo una aproximación alrededor de un centro elegido.

Ejercicio 2. Reparar un único valor del cuadrado

Define $h_c(x) = x^2$ si $x \neq 2$ y $h_c(2) = c$. Determina para qué c es continua en 2, y prueba el resultado.

Solución. El límite perforado es 4 por C13 y no cambia al modificar sólo el centro. Como 2 acumula puntos de la recta, §14.1 implica continuidad exactamente cuando $c = 4$. Para ese valor, un certificado directo es $\delta = \min(1, \varepsilon/5)$: $|x + 2| < 5$ para $|x - 2| < 1$, y el error $|x^2 - 4| < \varepsilon$ fuera del centro; en él es cero. La necesidad procede de la unicidad del límite, no de un dibujo.

Retorno visual. Véase C14-F01, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba. Modificar el valor central no cambia las entradas perforadas, cuyo destino sigue siendo cuatro. Si la función fuera continua, ese destino tendría que coincidir con c, lo que demuestra necesidad. Para suficiencia comprobamos el radio indicado en las entradas no centrales y añadimos el caso central de error cero. Así la reparación válida es única y su prueba no depende de una impresión visual del hueco.

Ejercicio 3. El límite existe y la continuidad falla

Construye una función con límite finito en cero que no sea continua allí. Da un infractor explícito para cada radio de continuidad.

Solución. Sea $f(x) = 0$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 2$. El límite perforado es cero, con error cero para todo desafío. Para continuidad, fijamos $\varepsilon_0 = 1$; dado $\delta > 0$, $x = \delta/2$ es distinto de cero, está en la ventana y tiene error $|f(x) - f(0)| = 2 \geq 1$. Así la función falla en cero pese a tener límite. El control del límite perforado usa únicamente entradas no nulas, todas con salida cero. El control de continuidad compara esas mismas salidas con el valor dos del centro. Esta diferencia produce un error fijo que no se reduce al acercarse la entrada. La tolerancia uno se mantiene para todos los radios y los testigos $\delta/2$ verifican exactamente la negación de continuidad. El límite existe, pero no coincide con la evaluación central.

Ejercicio 4. No intercambiar el punto y la respuesta

Explica por qué continuidad en todo D no permite escribir sin más $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall a, x \in D$ para el mismo control. Identifica la dependencia permitida y un cálculo que la haga visible.

Solución. El contrato demostrado es $\forall a \in D\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D$. Mover a detrás de $\exists \delta$ exige una respuesta común para todos los centros, una condición adicional. Para x^2, el cálculo local de §14.8 entrega $\delta(a, \varepsilon) = \min(1, \varepsilon/(1 + 2|a|))$, que depende de a. Esa fórmula muestra la dependencia de la prueba; por sí sola no demuestra imposibilidad de algún otro radio común. Tal cuestión se estudia en C17.

En continuidad puntual el radio puede adaptarse al centro. Exigirlo antes de escoger todos los centros simultáneamente es una afirmación más fuerte. El certificado del cuadrado ilustra la dependencia porque el multiplicador $x + a$ se controla mediante una constante que crece con $|a|$. Conviene respetar el alcance: mostrar que esta fórmula depende del centro no prueba que toda fórmula alternativa deba depender de él. Una refutación del radio común requeriría otro argumento.

Ejercicio 5. Ventana completa, imagen y preimagen

Demuestra que el contrato puntual equivale tanto a la inclusión de imágenes de bolas relativas como a la inclusión de la bola relativa en una preimagen. Explica por qué ninguna necesita inversa funcional.

Solución. Para ε y un radio δ, todo $x \in D \cap B(a, \delta)$ cumple el error exactamente cuando $f(x) \in B(f(a), \varepsilon)$. Esto equivale a que toda imagen de esa bola esté en la bola de salida, por definición de imagen con testigo; también equivale a $x \in f^{-1}[B(f(a), \varepsilon)]$ para todas esas entradas. Cuantificar sobre cada ε y algún δ da las tres formulaciones. La preimagen se define por pertenencia $f(x) \in V$, aunque f sea constante o no inyectiva.

La bola relativa incluye el centro y sólo las entradas que pertenecen a D. Cada una cumple el error si y sólo si su salida pertenece a la bola centrada en $f(a)$. Pasar a la imagen reúne esas salidas; pasar a la preimagen selecciona esas entradas. Ambas reformulaciones mantienen los mismos cuantificadores. La preimagen es una operación de pertenencia y existe aunque diferentes entradas tengan la misma salida.

14.2. El dominio y la reparación de un hueco

Al incluir el centro, la definición también tiene contenido cuando no hay otras entradas próximas. Ese caso explica por qué la continuidad puede conservarse en dominios separados y por qué restringir entradas puede eliminar una discontinuidad. Si $a \in D$ es aislado, existe $r > 0$ con $D \cap B(a, r) = \{a\}$. Para cualquier $\varepsilon > 0$ usamos $\delta = r$: la única entrada permitida es a y produce error cero. Toda función es por ello continua en los puntos aislados de su dominio, cualquiera que sea su valor central y cualesquiera que sean sus valores en las otras entradas.

En $D = \{0\} \cup [1, 2]$, definamos $f(0) = 9$ y $f(x) = x$ en el intervalo. El radio $1/2$ aísla cero y prueba continuidad allí para todas las tolerancias. Para un centro $a \in [1, 2]$, el radio

$\delta = \min(1/2, \varepsilon)$ excluye la entrada cero, y las restantes satisfacen $|f(x) - f(a)| = |x - a| < \varepsilon$. La prueba vale también en los extremos uno y dos, pues el cuantificador sólo considera entradas del dominio.

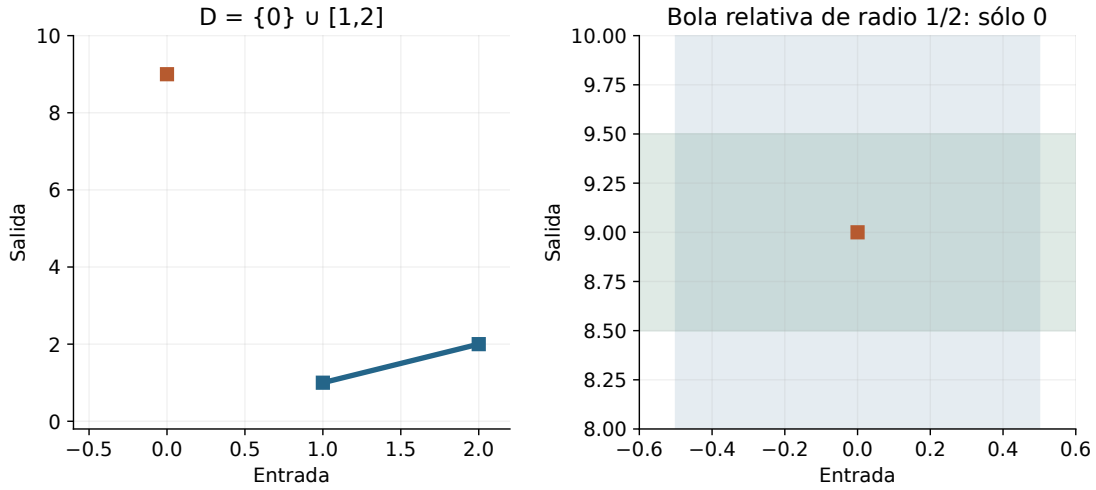


Figura 14.2. C14-F02. En D={0}∪[1,2], la bola de radio 1/2 alrededor de cero contiene sólo esa entrada del dominio. Su salida es el valor central 9 y el error es cero para cualquier desafío. La ausencia de entradas entre las piezas no es una discontinuidad relativa.

Los puntos ausentes entre cero y uno no imponen ninguna condición a la función. La separación de las dos piezas del gráfico es compatible con continuidad relativa: en cada centro se controlan todas las entradas suficientemente próximas que realmente existen. En cero la ventana perforada queda vacía y no recibe un límite bajo la convención de C13; la ventana completa contiene el centro y demuestra continuidad con error cero.

Si $A \subseteq D$, $a \in A$ y f es continua en a sobre D, el mismo radio prueba continuidad de $f|_A$. La restricción conserva el valor $f(a)$ y toda entrada de A dentro del radio era ya una entrada controlada de D. No se exige $a \in A'$: retirar entradas puede convertir el centro en aislado sin invalidar la prueba. Para transportar continuidad entre dos funciones $f, g : D \to \mathbb{R}$ localmente iguales, la coincidencia debe incluir el centro. Si $f = g$ en $D \cap B(a, r)$, con $a \in D$ y $r > 0$, entonces $f(a) = g(a)$. El mínimo de r y de un radio de continuidad de f asegura, para toda entrada pertinente, $|g(x) - g(a)| = |f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Intercambiar las funciones prueba la vuelta. La igualdad sólo perforada no daría igualdad de valores centrales, como muestran h y el cuadrado.

Teorema de extensión en un punto. Sean $a \notin D$, $a \in D'$ y $f : D \to \mathbb{R}$ con límite L en a. La función $F : D \cup \{a\} \to \mathbb{R}$ dada por $F|_D = f$ y $F(a) = L$ es continua en a. Además, es la única elección del nuevo valor que permite continuidad allí. Dado $\varepsilon > 0$, usamos un radio del límite de f. Las entradas originales de D dentro de él cumplen $|F(x) - F(a)| = |f(x) - L| < \varepsilon$, y la entrada añadida $x = a$ tiene error cero. Queda probada continuidad en el nuevo punto. Si otra extensión G fuera continua allí, la comparación de §14.1 le daría límite perforado $G(a)$ en $D \cup \{a\}$. Restringir ese control a D prueba $f \to G(a)$; como $a \in D'$, la unicidad de C13 obliga a $G(a) = L$.

Si además f es continua en todo D, la extensión conserva esa continuidad en cada punto anterior. Fijados $b \in D$ y una tolerancia, reunimos un radio de continuidad de f con $|b - a|/2 > 0$. El nuevo punto a queda fuera de esa bola, donde F coincide con f y hereda su estimación. Junto con la prueba en a, esto da continuidad en $D \cup \{a\}$. La hipótesis sobre los otros puntos se ha utilizado expresamente; completar el hueco no habría corregido fallos que ya existieran en ellos.

Para cambiar un valor ya asignado en un punto de acumulación a, aplicamos la extensión a $D \setminus \{a\}$. Un límite finito obliga al único valor de reparación. Si hay dos límites laterales distintos, la continuidad de una extensión forzaría que ambos coincidieran con su mismo valor central, lo que es imposible. Elegir un valor intermedio no modifica ninguno de los dos destinos.

Ejercicios de la sección 14.2.

Ejercicio 6. Un salto entre puntos sin vecinos

En $D = \{0\} \cup [1, 2]$, define $f(0) = 100$ y $f(x) = x$ en el intervalo. Prueba continuidad en todo D y explica por qué la separación del gráfico no la contradice.

Solución. En cero, radio $1/2$ confina la bola relativa al centro y da error cero para toda tolerancia. En un centro $a \in [1, 2]$, tome $\delta = \min(1/2, \varepsilon)$; la entrada cero queda fuera y toda entrada pertinente pertenece al intervalo, donde el error es $|x-a| < \varepsilon$. No hay entradas entre cero y uno, así que continuidad relativa no exige conectar las dos piezas por un trazo.

Retorno visual. Véase C14-F02, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba. En cero no hay entradas del intervalo dentro del radio medio, así que el valor cien no necesita aproximarse a ellas. En un centro del intervalo, el mismo radio auxiliar excluye la entrada cero; las salidas de las entradas restantes obedecen a la identidad y su error es su distancia al centro. También vale en los extremos uno y dos porque la aproximación es relativa. La continuidad no exige añadir puntos ausentes entre las piezas del dominio.

Ejercicio 7. Restringir puede eliminar la falla

Sea $s(x) = -1$ para $x < 0$ y $s(x) = 1$ para $x \geq 0$. Prueba que es discontinua en cero sobre $\mathbb{R}$ y que su restricción a $[0, \infty)$ es continua allí.

Solución. En el dominio real, para tolerancia 1 y cualquier radio, $x = -\delta/2$ tiene error dos respecto de $s(0) = 1$. En el dominio restringido, la función es constante uno y todo radio positivo da error cero. No contradice el teorema de restricción: éste preserva continuidad ya existente, pero no prohíbe que al retirar infractores aparezca continuidad. La discontinuidad real usa entradas negativas que se acercan a cero, mientras su valor central es uno. Restringir al semieje no negativo elimina exactamente esos infractores y vuelve constante la función. El teorema de restricción afirma que no destruye continuidad existente; no afirma la recíproca. Una función puede adquirir continuidad al retirar rutas que provocaban el fallo en el dominio mayor.

Ejercicio 8. Extender un cociente con hueco

Para $f(x) = (x^2 - 9)/(x - 3)$ en $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, encuentra y prueba la única extensión continua a toda la recta.

Solución. En D, la factorización da $f(x) = x + 3$. Su límite en tres es seis, con radio ε para el error $|x-3|$. La extensión única asigna $F(3) = 6$, y entonces $F(x) = x+3$ en toda la recta. El error $|F(x) - F(a)| = |x - a|$ prueba continuidad en cada centro. La unicidad se sigue del teorema de extensión; cancelar no define por sí solo el cociente original en tres.

La igualdad con $x + 3$ se prueba sólo donde $x - 3 \neq 0$, que es el dominio original. El límite en el punto excluido se calcula con esas entradas y obliga al valor seis si queremos una extensión continua. Al asignarlo obtenemos la afín completa, cuya diferencia de salidas es $x - a$. Esto prueba continuidad en todos los puntos y no sólo en el hueco reparado. La cancelación algebraica no era una evaluación del cociente en tres.

Ejercicio 9. Una modificación local debe incluir el centro

Da dos funciones que coincidan en toda ventana perforada de cero y tengan continuidad distinta allí. Después prueba que la coincidencia en una ventana completa sí preserva continuidad.

Solución. La función cero y la función con valor uno sólo en cero coinciden fuera del centro; la primera es continua y la segunda falla por la ruta $\delta/2$ con error uno. Si $f = g$ en $D \cap B(a, r)$, el centro pertenece a esa región, así que $f(a) = g(a)$. Ante un radio de continuidad δ_f, el mínimo con r asegura igualdad de valores y errores para toda entrada cercana. Esto prueba la ida; intercambiar las funciones prueba la vuelta.

El primer ejemplo conserva todas las salidas perforadas y cambia únicamente el destino de comparación de continuidad. Por eso igualdad fuera del centro no alcanza. En la prueba positiva, la ventana completa contiene al propio centro y obliga a igualdad de valores centrales. El mínimo de radios asegura igualdad también en cada entrada controlada. Entonces las dos diferencias de salida son idénticas, y la continuidad puede transportarse en ambas direcciones.

Ejercicio 10. Ningún valor repara un salto

Sea $f(x) = -2$ para $x < 0$ y $f(x) = 3$ para $x > 0$, sin valor en cero. Prueba que ninguna elección de $f(0)$ produce una extensión continua.

Solución. Las rutas $u_n = -1/(n + 1)$ y $v_n = 1/(n + 1)$ tienen imágenes constantes -2 y 3. Si una extensión con valor c fuese continua en cero, la dirección secuencial directa obligaría ambas imágenes a converger a c; unicidad secuencial daría $c = -2 = 3$, contradicción. Las rutas explícitas no requieren selección numerable. Las dos rutas pertenecen al dominio extendido cualquiera que sea el valor nuevo en cero y nunca evalúan ese centro. Las imágenes constantes obligarían, por continuidad, a tener como destino tanto menos dos como tres. La unicidad de límites secuenciales lo prohíbe. Ningún valor intermedio repara la incompatibilidad entre ramas. La existencia de fórmulas explícitas para las rutas evita una hipótesis de selección numerable.

14.3. Transportar sucesiones que sí pueden tocar el centro

Una sucesión del dominio puede volver al centro infinitas veces, alternar entre él y otras entradas o permanecer allí. La continuidad debe transportar todas esas aproximaciones hacia $f(a)$, y cada visita al centro aporta un término de error cero. **Proposición.** Si $f : D \to \mathbb{R}$ es continua en $a \in D$ y $x_n \in D$ con $x_n \to a$, entonces $f(x_n) \to f(a)$.

Fijemos la sucesión y $\varepsilon > 0$. La continuidad entrega $\delta > 0$ y la convergencia de las entradas entrega después N con $|x_n - a| < \delta$ para todo $n \geq N$. Cada término de esa cola pertenece a D, por lo que $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$. También se aplica cuando $x_n = a$. El orden $\varepsilon \to \delta \to N$ transforma un control de toda la bola relativa en un control eventual de la ruta dada, sin construir una nueva sucesión.

Si a es aislado, tomamos un radio $r > 0$ con $D \cap B(a, r) = \{a\}$. La convergencia de x_n coloca toda una cola en esa bola y la pertenencia a D obliga a $x_n = a$ en la cola completa. Sus imágenes son eventualmente constantes $f(a)$ para cualquier función del dominio. Esto explica también el transporte de sucesiones en un punto de continuidad automática.

Negar continuidad en a equivale a encontrar $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe $x \in D$ con $|x - a| < \delta, \qquad |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon_0$. La tolerancia positiva impide que un infractor sea el centro, donde el error es cero. Aunque la continuidad se formule en ventanas completas, sus fallos proporcionan entradas perforadas. Usando $\eta_n = 1/(n + 1)$, el fracaso equivale a que todos los conjuntos

$E_n = \{x \in D : |x - a| < \eta_n,\ |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon_0\}$ sean no vacíos para la misma $\varepsilon_0 > 0$. La negación de continuidad da un testigo al usar cada η_n como radio. Recíprocamente, dado un radio positivo cualquiera, C06 permite tomar una escala menor y usar un único infractor del conjunto correspondiente. Esa entrada refuta también el radio recibido. Este paso no requiere reunir simultáneamente testigos de todos los conjuntos.

Teorema para un dominio enumerado. Si está dada una sobreyección $e : \mathbb{N} \to D$, la continuidad en a equivale a que toda ruta del dominio convergente a a tenga imágenes convergentes a $f(a)$. Para la vuelta, supongamos que falla continuidad y fijemos los conjuntos E_n. Por sobreyectividad, $I_n = \{k : e(k) \in E_n\}$ es un subconjunto no vacío de naturales. Su mínimo único $k_n = \min I_n$ define $x_n = e(k_n)$ sin tomar un mínimo entre valores reales, que

podría no existir. Se cumple $|x_n - a| < 1/(n+1)$ y por tanto $x_n \to a$, mientras $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon_0$ en todos los índices contradice la convergencia de sus imágenes. La dirección directa ya probada completa la equivalencia. No necesitamos que los índices crezcan estrictamente: la cota de distancias basta, aunque la ruta no sea una subsucesión de la enumeración.

Para un dominio real arbitrario, la misma equivalencia se demuestra **bajo** CC($\mathbb{R}$), el principio de selección numerable definido en C13. Se aplica exactamente a la familia de los E_n no vacíos para obtener $x_n \in E_n$; las cotas anteriores dan la contradicción. Conservamos este teorema como condicional. La ida y el caso de enumeración dada no necesitan esa premisa; tampoco la necesitan las otras caracterizaciones que demostraremos con bolas.

Una ruta explícita basta para refutar continuidad sin recurrir a la recíproca. En h de §14.1, la fórmula $x_n = 1 + 1/(n+1)$ define entradas no centrales que tienden a 1. Sus imágenes tienden a 1 por el límite del cuadrado de C13. Si h fuera continua, la dirección directa obligaría a las mismas imágenes a tender a $h(1) = 4$, contra la unicidad secuencial. Los términos ya están definidos por la fórmula, de modo que no se usa selección numerable.

La refutación utiliza una consecuencia necesaria de continuidad en una ruta concreta. En cambio, para probar continuidad mediante la recíproca hay que controlar todas las rutas del dominio convergentes al centro y mantener la hipótesis que autoriza construir una ruta infractora.

Ejercicios de la sección 14.3.

Ejercicio 11. La ruta vuelve al centro

Si f es continua en a, considera $x_{2n} = a$ y $x_{2n+1} = a + 1/(n+1)$, suponiendo que todos los términos estén en D. Prueba convergencia de entradas e imágenes.

Solución. Los términos pares tienen distancia cero y los impares distancia $1/(n+1)$, que tiende a cero. Para $\delta > 0$ escoja N con $1/(n+1) < \delta$ si $n \geq N$; todo índice $k \geq 2N$ tiene distancia menor que δ, pues en el caso impar su subíndice es al menos N. Luego $x_k \to a$. Continuidad y el criterio directo dan $f(x_k) \to f(a)$, incluyendo los retornos centrales.

Para los términos impares, el índice global $2n+1$ y el índice de la fórmula n no son el mismo. El corte $2N$ asegura que cualquier impar tardío tenga subíndice al menos N. Los pares ya están en el centro y cumplen cualquier precisión. Esta verificación prueba convergencia de toda la ruta intercalada. La continuidad transporta ambas clases de términos, incluidas las visitas al centro, hacia $f(a)$.

Ejercicio 12. Ruta en un punto aislado

Demuestra que si a es aislado en D y $x_n \in D$, $x_n \to a$, entonces $x_n = a$ eventualmente. Deduce el transporte de imágenes para cualquier $f : D \to \mathbb{R}$.

Solución. Existe $r > 0$ con $D \cap B(a, r) = \{a\}$. La convergencia da una cola con $|x_n - a| < r$; por pertenencia al dominio, cada término de esa cola es a. Las imágenes son entonces eventualmente constantes $f(a)$ y convergen a él por C06. No se necesita un límite perforado ni una hipótesis sobre f. Una bola relativa aislante convierte proximidad suficiente en igualdad exacta. La convergencia coloca toda una cola dentro de ella, y la pertenencia de los términos a D obliga a que sean el centro. Las salidas de esa cola son entonces constantes. La prueba no necesita continuidad como hipótesis de f: cualquier asignación sobre ese dominio transporta esas rutas porque éstas ya no tienen variación eventual.

Ejercicio 13. El infractor evita solo el centro

Niega el contrato de continuidad y demuestra que todos los puntos del conjunto infractor para tolerancia positiva son distintos de a. Compara con el criterio de límite de C13.

Solución. La negación es $\exists \varepsilon_0 > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in D$ con $|x - a| < \delta$ y $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon_0$. Si $x = a$, el segundo error sería cero, contradicción. En el criterio de límite la exclusión del centro es una hipótesis explícita del dominio de control; aquí la propia infracción la implica automáticamente porque el destino es $f(a)$. La negación invierte los cuantificadores y cambia el error estricto por un error mayor o igual que la tolerancia. Si un testigo fuera el centro,

su error sería cero, contradiciendo la positividad de esa tolerancia. Así los infractores son automáticamente perforados, aunque la definición positiva de continuidad incluyera el centro. En C13 la perforación se escribía de entrada porque el destino del límite era independiente de la evaluación central.

Ejercicio 14. Reconstruir la recíproca enumerada

Con $e : \mathbb{N} \to D$ sobreyectiva dada, prueba que preservar todas las rutas convergentes a a fuerza continuidad en a. Indica qué objeto tiene un mínimo.

Solución. Si no hubiese continuidad, existen ε_0 y conjuntos E_n no vacíos con $|x - a| < 1/(n+1)$ y error al menos ε_0. Por sobreyectividad, $I_n = \{k : e(k) \in E_n\}$ es no vacío. El mínimo natural k_n es único y define $x_n = e(k_n)$. Entonces $x_n \to a$ pero los errores de imagen nunca son menores que ε_0, contradicción. El mínimo vive en los índices; un subconjunto real no vacío puede carecer de mínimo.

Suponemos que falla continuidad y reunimos infractores con la misma tolerancia en escalas $1/(n+1)$. La enumeración hace no vacío el conjunto de índices que representan cada escala, y el menor índice define una elección única. La ruta elegida converge al centro por la cota de distancias, pero sus imágenes mantienen error grande. Esto contradice la conservación de todas las rutas. El mínimo pertenece a un subconjunto natural, no a los valores reales de los infractores.

Ejercicio 15. Auditar una prueba sin selector

Un borrador dice: «Como cada E_n es no vacío, elegimos $x_n \in E_n$ para todos los índices; queda probada la equivalencia secuencial en cualquier dominio». Repara su alcance sin adoptar un axioma silencioso.

Solución. El borrador pasa de existencias individuales a una función de selección sin justificarla. Puede repararse declarando una enumeración sobreyectiva de D y usando mínimos de índices, o presentando el teorema general como condicional a $\mathrm{CC}(\mathbb{R})$ aplicada a los E_n. La dirección de continuidad a rutas ya era incondicional y no necesita reparación. No afirmamos que el borrador demuestre la recíproca universal sin esa premisa.

La frase del borrador introduce una asignación simultánea de testigos, aunque sólo había acreditado existencias individuales. Una enumeración dada permite reparar ese paso mediante mínimos de índices. Para dominios arbitrarios, el capítulo declara elección numerable para subconjuntos reales y conserva la conclusión como condicional. Las estimaciones que siguen a la selección no cambian. La dirección directa ya toma una ruta dada y no requiere ese paso adicional.

14.4. Preimágenes: de controles locales a conjuntos abiertos

Las estimaciones puntuales también permiten reconocer continuidad mediante conjuntos completos de salidas. Si una región abierta contiene $f(a)$, contiene una bola alrededor de ese valor, y la continuidad obliga a que una bola relativa alrededor de a produzca salidas en esa región. La preimagen deberá contener, junto a cada una de sus entradas, todas las entradas suficientemente próximas del dominio. Para $A \subseteq D \subseteq \mathbb{R}$, decimos que A es abierto relativo a D si $A = D \cap U$ para algún abierto U de la recta. Es cerrado relativo si $D \setminus A$ es abierto relativo. Así, $[0, 1/2)$ es abierto en $D = [0, 1]$ aunque no lo sea en la recta: es $D \cap (-1, 1/2)$. Todo D es abierto y cerrado relativo a sí mismo; también lo es el vacío.

Lema del criterio por bolas. A es abierto relativo a D si y sólo si para cada $a \in A$ hay $r > 0$ con $D \cap B(a, r) \subseteq A$. Si $A = D \cap U$ con U abierto, cada $a \in A$ tiene una bola contenida en U, cuyo recorte por D queda en A. Para probar la vuelta formamos U como unión de todas las bolas $B(a, r)$ con $a \in A$, $r > 0$ y $D \cap B(a, r) \subseteq A$. La unión es abierta por C04. Cada $a \in A$ pertenece a alguna bola válida, así que $A \subseteq D \cap U$; si $x \in D \cap U$, pertenece a una bola cuyo recorte está en A y por tanto $x \in A$. Obtenemos $A = D \cap U$ mediante ambas inclusiones. Al reunir todas las bolas válidas evitamos elegir una simultáneamente para cada punto.

La representación de los cerrados relativos se obtiene tomando complementos en el ambiente correcto. Si $D \setminus A = D \cap U$ para un abierto real U, ponemos $F = \mathbb{R} \setminus U$, cerrado, y resulta $A = D \cap F$. Recíprocamente, de esa última representación se sigue $D \setminus A = D \cap (\mathbb{R} \setminus F)$, que es abierto relativo. Así A es cerrado relativo exactamente cuando se puede escribir como el recorte de un cerrado real.

Teorema. Para $f : D \to \mathbb{R}$, son equivalentes:

1. f es continua en cada punto de D.
2. Para todo abierto $V \subseteq \mathbb{R}$, $f^{-1}[V]$ es abierto relativo a D.

Supongamos continuidad y fijemos un abierto V. Para cualquier $a \in f^{-1}[V]$, la salida $f(a)$ está en V, y su apertura da $\varepsilon > 0$ con $B(f(a), \varepsilon) \subseteq V$. El radio $\delta > 0$ de continuidad sitúa las salidas de $D \cap B(a, \delta)$ dentro de esa bola, luego $D \cap B(a, \delta) \subseteq f^{-1}[V]$. El criterio por bolas demuestra que la preimagen es abierta relativa. Trabajamos con una entrada arbitraria y el radio que necesita su prueba; no escogemos simultáneamente una familia de radios.

Para la implicación inversa, fijemos $a \in D$ y $\varepsilon > 0$. La bola $V = B(f(a), \varepsilon)$ es un abierto real y su preimagen contiene a. Por hipótesis es abierta relativa, de modo que el lema entrega $\delta > 0$ con $D \cap B(a, \delta) \subseteq f^{-1}[V]$. Cada entrada de esa bola relativa satisface $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, que es continuidad en a. La arbitrariedad del centro da continuidad en todo D.

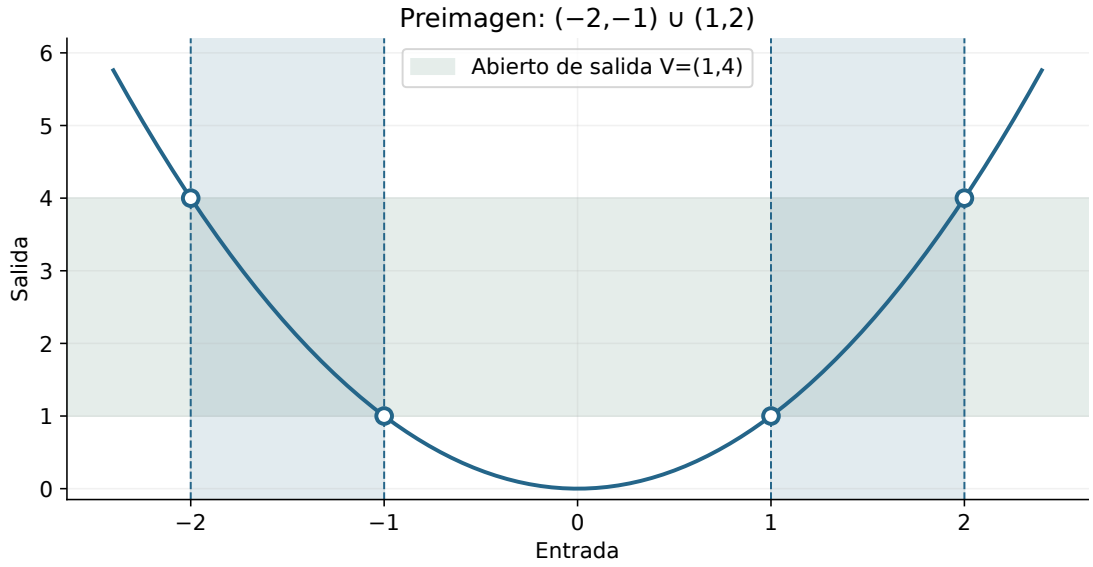


Figura 14.3. C14-F03. Para x² y V=(1,4), la preimagen es (−2,−1)∪(1,2). Los extremos quedan excluidos. Cada entrada de la preimagen tiene una pequeña ventana aún dentro de ella; no hace falta que el cuadrado sea invertible para obtener este conjunto.

Para $f : D \to E$ con $E \subseteq \mathbb{R}$, podemos usar abiertos relativos a E. Si $V = E \cap U$ y U es abierto real, la pertenencia $f(x) \in E$ implica que $f(x) \in V$ equivale a $f(x) \in U$. Por tanto $f^{-1}[V] = f^{-1}[U]$. Cada abierto relativo tiene esta forma y cada abierto real produce uno con la misma preimagen, lo que prueba la equivalencia de los dos criterios. Ajustar el codominio a un subconjunto real que contiene la imagen no cambia las distancias ni la continuidad, aunque la función tipada conserve su codominio declarado.

Para $F \subseteq \mathbb{R}$, la identidad $D \setminus f^{-1}[F] = f^{-1}[\mathbb{R} \setminus F]$ relaciona los complementos de entrada y salida: en ambos lados se seleccionan exactamente los $x \in D$ con $f(x) \notin F$. Si todas las preimágenes de abiertos son abiertas relativas, las preimágenes de cerrados tienen complemento abierto relativo y son cerradas relativas. La vuelta aplica el mismo argumento al complemento de cada abierto. Así obtenemos también una caracterización por preimágenes de cerrados.

Para una función continua en D, el conjunto de ceros $f^{-1}[\{0\}]$ es cerrado relativo y el conjunto de entradas positivas $\{x \in D : f(x) > 0\} = f^{-1}[(0, \infty)]$ es abierto relativo. El ambiente sigue siendo D: si f es la función cero en $(0, 1)$, su conjunto de ceros es todo $(0, 1)$, cerrado respecto de sí mismo pero no en la recta. La prueba por bolas y complementos no ha utilizado la recíproca secuencial condicional.

Ejercicios de la sección 14.4.

Ejercicio 16. Un abierto que contiene un extremo

Para la inclusión $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, calcula la preimagen de $(-1, 1)$ y explica con radios su apertura relativa y su falta de apertura absoluta.

Solución. La preimagen es $[0, 1)$. En el ambiente $[0, 2]$ es la intersección con el abierto $(-1, 1)$, luego es abierta relativa. Por bolas: para $a \in [0, 1)$, radio $(1-a)/2$ mantiene cualquier entrada del dominio menor que uno. En la recta, toda bola de cero contiene negativos fuera del conjunto, así que no es abierta absoluta. La inclusión es continua con radio ε y no contradice el criterio correcto.

El extremo cero se incluye porque pertenece al dominio y su salida está en el intervalo abierto solicitado. Para cada $a < 1$ del conjunto, el radio $(1 - a)/2$ mantiene las entradas del dominio por debajo de uno; las negativas quedan descartadas por el recorte. En la recta completa esas negativas demostrarían que ninguna bola alrededor de cero cabe en la preimagen. El mismo conjunto puede ser abierto relativo y no abierto absoluto sin contradicción.

Ejercicio 17. La preimagen tiene dos piezas

Para $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $q(x) = x^2$, calcula $q^{-1}[(1, 4)]$ y prueba su apertura sin confundirla con una inversa del cuadrado.

Solución. La condición $1 < x^2 < 4$ equivale a $1 < |x| < 2$, por lo que la preimagen es $(-2, -1) \cup (1, 2)$, unión de dos intervalos abiertos. Es abierta por C04. No existe una inversa funcional del cuadrado sobre toda la recta porque no es inyectivo; calcular esta preimagen sólo resuelve pertenencia a un intervalo de salida. **Retorno visual.** Véase C14-F03, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Resolver la condición de salida produce dos ramas de entradas: sus magnitudes deben estar estrictamente entre uno y dos. Las cuatro fronteras se excluyen porque sus cuadrados están en las fronteras excluidas de $(1, 4)$. Cada rama es un intervalo abierto real y su unión también. La función cuadrado no tiene inversa en toda la recta, pero eso no impide calcular su preimagen mediante una condición sobre la salida de cada entrada.

Ejercicio 18. Basta una base de intervalos

Supón que para cada intervalo abierto real I, la preimagen $f^{-1}[I]$ es abierta relativa a D. Prueba continuidad de $f : D \to \mathbb{R}$.

Solución. Fijemos $a \in D$ y $\varepsilon > 0$. El intervalo $(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$ es una bola abierta y su preimagen abierta contiene a. El criterio por bolas da $\delta > 0$ con $D \cap B(a, \delta)$ dentro de ella. Todas esas entradas tienen error menor que ε, que es continuidad. No es necesario seleccionar intervalos ni radios para todos los puntos a la vez.

No hace falta seleccionar una base completa de abiertos para probar cada precisión. Fijados centro y tolerancia, escogemos precisamente el intervalo centrado en su salida. La hipótesis garantiza que su preimagen es abierta relativa y contiene al centro. El criterio por bolas entrega entonces el radio de continuidad. El argumento reconstruye el control puntual directamente y vale para un centro arbitrario del dominio.

Ejercicio 19. Ceros cerrados en el ambiente correcto

Sea $D = (0, 1)$ y $f : D \to \mathbb{R}$ la función cero. Describe su conjunto de ceros y explica por qué el criterio de cerrados no afirma que sea cerrado en $\mathbb{R}$.

Solución. El conjunto de ceros es todo $D = (0, 1)$, cerrado relativo a sí mismo porque su complemento dentro de D es vacío y abierto relativo. No es cerrado absoluto: cero es adherente y falta en él, por ejemplo mediante la ruta $1/(n + 2)$. El criterio afirma cerradura en el dominio, no en otro ambiente. Todo el dominio es cerrado respecto de sí mismo porque su complemento relativo es vacío. La preimagen de cero coincide con ese dominio. Pero en el ambiente real faltan puntos adherentes como cero y uno, de modo que no es cerrado absoluto. La continuidad no completa el dominio con sus puntos frontera. El criterio de preimágenes de cerrados conserva exactamente el ambiente en el que se ha declarado la función.

Ejercicio 20. Codominio restringido y preimágenes

Sean $f : D \to E \subseteq \mathbb{R}$ y $V = E \cap U$, con U abierto absoluto. Demuestra $f^{-1}[V] = f^{-1}[U]$ y deduce el criterio de continuidad con abiertos relativos de E.

Solución. Para $x \in D$, el tipo garantiza $f(x) \in E$, por lo que $f(x) \in E \cap U$ equivale a $f(x) \in U$. Esto prueba la igualdad. Si hay continuidad, el criterio absoluto da apertura de cada preimagen de U, por tanto de V. Recíprocamente, cada abierto absoluto U tiene intersección $E \cap U$ abierta relativa y con la misma preimagen, así que el criterio absoluto vuelve a aplicar. Los ambientes cambian, las distancias reales no.

Aunque un abierto absoluto U contenga salidas fuera de E, ninguna evaluación de f puede producirlas. Por eso recortarlo a $E \cap U$ no cambia su selección de entradas. Esta igualdad permite expresar el criterio mediante abiertos relativos del codominio en lugar de abiertos de la recta. En la dirección inversa, cada abierto absoluto induce uno relativo con la misma preimagen, recuperando el criterio original.

14.5. Operar y componer sin perder el dominio

Las identidades algebraicas de C13 vuelven a descomponer los errores, con los destinos fijados ahora por $L = f(a)$ y $M = g(a)$. La estimación debe incluir $x = a$, donde los errores se anulan. Esto permite combinar funciones incluso si el centro es aislado y evita el problema de perforación que aparecía al componer límites. Sean $f, g : D \to \mathbb{R}$ continuas en $a \in D$, y pongamos $L = f(a)$, $M = g(a)$. Para la suma, la triangular da $|(f(x) + g(x)) - (L + M)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M|$. Pedimos a cada función un error menor que $\varepsilon/2$ y reunimos los radios para obtener error total menor que ε. Si $\lambda \neq 0$, el radio de f para $\varepsilon/|\lambda|$ controla λf; si $\lambda = 0$, todos los errores son cero. La resta resulta usando $\lambda = -1$, y la triangular inversa $||f(x)| - |f(a)|| \leq |f(x) - f(a)|$ demuestra continuidad de $|f|$ con el mismo radio.

Para el producto, añadir y restar $f(x)M$ da $f(x)g(x)-LM = f(x)(g(x)-M)+M(f(x)-L)$. El primer multiplicador varía con la entrada y necesita una barrera común. La continuidad de f para tolerancia 1 entrega $r > 0$ con $|f(x)| < A := |L| + 1$ en la bola relativa. Ponemos $B = |M| + 1 > 0$ y pedimos errores de g y f menores que $\varepsilon/(2A)$ y $\varepsilon/(2B)$. En el mínimo de esos radios y de r, cada término de la identidad tiene magnitud menor que $\varepsilon/2$, incluso si su multiplicador es cero. Por tanto,

$$|f(x)g(x) - LM| \leq |f(x)||g(x) - M| + |M||f(x) - L| < \varepsilon.$$

Los denominadores A y B son positivos aunque se anulen los valores centrales, y la barrera incluye $x = a$. Así quedan probadas suma, resta, producto, escala y magnitud sin recurrir a acumulación ni a una selección de entradas. Si $g(a) = M \neq 0$, la tolerancia $|M|/2$ da $|g(x)| \geq |M| - |g(x) - M| > |M|/2 > 0$ cerca de a. El dominio $D_g = \{x \in D : g(x) \neq 0\}$ contiene por tanto una bola relativa del dominio original e incluye al centro. En esa bola podemos escribir

$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| \leq \frac{2|g(x)-M|}{|M|^2}$. Al pedir además $|g(x) - M| < \varepsilon|M|^2/2$ y tomar el mínimo de los dos radios, la cota final queda estrictamente por debajo de ε. Esto prueba continuidad de $1/g$ en el centro considerado sobre D_g, y el producto con $f|_{D_g}$ prueba la de f/g. La desigualdad no estricta anterior admite error cero tanto en $x = a$ como en cualquier otra entrada donde

$g(x) = M$; la precisión estricta se obtiene al final. En cada punto donde las funciones sean continuas y el denominador no se anule, se repite el mismo argumento.

Las constantes tienen error cero y la identidad tiene error $|x-a|$, así que sirven los radios 1 y ε, respectivamente. Una inducción finita con productos y sumas construye la continuidad de todos los polinomios. Sus cocientes son continuos en el dominio donde el denominador no se anula; los puntos excluidos no son evaluaciones de la función dada. **Teorema.** Sean $f : D \to E$, $g : E \to \mathbb{R}$, $a \in D$ y $b = f(a)$. Si f es continua en a y g en b, entonces $g \circ f$ es continua en a.

Dado $\varepsilon > 0$, la continuidad exterior proporciona $\eta > 0$ tal que $y \in E$ y $|y-b| < \eta$ implican $|g(y) - g(b)| < \varepsilon$. Presentamos esa escala η a la continuidad de f y obtenemos $\delta > 0$ con $|f(x) - b| < \eta$ para $x \in D$, $|x - a| < \delta$. Como $f : D \to E$, cada salida intermedia está admitida por g. Aplicando su control a $y = f(x)$ obtenemos

$|g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$. Si $f(x) = b$, la exterior evalúa su propio centro y da error cero; si $f(x) \neq b$, la misma estimación sigue siendo válida. No hacen falta evitación del punto intermedio ni acumulación de b en E, porque la continuidad exterior controla la bola completa.

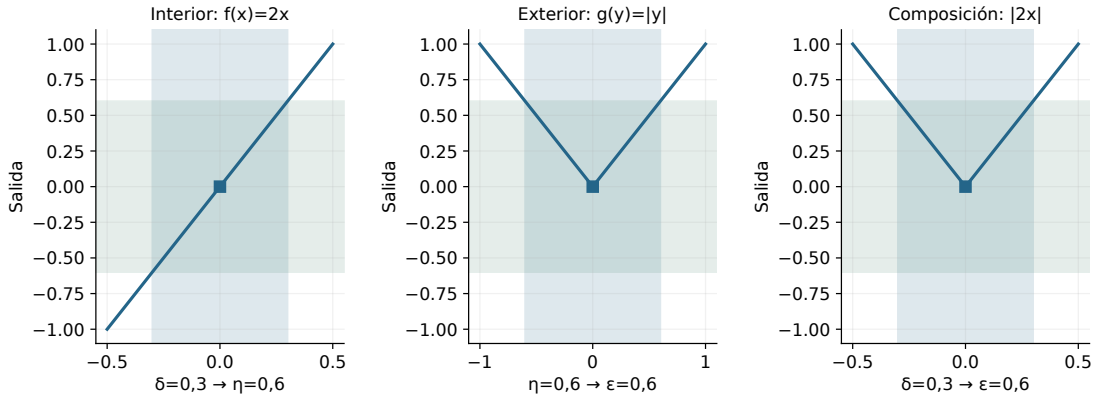


Figura 14.4. C14-F04. La exterior responde a ε=0,6 con η=0,6; la interior responde a η con δ=0,3. Las tres ventanas incluyen su centro. La cadena de radios controla |2x| incluso cuando la salida intermedia es exactamente cero; las bandas dibujadas ilustran los contratos probados.

Cuando sólo tenemos $f : D \to \mathbb{R}$ y $g : E \to \mathbb{R}$, la composición está definida en $T = \{x \in D : f(x) \in E\}$. Fijado $a \in T$, si f es continua en a y g en $f(a)$, restringimos la interior a T y declaramos codominio E. La restricción conserva continuidad y la prueba anterior da continuidad de la composición relativa a T. No se concluye una evaluación en $D \setminus T$. Si T es vacío, no hay centros donde comprobarla.

Para continuidad global también podemos usar $(g \circ f)^{-1}[V] = f^{-1}[g^{-1}[V]]$. Si ambas funciones son continuas en sus dominios, la primera selección produce $g^{-1}[V]$ abierto relativo en E y la segunda produce un abierto relativo en D. El criterio de §14.4 demuestra continuidad de la composición. El ambiente intermedio es E: no se necesita que esa preimagen sea abierta en toda la recta.

Ejercicios de la sección 14.5.

Ejercicio 21. Producto con un valor central nulo

Supón $f, g : D \to \mathbb{R}$ continuas en a con $f(a) = 0$. Prueba continuidad de fg usando una cota local y un único error variable.

Solución. Continuidad de g para tolerancia uno da $r > 0$ con $|g(x)| < B := |g(a)| + 1$ en la bola relativa. Dado $\varepsilon > 0$, continuidad de f da δ_f con $|f(x)| < \varepsilon/B$. En radio $\min(r, \delta_f)$, $|f(x)g(x) - f(a)g(a)| = |f(x)g(x)| < \varepsilon$. La positividad de B evita dividir por un valor central nulo. El valor central del producto es cero, así que sólo necesitamos hacer pequeño $f(x)$ mientras mantenemos $g(x)$ acotado. La continuidad de g entrega una barrera positiva B, aunque $g(a)$ también fuera cero. La continuidad de f responde a la precisión ε/B. El mínimo de radios proporciona ambos controles y la triangular de producto da el error requerido. No se divide por ningún valor central que pueda anularse.

Ejercicio 22. Cociente con dominio declarado

Prueba continuidad de $r(x) = (x^2 + 1)/(x - 2)$ en su dominio natural y explica qué se puede afirmar en 2.

Solución. El dominio es $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. En cada punto de él, ambos polinomios son continuos y el denominador central es no nulo, por lo que el teorema de cocientes da continuidad relativa. En dos no hay evaluación de la expresión, así que no preguntamos por su continuidad como función dada. Un límite o una posible extensión sería una pregunta distinta; la regla de cocientes no la autoriza cuando el denominador límite es cero.

La expresión define una función sólo donde $x - 2 \neq 0$. En cada centro de ese dominio el denominador central está definido y es no nulo, por lo que la regla de continuidad de cocientes se aplica. En dos la función dada no tiene evaluación; asignarle continuidad allí sin extenderla sería una pregunta mal formada. Investigar un límite o una extensión necesita un argumento propio y no una aplicación de la regla con denominador límite cero.

Ejercicio 23. Composición que toca el centro

Prueba directamente que $h(x) = |2x|$ es continua en cero por radios anidados, permitiendo $2x = 0$.

Solución. La exterior $g(y) = |y|$ en cero responde al desafío ε con $\eta = \varepsilon$, por el error $|y|$. La interior $f(x) = 2x$ responde al desafío η con $\delta = \eta/2$. Así $|x| < \delta$ implica $|2x| < \eta$ y $||2x|-0| < \varepsilon$. Si $x = 0$, el error es cero y ambas etapas siguen siendo válidas. **Retorno visual.** Véase C14-F04, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Diseñamos primero la escala de la exterior y luego la de la interior. El valor absoluto transforma una entrada y cercana a cero en una salida con error $|y|$; la multiplicación por dos hace el error intermedio $2|x|$. Así el radio final es $\varepsilon/2$. Si la interior alcanza el centro, la exterior lo evalúa con salida cero y cumple la misma estimación. Continuidad no pierde ese caso como un límite perforado exterior.

Ejercicio 24. Composición sólo donde existe

Toma $f(x) = x^2$ en $\mathbb{R}$ y $g(y) = 1/(y - 1)$ en $E = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Determina el dominio efectivo de composición y prueba continuidad allí.

Solución. $T = \{x : x^2 \neq 1\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. La interior es continua en cada real y la exterior en cada punto de E por recíproco de una afín no nula. En cada $a \in T$, $f(a) \in E$, así que el teorema de composición da continuidad relativa a T. La expresión resultante es $1/(x^2 - 1)$, sin evaluación en los dos puntos excluidos.

Las entradas uno y menos uno producen la salida intermedia prohibida uno. Excluirlas da el dominio efectivo T. Allí la función interior se restringe y su codominio puede declararse E para componer de manera compatible. La exterior es continua en sus entradas admitidas, y la regla de composición prueba continuidad relativa a T. La fórmula final no define evaluaciones en los puntos retirados.

Ejercicio 25. Composición por regiones de salida

Demuestra continuidad global de la composición de $f : D \to E$ y $g : E \to \mathbb{R}$ continuas usando sólo el criterio de preimágenes. Justifica cada ambiente.

Solución. Para V abierto absoluto, $g^{-1}[V]$ es abierto relativo a E. El criterio para $f : D \to E$ da que $f^{-1}[g^{-1}[V]]$ es abierto relativo a D. Un punto x pertenece a ese conjunto si y sólo si $g(f(x)) \in V$, así que coincide con $(g \circ f)^{-1}[V]$. El criterio de abiertos concluye continuidad en D. Ni inyectividad ni elección numerable son necesarias.

El conjunto seleccionado en la etapa intermedia es abierto relativo a E, no necesariamente abierto en toda la recta. El criterio de continuidad de f con codominio relativo permite seleccionarlo y obtener un abierto relativo en D. La identidad de preimágenes identifica esa selección con la de la composición. La prueba conserva todos los ambientes y no utiliza imágenes de abiertos, cuya apertura no estaría garantizada.

14.6. Lo que la continuidad no promete sobre imágenes e inversas

Las preimágenes describen qué entradas satisfacen una condición de salida. Las imágenes reúnen las salidas de un conjunto de entradas, y su apertura o su cierre plantean una cuestión diferente. La distinción se vuelve decisiva al intentar recuperar las entradas mediante una función inversa. El cuadrado $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continuo y envía el abierto $\mathbb{R}$ a $[0, \infty)$. La imagen es exacta: todo cuadrado es no negativo y cada $y \geq 0$ se alcanza en su raíz no negativa, cuya existencia y unicidad se demostraron en §10.7. Ninguna bola real alrededor de cero cabe en esa imagen, pues contiene negativos. Así una función continua puede enviar un abierto a un conjunto que no es abierto, sin contradecir el criterio de preimágenes.

La función $r(x) = 1/(1 + x^2)$ es continua en el dominio cerrado $\mathbb{R}$ y tiene imagen $(0, 1]$. Sus salidas están en ese intervalo; para cada $0 < y \leq 1$, la cantidad $1/y - 1$ es no negativa y $x = \sqrt{1/y - 1}$ produce $r(x) = y$. Esto demuestra la igualdad de imagen. Cero no se alcanza, pero cada bola de radio $\rho > 0$ centrada en cero contiene la salida $\min(\rho/2, 1/2) > 0$. La imagen no es cerrada. La conclusión posterior sobre imágenes de compactos necesitará esa hipótesis adicional.

Sea $D = [0, 1) \cup [2, 3]$ y $f : D \to [0, 2]$, con $f(x) = x$ en la primera pieza y $f(x) = x - 1$ en la segunda. Cada regla es inyectiva y sus imágenes $[0, 1)$ y $[1, 2]$ son disjuntas, por lo que tampoco hay colisiones entre piezas. Como esas imágenes cubren $[0, 2]$, toda salida declarada tiene una entrada única: f es biyectiva.

También es continua en todo D. La distancia entre una entrada de la primera pieza y otra de la segunda es mayor que uno, así que la ventana de radio $\delta = \min(1/2, \varepsilon)$ alrededor de cualquier $a \in D$ sólo encuentra su propia pieza. Dentro de ella la regla es afín de pendiente uno y $|f(x) - f(a)| = |x - a| < \varepsilon$. La separación del dominio permite mantener ese control incluso en los extremos incluidos.

La inversa $h : [0, 2] \to D$ vale $h(y) = y$ para $y < 1$ y $h(y) = y + 1$ para $y \geq 1$; en particular $h(1) = 2$. Recibamos cualquier $\delta > 0$ y pongamos $t = \min(\delta/2, 1/2)$, $y = 1 - t$. Tenemos $y \in [0, 2]$ y $|y - 1| = t < \delta$, pero la primera rama da $|h(y) - h(1)| = |1 - t - 2| = 1 + t > 1$. La tolerancia fija $1/2$ falla en toda ventana, de modo que la inversa no es continua en uno.

La pieza $[2, 3]$ es abierta relativa a D, por ejemplo porque es $D \cap (3/2, 4)$, mientras su imagen $[1, 2]$ no es abierta relativa a $[0, 2]$. Para cualquier radio alrededor de uno hay entradas del codominio ligeramente menores que uno y fuera de $[1, 2]$. Como $h^{-1}[[2, 3]] = [1, 2]$, el criterio de preimágenes identifica el mismo fallo de continuidad inversa.

Llamamos **homeomorfismo** entre subconjuntos reales a una biyección continua cuya inversa también es continua. Esta definición describe transporte reversible de proximidad; no es una nueva conclusión sobre cualquier biyección. Una biyección $f : D \to E$ es una aplicación abierta si $f[U]$ es abierto relativo a E para todo U abierto relativo a D. Escribamos $h = f^{-1}$. Para $U \subseteq D$, una salida $y \in E$ pertenece a $h^{-1}[U]$ exactamente cuando su entrada única $h(y)$ pertenece a U, es decir, cuando $y \in f[U]$. Así $h^{-1}[U] = f[U]$, o equivalentemente $(f^{-1})^{-1}[U] = f[U]$. El criterio de §14.4 dice entonces que h es continua si y sólo si f es abierta. En particular, una biyección continua es homeomorfismo exactamente cuando además es abierta. La equivalencia para la inversa sólo ha usado biyectividad; los dos símbolos inversos anidados expresan operaciones distintas.

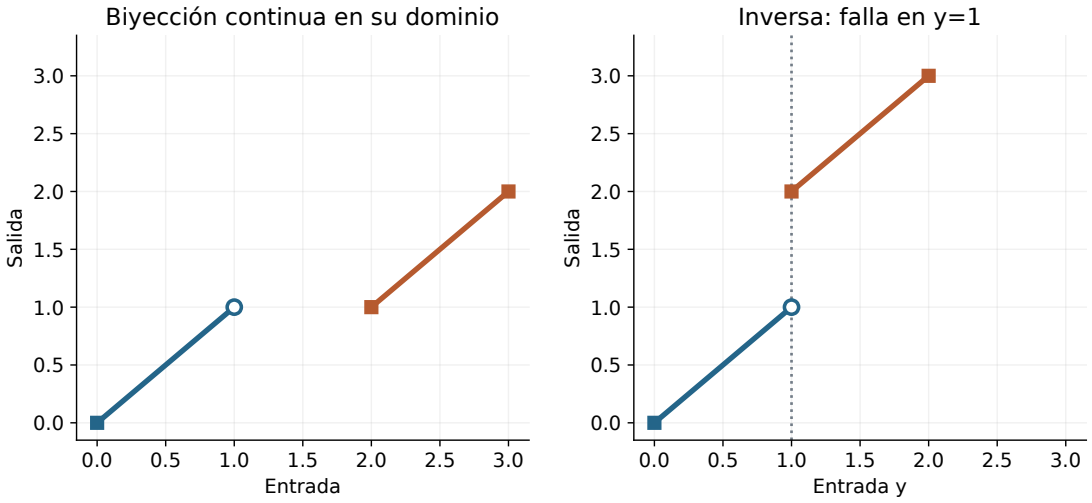


Figura 14.5. C14-F05. La biyección envía [0,1) y [2,3] a [0,1) y [1,2]. En su dominio separado es continua. Su inversa tiene valor 2 en uno, pero entradas que llegan a uno desde abajo producen salidas cercanas a uno. La inversa existe y falla en continuidad.

Ejercicios de la sección 14.6.

Ejercicio 26. Imagen cerrada que pierde la cerradura

Prueba que la función $r(x) = 1/(1+x^2)$ es continua en $\mathbb{R}$ y tiene imagen exactamente $(0, 1]$. Refuta cerradura de la imagen mediante un punto adherente.

Solución. El denominador es un polinomio continuo y siempre positivo, de modo que el recíproco es continuo. Sus valores satisfacen $0 < r(x) \leq 1$. Para cada $y \in (0, 1]$, la entrada $\sqrt{1/y - 1}$ produce y, luego la imagen es exactamente ese intervalo. Cero está fuera y toda bola suya contiene un punto del intervalo, por ejemplo $\min(\varepsilon/2, 1/2) > 0$ si el radio es ε. La imagen no es cerrada aunque el dominio real lo sea.

Para una salida $0 < y \leq 1$, la cantidad $1/y - 1$ es no negativa y su raíz proporciona una entrada real con la salida deseada. Esto prueba la inclusión que faltaba para la imagen exacta. Cero no se alcanza porque el denominador es positivo y finito en cada entrada. Sin embargo, cualquier bola alrededor de cero contiene alguna salida positiva del intervalo. Tener un punto adherente ausente refuta cerradura de la imagen.

Ejercicio 27. Auditar la biyección y su inversa

Verifica la bijectividad y continuidad de la función por piezas de §14.6. Refuta directamente la continuidad de su inversa en uno.

Solución. Las piezas $[0, 1)$ y $[2, 3]$ se envían afínmente a $[0, 1)$ y $[1, 2]$, disjuntas y con unión $[0, 2]$. Cada regla es inyectiva, y las imágenes disjuntas prueban inyectividad global; la unión prueba sobreyectividad. Un radio $\min(1/2, \varepsilon)$ evita la otra pieza y controla error $|x - a|$. La inversa vale y por debajo de uno y $y + 1$ desde uno. Para cada radio, $y = 1 - \min(\delta/2, 1/2)$ tiene distancia de entrada menor que δ pero distancia de salida a $h(1) = 2$ mayor que uno.

Retorno visual. Véase C14-F05, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba. La separación entre las piezas del dominio permite controlar cada centro usando sólo su regla afín local. En las salidas, las imágenes se unen sin esa separación: valores inferiores a uno pueden acercarse a uno desde la primera pieza, aunque uno proceda de la entrada dos de la segunda. La inversa debe saltar entre esas piezas. El infractor explícito demuestra que ninguna reducción del radio exterior elimina esta separación de entradas.

Ejercicio 28. La identidad de un transporte reversible

Prueba que una biyección $f : D \to E$ tiene inversa continua si y sólo si envía cada abierto relativo de D a un abierto relativo de E.

Solución. Escriba $h = f^{-1} : E \to D$. Para $U \subseteq D$, $y \in h^{-1}[U]$ equivale a que la entrada única $h(y)$ esté en U, lo que equivale a $y \in f[U]$. Por tanto $h^{-1}[U] = f[U]$. El criterio de continuidad de h con abiertos relativos de su codominio D es exactamente la propiedad de imágenes enunciada. Ambas implicaciones se siguen de esa igualdad y del criterio, sin asumir continuidad de f.

Una salida pertenece a $h^{-1}[U]$ cuando su entrada recuperada está en U. Como f es biyectiva, eso equivale a que la salida haya sido producida desde U. Por tanto tomar preimagen bajo la inversa es tomar imagen bajo la función original. El criterio de abiertos convierte entonces continuidad inversa en apertura de f. La continuidad de f no se necesita para probar esta equivalencia específica.

Ejercicio 29. Una afín es un homeomorfismo

Para $m \neq 0$, prueba que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx + c$, es un homeomorfismo con certificados en ambas direcciones.

Solución. Es inyectiva porque $m(x - z) = 0$ implica $x = z$, y sobreyectiva porque para cada y la entrada $(y - c)/m$ produce y. Su inversa es esa regla afín. El error directo es $|m||x - a|$, con radio $\varepsilon/|m|$. El inverso es $|y - b|/|m|$, con radio $|m|\varepsilon$. Las pruebas funcionan en cada centro y legitiman el transporte reversible. La pendiente no nula permite despejar cada entrada de manera única y construir la inversa afín. La escala directa es $|m|$ y la inversa es su recíproco. Cada dirección tiene por ello su propio radio para la misma precisión: $\varepsilon/|m|$ al avanzar y $|m|\varepsilon$ al volver. Las constantes de traslación se cancelan al restar valores. Estas pruebas cuantitativas verifican todos los requisitos del homeomorfismo.

Ejercicio 30. Controles inversos sin intervalos compactos

Sea $f : D \to E$ una biyección continua que es abierta. Prueba que la imagen por f de cualquier cerrado relativo a D es cerrada relativa a E. No uses compacidad.

Solución. Si $F \subseteq D$ es cerrado relativo, $D \setminus F$ es abierto relativo. La aplicación abierta da $f[D \setminus F]$ abierto relativo a E. Por bijectividad, $f[D \setminus F] = E \setminus f[F]$: una salida tiene única entrada y ésta está fuera de F exactamente cuando la salida no está en $f[F]$. Por tanto $f[F]$ es cerrado relativo. La bijectividad es decisiva para la identidad de complementos de imágenes.

La apertura de la aplicación controla el complemento del cerrado relativo. La identidad de complementos de imágenes requiere biyectividad: cada salida debe tener una entrada y no puede tener entradas en ambas partes. De ahí que la imagen del complemento sea exactamente el complemento de la imagen. Como ese complemento es abierto relativo a E, la imagen del cerrado es cerrada allí. El argumento usa complementos y apertura, sin recurrir a compacidad.

14.7. Reunir definiciones locales y piezas cerradas

Para construir una función a partir de reglas en regiones, primero hay que comprobar que asignan el mismo valor en cada intersección. Ese acuerdo define una función única, pero aún debemos controlar entradas que se acercan a un centro desde otra región. Las propiedades de las piezas determinarán cómo reunir sus estimaciones. Si $D = \bigcup_{i \in I} U_i$, con cada U_i abierto relativo a D, y $f|_{U_i}$ es continua en cada U_i, entonces f es continua en D.

Fijados $a \in D$ y $\varepsilon > 0$, alguna pieza U_i contiene a. Su apertura relativa proporciona $r > 0$ con $D \cap B(a, r) \subseteq U_i$, y la continuidad de la restricción proporciona un radio $\delta_i > 0$ para esa tolerancia. Toda entrada de D dentro de $\min(r, \delta_i)$ permanece en la pieza y satisface su estimación. Esto prueba continuidad en el centro arbitrario. Aunque la cobertura sea infinita, sólo usamos una pieza que contiene el punto fijado y reunimos dos radios.

Teorema. Sea $D = F_1 \cup \cdots \cup F_m$, con $m \geq 1$ y F_i cerrados relativos a D. Si $f : D \to \mathbb{R}$ tiene restricción continua en cada F_i, entonces es continua en D. Equivalentemente, podemos partir de funciones continuas en las piezas que coincidan en todas las intersecciones y pegarlas. Una pieza cerrada que contiene a puede llegar hasta él por un solo lado y no contener ninguna bola relativa alrededor de a. La prueba tendrá que controlar las entradas de todas las piezas que contienen el centro y excluir localmente las piezas que no lo contienen.

Fijemos $a \in D$ y $\varepsilon > 0$. Si $a \in F_i$, la continuidad de la restricción entrega $\delta_i > 0$ que controla sus entradas cercanas. Si $a \notin F_i$, el complemento $D \setminus F_i$ es abierto relativo y contiene a, por lo que hay $r_i > 0$ con $D \cap B(a, r_i) \subseteq D \setminus F_i$. Cada pieza aporta así un radio de control o de exclusión. Como sólo hay finitas piezas, el mínimo de todos esos radios es positivo. Cualquier entrada del dominio dentro de él pertenece a alguna F_j por la cobertura. Las piezas ausentes del centro quedaron excluidas; por tanto pertenece a una pieza que contiene a y su error es menor que ε.

El cierre permite excluir una pieza cuando su continuidad no está centrada en a; la finitud asegura que las exclusiones y los controles tengan un radio positivo común. Si partimos de funciones f_i en las piezas, su acuerdo en intersecciones hace único el valor pegado y garantiza $f|_{F_i} = f_i$. La prueba anterior puede entonces aplicarse a esas restricciones, sin escoger simultáneamente una pieza para cada punto.

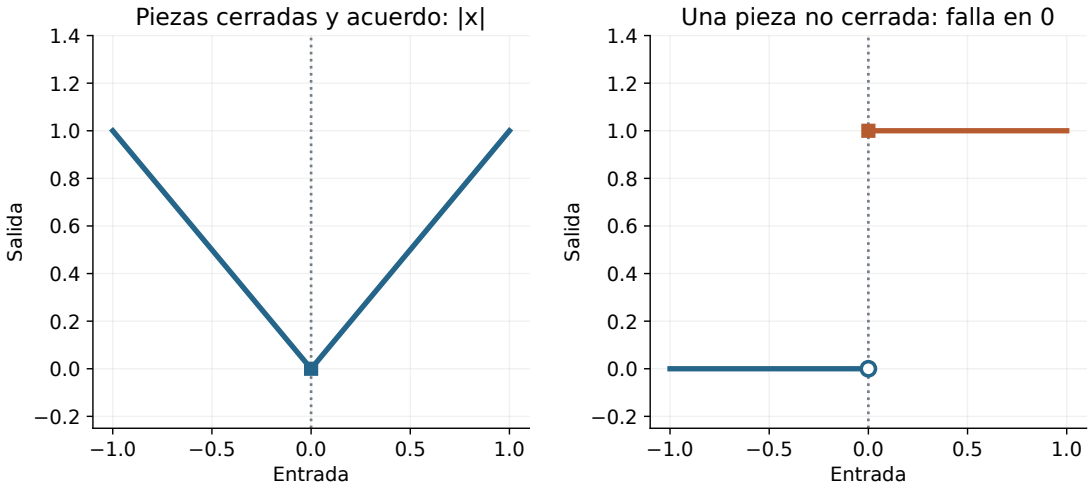


Figura 14.6. C14-F06. Pegado de dos reglas afines sobre semirrectas cerradas con valor común cero produce |x| continuo. En el segundo gráfico, las reglas constantes viven en (−∞,0) y [0,∞): el acuerdo en la intersección vacía no evita la falla en cero. La primera pieza no es cerrada.

El valor absoluto se obtiene pegando $-x$ en $(-\infty, 0]$ y x en $[0, \infty)$. Las dos piezas son cerradas, cubren la recta y sus reglas afines continuas dan el mismo valor cero en la intersección. El teorema demuestra continuidad de $|x|$. También se aplica cuando una pieza contiene puntos aislados: la continuidad de su restricción sigue teniendo sentido en ellos. Si usamos $D_1 = (-\infty, 0)$ y $D_2 = [0, \infty)$, con reglas constantes cero y uno, el acuerdo en la intersección vacía asegura que la función está bien definida y ambas restricciones son continuas. Sin embargo, su valor central en cero es uno y cada entrada $-\delta/2$ tiene salida cero dentro de la ventana de radio $\delta > 0$. La tolerancia $1/2$ refuta continuidad. La primera pieza no es cerrada: llega arbitrariamente cerca de cero sin contenerlo y no puede excluirse mediante ningún radio.

La continuidad también protege un signo no nulo. Si $f(a) > 0$, la tolerancia $f(a)/2$ da $f(x) > f(a)/2 > 0$ en una bola relativa. Si $f(a) < 0$, usamos $|f(a)|/2$ y obtenemos $f(x) < f(a)/2 < 0$. Para una función continua en todo D, estas estimaciones concuerdan con la apertura relativa de $f^{-1}[(0, \infty)]$ y de $f^{-1}[(-\infty, 0)]$. La estabilidad cerca de un punto

no prueba que existan ceros entre salidas de signos diferentes; esa cuestión necesitará en C15 un argumento sobre la estructura del dominio.

Ejercicios de la sección 14.7.

Ejercicio 31. Pegar un valor absoluto desplazado

Prueba continuidad de $f(x) = 2 - x$ para $x \leq 2$ y $f(x) = x - 2$ para $x \geq 2$ mediante el teorema de pegado finito.

Solución. Las piezas $(-\infty, 2]$ y $[2, \infty)$ son cerradas, cubren la recta y las reglas afines son continuas en ellas. Ambas dan cero en la intersección $\{2\}$, por lo que la función está bien definida. El pegado finito prueba continuidad global; coincide con $|x-2|$, pero no es necesario usar esa identidad para aplicar el mecanismo. **Retorno visual.** Véase C14-F06, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Las dos reglas coinciden en el único punto donde ambas se aplican, lo que asegura una asignación única. Cada una es afín continua en su semieje relativo, y las dos piezas son cerradas y finitas. El teorema de pegado proporciona la continuidad del conjunto. La identidad con un valor absoluto puede confirmar la fórmula, pero la prueba pedida muestra cómo unir controles de piezas que llegan a la misma frontera.

Ejercicio 32. Localizar con una cobertura abierta

Demuestra que si una función es continua en la restricción a cada pieza de una cobertura abierta relativa de D, entonces es continua en D, aunque haya infinitas piezas.

Solución. Fijamos $a \in D$ y $\varepsilon > 0$. Alguna pieza abierta relativa U contiene a. Hay $r > 0$ con $D \cap B(a, r) \subseteq U$, y la continuidad de la restricción da δ_U. El mínimo de ambos radios controla toda entrada del dominio: primero la coloca en U y después limita el error. La prueba sólo necesita una pieza para el punto fijado, no un mínimo de una familia infinita.

Aunque haya infinitas piezas, para un centro fijado basta una pieza que lo contenga. Su apertura relativa garantiza que todas las entradas suficientemente próximas del dominio permanezcan dentro de ella. Después usamos la continuidad de su restricción y tomamos el mínimo de esos dos radios. Nunca reunimos radios de todas las piezas simultáneamente. Esto explica por qué no hace falta finitud en una cobertura abierta.

Ejercicio 33. El acuerdo sin cierre no basta

Construye una función pegada a partir de dos restricciones continuas que coincidan en su intersección y que sea discontinua. Identifica la hipótesis ausente.

Solución. Use piezas $D_1 = (-\infty, 0)$ y $D_2 = [0, \infty)$, con reglas constantes cero y uno. Son continuas en sus respectivos dominios y coinciden en la intersección vacía. La función global tiene valor uno en cero, pero $-\delta/2$ produce cero en cada radio; tolerancia $1/2$ refuta continuidad. D_1 no es cerrado relativo al dominio real, por lo que no puede excluirse cerca de un centro que no le pertenece.

El acuerdo en una intersección vacía se cumple automáticamente y asegura que no haya dos reglas incompatibles para una misma entrada. Pero no controla aproximaciones desde la pieza negativa al centro cero, que pertenece sólo a la otra pieza. Los testigos negativos mantienen error uno en cualquier ventana. La hipótesis ausente es la cerradura relativa necesaria para excluir localmente una pieza que no contiene al centro en el pegado finito.

Ejercicio 34. Una cobertura cerrada infinita falla

En $D = \{0\} \cup \{1/n : n \geq 1\}$, define $f(0) = 0$, $f(1/n) = 1$. Prueba que las piezas singleton forman una cobertura cerrada relativa con restricciones continuas, pero la función completa no es continua en cero.

Solución. Cada singleton es cerrado en la recta: desde cualquier punto distinto, la mitad de la distancia evita el singleton. Por intersección también es cerrado relativo a D. Las piezas cubren D y cada restricción es constante, por tanto continua. En cero, para cualquier radio $\delta > 0$, arquimedianidad da un entero positivo $n > 1/\delta$; entonces $1/n < \delta$ y el error es uno.

La tolerancia $1/2$ refuta continuidad. La cobertura es infinita; los radios que excluyen cada pieza distinta de cero no tienen una escala común positiva.

Cada singleton ofrece una prueba trivial de continuidad de su restricción, porque sólo contiene una entrada. Sin embargo, las otras piezas se acercan arbitrariamente a la pieza cero y todas sus salidas valen uno. No existe un radio que las excluya simultáneamente, aunque cada una individualmente sea cerrada. El ejemplo localiza el papel de la finitud: el mínimo de infinitos radios de exclusión puede no ser positivo.

Ejercicio 35. Conservar un signo cerca del centro

Supón $f : D \to \mathbb{R}$ continua en a y $f(a) < 0$. Prueba que existe una ventana relativa en que todos sus valores son negativos. Formula también la conclusión topológica global para $f < 0$.

Solución. Use tolerancia $|f(a)|/2 = -f(a)/2 > 0$. En el radio de continuidad, $f(x) < f(a) + |f(a)|/2 = f(a)/2 < 0$. Si f es continua en todo D, el conjunto de valores negativos de entrada es $f^{-1}[(-\infty, 0)]$ y es abierto relativo por el criterio. No se deduce existencia de un cero en otro lugar: sólo apertura y estabilidad local.

La mitad de la magnitud del valor negativo central es una tolerancia positiva. Controlar el error por ella mantiene la salida por debajo de la mitad de ese valor, que sigue siendo negativa. Si la función es continua en todo el dominio, las entradas de salida negativa forman la preimagen de un abierto y son abiertas relativas. La afirmación global sobre ese conjunto requiere esa continuidad global, además del dato puntual inicial.

14.8. Certificados de proximidad y límites del control lineal

Una estimación lineal del error ofrece una forma directa de producir radios. Es útil reconocer qué garantiza esa estimación y qué puede seguir siendo continuo cuando no dispone de ella. La raíz en el origen permitirá separar las dos propiedades sin utilizar derivadas. Supongamos $a \in D$ y $|f(x) - f(a)| \le K|x - a|$ para $x \in D \cap B(a, r)$, con $r > 0$ y $K \ge 0$. Si $K > 0$, tomamos $\delta = \min(r, \varepsilon/K) > 0$. La primera restricción mantiene válida la cota y la segunda da $|f(x) - f(a)| \le K|x - a| < K\delta \le \varepsilon$. Si $K = 0$, la cota fuerza $f(x) = f(a)$ en esa ventana y sirve $\delta = r$ para cualquier tolerancia. Ambos argumentos incluyen el centro y no necesitan acumulación.

Para el cuadrado, $|x - a| < 1$ implica $|x + a| < 1 + 2|a|$, y la factorización da $|x^2 - a^2| \le (1 + 2|a|)|x - a|$. La cota se escribe no estricta para incluir $x = a$, donde ambos miembros son cero. Así $\delta = \min(1, \varepsilon/(1 + 2|a|))$ demuestra continuidad en cada real a. La dependencia de esta elección respecto del centro procede de la barrera para el factor variable; escribir el mismo esquema en todos los centros no equivale a haber dado un radio común a toda la recta.

Sea $s : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $s(x) = \sqrt{x}$. La raíz no negativa está construida en §10.7; podemos usar sus propiedades algebraicas sin suponer todavía su continuidad ni deducirla de un teorema sobre inversas. Para $x, a \ge 0$, pongamos $u = \sqrt{x}$ y $v = \sqrt{a}$. Si $u \ge v$, los factores son no negativos y $u - v \le u + v$, de modo que

$(u - v)^2 \le (u - v)(u + v) = x - a = |x - a|$. Si $u < v$, intercambiamos los dos valores y obtenemos también $(u - v)^2 \le |x - a|$. Tomar raíces no negativas da $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| \le \sqrt{|x - a|}$. Para cualquier $\varepsilon > 0$, el radio $\delta = \varepsilon^2$ convierte $|x - a| < \delta$ en error menor que ε. La misma elección funciona en todos los centros $a \ge 0$, incluido cero; allí sólo se cuantifica sobre entradas no negativas y el centro produce error cero.

Pese a esa continuidad, no existen $K \ge 0$ y $r > 0$ con $\sqrt{x} \le Kx$ para todas las entradas $0 \le x < r$. Dados K y r, elegimos $x = \min(r/2, 1/[4(K + 1)^2]) > 0$. Está dentro de la ventana y satisface $1/\sqrt{x} \ge 2(K + 1) > K$. Multiplicar por $x > 0$ da $\sqrt{x} > Kx$, contra la cota propuesta. El radio cuadrático en la tolerancia demuestra continuidad, mientras este infractor descarta toda barrera lineal local de ese tipo.

Sea $f : D \to E$ biyectiva y $a \in D$. Si existe $c_a > 0$ tal que

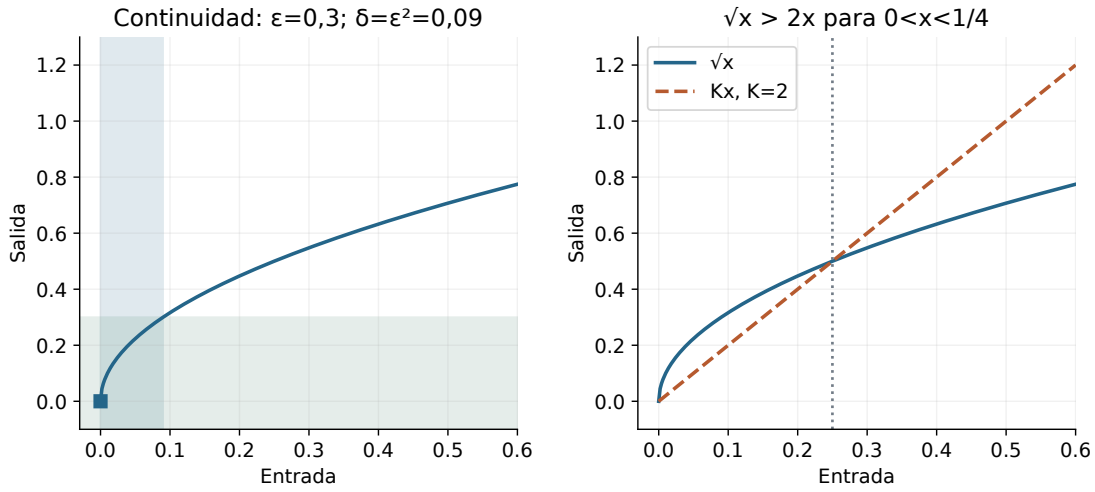


Figura 14.7. C14-F07. La raíz responde al desafío ε con $\delta{=}\varepsilon^2$ en el origen. Es continua aunque no admita un control local $\sqrt{x}{\le}Kx$ con K finito. La comparación con K=2 muestra una instancia; la prueba construye una infracción para cualquier K y radio. Sólo se consideran entradas no negativas.

$$|f(x) - f(a)| \geq c_a|x - a| \qquad \text{para todo } x \in D,$$

entonces f^{-1} es continua en $b = f(a)$. Dado $\varepsilon > 0$, elegimos $\eta = c_a\varepsilon > 0$. Para cualquier $y \in E$ con $|y - b| < \eta$, la biyectividad proporciona la entrada única $x = f^{-1}(y)$. La cota se aplica a esa entrada y da $|x - a| \leq |f(x) - f(a)|/c_a = |y - b|/c_a < \varepsilon$. Éste es el control de continuidad de la inversa en b.

La cota se exige para todo $x \in D$ porque, al recibir una salida y cercana a $f(a)$, todavía no sabemos dónde está su entrada inversa. Una cota que sólo valiera cerca de a no podría aplicarse antes de demostrar que esa entrada ya es cercana. En la biyección de §14.6, para $a = 2$ y $|x{-}2| < 1/2$ vale $|f(x){-}f(2)| = |x{-}2|$, pero la primera pieza aporta entradas lejanas de dos cuyas salidas se acercan a $f(2) = 1$. La inversa falla justamente allí. La cuantificación global impide ese comportamiento.

Si una biyección satisface, para constantes positivas c, C, las cotas $c|x{-}z| \leq |f(x){-}f(z)| \leq C|x - z|$ para todos los $x, z \in D$, la superior prueba continuidad directa con radio ε/C y la inferior prueba continuidad inversa con radio $c\varepsilon$. La biyectividad autoriza cada entrada recuperada y el alcance global permite aplicarle la estimación. Es una condición suficiente para disponer de los dos controles; la raíz en el origen muestra que continuidad no requiere siempre una cota lineal.

El ejemplo de la inversa obliga a mirar también las entradas que permanecen lejos del centro: sus salidas pueden acercarse a él. En cambio, para continuidad directa basta una ventana local del dominio. Esta diferencia entre los dos sentidos del transporte explica por qué una inversa algebraicamente existente necesita su propia prueba de continuidad.

Ejercicios de la sección 14.8.

Ejercicio 36. Un certificado directo del cuadrado

Prueba continuidad de x^2 en cada centro con una cota local lineal, y trata $x = a$ sin usar una desigualdad estricta inválida.

Solución. Para $|x - a| < 1$, $|x + a| < 1 + 2|a| =: K$. Por tanto $|x^2 - a^2| \leq K|x - a|$, donde la desigualdad no estricta incluye $x = a$. El radio $\delta = \min(1, \varepsilon/K)$ es positivo porque $K \geq 1$. Si $|x - a| < \delta$, el error es $\leq K|x - a| < K\delta \leq \varepsilon$. No se escribió $0 < 0$ en el caso central. Cuando $x = a$, el factor $|x - a|$ es cero. Por eso la cota del producto debe escribirse no estricta antes de usar la distancia estricta de entrada: $|x^2 - a^2| \leq K|x - a| < \varepsilon$. Así se

incluye correctamente el centro. Para entradas diferentes, la factorización y el radio auxiliar acotan el factor variable. El mismo certificado demuestra continuidad para cualquier real a sin excluir evaluaciones centrales.

Ejercicio 37. La raíz en un extremo del dominio

Prueba continuidad de $\sqrt{x}$ en cero sobre $[0,\infty)$ y justifica por qué no se consideran entradas negativas.

Solución. El valor central es cero. Dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta = \varepsilon^2$. Para $x \in [0,\infty)$ con $|x| < \delta$, no negatividad y orden de raíces dan $|\sqrt{x} - 0| = \sqrt{x} < \varepsilon$. Los negativos no pertenecen al dominio real de la función y no son entradas del cuantificador universal. La prueba incluye cero, cuyo error es cero. **Retorno visual.** Véase C14-F07, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

La función raíz real sólo está definida para entradas no negativas. Su continuidad en cero se prueba dentro de ese dominio, sin extenderla a negativos. El radio cuadrático convierte la condición $x < \varepsilon^2$ en $\sqrt{x} < \varepsilon$. El punto central está permitido y entrega cero. Ser un extremo del dominio no obstaculiza una prueba relativa con todas las entradas que la función realmente admite.

Ejercicio 38. Continuidad sin barrera lineal

Prueba que la raíz en cero no satisface $\sqrt{x} \le Kx$ en ninguna ventana positiva para ninguna constante finita $K \ge 0$, pese a ser continua.

Solución. Dados $K \ge 0$ y $r > 0$, sea $x = \min(r/2, 1/[4(K+1)^2]) > 0$. Entonces $x < r$ y $1/\sqrt{x} \ge 2(K+1) > K$. Multiplicar por $x > 0$ da $\sqrt{x} > Kx$, infracción de la cota. Continuidad ya tiene certificado ε^2, que no necesita esa barrera lineal. La ausencia de un certificado suficiente no significa ausencia de continuidad. La construcción del infractor depende de la barrera K y del radio propuesto. El mínimo asegura una entrada positiva dentro de la ventana y una raíz suficientemente pequeña para que su recíproco supere K. La desigualdad resultante contradice la cota lineal. Esto no refuta continuidad, cuyo radio ya existe y depende cuadráticamente de la tolerancia. Refuta sólo una forma particular de certificado más fuerte.

Ejercicio 39. Invertir el cuadrado lejos de cero

Para $m > 0$, prueba que $q : [m,\infty) \to [m^2,\infty)$, $q(x) = x^2$, es biyectiva y que su inversa tiene un certificado lineal de continuidad.

Solución. Para $x, z \ge m$, $|x^2 - z^2| = (x+z)|x-z| \ge 2m|x-z|$. En particular igualdad de cuadrados implica igualdad de entradas. Cada $y \ge m^2$ tiene entrada $\sqrt{y} \ge m$, lo que prueba sobreyectividad. La inversa es la raíz restringida. Para un centro $b = q(a)$ y un desafío ε, $|y-b| < 2m\varepsilon$ implica $|q^{-1}(y)-a| \le |y-b|/(2m) < \varepsilon$. El alcance global en x, z evita entradas lejanas con salidas próximas.

En el semieje desde $m > 0$, la suma de dos entradas es al menos $2m$. La factorización da así una cota inferior válida para cualquier par, además de inyectividad. Las raíces de las salidas del codominio están en el dominio y prueban sobreyectividad. La misma cota global permite que una salida cercana recupere una entrada cercana sin asumirlo previamente. El radio $2m\varepsilon$ proporciona el control inverso lineal.

Ejercicio 40. El control inferior local no autoriza la inversa

Construye una biyección continua y un centro no aislado a donde valga localmente $|f(x)-f(a)| \ge |x-a|$, pero cuya inversa no sea continua en $f(a)$. Explica el defecto lógico de usar esa cota local para probar continuidad inversa.

Solución. Use $D = [0,1) \cup [2,3]$, $f(x) = x$ en la primera pieza y $f(x) = x-1$ en la segunda, con $a = 2$. El centro no es aislado, pues $2+t \in D$ para $0 < t < 1$ arbitrariamente pequeño. En radio $1/2$, todas las entradas del dominio son de la segunda pieza y $|f(x)-f(2)| = |x-2|$, así que vale la cota inferior. Pero la inversa en $f(2) = 1$ toma valor dos, mientras $y_n = 1-1/(n+2)$ tiende a uno y su inversa es y_n, que tiende a uno. No puede converger también a dos. La

cota local exige antes saber que la entrada inversa está cerca de dos; precisamente eso era lo que se quería probar. Las salidas cercanas que proceden de la otra pieza quedan fuera de su alcance.

Retorno visual. Véase C14-F05, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba. La cota local sólo habla de entradas de la segunda pieza próximas a dos. No controla las entradas de la primera pieza, que están lejos de dos pero producen salidas que se acercan a uno. Aplicarla a una entrada inversa exigiría demostrar antes que esa entrada ya está en la ventana local, que es precisamente la conclusión buscada. La ruta de salidas dada exhibe este fallo circular y refuta continuidad inversa manteniendo la biyección continua hacia delante.

Capítulo 15

Conexidad: por qué un intervalo no se rompe

Una función continua en un intervalo que toma un valor negativo y otro positivo alcanza también el valor cero entre ambos argumentos. La continuidad sólo ofrece controles en torno a cada punto, pero esta conclusión afirma la existencia de una entrada que todavía no conocemos. El paso depende de una propiedad del dominio: un intervalo contiene todos los puntos entre dos de sus miembros y no puede repartirse en dos regiones abiertas relativas, disjuntas y no vacías.

La completitud de C00 permitirá demostrar esa imposibilidad mediante un supremo. Con los abiertos relativos de C14 podremos después trasladar una supuesta separación de las salidas hacia las entradas y deducir el valor intermedio. La bisección añadirá encierros y distancias al cero; el orden permitirá estudiar inversas y componentes. Trabajamos con lógica clásica y las herramientas de C04, C06 y C12, sin presuponer compacidad ni derivadas. Una recurrencia determinada por comparación de valores reales no implica por sí sola que esas comparaciones sean computables.

15.1. Qué tendría que hacer una separación

En $[-1,1]$ podemos asignar un color a $[-1,0)$ y otro a $[0,1]$. Cada punto recibe un color y aparecen ambos, pero cero tiene puntos del otro color arbitrariamente cerca dentro del dominio. En cambio, en $[-2,-1]\cup[1,2]$ cada segmento dispone de vecindades relativas que no encuentran el otro. La definición de separación recoge esta protección local de las dos partes.

Definición. Una separación de $E \subseteq \mathbb{R}$ es un par $A, B \subseteq E$ que satisface simultáneamente

$$A \neq \emptyset, \quad B \neq \emptyset, \quad A \cap B = \emptyset, \quad E = A \cup B,$$

con A y B abiertos relativos a E. Diremos que E es **conexo** cuando no admite ninguna separación. Según C14, A es abierto relativo a E si $A = E \cap U$ para algún abierto real U; equivalentemente, para cada $a \in A$ existe $r > 0$ con $E \cap (a-r, a+r) \subseteq A$. El radio protege sólo entradas que pertenecen a E. En $E = [-2,-1]\cup[1,2]$, las partes $A = [-2,-1] = E \cap (-\infty, 0)$ y $B = [1,2] = E \cap (0,\infty)$ son abiertas relativas, aunque ninguno de los segmentos sea abierto en la recta. Son no vacías, disjuntas y cubren E, de modo que forman una separación. Para la partición $[-1,0)$ y $[0,1]$ de $[-1,1]$, el problema está en la apertura de la segunda parte en cero: dado cualquier $r > 0$, el punto $-\min(r/2, 1/2)$ pertenece al dominio, dista menos que r de cero y queda fuera de $[0,1]$. Ninguna bola relativa alrededor de cero cabe en esa parte.

R1. Criterio de una sola parte. E es conexo si y sólo si sus únicos subconjuntos simultáneamente abiertos y cerrados relativos son $\emptyset$ y E. Si $A \subseteq E$ es abierto y cerrado relativo, su complemento $B = E \setminus A$ es abierto relativo. Cuando A es no vacío y propio, también B es no vacío, y las identidades de complementos dan disjunción y cobertura. Sería una separación, imposible en un conexo. Recíprocamente, si existiera una separación A, B, la disjunción y cobertura obligarían a $B = E \setminus A$. La apertura de B haría cerrado relativo a A, que además es abierto relativo, no vacío y propio. Esto contradice el criterio y prueba la otra implicación.

El vacío es conexo porque no contiene ninguna parte no vacía. En un singleton, dos partes no vacías tendrían que contener su única entrada y no podrían ser disjuntas; equivalentemente, sus únicos subconjuntos son él mismo y el vacío. Estas pruebas no

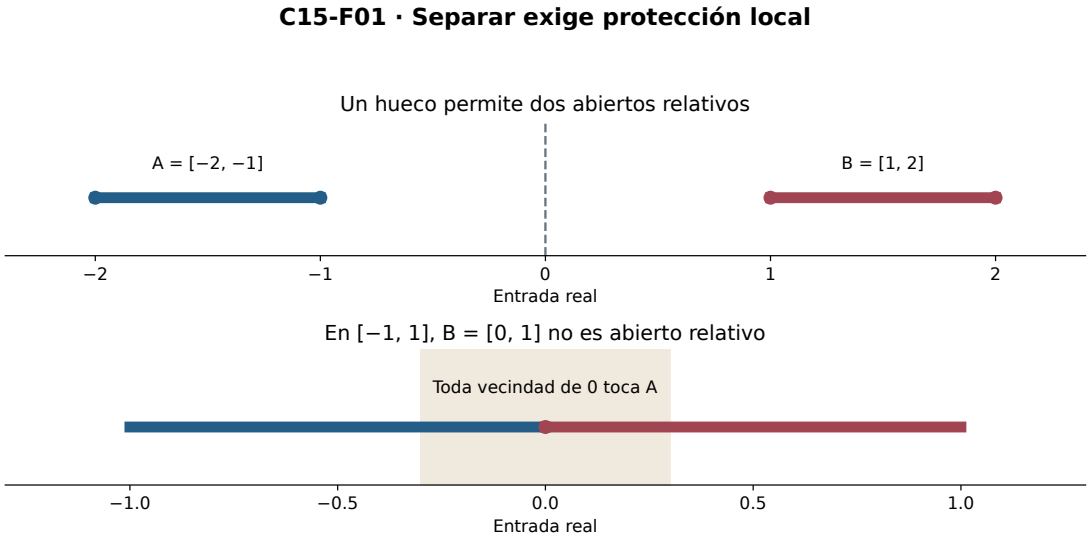


Figura 15.1. Arriba, los dos segmentos se separan por el corte 0. Abajo, asignar 0 a la parte derecha de un intervalo no la protege de entradas negativas próximas. La banda representa una vecindad ilustrativa; el texto prueba el fallo para todo radio.

necesitan que el singleton sea abierto real: la separación siempre se estudia en el conjunto declarado como ambiente. Para refutar conexidad basta una pareja que cumpla todos los requisitos; para demostrarla hay que excluir cualquier separación posible. Comprobar que una partición particular falla no descarta que pudiera existir otra. La frontera de un color puede invalidar su apertura incluso cuando cobertura, disjunción y no vacuidad ya están verificadas.

Ejercicios de la sección 15.1.

Ejercicio 1. Una separación relativa verificable

Sea $E = [-3,-1] \cup [2,4]$. Construye una separación por un corte y comprueba todas las condiciones, distinguiendo apertura relativa de apertura real.

Solución. Tomamos $A = E \cap (-\infty, 0) = [-3,-1]$ y $B = E \cap (0,\infty) = [2,4]$. Los rayos son abiertos reales, así las partes son abiertas relativas a E. $-2 \in A$ y $3 \in B$ prueban no vacuidad. Las desigualdades $x < 0$ y $x > 0$ son incompatibles, dando disjunción; todo punto de E está en uno de los segmentos y por ello en una parte, dando cobertura. Ninguno de los segmentos es abierto real: cualquier bola alrededor de su extremo exterior contiene puntos que no pertenecen al segmento. El ambiente relativo es indispensable.

Retorno visual. Véase C15-F01, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba. El corte cero pertenece al hueco entre las piezas y no al ambiente E. Así no queda ninguna entrada sin asignar, mientras los rayos incompatibles impiden asignaciones dobles. La apertura relativa se acredita con la representación por abiertos reales, no afirmando apertura real de los segmentos. En sus extremos, los puntos exteriores que refutan apertura real desaparecen al recortar por E.

Ejercicio 2. Una partición que no rompe el intervalo

En $E = [0,2]$, examina $A = [0,1)$ y $B = [1,2]$. ¿Qué condición de separación falla? Da un testigo para cada radio en el punto problemático.

Solución. Ambas partes son no vacías, disjuntas y cubren E. Además $A = E \cap (-\infty, 1)$ es abierta relativa. B no lo es en 1: dado $r > 0$, ponemos $h = \min(r/2, 1/2) > 0$, $t = 1 - h$. Entonces $t \in [0,1) \subseteq E$, $|t-1| = h < r$ y $t \notin B$. Ningún radio de 1 dentro de E queda en B. Por eso la partición no es separación.

Retorno visual. Véase C15-F01, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba. La existencia de un testigo para cada radio es la negación del criterio por bolas de apertura relativa. El mínimo mantiene al testigo dentro de $[0, 1)$ aun cuando el radio sea grande, y también dentro de la bola aun cuando sea pequeño. La partición cumple cobertura, disjunción y no vacuidad, pero una sola parte sin apertura basta para impedir que sea separación.

Ejercicio 3. Equivalencia por complemento

Demuestra desde las definiciones que E es conexo si y sólo si todo subconjunto abierto y cerrado relativo a E es vacío o todo E. Incluye $E = \emptyset$.

Solución. Si E es conexo y A es abierto y cerrado relativo, $E \setminus A$ es abierto relativo. Si A no fuese vacío ni todo E, las dos partes serían no vacías, disjuntas y exhaustivas, separando E. Luego $A = \emptyset$ o $A = E$. Recíprocamente, una separación A, B da $B = E \setminus A$; la apertura de B hace a A cerrado relativo y la de A ya está dada. Por no vacuidad de ambas partes A es no vacío y propio, contradiciendo el criterio. Si E es vacío, su único subconjunto es vacío y no puede existir separación; ambas afirmaciones se cumplen.

En la primera dirección usamos la cerradura de A para convertir su complemento en una segunda parte abierta. En la recíproca usamos cobertura y disjunción para identificar esa segunda parte exactamente con el complemento. La equivalencia depende del ambiente E en ambos pasos. El criterio no prohíbe todos los subconjuntos abiertos y cerrados, sino únicamente los no vacíos y propios.

Ejercicio 4. Separar un conjunto finito

Prueba que un subconjunto finito de $\mathbb{R}$ es conexo exactamente cuando tiene a lo sumo un punto. Para dos o más puntos, construye un corte sin invocar la caracterización por intervalos.

Solución. Vacío y singleton no pueden dividirse en dos partes disjuntas no vacías, luego son conexos. Si el conjunto finito tiene al menos dos puntos, se puede ordenar como $t_1 < \cdots < t_m$ con $m \geq 2$, usando repetidamente el menor de una lista finita por comparación. Sea $c = (t_1 + t_2)/2$. No pertenece al conjunto porque está entre sus dos primeros puntos. Las partes $E \cap (-\infty, c) = \{t_1\}$ y $E \cap (c, \infty)$ son abiertas relativas, disjuntas y exhaustivas; contienen t_1 y t_2. Son una separación. Sólo se usó una lista finita y el orden real.

El mínimo y el segundo punto existen porque la lista es finita y tiene al menos dos miembros. Su punto medio queda estrictamente entre ellos y ningún miembro de la lista puede ocupar ese hueco. Esto asegura cobertura por los dos rayos y no vacuidad de sus recortes. No hemos utilizado R3 para producir el corte: la construcción verifica separación directamente.

Ejercicio 5. Ambientes anidados

Si $F \subseteq E \subseteq \mathbb{R}$ y A es abierto relativo a E, prueba que $F \cap A$ es abierto relativo a F. Explica por qué restringir una separación de E a F puede no separar F.

Solución. Escribimos $A = E \cap U$ con U abierto real. Como $F \subseteq E$, $F \cap A = F \cap U$, abierto relativo a F. Para una separación A, B de E, sus intersecciones con F siguen siendo abiertas relativas, disjuntas y exhaustivas. Pero alguna puede ser vacía: con $E = [-2, -1] \cup [1, 2]$, sus dos segmentos como partes y $F = [1, 2]$, la intersección de la primera parte con F es vacía. Por ello no queda una separación de F.

La igualdad $F \cap (E \cap U) = F \cap U$ usa $F \subseteq E$ y conserva un abierto real testigo. Las propiedades de disjunción y cobertura también se conservan al recortar. La no vacuidad es la condición que puede perderse: un subconjunto conexo puede quedar íntegramente de un lado de la separación del ambiente mayor.

15.2. El supremo impide romper un intervalo

Definición. Llamamos intervalo a todo $I \subseteq \mathbb{R}$ que contiene los puntos situados entre dos de sus puntos:

$$a, b \in I, \quad a \leq b \quad \Longrightarrow \quad [a, b] \subseteq I.$$

La condición incluye el vacío, donde no hay pares que examinar, y los singletons, cuyos segmentos son degenerados. También incluye semirrectas, la recta completa e intervalos con extremos abiertos o cerrados. Para demostrar conexidad sólo utilizaremos esta propiedad entre puntos y la completitud real; el valor intermedio será una consecuencia posterior. **R2. Todo intervalo real es conexo.** Supongamos una separación $I = A \cup B$. Hay dos puntos, uno en cada parte; son distintos. Intercambiando los nombres si hace falta, fijamos $a \in A$, $b \in B$, $a < b$. La propiedad intervalar da $[a, b] \subseteq I$.

Una separación hipotética tendría una frontera entre las partes, pero no podemos suponer que A tenga un último punto. Recortamos entre las dos entradas fijadas y buscamos la menor cota superior de ese recorte: $S = A \cap [a, b], \qquad c = \sup S$. Como $a \in S$ y cada miembro de S es menor o igual que b, el conjunto es no vacío y está acotado superiormente. La completitud de C00 proporciona c y sus propiedades dan $a \leq c \leq b$. El carácter intervalar convierte esa localización real en pertenencia al dominio: $c \in [a, b] \subseteq I$. Sólo entonces podemos usar cobertura y disjunción para afirmar que c está en exactamente una de las partes.

Si $c \in A$, la disjunción y $b \in B$ dan $c \neq b$; junto con $c \leq b$ resulta $c < b$. La apertura relativa proporciona $r > 0$ con $I \cap (c - r, c + r) \subseteq A$. Para producir un punto de S mayor que c, debemos avanzar dentro de esa vecindad y también dentro de $[a, b]$. Tomamos $h = \min\left(\frac{b-c}{2}, \frac{r}{2}\right) > 0, \qquad d = c + h$.

Los dos términos del mínimo son positivos y $h \leq (b-c)/2 < b-c$, $h \leq r/2 < r$. Por tanto $c < d < b$, $d \in [a, b] \subseteq I$ y $|d - c| < r$. La apertura de A da $d \in A$, así que $d \in S$ y $d > c$, contra la condición de cota superior. Si hubiéramos usado sólo $c + r/2$, la proximidad estaría asegurada pero el punto podría superar b o incluso salir del dominio. El mínimo resuelve ambas obligaciones.

Si $c \in B$, hay $s > 0$ con $I \cap (c - s, c + s) \subseteq B$. El umbral $c - s/2 < c$ no puede ser una cota superior de S, pues c es la menor de ellas. Negar que ese umbral sea cota proporciona un $t \in S$ con $c - s/2 < t \leq c$. La desigualdad $t \leq c$ procede de que c sí es cota. Además $t \in S \subseteq A$ y $c \in B$ impiden $t = c$, de modo que $0 < c - t < s/2 < s$. El punto t pertenece al dominio y a la vecindad relativa de c, por lo que también pertenece a B. Esto contradice $A \cap B = \emptyset$. La propiedad aproximante del supremo ha dado un único testigo para este radio, sin suponer que c sea máximo ni seleccionar una sucesión de puntos de S.

Las dos ubicaciones posibles de c son incompatibles con la separación supuesta. Para vacío y singleton, la separación ya era imposible porque no podía proporcionar los dos puntos iniciales distintos. Quedan incluidos así todos los intervalos de la definición. La completitud aseguró un supremo real; la propiedad intervalar lo mantuvo dentro del dominio y permitió avanzar sin salir de él; la apertura relativa produjo las vecindades que originaron las contradicciones. Sólo se acotó el auxiliar S, aunque I pudiera ser no acotado. La prueba no ha usado una función continua ni un teorema de compacidad.

Ejercicios de la sección 15.2.

Ejercicio 6. Preparar un supremo legítimo

En una separación hipotética $I = A \cup B$, con $a \in A$, $b \in B$, $a < b$, justifica existencia y localización de $c = \sup(A \cap [a, b])$. ¿Por qué puede hablarse de la parte que contiene c?
Solución. $S = A \cap [a, b]$ contiene a y todos sus elementos son menores o iguales que b. Completitud da $c = \sup S$. Como $a \in S$, $a \leq c$; como b es cota, $c \leq b$. La hipótesis intervalar da $[a, b] \subseteq I$, luego $c \in I = A \cup B$. La cobertura asigna una parte y la disjunción impide que pertenezca a ambas. Sin intervalaridad, c podría faltar en el dominio y no habría esa dicotomía.

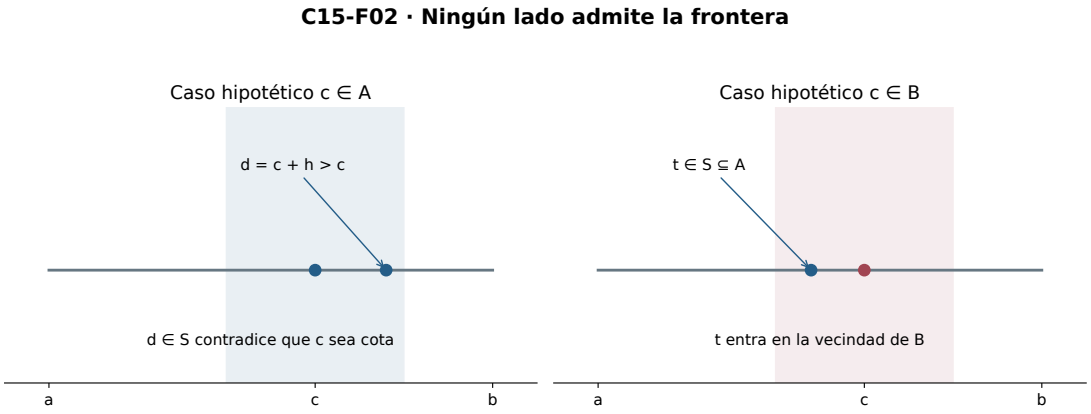


Figura 15.2. Esquemas de una separación supuesta, no ejemplos de separaciones existentes. Si c pertenece a A, un avance recortado por dominio y radio excede la cota. Si pertenece a B, un punto t de S entra en su vecindad. Distancias ilustrativas; las fórmulas de R2 son autoritativas.

El supremo tiene dos funciones separadas: ser cota de S y ser la menor de esas cotas. La primera lo ubica entre los puntos dados; la segunda permitirá encontrar miembros próximos por debajo. La intervalaridad asegura que ese real es una entrada. Así la prueba queda preparada para usar apertura de la parte que lo contiene sin asumir que sea máximo de S.

Ejercicio 7. Reparar un avance fuera del dominio

Una prueba toma, cuando $c \in A$, $d = c + r/2$ y afirma que $d \in A \cap [a, b]$ por apertura relativa. Señala la obligación ausente y repara el argumento con una fórmula explícita.

Solución. La apertura relativa sólo garantiza pertenencia a A de puntos de I próximos a c. El punto $c + r/2$ puede superar b y hasta salir de I; por ejemplo $c = 0.9$, $b = 1$, $r = 1$ da $d = 1.4$. En el argumento correcto, $c < b$ porque $b \in B$ y $c \in A$. Ponemos $h = \min((b - c)/2, r/2) > 0$, $d = c + h$. Entonces $c < d < b$, $d \in [a, b] \subseteq I$ y $|d - c| < r$. La apertura da $d \in A$, luego $d \in S$, en contradicción con $d > \sup S$. La reparación usa por separado dominio y radio.

Retorno visual. Véase C15-F02, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba. La vecindad relativa es $I \cap B(c, r)$: proximidad sola no da pertenencia a I. El mínimo reparado asegura ambas condiciones y además conserva $d \leq b$, necesario para pertenecer a S. El ejemplo numérico sólo ilustra el avance excesivo; la reparación es simbólica y funciona en cualquier radio positivo del caso hipotético $c \in A$.

Ejercicio 8. La propiedad aproximante necesaria

En el caso $c \in B$, desarrolla desde la definición de supremo la contradicción usando un radio $s > 0$ de apertura relativa. No supongas que c esté en S.

Solución. $c - s/2 < c$ no es cota superior de S, porque sería una cota menor que la menor cota superior c. Por negación de la condición de cota existe $t \in S$ con $t > c - s/2$. Además $t \leq c$ pues c sí es cota. Como $S \subseteq A$ y $c \in B$, la disjunción da $t \neq c$. Así $0 < c - t < s/2 < s$, y $t \in I$ pertenece a la vecindad de c dentro de I, que está en B. Queda $t \in A \cap B$, contradicción. Sólo se usó un testigo para este radio.

La propiedad aproximante se deduce de minimalidad de la cota y no de una sucesión elegida previamente. El testigo t no puede igualar a c porque pertenece a A y el centro está en B. Esto proporciona la distancia estrictamente positiva y menor que el radio de apertura. La contradicción es pertenecer simultáneamente a las dos partes disjuntas.

Ejercicio 9. La completitud en el paso correcto

Explica por qué el argumento del supremo no prueba conexidad de $\mathbb{Q}$ visto con su orden heredado. Exhibe una partición relativa que ilustre el fallo.

Solución. El orden racional no garantiza un supremo racional para todo subconjunto racional no vacío acotado. Si se toma el supremo en $\mathbb{R}$, puede quedar fuera del dominio racional y la dicotomía «pertenece a una parte» falla. El corte $c = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ da las partes racionales menores y mayores que c. Son abiertas relativas, disjuntas, exhaustivas y no vacías por los testigos 1 y 2. La densidad racional no incorpora a c ni subsana el gasto de completitud y pertenencia.

Completitud de la recta entrega un supremo real, pero la prueba requiere además que sea miembro del intervalo considerado. En el ambiente racional, una frontera irracional no puede asignarse a ninguna parte. El corte explícito verifica que la dificultad es real, no sólo una laguna del argumento. Densidad permite aproximar esa frontera, pero no satisface la pertenencia que falta.

Ejercicio 10. Intervalos no acotados y degenerados

Prueba que (a, ∞), $\mathbb{R}$, $\{a\}$ y $\emptyset$ son conexos, indicando por qué R2 no necesita una cota global de todo el dominio.

Solución. En la semirrecta, si $u \leq v$ son miembros, todo $t \in [u, v]$ satisface $t \geq u > a$, así también pertenece. La recta contiene todos sus segmentos. Singleton y vacío satisfacen el predicado intervalar vacíamente o con segmentos degenerados. R2 los hace conexos. Su prueba acota sólo $S = A \cap [u, v]$ después de fijar dos puntos de una supuesta separación; no necesita acotar todo el intervalo. En vacío y singleton no hay dos puntos de partes disjuntas no vacías, de modo que la separación ya es imposible.

Un intervalo no acotado puede contener un segmento acotado entre dos entradas cualesquiera. Es ese segmento el que aporta la cota superior del auxiliar en R2. Para vacío y singleton, la no vacuidad y disjunción de dos partes ya resultan incompatibles. Por ello el resultado abarca tanto dominios muy grandes como casos degenerados sin una premisa de compacidad.

15.3. Un hueco produce dos lados

Si un conjunto real no es intervalo, existen dos entradas $a < b$ y un punto omitido c estrictamente entre ellas. Los extremos no pueden ser el punto omitido porque ya pertenecen al conjunto. Esa ausencia interior permite cortar sin dejar ninguna entrada en la frontera y garantiza que los dos lados tengan miembros. **R3. Todo conexo real es intervalo.** Por contraposición, dados $a < c < b$ con $a, b \in E$ y $c \notin E$, definimos

$A = E \cap (-\infty, c)$, $B = E \cap (c, \infty)$. Los rayos reales son abiertos, de modo que A y B son abiertos relativos. Las entradas a y b verifican respectivamente su no vacuidad, y las desigualdades $x < c$ y $x > c$ no pueden cumplirse simultáneamente. Para toda entrada $x \in E$, la ausencia de c y la tricotomía dejan exactamente uno de esos dos casos, así que las partes cubren E. Hemos construido una separación. Por contraposición, todo conexo real es intervalo.

R2 y R3 producen la caracterización exacta

$$E \text{ conexo} \quad \Longleftrightarrow \quad E \text{ intervalo.}$$

Esta equivalencia permite pasar, en la recta, de una condición sobre vecindades a una condición sobre el orden de los puntos. Ambas direcciones tienen pruebas distintas: el supremo impide separar un intervalo, mientras un punto intermedio ausente basta para separar un conjunto que no lo es. Por ejemplo, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ se separa por sus dos rayos. Para $\mathbb{Q}$, la raíz positiva $\sqrt{2}$, irracional por C10, permite tomar los racionales menores y mayores que ella. Las partes contienen respectivamente 1 y 2, son abiertas relativas, disjuntas y cubren $\mathbb{Q}$. La

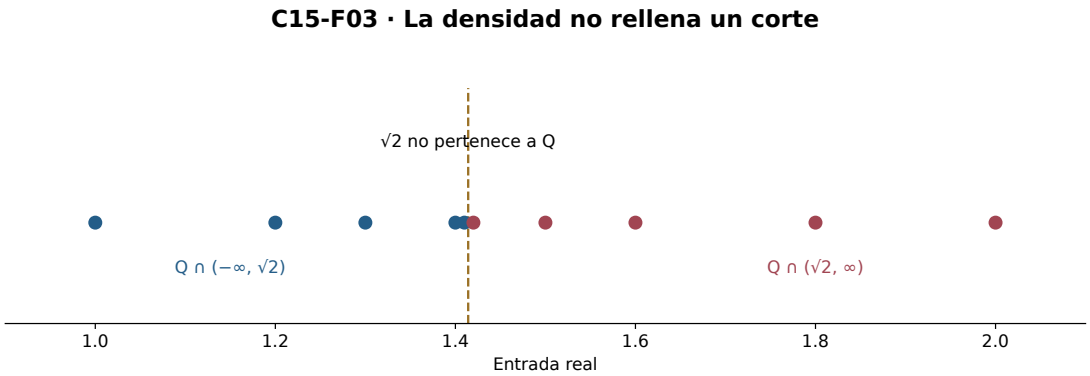


Figura 15.3. Se muestran sólo algunos racionales a ambos lados de $\sqrt{2}$. El corte irracional no pertenece al dominio; ambas partes son abiertas relativas y no vacías. Los puntos finitos ilustrados no representan una enumeración exhaustiva ni prueban densidad o desconexión.

densidad racional permite acercarse al corte desde ambos lados, pero no incorpora el corte al dominio. La separación no exige una distancia positiva global entre las partes.

Una intersección arbitraria de intervalos sigue siendo intervalo. Dados dos puntos de la intersección, cada miembro de la familia contiene su segmento, y por tanto la intersección también lo contiene. Si no hay pares, la condición se cumple vacíamente; para una familia vacía adoptamos la intersección relativa a $\mathbb{R}$, que es toda la recta. Una unión arbitraria puede fallar: $(0,1) \cup (2,3)$ contiene $1/2$ y $5/2$ y omite $3/2$.

Si dos intervalos tienen un punto común, una supuesta separación de su unión se restringiría a partes abiertas relativas en cada intervalo. Esas intersecciones conservan disjunción y cobertura. Si ambas fueran no vacías, separarían el intervalo; por R2, cada intervalo queda entero en una parte. El punto común obliga a que sea la misma para los dos, dejando vacía la otra. La unión es entonces conexa y por R3 es intervalo.

El mismo argumento funciona para cualquier familia no vacía de conexos con un punto común p. Fijada una separación de la unión, cada miembro contiene p y debe quedar en la parte que lo contiene. La unión completa queda allí, contra la no vacuidad de la otra parte. El testigo p ya está dado y sirve para todos los miembros; no se selecciona un punto por miembro.

El punto común es una condición suficiente para esta prueba, pero puede haber unión conexa de piezas disjuntas. En $[0,1) \cup [1,2] = [0,2]$, la segunda pieza incorpora el extremo uno que la primera excluye, y la unión no omite ningún punto intermedio. Los extremos deben leerse en el conjunto reunido.

Ejercicios de la sección 15.3.

Ejercicio 11. Un punto omitido suficiente

Para $E = [0,1] \cup (1,3] \setminus \{2\}$, interpreta los paréntesis como $E = ([0,1] \cup (1,3]) \setminus \{2\}$. Construye una separación. ¿Es 1 otro hueco?

Solución. La unión anterior a quitar 2 es $[0,3]$, pues 1 está en la primera pieza. Por tanto $E = [0,3] \setminus \{2\}$. Tomamos $A = E \cap (-\infty, 2) = [0,2)$ y $B = E \cap (2,\infty) = (2,3]$. Son abiertas relativas por los rayos, disjuntas y cubren E porque 2 fue omitido. Son no vacías por 0 y 3. 1 no es hueco: pertenece a E. Las modalidades de extremos de cada pieza no deben leerse aisladas de la unión.

La unión debe calcularse antes de interpretar las fronteras de cada pieza. Aunque la segunda excluya uno, la primera lo incluye y la unión no tiene hueco allí. El único corte solicitado es dos, que se retira después de unir. Los rayos alrededor de dos producen dos partes abiertas relativas incluso si sus extremos no forman abiertos reales.

Ejercicio 12. Densidad y ruptura

Construye una separación de $\mathbb{Q}$ por un corte irracional y demuestra cada condición. Explica por qué las partes pueden tener puntos arbitrariamente próximos al corte.

Solución. Usamos $c = \sqrt{2}$, real irracional, y $A = \mathbb{Q} \cap (-\infty, c)$, $B = \mathbb{Q} \cap (c, \infty)$. Las partes son abiertas relativas, disjuntas y cubren los racionales por $c \notin \mathbb{Q}$. $1 \in A$, $2 \in B$. Para todo $r > 0$, densidad racional da un punto en $(c - r, c)$ y otro en $(c, c + r)$, pertenecientes a las partes respectivas. Aproximación arbitraria al corte es compatible con separación: el punto límite común está fuera del ambiente racional.

Retorno visual. Véase C15-F03, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba. Las dos aproximaciones al corte se realizan en intervalos abiertos no vacíos, uno de cada lado, de modo que densidad aporta racionales con las desigualdades estrictas requeridas. Sus límites posibles en el ambiente real pueden coincidir sin generar intersección dentro del ambiente racional. La separación exige disjunción de las partes, no una distancia positiva global entre ellas.

Ejercicio 13. Intersecciones y uniones

Demuestra que toda intersección de intervalos reales es conexa, con la convención de intersección vacía igual a $\mathbb{R}$. Refuta la afirmación análoga para uniones arbitrarias.

Solución. Si x, y pertenecen a la intersección, están en cada intervalo de la familia, y el segmento entre ellos está en cada miembro, luego en la intersección. Es intervalo y R2 da conexidad. Para una familia sin miembros, la intersección relativa a $\mathbb{R}$ es toda $\mathbb{R}$, también intervalo. La unión falla para $(0, 1) \cup (2, 3)$: $1/2$ y $5/2$ pertenecen pero $3/2$ no; R3 da desconexión o se exhibe el corte por $3/2$.

La intersección conserva puntos intermedios porque cada miembro impone la misma obligación sobre el par fijado. No importa que la familia sea infinita ni que no existan extremos globales. En una unión, en cambio, las dos entradas pueden proceder de miembros diferentes y ninguno está obligado a incluir el segmento que las une. El contraejemplo aprovecha exactamente esa diferencia.

Ejercicio 14. Una familia con punto común

Sea $(E_i)_{i \in J}$ una familia no vacía de conexos reales y supón que hay $p \in \bigcap_{i \in J} E_i$. Prueba que $H = \bigcup_{i \in J} E_i$ es conexo sin seleccionar puntos o radios por miembro.

Solución. Supongamos una separación $H = A \cup B$ y, intercambiando nombres, $p \in A$. Para cada índice fijo i, las partes $E_i \cap A$ y $E_i \cap B$ son abiertas relativas a E_i, disjuntas y exhaustivas. La primera contiene el punto común p. Si la segunda fuese no vacía, separaría E_i; por conexidad es vacía. Se ha probado para todo i que $E_i \subseteq A$. Por definición de unión, $H \subseteq A$, luego $B = \emptyset$, contradicción. El punto p es único testigo compartido fijado desde la hipótesis; no se produce una familia de elecciones.

Para cada índice se razona con la misma entrada p, que ya está dada como punto común. Las intersecciones con la separación heredan apertura relativa por el cálculo de ambientes anidados. La conexidad de cada miembro obliga a eliminar su parte opuesta. El razonamiento universal sobre índices produce inclusión de toda la unión sin escoger puntos o radios para cada miembro.

Ejercicio 15. Cerrar un intervalo sin romperlo

Prueba directamente que la adherencia real $\overline{I}$ de un intervalo I es intervalo, por tanto conexa. Incluye el caso vacío.

Solución. Para $I = \emptyset$, ninguna vecindad toca I y su adherencia es vacía. En el resto, tomemos $u < v$ en $\overline{I}$ y $u < t < v$. La vecindad de u de radio $(t-u)/2$ toca I, dando $a \in I$ con $a < t$. La de v de radio $(v-t)/2$ da $b \in I$ con $t < b$. Intervalaridad implica $t \in [a, b] \subseteq I \subseteq \overline{I}$. Los extremos u, v ya están en la adherencia. Así todo segmento entre miembros está en ella, y es intervalo. R2 prueba conexidad. Sólo se fijaron dos testigos de vecindades para el punto t considerado.

Los radios alrededor de u y v se diseñan según el punto intermedio t. El primero produce una entrada estrictamente menor que t, y el segundo una estrictamente mayor. Intervalaridad coloca t en el conjunto original, una conclusión más fuerte que pertenecer a su adherencia. Los extremos del segmento ya pertenecían a la adherencia por hipótesis y completan la condición intervalar.

15.4. La continuidad transporta la imposibilidad de separar

Para estudiar las salidas de una continua utilizaremos la dirección de transporte que C14 garantiza: las preimágenes de abiertos son abiertas relativas. Si pudiéramos separar la imagen de un dominio conexo, esas preimágenes permitirían intentar la misma separación en el dominio. **R4. Imagen continua de un conexo.** Sea $f : D \to \mathbb{R}$ continua y sea $E \subseteq D$ conexo. Entonces $H = f[E]$ es conexo. La restricción $h = f \restriction E : E \to \mathbb{R}$ es continua por C14 y tiene imagen H. Si E es vacío también lo es H, y el resultado es inmediato.

Supongamos que $H = A \cup B$ es una separación de la imagen. Hay abiertos reales V, W con $A = H \cap V$ y $B = H \cap W$. Reunimos las entradas de E que producen salidas en cada parte:

$$P = \{x \in E : h(x) \in A\}, \qquad Q = \{x \in E : h(x) \in B\}.$$

Toda salida de h pertenece a H, así que $P = h^{-1}[V]$ y $Q = h^{-1}[W]$. La continuidad de la restricción hace ambos conjuntos abiertos relativos a E. Si una entrada estuviera en los dos, su salida pertenecería a $A \cap B$, imposible. Toda entrada está en alguno porque su salida está en $H = A \cup B$. También necesitamos no vacuidad, que no se sigue sólo de que V y W sean abiertos no vacíos del codominio. Fijemos $y_A \in A$. Como $y_A \in H = h[E]$, existe $x_A \in E$ con $h(x_A) = y_A$, y por tanto $x_A \in P$. Un valor de B da del mismo modo una entrada de Q. Se usan dos testigos concretos de valores alcanzados, sin construir un selector de todas las fibras. Así P, Q separan E, contradicción. La imagen H es conexa.

Consecuencia. La imagen continua de un intervalo es intervalo: el dominio es conexo por R2, la imagen es conexa por R4 y vuelve a ser intervalo por R3. No se requiere inyectividad, monotonía, dominio cerrado ni acotación. La dirección inversa no está garantizada. Para $q(x) = x^2$ en $[-2, 2]$, el singleton $\{1\}$ es conexo y su preimagen $\{-1, 1\}$ se separa por el corte cero. El dominio de q también es conexo y q es continua, pero R4 no afirma preservación por preimagen. Por otra parte, una constante en $\{-1, 1\}$ es continua y tiene imagen singleton: una imagen conexa puede proceder de un dominio desconexo.

El mismo criterio puede expresarse mediante funciones de dos valores: E **es conexo si y sólo si toda función continua** $u : E \to \{0, 1\}$ **es constante**, entendiendo continuidad con distancias reales. Si E es conexo, R4 da una imagen conexa contenida en $\{0, 1\}$. Alcanzar ambos valores produciría una imagen que omite $1/2$ entre ellos, contra R3. Por tanto todas las parejas de entradas tienen la misma salida. En el dominio vacío esta igualdad universal se cumple sin exigir una entrada ni un valor alcanzado.

Recíprocamente, una separación A, B permite definir $u = 0$ en A y $u = 1$ en B. Cobertura y disjunción garantizan una asignación única. En cada centro, la apertura relativa de su parte proporciona una bola donde la función conserva su valor, con error cero para cualquier tolerancia positiva. Es continua y no es constante porque alcanza los dos valores, lo que contradice el criterio supuesto.

Ejercicios de la sección 15.4.

Ejercicio 16. Separación de valores a entradas

Reconstruye R4 para una continua $f : D \to \mathbb{R}$ y un conexo $E \subseteq D$. Identifica los ambientes de las dos parejas de abiertos y dónde se usa pertenencia a la imagen.

Solución. Sea $h = f \restriction E$, continua. Si $H = f[E]$ se separara como $A = H \cap V$, $B = H \cap W$ con V, W abiertos reales, tomamos $P = \{x \in E : h(x) \in A\} = h^{-1}[V]$ y $Q = h^{-1}[W]$. Son abiertos relativos a E, mientras A, B lo eran a H. Disjunción y cobertura se trasladan porque toda salida de h está en $H = A \cup B$. Para un valor concreto en cada parte, pertenecer a H da una entrada en E con esa salida; ambas preimágenes son no vacías. Así separan E, contradicción. Si E es vacío, su imagen es vacía y ya es conexa. No se usa inversa funcional ni selector de todas las fibras.

La continuidad garantiza apertura sólo de las preimágenes de abiertos en el ambiente correcto. Las partes de H se representan con abiertos reales para poder aplicar ese criterio a la restricción. El hecho de que las salidas estén en H traslada cobertura y disjunción; el hecho de que cada parte contenga un valor alcanzado traslada no vacuidad. Así cada condición de la separación tiene una justificación propia.

Ejercicio 17. La preimagen que se divide

Para $q : [-2, 2] \to \mathbb{R}$, $q(x) = x^2$, calcula $q^{-1}[\{1\}]$ y prueba que no es conexa. ¿Qué hipótesis de R4 siguen siendo verdaderas?

Solución. La ecuación $x^2 = 1$ equivale a $(x - 1)(x + 1) = 0$, luego la preimagen es $\{-1, 1\}$. Sus dos singletons se obtienen cortando por cero; son abiertos relativos, disjuntos y no vacíos, y cubren la preimagen. No es conexa. q es continua por C14, su dominio $[-2, 2]$ es conexo y $\{1\}$ también. Nada contradice R4: el teorema preserva conexidad por imagen directa, no por preimagen.

La factorización permite calcular todas las entradas de la fibra, no sólo dos candidatos. Ambas raíces pertenecen al dominio indicado y no hay otras. Sus singletons constituyen una separación relativa de la fibra, aunque no sean abiertos reales. R4 sigue siendo verdadero porque se refiere a imágenes directas de conexos y no a fibras o preimágenes.

Ejercicio 18. Una imagen global intervalar no certifica continuidad

En $[-1, 1]$ define $f(x) = x$ si $x < 0$ y $f(x) = x - 1$ si $x \geq 0$. Calcula su imagen y decide su continuidad en cero. Refuta «si la imagen es intervalo, la función es continua».

Solución. La primera rama tiene imagen $[-1, 0)$ y la segunda $[-1, 0]$, luego la imagen total es $[-1, 0]$, intervalo. Pero $f(0) = -1$. Dado $\delta > 0$, ponemos $t = \min(\delta/2, 1/4) > 0$, $x = -t \in [-1, 0)$. Entonces $|x| < \delta$ y $|f(x) - f(0)| = 1 - t \geq 3/4 > 1/2$. La tolerancia $1/2$ refuta continuidad en cero. El resultado de preservación es una implicación con continuidad como premisa; que la imagen total sea intervalar no prueba controles locales ni el valor intermedio en cada subsegmento.

La segunda rama recupera los valores que faltaban para que la imagen total incluya menos uno y cero. Esa coincidencia global no corrige el valor central menos uno frente a las salidas cercanas de la primera rama. El infractor se elige dentro del dominio para cualquier radio y mantiene un error mayor que la tolerancia fija. La refutación compara con $f(0)$, que es el destino exigido por continuidad.

Ejercicio 19. El criterio de dos valores

Demuestra que E es conexo si y sólo si toda continua $u : E \to \{0, 1\}$ es constante, con la convención de constancia por igualdad entre todas las parejas de entradas.

Solución. Si E es conexo, R4 da imagen conexa de u como subconjunto real. Una imagen que contuviera 0 y 1 sería exactamente $\{0, 1\}$, que omite $1/2$ y no es intervalo; contradicción con R3. Así no hay dos entradas con salidas distintas, que es constancia. Si E tuviera separación A, B, definimos $u = 0$ en A, $u = 1$ en B. Cobertura/disjunción hacen válida la función. Para cada entrada, una bola relativa contenida en su parte hace el error cero, dando continuidad para todo $\varepsilon > 0$. Las dos partes no vacías dan salidas diferentes, contradicción con el criterio. En vacío la condición de constancia es universal vacía y no se exige valor alcanzado.

Una función a $\{0, 1\}$ puede mirarse como función real porque la inclusión de ese codominio en la recta es continua. Si alcanzara ambos valores, su imagen omitiría el punto intermedio

1/2 y sería desconexa. Para la recíproca, la función definida por una separación es localmente constante y alcanza ambos valores. El caso vacío se conserva mediante la convención de igualdad para todas las parejas de entradas.

Ejercicio 20. Conexidad preservada por homeomorfismo

Sea $f : E \to F$ un homeomorfismo entre subconjuntos reales. Prueba que E es conexo si y sólo si F lo es. Explica cuál de las dos direcciones puede fallar para una continua sobreyectiva. **Solución.** Si E es conexo, continuidad de f y sobreyectividad dan $F = f[E]$ conexo por R4. Si F es conexo, la inversa $h : F \to E$ es continua y sobreyectiva sobre E, luego $E = h[F]$ es conexo. Para una continua sobreyectiva sin inversa continua sólo está garantizada la primera dirección. La constante $\{-1, 1\} \to \{0\}$ es continua y sobreyectiva; el codominio es conexo y el dominio no. No hay inversa funcional en ese ejemplo, lo cual ya basta para refutar la recíproca general.

La primera implicación sólo usa continuidad y que todas las entradas del codominio se alcancen. La segunda necesita continuidad del transporte inverso. El ejemplo constante muestra que sobreyectividad puede colapsar dos componentes en una y por eso no recupera la estructura del dominio. Los requisitos del homeomorfismo permiten razonar en ambas direcciones con imágenes de conexos.

15.5. El valor intermedio como consecuencia estructural

La imagen continua de un intervalo contiene todos los valores entre dos salidas suyas. Para obtener además un argumento situado entre las dos entradas dadas, debemos aplicar esa propiedad a su segmento concreto, y no sólo al dominio entero. **R5. Teorema del valor intermedio.** Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo, $f : I \to \mathbb{R}$ continua, y sean $u, v \in I$. Para cualquier y entre $f(u)$ y $f(v)$, incluidos los extremos, existe

$$c \in [\min(u, v), \max(u, v)] \quad \text{tal que} \quad f(c) = y.$$

Restringimos f al segmento $J = [\min(u, v), \max(u, v)]$. El carácter intervalar de I da $J \subseteq I$, y J también es intervalo porque contiene los puntos entre dos de sus miembros. La restricción es continua por C14, así que su imagen $f[J]$ es intervalo por R4 y R3. Contiene $f(u)$ y $f(v)$, luego contiene y, y la definición de imagen entrega $c \in J$ con $f(c) = y$. Si $u = v$, el único nivel permitido es $f(u)$ y sirve $c = u$. Si y está estrictamente entre las salidas, es distinto de ambas: ningún testigo puede ser uno de los extremos del segmento.

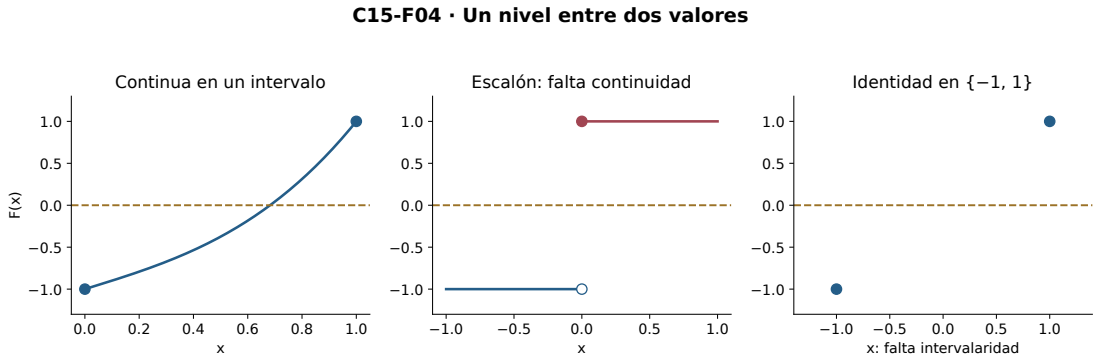


Figura 15.4. A la izquierda F(x)=x³+x−1 alcanza cero entre 0 y 1; el gráfico no calcula la raíz exacta. El escalón del centro tiene signos opuestos y omite cero por discontinuidad. La identidad del panel derecho es continua en su dominio de dos puntos, pero ese dominio no es intervalo.

Cambio de signo. Si $a < b$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua con $f(a) < 0 < f(b)$ o la orientación inversa, R5 con $y = 0$ da $c \in (a, b)$ con $f(c) = 0$. Con desigualdades no estrictas

sólo se concluye un cero en $[a, b]$: podría ser un extremo. Para buscar un nivel y definimos $g = f - y$; C14 prueba su continuidad y la ecuación $g = 0$ equivale a $f = y$.

Signo constante sin ceros. Si f es continua en un intervalo y nunca vale cero, no puede tomar un valor positivo y otro negativo, pues R5 produciría un cero entre sus argumentos. Si el intervalo es no vacío, fijando una entrada obtenemos que todos los valores tienen el mismo signo. En un dominio roto esto falla: $1/x$ es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ y tiene ambos signos. También falla sin continuidad: la función escalón que vale -1 para $x < 0$ y 1 para $x \geq 0$ en $[-1, 1]$ no tiene ceros. En cero, todo radio incluye una entrada negativa cuya salida dista 2 del valor central; la tolerancia 1 refuta continuidad. Y la identidad restringida a $\{-1, 1\}$ es continua pero no alcanza cero: el dominio no es intervalo.

La existencia de un argumento con salida y permite que haya varios: el cuadrado alcanza uno en -1 y 1 dentro de $[-2, 2]$. Tampoco los valores de los extremos de entrada describen necesariamente toda la imagen. En ese mismo segmento ambos extremos tienen salida cuatro, mientras el centro tiene salida cero. R5 garantiza que el segmento entre las salidas extremas está contenido en la imagen; no afirma la inclusión contraria.

Para $F(x) = x^3 + x - 1$, la continuidad polinómica de C14 y los signos $F(0) = -1$, $F(1) = 1$ garantizan una raíz en $(0, 1)$. La unicidad necesita otra prueba. Si $0 \leq x < z \leq 1$, la factorización da $F(z) - F(x) = (z - x)(z^2 + zx + x^2 + 1) > 0$. El factor $z - x$ es positivo y $z^2 + zx + x^2 + 1$ es al menos uno, por lo que F es estrictamente creciente en $[0, 1]$. Dos raíces distintas contradirían esa desigualdad. La prueba de existencia ha usado continuidad y valor intermedio; la de unicidad ha comparado algebraicamente cualquier par ordenado del segmento, sin calcular la raíz mediante una fórmula.

Ser intervalo no obliga a una imagen a ser cerrada, acotada ni a alcanzar extremos. La identidad en $(0, 1)$ tiene imagen $(0, 1)$, sin mínimo ni máximo, y la identidad en $\mathbb{R}$ tiene imagen no acotada. Los resultados de extremos alcanzados necesitarán la herramienta adicional de C16.

Ejercicios de la sección 15.5.

Ejercicio 21. Localización con orientación invertida

Sea I intervalo, $f : I \to \mathbb{R}$ continua y $u > v$ con $f(u) < y < f(v)$. Indica dónde existe un argumento con salida y y justifica por qué no es extremo.

Solución. $[v, u] \subseteq I$ por intervalaridad. La restricción continua a ese segmento tiene imagen intervalar que contiene $f(u)$ y $f(v)$, por R4 y R3. Contiene el valor intermedio y, así existe $c \in [v, u]$ con $f(c) = y$. Las desigualdades estrictas hacen y distinto de las dos salidas extremas, luego $c \neq u, v$ y $c \in (v, u)$. El orden de las salidas no tiene que coincidir con el de los argumentos.

Hay dos órdenes independientes: el de argumentos y el de valores. El segmento de argumentos se escribe $[v, u]$ porque $v < u$, mientras el nivel está entre $f(u)$ y $f(v)$ en el orden contrario. La imagen intervalar contiene el nivel sin exigir que la función sea creciente. La estrictitud de las salidas excluye los dos extremos del segmento de argumentos.

Ejercicio 22. Existencia y unicidad por pruebas distintas

Prueba que $F(x) = x^3 + x - 1$ tiene exactamente una raíz en $[0, 1]$, y que está en $(0, 1)$. No uses derivadas.

Solución. F es continua por álgebra polinomial de C14. $F(0) = -1 < 0$ y $F(1) = 1 > 0$, así R5 da una raíz interior. Para $0 \leq x < z \leq 1$, $F(z) - F(x) = (z - x)(z^2 + zx + x^2 + 1) > 0$, porque el primer factor es positivo y el segundo al menos 1. Por tanto es estrictamente creciente en el segmento y no puede tener dos ceros. Existencia e interioridad vienen del valor intermedio; unicidad viene de la desigualdad algebraica independiente.

Retorno visual. Véase C15-F04, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba. La factorización de la diferencia prueba crecimiento para cualquier par ordenado del segmento, no sólo en sus extremos. El segundo

factor incluye uno y los otros sumandos son no negativos, así nunca se anula. Dos ceros distintos contradirían ese crecimiento. La existencia usa signos opuestos y continuidad; esta desigualdad añade la unicidad que el valor intermedio por sí solo no prometía.

Ejercicio 23. Una coincidencia de dos continuas

Sean $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continuas, con $f(0) < g(0)$ y $f(1) > g(1)$. Prueba que coinciden en alguna entrada interior. ¿Se garantiza una sola coincidencia?

Solución. $h = f - g$ es continua por C14. En cero es negativa y en uno positiva, luego R5 da $c \in (0,1)$ con $h(c) = 0$, es decir $f(c) = g(c)$. No se garantiza unicidad. Por ejemplo $f(x) = (x-1/4)(x-1/2)(x-3/4)$ y $g(x) = 0$ cumplen $f(0) = -3/32 < 0$, $f(1) = 3/32 > 0$ y coinciden en tres entradas interiores distintas. Todas las funciones indicadas son polinomiales o constantes y por ello continuas.

Restar las dos funciones convierte la coincidencia en una ecuación de cero y las comparaciones extremas en signos opuestos. En el contraejemplo, los tres factores se anulan en tres puntos distintos del interior y sus productos extremos tienen los signos requeridos. Esto mantiene todas las hipótesis de existencia mientras refuta unicidad. No hace falta estudiar derivadas para ninguna de las dos conclusiones.

Ejercicio 24. Sin ceros, un signo

Sea I intervalo no vacío y $f : I \to \mathbb{R}$ continua sin ceros. Prueba que $f > 0$ en todo I o $f < 0$ en todo I. Refuta la conclusión si se elimina sólo la intervalaridad.

Solución. Fijamos $a \in I$. Como $f(a) \neq 0$, es positivo o negativo. Si fuese positivo y hubiera b con $f(b) < 0$, R5 produciría cero entre a, b, contradicción. Todos los valores son no negativos y, al no haber ceros, positivos. El caso $f(a) < 0$ es simétrico. Sin intervalaridad, $f(x) = 1/x$ en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ es continua por C14, no tiene ceros y toma -1 y 1. El punto omitido impide aplicar R5 entre esos argumentos.

La elección inicial de una sola entrada fija cuál de las dos posibilidades de signo debe verificarse globalmente. Una salida opuesta produciría un cero dentro del segmento entre ambos argumentos, contenido en el dominio por intervalaridad. En $1/x$, ese segmento incluye una entrada prohibida, cero. Por ello la continuidad relativa de esa función no habilita el paso que conectaba ambos signos.

Ejercicio 25. Inclusión no es descripción de toda la imagen

Un razonamiento afirma que para toda continua en $[a,b]$ se cumple $f[[a,b]] = [\min(f(a), f(b)), \max(f(a), f(b))]$. Da un contraejemplo y enuncia la conclusión exacta que sí aporta R5.

Solución. Para $f(x) = x^2$ en $[-2,2]$, ambos extremos valen 4, pero $f(0) = 0$. La fórmula propuesta daría sólo $\{4\}$, y es falsa. La imagen es de hecho $[0,4]$: todo cuadrado del dominio está ahí, y para cada $y \in [0,4]$ la raíz positiva $\sqrt{y} \in [0,2]$ da la preimagen. R5 garantiza la inclusión del segmento entre las dos salidas extremas dentro de la imagen. No garantiza que no haya otros valores; identificar extremos globales alcanzados requiere argumentos adicionales.

Las salidas de los extremos de entrada no tienen por qué ser los extremos de toda la imagen. En el ejemplo ambas son cuatro y existe una salida interior menor. Para demostrar la imagen exacta se prueban dos inclusiones: una por las cotas del cuadrado y otra construyendo una entrada para cada salida no negativa hasta cuatro. R5 sólo proporciona la inclusión del segmento entre valores alcanzados.

15.6. Bisección: existencia, localización y alcance del cálculo

La bisección conserva signos opuestos mientras reduce a la mitad un segmento. Esa reducción proporciona una cota de posición que el valor intermedio, por sí solo, no había dado. También permite una prueba alternativa de existencia, usando el supremo de los extremos inferiores y la continuidad aplicada a las dos rutas ya definidas. **R6. Encierros de signo.** Sean $a < b$, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, $g(a) < 0 < g(b)$. La orientación contraria se reduce

usando $-g$. Definimos $L_0 = a$, $U_0 = b$. Si alguna evaluación de un punto medio da cero, ya hay un testigo exacto y detenemos el proceso. Mientras eso no ocurra, para $n \geq 0$ ponemos $M_n = (L_n + U_n)/2$ y

$$(L_{n+1}, U_{n+1}) = \begin{cases} (M_n, U_n), & g(M_n) < 0, \\ (L_n, M_n), & g(M_n) > 0. \end{cases}$$

La tricotomía clásica determina cuál de los dos casos se aplica cuando el valor no es cero. Cada transición es única y no requiere escoger una entrada arbitraria. Por inducción, los segmentos quedan anidados, se conserva $L_n \leq U_n$ y $g(L_n) < 0 < g(U_n)$, y su longitud es $U_n - L_n = \frac{b-a}{2^n}$. Para $n = 0$ tenemos el segmento original y sus signos dados. En un paso que continúa, el punto medio sustituye al extremo de su mismo signo, mientras el otro extremo permanece. Se conservan así los signos opuestos y el nuevo segmento es una mitad del anterior. Esto prueba simultáneamente el anidamiento y la fórmula de longitud mientras no haya detención por un cero exacto.

En el caso en que el proceso no se detiene, el conjunto $\{L_n : n \in \mathbb{N}\}$ contiene a y está acotado superiormente por b, por lo que tiene supremo c. Para situarlo en cada encierro, fijemos n y comparemos U_n con cualquier L_k. Si $k \leq n$, los inferiores crecen y $L_k \leq L_n \leq U_n$; si $k > n$, el anidamiento da $L_k \leq U_k \leq U_n$. Así U_n acota todos los inferiores y, como L_n es uno de ellos,

$L_n \leq c \leq U_n$, $\quad c \in [a, b]$. Las distancias satisfacen $0 \leq c - L_n \leq (b-a)/2^n$ y $0 \leq U_n - c \leq (b-a)/2^n$. La escala geométrica de C06 tiende a cero y prueba $L_n \to c$, $U_n \to c$. La continuidad de g transporta esas rutas dadas hacia $g(c)$, usando sólo la dirección secuencial directa de C14. Como $g(L_n) < 0$, su límite no puede ser positivo: si lo fuera, una tolerancia de la mitad de ese valor forzaría términos positivos a partir de un corte. Por ello $g(c) \leq 0$. El argumento simétrico con $g(U_n) > 0$ da $g(c) \geq 0$. Concluimos $g(c) = 0$ sin usar compacidad ni seleccionar rutas infractoras.

El punto c está en todos los encierros. Como el medio divide cada uno en dos distancias iguales, $|M_n - c| \leq \frac{U_n - L_n}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$. Para garantizar error posicional estrictamente menor que $\tau > 0$, elegimos n con $(b-a)/2^{n+1} < \tau$. La cota de error es no estricta, por lo que igualar esa cota a τ sólo garantizaría error menor o igual que la tolerancia. Si el proceso se detuvo antes, el testigo exacto tiene error cero. En el caso infinito, la recurrencia localiza un cero sin demostrar que sea el único; tampoco afirma que alguno de los medios sea una raíz.

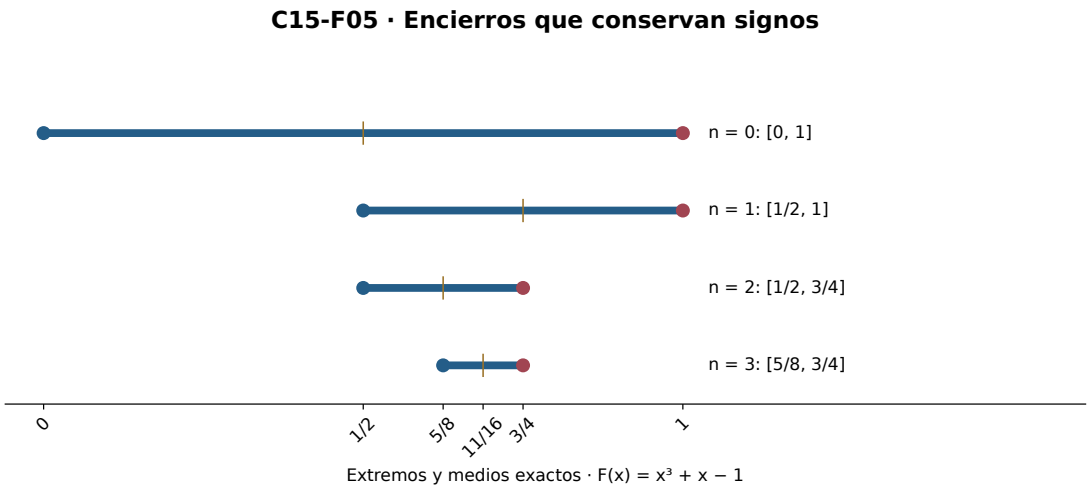


Figura 15.5. Encierros tras 0, 1, 2 y 3 actualizaciones. Extremos inferiores negativos y superiores positivos; la marca central indica el medio de cada encierro. En n=3 el medio es 11/16 y su error posicional respecto de la raíz encerrada es a lo sumo 1/16. No se afirma error residual ni raíz exacta en el medio.

En $F(x) = x^3 + x - 1$, los medios $M_0 = 1/2$, $M_1 = 3/4$ y $M_2 = 5/8$ tienen valores exactos $-3/8$, $11/64$ y $-67/512$. Sus signos llevan sucesivamente a $[1/2, 1]$, $[1/2, 3/4]$ y $[5/8, 3/4]$. Tras tres actualizaciones el medio es $M_3 = 11/16$ y dista a lo sumo $1/16$ del cero encerrado. Esa cota usa la longitud del último segmento; no requiere evaluar $F(11/16)$.

La longitud controla distancias entre argumentos, pero no determina por sí sola un residual $|g(M_n)|$. Multiplicar una función por una constante positiva conserva raíces y signos y amplifica el residual sin cambiar el encierro. Un módulo cuantitativo de variación conocido permitiría convertir una distancia de entrada en una cota de salida; las hipótesis presentes no proporcionan una fórmula universal de ese tipo. La recurrencia matemática tampoco entrega un procedimiento de evaluación para una función arbitraria. La tricotomía distingue los tres casos de un valor real exacto, mientras un programa necesita certificados que decidan el signo o la igualdad. Si una evaluación certificada contiene cero junto con valores positivos y negativos, no autoriza ninguna de las dos actualizaciones ni la detención como raíz exacta. Se debe refinar la evaluación o conservar el encierro anterior con el signo aún sin decidir.

Ejercicios de la sección 15.6.

Ejercicio 26. Tres actualizaciones exactas

Aplica tres actualizaciones de bisección a $F(x) = x^3 + x - 1$ desde $[0, 1]$, empezando en $n = 0$. Calcula signos exactos, encierro final, medio final y su cota posicional.

Solución. $M_0 = 1/2$ y $F(M_0) = 1/8 + 1/2 - 1 = -3/8 < 0$, así $[L_1, U_1] = [1/2, 1]$. $M_1 = 3/4$ y $F(M_1) = 27/64 + 48/64 - 64/64 = 11/64 > 0$, así $[L_2, U_2] = [1/2, 3/4]$. $M_2 = 5/8$ y $F(M_2) = 125/512 + 320/512 - 512/512 = -67/512 < 0$, así $[L_3, U_3] = [5/8, 3/4]$. Su medio es $M_3 = 11/16$. La raíz encerrada c satisface $|M_3 - c| \leq (3/4 - 5/8)/2 = 1/16$. Se usaron tres evaluaciones/actualizaciones; no se evaluó M_3 para obtener esta cota.

Retorno visual. Véase C15-F05, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba. Cada signo se calcula con fracciones exactas antes de decidir qué extremo sustituir. Los intervalos finales siguen conteniendo la raíz porque conservan signos opuestos y quedan anidados. El índice del medio final es tres tras las tres actualizaciones de índices cero, uno y dos. La cota $1/16$ procede de la geometría del encierro y no de aproximar el residual en $11/16$.

Ejercicio 27. Número de actualizaciones

Con encierro inicial de longitud 3, encuentra un número de actualizaciones que garantice error del medio estrictamente menor que $1/1000$. Da la regla general y explica la estrictitud.

Solución. Después de n actualizaciones, el error es a lo sumo $3/2^{n+1}$. Buscamos que esa cota sea estrictamente menor que $1/1000$, equivalente a $2^{n+1} > 3000$. Para $n = 11$, $2^{12} = 4096 > 3000$, así sirve; $n = 10$ no lo garantiza pues $2048 < 3000$. En general se elige $n \in \mathbb{N}$ con $2^{n+1} > (b - a)/\tau$. Una cota igual a τ sólo garantiza error menor o igual, no estricto. Si hubo cero exacto antes, se dispone de error cero.

La desigualdad buscada se aplica a una cota no estricta de error, por lo que esa cota debe quedar estrictamente por debajo de la tolerancia. Once actualizaciones garantizan lo pedido; diez no dan esa garantía a partir de la fórmula, aunque alguna raíz particular pudiera estar más cerca del medio. La regla general contabiliza actualizaciones, no el número escrito en el subíndice del primer medio.

Ejercicio 28. El cero límite sin compacidad

En el caso infinito de bisección, prueba que $c = \sup\{L_n\}$ pertenece a todos los encierros y que $g(c) = 0$. No cites un teorema de intervalos anidados ni compacidad.

Solución. Los L_n están acotados por b y el conjunto no vacío tiene supremo c. Para un n fijo, si $k \leq n$, $L_k \leq L_n \leq U_n$; si $k > n$, anidamiento da $L_k \leq U_k \leq U_n$. Así U_n es cota de todos los inferiores y $L_n \leq c \leq U_n$. En particular $c \in [a, b]$. De $0 \leq c - L_n \leq (b - a)/2^n$ y $0 \leq U_n - c \leq (b - a)/2^n$ resultan ambas convergencias a c. Continuidad directa da $g(L_n), g(U_n) \to g(c)$. Una sucesión negativa no puede converger a un real positivo, pues

una tolerancia de la mitad de ese real haría los términos positivos; análogamente la positiva no converge a negativo. Así $g(c) \leq 0$ y $g(c) \geq 0$, luego vale cero. No se usó selección de rutas ni recíproca secuencial.

El supremo existe por no vacuidad y acotación del conjunto de inferiores. Cada superior es cota de todos ellos, lo que coloca c en cada encierro sin citar compacidad. Las longitudes geométricas tienden a cero y controlan por arriba las dos distancias a c. Después los signos de las salidas restringen su límite común a ser a la vez no positivo y no negativo, forzando exactamente cero.

Ejercicio 29. Longitud frente a residual

Refuta que exista una cota del residual del medio determinada sólo por la longitud del encierro y los signos opuestos en sus extremos, válida para toda función continua. Construye ejemplos lineales para una longitud $\ell > 0$ fija.

Solución. Para $A > 0$ definimos $g_A(x) = A(x - \ell/4)$ en $[0, \ell]$. Es continua, $g_A(0) = -A\ell/4 < 0$, $g_A(\ell) = 3A\ell/4 > 0$, y su raíz es $\ell/4$. El medio $\ell/2$ tiene error posicional $\ell/4$, compatible con la cota $\ell/2$, pero residual $|g_A(\ell/2)| = A\ell/4$. Dado cualquier candidato finito $B \geq 0$ para esa longitud, elegimos $A > 4B/\ell$, y el residual supera B. La longitud no controla la escala vertical; haría falta información cuantitativa adicional de la función.

La escala A cambia sólo la magnitud vertical de la función: la raíz y el intervalo de argumentos permanecen fijos. Por ello puede hacerse crecer el residual tanto como se quiera mientras la longitud y los signos extremos no cambian. El candidato B se fija primero, y sólo después se elige A que lo infrinja. Ese orden refuta una cota universal dependiente únicamente de la longitud.

Ejercicio 30. Una evaluación incierta

Un programa devuelve una inclusión certificada $g(M) \in [-10^{-6}, 2 \cdot 10^{-6}]$ y actualiza el extremo inferior afirmando «es prácticamente negativo». Evalúa esa decisión e indica qué datos autorizan las actualizaciones o la detención exacta.

Solución. La inclusión permite valores negativos, cero y positivos, por lo que no certifica $g(M) < 0$. Sustituir el extremo inferior puede destruir el invariante si el valor es positivo. Un certificado contenido estrictamente en $(-\infty, 0)$ autoriza reemplazar el inferior; uno contenido estrictamente en $(0, \infty)$ autoriza reemplazar el superior. Una igualdad exacta certificada $g(M) = 0$ autoriza detener con raíz exacta. Si el intervalo de evaluación contiene cero, se requiere refinar o conservar el encierro anterior y declarar que no se decidió el signo; no se deduce igualdad de una tolerancia pequeña. La recurrencia clásica no proporciona por sí sola esos certificados computacionales.

El intervalo certificado contiene valores estrictamente negativos y positivos. Ambos son compatibles con el dato recibido, pero exigen actualizaciones opuestas. Elegir el extremo inferior sin decidir el signo puede dejar dos extremos positivos y perder la garantía de raíz encerrada. Refinar la evaluación puede ayudar, pero mientras no haya certificado suficiente se conserva el intervalo ya validado.

15.7. Inyectividad, orden y continuidad de la inversa

En C14 una biyección continua con dominio separado tenía inversa discontinua. Cuando el dominio es un intervalo, el valor intermedio impide que una función inyectiva forme un pico o un valle, y esa restricción impondrá una orientación global de sus valores. El orden proporcionará después barreras para la inversa. **R7. Una inyección continua en un intervalo es estrictamente monótona y es un homeomorfismo sobre su imagen.** Sea $f : I \to \mathbb{R}$ continua e inyectiva. Para vacío y singleton la monotonía estricta, entendida como condición sobre pares distintos ordenados, es vacía; la inversa sobre la imagen es continua. Supongamos que I tiene al menos dos puntos.

Tomemos $x < y < z$ en I. La inyectividad hace distintas sus tres salidas. Si $f(y)$ fuera mayor que las otras dos, elegiríamos w estrictamente entre $\max(f(x), f(z))$ y $f(y)$, por

ejemplo su punto medio. El nivel es estrictamente intermedio en ambos segmentos de salidas, así que R5 da $s \in (x, y)$ y $t \in (y, z)$ con $f(s) = w = f(t)$. Las posiciones $s < y < t$ garantizan dos entradas distintas, contra inyectividad. Si $f(y)$ fuera menor que las otras dos, un nivel entre ella y $\min(f(x), f(z))$ produce la misma contradicción. Por tanto $f(y)$ está estrictamente entre $f(x)$ y $f(z)$.

Para extender esa orientación a todo el intervalo, fijamos $a < b$ en I y supongamos $f(a) < f(b)$; el caso opuesto se reduce a $-f$. Dado cualquier par $x < y$, ordenamos los puntos distintos de $\{a, b, x, y\}$ como $t_1 < \cdots < t_m$. Si $m = 2$, los dos pares coinciden y la conclusión ya está dada. Si $m \geq 3$, en cada triple consecutivo las diferencias adyacentes tienen el mismo signo estricto, porque el valor central está entre los otros dos. La cadena finita propaga ese signo a todas las diferencias. Si fuera negativo, sumando entre las posiciones de a y b obtendríamos $f(b) < f(a)$, contradicción. Todas son positivas, y al sumar entre x e y queda $f(y) > f(x)$. El par arbitrario puede estar fuera del segmento inicial: la lista ordenada trata también esa posibilidad.

La imagen $J = f[I]$ es intervalo por R4 y R3. Cada $y \in J$ tiene una entrada por definición de imagen, y la inyectividad la hace única, definiendo $h : J \to I$. Para probar continuidad de h en el caso creciente, fijemos $y_0 = f(x_0)$ y $\varepsilon > 0$. Debemos impedir que una salida cercana a y_0 proceda de una entrada con distancia al menos ε de x_0.

Si existe una entrada de I menor o igual que $x_0 - \varepsilon$, el punto $\ell = x_0 - \varepsilon/2$ está entre ella y x_0, y la propiedad intervalar garantiza $\ell \in I$. Su evaluación está por tanto definida y la monotonía da $\eta_- = y_0 - f(\ell) > 0$. Si no existe una entrada tan a la izquierda, todas cumplen ya $x > x_0 - \varepsilon$ y ese lado no necesita exclusión; ponemos $\eta_- = 1$. Simétricamente, si hay alguna entrada mayor o igual que $x_0 + \varepsilon$, usamos $r = x_0 + \varepsilon/2 \in I$ y $\eta_+ = f(r) - y_0 > 0$; si no la hay, ponemos $\eta_+ = 1$.

Sea $\eta = \min(\eta_-, \eta_+) > 0$ y tomemos $y \in J$ con $|y - y_0| < \eta$. Su entrada $x = h(y)$ no puede cumplir $x \leq x_0 - \varepsilon$: en tal caso la barrera izquierda existe y $x < \ell$, así que $y = f(x) < f(\ell) = y_0 - \eta_-$ contradice la proximidad. Si $x \geq x_0 + \varepsilon$, la barrera derecha da $y > y_0 + \eta_+$ y la misma contradicción. Resulta $|h(y) - h(y_0)| < \varepsilon$. Cuando un lado no ofrece entradas lejanas, el radio positivo arbitrario asignado a ese lado permite formar el mínimo sin evaluar un punto exterior. La prueba incluye así los extremos del intervalo.

Si f es decreciente, $-f$ es creciente y tiene inversa continua por el caso probado. Para recuperar la inversa de f componemos esa inversa con $y \mapsto -y$, continua por C14. Junto con la continuidad de f y su biyectividad sobre J, queda demostrado el homeomorfismo $I \to J$.

Las tolerancias de la inversa se obtuvieron de diferencias positivas de valores en las barreras, sin exigir una cota lineal inferior ni una derivada. La continuidad directa sigue siendo una hipótesis propia: la función $k(x) = x$ para $x < 0$ y $k(x) = x + 1$ para $x \geq 0$ es estrictamente creciente, también al comparar puntos de ramas distintas, pero salta en cero. Sus entradas negativas se aproximan al centro con salidas próximas a cero, mientras $k(0) = 1$; la imagen omite $[0, 1)$. El crecimiento estricto permite ese salto cuando falta continuidad.

Ejercicios de la sección 15.7.

Ejercicio 31. Excluir un pico por dos fibras

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ continua e inyectiva y $x < y < z$ en I. Prueba que $f(y)$ está estrictamente entre $f(x)$ y $f(z)$, sin derivadas.

Solución. Inyectividad hace distintos los tres valores. Si $f(y) > \max(f(x), f(z))$, tomamos $w = (f(y) + \max(f(x), f(z)))/2$. Es estrictamente intermedio en cada par de salidas de $[x, y]$ y $[y, z]$. R5 entrega $s \in (x, y)$ y $t \in (y, z)$ con $f(s) = w = f(t)$; como $s < t$, contradice inyectividad. Si $f(y) < \min(f(x), f(z))$, usamos el punto medio entre esas dos cantidades y repetimos. Las posibilidades restantes son precisamente $f(x) < f(y) < f(z)$ o $f(z) < f(y) < f(x)$.

El nivel elegido en el pico supera ambas salidas extremas y queda por debajo de la salida central. Así R5 se aplica en los dos subsegmentos y produce argumentos interiores. En el

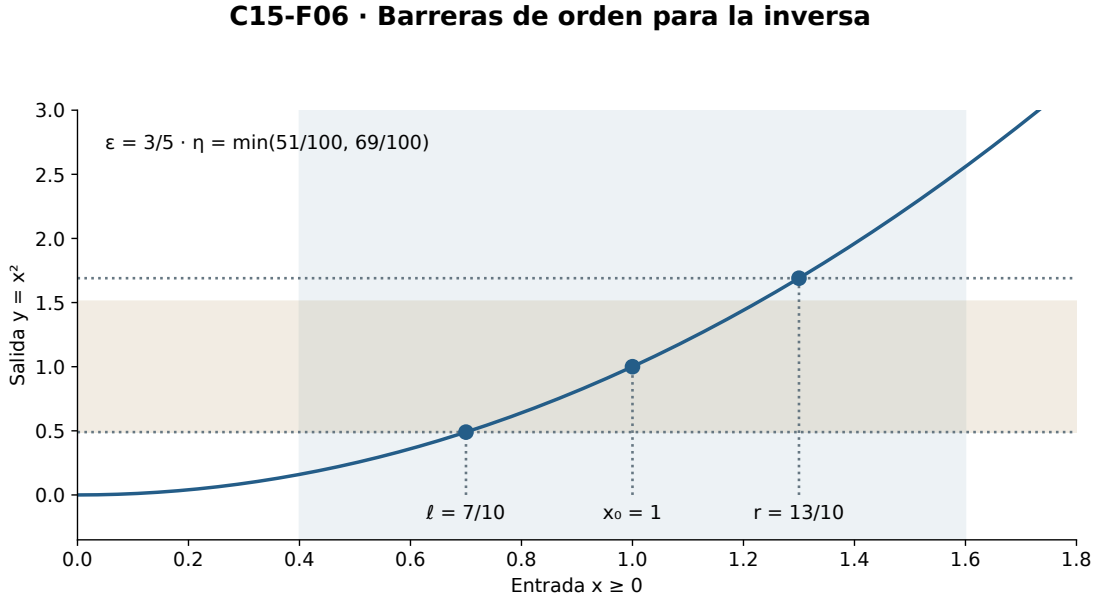


Figura 15.6. Para f(x)=x² en [0,∞), x_0=1 y ε=3/5, las barreras 7/10 y 13/10 están dentro de la zona permitida (2/5,8/5). Sus distancias de salida a 1 son 51/100 y 69/100. La tolerancia η=51/100 impide que una preimagen de salida cercana cruce las barreras. Bandas abiertas según las desigualdades estrictas de R7.

valle se invierten las desigualdades y el mecanismo es el mismo. La inyectividad sólo se contradice cuando los dos argumentos son distintos, y su posición a ambos lados de y acredita precisamente eso.

Ejercicio 32. Propagar una orientación

Explica detalladamente cómo la propiedad entre triples de E031, junto con un par $a < b$ con $f(a) < f(b)$, fuerza $f(x) < f(y)$ para todo $x < y$ del intervalo.

Solución. Ordenamos los puntos distintos de $\{a, b, x, y\}$ como $t_1 < \cdots < t_m$, con $2 \le m \le 4$. Si $m = 2$, ambos pares son el mismo y la conclusión está dada. Si $m \ge 3$, para cada triple consecutivo la propiedad implica que las diferencias adyacentes $f(t_{i+1}) - f(t_i)$ y $f(t_{i+2}) - f(t_{i+1})$ tienen igual signo estricto. Por propagación a lo largo de la lista todas tienen el mismo signo. Si fuese negativo, sumando las diferencias entre las posiciones de a y b resultaría $f(b) < f(a)$, contradicción. Todas son positivas; sumando entre x e y obtenemos $f(y) > f(x)$. El procedimiento trata puntos exteriores al par fijado y no se limita a un subintervalo.

Ordenar el conjunto finito elimina repeticiones si alguno de los puntos coincide. Las diferencias adyacentes son no nulas porque cada triple tiene orden estricto de salidas. La propiedad de triples encadena sus signos, y la suma entre a y b fija el signo común como positivo. Finalmente se suman las diferencias entre x e y, sin importar dónde esté ese par respecto del primero.

Ejercicio 33. Barrera en un extremo del dominio

Para $f : [0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, prueba continuidad de la inversa en el valor 0 por una barrera de orden, sin invocar un teorema de raíces continuas. Da un radio para cada $\varepsilon > 0$.

Solución. La imagen es $J = [0, 1)$: los cuadrados pertenecen a ese intervalo y cada $y \in J$ tiene raíz no negativa menor que 1. La función es inyectiva creciente ahí, pues para $0 \le x < z < 1$, $z^2 - x^2 = (z - x)(z + x) > 0$. Su inversa h está definida. Si $0 < \varepsilon < 1$, tomamos el punto barrera $r = \varepsilon/2 \in [0, 1)$ y $\eta = r^2 = \varepsilon^2/4$. Si $y \in J$ y $|y| < \eta$, su preimagen no puede ser $x \ge \varepsilon$, pues entonces $x > r$ y $y = x^2 > r^2 = \eta$. Así $|h(y) - h(0)| = x < \varepsilon$. Si $\varepsilon \ge 1$, toda

preimagen satisface $0 \le x < 1 \le \varepsilon$, por lo que sirve $\eta = 1$. No hay barrera izquierda porque todas las entradas son no negativas.

Retorno visual. Véase C15-F06, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba. No usamos continuidad previa de la raíz, sino existencia algebraica de una entrada no negativa y monotonía del cuadrado. Para precisiones pequeñas, la barrera está dentro del dominio y su salida positiva fija el radio. Una entrada a distancia al menos ε produciría una salida más allá de la barrera, imposible bajo ese radio. Para precisiones al menos uno, el propio tamaño del dominio ya da la distancia estricta requerida.

Ejercicio 34. Crecimiento con salto

Sea $k(x) = x$ si $x < 0$ y $k(x) = x + 1$ si $x \ge 0$. Prueba estricto crecimiento, refuta continuidad en cero y calcula la imagen. ¿Qué premisa de R7 falta?

Solución. En cada rama la diferencia entre salidas es la diferencia entre entradas y es positiva. Si $x < 0 \le z$, $k(x) = x < 0 < 1 \le z + 1 = k(z)$, así también crece entre ramas. Pero $k(0) = 1$; dado $\delta > 0$, $x = -\min(\delta/2, 1/2)$ tiene $|x| < \delta$ y $|k(x) - k(0)| = 1 - x > 1$, refutando continuidad con tolerancia 1. La imagen es $(-\infty, 0) \cup [1, \infty)$, no intervalo. Falta continuidad en la premisa de R7; estricto crecimiento solo no la garantiza.

La comparación entre ramas completa la prueba de crecimiento, que no quedaría acreditada examinándolas por separado. El testigo negativo para cada radio muestra un error central que nunca baja de uno. La imagen omite cero y todos los valores hasta uno, aunque el dominio sea la recta. Es justamente continuidad la que faltaría para aplicar preservación de intervalos y R7.

Ejercicio 35. Por qué el dominio intervalar importa para la inversa

Retoma $D = [0, 1) \cup [2, 3]$ y $f(x) = x$ en la primera pieza, $f(x) = x - 1$ en la segunda. Prueba biyección continua a $[0, 2]$ e inversa discontinua en 1. Identifica exactamente qué hipótesis impide usar R7.

Solución. Las imágenes de las piezas son $[0, 1)$ y $[1, 2]$, disjuntas y exhaustivas de $[0, 2]$; cada rama es inyectiva, de modo que f es biyección. En cualquier centro de D, el radio $\delta = \min(1/2, \varepsilon)$ evita la otra pieza y dentro de la misma rama el error de salida es la distancia de entradas, menor que ε. Así f es continua relativa. La inversa vale $h(y) = y$ para $y < 1$ y $h(y) = y + 1$ para $y \ge 1$, luego $h(1) = 2$. Dado $\eta > 0$, $t = \min(\eta/2, 1/2) > 0$ da $y = 1 - t \in [0, 1)$ con $|y - 1| < \eta$ y $|h(y) - 2| = 1 + t > 1$. Falla continuidad con tolerancia 1. D omite puntos entre 0 y 2 y no es intervalo; ésa es la premisa faltante de R7.

El radio auxiliar medio mantiene cada entrada próxima en la misma pieza, justificando continuidad sin conectar las piezas del dominio. Al invertir, las salidas inferiores a uno llegan arbitrariamente cerca de la salida de la entrada dos. Sus preimágenes siguen separadas de dos por más de uno. La falta de intervalaridad impide construir las barreras intermedias usadas en R7.

15.8. Componentes: los intervalos máximos dentro de un dominio

Dentro de un dominio que no es conexo podemos reconocer sus regiones conexas máximas mediante los segmentos que realmente contiene. Para $x, y \in D \subseteq \mathbb{R}$ definimos

$$x \sim y \quad \Longleftrightarrow \quad [\min(x, y), \max(x, y)] \subseteq D.$$

R8. Componentes reales. Esta relación es de equivalencia. La reflexividad usa $[x, x] = \{x\} \subseteq D$, y la simetría se sigue de que el mínimo y el máximo no cambian al permutar x, y. Si $x \sim y$ y $y \sim z$, los dos segmentos están en D y comparten y. Su unión es intervalo por §15.3 y contiene x, z, por lo que contiene también el segmento entre ellos. Así $x \sim z$, sea cual sea la posición de y respecto de los otros dos puntos.

Para cada $x \in D$, consideremos la clase $C_x = \{y \in D : x \sim y\}$. Si $u, v \in C_x$, simetría y transitividad dan $u \sim v$, de modo que el segmento entre ellos está en D. Cada punto t de

ese segmento satisface $u \sim t$, pues el segmento menor entre u y t sigue dentro de él. Como $x \sim u$, obtenemos $x \sim t$ y por tanto $t \in C_x$. La clase es intervalo y R2 la hace conexa.

La clase es además el mayor conexo de D que contiene x. En efecto, si $E \subseteq D$ es conexo y $x \in E$, R3 lo hace intervalo. Para cualquier $y \in E$, el segmento entre x, y está en $E \subseteq D$, así que $y \in C_x$ y $E \subseteq C_x$. Llamamos **componente conexa** a cada clase. Las clases cubren D porque $x \sim x$. Si dos comparten un punto, la simetría y transitividad hacen que cada miembro de una pertenezca a la otra, y son iguales; por tanto dos componentes distintas son disjuntas. Todo conexo no vacío se incluye en una sola al fijar uno de sus puntos y aplicar maximalidad. La familia de todas las clases se define reuniendo los C_x para $x \in D$, con sus repeticiones eliminadas como conjuntos, sin seleccionar un representante por componente.

Cada componente es cerrada relativa a D. Para probarlo, fijemos $z \in D$ adherente a C_x. Si $z = x$, ya pertenece a la clase. Si $x < z$, tomemos cualquier t con $x < t < z$. La adherencia proporciona $w \in C_x$ con $|w - z| < (z - t)/2$, y por ello $w > t$. El segmento entre x y w está en D y contiene t. Como esto vale para todo punto intermedio y los extremos x, z pertenecen a D, queda $[x, z] \subseteq D$ y $z \in C_x$.

Si $z < x$, para cada $z < t < x$ usamos la bola de z de radio $(t - z)/2$. Un miembro w de la clase dentro de ella cumple $w < t$, y el segmento entre w y x incluye t y está en D. Los extremos vuelven a estar en el dominio, así que $[z, x] \subseteq D$ y $z \in C_x$. Todos los puntos adherentes que pertenecen a D quedan en la clase, lo que prueba el cierre relativo por el criterio de C04/C14. No se incorporan puntos exteriores al dominio.

Las componentes no siempre son abiertas relativas. En $D = \{0\} \cup \{1/(n+1) : n \in \mathbb{N}\}$, todos los puntos son racionales. Entre dos distintos hay un irracional por C04 y ese punto falta en D; ninguna clase puede contener ambos. Todas las componentes son entonces singletons, incluido $\{0\}$. Sin embargo, ninguna bola relativa aísla cero: dado $r > 0$, la arquimedianidad proporciona un n con $0 < 1/(n + 1) < r$.

Los puntos positivos sí están aislados. Si $t_n = 1/(n + 1)$ y $n \geq 1$, la mitad del mínimo de las distancias a t_{n-1} y t_{n+1} da un radio que sólo contiene t_n al recortarlo por D. Para $t_0 = 1$ sirve $1/4$, pues los otros positivos son a lo sumo $1/2$. Sus singletons son abiertos relativos; el de cero es una componente cerrada relativa sin ser abierta relativa. Ser componente singleton no equivale a ser punto aislado.

C15-F07 · Una componente puede no ser abierta

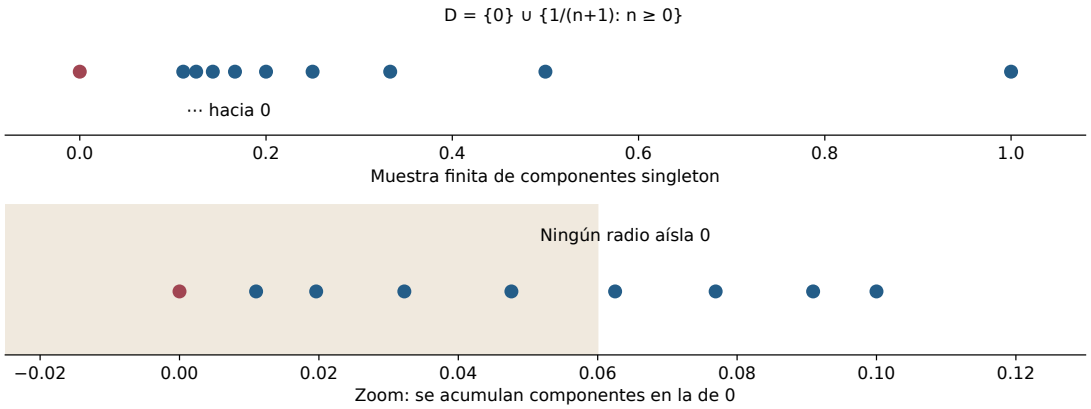


Figura 15.7. Cada punto de D es una componente, porque entre dos puntos racionales distintos hay un irracional fuera de D. Los puntos positivos son aislados; cero no lo es. Los paneles muestran sólo muestras finitas; la arquimedianidad prueba que cualquier radio en cero contiene otro punto del dominio.

En $\mathbb{Q}$, la densidad irracional impide también que una componente contenga dos puntos. Ninguno de sus singletons es abierto relativo, porque la densidad racional da otro racional

en toda bola de su punto. En $(0,1)$, en cambio, la única componente es el dominio completo, cerrado respecto de sí mismo aunque no sea cerrado en la recta. El ambiente limita la afirmación de cierre, y el aislamiento determina por separado la apertura de un singleton.

La imagen de cada componente por una continua es conexa por R4 y queda dentro de una componente de la imagen. Puede haber fusiones: una constante en $\{-1,1\}$ lleva sus dos componentes a un mismo singleton. Para un homeomorfismo, el transporte es exacto. Si K es la componente de $f(x)$, la imagen $f[C_x]$ es conexa y queda en K. La inversa continua hace conexo $f^{-1}[K]$, que contiene x y queda en C_x por maximalidad. Aplicando la biyección f resulta $K \subseteq f[C_x]$; ambas inclusiones dan $f[C_x] = K$. Cada dirección continua cumple una parte distinta de la prueba.

Las componentes permiten describir hasta dónde un dominio conserva segmentos y qué regiones pueden fusionarse bajo una función continua. Su cierre relativo no las vuelve abiertas ni aisladas, como muestra la componente de cero en los recíprocos acumulados. La geometría de los intervalos sigue siendo la que decide qué puntos pueden pertenecer a una misma región conexa.

Ejercicios de la sección 15.8.

Ejercicio 36. Relación por segmentos

Prueba reflexividad, simetría y transitividad de $x \sim y \Leftrightarrow [\min(x,y), \max(x,y)] \subseteq D$. Después prueba que cada clase es intervalo.

Solución. Reflexividad usa $[x,x] = \{x\} \subseteq D$; simetría usa que min/max no cambian al permutar. Si $x \sim y$ y $y \sim z$, los dos segmentos comparten y y su unión es intervalo contenido en D, por §15.3; contiene x, z, luego también el segmento entre ellos. Así $x \sim z$. Si u, v están en C_x, transitividad da $u \sim v$. Todo t entre ellos está en D y satisface $u \sim t$ porque su segmento con u queda en el de u, v. De $x \sim u$ resulta $x \sim t$, así $t \in C_x$. Es intervalo.

La transitividad se aplica también cuando el punto compartido y no está entre x y z, porque la unión de sus dos segmentos no tiene huecos. Para intervalaridad de una clase, pertenecer a D no basta: además cada punto intermedio debe relacionarse con x. El segmento menor que lo une a u y la transitividad proporcionan esa segunda obligación.

Ejercicio 37. Un dominio con tres componentes

Determina y justifica las componentes de $D = (-2,-1] \cup \{0\} \cup [1,3)$. Indica cuáles son abiertas relativas y cuáles cerradas relativas.

Solución. Las tres piezas son intervalos, luego conexas. Ningún conexo de D puede tocar dos piezas: si tocara la izquierda y otra, omitiría un punto entre -1 y 0, como $-1/2$; si tocara cero y la derecha, omitiría $1/2$. Por R3 no sería conexo. Cada pieza es por tanto máxima y es componente. Son todas abiertas relativas: la izquierda es $D \cap (-\infty, -1/2)$, el singleton $D \cap (-1/2, 1/2)$ y la derecha $D \cap (1/2, \infty)$. También son cerradas relativas por R8 o porque el complemento de cada una es unión de las otras dos abiertas relativas. No todas son cerradas reales, pues los extremos -2 y 3 faltan.

Cada pieza es conexa por ser intervalo, incluidos sus extremos según la definición del dominio. Para maximalidad, cualquier conjunto que toque dos piezas tendría que incluir un punto ausente entre ellas si fuese conexo. Los rayos y el intervalo abierto central exhiben apertura relativa de las tres piezas. Sus complementos relativos son uniones de las otras dos abiertas y prueban cerradura relativa sin exigir incluir extremos exteriores ausentes.

Ejercicio 38. Componentes acumuladas sin apertura

Para $D = \{0\} \cup \{1/(n+1) : n \in \mathbb{N}\}$, prueba que todas las componentes son singletons. Decide apertura relativa de cada una y explica por qué cerradura relativa no basta para apertura.

Solución. Todos los puntos de D son racionales. Entre dos distintos hay un irracional por densidad de irracionales; éste no pertenece a D. El segmento entre los puntos no queda en D, así ninguna clase contiene dos puntos. Para $t_n = 1/(n+1)$ con $n \geq 1$, las distancias a sus vecinos t_{n-1} y t_{n+1} son positivas; la mitad del menor de ellas da una bola relativa que sólo contiene t_n. Para $n = 0$, basta la mitad de $t_0 - t_1 = 1/2$, es decir $1/4$, pues todos los otros positivos son a lo sumo $1/2$. Así los singletons positivos son abiertos relativos. $\{0\}$ no lo es: para cada $r > 0$, arquimedianidad da n con $0 < t_n < r$. Todos los singletons son cerrados reales y por ello relativos, pero sólo la apertura de una vecindad determina aislamiento. La componente de cero es cerrada sin ser abierta relativa.

Retorno visual. Véase C15-F07, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba. Los huecos irracionales impiden unir por un segmento dos entradas cualesquiera, así la descripción por singletons incluye también cero. Para cada punto positivo, los vecinos consecutivos de la sucesión dan una distancia aislante; cero está aún más lejos que el siguiente vecino positivo. En cero no existe escala aislante porque los positivos convergen a él. Tener todas las componentes cerradas no ofrece una vecindad contenida en cada una.

Ejercicio 39. Cerradura relativa desde la adherencia

Prueba que una componente C_x es cerrada relativa a D usando un punto $z \in D$ adherente a ella. Desarrolla ambos órdenes de x, z y refuta la afirmación de cerradura absoluta universal.
Solución. Si $z = x$, ya está en C_x. Si $x < z$, para todo $x < t < z$ la adherencia da $w \in C_x$ con $|w - z| < (z - t)/2$, así $w > t$. Como el segmento entre x, w está en D, $t \in D$. Los extremos x, z pertenecen a D, así $[x, z] \subseteq D$ y $z \in C_x$. Si $z < x$, para $z < t < x$ usamos radio $(t - z)/2$ alrededor de z, obteniendo $w < t$ en C_x; el segmento entre w, x contiene t y está en D. De nuevo $[z, x] \subseteq D$, luego $z \in C_x$. Todos los puntos adherentes que están en D quedan en la clase, criterio de cierre relativo. En $D = (0, 1)$ hay una componente única $(0, 1)$, cerrada relativa a sí misma pero no cerrada real porque cero es adherente exterior.

La vecindad de adherencia se diseña para encontrar un miembro de la clase al otro lado del punto intermedio t. El segmento que lo conecta con x coloca a t en D. Hacer esto para todo punto entre x y z, junto con la pertenencia de ambos extremos, completa el segmento y relaciona a z con x. La condición $z \in D$ es esencial para el extremo y delimita la conclusión como cerradura relativa.

Ejercicio 40. Transportar o fusionar componentes

Prueba que un homeomorfismo transporta exactamente las componentes de su dominio a las de su codominio. Da una continua que fusione dos componentes y explica qué paso de la prueba deja de funcionar.
Solución. Sea $f : D \to H$ homeomorfismo, C componente de x. R4 hace conexo $f[C]$, que contiene $f(x)$ y queda en la componente K de ese punto por maximalidad. La inversa continua hace conexo $f^{-1}[K]$, que contiene x y por maximalidad está en C. Aplicando la biyección f obtenemos $K \subseteq f[C]$, y las dos inclusiones dan igualdad. La constante $\{-1, 1\} \to \{0\}$ es continua en el dominio relativo y fusiona sus dos componentes singleton en una sola. No existe inversa funcional, mucho menos continua, por lo que no puede transportarse K hacia atrás para aplicar maximalidad. Una continua general sólo garantiza imagen conexa dentro de una componente.

Las dos inclusiones utilizan funciones continuas diferentes: f para incluir la imagen de C en K, y la inversa para incluir el retorno de K en C. La biyección permite convertir esta segunda inclusión en la opuesta dentro del codominio. En la constante que fusiona dos componentes falla ese retorno funcional, por lo que continuidad hacia delante sólo conserva conexidad de cada imagen por separado.

Capítulo 16

Compacidad: del control local al control finito

Si una función continua nunca se anula, cada punto dispone de una vecindad donde sus valores permanecen separados de cero. Esos márgenes locales pueden reducirse al variar el punto y no dar una barrera positiva común. En un dominio compacto no vacío, la función alcanzará un mínimo positivo de su magnitud. El recurso que permite obtener esa conclusión consiste en reducir cualquier cubierta abierta dada a una subfamilia finita que todavía cubra todo el dominio.

La prueba comenzará con segmentos y el supremo de C00, usando los abiertos de C04 sin recurrir a una equivalencia secuencial. Heine–Borel permitirá después reconocer los compactos reales por cerradura y acotación. La extracción de sucesiones dadas de C08 y la continuidad de C14, con las herramientas de C06 y C12, tendrán funciones distintas en las consecuencias. La recíproca secuencial general mantendrá explícita CC(R), o una enumeración sobreyectiva dada cuando esté disponible; no se utilizarán continuidad uniforme ni derivadas.

16.1. Una cubierta dada y una reducción finita

En una cubierta, cada punto está en algún abierto de la familia. La dificultad es conservar esa cobertura de todos los puntos usando sólo finitos miembros originales. Para un conjunto fijo podemos encontrar una cubierta finita cómoda, pero la compacidad debe responder también a cualquier otra cubierta que se nos entregue. **Definición.** Una cubierta abierta de $K \subseteq \mathbb{R}$ es una familia dada $U : I \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$, cuyos miembros U_i son abiertos reales, tal que $K \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$. La inclusión significa $\forall x \in K \; \exists i \in I : \; x \in U_i$. Para un punto fijado podemos usar un índice que lo cubra, sin disponer por ello de una función que seleccione índices simultáneamente para todos los puntos. Una **subcubierta finita** restringe la misma familia a un conjunto finito $J \subseteq I$ y conserva cobertura de todo K. Sus abiertos deben proceder de la cubierta recibida; no se sustituyen por nuevos abiertos. También puede haber índices distintos asociados al mismo abierto.

Compacidad. K es compacto si **toda** cubierta abierta dada de K admite una subcubierta finita. Primero se recibe la familia arbitraria, después se obtiene un conjunto finito de sus índices y con ellos se debe cubrir cada punto. La familia $\{\mathbb{R}\}$ cubre finitamente cualquier conjunto real, pero eso sólo verifica una elección particular de cubierta. Para negar compacidad basta, en cambio, una cubierta concreta que ninguna subfamilia finita consiga reducir.

R1. Casos finitos y una primera fuga. El vacío es compacto: de cualquier cubierta tomamos $J = \emptyset$, cuya unión cubre el vacío. Para un singleton $\{a\}$, la cobertura proporciona un índice i con $a \in U_i$; $J = \{i\}$ basta. Una unión de dos compactos es compacta: una cubierta de la unión cubre por separado ambas piezas, que entregan conjuntos finitos J_1, J_2; la unión finita $J_1 \cup J_2$ cubre todo. Inducción finita da compacidad de conjuntos finitos y de uniones finitas de compactos. No se está escogiendo una subcubierta por cada miembro de una familia infinita.

La recta admite una cubierta sin reducción finita. Los abiertos $U_n = (-(n+1), n+1)$, para $n \in \mathbb{N}$, cubren cada real por arquimedianidad. Si $J \subseteq \mathbb{N}$ es finito y no vacío, tiene máximo m, y cada U_j seleccionado está contenido en U_m. El punto $m + 2$ queda fuera de toda la unión

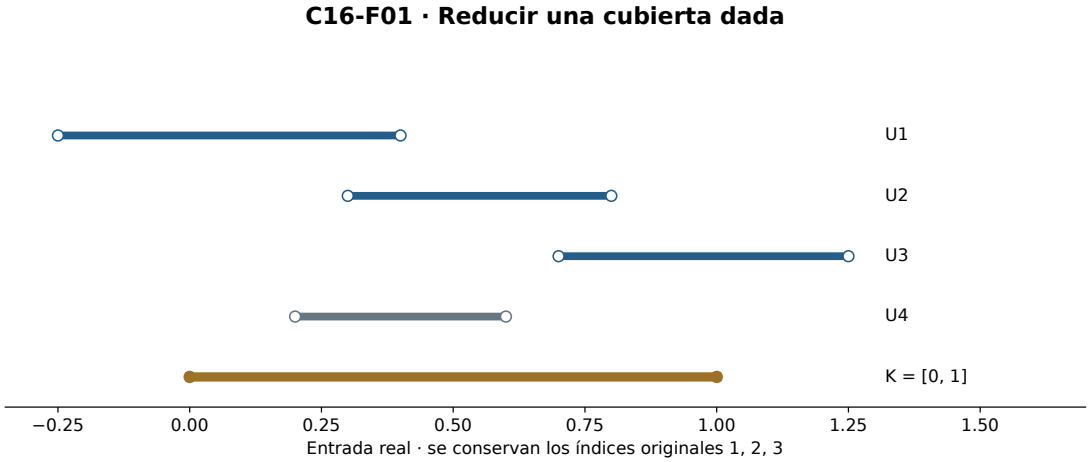


Figura 16.1. Los abiertos U1=(−1/4,2/5), U2=(3/10,4/5), U3=(7/10,5/4) y U4=(1/5,3/5) cubren [0,1]. J={1,2,3} basta, incluidos los extremos. Esta verificación particular no demuestra por sí sola compacidad; la definición cuantifica sobre toda cubierta.

seleccionada. La subfamilia vacía tampoco cubre la recta, así que hemos descartado todos los conjuntos finitos de índices para esta cubierta.

Un conjunto finito no vacío de reales tiene mínimo y máximo: basta recorrer una lista finita y conservar en cada comparación el menor y el mayor encontrados. El mínimo es uno de los valores de la lista, de modo que si todos son positivos, también lo es él. Para los infinitos radios $1/(n+1)$, cualquier candidato positivo deja de ser cota inferior al encontrar un recíproco menor; su ínfimo es cero. La reducción a finitos controles será la que permita conservar un margen positivo al reunirlos.

Ejercicios de la sección 16.1.

Ejercicio 1. Una sola cubierta no basta

Un argumento afirma que todo subconjunto real es compacto porque $\{\mathbb{R}\}$ es una cubierta finita. Explica el cambio ilegítimo de cuantificadores y refútalo con una cubierta de $\mathbb{R}$.

Solución. Compacidad exige que para toda cubierta abierta dada exista una subcubierta finita de esa misma familia. El argumento sólo presenta una cubierta conveniente. Para $\mathbb{R}$, la familia $U_n = (-(n+1), n+1)$ cubre por arquimedianidad. Toda lista finita no vacía de índices tiene máximo m y su unión está en U_m, que no contiene $m+2$. La subfamilia vacía tampoco cubre la recta. Por tanto hay una cubierta sin ninguna subcubierta finita y la recta no es compacta.

La afirmación inválida sustituye «para toda cubierta» por «existe alguna cubierta». La familia creciente es una cubierta abierta concreta que refuta la afirmación universal para la recta. El máximo sólo se toma tras fijar una subfamilia finita no vacía. Tratar también la vacía completa la refutación de todas las reducciones posibles.

Ejercicio 2. Subcubierta concreta

Considera $K = [0,1]$ y los abiertos $U_1 = (-1/4, 2/5)$, $U_2 = (3/10, 4/5)$, $U_3 = (7/10, 5/4)$, $U_4 = (1/5, 3/5)$. Identifica una subcubierta de tres miembros y muestra que quitar cualquiera de esos tres deja algún punto sin cubrir dentro de esa subfamilia.

Solución. Los índices $J = \{1,2,3\}$ sirven: U_1 cubre desde cero hasta antes de $2/5$, U_2 solapa desde $3/10$ y cubre hasta antes de $4/5$, y U_3 solapa desde $7/10$ y alcanza uno. Su unión contiene $[0,1]$. Al quitar U_1, cero queda fuera; al quitar U_3, uno queda fuera; al quitar U_2, $1/2$ no está en U_1 ni U_3. Es una subcubierta concreta, y su irredundancia dentro de esos tres no prueba por sí sola compacidad de K, que debe valer para cualquier cubierta.

Retorno visual. Véase C16-F01, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba. Las desigualdades $3/10 < 2/5$ y $7/10 < 4/5$ verifican los solapes, evitando huecos entre los tres abiertos. Los testigos cero, uno y medio muestran irredundancia respecto de esa lista elegida. Al retirar un miembro no se reincorpora U_4, pues la pregunta examina esa subfamilia de tres. Nada de ello sustituye la comprobación para cubiertas arbitrarias que exige compacidad.

Ejercicio 3. Uniones finitas desde la definición

Prueba desde cubiertas que una unión finita de compactos reales es compacta, incluyendo la unión vacía. No invoques Heine–Borel.

Solución. El vacío es compacto porque dentro de cualquier cubierta sirve la subfamilia vacía. Para dos compactos, una cubierta de la unión cubre cada uno; existen conjuntos finitos de índices J_1, J_2 que cubren las piezas. Su unión finita cubre la unión de las piezas. Por inducción sobre una lista finita de compactos, partiendo de la unión vacía y añadiendo una pieza por paso, se obtiene el resultado. Sólo se combinan testigos finitos de la cubierta fijada; no se escogen subcubiertas de infinitos compactos.

Para una cubierta fijada de la unión, sus miembros cubren cada compacto de la lista. La inducción combina una reducción de la unión anterior con una de la pieza añadida, manteniendo índices de esa cubierta. La finitud de las piezas asegura que el proceso termina con una lista finita. Una familia infinita podría requerir añadir índices indefinidamente y no cumple este argumento.

Ejercicio 4. El mínimo positivo tiene una hipótesis

Demuestra que una familia finita no vacía de radios positivos tiene mínimo positivo. Refuta la conclusión análoga para una familia infinita.

Solución. Una lista finita no vacía $r_1, \dots, r_k$ admite un mínimo: empezamos por r_1 y comparamos sucesivamente con el siguiente valor, conservando el menor. El resultado es uno de los r_j, luego es positivo. Para $r_n = 1/(n+1)$, todos los radios son positivos y cero es cota inferior. Para cualquier $c > 0$, arquimedianidad da n con $1/(n+1) < c$, así ninguna cota inferior positiva es posible. El ínfimo es cero y no hay un radio positivo que sea menor o igual que todos.

La construcción del mínimo finito termina tras comparar todos los valores y devuelve uno de ellos. Por ello no sólo obtiene una cota, sino un valor positivo de la lista. En la familia infinita, cualquier barrera positiva deja de ser cota inferior al elegir un recíproco más pequeño. El paso finito que conserva una escala positiva no puede reemplazarse por un ínfimo sin comprobar su positividad.

Ejercicio 5. Una unión infinita que escapa

Sabiendo que cada segmento $[-n, n]$ será compacto por R2, explica por qué la unión de esos segmentos para $n \in \mathbb{N}$ refuta que toda unión de compactos sea compacta. Exhibe la cubierta responsable.

Solución. Por arquimedianidad cada real está en algún $[-n, n]$, así la unión es $\mathbb{R}$. R2 prueba compacidad de cada segmento, incluido $n = 0$. Pero la cubierta $U_n = (-(n+1), n+1)$ de la recta no tiene reducción finita: si m es máximo de los índices seleccionados, $m+2$ queda fuera. La conclusión de unión finita no se extiende a uniones infinitas; las reducciones entregadas por cada pieza no se convierten automáticamente en una sola lista finita.

Cada real tiene magnitud menor o igual que algún natural y por eso pertenece a uno de los segmentos. Esta identidad de la unión sitúa el ejemplo exactamente en la recta, cuyo fallo de compacidad ya se muestra por una cubierta. No basta que cada pieza individual admita reducciones: sus listas pueden crecer sin una cota finita común al recorrer todas las piezas.

16.2. El supremo prolonga los segmentos cubiertos

R2. Todo segmento $[a, b]$, con $a \leq b$, es compacto. No partiremos de Heine–Borel: debemos producir una reducción finita para una cubierta arbitraria. Fijamos $U : I \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ que cubre $[a, b]$, y registramos hasta dónde hay cobertura finita:

$$S = \{x \in [a, b] : [a, x] \text{ admite una subcubierta finita de } U\}.$$

Pertenecer a S significa que existe alguna reducción finita para ese segmento; no se ha definido una asignación $x \mapsto J_x$. Un abierto que contiene a cubre $[a, a]$, así que $a \in S$. Además $S \subseteq [a, b]$ está acotado por b. La completitud de C00 proporciona $c = \sup S$, y las dos propiedades $a \in S$ y b cota dan $a \leq c \leq b$. Podemos aplicar la cubierta a c aunque todavía no sepamos que pertenece a S.

Fijemos un índice i_c con $c \in U_{i_c}$. Su apertura da $r > 0$ con $(c - r, c + r) \subseteq U_{i_c}$. Para aprovechar ese margen buscamos un segmento ya cubierto que llegue cerca de c. Como $c - r/2 < c$ no es cota superior de S, existe $t \in S$ con $c - r/2 < t \leq c$. Este testigo puede ser el propio c si pertenece a S; la prueba no necesita que la distancia sea positiva.

Para ese único t, la definición de S entrega una subcubierta finita J_t de $[a, t]$. Prolongamos hasta $d = \min(b, c + r/2)$. La fórmula garantiza $c \leq d \leq b$, y para cualquier $z \in [t, d]$ tenemos $z \geq t > c - r/2 > c - r$ y $z \leq d \leq c + r/2 < c + r$. Por tanto el abierto U_{i_c} contiene todo el tramo $[t, d]$. Los índices $J_t \cup \{i_c\}$ siguen siendo finitos y pertenecen a la familia original: cubren $[a, t]$ con la reducción anterior y $[t, d]$ con el nuevo abierto. Como ambos tramos forman $[a, d]$, obtenemos $d \in S$.

C16-F02 · Un índice prolonga el control

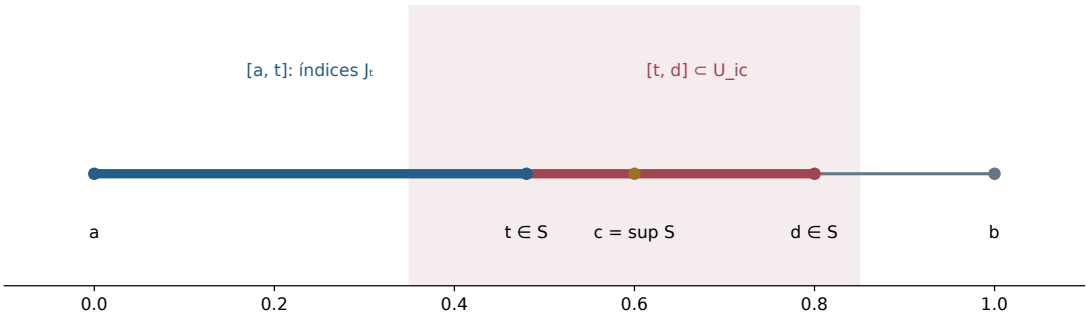


Figura 16.2. Esquema del caso hipotético c<b. Con c−r/2<t≤c y d=min(b,c+r/2), el conjunto Jt más el índice que cubre c cubre [a,d]. Por tanto d∈S; si c<b, d>c contradice la cota. Cuando c=b, la misma construcción da d=b∈S. Las posiciones son ilustrativas.

Si $c < b$, tanto b como $c + r/2$ son mayores que c, y su mínimo d también lo es. Esto contradice que c acote a S, pues acabamos de probar $d \in S$. Luego $c = b$. La construcción conserva además la pertenencia de d: al sustituir $c = b$ resulta $d = b \in S$, cuya definición proporciona una subcubierta finita de todo $[a, b]$. La igualdad $\sup S = b$ no habría bastado para terminar: cuando $a < b$, el conjunto $[a, b)$ tiene ese supremo y no lo contiene. La apertura en torno al extremo es lo que ha permitido probar pertenencia, además de identificar la cota. Para $a = b$ basta el abierto que cubre el único punto, aunque el argumento también lo incluye; con la convención $[a, b] = \emptyset$ si $a > b$, sirve directamente la subfamilia vacía.

Los testigos utilizados fueron un índice para a, otro para c, un radio de este último abierto y un punto aproximante t con una reducción finita de su segmento. No se necesitó elegir un abierto por cada punto ni una reducción por cada miembro de S. La prolongación de un único segmento cercano a la frontera resolvió la cobertura completa.

Ejercicios de la sección 16.2.

Ejercicio 6. Registrar cobertura finita

Para una cubierta arbitraria de $[a, b]$, $a \leq b$, define S como en R2 y justifica $a \in S$, existencia de su supremo y pertenencia del supremo al segmento.

Solución. La cobertura da un índice con $a \in U_i$, y ese único miembro cubre $[a, a]$. Por tanto $a \in S$ y S no es vacío. Como $S \subseteq [a, b]$, b es cota superior. Completitud da $c = \sup S$; $a \leq c$ porque $a \in S$ y $c \leq b$ porque b es cota. Así $c \in [a, b]$ y puede aplicarse la cobertura a ese punto. No se supone que $c \in S$.

La definición de S usa existencia de una lista finita para cada segmento registrado. El primer testigo sólo se necesita para a, y permite demostrar no vacuidad. La localización del supremo usa simultáneamente que a es miembro y que b es cota. Quedar en el segmento habilita aplicar la cubierta a c, antes de saber si pertenece a S.

Ejercicio 7. Prolongar con un solo abierto

Si $c = \sup S$, $(c - r, c + r) \subseteq U_{i_c}$ y $t \in S$ satisface $c - r/2 < t \leq c$, prueba que $d = \min(b, c + r/2)$ pertenece a S. Identifica qué índices cubren cada tramo.

Solución. $c \leq d \leq b$ y $t \leq c$, así $a \leq t \leq d \leq b$. Para $z \in [t, d]$, $z \geq t > c - r/2 > c - r$ y $z \leq d \leq c + r/2 < c + r$, luego $z \in U_{i_c}$. Por $t \in S$ hay un conjunto finito J_t que cubre $[a, t]$. La unión $J_t \cup \{i_c\}$ es finita y cubre $[a, t] \cup [t, d] = [a, d]$. Esto es exactamente la propiedad que define $d \in S$. Sólo se fijó una subcubierta asociada al t concreto.

La estimación se realiza para cada punto z del tramo nuevo, no únicamente para d. Así el mismo abierto U_{i_c} cubre todo lo que falta después de t. La lista J_t existe por la pertenencia del t concreto a S. Unirla con el índice del abierto central produce una lista finita original y acredita el predicado que define $d \in S$.

Ejercicio 8. El extremo omitido de una prueba

Una prueba concluye $\sup S = b$ y afirma «por tanto $b \in S$». Refuta ese paso lógico y completa el argumento correcto de R2 para obtener la subcubierta de todo el segmento.

Solución. Con $a < b$, $S = [a, b)$ tiene supremo b y no lo contiene; la igualdad de supremo no implica pertenencia. En R2 se construye además $d = \min(b, c + r/2) \in S$, usando una cobertura de $[a, t]$ y un abierto que contiene a c. Si $c < b$, ese d sería mayor que c, contradicción con la cota. Luego $c = b$, y la misma fórmula da $d = b$. Como ya se probó $d \in S$, ahora sí $b \in S$. Su definición suministra los índices finitos que cubren $[a, b]$.

Retorno visual. Véase C16-F02, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba. Si $c < b$, tanto b como $c + r/2$ son mayores que c, así su mínimo también lo es. Ese $d \in S$ contradiría que c domina a S. Una vez excluido ese caso, se conserva la construcción ya verificada y se obtiene $d = b \in S$. La prueba de pertenencia es indispensable: completitud sola no convierte cualquier supremo en máximo.

Ejercicio 9. No elegir una subcubierta por segmento

Explica por qué definir S mediante «existe una subcubierta finita de $[a, x]$» no obliga a construir una función $x \mapsto J_x$. Enumera los testigos concretos necesarios en R2.

Solución. El predicado existencial determina qué puntos están en S sin asociarles un testigo elegido. Primero se usa un índice que cubre a para probar $a \in S$. Después se fija un índice i_c que cubre el supremo, un radio de apertura y un único $t \in S$ próximo al supremo. Sólo para ese t se instancia la existencia de J_t. La lista finita $J_t \cup \{i_c\}$ concluye la prueba. No se forma una familia de elecciones sobre todos los $x \in S$.

Definir un conjunto mediante una existencia sólo decide qué elementos cumplen el predicado. Para la prolongación se fija un único punto aproximante y se instancia la existencia de su lista finita. El índice que cubre c y su radio de apertura también se usan sólo en ese paso. No hay una asignación simultánea de subcubiertas o radios sobre todos los segmentos posibles.

Ejercicio 10. Cobertura del intervalo abierto frente al cerrado

¿Puede la familia $U_n = (1/(n+2), 2)$ cubrir $[0, 1]$? Compara con su acción sobre $(0, 1)$ y explica por qué no contradice R2.

Solución. No cubre $[0, 1]$ porque ningún miembro contiene cero. Sí cubre $(0, 1)$: dado un punto positivo, algún recíproco $1/(n+2)$ es menor que él. Para una subfamilia finita no vacía con máximo índice m, $1/(2(m+2))$ pertenece a $(0, 1)$ y queda fuera de su unión U_m. Por eso el intervalo abierto no es compacto. R2 cuantifica sobre cubiertas que realmente cubren todo el segmento cerrado; esta familia no satisface esa premisa.

La ausencia de cero de todos los abiertos invalida cobertura del segmento cerrado, aunque cubran cada punto positivo. Para el intervalo abierto, el testigo fuera de cualquier reducción finita muestra un fallo real de compacidad. R2 se aplica a familias que cubren también los extremos del segmento. La misma familia puede ser una cubierta de un subconjunto y no serlo del conjunto mayor.

16.3. Heredar compacidad sin perder índices

Estar dentro de un compacto no garantiza heredar su compacidad: un subconjunto puede omitir una frontera a la que se acercan sus puntos. La cerradura relativa permitirá ampliar cualquier cubierta de ese subconjunto a una del compacto y después recuperar índices de la cubierta original. **R3. Un cerrado relativo de un compacto es compacto.** Sea K compacto, $A \subseteq K$ cerrado relativo. Por C04/C14 existe un cerrado real F con $A = K \cap F$. Fijamos una cubierta abierta arbitraria $(U_i)_{i\in I}$ de A. Puede no cubrir $K \setminus A$. Para cubrir lo que falta añadimos el abierto completo $V = \mathbb{R} \setminus F$.

Para cada $x \in K$, si $x \in F$, entonces $x \in A$ y lo cubre algún U_i; si $x \notin F$, lo cubre V. La familia ampliada cubre así K. Para distinguir la procedencia de sus miembros usamos los índices $(i, 0)$ para los antiguos y el índice $(\emptyset, 1)$ para el añadido. Sus valores son respectivamente U_i y V, y las etiquetas diferentes impiden colisiones aunque coincidan algunos abiertos como conjuntos. La compacidad de K entrega un conjunto finito de estos índices ampliados.

Retenemos los índices de la forma $(i, 0)$ y los proyectamos a sus i originales, obteniendo un conjunto finito $J \subseteq I$. Si $x \in A$, entonces $x \in F$ y $x \notin V$: el índice excepcional no puede cubrirlo. Alguno de los originales seleccionados debe hacerlo, por lo que J cubre todo A. Como la cubierta de A era arbitraria, queda probada su compacidad.

El abierto añadido cubre todo $K \setminus A$. Un recorte cerca de un extremo de un segmento ambiente podría dejar parte de ese complemento sin cubrir e impedir la aplicación de compacidad. Al volver a la cubierta original se retira un índice etiquetado concreto, no todos los índices que tengan un mismo abierto como valor. En particular, si F es cerrado real y K es compacto, $K \cap F$ es compacto. Para $K = [-2, 2]$ y $F = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ obtenemos $[-2, -1] \cup [1, 2]$. En la prueba de herencia, el abierto añadido es $(-1, 1)$ y cubre la zona central que falta. El argumento no necesita que el cerrado relativo sea un intervalo.

Para ver qué puede fallar sin cerradura relativa, consideremos $(0, 1) \subseteq [0, 1]$ y la familia $U_n = (1/(n+2), 2), \quad n \in \mathbb{N}$. Cada $x \in (0, 1)$ supera algún $1/(n+2)$ por arquimedianidad, así que la familia cubre ese dominio. Los abiertos crecen con el índice. Para una subfamilia finita no vacía, su máximo índice m da unión exactamente U_m, y el punto $1/(2(m+2))$ pertenece a $(0, 1)$ pero queda por debajo del extremo izquierdo de U_m. No está cubierto. La subfamilia vacía tampoco cubre el intervalo. Este subconjunto no es compacto; la misma familia ni siquiera cubre el segmento cerrado, porque ninguno de sus abiertos contiene cero.

Ejercicios de la sección 16.3.

Ejercicio 11. Cubrir el complemento completo

Para heredar compacidad de $A = K \cap F$, una prueba añade sólo $V = (M-1, M+1) \cap (\mathbb{R} \setminus F)$ cuando $K = [-M, M]$. Muestra con $M = 2$, $F = \{0\}$ y una cubierta de A que la familia ampliada puede no cubrir K. Repara el abierto añadido.

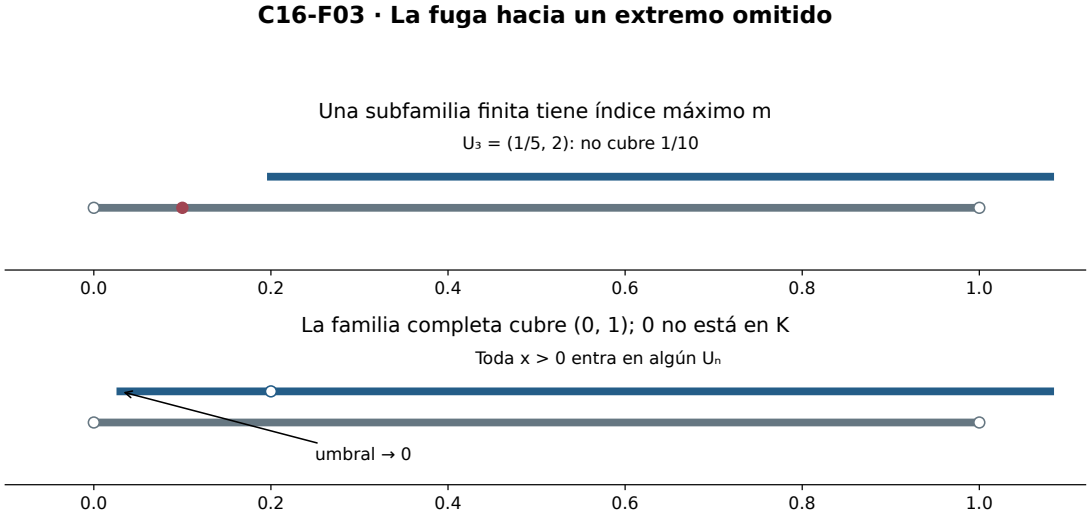


Figura 16.3. Un=(1/(n+2),2), n≥0, cubre (0,1). Toda subfamilia finita no vacía tiene máximo m y omite x=1/[2(m+2)]. Arriba se ilustra m=3; abajo el acercamiento de umbrales a cero es esquemático. El caso de subfamilia vacía se descarta por no vacuidad de K.

Solución. Aquí $A = \{0\}$. La familia con un solo miembro $U = (-1/4, 1/4)$ cubre A, y el abierto propuesto es $(1, 3)$. La unión de ambos no contiene, por ejemplo, $-1 \in K$. No cubre K, así no puede aplicarse compacidad del segmento. La reparación es añadir todo $V = \mathbb{R} \setminus F$. Si un punto de K no está en F, lo cubre V; si está en F, pertenece a A y lo cubre la familia original. V no toca A, por lo que sus índices se pueden retirar después de obtener una subcubierta finita ampliada.

La familia original elegida sólo necesita cubrir cero y por eso puede ser muy pequeña. El recorte del complemento añadido no alcanza la zona negativa de K, que tampoco cubre ese original. La reparación con el complemento entero verifica cobertura por los dos casos de pertenencia a F. Su disjunción con A garantiza que después pueda retirarse el índice excepcional sin perder cobertura de A.

Ejercicio 12. Cerrar dos piezas dentro de un segmento

Prueba compacidad de $A = [-2, -1] \cup [1, 2]$ como cerrado relativo de $K = [-2, 2]$, sin usar todavía Heine–Borel. Describe el abierto añadido en la prueba de herencia.

Solución. K es compacto por R2. Tomamos $F = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$, cerrado real porque su complemento $(-1, 1)$ es abierto. Entonces $A = K \cap F$. R3 da compacidad. Para una cubierta de A, se añade $\mathbb{R} \setminus F = (-1, 1)$, que cubre precisamente la zona de K no cubierta por pertenencia a A; después una subcubierta finita de K conserva suficientes índices originales para cubrir A, pues el abierto añadido no toca sus puntos.

El cerrado real F conserva exactamente las dos piezas al recortar por K. El abierto añadido cubre el hueco central de ese segmento, mientras una cubierta dada de A cubre sus otras entradas. La reducción finita ampliada puede usar ese abierto, pero ningún punto de A depende de él. Esto permite volver a índices originales y demostrar herencia sin adelantar Heine–Borel.

Ejercicio 13. Etiquetas y abiertos repetidos

Desarrolla el sistema de índices al añadir un abierto V a una cubierta $(U_i)_{i \in I}$ y al retirar ese miembro tras aplicar compacidad. Permite que V coincida como conjunto con algún U_i.

Solución. Usamos $I^* = (I \times \{0\}) \cup \{(\emptyset, 1)\}$ y definimos $W_{(i,0)} = U_i$, $W_{(\emptyset,1)} = V$. Las etiquetas $0 \neq 1$ garantizan índice excepcional distinto. Una subcubierta finita J^* determina $J = \{i \in I : (i, 0) \in J^*\}$, finito por proyección de una parte finita. Para $x \in A$ con $A \cap V = \emptyset$, un índice que lo cubre no es el excepcional; proviene de J y $x \in U_i$. La coincidencia de valores abiertos no cambia la prueba: se retiran sólo índices etiquetados, no todos los miembros de igual valor.

Las etiquetas distinguen posiciones en la familia aunque sus valores como conjuntos sean iguales. El conjunto de índices originales conservados es la proyección de una parte de la lista finita ampliada y sigue siendo finito. Para cada entrada de A, el índice excepcional queda descartado por disjunción de su abierto con A. Se elimina ese índice concreto, conservando los originales que tengan el mismo valor si los hubiera.

Ejercicio 14. Un subconjunto que pierde compacidad

Prueba mediante una cubierta que $(0, 1)$ no es compacto, aunque esté dentro del compacto $[0, 1]$. Trata las subfamilias vacías y no vacías.

Solución. La cubierta $U_n = (1/(n + 2), 2)$ cubre $(0, 1)$ por arquimedianidad. La subfamilia vacía no cubre su punto $1/2$. Si $J \subseteq \mathbb{N}$ es finito no vacío, su máximo m da unión U_m, pues los miembros son crecientes. El punto $x = 1/(2(m + 2))$ es positivo y menor que uno pero está por debajo de $1/(m + 2)$, luego no pertenece a ningún abierto seleccionado. No existe subcubierta finita. La hipótesis de cerrado relativo de R3 no puede omitirse.

Retorno visual. Véase C16-F03, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba. La familia crece porque sus extremos izquierdos disminuyen al aumentar el índice. De ahí que cualquier reducción no vacía tenga unión exactamente igual al abierto de mayor índice. El testigo construido está en el dominio pero por debajo de ese extremo izquierdo. La inclusión en $[0, 1]$ se mantiene verdadera; lo que falta para heredar compacidad es ser cerrado relativo allí.

Ejercicio 15. Intersección con un cerrado

Prueba que $K \cap F$ es compacto cuando K lo es y F es cerrado real. Deduce que la intersección de toda familia no vacía de compactos reales es compacta, una vez disponible R4. Separa el caso de familia vacía.

Solución. La intersección $K \cap F$ es cerrada relativa a K, y R3 la hace compacta. Para una familia de compactos con al menos un miembro, R4 hace a todos cerrados reales. Su intersección A es cerrada, porque su complemento es unión de complementos abiertos, y está contenida en un miembro fijo K_0. Es $K_0 \cap A$, por tanto compacta por la primera afirmación; esto vale incluso si el conjunto resultante es vacío. Para una familia sin miembros, la intersección ambiental es $\mathbb{R}$, que no es compacta. La no vacuidad requerida es la de la familia de índices, no la del conjunto intersección.

Después de Heine–Borel, cada miembro compacto es cerrado real, y una intersección arbitraria de cerrados sigue siendo cerrada. Fijar un único miembro de la familia no vacía aporta un ambiente compacto que contiene toda la intersección. No se requiere que haya una entrada común ni seleccionar un miembro por cada índice. La familia vacía no ofrece ese ambiente y su intersección convencional es la recta no compacta.

16.4. Heine–Borel: cerrar las dos direcciones

R4. En la recta real, compacto equivale a cerrado y acotado. Probaremos las dos necesidades desde cubiertas y la suficiencia desde R2/R3. No intervienen sucesiones ni una equivalencia secuencial anticipada. Para probar acotación, supongamos primero $K \neq \emptyset$. La cubierta $U_n = (-(n + 1), n + 1)$ de la recta cubre también K, y la compacidad proporciona un conjunto finito de índices J. No puede ser vacío porque cubre un punto de K. Su máximo m domina a los índices seleccionados y da $K \subseteq U_m \subseteq [-(m + 1), m + 1]$. Sólo después de la reducción finita hemos tomado ese máximo. El conjunto vacío se acota directamente, por ejemplo con cero.

Para demostrar cerradura, fijemos $p \notin K$ y supongamos $K \neq \emptyset$. Definimos los abiertos $V_n = \{x \in \mathbb{R} : |x - p| > 1/(n+1)\}$, $n \in \mathbb{N}$, Cada V_n es la unión de los rayos $(-\infty, p - 1/(n+1))$ y $(p + 1/(n+1), \infty)$. Cubren K porque, fijado $x \in K$, la distancia $|x - p| > 0$ supera algún recíproco. La compacidad da una subcubierta finita no vacía y su máximo índice m domina a los demás, ya que los V_n aumentan. Así $K \subseteq V_m$, y la bola de p de radio $1/(m+1) > 0$ es disjunta de K. Cada punto exterior dispone de una bola dentro del complemento, que es por tanto abierto. El vacío también es cerrado, pues su complemento es toda la recta.

Para la suficiencia, si K es cerrado y acotado, tomamos $M > 0$ con $K \subseteq [-M, M]$. El segmento es compacto por R2 y $K = [-M, M] \cap K$ es cerrado relativo en él. R3 da compacidad de K, incluido el caso vacío. Las dos condiciones geométricas se han utilizado por separado: la acotación da el ambiente compacto y la cerradura permite heredar su propiedad.

C16-F04 · Dos condiciones independientes

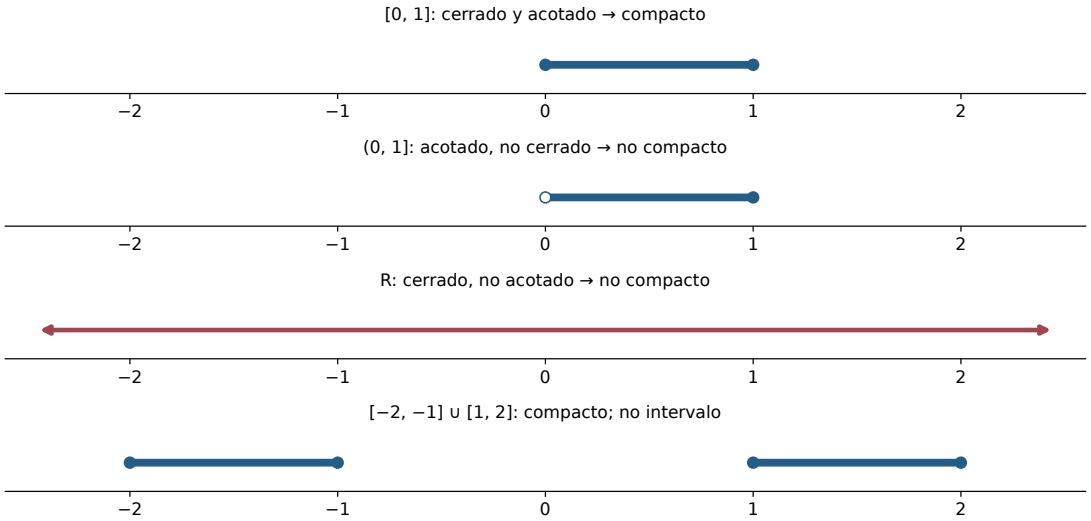


Figura 16.4. Heine–Borel real exige cerradura y acotación. El segmento cerrado cumple ambas; (0,1] pierde cerradura y R pierde acotación. La unión de los dos segmentos cumple ambas aunque tiene un hueco. Las pruebas generales preceden a la clasificación.

Heine–Borel caracteriza mediante cerradura y acotación la propiedad de cubiertas definida al principio. Las pruebas anteriores han usado el orden completo y las bolas de la recta; el resultado no se está afirmando para espacios arbitrarios ni se ha obtenido de una recíproca secuencial. La acotación sin cerradura falla en $(0, 1)$ y la cerradura sin acotación falla en $\mathbb{R}$. También son distintas compacidad y conexidad: $[-2, -1] \cup [1, 2]$ es cerrado y acotado, pero el corte cero lo separa; $(0, 1)$ es un intervalo conexo por C15 y no es compacto. El conjunto $K = \{0\} \cup \{1/(n+1) : n \in \mathbb{N}\}$ es otro compacto. Está contenido en $[0, 1]$; para demostrar su cerradura fijamos un punto exterior p. Si $p < 0$ o $p > 1$, la mitad de su distancia al segmento da una bola que evita K. En otro caso $0 < p < 1$, pues cero y uno pertenecen al conjunto. Elegimos $N \geq 1$ con $1/(N+1) < p/2$. Toda la cola de recíprocos queda por debajo de $p/2$ y dista de p más que $p/2$; cero dista p. Las distancias de p a los términos del prefijo $n < N$ son finitas en número y positivas. La mitad del mínimo de esas distancias y de $p/2$ da un radio que evita prefijo, cola y cero. El complemento es abierto y Heine–Borel prueba compacidad. Quitar cero destruye cerradura, porque cada bola suya contiene un recíproco, y con ella destruye compacidad.

Ejercicios de la sección 16.4.

Ejercicio 16. Acotación desde una cubierta creciente

Prueba que todo compacto real es acotado usando sólo la cubierta $U_n = (-(n+1), n+1)$. Incluye el vacío.

Solución. El vacío está en $[0, 0]$. Para $K \neq \emptyset$, la familia cubre toda la recta por arquimedianidad y en particular K. Compacidad entrega índices finitos J, que no pueden ser vacíos. Tienen máximo m. Cada U_j seleccionado está contenido en U_m, así $K \subseteq (-(m+1), m+1) \subseteq [-(m+1), m+1]$. Los extremos son cotas reales. No se usó ninguna sucesión fabricada de puntos lejanos.

La arquimedianidad verifica cobertura sin construir una sucesión de entradas alejadas. La compacidad entrega una lista finita que cubre todo K y su máximo permite dominar todos los abiertos seleccionados con uno. Esa contención aporta cotas inferior y superior uniformes de entradas. Para el vacío, cualquier cota es válida y no se necesita un máximo de índices.

Ejercicio 17. Un radio exterior por índices finitos

Fija $p \notin K$, con K compacto no vacío. Usando $V_n = \{x : |x - p| > 1/(n+1)\}$, demuestra que alguna bola positiva alrededor de p evita K.

Solución. Cada V_n es unión de dos rayos abiertos. Para cualquier $x \in K$, la distancia $|x-p|$ es positiva y supera algún recíproco, así la familia cubre K. Compacidad entrega una subfamilia finita no vacía; con máximo índice m, su unión está en V_m porque los miembros crecen. Por tanto todos los puntos de K distan de p más que $1/(m+1)$. La bola abierta de ese radio en p no toca K. Como se puede hacer para cada punto exterior, el complemento de K es abierto y K cerrado.

Cada entrada de K tiene distancia positiva a p, pero esas distancias podrían a priori ser arbitrariamente pequeñas. La reducción finita de la cubierta transforma los umbrales individuales en uno común mediante el mayor índice. El radio resultante separa toda la bola de K. Así se demuestra cerradura desde cubiertas sin seleccionar una ruta convergente hacia el punto exterior.

Ejercicio 18. Reconocer cinco dominios

Usa Heine–Borel para decidir compacidad de $[0, 1]$, $(0, 1]$, $\mathbb{R}$, $\{-1, 1\}$ y $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Justifica el fallo cuando corresponda.

Solución. $[0, 1]$ es cerrado y acotado, compacto. $(0, 1]$ es acotado pero no cerrado, pues cero es adherente por los recíprocos y falta; no es compacto. $\mathbb{R}$ es cerrado pero no acotado, no compacto. El conjunto finito $\{-1, 1\}$ es cerrado y acotado, compacto. Los racionales de $[0, 1]$ son acotados pero no cerrados: el irracional $p = \sqrt{2}/2 \in (0, 1)$ no pertenece y toda bola suya suficientemente pequeña dentro de $(0, 1)$ contiene racionales por densidad. Toda bola, por contener una más pequeña de ese tipo, toca el conjunto. No es compacto. La interfaz algebraica de raíz e irracionalidad viene de C04/C10.

Heine–Borel requiere comprobar cerradura y acotación por separado. Un solo fallo basta para negar compacidad. En los racionales del segmento, la densidad produce entradas próximas al irracional interior sin incluirlo en el dominio. Para una bola grande se recorta a otra menor dentro del segmento, lo que asegura adherencia para todas las escalas y no sólo para algunas.

Ejercicio 19. La cola y el prefijo

Prueba cerradura y compacidad de $K = \{0\} \cup \{1/(n+1) : n \in \mathbb{N}\}$ sin usar la recíproca secuencial. Para un exterior positivo, construye el radio desde una cola y un prefijo finito.

Solución. $K \subseteq [0, 1]$. Si $p \notin K$ y $p < 0$ o $p > 1$, la mitad de su distancia al segmento da una bola exterior. En el caso restante $0 < p < 1$ y p no es ningún recíproco, elegimos $N \geq 1$ con $1/(N+1) < p/2$. Para todo $n \geq N$, $t_n = 1/(n+1) < p/2$, luego $|p - t_n| > p/2$; cero también dista p. Los valores $|p - t_n|$ para $n < N$ son una familia finita no vacía positiva. Sea

d el mínimo de ellos y $p/2$, positivo. La bola de radio $d/2$ no contiene cero, prefijo ni cola. El complemento es abierto, por tanto K cerrado; al ser acotado, Heine–Borel lo hace compacto. No se eligió una sucesión de testigos arbitrarios de vecindades.

Retorno visual. Véase C16-F04, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba. El exterior no puede ser cero ni uno porque ambos pertenecen a K. En el caso positivo interior, un único corte N controla de una vez toda la cola. Las entradas restantes son finitas y tienen distancia no nula al exterior. El mínimo positivo combina ambos controles y su mitad evita todas las entradas, incluido cero, acreditando apertura del complemento.

Ejercicio 20. Dos propiedades distintas

Da un compacto real no conexo y un conexo real no compacto. Justifica ambas propiedades con los resultados correspondientes.

Solución. $[-2,-1]\cup[1,2]$ es cerrado y acotado, compacto por R4; se separa por los rayos a ambos lados de cero, o no es intervalo por el punto omitido cero entre -1 y 1, así no conexo por C15. $(0,1)$ es intervalo, conexo por C15; no es cerrado porque cero es adherente y falta, así no compacto por Heine–Borel. Los ejemplos muestran que ninguna de las dos propiedades implica la otra.

El compacto con dos piezas obtiene sus propiedades de cerradura y acotación, pero el corte cero muestra su separación. El intervalo abierto obtiene conexidad de intervalaridad, mientras una frontera ausente le impide cerradura y compacidad. Los dos ejemplos son necesarios para descartar las dos implicaciones posibles. Las propiedades pueden coexistir en otros dominios sin que una caracterice a la otra.

16.5. Sucesiones: extraer y seleccionar son tareas distintas

Compacidad secuencial. K es secuencialmente compacto si toda sucesión dada (x_n) de puntos de K tiene una subsucesión $(x_{\varphi(n)})$ que converge a un punto $\ell \in K$, con $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente. El requisito de pertenencia del límite es decisivo. Si K es vacío, no hay sucesión con todos sus términos en él y la condición universal es vacía.

R5, dirección directa. Todo compacto real es secuencialmente compacto. Por R4 es cerrado y acotado. Una sucesión dada de puntos de K es acotada, y Bolzano–Weierstrass de C08 proporciona una subsucesión convergente en $\mathbb{R}$. Su límite está en K: si estuviera fuera, la apertura del complemento daría una bola exterior que la convergencia obligaría a ocupar a términos que pertenecen a K, contradicción. La extracción actúa sobre una sucesión ya dada mediante el mecanismo de C08, con bisección e índices naturales mínimos; no fabrica puntos de un conjunto arbitrario.

En $(0,1]$, la sucesión dada $x_n = 1/(n+1)$ refuta compacidad secuencial. Para cualquier selector estrictamente creciente φ, se cumple $\varphi(k) \geq k$ por inducción y $0 < x_{\varphi(k)} \leq 1/(k+1) \to 0$. Toda extracción tiene límite cero; por unicidad, ninguna puede converger además a un miembro de $(0,1]$. Al añadir cero a los recíprocos obtenemos el compacto ya probado y R5 garantiza una extracción con límite perteneciente al conjunto para cualquier sucesión dada en él.

Recíproca con alcance. Para un conjunto arbitrario, probar «secuencialmente compacto implica compacto» requiere, en el argumento siguiente, la hipótesis adicional CC($\mathbb{R}$): toda familia numerable dada de subconjuntos reales no vacíos admite una selección simultánea. Esta hipótesis es local al enunciado condicional; no se adopta globalmente. Si K no fuera acotado, los conjuntos $E_n = \{x \in K : |x| > n\}$ serían no vacíos. Aplicamos aquí CC($\mathbb{R}$) para definir simultáneamente $x_n \in E_n$. Si alguna subsucesión de índices crecientes φ convergiera, sería acotada. Sin embargo, $|x_{\varphi(k)}| > \varphi(k) \geq k$ supera cualquier cota fija para un índice suficientemente grande. Ninguna extracción puede converger, contra compacidad secuencial. Así K es acotado bajo la hipótesis declarada.

Si K no fuera cerrado, habría un punto adherente $p \notin K$. Los conjuntos $F_n = K \cap (p - 1/(n+1), p+1/(n+1))$ son no vacíos. Aplicando la misma hipótesis de selección obtenemos $z_n \in F_n$ y la cota $|z_n - p| < 1/(n+1)$ prueba $z_n \to p$. La compacidad secuencial entrega una subsucesión con límite $\ell \in K$, que también converge a p por ser extracción de una sucesión convergente. La unicidad da $\ell = p$, contradicción. Por tanto K es cerrado y R4 lo hace compacto.

La selección adicional ha intervenido al fabricar las rutas x_n y z_n; la extracción posterior trabaja sobre rutas ya definidas. Si $K \neq \emptyset$ viene con una sobreyección dada $e : \mathbb{N} \to K$, podemos definirlas sin CC(R): para cada E_n o F_n, el conjunto de índices j con $e(j)$ dentro es no vacío y tiene un menor elemento natural único. Evaluar e en ese mínimo determina el término. Los índices de fabricación pueden repetirse; no son los índices crecientes de una extracción. La enumeración es un dato y no se infiere para un conjunto real arbitrario. Para el vacío, la compacidad se comprueba directamente.

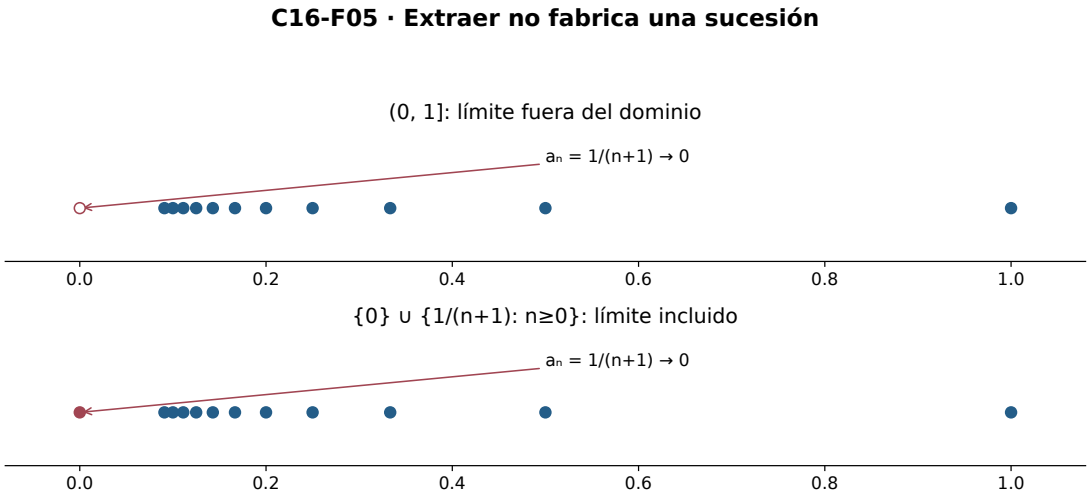


Figura 16.5. La ruta an=1/(n+1) y cada subsucesión convergen a cero. En (0,1] ese límite queda fuera; al añadir cero al conjunto de recíprocos queda dentro de un compacto. Sólo se muestran los primeros términos. La recíproca secuencial general requiere CC(R), mientras una enumeración sobreyectiva dada permite mínimos de índices.

Las pruebas por cubiertas establecieron compacto $\iff$ cerrado y acotado, y la extracción de una sucesión dada estableció compacto $\implies$ secuencialmente compacto. La vuelta secuencial que acabamos de demostrar conserva CC(R) para conjuntos reales arbitrarios, o utiliza la enumeración sobreyectiva dada de un conjunto no vacío. Este alcance no se extiende silenciosamente a una equivalencia universal sin premisa.

Ejercicios de la sección 16.5.

Ejercicio 21. Acotar la ruta y retener su límite

Demuestra que un compacto real es secuencialmente compacto usando Bolzano–Weierstrass de C08. Identifica el paso que coloca el límite en el conjunto.

Solución. R4 hace cerrado y acotado a K. Dada una sucesión de puntos de K, es acotada y C08 entrega una subsucesión convergente en la recta a ℓ. Si $\ell \notin K$, cerradura da un radio $r > 0$ cuya bola en ℓ no toca K. Convergencia obliga a que los términos de la subsucesión estén eventualmente dentro de esa bola, contradiciendo que todos están en K. Por tanto $\ell \in K$. Si K es vacío, no existe tal sucesión y la condición universal se cumple. No se fabrica la sucesión inicial; era un dato.

El límite que proporciona C08 está inicialmente sólo en la recta. La cerradura del dominio lo retiene: una bola exterior sería incompatible con la visita eventual que exige convergencia.

La sucesión inicial y sus valores ya son datos, así este paso no fabrica una selección de puntos de familias arbitrarias. En el vacío la afirmación secuencial universal no tiene sucesiones que examinar.

Ejercicio 22. Un límite exterior para todas las extracciones

Prueba que $(0, 1]$ no es secuencialmente compacto mediante una sucesión concreta. No basta decir que esa sucesión converge fuera: debes tratar todas sus subsucesiones.

Solución. Tomamos $x_n = 1/(n + 1)$, todos en $(0, 1]$, con límite cero. Para un selector estrictamente creciente φ, $\varphi(k) \geq k$ por inducción; entonces $0 < x_{\varphi(k)} \leq 1/(k+1) \to 0$. Toda subsucesión converge a cero. Si alguna convergiera a $\ell \in (0, 1]$, unicidad del límite daría $\ell = 0$, imposible. No hay subsucesión con límite en el dominio, refutando su compacidad secuencial.

Retorno visual. Véase C16-F05, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba. El selector de una subsucesión puede saltar índices, pero su crecimiento estricto obliga a $\varphi(k) \geq k$. La cota por recíprocos controla por ello cualquier extracción, sin importar sus saltos. La unicidad del límite impide que la misma extracción tenga también un destino interior positivo. Este argumento es más fuerte que comprobar únicamente el destino de la ruta original.

Ejercicio 23. Una fabricación que necesita permiso

Un argumento dice: «Si K no es acotado, para cada n hay $x_n \in K$ con $|x_n| > n$; luego tenemos una sucesión». Distingue las afirmaciones y completa la contradicción bajo CC(R) explícita.

Solución. No acotación da que cada $E_n = \{x \in K : |x| > n\}$ es no vacío. Eso es $\forall n \exists x$, no aún una sola función que elija todos los valores. Bajo CC(R) sí existe una sucesión $x_n \in E_n$. Si K fuera secuencialmente compacto, alguna subsucesión $x_{\varphi(k)}$ convergería y por tanto sería acotada por un M. Pero $|x_{\varphi(k)}| > \varphi(k) \geq k$, que supera M para algún natural por arquimedianidad. Contradicción. Se prueba acotación bajo la hipótesis indicada; no se adopta CC(R) globalmente.

El cambio que debe justificarse es pasar de existencias individuales a una sola función de términos. CC(R) respalda precisamente ese paso en la recíproca general. Después, una extracción convergente sería acotada, pero sus magnitudes superan índices que crecen sin cota. La contradicción utiliza la ruta seleccionada y deja visible de dónde procede su existencia.

Ejercicio 24. La ruta hacia un punto omitido

Bajo CC(R), prueba que un secuencialmente compacto es cerrado. Declara la familia seleccionada y todos los límites utilizados.

Solución. Si K no fuese cerrado, habría $p \notin K$ adherente. Los $F_n = K \cap (p - 1/(n+1), p + 1/(n+1))$ son no vacíos. CC(R) da una sucesión $z_n \in F_n$. La cota $|z_n - p| < 1/(n+1)$ prueba $z_n \to p$. Compacidad secuencial da una subsucesión con límite $\ell \in K$. Toda subsucesión de la convergente también converge a p; unicidad da $\ell = p$, contradicción. La selección fue la fabricación de z_n, mientras la extracción posterior usa la propiedad secuencial. Por ello K es cerrado bajo la premisa declarada.

La familia seleccionada contiene entradas de K dentro de ventanas decrecientes alrededor del exterior. Las cotas de distancia acreditan convergencia de la ruta completa, y por tanto de todas sus extracciones, a p. La extracción que ofrece compacidad secuencial tiene además un destino en K. Unicidad identifica ambos destinos y contradice que el punto adherente haya sido exterior.

Ejercicio 25. Una enumeración dada determina testigos

Sea $K \neq \emptyset$ secuencialmente compacto y sea $e : \mathbb{N} \to K$ una sobreyección dada. Prueba que K es cerrado y acotado, y por ello compacto, sin invocar CC(R).

Solución. Si K fuera no acotado, cada $E_n = \{x \in K : |x| > n\}$ sería no vacío. La sobreyectividad hace no vacío $\{j : e(j) \in E_n\}$. Tomamos su menor índice j_n, determinado por buen orden, y $x_n = e(j_n)$. Cualquier subsucesión tiene $|x_{\varphi(k)}| > \varphi(k) \geq k$, y no converge, contradicción. Si hubiera $p \notin K$ adherente, los $F_n = K \cap B_{1/(n+1)}(p)$ serían no vacíos. Tomamos el menor índice k_n con $e(k_n) \in F_n$ y $z_n = e(k_n) \to p$. Compacidad secuencial daría una subsucesión convergente a $\ell \in K$, también a p, contradicción por unicidad. Ambas rutas están determinadas por fórmulas de mínimo de índices, sin elegir puntos arbitrariamente. Cerrado y acotado, R4 hace compacto a K. No se infiere la enumeración: estaba dada.

La enumeración sobreyectiva es un dato adicional: no se deduce de compacidad secuencial ni se construye sin justificación. El buen orden natural determina un índice mínimo para cada condición no vacía y con ello un término único. Los índices de fabricación pueden repetirse y no son los índices de extracción. Una vez fabricadas las rutas, las dos contradicciones prueban acotación y cerradura, suficientes por R4.

16.6. La continuidad lleva compactos a compactos

R6. Imagen continua de un compacto. Sea $f : D \to \mathbb{R}$ continua y $K \subseteq D$ compacto. Entonces $H = f[K]$ es compacto. Para vacío, la imagen es vacía. En general fijamos una cubierta abierta arbitraria $(V_i)_{i\in I}$ de H. La restricción $h = f \restriction K$ es continua por C14. Sus preimágenes $A_i = h^{-1}[V_i] = \{x \in K : f(x) \in V_i\}$ son abiertas relativas a K y cubren K. La definición que hemos adoptado aplica compacidad a abiertos de la recta, y una preimagen relativa puede no serlo: para la identidad en $[0, 1]$, la preimagen de $(-1, 1/2)$ es $[0, 1/2)$, que contiene cero pero ninguna bola real alrededor de cero. Necesitamos una cubierta ambiental que conserve exactamente las mismas pertenencias dentro de K.

Como R4 ya demostró que K es cerrado real, definimos para cada índice $W_i = (\mathbb{R}\setminus K)\cup A_i$. Cada W_i es abierto real. Si un punto está fuera de K, el complemento abierto proporciona una bola dentro de W_i. Para un punto de A_i, fijado este índice, la apertura relativa da un abierto real O con $A_i = K \cap O$. Cualquier punto de O está fuera de K o pertenece a A_i, de modo que $O \subseteq W_i$ y ofrece una vecindad real del punto. La familia W está definida por una fórmula única: el representante O sólo se usa para acreditar la apertura del índice considerado y no se reúne una familia escogida (O_i). Además,

$K \cap W_i = A_i$. La familia W cubre K, porque para cada $x \in K$ la salida $f(x)$ está en algún V_i y por tanto $x \in A_i \subseteq W_i$. La compacidad proporciona un conjunto finito $J \subseteq I$ que cubre K con los W_j. Fijada cualquier salida $y \in H$, la pertenencia a la imagen entrega una entrada $x \in K$ con $f(x) = y$. Algún $j \in J$ cubre esa entrada y $x \in K \cap W_j = A_j$ implica $y \in V_j$. Los mismos índices finitos cubren así H con los abiertos originales. No se necesita que la entrada de cada salida sea única ni elegir simultáneamente todas esas entradas.

El paso a W_i permitió aplicar compacidad en su ambiente real y la identidad al recortar devolvió los índices hacia las salidas. No se exigió inyectividad, una sucesión seleccionada ni compacidad de todo D, sino sólo del subconjunto K. Por Heine–Borel la imagen es cerrada y acotada; en particular, una continua tiene valores acotados sobre cada compacto de su dominio, aunque éste tenga varias piezas.

La conclusión no se invierte: una constante en $\mathbb{R}$ es continua y tiene imagen singleton compacta, mientras su dominio no es compacto. Tampoco hay preservación universal por preimagen: para la constante cero, $f^{-1}[\{0\}] = \mathbb{R}$. En cambio, la continua $r(x) = 1/(1 + x^2)$ en la recta tiene preimagen vacía de $\{0\}$ y preimagen $\{0\}$ de $\{1\}$, ambas compactas; conocer esas fibras particulares tampoco prueba compacidad del dominio. El resultado demostrado concierne a imágenes directas de compactos.

Ejercicios de la sección 16.6.

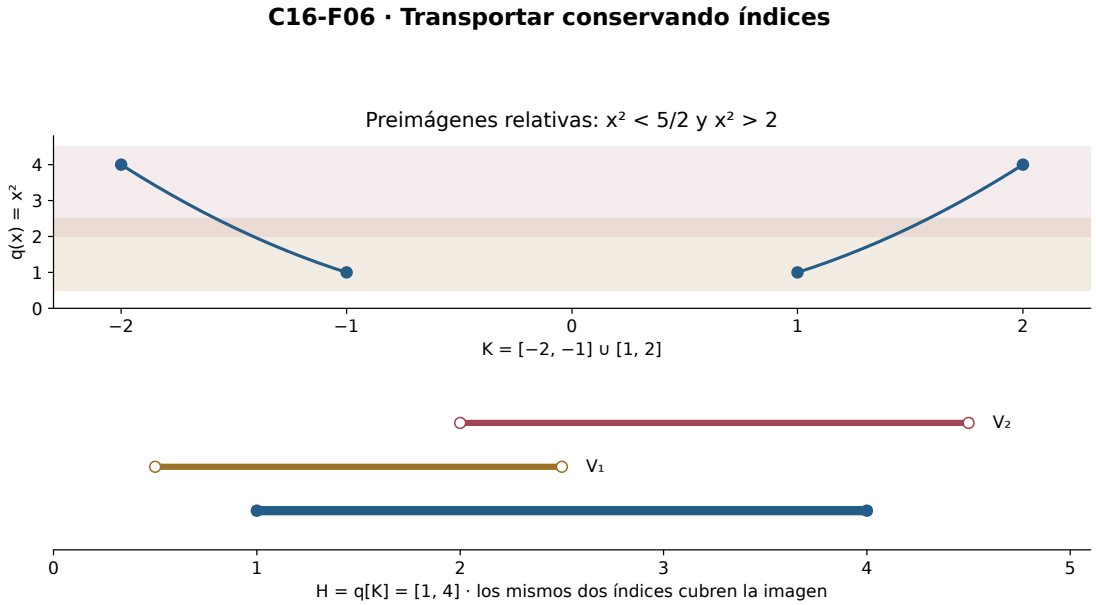


Figura 16.6. Para q(x)=x² sobre K=[−2,−1]∪[1,2], H=[1,4]. V1=(1/2,5/2) y V2=(2,9/2) cubren H; sus preimágenes relativas cubren K. Antes de aplicar compacidad se levantan mediante Wi=(R menos K)∪q⁻¹[Vi], una fórmula canónica de abiertos reales. No se requiere inyectividad ni elegir un ambiente por índice.

Ejercicio 26. Levantar un abierto relativo

Sea K cerrado real y A abierto relativo a K. Prueba que $W = (\mathbb{R} \setminus K) \cup A$ es abierto real y que $K \cap W = A$. Explica por qué esta fórmula sirve para una familia sin elegir ambientes simultáneamente.

Solución. La identidad es distributividad, pues $K \cap (\mathbb{R} \setminus K) = \emptyset$ y $A \subseteq K$. Para un punto fuera de K, apertura del complemento da una bola dentro de W. Para un punto de A, representamos $A = K \cap O$ con O abierto real. Todo punto de O está fuera de K o en A, así $O \subseteq W$ y da una vecindad del punto. Todos los puntos de W tienen vecindad real dentro, luego W abierto. Para una familia A_i, cada W_i está determinado por la misma fórmula; se usa la existencia de un O para probar cada caso, sin reunir una función elegida $i \mapsto O_i$.

Con un representante O del abierto relativo se puede escribir también $W = (\mathbb{R} \setminus K) \cup O$. La igualdad se verifica separando las entradas de O que están dentro y fuera de K. Ambas piezas de esta última unión son abiertas reales porque K es cerrado. La fórmula inicial define W sin depender de cuál representante se haya utilizado para probar su apertura.

Ejercicio 27. Devolver los mismos índices

En R6, una subfamilia finita W_j cubre K. Prueba que los mismos índices j cubren $f[K]$ con los V_j originales. No supongas que f tenga inversa.

Solución. Para $y \in f[K]$ hay una entrada concreta $x \in K$ con $f(x) = y$, por definición de imagen. Algún índice seleccionado j cumple $x \in W_j$. La identidad $K \cap W_j = A_j = f^{-1}[V_j]$ en el dominio restringido da $f(x) \in V_j$, esto es $y \in V_j$. Como y era arbitrario, los mismos índices finitos cubren toda la imagen. Se fija sólo una entrada testigo para el valor considerado; ni unicidad ni una función inversa son necesarias.

La salida arbitraria se fija primero y luego se usa una entrada que la alcance. La cobertura finita de esa entrada proporciona un índice de la misma lista seleccionada. El levantamiento no altera su pertenencia a la preimagen dentro de K, así el abierto de salida correspondiente cubre el valor. No se ha supuesto unicidad de entrada ni un selector global de fibras.

Ejercicio 28. Imagen compacta con un hueco

Para $K = [-2,-1] \cup [1,2]$ y $q(x) = x^2$, calcula $q[K]$ y una cubierta de esa imagen con dos miembros abiertos. Describe las preimágenes relativas y sus levantamientos canónicos.

Solución. Cada rama da valores entre 1 y 4, y para $y \in [1,4]$ la raíz positiva $\sqrt{y} \in [1,2]$ es preimagen; así $q[K] = [1,4]$. Sirven $V_1 = (1/2, 5/2)$ y $V_2 = (2, 9/2)$, que solapan y cubren $[1,4]$. Las preimágenes son $A_1 = \{x \in K : x^2 < 5/2\}$ y $A_2 = \{x \in K : x^2 > 2\}$. Son abiertas relativas por continuidad de q. $W_i = (\mathbb{R} \setminus K) \cup A_i$ son abiertos reales porque K es cerrado, y conservan $K \cap W_i = A_i$. El hueco del dominio no impide compacidad ni el transporte de la cubierta.

Retorno visual. Véase C16-F06, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba. La raíz positiva verifica que todo valor entre uno y cuatro se alcanza, incluso si hay también una entrada negativa que lo produzca. Los dos abiertos de salida solapan entre dos y cinco medios. En el dominio, esa cobertura se traduce en las condiciones $x^2 < 5/2$ o $x^2 > 2$, que juntas cubren todas las entradas. Los levantamientos conservan esas selecciones al recortar por K.

Ejercicio 29. Una preimagen demasiado grande

Da una continua cuya imagen sea compacta y cuyo dominio no lo sea. Usa el mismo ejemplo para refutar compacidad universal de preimágenes de compactos.

Solución. La constante $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$, es continua: el error de salida siempre es cero. Su imagen es el singleton $\{0\}$, compacto por R1, pero su dominio $\mathbb{R}$ no es compacto. Además $f^{-1}[\{0\}] = \mathbb{R}$, una preimagen no compacta de un conjunto compacto. R6 sólo preserva imágenes directas de dominios compactos; no afirma las dos recíprocas refutadas.

El mismo ejemplo refuta dos afirmaciones distintas: una recíproca sobre el dominio y una preservación universal por preimagen. La imagen constante es compacta, pero su fibra completa reproduce un dominio no acotado. Continuidad conserva imágenes de compactos; no limita el tamaño de todas las entradas que producen una salida particular.

Ejercicio 30. El ambiente importa antes de aplicar compacidad

Una prueba afirma que las preimágenes $A_i \subseteq K$ de abiertos de salida son abiertos reales y aplica directamente la definición ambiental de compacidad. Da un ejemplo de preimagen no abierta real y repara la prueba.

Solución. Para la identidad $h : [0,1] \to \mathbb{R}$, la preimagen de $(-1, 1/2)$ es $[0, 1/2)$, abierta relativa a $K = [0,1]$ pero no abierta real: toda bola alrededor de cero contiene negativos ajenos al conjunto. Para un K compacto, R4 lo hace cerrado real. Se reemplaza cada preimagen por $W_i = (\mathbb{R} \setminus K) \cup A_i$, abierto real por el argumento de E026 y con $K \cap W_i = A_i$. La compacidad se aplica ahora a la cubierta ambiental W; por E027 los índices finitos vuelven a cubrir salidas con los abiertos originales. No se afirma que A_i cambie de ambiente sin prueba.

El extremo cero pertenece a la preimagen y toda bola real suya incluye negativos, de modo que apertura relativa no puede reinterpretarse como real. El levantamiento añade las entradas exteriores a K y sí proporciona abiertos ambientales. Su identidad al recortar garantiza que la reparación no cambia qué entradas del compacto corresponden a cada abierto de salida. Así los índices finitos aún vuelven a la cubierta original.

16.7. Por qué los extremos llegan a alcanzarse

Una imagen acotada y no vacía tiene supremo e ínfimo reales, pero todavía pueden faltar en ella. La cerradura que acabamos de obtener para las imágenes compactas impedirá esa ausencia y permitirá recuperar entradas que alcancen las cotas. **Lema de extremos de un compacto.** Si $H \subseteq \mathbb{R}$ es compacto y no vacío, $M = \sup H$ y $m = \inf H$ existen por R4 y completitud. Si $M \notin H$, la cerradura da $r > 0$ con $(M - r, M + r) \cap H = \emptyset$. Pero $M - r/2 < M$ no es cota superior, así existe $y \in H$ con $M - r/2 < y \leq M$, que cae en la bola excluida. Contradicción: $M \in H$ y es máximo. Si $m \notin H$, una bola de radio $s > 0$ no toca

H, mientras $m + s/2 > m$ no es cota inferior; existe $z \in H$ con $m \le z < m + s/2$, de nuevo contradicción. Así $m \in H$ y es mínimo. No elegimos una sucesión que aproxime extremos.

R7. Weierstrass. Si $f : D \to \mathbb{R}$ es continua y $K \subseteq D$ compacto no vacío, hay $x_-, x_+ \in K$ con $f(x_-) \le f(x) \le f(x_+) \qquad (x \in K)$. Por R6, $H = f[K]$ es compacto. Como K contiene una entrada, H contiene su salida y es no vacío. El lema da $m, M \in H$ y, por definición de imagen, existen $x_-, x_+ \in K$ con $f(x_-) = m$ y $f(x_+) = M$. Las cotas sobre todos los valores de H producen las desigualdades de R7. Se han usado dos testigos concretos de valores alcanzados, sin definir una inversa ni un selector de todas las fibras. No se afirma que esos argumentos sean únicos, distintos o extremos del dominio.

C16-F07 · El extremo pertenece a la imagen

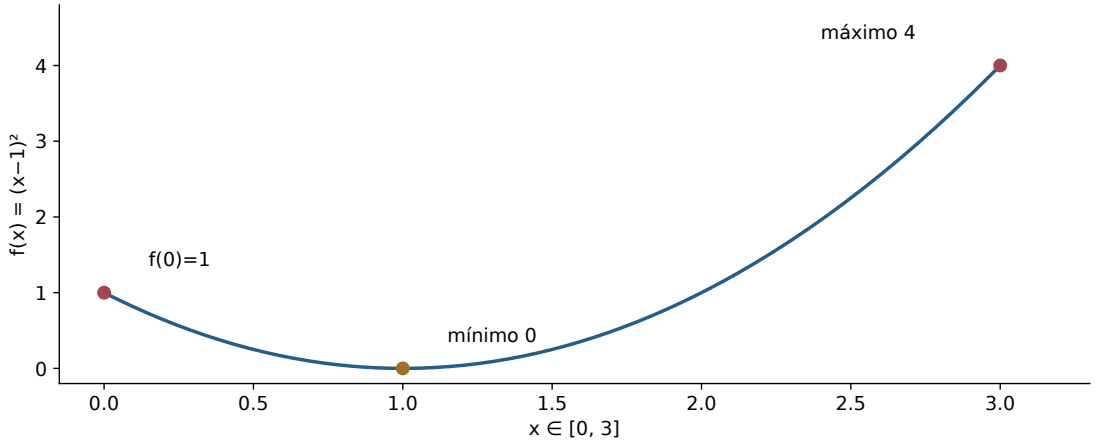


Figura 16.7. En [0,3], f(x)=(x−1)² alcanza mínimo cero en x=1 y máximo cuatro en x=3. La existencia general procede de la compacidad de la imagen y de su cerradura, que hacen miembros al ínfimo y al supremo. Un extremo de salida puede tener un argumento interior; no se afirma unicidad en general.

Para $f(x) = (x-1)^2$ en $[0,3]$, se cumple $-1 \le x - 1 \le 2$ y por tanto $0 \le (x-1)^2 \le 4$. La igualdad inferior exige $x = 1$, que es un punto interior. La superior exige $|x - 1| = 2$, con candidatos 3 y -1; sólo 3 pertenece al dominio. El mínimo es cero y el máximo cuatro, alcanzados donde indica la figura. En $\{-1, 1\}$, en cambio, el cuadrado vale uno en ambas entradas y las dos minimizan y maximizan. La compacidad permite tanto un extremo interior como extremizadores no únicos.

Si el dominio es además un segmento, C15 hace intervalar a la imagen. Weierstrass aporta extremos globales alcanzados m, M, así toda salida está en $[m, M]$; la intervalaridad y la pertenencia de ambos extremos dan la inclusión contraria. Obtenemos $f[[a, b]] = [m, M]$, también cuando $a = b$. No podemos identificar sin más m, M con $f(a), f(b)$, como muestra el mínimo interior anterior. En un compacto separado, la identidad de $[-2, -1] \cup [1, 2]$ conserva una imagen compacta con hueco: la compacidad da los extremos y la conexidad es la que permite rellenar entre ellos.

La identidad en $(0, 1)$ conserva continuidad y acotación, pero no alcanza el ínfimo cero ni el supremo uno porque su dominio no es compacto. Sobre el compacto $[0, 1]$, la función $u(x) = x$ para $x < 1$ y $u(1) = 0$ tiene imagen $[0, 1)$ y tampoco alcanza máximo: cada salida y admite otra mayor, $(y + 1)/2$, dentro de la imagen. Aquí falla continuidad en uno; para cualquier radio $\delta > 0$, $x = 1 - \min(\delta/2, 1/4)$ pertenece al dominio, dista menos que δ del centro y su salida difiere de $u(1)$ en al menos $3/4$, refutando la tolerancia $1/2$. El vacío sí es compacto, pero carece de entradas extremizadoras. Estas posibilidades explican por separado las hipótesis de R7.

Ejercicios de la sección 16.7.

Ejercicio 31. Un supremo que se alcanza

Prueba que un compacto no vacío $H \subseteq \mathbb{R}$ contiene su supremo y su ínfimo. No construyas una sucesión de puntos próximos a esos valores.

Solución. Heine–Borel da acotación y cerradura, así completitud da $M = \sup H$ y $m = \inf H$. Si $M \notin H$, alguna bola de radio $r > 0$ en M no toca H. Como $M - r/2$ no es cota superior, existe $y \in H$ con $M - r/2 < y \leq M$, dentro de esa bola, contradicción. Si $m \notin H$, una bola de radio $s > 0$ no toca H, pero $m + s/2$ no es cota inferior; hay $z \in H$ con $m \leq z < m + s/2$, también dentro, contradicción. Ambos valores pertenecen y son extremos. Sólo se usan testigos individuales para dos vecindades.

La acotación suministra cotas reales y la no vacuidad permite usar completitud. La cerradura aporta la bola exterior si el extremo no pertenece al conjunto. La propiedad aproximante del supremo o ínfimo encuentra una entrada dentro de esa bola y contradice la hipótesis exterior. Sólo después de ese paso se pueden llamar máximo y mínimo a las cotas óptimas.

Ejercicio 32. Extremos que no son ambos extremos de entrada

Encuentra mínimo, máximo y todos los argumentos que los alcanzan para $f(x) = (x-1)^2$ en $[0, 3]$. Justifica con desigualdades, sin derivadas.

Solución. $-1 \leq x - 1 \leq 2$. Si $x \leq 1$, $|x - 1| \leq 1$; si $x \geq 1$, $|x - 1| \leq 2$. En todo el dominio $0 \leq (x-1)^2 \leq 4$. El mínimo cero requiere $x = 1$ y se alcanza allí, punto interior. El máximo cuatro requiere $|x - 1| = 2$, es decir $x = 3$ o $x = -1$; sólo 3 pertenece al dominio. Así el máximo es 4 único en 3. No se evaluaron sólo los extremos del dominio para inferir el mínimo.

Retorno visual. Véase C16-F07, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba. La no negatividad da la cota inferior y la igualdad exige anular $x - 1$. La cota superior se obtiene controlando la magnitud de $x - 1$ en las dos zonas del dominio. Para hallar todos los maximizadores hay que resolver también la igualdad y descartar el candidato menos uno que queda fuera. Así se acreditan valores extremos y sus fibras completas, sin derivadas.

Ejercicio 33. Un compacto sin continuidad suficiente

En $[0, 1]$, define $u(x) = x$ si $x < 1$ y $u(1) = 0$. Calcula su imagen, decide si alcanza máximo y refuta continuidad en 1 con un testigo para cada radio.

Solución. La imagen es $[0, 1)$: los argumentos menores que uno producen todos esos valores y el extremo añade cero ya presente. No hay máximo, porque cada $y < 1$ de la imagen tiene $(y+1)/2$ mayor dentro de ella. Para $\delta > 0$, tomamos $h = \min(\delta/2, 1/4) > 0$ y $x = 1-h \in [0, 1)$. Dista menos que δ de 1 y $|u(x) - u(1)| = 1 - h \geq 3/4 > 1/2$. La tolerancia $1/2$ refuta continuidad. El dominio compacto no basta sin la hipótesis funcional de R7.

El extremo de entrada uno tiene una salida que ya estaba en la imagen y no cierra su frontera superior. La imagen permanece acotada pero sin máximo. El testigo para cada radio se mantiene dentro del dominio y compara con el valor central cero, como exige continuidad. Por ello el ejemplo conserva compacidad del dominio y muestra exactamente la necesidad de continuidad de la función.

Ejercicio 34. No vacuidad y no unicidad

Explica por qué Weierstrass requiere dominio no vacío pero no garantiza unicidad de los extremizadores. Da un ejemplo compacto no vacío con varios mínimos y máximos.

Solución. El vacío es compacto, pero no contiene ninguna entrada que sirva de x_- o x_+. Su imagen es vacía y no tiene mínimo o máximo real alcanzado. Para no unicidad, $K = \{-1, 1\}$ es compacto y $f(x) = x^2$ es continua en él y vale 1 en ambos puntos. Los dos argumentos minimizan y maximizan; la desigualdad global de Weierstrass permite ese caso. No exige puntos distintos ni únicos.

La compacidad incluye el vacío, mientras existencia de extremizadores exige entradas reales del dominio. Esa diferencia explica la hipótesis de no vacuidad. En el ejemplo no vacío, dos entradas comparten ambas salidas extremas y satisfacen todas las desigualdades globales. Weierstrass permite empates y no impone que mínimo y máximo sean distintos.

Ejercicio 35. Dos teoremas para describir la imagen

Sea $a \leq b$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Prueba que su imagen es $[m, M]$, identificando qué aporta C15 y qué aporta C16. Refuta que se puedan tomar siempre $m = f(a)$ y $M = f(b)$.
Solución. R2 hace compacto al segmento y R7 aporta extremos globales alcanzados $m \leq M$ de la imagen. Toda salida está en $[m, M]$. C15 hace intervalar la imagen porque la función es continua en un intervalo. Como m, M pertenecen a ella, incluye todo $[m, M]$. Ambas inclusiones dan igualdad. Para $f(x) = (x - 1)^2$ en $[0, 3]$, el mínimo es $0 = f(1)$, mientras $f(0) = 1$; la propuesta de usar siempre valores de entrada extremos es falsa. Compacidad da extremos alcanzados y conexidad rellena entre ellos, funciones distintas de las dos hipótesis.

La primera inclusión procede de las cotas globales alcanzadas de Weierstrass. La segunda procede de intervalaridad de la imagen y pertenencia de los dos valores extremos. Si $a = b$, la imagen es un singleton y ambas inclusiones siguen siendo válidas. El contraejemplo muestra que los valores globales deben identificarse por la función completa, no asignarse de antemano a los extremos de entrada.

16.8. Márgenes positivos e inversas sobre compactos

R8, margen respecto de cero. Sea K compacto no vacío y $f : K \to \mathbb{R}$ continua sin ceros. La función $|f|$ es continua por C14. R7 entrega $x_0 \in K$ donde alcanza su mínimo $m = |f(x_0)|$. Como no hay ceros, $m > 0$, y $|f(x)| \geq m > 0 \qquad (x \in K)$. El mínimo alcanzado de $|f|$ es una magnitud de la forma $|f(x_0)|$, y la ausencia de ceros la hace positiva. Esto da una barrera común, más fuerte que disponer de un valor no nulo en cada punto por separado. El recíproco está definido en todo K, es continuo por C14 y satisface $|1/f(x)| \leq 1/m$. Para otra continua $g : K \to \mathbb{R}$, R6 o R7 proporciona $B \geq 0$ con $|g(x)| \leq B$, y queda $|g(x)/f(x)| \leq B/m$ en todo K. En $(0, 1]$, la identidad es positiva pero algún recíproco $1/(n + 1)$ es menor que cualquier margen propuesto; sin compacidad no se obtiene esa conclusión global.

C16-F08 · No ceros y un margen global

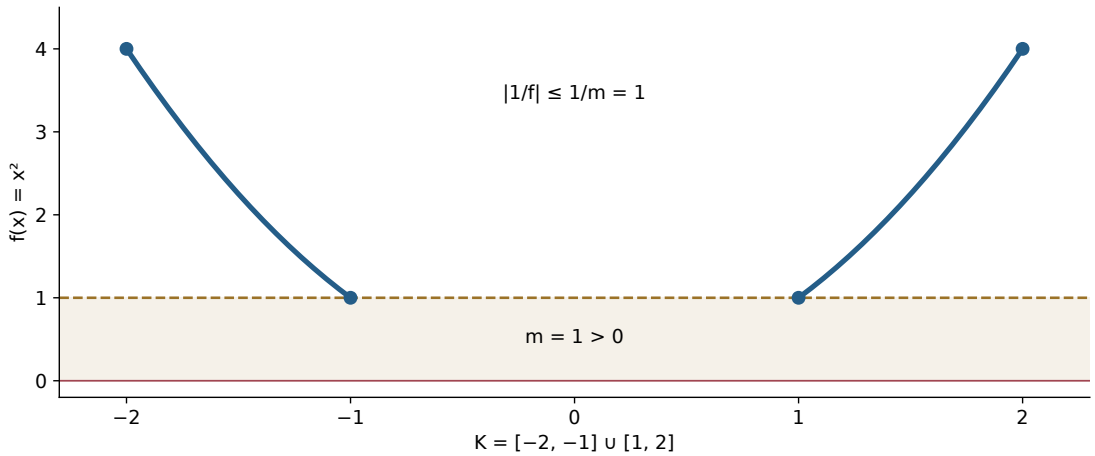


Figura 16.8. La función x^2 en K=[−2,−1]∪[1,2] tiene mínimo alcanzado m=1. Ningún valor de |f| entra en [0,1); por tanto |1/f|≤1. El margen requiere compacidad, continuidad y ausencia de ceros. En (0,1], la identidad es positiva pero carece de margen positivo global.

Para un real p fijado, la función distancia $d_p(x) = |x - p|$ es continua por C14 y alcanza su mínimo en el compacto no vacío K. Si $p \notin K$, el minimizador x_0 es distinto de p y la distancia mínima $|x_0 - p|$ es positiva. Si $p \in K$, se alcanza cero en la entrada p. Puede haber varios puntos más próximos: para $K = \{-1, 1\}$ y $p = 0$, ambos dan distancia uno. La prueba produce un minimizador para este p; no una selección única o simultánea para todos los puntos exteriores.

Fibras compactas. Para una continua $f : K \to \mathbb{R}$ con dominio compacto y un cerrado real F, C14 hace $f^{-1}[F]$ cerrado relativo a K y R3 lo hace compacto. En particular, cada fibra $f^{-1}[\{y\}]$ es compacta, incluso cuando el valor no se alcanza y la fibra es vacía. Aquí el dominio compacto y la condición cerrada de salida aportan las hipótesis que faltaban en el contraejemplo de la constante en la recta. El cerrado F ni siquiera necesita ser acotado: la acotación relevante está en el dominio.

Inversa en un compacto. Una inyección continua $f : K \to \mathbb{R}$ con K compacto es un homeomorfismo $K \to H = f[K]$. Al declarar codominio H se conserva el control de distancias de f. Cada salida de H tiene una entrada única por definición de imagen e inyectividad, así que existe $h : H \to K$. Sea A cerrado relativo a K. Por R3 es compacto y por R6 su imagen $f[A]$ también lo es; R4 la hace cerrada real y, en particular, cerrada relativa a H. La biyectividad hacia la imagen da

$h^{-1}[A] = f[A]$. El miembro izquierdo es la preimagen por h de un cerrado relativo de su codominio K, y el derecho acaba de probarse cerrado relativo en su dominio H. Como vale para todo A, el criterio de C14 concluye continuidad de h. La prueba incluye el vacío, donde tanto la inversa como sus controles son vacíos, y no necesita que el compacto sea intervalo ni que exista monotonía global.

En C15 la intervalaridad permitió construir barreras de orden para la inversa. La compacidad permite otra prueba mediante cerrados, aplicable también a dominios separados. La biyección de C14/C15 sobre $[0, 1) \cup [2, 3]$, con ramas x y $x - 1$, queda fuera de esta hipótesis: el punto uno es adherente al dominio y falta en él, así que no es cerrado ni compacto. La falla de continuidad inversa de aquel ejemplo no contradice el resultado presente.

La positividad en cada entrada adquirió un margen común al convertirse el ínfimo de $|f|$ en un valor alcanzado. La misma pertenencia de los extremos a la imagen permitió minimizar distancias, mientras el transporte de compactos convirtió imágenes de cerrados en preimágenes cerradas de la inversa. Todos esos pasos se apoyan en la reducción finita de cubiertas, sin haber exigido todavía un radio de continuidad común para todos los centros.

Ejercicios de la sección 16.8.

Ejercicio 36. Positividad con margen

En $K = [-2, -1] \cup [1, 2]$, considera $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 1$. Encuentra un margen positivo de $|f|$ y cotas de $|1/f|$ y $|g/f|$ válidas en todo K.

Solución. Para todo $x \in K$, $1 \le x^2 \le 4$, así $m = 1$ es un margen positivo, alcanzado en ± 1. El recíproco está definido y $|1/f(x)| = 1/x^2 \le 1$. Además $|g(x)| = |x + 1| \le |x| + 1 \le 3$, y $|g(x)/f(x)| \le 3$. Las funciones son continuas por C14; las cotas explícitas verifican la consecuencia de R8 sin exigir conectividad del dominio. La cota 3 es válida aunque no se afirme que sea óptima.

Retorno visual. Véase C16-F08, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba. El margen uno se alcanza en ambos puntos de magnitud uno y es válido en las dos piezas del dominio. Invertirlo controla el recíproco. La triangular y $|x| \le 2$ dan una cota del numerador; dividir por un denominador de magnitud al menos uno conserva esa cota. Estos controles son globales y no necesitan conectar las dos piezas por un intervalo.

Ejercicio 37. Punto más cercano y dos candidatos

Prueba que cualquier compacto no vacío tiene un punto más próximo a un real fijado p. Para $K = \{-1, 1\}$ y $p = 0$, calcula todos los minimizadores y el margen.

Solución. $d_p(x) = |x - p|$ es continua por C14; R7 da un $x_0 \in K$ donde alcanza mínimo m. Así $|x - p| \geq m$ para todo $x \in K$. Si $p \notin K$, $m = |x_0 - p| > 0$; si $p \in K$, la entrada p da mínimo cero. En $\{-1, 1\}$ con $p = 0$ ambas distancias valen 1, luego ambos puntos son minimizadores y el margen es 1. No se garantiza unicidad ni se construye una elección para todos los p simultáneamente.

El mínimo de distancia pertenece a la imagen de la función continua y por eso hay una entrada que lo alcanza. Si el punto fijado es exterior, esa entrada no coincide con él y el valor mínimo es positivo. Los dos candidatos del ejemplo tienen la misma distancia y ninguno mejora al otro. Existencia de un minimizador no equivale a una regla única de elección para todos los puntos exteriores.

Ejercicio 38. Una fibra compacta que se divide

Para $q(x) = x^2$ en $K = [-2, 2]$, calcula la fibra de 1 y prueba su compacidad y su desconexión. Generaliza la compacidad a la preimagen de cualquier cerrado real por una continua en compacto.

Solución. La ecuación $x^2 = 1$ da $\{-1, 1\}$, finito y compacto. No es intervalo porque omite cero entre sus puntos, así no conexo por C15. En general, si $f : K \to \mathbb{R}$ es continua y F cerrado real, C14 da $f^{-1}[F]$ cerrado relativo a K, y R3 lo hace compacto. Se incluyen fibras vacías. No hay contradicción entre compacidad y desconexión ni una afirmación de preimágenes compactas para dominios arbitrarios.

La fibra concreta tiene dos entradas y su compacidad proviene de finitud, pero su desconexión proviene del hueco entre ellas. En la generalización, cerrado de salida se convierte por continuidad en cerrado relativo de entradas, y R3 utiliza el dominio compacto. La conclusión no exige que el cerrado de salida sea acotado, pues la acotación relevante ya está en el dominio.

Ejercicio 39. Inversa por transporte de cerrados

Sea K compacto y $f : K \to \mathbb{R}$ continua e inyectiva. Demuestra que la inversa $h : f[K] \to K$ es continua mediante preimágenes de cerrados relativos. Trata el vacío.

Solución. Inyectividad y pertenencia a la imagen dan una entrada única para cada salida, por lo que h existe. Si $A \subseteq K$ es cerrado relativo, R3 lo hace compacto. Su imagen $f[A]$ es compacta por R6, cerrada real por R4 y por ello cerrada relativa a $H = f[K]$. La identidad de la biyección $h^{-1}[A] = f[A]$ prueba que todas esas preimágenes son cerradas relativas. El criterio de C14 para funciones entre dominios y codominios reales relativos da continuidad de h. Re-tipar la función directa hacia H conserva el mismo control de distancias y su continuidad. Si K es vacío, también lo es H, y las funciones vacías son continuas por la condición universal sin entradas.

La inversa tiene dominio exactamente la imagen y codominio K. Cada cerrado relativo de ese codominio debe tener preimagen cerrada relativa en la imagen. La identidad con $f[A]$ traduce esa obligación en transporte de compactos y Heine–Borel. El vacío satisface el criterio sin entradas; no hay necesidad de excluirlo ni de añadir monotonía o continuidad uniforme.

Ejercicio 40. Homeomorfismo compacto sin monotonía global

Sea $K = [0, 1] \cup [2, 3]$ y define $f(x) = x$ en la primera pieza, $f(x) = x - 4$ en la segunda. Calcula la imagen, prueba inyectividad y continuidad, decide si es monótona en todo K y justifica continuidad de su inversa.

Solución. La imagen es $H = [0, 1] \cup [-2, -1]$. Las imágenes de ramas son disjuntas y cada rama es inyectiva; por tanto la función es inyectiva y sobreyectiva sobre H. Para un centro de K y $\varepsilon > 0$, $\delta = \min(1/2, \varepsilon)$ evita la otra pieza y en la misma rama el error de salida es la distancia de entradas, menor que ε. Es continua relativa. No es creciente porque

$f(1) = 1 > f(2) = -2$ aunque $1 < 2$; no es decreciente porque $f(0) = 0 < f(1) = 1$. K es cerrado y acotado, compacto, así la prueba de E039 da inversa continua sin monotonía global. Explícitamente vale $h(y) = y$ en $[0, 1]$ y $h(y) = y + 4$ en $[-2, -1]$. La hipótesis compacta sirve aunque el dominio esté roto.

Las imágenes de las dos piezas son disjuntas, por lo que la inyectividad local de cada rama se convierte en inyectividad global. La separación de las piezas permite un radio común auxiliar que mantiene una entrada próxima en la misma rama. Las comparaciones dadas refutan tanto crecimiento como decrecimiento globales. Aun así compacidad e inyectividad permiten aplicar E039 y obtener continuidad de la inversa sobre la imagen separada.

Capítulo 17

Continuidad uniforme: una escala que sirve para todo

Para el cuadrado, la identidad $|x^2-y^2| = |x-y||x+y|$ muestra por qué el dominio importa al controlar un error. En un segmento acotado podemos poner una barrera al segundo factor y obtener una escala de entrada que sirva para cualquier par; en toda la recta, ese factor puede amplificar separaciones arbitrariamente pequeñas. La continuidad en cada centro permite adaptar el radio al lugar donde estamos. La continuidad uniforme exige fijarlo antes de conocer cualquiera de las dos entradas.

Los prerrequisitos centrales son continuidad de C14 y compacidad de C16. Supremo e ínfimo de C00, adherencia de C04, sucesiones de C06, Cauchy y raíces de C10 y tipos de C12 son interfaces heredadas. La prueba de Heine–Cantor usa una cubierta de todos los pares centro-radio admisibles y finitud, sin seleccionar radios por todos los puntos ni fabricar rutas. Las recíprocas secuenciales se declaran condicionales a CC(R) o a una enumeración dada. La extensión al cierre se construye por cortes de imágenes locales y la aproximación poligonal por una malla finita. No usamos derivadas, integrales ni teoría de límites uniformes de funciones.

17.1. Un radio antes de conocer los dos puntos

En la continuidad de C14 fijábamos un centro y buscábamos un radio para comparar sus valores cercanos con la salida central. Al cambiar de centro podíamos cambiar de radio. Para obtener un control simultáneo de la función en todo su dominio necesitamos invertir ese orden: dada la precisión de salida, encontrar una escala que siga sirviendo al desplazarnos de un lugar a otro. Tanto la función como el dominio forman parte del problema.

Definición. Para $f : D \to \mathbb{R}$, la continuidad uniforme en D significa

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in D : |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

La función y el dominio están fijados antes de pedir la precisión ε. El radio puede depender de esos datos, pero debe quedar elegido antes de x, y. En continuidad puntual, el orden $\forall a \in D\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D$ permite usar el centro a al construirlo. Un radio uniforme satisface esa obligación puntual al tomar $y = a$; también sirve para cualquier restricción, pues todos los pares del subconjunto siguen siendo pares de D. Si D es vacío, no hay pares que verificar y $\delta = 1$ sirve para cualquier tolerancia.

Negación. Fallar la uniformidad significa que existe **una** tolerancia $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para **todo** $\delta > 0$, hay $x, y \in D$ con $|x - y| < \delta, \qquad |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0$. La tolerancia infringida queda fija mientras el par puede cambiar con cada radio propuesto: las entradas se acercan tanto como se quiera y sus salidas conservan una separación positiva. Para demostrar ese fallo debemos refutar todos los candidatos comunes. Haber construido un radio local dependiente del centro sólo describe una forma de probar continuidad; todavía podría existir otro radio que sirviera en todo el dominio.

R1. Controles algebraicos. Si $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ en todo D, con una constante $L \geq 0$, llamamos a f Lipschitz. Cuando $L > 0$, $\delta = \varepsilon/L$ da uniformidad; cuando $L = 0$, todas las diferencias son cero y sirve cualquier radio positivo. Por ejemplo, $f(x) = ax + b$ en $\mathbb{R}$ tiene constante $|a|$. El valor absoluto tiene constante uno por la desigualdad triangular inversa.

Para $q(x) = x^2$ en $[-M, M]$, $M > 0$, $|q(x) - q(y)| = |x - y||x + y| \leq 2M|x - y|$. La barrera $2M$ convierte así $\varepsilon/(2M)$ en un radio uniforme sobre el segmento. Al pasar a toda la recta podemos compensar una separación pequeña con una entrada grande. Fijamos $\varepsilon_0 = 1$ y, dado cualquier $\delta > 0$, tomamos $h = \min(\delta/2, 1) > 0$, $x = 1/h$ e $y = x + h$. Si $\delta \leq 2$, tenemos $h = \delta/2 < \delta$; si $\delta > 2$, tenemos $h = 1 < \delta$. En ambos casos,

$y^2 - x^2 = h(2x + h) = 2 + h^2 > 1$. Cada candidato δ admite, por tanto, un par que infringe la misma tolerancia uno. Esto demuestra el fallo de uniformidad en la recta, aunque el cuadrado siga siendo continuo en cada punto por C14.

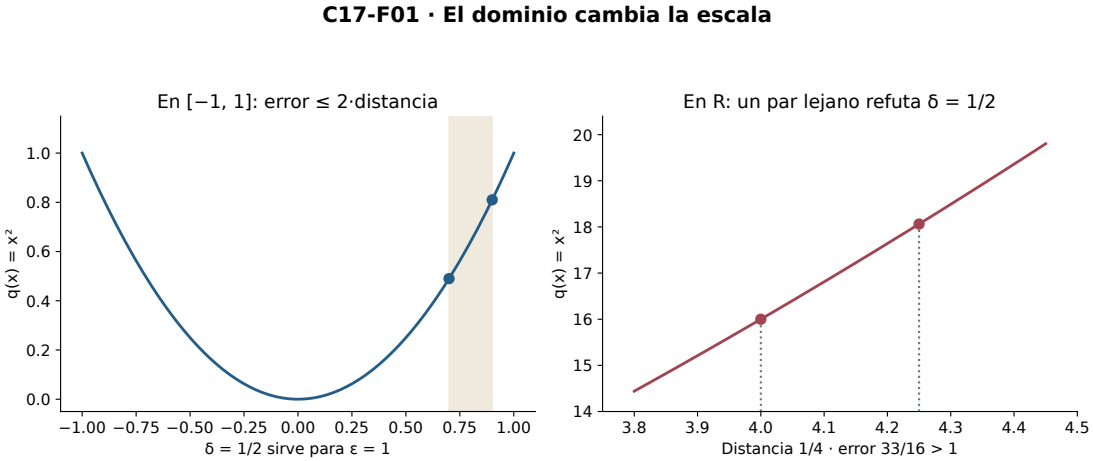


Figura 17.1. En $[-1,1]$, la identidad de diferencia de cuadrados da radio $1/2$ para tolerancia 1. En la recta, el par 4 y $17/4$ tiene distancia $1/4$ y error $33/16$, y refuta ese candidato. La prueba general de R1/E002 produce testigos para todo radio: un solo gráfico no refuta todos los candidatos.

Un control uniforme también puede depender de la escala de forma no lineal. La raíz cuadrada ofrece un ejemplo en todo el semieje no negativo. Para $x \geq y \geq 0$, escribimos $a = \sqrt{x}$ y $b = \sqrt{y}$; el orden de las raíces da $a \geq b$, de donde $(a-b)^2 \leq (a-b)(a+b) = x - y$. Al intercambiar las entradas cubrimos el otro orden y obtenemos $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$ en $[0, \infty)$. El radio $\delta = \varepsilon^2$ controla cualquier par, incluido uno con entrada cero. Sin embargo, una constante Lipschitz $L > 0$ en $[0, 1]$ exigiría, al comparar $x > 0$ con cero, que $1/\sqrt{x} \leq L$. La entrada $x = 1/(n+1)^2$, con $n+1 > L$, contradice esa cota. Tampoco sirve $L = 0$, porque la raíz no es constante. La uniformidad admite, pues, este control cuadrático aun cuando falle el lineal; sólo hemos usado las raíces y sus reglas de orden y álgebra de C10.

Ejercicios de la sección 17.1.

Ejercicio 1. El orden de los cuantificadores

Escribe continuidad puntual, uniformidad y negación de uniformidad para $f : D \to \mathbb{R}$. Explica qué variables puede conocer cada radio y trata el vacío.

Solución. Puntual: $\forall a \in D\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D$, distancia menor que δ implica error respecto de a menor que ε. Uniforme: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in D$ con la implicación de R1. En la primera el radio puede depender del centro; en la segunda se fija antes de los dos puntos. Negación: existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que todo $\delta > 0$ admite un par con distancia menor que δ y error al menos ε_0. Función y dominio están fijados en los tres casos. En el vacío la uniformidad es vacía y su negación es falsa, porque no existen pares.

La negación uniforme fija una sola precisión infringida y permite que las entradas cambien después de cada radio. En continuidad puntual se fija además el centro antes de diseñar la escala. Por eso no se niegan las dos propiedades con los mismos testigos. En el vacío, la existencia de una pareja infractora es imposible y toda escala positiva satisface el control.

Ejercicio 2. Un radio dependiente no refuta otro posible

Una prueba de continuidad de x^2 produce radios dependientes del centro y concluye que no hay radio uniforme. Diagnostica el fallo y prueba la conclusión correcta en $\mathbb{R}$ con testigos para cada radio. Contrasta $[-M, M]$.

Solución. Que una construcción dependa del centro no excluye otras construcciones independientes. Para refutar uniformidad fijamos $\varepsilon_0 = 1$; dado $\delta > 0$, sea $h = \min(\delta/2, 1) > 0$, $x = 1/h$, $y = x + h$. Si $\delta \leq 2$, $h = \delta/2 < \delta$; si $\delta > 2$, $h = 1 < \delta$. El error es $h(2/h + h) = 2 + h^2 > 1$. Estos testigos sí refutan todo radio común. En $[-M, M]$, $M > 0$, $|x^2 - y^2| \leq 2M|x - y|$ y $\delta = \varepsilon/(2M)$ da uniformidad. Para $M = 0$ el dominio es singleton y cualquier radio sirve.

Retorno visual. Véase C17-F01, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba. El par construido depende del candidato δ, como permite la negación, mientras la tolerancia uno permanece fija. La pequeña separación h se compensa con la entrada grande $1/h$ y mantiene el error mayor que uno. En el dominio acotado esa compensación ya no puede crecer sin límite, pues $|x + y| \leq 2M$. El caso $M = 0$ debe tratarse antes de dividir por esa barrera.

Ejercicio 3. Una escala no lineal

Prueba uniformidad de $\sqrt{x}$ en $[0, \infty)$ sin derivadas y refuta que sea Lipschitz en $[0, 1]$.

Solución. Para $x \geq y \geq 0$, con $a = \sqrt{x} \geq b = \sqrt{y}$, $(a - b)^2 \leq (a - b)(a + b) = x - y$. Intercambiar los argumentos cubre el otro orden, así la diferencia de raíces es a lo sumo la raíz de la distancia. $\delta = \varepsilon^2$ sirve en todo el dominio. Si una constante $L > 0$ diera control Lipschitz en $[0, 1]$, tomar $x = 1/(n + 1)^2$, $y = 0$ exigiría $1/(n + 1) \leq L/(n + 1)^2$, es decir $n + 1 \leq L$, falso para un índice grande. $L = 0$ falla entre cero y uno.

La desigualdad de raíces compara cualquier par no negativo y no presupone un centro positivo. Por ello el radio cuadrático incluye cero y vale en todo el semieje. Para refutar Lipschitz en el segmento basta examinar parejas con una entrada cero: la razón error/distancia supera cualquier constante al escoger un índice grande. El mismo ejemplo distingue control uniforme de control lineal.

Ejercicio 4. Restricción y regreso imposible

Prueba que uniformidad se hereda por restricción. Da una función cuya restricción a un subconjunto sea uniforme aunque ella no sea uniforme en el dominio mayor.

Solución. El mismo radio uniforme sirve para todos los pares del subconjunto, porque también son pares del dominio original. La recíproca falla: x^2 en $\mathbb{R}$ no es uniforme por E002, pero en $[0, 1]$ tiene constante Lipschitz dos. Incluso la restricción a un singleton sería uniforme sin informar sobre el resto. Restringir elimina parejas que había que controlar, sin crear otras nuevas. Por eso el certificado uniforme anterior sigue siendo válido. La vuelta agregaría parejas sobre las que no hay información. El cuadrado permite comprobar ambas afirmaciones concretamente: la barrera del dominio pequeño funciona allí y los pares que escapan en el mayor refutan uniformidad global.

Ejercicio 5. Uniformidad sin compacidad ni acotación

Para $f(x) = 3x - 2$ en $\mathbb{R}$, da un radio uniforme y determina si la imagen y el dominio son acotados o compactos. ¿Refuta Heine–Cantor?

Solución. La diferencia de salidas es $3|x - y|$, por lo que $\delta = \varepsilon/3$ sirve. El dominio es toda la recta, no acotado ni compacto por C16. La imagen también es toda la recta: y tiene entrada $(y + 2)/3$, así tampoco es acotada ni compacta. No refuta Heine–Cantor: éste da compacidad como condición suficiente, no necesaria para una función particular. La traslación menos dos desaparece al restar valores y el factor tres determina la escala. La imagen se identifica por un despeje válido para cualquier salida real, no sólo observando que la función crece. La uniformidad puede coexistir con entrada y salida no acotadas. Heine–Cantor no declara que todo dominio de una uniforme deba ser compacto.

17.2. Una cubierta y una escala de protección

La compacidad permite conservar una cubierta usando finitos miembros, pero la continuidad uniforme necesitará además mover un poco los puntos sin salir de un mismo abierto. Para conseguirlo cubriremos con bolas pequeñas cuya bola doble ya esté protegida dentro de un miembro original. Después de reducir la cubierta a finitos datos, el mínimo de sus radios reservará un margen común. **R2. Número de Lebesgue para una cubierta dada.** Sea $K \subseteq \mathbb{R}$ compacto y $(U_i)_{i\in I}$ una cubierta por abiertos reales. Existe $\lambda > 0$ tal que $\forall z \in K\ \exists i \in I : \quad K \cap (z-\lambda, z+\lambda) \subseteq U_i$. La escala es común a todos los centros; el miembro de la cubierta puede variar con z. El enunciado no exige una función que reúna esos índices elegidos por centro. Si $K = \emptyset$, sirve $\lambda = 1$ incluso cuando $I = \emptyset$, porque no hay centros que verificar. Supongamos en lo que sigue que K no es vacío.

Construimos **todos** los triples admisibles

$$T = \{(a, i, r) \in K \times I \times \mathbb{R}_{>0} : (a-2r, a+2r) \subseteq U_i\}.$$

Cada triple determina por fórmula el abierto $B(a, r) = (a-r, a+r)$, así que tenemos una familia definida sin escoger un radio preferido para cada centro. Para comprobar que cubre K, fijamos un $a \in K$: cobertura proporciona algún i con $a \in U_i$, y apertura proporciona $\rho > 0$ con $B(a, \rho) \subseteq U_i$. El triple $(a, i, \rho/2)$ pertenece a T y su bola pequeña contiene a. Este testigo para el punto fijado basta para demostrar cobertura.

Aplicamos compacidad a esa familia de bolas pequeñas. Obtenemos un conjunto finito $J \subseteq T$ que todavía cubre K, y J no puede ser vacío porque K no lo es. Sus radios forman entonces un conjunto finito no vacío de reales positivos; por C16 posee un mínimo positivo, con el que definimos $\lambda = \min\{r : (a, i, r) \in J\} > 0$. Para $z \in K$ hay un triple $(a, i, r) \in J$ con $|z-a| < r$. Si $w \in B(z, \lambda)$, entonces

$|w-a| \le |w-z| + |z-a| < \lambda + r \le 2r$. La bola ambiental completa queda dentro de $B(a, 2r) \subseteq U_i$, y al recortarla por K obtenemos la inclusión relativa del enunciado. El radio λ se fijó usando sólo la cubierta finita; el triple que contiene a z se utiliza después, para ese centro.

C17-F02 · Una cubierta necesita margen

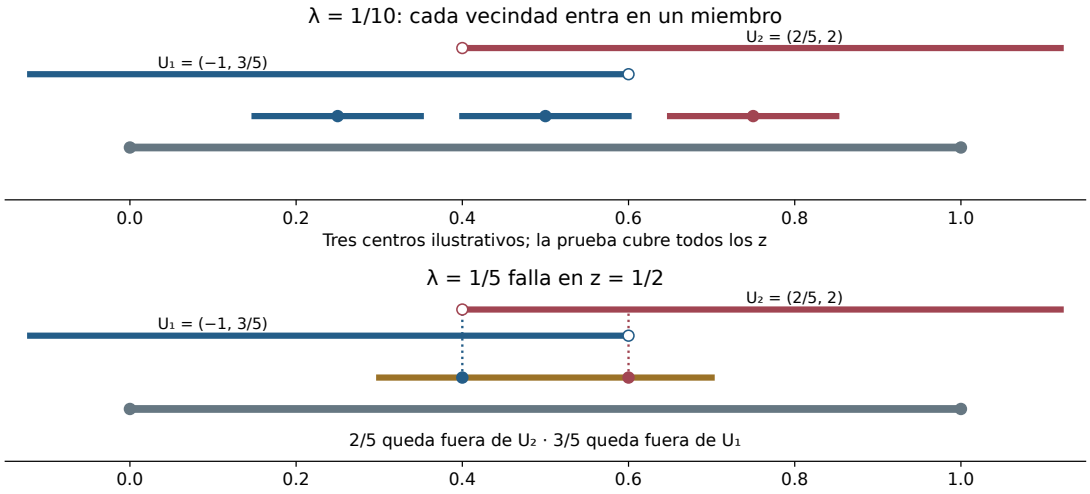


Figura 17.2. Para K=[0,1] y los dos abiertos indicados, λ=1/10 sirve: se usa U1 si z≤1/2 y U2 si z>1/2. Los tres centros dibujados son ilustrativos. λ=1/5 falla en el centro 1/2, porque su bola relativa contiene 2/5 y 3/5, y ningún miembro contiene ambos. Extremos de la bola se interpretan por desigualdades estrictas del texto.

El orden de estos pasos es esencial. Una familia infinita de radios positivos puede tener ínfimo cero, como ocurre con $1/(n+1)$. La compacidad entrega primero una lista finita que conserva cobertura; sólo entonces tomamos su mínimo. La protección en las bolas dobles permite trasladar ese margen desde el centro a de una bola de la lista hasta cualquier z que esté en su bola pequeña.

Por ejemplo, en $K = [0,1]$ la cubierta $U_1 = (-1, 3/5)$ y $U_2 = (2/5, 2)$ admite $\lambda = 1/10$ para la inclusión relativa. Si $z \leq 1/2$, todo $w \in K$ con $|w - z| < 1/10$ satisface $w < 3/5$ y entra en U_1. Si $z > 1/2$, satisface $w > 2/5$ y entra en U_2. La desigualdad estricta protege también el caso $z = 1/2$.

En un dominio no compacto puede faltar toda escala de protección. Para $D = (0,1)$, los abiertos $U_n = (1/(n+2), 2)$ forman la cubierta sin subcubierta finita de C16. Dado $\lambda > 0$, tomamos $0 < z < \min(\lambda, 1)$. La bola relativa $D \cap B(z, \lambda)$ contiene puntos positivos arbitrariamente próximos a cero y, por ello, puntos por debajo de cada umbral $1/(n+2)$. Ningún U_n contiene esa bola, de modo que tampoco existe un número de Lebesgue positivo para esta cubierta.

Si recibimos una cubierta por abiertos relativos A_i de un compacto K, el levantamiento canónico de C16, $W_i = (\mathbb{R} \setminus K) \cup A_i$, es abierto real y satisface $K \cap W_i = A_i$. Aplicamos R2 a la familia W y recortamos su conclusión por K. La misma escala protege las bolas relativas dentro de los A_i, sin elegir representantes ambientales para cada abierto relativo.

Ejercicios de la sección 17.2.

Ejercicio 6. Proteger una cubierta concreta

Para $K = [0,1]$, $U_1 = (-1, 3/5)$ y $U_2 = (2/5, 2)$, verifica que $\lambda = 1/10$ es número de Lebesgue relativo. ¿Sirve $\lambda = 1/5$?

Solución. Para $z \leq 1/2$, $w \in K$ a distancia menor que $1/10$ satisface $w < z + 1/10 \leq 3/5$, y como $w \geq 0 > -1$ pertenece a U_1. Si $z > 1/2$, $w > z - 1/10 > 2/5$ y $w \leq 1 < 2$, luego está en U_2. Para $\lambda = 1/5$, el centro $z = 1/2$ tiene bola relativa que contiene $3/5$ y $2/5$. El primero no está en U_1 y el segundo no está en U_2; ningún miembro contiene la bola. Así ese radio falla.

Retorno visual. Véase C17-F02, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba. El corte de centros en $1/2$ permite decidir qué abierto protege la bola relativa completa. Los extremos del dominio no molestan porque las entradas de la bola siguen en $[0,1]$. Para el radio propuesto mayor, ambos testigos están estrictamente dentro de la bola de centro medio, pero cada uno refuta un miembro distinto de la cubierta. Así se descarta toda posibilidad de que alguno contenga esa bola.

Ejercicio 7. Familia de todos los triples

Reconstruye R2 mostrando por qué T determina una familia abierta y cubre K sin escoger un triple para cada punto.

Solución. T contiene exactamente los triples (a, i, r) con $a \in K$, $i \in I$, $r > 0$ y $B(a, 2r) \subseteq U_i$. Cada triple tiene componentes únicas y determina el abierto $B(a, r)$; esto es una regla funcional, no una elección entre radios. Para un a arbitrario, cobertura da un i y apertura un $\rho > 0$; el triple $(a, i, \rho/2)$ pertenece a T y su bola contiene a. La prueba establece cobertura punto por punto, sin definir un mapa de triples elegidos por centro.

La familia indexada por triples puede tener varias bolas con el mismo centro, y todas son admitidas si cumplen la protección doble. Para cobertura se necesita únicamente un triple para el centro fijado, obtenido de cobertura y apertura. La asignación de una bola a cada triple es una fórmula única. No es una selección de un triple preferido entre todas las posibilidades de cada centro.

Ejercicio 8. Tomar un ínfimo demasiado pronto

Un argumento toma el ínfimo de todos los radios locales positivos y lo declara positivo. Repara la prueba de R2 y explica el papel de la bola doble.

Solución. Positividad de todos los miembros no da ínfimo positivo: los recíprocos $1/(n+1)$ tienen ínfimo cero. Primero se aplica compacidad a las bolas pequeñas de todos los triples admisibles, obteniendo una lista finita no vacía J. El mínimo de sus radios es positivo por ser uno de los miembros. Si z está a distancia menor que r de un centro de la lista y $|w-z| < \lambda \leq r$, entonces $|w-a| < 2r$. La bola doble contenida en el abierto original reserva justamente ese margen; cobertura por bolas pequeñas sola no demuestra dicha inclusión.

La familia completa incluye radios arbitrariamente pequeños en muchos ejemplos y su ínfimo puede no proteger nada. La subcubierta finita conserva cobertura y permite tomar un mínimo positivo. La doble bola se utiliza después para mover la protección al centro que se está examinando. Son dos pasos distintos: reducir los datos y reservar margen para las distancias.

Ejercicio 9. Levantar sin elegir ambientes

Una cubierta de compacto se da por abiertos relativos (A_i). Explica cómo obtener su número de Lebesgue sin elegir simultáneamente abiertos ambientales que representen cada A_i.

Solución. C16 prueba que $W_i = (\mathbb{R} \setminus K) \cup A_i$ es abierto real y que $K \cap W_i = A_i$. La regla determina toda la familia por fórmula, y ésta cubre K. R2 da $\lambda > 0$ para W. Para cada $z \in K$, algún W_i contiene la bola relativa; al intersectar con K se obtiene inclusión en A_i. No se seleccionó una familia de representantes ambientales. El vacío se resuelve con $\lambda = 1$.

El levantamiento se define con la misma fórmula para todos los índices y no altera la selección de entradas dentro del compacto. Como K es cerrado, esos levantamientos sí son abiertos reales. El número de Lebesgue ambiental protege bolas relativas en K, y la identidad de recorte las sitúa dentro de A_i. La prueba mantiene procedencia de índices y evita una familia de representantes elegidos.

Ejercicio 10. Una cubierta finita sin margen

Sea $D = \{p_n = 1/(n+1) : n \geq 0\}$. Pon $r_n = 1/[4(n+1)(n+2)]$ y divide las bolas $B(p_n, r_n)$ en dos abiertos, según paridad de n. Prueba que cubren D y que esa cubierta finita no tiene número de Lebesgue positivo.

Solución. Cada bola es abierta y contiene su centro; sus uniones pares e impares son abiertos y cubren D. Ninguna bola contiene otro p_m: para $m > n$, $p_n - p_m \geq p_n - p_{n+1} = 1/[(n+1)(n+2)] = 4r_n$; para $m < n$, la distancia al vecino anterior, cuando existe, es $1/[n(n+1)] > 4r_n$. Así cada p_n pertenece sólo al abierto de su paridad. Dado $\lambda > 0$, elegimos n con $p_n - p_{n+1} < \lambda$. La bola relativa centrada en p_n contiene ambos puntos, de paridades opuestas, y no está contenida en ninguno de los dos abiertos. No hay escala positiva. El dominio omitió cero y no es compacto; finitud de una cubierta particular no sustituye compacidad.

Las bolas originales aíslan a sus propios puntos dentro de D. Eso hace que los dos abiertos asignen cada entrada exclusivamente según su paridad. Sin embargo, las distancias entre vecinos de distinta paridad tienden a cero. Cualquier escala positiva admite una bola relativa que contiene dos vecinos y no cabe en ninguno de los dos miembros. La cubierta es finita, pero el dominio no es compacto.

17.3. Heine–Cantor: reducir antes de tomar el mínimo

R3. Heine–Cantor. Si $f : D \to \mathbb{R}$ es continua en cada punto de un compacto $K \subseteq D$, relativamente a D, su restricción $h : K \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua. No hace falta que D sea compacto ni que K sea intervalo. La restricción es continua por C14. Fijada $\varepsilon > 0$, necesitamos un radio anterior a cualquier par de puntos de K. Si K es vacío, sirve $\delta = 1$. Para K no vacío, la continuidad ofrece controles locales con error $\varepsilon/2$; los reuniremos todos y reservaremos una bola doble para poder comparar dos salidas con el mismo valor central:

$$T_\varepsilon = \{(a, r) \in K \times \mathbb{R}_{>0} : \forall z \in K,\ |z-a| < 2r \Longrightarrow |h(z) - h(a)| < \varepsilon/2\}.$$

La familia $B(a,r)$ indexada por T_ε cubre K. En efecto, para un centro a fijado, continuidad con tolerancia $\varepsilon/2$ da $\rho > 0$, y el par $(a, \rho/2)$ es admisible y contiene su centro en la bola pequeña. La relación que define T_ε incluye todos esos controles posibles; verificar cobertura de esta manera no requiere construir una función $a \mapsto r_a$.

Compacidad entrega un $J \subseteq T_\varepsilon$ finito que cubre K mediante las bolas pequeñas. Es no vacío, y $\delta = \min\{r : (a,r) \in J\} > 0$. Con el radio ya fijado, sean $x, y \in K$ tales que $|x-y| < \delta$. Alguna bola pequeña de la lista contiene x, de modo que para cierto $(a,r) \in J$ tenemos $|x-a| < r$. El punto y puede quedar fuera de ella; la protección disponible está en la doble, y la triangular da precisamente

$|y-a| \le |y-x| + |x-a| < \delta + r \le 2r$. Ambos puntos pertenecen a la bola doble relativa donde el mismo par (a,r) controla las salidas respecto de $h(a)$. La comparación a través de ese valor central consume las dos mitades del error:

$$|h(x) - h(y)| \le |h(x) - h(a)| + |h(a) - h(y)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Este δ sirve para todo par de K y demuestra la uniformidad de h. La prueba usó una familia de bolas definida por fórmula, una reducción finita y su mínimo; no recurrió a compacidad secuencial ni a seleccionar rutas o radios para todos los centros.

C17-F03 · Cubrir pequeño y controlar doble

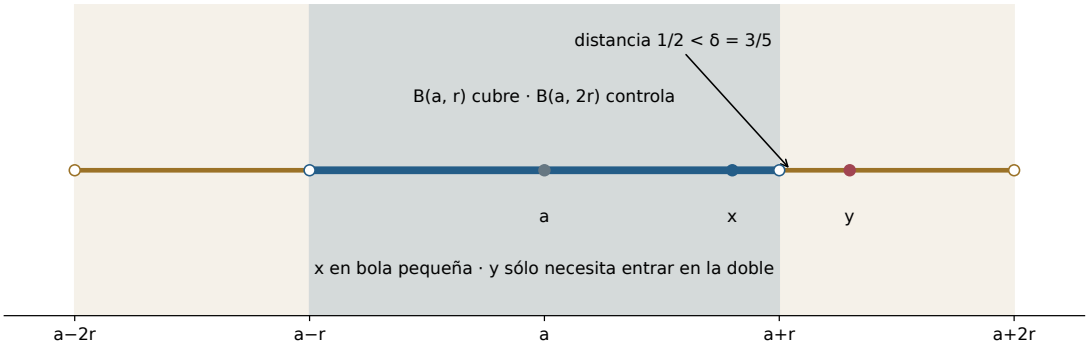


Figura 17.3. Esquema con a=0, r=1, δ=3/5, x=4/5 e y=13/10. El par tiene distancia 1/2<δ; y queda fuera de la bola pequeña pero dentro de la doble. Cada índice admisible asegura error menor que $\varepsilon/2$ respecto de f(a) en toda la bola doble relativa. La geometría representa el paso de la prueba, no una función particular.

Segunda lectura mediante R2. Para cada $a \in K$, definimos $A_a = \{z \in K : |h(z) - h(a)| < \varepsilon/2\}$. Continuidad hace abiertos relativos estos conjuntos, y $a \in A_a$ demuestra que cubren K. Los levantamos por $W_a = (\mathbb{R} \setminus K) \cup A_a$ y aplicamos R2 para obtener $\lambda > 0$. Dados $x, y \in K$ con $|x-y| < \lambda$, algún A_a contiene toda la bola relativa de centro x; en particular contiene tanto a x como a y. Las dos salidas distan menos que $\varepsilon/2$ de $h(a)$ y la triangular concluye. El número de Lebesgue concentra en una propiedad de la cubierta el margen que antes construimos con bolas dobles.

Heine–Borel de C16 permite aplicar el resultado a cualquier cerrado acotado real: segmentos, conjuntos finitos, compactos con varias piezas y conjuntos de recíprocos con su límite. La compacidad garantiza uniformidad para toda función continua en ese dominio. Una función particular puede tener una estimación uniforme en un dominio mayor, como la identidad en $\mathbb{R}$, cuyo radio es $\delta = \varepsilon$ aunque la recta no sea compacta.

Acotación sola no asegura la garantía: $1/x$ en $(0,1]$ es continua pero falla la uniformidad. En efecto, para $x_n = 1/(n+2)$, $y_n = 1/(n+3)$, $|x_n - y_n| = \frac{1}{(n+2)(n+3)} \longrightarrow 0$, $\quad |1/x_n - 1/y_n| = 1$. Para cualquier radio positivo, arquimedianidad permite encontrar un índice con distancia de entrada menor que él, mientras el error de salida sigue siendo uno. El extremo

omitido impide aplicar Heine–Borel a este dominio acotado. La recta, por su parte, es cerrada, pero el cuadrado ya mostró que cerradura sin acotación tampoco garantiza uniformidad. En ambos ejemplos contamos con pares infractores explícitos.

Ejercicios de la sección 17.3.

Ejercicio 11. Las dos bolas del mismo índice

En R3, justifica todas las condiciones que llevan de un par $|x-y|<\delta$ al error menor que ε. ¿Por qué no basta decir que ambos están en la misma bola pequeña?

Solución. La lista finita cubre x con $B(a,r)$ y tiene $\delta \le r$. Entonces $|x-a|<r<2r$ y $|y-a|\le |y-x|+|x-a|<\delta+r\le 2r$. El segundo punto puede estar fuera de $B(a,r)$, pero ambos cumplen la condición del índice en $B(a,2r)\cap K$, así sus salidas distan menos que $\varepsilon/2$ de $h(a)$. La triangular da error menor que ε. Afirmar pertenencia a la bola pequeña para y gastaría una inclusión no probada.

Retorno visual. Véase C17-F03, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba. La distancia de y al centro de la bola se controla pasando por x, que sí está en la bola pequeña. El mínimo de radios aporta el margen para que ambos queden en la doble. Allí la admisibilidad controla cada salida respecto del mismo valor central. La suma de los dos presupuestos medios completa el error del par sin una inclusión adicional no demostrada.

Ejercicio 12. Uniformizar sólo la restricción

Para $f(x)=x^2$ en $D=\mathbb{R}$ y $K=[-2,-1]\cup[1,2]$, aplica Heine–Cantor y da además un radio explícito. ¿Qué se puede concluir sobre todo D?

Solución. K es cerrado/acotado, compacto por C16, y f es continua en sus puntos relativamente a D. R3 hace uniforme la restricción sobre K, sin exigir que sea intervalo. Además $|x+y|\le 4$ allí, por lo que $\delta=\varepsilon/4$ controla el error. Nada de esto uniformiza todo D; E002 ya refuta uniformidad del cuadrado en la recta. Las dos piezas son cerradas y acotadas, de modo que su unión es compacta aunque no sea intervalo. El radio explícito usa una cota de $|x+y|$ válida para cualquier par de K, incluso si sus puntos pertenecen a piezas diferentes. La conclusión corresponde a esa restricción. Los infractores que escapan en D siguen siendo posibles fuera del compacto.

Ejercicio 13. La lectura por cubiertas de salida

Prueba Heine–Cantor usando los abiertos relativos $A_a=\{z\in K : |h(z)-h(a)|<\varepsilon/2\}$ y R2. Declara el orden de los testigos.

Solución. Cada A_a es preimagen relativa de un intervalo abierto y contiene a, así forman cubierta. Se levantan por $W_a=(\mathbb{R}\setminus K)\cup A_a$ y R2 da una escala $\lambda>0$ antes de los puntos x,y. Para $x\in K$, R2 proporciona un índice a que contiene su bola relativa. Si $|x-y|<\lambda$, tanto x como y están en ella y por tanto en A_a. Ambos errores respecto de $h(a)$ son menores que $\varepsilon/2$, y su suma controla la diferencia. No se construye un selector $x\mapsto a_x$. Para K vacío sirve cualquier radio.

Las preimágenes se definen para todos los centros por una condición de salida y quedan abiertas relativas por continuidad. El número de Lebesgue se obtiene antes del par solicitado. Para ese par se fija sólo un miembro que proteja la bola de x, y ésta contiene también a y. El índice puede variar con x, pero el radio no, que es la conclusión uniforme.

Ejercicio 14. Acotación sin frontera incluida

Refuta uniformidad de $1/x$ en $(0,1]$ con pares dados válidos desde $n=0$. Explica qué hipótesis de Heine–Cantor falta.

Solución. Tomamos $x_n=1/(n+2)$ y $y_n=1/(n+3)$, ambos del dominio desde cero. La distancia es $1/[(n+2)(n+3)]$, tendente a cero, pero las salidas son $n+2, n+3$ y difieren uno. Para $\varepsilon_0=1$, todo radio positivo admite un índice con distancia menor, refutando

uniformidad. El dominio es acotado pero no cerrado: cero es adherente y está omitido. Falta compacidad, no continuidad de la función en el dominio efectivo.

Los pares están en el dominio efectivo desde el primer término y sus diferencias se calculan exactamente. Una precisión fija uno se infringe para entradas con distancia tan pequeña como se quiera. Acotación del dominio no basta para Heine–Cantor: también hace falta cerradura para compacidad. La discontinuidad no se afirma en cero, porque cero no es una entrada del recíproco dado.

Ejercicio 15. Vacuidad y prueba sin rutas

Explica dónde entra no vacuidad en el mínimo de R3 y por qué la prueba no necesita CC(R). Contrasta la demostración por pares malos de una negación.

Solución. Para K no vacío, una subcubierta no puede tener conjunto de índices vacío; por ello sus radios forman conjunto finito no vacío y poseen mínimo positivo. Para K vacío no se toma mínimo: $\delta = 1$ satisface la condición vacía. La prueba define todos los pares admisibles, verifica cobertura con testigos individuales y usa una aplicación de compacidad seguida de datos finitos; no fabrica rutas ni selecciona radios por todos los centros. Una prueba que fabrica pares malos para cada escala necesita justificar esa selección numerable, como en la recíproca condicional de R6.

La no vacuidad de K obliga a que una reducción que lo cubre contenga algún índice. Ese hecho permite el mínimo de radios positivos. Para el vacío se elige uno directamente y no se usa ese paso. La prueba por cubiertas usa existencias puntuales y un conjunto finito, mientras una ruta de pares malos exige reunir testigos para todas las escalas naturales.

17.4. Medir la oscilación a cada escala

Una vez obtenido el radio común, podemos reunir en una sola cantidad todos los errores que admite cada escala de entrada. El supremo permite hacerlo incluso cuando ningún par produce el mayor error, por lo que primero comprobaremos que el conjunto de diferencias es no vacío y acotado. **R4. Módulo de oscilación.** Supongamos D no vacío y $f : D \to \mathbb{R}$ acotada: $|f(x)| \le B$ con $B \ge 0$. Para $t \ge 0$ definimos

$\omega_f(t) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in D,\ |x - y| \le t\}$. Los pares diagonales aportan diferencia cero y la barrera de valores da $|f(x) - f(y)| \le 2B$. El conjunto de la definición es, por tanto, no vacío y acotado, y C00 proporciona su supremo real. Para D vacío declaramos por convención $\omega_f(t) = 0$, sin atribuir un supremo real al conjunto vacío. La acotación de f es suficiente para esta construcción, pero hay funciones no acotadas con módulo finito a cada escala: la identidad en $\mathbb{R}$ tiene $\omega(t) = t$, pues todos sus errores admitidos son a lo sumo t y el par $0, t$ alcanza esa cota.

Los conjuntos de diferencias aumentan al aumentar t; por eso ω es no decreciente, $\omega(0) = 0$, y $|f(x) - f(y)| \le \omega_f(t)$ si $|x - y| \le t$. En este marco acotado, f es uniformemente continua si y sólo si $\omega_f(t) \to 0$ cuando $t \downarrow 0$. Para la dirección directa, dada $\varepsilon > 0$, uniformidad con tolerancia $\varepsilon/2$ da $\delta > 0$. Si $0 < t < \delta$, todos los valores del conjunto que define $\omega(t)$ son menores que $\varepsilon/2$, por lo que

$0 \le \omega(t) \le \varepsilon/2 < \varepsilon$. Al pasar de todos los errores a su supremo sólo conservamos una desigualdad no estricta: por ejemplo, todos los miembros de $[0, 1)$ son menores que uno y su supremo es uno. El presupuesto medio deja el margen necesario. Para la recíproca, el límite proporciona $\eta > 0$ tal que $\omega(t) < \varepsilon$ cuando $0 < t < \eta$. Fijamos $t = \eta/2$ y $\delta = t$ antes de considerar el par; si su distancia es menor que δ, también es a lo sumo t, y su error queda acotado por $\omega(t) < \varepsilon$.

Si f es Lipschitz con constante L, su módulo satisface $\omega_f(t) \le Lt$. La raíz tiene $\omega(t) \le \sqrt{t}$ en cualquier dominio no negativo donde este módulo sea definido; son dos tipos distintos de dependencia entre escalas.

Un módulo exacto. Para $q(x) = x^2$ en $[0, 1]$,

$$\omega_q(t) = \begin{cases} 2t - t^2, & 0 \le t \le 1, \\ 1, & t \ge 1. \end{cases}$$

Ordenamos un par arbitrario como $0 \le v \le u \le 1$ y ponemos $d = u - v \le t \le 1$. Su diferencia de cuadrados satisface $u^2 - v^2 = d(2u - d) \le d(2 - d) \le t(2 - t)$; la última desigualdad se debe a $(t - d)(2 - t - d) \ge 0$. El par $1, 1 - t$ alcanza esa barrera y prueba la igualdad del módulo para $t \le 1$. Cuando $t \ge 1$, todos los pares están admitidos y $1, 0$ alcanza la mayor diferencia, uno. La cota Lipschitz $\omega_q(t) \le 2t$ sigue siendo válida a cualquier escala, aunque pierde la precisión del cálculo exacto.

Para la raíz en $[0, 1]$, R1 da $\omega(t) \le \sqrt{t}$ y el par $t, 0$ alcanza la cota si $0 \le t \le 1$. A partir de uno, el par $1, 0$ alcanza toda la variación posible y el módulo vale uno. Así ambos módulos tienden a cero, aunque el de la raíz no admita una barrera lineal común cerca de cero.

C17-F04 · Cuánto puede oscilar a escala t

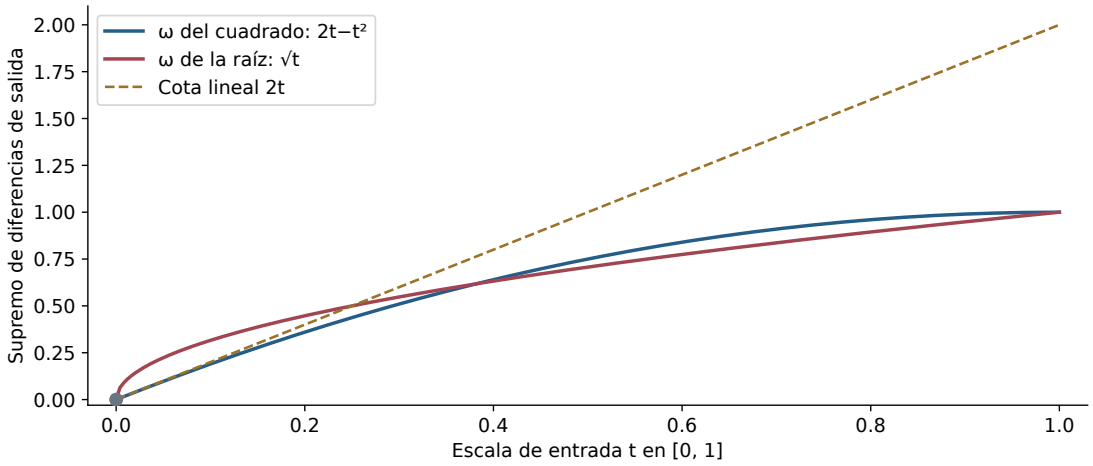


Figura 17.4. En [0,1], los módulos exactos de x² y √x son 2t−t² y √t para 0≤t≤1; después de uno ambos valen uno. La recta 2t es una cota más sencilla del módulo del cuadrado. Las fórmulas se prueban por álgebra y pares que alcanzan las cotas; las curvas sólo las representan.

En estos dos ejemplos los pares explícitos acreditan que los supremos se alcanzan. Para aplicar el criterio en un dominio arbitrario basta disponer del supremo y controlar su límite en cero; no necesitamos que sea máximo ni que el módulo sea continuo como función de t. En particular, C16 acota toda continua sobre un compacto y R3 asegura que su módulo tiende a cero.

Ejercicios de la sección 17.4.

Ejercicio 16. Existencia y orden del módulo

Para $f : D \to \mathbb{R}$ acotada en un dominio no vacío, justifica existencia de $\omega_f(t)$, su monotonía, valor en cero y la cota de diferencias. Trata el dominio vacío.

Solución. Si $|f| \le B$, toda diferencia está entre cero y $2B$. Para cada $t \ge 0$, los pares diagonales aportan cero, por lo que el conjunto es no vacío y tiene supremo. Si $s \le t$, todos los pares admitidos a escala s también lo son a escala t, así $\omega(s) \le \omega(t)$. A escala cero sólo hay pares iguales y el módulo vale cero. Toda diferencia admitida es a lo sumo el supremo. Para vacío se define módulo cero por convención; no se atribuye un supremo real al conjunto vacío.

La cota global produce una barrera uniforme $2B$ para errores, no sólo para un par. Los pares diagonales dan no vacuidad a cada escala. El supremo domina cada diferencia sin prometer un par maximizador. La convención para el vacío se declara aparte porque completitud real no entrega un supremo del conjunto vacío.

Ejercicio 17. Supremo y presupuesto estricto

Una prueba dice: «todos los errores son menores que ε, luego su supremo también». Repara la dirección uniforme implica módulo tendente a cero y prueba la recíproca.

Solución. El supremo de $[0, \varepsilon)$ es ε, así la estrictitud no pasa así al supremo. Se pide primero error $\varepsilon/2$ a uniformidad; para $0 < t < \delta$, el supremo es a lo sumo $\varepsilon/2 < \varepsilon$, lo que prueba el límite cero. Recíprocamente, dado ε, el límite da $\eta > 0$ y $\omega(t) < \varepsilon$ para $0 < t < \eta$. Fijamos $t = \eta/2$ y $\delta = t$. Todo par de distancia menor que δ tiene error a lo sumo $\omega(t) < \varepsilon$. Se conserva el orden de los cuantificadores.

La definición del módulo admite distancias menores o iguales que t, mientras uniformidad controla distancias estrictamente menores que δ. Por eso se toma $t < \delta$ al usarla. El presupuesto medio conserva margen cuando se pasa al supremo. En la recíproca se fija una escala positiva concreta con módulo pequeño antes de verificar cualquier pareja.

Ejercicio 18. Módulo exacto del cuadrado

Calcula $\omega(t)$ para x^2 en $[0, 1]$, para todo $t \geq 0$. Da los pares que alcanzan cada cota y compara con $2t$.

Solución. Si $0 \leq v \leq u \leq 1$, $d = u - v \leq t \leq 1$, la diferencia es $d(2u-d) \leq d(2-d) \leq t(2-t)$ porque la última diferencia es $(t-d)(2-t-d) \geq 0$. El par $1, 1-t$ alcanza $2t - t^2$ para $0 \leq t \leq 1$. Si $t \geq 1$, la diferencia no supera uno y el par $1, 0$ lo alcanza. Así el módulo es $2t - t^2$ en la primera escala y uno después. Siempre está bajo $2t$; para $0 < t \leq 1$ la mejora exacta es t^2.

Retorno visual. Véase C17-F04, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba. La cota se demuestra primero para un par arbitrario ordenado, con separación $d \leq t$. El factor algebraico $(t-d)(2-t-d)$ es no negativo en la escala hasta uno, lo que compara su error con el candidato exacto. Un par explícito alcanza después la cota y acredita igualdad. Más allá del diámetro del dominio ya se admiten todos los pares y el módulo queda constante en uno.

Ejercicio 19. Una raíz y su módulo

Calcula el módulo exacto de $\sqrt{x}$ en $[0, 1]$. Contrasta la dependencia en t con la del cuadrado.

Solución. R1 da diferencia a lo sumo $\sqrt{|x-y|}$, por tanto $\omega(t) \leq \sqrt{t}$ para $0 \leq t \leq 1$. El par $t, 0$ alcanza esa cota. Para $t \geq 1$, todas las diferencias son a lo sumo uno y el par $1, 0$ la alcanza. El módulo es $\sqrt{t}$ hasta uno y uno después. Tiende a cero, pero su cociente por t es $1/\sqrt{t}$ cerca de cero y no admite cota lineal uniforme. El cuadrado sí tiene módulo a lo sumo $2t$.

El par que alcanza $\sqrt{t}$ está dentro del segmento sólo para $t \leq 1$, y por eso se separa la escala mayor. Allí el par de extremos ya alcanza toda la variación de salida. El módulo de la raíz tiende a cero, lo que confirma uniformidad. Su crecimiento como raíz de la escala impide una barrera lineal común cerca de cero.

Ejercicio 20. Valores no acotados y módulo finito

Explica por qué no se puede concluir que una uniforme en $\mathbb{R}$ tiene valores acotados. Calcula el módulo de la identidad y prueba uniformidad directamente.

Solución. La identidad tiene valores que recorren toda la recta y no están acotados. A escala $t \geq 0$, las diferencias admitidas están entre cero y t, y el par $0, t$ alcanza t, así el módulo es finito e igual a t. Directamente, $\delta = \varepsilon$ da uniformidad. La hipótesis de acotación de R4 era suficiente para construir un módulo real global sin más análisis, no necesaria en todos los ejemplos.

El módulo examina diferencias de salida a una distancia fijada, no el conjunto de salidas individuales. Para la identidad esas diferencias nunca superan t y una pareja separada exactamente t alcanza la cota. Así hay módulo finito a cada escala aunque las salidas no admitan cota global. El ejemplo precisa el carácter suficiente de la hipótesis de acotación en R4.

17.5. Transportar tolerancias por operaciones

Al restar los valores de una suma podemos sumar sus errores, pero en un producto cada diferencia queda multiplicada por un valor del otro factor. Las reglas uniformes deben controlar también esos multiplicadores y, en los cocientes, la distancia del denominador a cero. Consideramos siempre las funciones sobre el mismo dominio efectivo. **R5. Sumas y productos.** Si $f, g : D \to \mathbb{R}$ son uniformemente continuas, $f + g$ también: elegimos radios para error $\varepsilon/2$ en cada una y tomamos su mínimo. La desigualdad triangular suma los dos errores. Multiplicar por una constante c se trata con $\varepsilon/|c|$ cuando $c \neq 0$; para $c = 0$ la salida es constante.

Para el producto añadimos las cotas globales $|f| \leq M_f$ y $|g| \leq M_g$, con $M_f, M_g \geq 0$. Al separar la diferencia aparecerán esos factores como multiplicadores; por eso pedimos a ambas funciones error menor que $\eta = \varepsilon/(M_f + M_g + 1) > 0$ y tomamos el mínimo de sus dos radios. El uno añadido mantiene positivo el denominador aun si ambas cotas son cero. Obtenemos

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| \leq |g(x)|\,|f(x) - f(y)| + |f(y)|\,|g(x) - g(y)| \leq (M_f + M_g)\eta < \varepsilon.$$

Si $M_f + M_g = 0$, la diferencia es cero y la conclusión también se cumple. Hemos combinado sólo dos radios. Las cotas globales ofrecen una garantía suficiente: sin ellas, las dos identidades uniformes $f(x) = g(x) = x$ en $\mathbb{R}$ producen el cuadrado, que no es uniforme. Tampoco se exige acotación de ambos factores para cada producto particular, pues la identidad multiplicada por la constante uno sigue siendo uniforme.

Recíprocos y cocientes. Si g es uniforme y $|g(x)| \geq m > 0$ en D, entonces $1/g$ tiene exactamente ese dominio y $\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)}\right| \leq \frac{|g(x)-g(y)|}{m^2}$. Pedimos a g error menor que εm^2 y su radio uniforme hace menor que ε la diferencia de recíprocos. Además $|1/g| \leq 1/m$, de modo que, si f es uniforme y acotada, la regla de producto se aplica a f y $1/g$ y da uniformidad de f/g. El margen positivo es un dato global: la identidad en $(0, 1]$ nunca se anula y es uniforme, pero sus valores se aproximan a cero y su recíproco ya demostró que falla uniformidad.

En un compacto, C16 proporciona acotación para las continuas y un margen positivo para el denominador continuo sin ceros. R3 uniformiza las funciones, y las reglas anteriores justifican el cociente. Alternativamente, C14 da continuidad del cociente y R3 vuelve a aplicarse, siempre con el dominio compacto declarado. **Composición.** Sea $f : D \to E$ uniforme y $g : E \to \mathbb{R}$ uniforme sobre E; bastaría uniformidad de g en $f[D]$. Para error final ε, primero elegimos $\eta > 0$ que controle g. Después elegimos $\delta > 0$ que produzca error de salida menor que η para f. Así

$$|x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \eta \Longrightarrow |g(f(x)) - g(f(y))| < \varepsilon.$$

Las funciones se evalúan de dentro hacia fuera, mientras las tolerancias se diseñan desde el error final hacia la entrada inicial. La continuidad puntual exterior sólo ofrecería radios dependientes de cada salida intermedia. Puede faltar uno común: la identidad uniforme en $\mathbb{R}$ seguida del cuadrado continuo tiene como composición el propio cuadrado, que no es uniforme. Para una inyección continua sobre un compacto K, C16 proporciona continuidad de la inversa en $H = f[K]$ y compacidad de H. Al considerar la inversa como función $H \to \mathbb{R}$ conservamos las mismas distancias de salida, así que R3 la hace uniforme. Esta conclusión incluye compactos con varias piezas y no asegura una constante Lipschitz: el cuadrado en $[0, 1]$ tiene por inversa la raíz, cuyo control uniforme cuadrático ya examinamos.

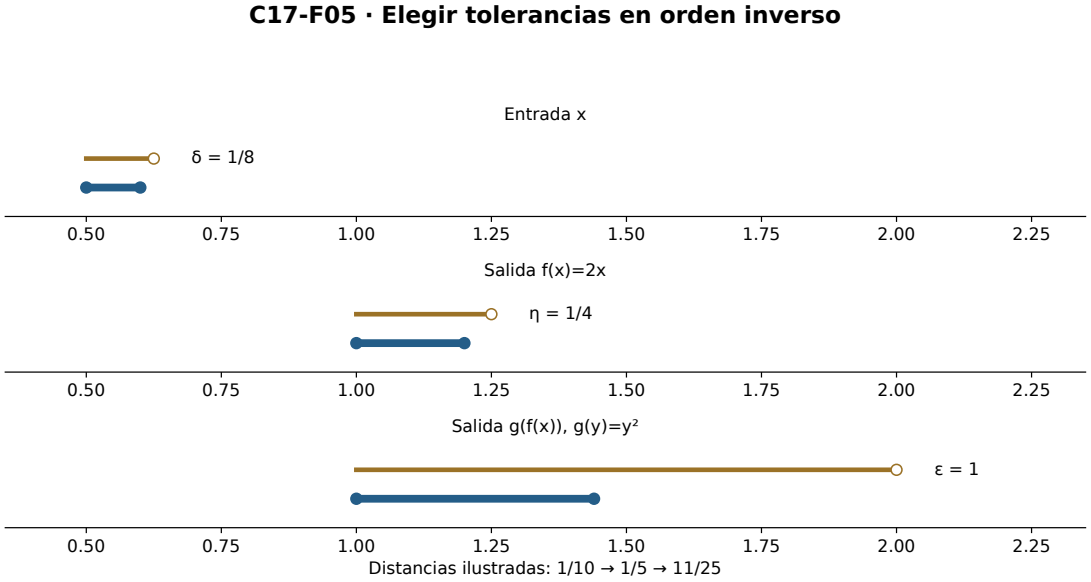


Figura 17.5. Para f(x)=2x en [0,1] y g(y)=y² en [0,2], el error exterior tiene cota cuatro veces la distancia. Para ε=1, sirve η=1/4 y después δ=η/2=1/8. El par de entrada 1/2,3/5 ilustra distancias 1/10,1/5 y 11/25, cada una bajo su presupuesto. Las tolerancias se eligen desde la salida final hacia la entrada.

Ejercicios de la sección 17.5.

Ejercicio 21. Radios para una suma

Prueba uniformidad de $af + bg$ si f, g son uniformes en el mismo dominio y a, b son constantes. Trata constantes cero.

Solución. Si $a \neq 0$, pedimos a f error menor que $\varepsilon/(2|a|)$ y obtenemos un radio; si $a = 0$, el término tiene error cero y usamos radio uno para él. Hacemos lo mismo con g, b. El mínimo de ambos radios positivos sirve para todos los pares y la diferencia de $af + bg$ es a lo sumo la suma de los dos errores escalados, cada uno menor que $\varepsilon/2$ cuando no es cero. La suma es menor que ε.

Las constantes no nulas multiplican los errores y requieren dividir el presupuesto por su magnitud. Una constante cero elimina su sumando y puede recibir cualquier radio auxiliar positivo. El mínimo garantiza ambos controles antes de conocer las entradas. La triangular permite combinar los errores escalados sin suponer cotas globales de los valores de f y g.

Ejercicio 22. Factores que amplifican errores

Prueba la regla de producto bajo cotas M_f, M_g. Muestra que eliminar ambas cotas pierde la garantía y que no son necesarias para todo producto particular.

Solución. Pedimos errores menores que $\eta = \varepsilon/(M_f + M_g + 1)$ a ambas funciones y tomamos el mínimo de sus radios. La identidad de diferencias del producto da cota $(M_f + M_g)\eta < \varepsilon$, incluidos sumandos nulos. En $\mathbb{R}$, ambos factores identidad son uniformes y no acotados, pero su producto cuadrado falla uniformidad. En cambio, identidad por constante uno es uniforme aunque el primer factor sea no acotado. La regla declara condiciones suficientes y el ejemplo sólo refuta una regla universal sin ellas.

La identidad de producto separa cada cambio de factor y deja un valor del otro como multiplicador. Las cotas globales y el presupuesto común impiden amplificación sin control. El uno añadido al denominador conserva positividad incluso si ambas barreras valen cero. Los dos ejemplos finales distinguen perder una garantía universal de afirmar que todo producto sin esas cotas debe fallar.

Ejercicio 23. Un cociente sobre dos piezas

En $K = [-2,-1] \cup [1,2]$, sean $f(x) = x + 1$ y $g(x) = x^2$. Da un radio explícito uniforme para f/g, usando cotas de numerador, denominador y diferencias.

Solución. En K, $|f| \le 3$, $g \ge 1$, $|f(x) - f(y)| = |x - y|$, y $|g(x) - g(y)| \le 4|x - y|$. Sea $d = |x-y|$. La identidad $f(x)/g(x) - f(y)/g(y) = (f(x) - f(y))/g(x) + f(y)(1/g(x) - 1/g(y))$ da error a lo sumo $d + 3 \cdot 4d = 13d$, porque los denominadores tienen magnitud al menos uno. Por tanto $\delta = \varepsilon/13$ sirve para todos los pares, incluso en piezas distintas. El cociente está definido en todo K.

El margen del denominador vale uno en todas las entradas, incluidas las dos piezas. La identidad de recíprocos acota su diferencia por la del cuadrado, a lo sumo cuatro veces la distancia. El numerador tiene diferencia igual a la distancia y magnitud a lo sumo tres. Reunir ambos términos da el control trece, suficiente para un radio común sin exigir que sea óptimo.

Ejercicio 24. El orden inverso de tolerancias

Sean $f : D \to E$ y $g : E \to \mathbb{R}$ uniformes. Prueba uniformidad de $g \circ f$ y refuta sustituir uniformidad de g por continuidad puntual.

Solución. Primero uniformidad de g para ε da $\eta > 0$. Después uniformidad de f para η da $\delta > 0$. Distancia de entrada menor que δ produce salidas de f a distancia menor que η, y por tanto error final menor que ε. Basta control de g sobre $f[D]$. Si $D = E = \mathbb{R}$, f identidad es uniforme, g cuadrado es continua pero no uniforme, y la composición también es cuadrado no uniforme. La continuidad puntual exterior no da una tolerancia intermedia común.

Retorno visual. Véase C17-F05, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba. La tolerancia intermedia debe servir para cualquier par de salidas de la interior. Continuidad puntual de la exterior permitiría que esa tolerancia cambiara al cambiar la salida central y no satisface ese requisito. La identidad seguida del cuadrado mantiene uniformidad de la interior y continuidad de la exterior, pero falla uniformidad de la composición. El ejemplo refuta exactamente la sustitución propuesta.

Ejercicio 25. Inversa uniforme sin control lineal

Justifica que una inyección continua $f : K \to \mathbb{R}$ sobre compacto tiene inversa uniforme en su imagen. Da un ejemplo en que esa inversa no sea Lipschitz.

Solución. C16 hace compacta $H = f[K]$ y prueba continuidad de la inversa $h : H \to K$. Retipar su salida a $\mathbb{R}$ conserva continuidad, por usar la misma distancia; Heine–Cantor la hace uniforme sobre H. El vacío también queda incluido. Para $f(x) = x^2$ sobre $[0,1]$, la inyectividad sigue del orden no negativo, su imagen es $[0,1]$ por raíces C10 y su inversa es $\sqrt{y}$. R1 prueba que ésta es uniforme y no Lipschitz en ese dominio.

La continuidad inversa se obtiene primero por transporte de cerrados en C16, con dominio en la imagen. Esa imagen es compacta por continuidad de la directa. Heine–Cantor añade uniformidad de la inversa allí. La raíz sobre $[0,1]$ cumple esta conclusión con radio cuadrático aunque no disponga de una constante Lipschitz.

17.6. Pares próximos y rutas dadas

R6. Prueba mediante dos sucesiones dadas. Si $f : D \to \mathbb{R}$ es uniforme y $(x_n), (y_n)$ son dos sucesiones dadas en D con $|x_n - y_n| \to 0$, entonces $|f(x_n) - f(y_n)| \to 0$. Para $\varepsilon > 0$ fijamos el radio uniforme δ. La convergencia de las distancias proporciona N tal que son menores que δ para $n \ge N$; desde ese índice las diferencias de salida son menores que ε. No hace falta que ninguna de las dos rutas converja, ni que sea acotada.

Por ejemplo, $x_n = n + 1$ y $y_n = n + 1 + 1/(n + 1)$ se acercan entre sí aunque escapen al infinito. Para el cuadrado, $|y_n - x_n| = \frac{1}{n+1} \to 0$, $\quad y_n^2 - x_n^2 = 2 + \frac{1}{(n+1)^2} \ge 2$. Si el cuadrado fuera uniforme, R6 obligaría a que esas diferencias de salida tendieran a cero, contradiciendo la cota dos. Las rutas están dadas por fórmula y este uso de la implicación

directa no requiere selección. Los pares recíprocos de R3 muestran el mismo fallo cuando las entradas se aproximan a un extremo omitido.

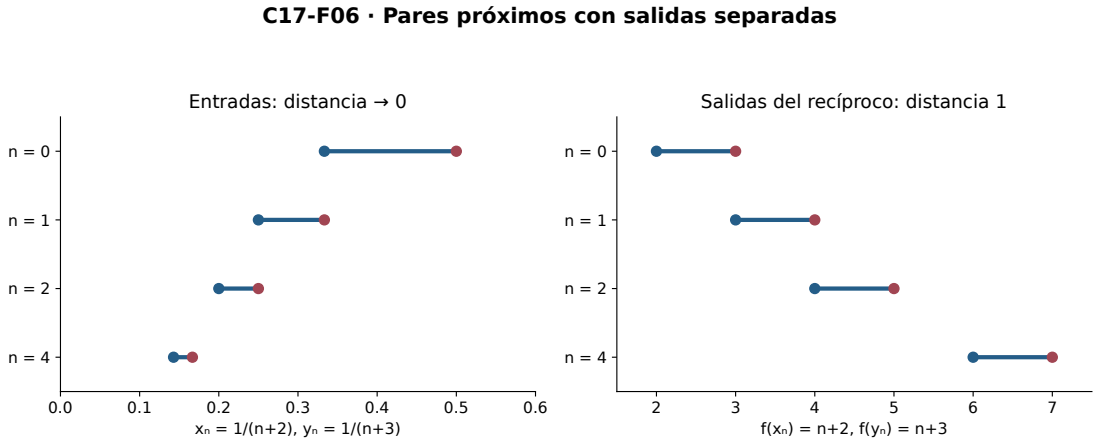


Figura 17.6. Se representan n=0,1,2,4 de las rutas recíprocas dadas. La distancia de entrada es 1/[(n+2)(n+3)] y tiende a cero; bajo f(x)=1/x la distancia de salida es siempre uno. R6 directo refuta uniformidad; no se usa la recíproca ni selección de rutas. Muestra finita, no prueba visual de convergencia.

Recíproca con alcance declarado. Supongamos que toda pareja de rutas dadas en D con distancia tendente a cero tiene diferencias de salida tendentes a cero. Para deducir uniformidad en un dominio arbitrario mediante el argumento siguiente usamos CC($\mathbb{R}$), sólo como premisa del resultado condicional. Si falla uniformidad, fijamos la tolerancia $\varepsilon_0 > 0$ de la negación. Los conjuntos

$$A_n = \{x \in D : \exists y \in D, |x - y| < 1/(n+1),\ |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0\}$$

son no vacíos. Una aplicación de CC($\mathbb{R}$) da una ruta $x_n \in A_n$. Definimos ahora

$$B_n = \{y \in D : |x_n - y| < 1/(n+1), |f(x_n) - f(y)| \geq \varepsilon_0\}.$$

La pertenencia $x_n \in A_n$ garantiza que cada B_n es no vacío. Una segunda aplicación de CC($\mathbb{R}$) proporciona $y_n \in B_n$. Hemos obtenido dos rutas cuya distancia tiende a cero mientras sus salidas permanecen separadas al menos por ε_0, en contradicción con la propiedad supuesta. La primera selección fija entradas que admiten compañero; la segunda fija los compañeros de esas entradas. Ambas corresponden a familias de subconjuntos reales y pertenecen sólo a esta recíproca condicional; la dirección directa y Heine–Cantor conservan sus pruebas independientes.

Si el dominio no vacío viene con una sobreyección dada $e : \mathbb{N} \to D$, el buen orden permite determinar los pares sin CC(R). Para cada n, la negación de uniformidad y la sobreyectividad garantizan índices j, k que representan un par malo a escala $1/(n+1)$. Tomamos el menor j que admita algún compañero y, fijado éste, el menor k que satisfaga la condición. Los mínimos únicos definen ambas rutas; sus índices no tienen que ser crecientes, pues no construimos una extracción. Usamos la enumeración recibida, sin inferir una para dominios arbitrarios. El dominio vacío es uniforme por separado.

Preservación de Cauchy. Toda uniforme envía una sucesión de Cauchy dada a otra de Cauchy. Para $\varepsilon > 0$ elegimos δ uniforme; la condición de Cauchy de entrada da un N con $|x_n - x_m| < \delta$ para $n, m \geq N$, y entonces las diferencias de salida son menores que ε. La definición y acotación de rutas de Cauchy son interfaces de C07. La preservación de Cauchy tampoco caracteriza uniformidad en dominios arbitrarios. Cada ruta de Cauchy en $\mathbb{R}$ está acotada por algún $M > 0$, y la estimación $|x_n^2 - x_m^2| \leq 2M|x_n - x_m|$ hace Cauchy a su imagen bajo el cuadrado. Esa barrera pertenece a la ruta concreta y puede variar entre

rutas, mientras un radio uniforme tendría que servir para todos los pares de la recta. Las dos rutas próximas que escapan muestran el fallo de esta exigencia mayor.

Ejercicios de la sección 17.6.

Ejercicio 26. Rutas que no convergen

Para $x_n = n + 1$ y $y_n = n + 1 + 1/(n + 1)$, calcula las distancias de entrada y salida bajo el cuadrado. Usa sólo la dirección directa de R6 para concluir.

Solución. La distancia de entrada es $1/(n+1)$, tendente a cero. La diferencia de cuadrados es $2 + 1/(n + 1)^2$, que nunca baja de dos y por tanto no tiende a cero. Si el cuadrado fuera uniforme, la dirección directa R6 obligaría a que esas diferencias tendieran a cero, contradicción. Ninguna ruta de entrada converge o es acotada; la dirección directa no lo exigía. Los pares están dados por fórmula desde $n = 0$, sin selección adicional.

La pequeña separación compensa exactamente la entrada creciente en el término lineal de la diferencia de cuadrados. El error queda mayor o igual que dos para todos los índices. Esto infringe la consecuencia directa necesaria de uniformidad para las rutas dadas. No se necesita convergencia individual, acotación ni seleccionar testigos de conjuntos abstractos.

Ejercicio 27. Dos familias y dos selecciones

Reconstruye la recíproca secuencial de R6 bajo CC(R). Identifica las dos familias reales no vacías y explica por qué Heine–Cantor no queda condicionado por esta prueba.

Solución. El fallo de uniformidad fija $\varepsilon_0 > 0$. Para cada n, A_n contiene entradas que tienen algún compañero a distancia menor que $1/(n+1)$ y error al menos ε_0; negación garantiza no vacuidad. CC(R) selecciona $x_n \in A_n$. Luego B_n reúne los compañeros de ese x_n con ambas propiedades y es no vacío; CC(R) selecciona $y_n \in B_n$. Estas rutas tienen distancia tendente a cero y salida separada, contradiciendo la propiedad de pares dada. Sólo esta recíproca usa las selecciones. Heine–Cantor fue demostrado directamente por una cubierta explícita y finitud, sin recurrir a la recíproca.

La primera familia contiene entradas que admiten algún compañero infractor; su selección no determina todavía quién es ese compañero. La segunda familia se define a partir de la primera ruta ya seleccionada y permite completar los pares. CC(R) respalda ambas funciones de términos. La prueba por cubiertas de Heine–Cantor es independiente y conserva su conclusión sin adoptar esta premisa adicional.

Ejercicio 28. Una enumeración de pares malos

Supón dada una sobreyección $e : \mathbb{N} \to D$ no vacío. Construye los pares malos de una negación de uniformidad mediante mínimos de índices, sin CC(R).

Solución. Fijamos ε_0 de la negación. Para cada n, existe un par malo en D y, por sobreyectividad, índices j, k que lo representan. El conjunto de j para los que existe algún k malo a escala $1/(n + 1)$ es no vacío; tomamos su mínimo j_n. Para ese índice, el conjunto de compañeros k es no vacío y tiene mínimo k_n. Los mínimos únicos definen $x_n = e(j_n)$ y $y_n = e(k_n)$, que tienen distancia menor que $1/(n + 1)$ y error al menos ε_0. Se usa la enumeración dada, sin inferirla para dominios arbitrarios.

La negación asegura al menos un par a cada escala, y la sobreyección representa sus dos miembros por índices. El mínimo exterior fija una primera entrada que tenga compañero y el mínimo interior fija uno para ella. No se exige que los mínimos aumenten con la escala: construyen dos rutas, no una extracción. Las cotas de distancia y error son las propiedades que esas rutas deben conservar.

Ejercicio 29. Preservar una ruta de Cauchy

Prueba que una uniforme envía toda ruta de Cauchy dada a otra de Cauchy. Refuta la recíproca universal con el cuadrado en $\mathbb{R}$.

Solución. Para error ε elegimos el radio uniforme δ. La condición Cauchy de entrada da N con todas las distancias entre términos posteriores menores que δ; uniformidad hace todas las diferencias de salida posteriores menores que ε. Para el cuadrado, cada ruta Cauchy es acotada, digamos $|x_n| \leq M$ con $M > 0$. Entonces $|x_n^2 - x_m^2| \leq 2M|x_n - x_m|$, que convierte su condición Cauchy de entrada en la de salida. Sin embargo el cuadrado falla uniformidad en toda la recta, por E002/E026. No se confundió una ruta acotada particular con control sobre todo el dominio.

La condición Cauchy entrega un corte que vale para todos los pares tardíos, y el radio uniforme lo transforma en control Cauchy de salida. Para el cuadrado, la barrera M pertenece a la ruta concreta y puede cambiar entre rutas diferentes. Ese control individual no ofrece un radio para toda la recta. Así preservación de rutas no equivale a uniformidad global en un dominio arbitrario.

Ejercicio 30. Pares recíprocos y una frontera

En $(0, 1]$, usa $x_n = 1/(n+2)$ y $y_n = 1/(n+3)$ para comparar identidad y recíproco. ¿Qué aprende el test de pares?

Solución. La distancia de entrada es $1/[(n+2)(n+3)] \to 0$. Bajo identidad la diferencia es la misma y tiende a cero, conforme a uniformidad. Bajo recíproco la diferencia vale uno para todo n, refutando uniformidad por R6 directo. Las dos rutas convergen a cero, que está fuera del dominio; no se evalúa el recíproco en ese punto exterior. El test controla pares dentro del dominio efectivo.

Retorno visual. Véase C17-F06, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba. La identidad transporta la separación exactamente y su diferencia de salida tiende a cero. El recíproco transforma los mismos argumentos en naturales consecutivos con diferencia uno. El test muestra que proximidad de entradas no se transporta uniformemente para esa función. Ambas evaluaciones se realizan dentro de $(0, 1]$, sin asignar un valor a la frontera ausente.

17.7. Completar el dominio sin seleccionar aproximantes

La raíz en $(0, 1]$ conserva su control uniforme al acercarse a cero, aunque cero no sea una entrada original. Para una función uniforme general, las salidas de todas las entradas próximas a un punto adherente quedarán en bandas cada vez más estrechas. Usaremos los ínfimos y supremos de esas imágenes locales para definir el valor de la extensión, sin escoger aproximantes ni sucesiones por punto.

R7. Extensión uniforme al cierre. Toda uniforme $f : D \to \mathbb{R}$ admite una extensión uniforme $F : \overline{D} \to \mathbb{R}$, y ésta es la única extensión continua. Si D es vacío, también lo es su cierre y la función vacía resuelve el enunciado. Supongamos D no vacío. Uniformidad para error uno da un $\delta_0 > 0$, que fijamos una sola vez para toda la construcción. Sea $r_0 = \delta_0/4$. Para $p \in \overline{D}$ y $0 < r \leq r_0$, ponemos

$$E_{p,r} = f[D \cap B(p, r)], \qquad L_{p,r} = \inf E_{p,r}, \quad U_{p,r} = \sup E_{p,r}.$$

Adherencia garantiza una entrada en cada bola positiva y, por ello, una salida en cada $E_{p,r}$. Para probar acotación, fijamos sólo para este p un $a \in D \cap B(p, r_0)$. Cualquier otra entrada x de esa bola satisface $|x - a| < 2r_0 < \delta_0$, luego $|f(x) - f(a)| < 1$. Toda la imagen inicial queda entre $f(a) - 1$ y $f(a) + 1$, y las imágenes de bolas menores heredan la cota. El testigo a demuestra acotación para el punto considerado; no se reúne una familia $p \mapsto a_p$ para definir la extensión.

Las imágenes se anidan al disminuir r. El conjunto de todos los $L_{p,r}$ es no vacío y está acotado superiormente por U_{p,r_0}; definimos por fórmula $F(p) = \sup\{L_{p,r} : 0 < r \leq r_0\}$. Por definición de supremo, $L_{p,r} \leq F(p)$ para cada radio admisible. Para la otra cota, fijamos r y consideramos cualquier s: la imagen a escala $\min(r, s)$ es no vacía y está contenida en ambas imágenes mayores. Uno de sus valores está por encima de $L_{p,s}$ y por debajo de $U_{p,r}$,

de modo que $U_{p,r}$ domina todos los ínfimos que intervienen en el corte. Al tomar su supremo obtenemos

$L_{p,r} \le F(p) \le U_{p,r} \qquad (0 < r \le r_0)$. **Anchura pequeña.** Dada $\eta > 0$, uniformidad entrega $\delta > 0$ para error η. Si $0 < r \le r_0$ y $2r < \delta$, cualesquiera dos entradas de $D \cap B(p, r)$ tienen salidas a distancia menor que η. Para deducir $U_{p,r} - L_{p,r} \le \eta$ sin suponer extremos alcanzados, fijamos un valor v de la imagen: todos sus valores son a lo sumo $v + \eta$, y por ello $U_{p,r} \le v + \eta$. Como esto vale para todo v, el real $U_{p,r} - \eta$ es cota inferior de la imagen y no supera $L_{p,r}$. Podemos hacer la anchura menor que cualquier $\varepsilon > 0$ pidiendo primero $\eta = \varepsilon/2$ y reduciendo el radio.

Dos candidatos a distancia $d > 0$ no pueden quedar ambos en un intervalo de anchura a lo sumo $d/2$. Por tanto, $F(p)$ es el único real que cumple todas las bandas locales. Si comenzamos con otro radio inicial admisible, las bandas coinciden a todas las escalas menores que ambos radios y fuerzan el mismo valor. Cuando $p \in D$, su salida $f(p)$ pertenece a cada imagen local y cumple esas mismas cotas; la unicidad da $F(p) = f(p)$. La fórmula determina así un único valor por punto y define una función sin selección entre límites posibles.

C17-F07 · Bandas locales y un valor único

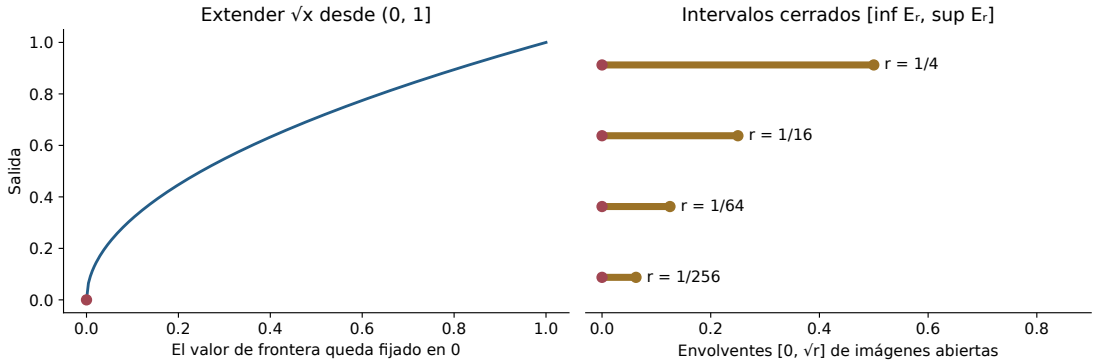


Figura 17.7. Para p=0 y f(x)=√x en (0,1], las imágenes de bolas de radio r≤1 son (0,√r); sus envolventes cerradas son [0,√r]. Se ilustran cuatro escalas exactas. Cero no es un valor de las imágenes originales, pero pertenece a todas las envolventes y es el único candidato al estrecharse. La prueba de R7 usa todas las escalas, no sólo las cuatro dibujadas.

Uniformidad en el cierre. Dada $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta > 0$ uniforme para f con error $\varepsilon/3$ y fijamos $\Delta = \delta/3$. Sean $p, q \in \overline{D}$ con $|p - q| < \Delta$. Elijamos un solo radio $0 < r \le r_0$ con $r \le \delta/6$. Para cualesquiera entradas $a \in D \cap B(p, r)$ y $b \in D \cap B(q, r)$,

$$|a - b| \le |a - p| + |p - q| + |q - b| < 2r + \delta/3 \le 2\delta/3 < \delta.$$

Todos los valores de $E_{p,r}$ quedan a distancia menor que $\varepsilon/3$ de todos los de $E_{q,r}$. Fijado un valor v de la segunda imagen, resulta $U_{p,r} \le v + \varepsilon/3$; al pasar después al ínfimo, $U_{p,r} - L_{q,r} \le \varepsilon/3$. Intercambiando las imágenes obtenemos $U_{q,r} - L_{p,r} \le \varepsilon/3$. Como los valores extendidos están entre sus extremos respectivos, $|F(p) - F(q)| \le \varepsilon/3 < \varepsilon$. El radio Δ, fijado antes de ambos puntos, demuestra uniformidad en todo el cierre.

Unicidad continua. Sea $G : \overline{D} \to \mathbb{R}$ continua y coincidente con f en D. Para un p fijado y $\varepsilon > 0$, su continuidad proporciona un radio donde $|G(x) - G(p)| < \varepsilon/2$. Tomamos una escala r menor que ese radio y que r_0. Todas las salidas de $E_{p,r}$ están en la banda abierta alrededor de $G(p)$; su ínfimo y su supremo quedan en la banda cerrada correspondiente y encierran a $F(p)$. De ahí $|F(p) - G(p)| \le \varepsilon/2 < \varepsilon$. Al valer para todo $\varepsilon > 0$, esto fuerza igualdad. Sólo se usó continuidad puntual de la extensión rival.

Las funciones identidad y raíz continuas en $[0,1]$ coinciden con sus restricciones a $(0,1]$, así que la unicidad identifica sus extensiones y da valor cero en la frontera. El recíproco no admite una extensión real continua en cero: cualquier valor finito propuesto queda fuera de una banda de radio uno para entradas recíprocas suficientemente pequeñas. Este contraste se desarrolla en E034. Si D es acotado, su cierre sigue acotado y es cerrado, luego es compacto por C16. En ese caso, admitir una extensión continua al cierre equivale a ser uniforme: R7 construye la extensión en una dirección; en la otra, Heine–Cantor uniformiza la extensión y la restricción conserva su radio. Para el vacío ambas funciones son vacías. La construcción de R7 no exigió acotación global del dominio ni selección numerable.

Ejercicios de la sección 17.7.

Ejercicio 31. Construir el corte de frontera

Justifica no vacuidad/acotación de $E_{p,r}$ y que el corte $F(p)$ queda entre $L_{p,r}$ y $U_{p,r}$ para todo radio admisible. No elijas sucesiones aproximantes.

Solución. Adherencia da entrada en cada bola. Fijamos el radio uniforme δ_0 para error uno y $r_0 = \delta_0/4$. Para este p, una entrada a en la bola inicial acota todas las salidas allí por $f(a) \pm 1$, porque la distancia entre dos entradas de ella es menor que $2r_0 < \delta_0$. Todas las imágenes menores son no vacías/acotadas. Los ínfimos forman conjunto no vacío acotado superiormente por U_{p,r_0}, así su supremo $F(p)$ existe. Supera cada ínfimo. Para un r fijado y cualquier s, una salida de la imagen a escala $\min(r,s)$ da $L_{p,s} \le U_{p,r}$. Por tanto ese supremo acota todo el corte y $F(p) \le U_{p,r}$. No se seleccionó entrada por todos los puntos o radios.

La cota inicial se obtiene para un punto de frontera fijado y se conserva al reducir radios. Para comparar dos escalas se usa su mínimo, cuya imagen local no es vacía y pertenece a ambas imágenes. Eso hace que cualquier supremo local sea cota de todos los ínfimos del corte. La fórmula de F se define con esas cotas, sin escoger una entrada o sucesión para cada radio.

Ejercicio 32. Anchuras que determinan un único real

Prueba que diferencias menores que η entre todos los valores de una imagen no vacía/acotada implican $U - L \le \eta$. Usa esto para justificar unicidad del valor extendido y coincidencia en D.

Solución. Para cada valor v, todos los valores son a lo sumo $v + \eta$, así $U \le v + \eta$. Entonces $U - \eta$ es cota inferior y no supera L, dando $U - L \le \eta$. Uniformidad hace arbitrariamente pequeñas estas anchuras al disminuir el radio. Dos candidatos distintos a distancia $d > 0$ no caben en un intervalo de anchura a lo sumo $d/2$, por tanto el candidato es único. Si $p \in D$, $f(p)$ pertenece a cada imagen local y queda entre su ínfimo/supremo; por unicidad coincide con el corte $F(p)$.

Las diferencias estrictamente menores que η producen una anchura sólo menor o igual que η al pasar a extremos. Esa conclusión basta porque la uniformidad permite pedir un presupuesto más pequeño que la distancia entre dos candidatos. La coincidencia con f utiliza además que la salida central pertenece a todas las imágenes cuando el centro está en D. Se demuestra existencia por el corte y unicidad por anchuras, en pasos distintos.

Ejercicio 33. Uniformidad y unicidad de la extensión

Completa la prueba de uniformidad de F sobre $\overline{D}$ y de unicidad entre extensiones continuas. Declara los presupuestos y radios.

Solución. Para $\varepsilon > 0$ tomamos radio δ de f para error $\varepsilon/3$ y fijamos $\Delta = \delta/3$. Dados p, q del cierre a distancia menor que Δ, usamos $0 < r \le \min(r_0, \delta/6)$. Todo par cruzado de entradas de sus bolas tiene distancia menor que $2r + \delta/3 \le 2\delta/3 < \delta$. Las cotas de supremo/ínfimo dan $U_{p,r} - L_{q,r} \le \varepsilon/3$ y la desigualdad simétrica; los cortes entre esos extremos satisfacen error a lo sumo $\varepsilon/3 < \varepsilon$. Para una extensión continua G, su radio en un p para error $\varepsilon/2$ sitúa todas las salidas locales en la banda de $G(p)$. Sus ínfimos/supremos y el corte quedan en la banda cerrada, luego $|F(p) - G(p)| \le \varepsilon/2 < \varepsilon$. Para todo ε esto fuerza igualdad; no se usa uniformidad de G para unicidad.

El radio global Δ se fija antes de p, q y el radio local r asegura que cualquier par cruzado de sus bolas quede en la escala original. Las cotas de supremo e ínfimo conservan el error con desigualdades no estrictas, cubiertas por el presupuesto reservado. Para unicidad basta un control puntual de la otra extensión en cada p. Así no se exige que una extensión continua rival sea uniforme como hipótesis.

Ejercicio 34. Extender y no poder extender

Determina las extensiones continuas a $[0,1]$ de identidad y raíz en $(0,1]$. Prueba que el recíproco no admite extensión real continua allí.

Solución. Identidad y raíz son uniformes en $(0,1]$, por R1, y sus extensiones tienen valor cero en la frontera: las funciones identidad y raíz ya son continuas en $[0,1]$ y coinciden en el dominio, así unicidad R7 las identifica. Si el recíproco tuviera extensión real continua G con valor c en cero, para error uno existiría $\rho > 0$ con $|G(x) - c| < 1$ para $0 \le x < \rho$. Elegimos n con $1/(n+1) < \min(\rho, 1)$ y $n + 1 > |c| + 1$. Entonces $G(1/(n+1)) = n + 1$ tiene diferencia respecto de c mayor que uno, contradicción. Sólo se usan entradas positivas válidas y un valor finito propuesto en la frontera.

Retorno visual. Véase C17-F07, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba. Las extensiones conocidas conservan los valores originales y son continuas también en cero, por lo que la unicidad determina su valor de frontera. El recíproco, en cambio, produce valores que superan cualquier banda alrededor de un valor real propuesto. Arquimedianidad permite una entrada positiva dentro del radio de continuidad y con salida demasiado grande. La contradicción muestra imposibilidad de una extensión real continua, no sólo fracaso de una fórmula candidata.

Ejercicio 35. Uniformidad en un dominio acotado

Para $D \subseteq \mathbb{R}$ acotado, prueba que $f : D \to \mathbb{R}$ es uniforme si y sólo si admite extensión continua al cierre. Trata vacío y explica el papel del cierre compacto.

Solución. La dirección uniforme a extensión continua es R7, incluso vacío. Recíprocamente, el cierre es cerrado y sigue acotado: si $D \subseteq [-M, M]$, su cierre está en ese cerrado. Heine–Borel lo hace compacto; una extensión continua G sobre él es uniforme por R3, y su restricción f lo es por R1. Para vacío sólo hay función vacía y extensión vacía. La compacidad se usa en esta recíproca sobre dominio acotado; existencia R7 no exigía acotación global del dominio.

La existencia de extensión uniforme al cierre no necesita acotación del dominio. La acotación sí se usa al volver desde una extensión meramente continua: junto con cerradura del cierre produce compacidad y habilita Heine–Cantor. Después la restricción conserva el radio uniforme. En el vacío ambas funciones y sus dominios son vacíos y la equivalencia se resuelve directamente.

17.8. Datos finitos y aproximaciones poligonales

En un segmento podemos colocar nodos a una distancia menor que el radio uniforme. Entonces cada punto queda próximo a los dos extremos de su celda, y ambos valores de muestra aproximan su salida. Al interpolar entre ellos conservaremos ese control en toda la celda, obteniendo una aproximación definida por finitos datos con error certificado. La existencia de esos valores finitos no presupone un procedimiento computable para evaluarlos.

R8. Aproximación poligonal de una continua en un segmento. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, $a < b$, y $\varepsilon > 0$. R3 proporciona $\delta > 0$ uniforme con tolerancia $\varepsilon/2$. Por arquimedianidad elegimos un entero $n \ge 1$ tal que $h = \frac{b-a}{n} < \delta$. Definimos nodos $t_j = a + jh$, $0 \le j \le n$. En cada celda $[t_j, t_{j+1}]$, la función interpolante es

$$P(x) = (1-\theta) f(t_j) + \theta f(t_{j+1}), \qquad \theta = \frac{x - t_j}{h} \in [0,1].$$

En un nodo compartido, la fórmula de la celda anterior da peso uno al extremo derecho y la siguiente da peso uno al izquierdo. Ambas asignan el mismo valor $f(t_j)$, así que definen

una sola función P sobre el segmento. Cada rama afín es continua; las celdas constituyen una cubierta finita por cerrados relativos y el pegado de C14 demuestra continuidad de P. Para x en esa celda, sus distancias a ambos nodos son a lo sumo $h < \delta$. Entonces ambas diferencias $|f(t_j) - f(x)|$ y $|f(t_{j+1}) - f(x)|$ son menores que $\varepsilon/2$. Por combinación convexa y desigualdad triangular,

$$|P(x) - f(x)| \le (1-\theta)|f(t_j) - f(x)| + \theta|f(t_{j+1}) - f(x)| < \varepsilon/2.$$

La cota estricta se conserva también en los nodos: cuando un peso es cero, el otro vale uno y mantiene su error menor que $\varepsilon/2$. El supremo de todos los errores es, por tanto, a lo sumo $\varepsilon/2 < \varepsilon$, lo que ya certifica la aproximación global. Además $|P - f|$ es continua en el segmento compacto y alcanza su máximo por C16; ese máximo es uno de los errores puntuales y resulta incluso menor que $\varepsilon/2$. Si $a = b$, tomamos directamente la constante $f(a)$, de error cero, sin dividir por una longitud nula. En el segmento vacío la afirmación es vacía.

C17-F08 · Una malla y un error certificado

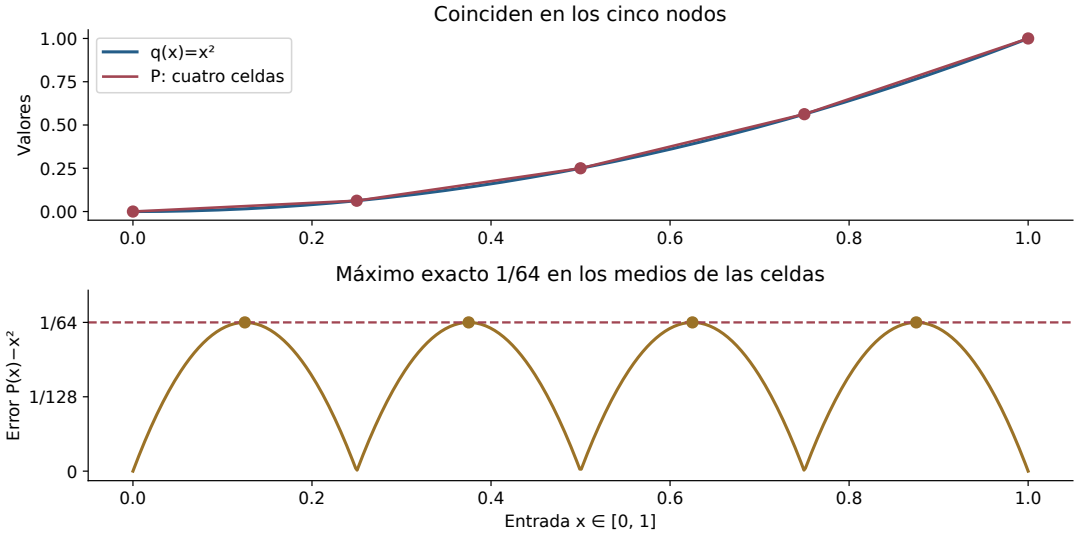


Figura 17.8. La poligonal interpola x^2 en los nodos 0,1/4,1/2,3/4,1. En cada celda, $P(x)-x^2=(x-t)(t+1/4-x)$ y el máximo es 1/64, alcanzado en 1/8,3/8,5/8,7/8. El cálculo es algebraico, sin derivadas ni convexidad futura. Para una continua general, el radio uniforme da existencia de una malla suficientemente fina, sin promesa de evaluación computable.

Certificado exacto para el cuadrado. En $[0,1]$, tomando $f(x) = x^2$ y una malla de paso $h = 1/n$, dentro de una celda con extremo izquierdo t y $x = t + \theta h$, la expansión algebraica da $P(x) - x^2 = \theta(1-\theta)h^2 = (x-t)(t+h-x) \ge 0$. La identidad $(2\theta-1)^2 \ge 0$ da $\theta(1-\theta) \le 1/4$, con igualdad exactamente cuando $\theta = 1/2$. El máximo del error es así $h^2/4$ y se alcanza en el medio de cada celda. Para cuatro celdas, $h = 1/4$ y el valor es $1/64$, alcanzado en $1/8, 3/8, 5/8, 7/8$. El certificado procede de la expansión algebraica y de un cuadrado no negativo, sin recurrir a derivadas ni a un teorema posterior de convexidad.

La garantía entre nodos depende de haber elegido la malla con una escala de control de la función. Si sólo recibimos finitas muestras sobre un segmento no degenerado, podemos insertar entre dos nodos consecutivos un pico triangular continuo de altura arbitraria, manteniendo valor cero en todos los nodos. Su interpolante será cero y el error en el medio tendrá la altura del pico. Heine–Cantor proporciona una escala para cada función dada; no

proporciona una sola malla que certifique el mismo error para todas las continuas con esas muestras.

Ejercicios de la sección 17.8.

Ejercicio 36. Construir la poligonal

Para una continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, construye P y prueba existencia de malla, coincidencia en nodos y continuidad. No uses derivadas.

Solución. Heine–Cantor para error $\varepsilon/2$ da $\delta > 0$. Arquimedianidad permite un entero $n \geq 1$ con $(b-a)/n < \delta$. Con $h = (b-a)/n$ y $t_j = a + jh$, definimos en cada celda $P(x) = (1-\theta)f(t_j) + \theta f(t_{j+1})$, $\theta = (x - t_j)/h$. En el extremo derecho $\theta = 1$ y en el izquierdo de la siguiente celda $\theta = 0$, por lo que ambas ramas dan el valor del nodo compartido. Cada rama afín es continua; las celdas forman cubierta finita por cerrados relativos y C14 da continuidad del pegado. Se usaron sólo los valores finitos en los nodos y no una capacidad computable de evaluarlos.

La escala uniforme se obtiene para un presupuesto común antes de construir nodos. Una malla suficientemente fina mantiene cada celda dentro de esa escala. Las fórmulas afines comparten valores en los nodos y por ello definen una sola función. El pegado finito sobre celdas cerradas acredita continuidad sin usar derivadas ni presuponer un algoritmo de evaluación de todas las muestras.

Ejercicio 37. Controlar todo lo que queda entre nodos

Prueba la cota uniforme de error de R8, incluidos pesos cero y la diferencia entre error puntual, supremo y máximo.

Solución. Dentro de una celda, ambos extremos distan a lo sumo $h < \delta$ de x; los dos errores de f son menores que $\varepsilon/2$. La triangular para su combinación con pesos no negativos de suma uno da error menor que $\varepsilon/2$, también si un peso es cero porque el otro es uno. Por tanto el supremo de errores es a lo sumo $\varepsilon/2 < \varepsilon$. Además $|P - f|$ es continua en compacto no vacío y alcanza máximo por C16; como es uno de los errores puntuales, ese máximo es incluso menor que $\varepsilon/2$. En el degenerado se toma constante y no se divide por cero.

Los pesos suman uno y no son negativos, así la interpolación combina dos errores bajo el mismo presupuesto. Los nodos, donde uno de los pesos es cero, siguen cumpliendo la estimación. Pasar al supremo sólo conserva una desigualdad no estricta, pero el presupuesto medio deja error global menor que ε. Si se usa que el error continuo alcanza máximo en el compacto, ese máximo también hereda la cota puntual estricta.

Ejercicio 38. Certificado exacto de cuatro celdas

Para x^2 en $[0, 1]$, interpola con cuatro celdas iguales. Calcula el error máximo y todos los puntos donde se alcanza, por álgebra.

Solución. Con $h = 1/4$ y $x = t + \theta h$, expandir la interpolación de los cuadrados de los extremos y restar $(t + \theta h)^2$ da $\theta(1-\theta)h^2$. Es no negativo y a lo sumo $h^2/4 = 1/64$, porque $(2\theta - 1)^2 \geq 0$. La igualdad exige $\theta = 1/2$. Los cuatro medios son $1/8, 3/8, 5/8, 7/8$, y en cada uno se alcanza $1/64$. No se emplea teoría diferencial ni convexidad futura.

Retorno visual. Véase C17-F08, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba. La fórmula exacta cancela los términos que dependen del extremo izquierdo de la celda. Queda el mismo error según el peso θ en todas las celdas. La identidad cuadrática de $\theta(1-\theta)$ localiza la igualdad únicamente en su medio. Así se obtienen el valor máximo y todos sus argumentos, mientras en cada nodo la poligonal coincide exactamente con el cuadrado.

Ejercicio 39. Muestras iguales y errores arbitrarios

Dada una malla finita en $[a, b]$ con $a < b$, construye una función continua que valga cero en todos sus nodos y alcance una altura prescrita $H > 0$ entre dos de ellos. Explica qué garantía falta.

Solución. Elegimos una celda de longitud positiva $[u, v]$ entre nodos consecutivos y su medio $m = (u + v)/2$. Fuera de ella ponemos cero; en $[u, m]$ ponemos $H(x - u)/(m - u)$ y en $[m, v]$ ponemos $H(v - x)/(v - m)$. Los denominadores son positivos y las ramas coinciden en valores cero en los extremos y H en el medio. El pegado finito C14 da continuidad, y todos los nodos siguen teniendo valor cero. La poligonal interpolante es cero y su error en m es H, arbitrario. Los datos de muestras sin una escala para la función entre ellas no certifican error; Heine–Cantor da escala para cada función dada, no para toda la clase con la misma malla.

La celda de longitud positiva existe porque la malla recorre un segmento no degenerado. Sus dos mitades tienen denominadores positivos, y el acuerdo en el medio y extremos hace continua la función triangular. Ningún nodo interior de esa celda existe entre consecutivos, así todas las muestras siguen siendo cero. La altura demuestra que una malla fija no certifica el error de toda función continua que coincida en esos datos.

Ejercicio 40. Elegir una malla a partir de tolerancia

Para x^2 en $[0, 1]$, da una condición en n que asegure error poligonal estrictamente menor que $\varepsilon > 0$. Compárala con usar sólo el control Lipschitz dos y presupuesto $\varepsilon/2$.

Solución. El certificado exacto da máximo $1/(4n^2)$, así basta $n > 1/(2\sqrt{\varepsilon})$ con $n \geq 1$. La raíz de ε es positiva; arquimedianidad garantiza tal entero. Si sólo usamos Lipschitz dos, para error local $\varepsilon/2$ podemos tomar $\delta = \varepsilon/4$, y R8 pide $1/n < \varepsilon/4$, es decir $n > 4/\varepsilon$. Ambas condiciones son suficientes, pero la exacta aprovecha la regla algebraica del cuadrado y puede usar muchas menos celdas. No se concluye que esa mejora exista para una continua arbitraria.

El error exacto de una malla de n celdas es $h^2/4 = 1/(4n^2)$, y la desigualdad estricta pide un entero que supere el umbral indicado. La garantía Lipschitz sólo usa una cota lineal y el presupuesto medio, por eso impone una condición más conservadora. Son dos certificados suficientes basados en información diferente. La mejora cuadrática procede de la identidad algebraica de esta función particular.

Capítulo 18

Diferenciabilidad: mirar cada vez más cerca

En el cuadrado, las secantes centradas en uno tienen pendiente $2 + h$ cuando el segundo punto está en $1 + h$. Ninguna de ellas tiene pendiente dos, pero todas se aproximan a dos al reducir el incremento. Esa pendiente límite identifica la recta que veremos al ampliar alrededor del punto con la misma escala en ambos ejes. Para precisar esta imagen habrá que comparar el error con el tamaño del incremento: el error absoluto puede tender a cero incluso para una recta de pendiente equivocada.

Los prerrequisitos centrales son límites relativos de C13 y continuidad de C14. Acumulación y densidad C04, rutas dadas C06, raíces C10 y tipos/finitud C12 son interfaces heredadas. C15/C16 sólo se mencionan como garantías adicionales de continuidad de inversas. Todas las reglas se prueban antes de reutilizarlas. No usamos Rolle, valor medio, convexidad, Taylor ni integrales; el zoom se controla por estimaciones explícitas dentro de marcos admisibles.

18.1. Pendientes con un centro fijo

Fijamos un extremo de la secante en $(a, f(a))$ y movemos el otro dentro del dominio. La pendiente divide el cambio de salida por el cambio de entrada, de modo que necesita tanto el valor central $f(a)$ como otra entrada distinta de a. Además, esas otras entradas deben existir por mucho que nos acerquemos al centro; de lo contrario, ninguna pendiente quedaría determinada por una condición de límite.

R1 — Derivada relativa. Sean $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ y $a \in D \cap \mathrm{Acc}(D)$. Definimos una función perforada $q_{f,a} : D \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$, $\qquad q_{f,a}(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Decimos que f es diferenciable o derivable en a, relativamente a D, si existe un real L tal que

$$\forall \eta > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D : \quad 0 < |x - a| < \delta \implies |q_{f,a}(x) - L| < \eta.$$

La unicidad del límite de C13 hace único a L, que escribimos $f'(a)$. El dominio de q no contiene a: la notación $f'(a)$ designa un límite, nunca una división por cero. El valor $f(a)$ sí interviene en cada secante.

Si a fuera aislado, un radio sin otras entradas haría verdadera la condición para cualquier L, y perderíamos la unicidad que permite hablar de la derivada. Por eso una función en $\{0\}$ no tiene derivada según esta definición. En cambio, cero sí acumula en $[0, \infty)$ y las secantes relativas utilizan todas las entradas positivas suficientemente pequeñas. El dominio decide qué aproximaciones se admiten: esta derivada derecha no afirma por sí sola derivabilidad bilateral en $\mathbb{R}$.

Para una afín $f(x) = mx + b$ en $\mathbb{R}$, todos los cocientes $q_{f,a}$ valen m y la derivada es $f'(a) = m$. En el cuadrado, la factorización permite cancelar el incremento únicamente cuando es no nulo: $q_{f,a}(a + h) = 2a + h \qquad (h \neq 0)$. El error de pendiente respecto de $2a$ tiene magnitud $|h|$, así que el radio $\delta = \eta$ demuestra $f'(a) = 2a$ en cada centro. En uno, las pendientes $2 + h$ se acercan a dos desde ambos lados. Para x^3 en cero el cociente es h^2 y sirve $\delta = \sqrt{\eta}$. En todos estos casos el destino es un real finito; el crecimiento sin cota de las secantes de la raíz en cero no dará una derivada bajo esta convención.

Si $a \in A \subseteq D$ y $a \in \mathrm{Acc}(A)$, la restricción conserva el valor central, los cocientes que siguen admitidos y sus radios de control. La derivada relativa a D conserva entonces su valor respecto de A. La vuelta puede fallar: en $[0, \infty)$, el valor absoluto sólo tiene secantes derechas desde cero, todas de pendiente uno; en la recta también aparecen las izquierdas.

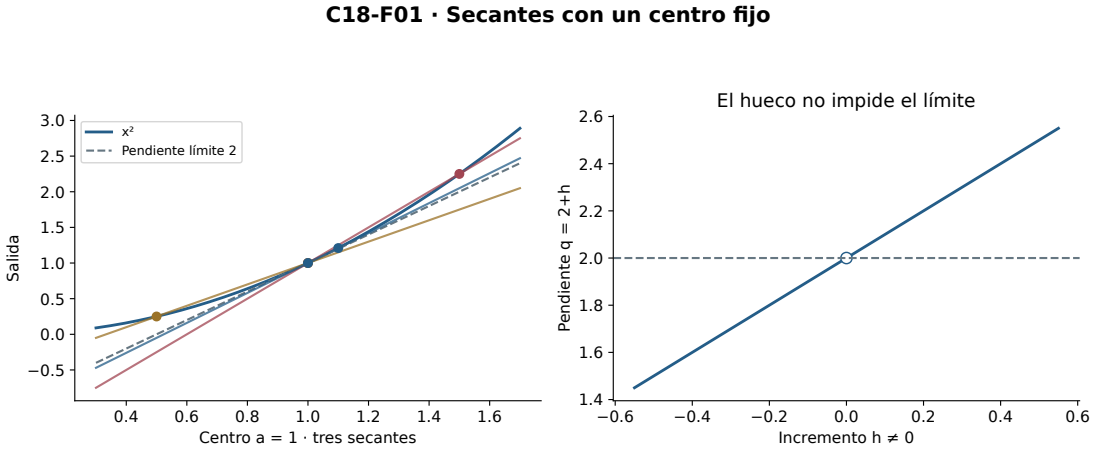


Figura 18.1. Para x^2 en a=1, las secantes de incrementos $1/2$, $-1/2$ y $1/10$ tienen pendientes $5/2$, $3/2$ y $21/10$. La función de pendientes es 2+h para h≠0; el círculo abierto recuerda que no se evalúa el cociente en h=0. El límite es dos, probado para todos los argumentos por R1.

Cuando A coincide con D dentro de alguna bola $B(a,\rho)$, se conservan las condiciones en ambos sentidos: los límites sólo usan esas entradas cercanas, y para cualquier radio r un testigo de acumulación a distancia menor que $\min(r,\rho)$ pertenece a ambos dominios.

Ejercicios de la sección 18.1.

Ejercicio 1. El centro y el dominio perforado

Escribe la definición relativa de derivada para $f : D \to \mathbb{R}$ y explica por qué un centro aislado no sirve. Trata $D = \{0\}$ y $D = [0,\infty)$.

Solución. Se exige $a \in D \cap \mathrm{Acc}(D)$ y un real L con $\forall\eta > 0 \exists\delta > 0 \forall x \in D$, $0 < |x-a| < \delta$ implica $|(f(x)-f(a))/(x-a) - L| < \eta$. El cociente vive en $D \setminus \{a\}$. En un aislado existe un radio sin entradas perforadas, de modo que cualquier L cumpliría la condición vacía y se perdería unicidad. En $\{0\}$ no se define derivada. En $[0,\infty)$, cero es de acumulación y el límite relativo sólo usa entradas positivas; es un concepto de derivada derecha respecto de ese dominio.

La evaluación central y la acumulación son premisas diferentes: la primera permite formar el numerador y la segunda impide que la prueba de límite sea vacía. El radio controla una precisión de pendiente y debe funcionar para todas las entradas perforadas admitidas. En el semieje la aproximación relativa sólo visita un lado, mientras en el singleton no existen secantes que determinen una pendiente.

Ejercicio 2. Secantes del cuadrado

Calcula la pendiente secante de x^2 centrada en a. Prueba la derivada con radio explícito y compara los valores para $a = 1$, $h = 1/2, -1/2, 1/10$.

Solución. Para $h \neq 0$, $[(a+h)^2 - a^2]/h = 2a + h$. Dada tolerancia $\eta > 0$, $\delta = \eta$ hace la diferencia respecto de $2a$ menor que η, así $f'(a) = 2a$. En uno, las tres pendientes son $5/2, 3/2, 21/10$. Ninguna secante concreta se identifica con la derivada sólo por estar cerca; el límite es dos y controla todas las entradas suficientemente próximas.

Retorno visual. Véase C18-F01, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba. La cancelación de h se realiza únicamente en el dominio perforado. El radio explícito prueba un control de todas las secantes, algo que no aportan tres valores particulares. Las secantes de incrementos positivos y negativos se sitúan a ambos lados de dos, pero su error se mide con la misma magnitud $|h|$. Así se separa el límite de sus aproximaciones concretas.

Ejercicio 3. Dos límites candidatos

Prueba directamente unicidad de la derivada con acumulación, sin usar una sucesión seleccionada.

Solución. Si L, M cumplen la definición y $d = |L-M| > 0$, pedimos tolerancia $d/3$ a ambas condiciones. El mínimo de sus radios es positivo. Acumulación entrega un único testigo perforado dentro de ese mínimo. Para su pendiente q, $d \le |L-q| + |q-M| < 2d/3$, contradicción. Se obtiene existencia de un testigo para el radio fijado, sin una elección simultánea de entradas. Ambos controles se piden para el mismo centro y la misma tolerancia de pendiente. El mínimo de radios permite aplicarlos a una sola secante. Acumulación justifica un testigo dentro de esa ventana y la triangular produce la contradicción. No hace falta construir simultáneamente testigos a todas las escalas ni una ruta seleccionada.

Ejercicio 4. Una restricción pierde un lado

Prueba la derivada relativa de $|x|$ en cero sobre $[0, \infty)$ y refuta inferir de ella la derivada sobre $\mathbb{R}$.

Solución. En el dominio positivo perforado, el cociente es $|x|/x = 1$, así cualquier radio sirve para cualquier tolerancia y la derivada relativa es uno. Sobre la recta, el cociente en las entradas negativas es menos uno. Para todo radio hay entradas positivas y negativas con pendientes separadas por dos, incompatibles con acercamiento común a un real. La restricción de una derivada existente la conserva si acumula en el centro, pero una derivada restringida puede omitir entradas que impiden el límite en el dominio mayor.

La derivada relativa sólo exige el límite de las secantes que sobreviven a la restricción. En el semieje todas valen uno. Al ampliar el dominio se agregan secantes negativas de valor menos uno y deja de existir un destino común. La herencia de derivada funciona hacia restricciones acumulantes, pero esta conclusión no se invierte.

Ejercicio 5. Cambiar el valor central

Sea $F(x) = x^2$ para $x \neq 0$ y $F(0) = 1$. Decide derivabilidad en cero y compara con el cuadrado usual.

Solución. Para $x \neq 0$, $q_{F,0}(x) = x - 1/x$, que no tiene límite finito en cero. Más directamente, F no es continua en cero: las entradas $x_n = 1/(n+1)$ tienen salidas tendentes a cero, distintas del valor central uno; R3 refuta derivabilidad. Este uso de R3 es una consecuencia posterior de R1 dentro del capítulo. El cuadrado usual sí tiene valor central cero y derivada cero. Que dos funciones coincidan en el dominio perforado no garantiza iguales cocientes si sus valores centrales difieren.

El valor central aparece en todos los numeradores incrementales y no puede modificarse sin cambiar los cocientes. Las salidas perforadas conservan su límite cero mientras la función asigna uno en el centro. La discontinuidad refuta derivabilidad por la implicación de R3. Coincidir fuera del centro no basta para conservar una derivada centrada allí.

18.2. El error que desaparece al ampliar

Cualquier recta por $(a, f(a))$ coincide con la función en el centro. Si la función es continua allí, la diferencia entre ambas tiende a cero, cualquiera que sea la pendiente elegida. Para identificar una pendiente particular necesitamos que el error desaparezca también después de dividir por la escala de entrada. Esa normalización expresará la aproximación de primer orden.

R2 — Mejor aproximación lineal local. Con los tipos y el centro de R1, sea $r_L(x) = f(x) - f(a) - L(x-a)$, $\quad r_L(a) = 0$. Entonces $f'(a) = L$ si y sólo si

$$\forall \eta > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D: \quad 0 < |x-a| < \delta \implies |r_L(x)| < \eta |x-a|.$$

Estrategia y prueba. Restamos la recta candidata y dividimos únicamente en el dominio perforado. Allí $\frac{r_L(x)}{x-a} = q_{f,a}(x) - L$, así la condición es exactamente el límite cero de este cociente. Esta equivalencia prueba existencia en ambos sentidos, sin una fórmula futura de

Taylor. La notación $r_L(x) = o(|x-a|)$ abrevia esta condición relativa; no designa una función nueva ni una cota cuadrática obligatoria.

La unicidad también se ve directamente en los restos. Si sirvieran pendientes L, M con $d = |L - M| > 0$, pedimos a ambas estimaciones presupuesto $d/3$ y tomamos el mínimo de sus radios. La acumulación proporciona dentro de él un testigo $x \in D$ distinto de a. Al restar las identidades, $r_M(x) - r_L(x) = (L - M)(x - a)$; la triangular y las dos cotas, divididas por $|x - a| > 0$, darían $d < 2d/3$. Basta ese testigo para contradecir las dos pendientes; no se construye una sucesión de entradas.

Para expresar el zoom usamos una escala $t > 0$ en ambos ejes. La coordenada ampliada u corresponde a la entrada $a + tu$, por lo que sólo se admiten los u que satisfacen $a + tu \in D$. Definimos en esas coordenadas $G_t(u) = \frac{f(a+tu)-f(a)}{t}$. Fijemos un marco $|u| \le R$, con $R \ge 0$. Para $u \neq 0$ y $0 < t < \delta/(R + 1)$ se tiene $0 < |tu| < \delta$, y la estimación del resto da $|G_t(u) - Lu| < \eta|u| \le \eta R$. En $u = 0$ el error es cero. Dado $\varepsilon > 0$, elegimos primero $\eta = \varepsilon/(R + 1)$, obtenemos su radio δ y reducimos t como se indicó. Así todos los puntos admisibles del marco quedan a error menor que ε; para $R = 0$ sólo está el centro, con error cero. Si D contiene una vecindad de a, todo el marco es admisible cuando t es suficientemente pequeño. En un dominio con huecos conservamos las coordenadas permitidas, sin extender la función para llenar el dibujo. La estimación común se demuestra aquí directamente, sin una teoría de sucesiones de funciones.

C18-F02 · Ampliar con la misma escala

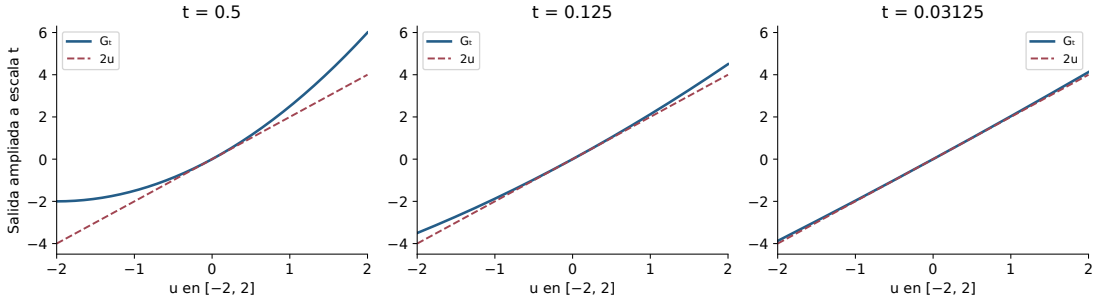


Figura 18.2. Para el cuadrado en a=1, G_t(u)=2u+tu². Los tres paneles usan el mismo marco |u|≤2 y los mismos ejes; el error respecto de 2u está acotado por 4t. Se ilustran t=1/2,1/8,1/32. La prueba controla todos los puntos del marco, sin inferir el límite de tres imágenes.

En el cuadrado, el resto exacto es $r_{2a}(a + h) = h^2$ y el zoom toma la forma $G_t(u) = 2au + tu^2$. En un marco acotado el término tu^2 se hace pequeño con una sola escala t. Si proponemos otra pendiente M, el resto $(2a-M)h+h^2$ todavía tiende a cero en valor absoluto; al dividirlo por h queda $2a - M + h$, cuyo límite sólo es cero para $M = 2a$. El carácter de mejor aproximación lineal se refiere a ese error menor que el orden de $|h|$ al acercarse al centro. No afirma una minimización del error en cada punto a distancia finita.

Ejercicios de la sección 18.2.

Ejercicio 6. Traducir el error

Prueba equivalencia entre derivada L y resto $r_L = o(|x - a|)$ sobre el dominio relativo.
Solución. Para $x \neq a$, $r_L(x)/(x - a) = q_{f,a}(x) - L$. Por tanto la condición de límite cero de ese cociente equivale término a término a la definición de derivada. En magnitudes, multiplicar o dividir por el positivo $|x-a|$ traduce $|q-L| < \eta$ en $|r_L| < \eta|x-a|$. En el centro $r_L(a) = 0$, sin atribuir allí un cociente. Ambos sentidos conservan el mismo radio y dominio perforado.

El resto se define restando el valor central y el término lineal propuesto. La identidad de razones muestra que las dos condiciones son equivalentes para cada entrada perforada, sin cambiar los cuantificadores ni radios. El uso de magnitudes conserva el control también para incrementos negativos. En el centro se comprueba el resto cero por evaluación directa y no por una división.

Ejercicio 7. Un marco completo de zoom

Para $f(x) = x^2$, centro uno y $|u| \leq 2$, escribe G_t y da una condición en $t > 0$ para error menor que ε respecto de la recta límite.

Solución. $G_t(u) = [(1+tu)^2 - 1]/t = 2u + tu^2$. En el marco $|u| \leq 2$, el error es $tu^2 \leq 4t$. Si $0 < t < \varepsilon/4$, es menor que ε para todos los puntos del marco simultáneamente. El dominio es toda la recta, así todos son admisibles. El marco acotado permite una cota común; sin acotarlo el término tu^2 no queda pequeño para todo u con un mismo $t > 0$.

Retorno visual. Véase C18-F02, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba. La ampliación divide la variación vertical por la misma escala que cambia las coordenadas horizontales. El término lineal queda $2u$ y el resto ampliado queda tu^2. La cota de marco convierte este último en un error común $4t$. Su dependencia del marco explica por qué la aproximación se afirma en regiones acotadas de coordenadas ampliadas.

Ejercicio 8. Todas las rectas tienen error absoluto pequeño

Para el cuadrado centrado en a, demuestra que cualquier recta de pendiente M por el punto tiene error absoluto tendente a cero. Explica por qué sólo $M = 2a$ es modelo de primer orden.

Solución. El resto es $(2a - M)h + h^2$, cuya magnitud no supera $(|2a - M| + |h|)|h|$ y tiende a cero cuando $h \to 0$. Pero su cociente por h es $2a - M + h$, con límite $2a - M$. Este límite sólo vale cero si $M = 2a$. El error absoluto no distingue pendientes porque todas las rectas pasan por el mismo punto y son continuas allí; el error normalizado sí las distingue.

El término proporcional a h tiende a cero incluso cuando su coeficiente es no nulo. Por eso cualquier pendiente propuesta produce error absoluto pequeño. Al dividir por h, ese coeficiente permanece y sólo desaparece para la pendiente correcta. El modelo de primer orden exige esa segunda comprobación, que es más fuerte que continuidad del error.

Ejercicio 9. No hace falta escoger rutas

Prueba unicidad del modelo lineal usando únicamente estimaciones de resto y un testigo de acumulación.

Solución. Si sirven L, M distintos, sea $d = |L - M| > 0$. Las estimaciones con presupuesto $d/3$ entregan dos radios. Acumulación permite un punto distinto del centro en el menor de ellos. Como $(L - M)(x - a) = r_M(x) - r_L(x)$, la triangular y ambas cotas dan $d|x - a| < 2d|x - a|/3$. Dividir por $|x - a| > 0$ contradice $d > 0$. No se construye una sucesión ni se elige un testigo para cada radio a la vez.

Las dos identidades de resto contienen los mismos valores de función y por ello éstos se cancelan al restarlas. Queda una comparación entre diferencia de pendientes y suma de errores. La entrada de acumulación tiene distancia positiva y permite dividir sin pérdida de información. Un único testigo bajo los dos radios basta para probar unicidad.

Ejercicio 10. Zoom sobre un dominio roto

Sea $D = \{0\} \cup \{1/(n+1) : n \in \mathbb{N}\}$ y $f(x) = x^2$ en D. Prueba derivada relativa en cero y describe las entradas permitidas del zoom.

Solución. Cero acumula en D por las entradas explícitas $1/(n+1)$. Para $x \in D \setminus \{0\}$, $q = x$, por lo que $\delta = \eta$ prueba derivada cero. Para $t > 0$, las entradas del zoom son $u = 0$ y $u = 1/[t(n+1)]$. Allí $G_t(u) = tu^2$. En $|u| \leq R$ el error no supera tR^2, pero no se ha definido G_t en los otros puntos del marco. La estimación es común a las entradas admisibles y no rellena los huecos del dominio.

La sucesión explícita acredita acumulación del dominio en cero, pero los radios de derivada controlan todas sus entradas, no sólo una cola elegida. En el zoom, resolver $tu \in D$ determina exactamente las coordenadas permitidas. La cota por tR^2 es válida en todo el marco admisible. No implica que la función ampliada esté definida en los huecos entre esas coordenadas.

18.3. Continuidad, esquinas y alcance del control

Una derivada finita mantiene acotadas las pendientes próximas al centro. Al multiplicar esa barrera por la distancia de entrada, el cambio de valores tendrá que hacerse pequeño. Este paso proporcionará la continuidad necesaria para justificar después los factores variables en las reglas de derivación.

R3 — Diferenciabilidad implica continuidad. Sean $L = f'(a)$ y $C = |L| + 1 > 0$. La tolerancia uno en R1 entrega un radio r para el que $|q_{f,a}(x)| < C$ en la bola perforada. Por tanto

$$|f(x) - f(a)| < C|x - a| \qquad (0 < |x - a| < r,\ x \in D).$$

Para $\varepsilon > 0$, $\delta = \min(r, \varepsilon/C)$ controla el error de salida por ε si $x \neq a$; si $x = a$, el error vale cero. Ésta es la continuidad de C14 sobre el mismo dominio. También queda la cota no estricta $|f(x) - f(a)| \leq C|x - a|$ incluyendo el centro.

La estimación compara cada $f(x)$ con el mismo $f(a)$; no ofrece automáticamente una cota de $|f(x) - f(y)|$ por $C|x - y|$ para todos los pares de una vecindad. Podemos ver la diferencia en $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $F(x) = x^2$ en los racionales y $F(x) = 0$ en los irracionales. En cero, $F(0) = 0$ y $|q_{F,0}(x)| \leq |x|$, lo que prueba $F'(0) = 0$. Sin embargo, F es discontinua en cada $b \neq 0$. Si b es racional, la densidad proporciona irracionales arbitrariamente próximos con salida cero, separada de b^2; si b es irracional, proporciona racionales próximos con $|x - b| < |b|/2$, de modo que $x^2 > b^2/4$ mientras $F(b) = 0$. Un control Lipschitz de todos los pares en alguna vecindad de cero implicaría continuidad en sus puntos interiores, contradiciendo este ejemplo. La derivabilidad en un centro tampoco garantiza derivabilidad en sus vecinos.

El valor absoluto muestra que la continuidad obtenida en R3 no basta para volver a la derivada. La triangular inversa da $||x| - |y|| \leq |x - y|$, de donde su continuidad en toda la recta. Sus cocientes en cero, en cambio, valen uno a la derecha y menos uno a la izquierda. Si existiera una derivada L, la tolerancia $1/2$ proporcionaría un radio δ; las entradas $\delta/2$ y $-\delta/2$ exigirían simultáneamente $|1 - L| < 1/2$ y $|-1 - L| < 1/2$. La triangular daría entonces $2 \leq |1 - L| + |L + 1| < 1$, una contradicción para cualquier candidato.

C18-F03 · Una esquina conserva dos pendientes

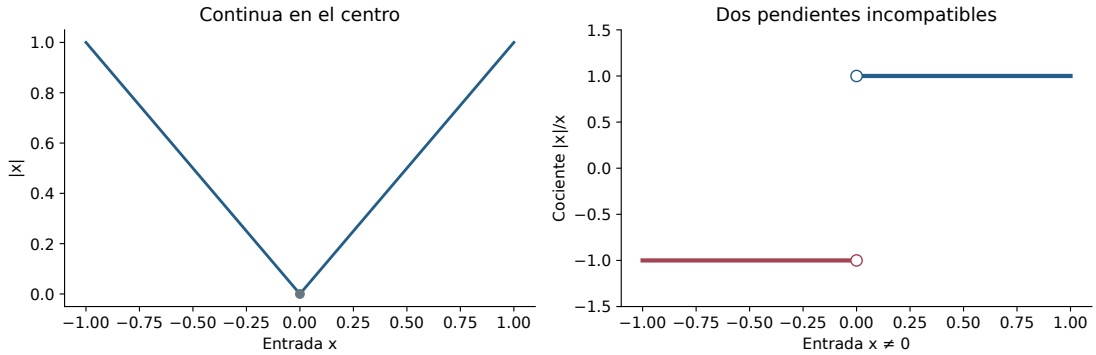


Figura 18.3. La función |x| es continua en cero, pero su cociente perforado vale -1 a la izquierda y 1 a la derecha. Los puntos abiertos indican que el cociente no se define en cero. R3 refuta cualquier límite común mediante los testigos $\pm\delta/2$. Sobre el dominio no negativo sólo permanece la rama derecha.

Tampoco una pendiente nula decide por sí sola la constancia o los extremos: x^3 tiene derivada cero en cero y toma valores positivos y negativos arbitrariamente cerca. Su modelo lineal es horizontal, pero la función sigue variando. Cuando $L = f'(a) > 0$, pedir tolerancia $L/2$ sí mantiene positivos los cocientes próximos. La identidad $f(x) - f(a) = q_{f,a}(x)(x - a)$ da entonces salidas mayores que $f(a)$ para entradas a la derecha y menores para entradas a la izquierda, siempre que existan en el dominio. Estas comparaciones tienen centro fijo a; todavía no comparan entre sí todos los pares de una vecindad ni prueban monotonía en ella.

Ejercicios de la sección 18.3.

Ejercicio 11. De pendientes a valores

Reconstruye la prueba de continuidad desde una derivada finita, incluidos los presupuestos y el centro.

Solución. La tolerancia uno de derivabilidad da $r > 0$ con $|q - L| < 1$ en el radio perforado, así $|q| < C = |L| + 1 > 0$. Multiplicar por $|x - a|$ da error de valores menor que $C|x - a|$. Para $\varepsilon > 0$, $\delta = \min(r, \varepsilon/C)$ sirve para todo argumento distinto del centro de distancia menor. En el centro el error es cero. Esta última comprobación convierte un control perforado en continuidad sobre una bola no perforada del mismo dominio.

Primero se obtiene una barrera finita de pendientes usando tolerancia uno, sin depender del desafío posterior de valores. Después se reduce la distancia de entrada según esa barrera. El centro, excluido de los cocientes, se incorpora por su error de valor cero. La prueba concluye continuidad relativa en todo el dominio de aproximación sin evaluar la secante en el centro.

Ejercicio 12. La esquina refuta todos los radios

Prueba continuidad de $|x|$ en toda la recta y no derivabilidad en cero con dos testigos para un radio arbitrario.

Solución. La triangular inversa da $||x| - |a|| \leq |x - a|$, de modo que $\delta = \varepsilon$ prueba continuidad en cada a. Si existiera derivada L en cero, tolerancia $1/2$ daría un radio δ. En $\delta/2$ y $-\delta/2$ los cocientes valen uno y menos uno, respectivamente, y ambos tendrían error menor que $1/2$ respecto de L. Entonces $2 \leq |1 - L| + |L + 1| < 1$, contradicción. La prueba no se apoya en la apariencia del gráfico.

Retorno visual. Véase C18-F03, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba. La continuidad usa una desigualdad de valores válida para cualquier par, incluidos los centros. La no derivabilidad usa una precisión fija de pendientes y dos entradas perforadas dentro del radio que ofrecería el candidato. Sus cocientes incompatibles contradicen la triangular. Así continuidad y falta de derivada quedan demostradas con controles distintos y completos.

Ejercicio 13. Pendiente cero sin extremo

Prueba que x^3 tiene derivada cero en cero y que allí no es constante ni tiene máximo o mínimo local.

Solución. Para $h \neq 0$, el cociente vale h^2; $\delta = \sqrt{\eta}$ da error menor que η y prueba derivada cero. Todo radio admite $h = \delta/2 > 0$ y $-h < 0$, con valores $h^3 > 0$ y $-h^3 < 0$ respecto del valor central cero. Así ninguna vecindad relativa tiene todos sus valores por encima o por debajo del central, y tampoco son constantes. La recta horizontal local no contiene información suficiente para decidir extremos.

La precisión de pendiente se convierte en radio mediante la raíz positiva de η. Las entradas de signos opuestos dentro de cualquier ventana producen valores a ambos lados de cero. Por eso no hay constancia ni extremo local, aunque el término lineal del modelo sea horizontal. No se utiliza una regla sobre extremos que aún no haya sido demostrada.

Ejercicio 14. Control centrado sin Lipschitz vecino

Analiza $F(x) = x^2$ en racionales y cero en irracionales. Prueba $F'(0) = 0$ y que no es Lipschitz en ninguna vecindad de cero.

Solución. Como $F(0) = 0$ y $|F(x)| \le x^2$, $|q_{F,0}(x)| \le |x|$ prueba derivada cero con $\delta = \eta$. En cada $b \neq 0$ es discontinua: si es racional, irracionales arbitrariamente próximos tienen salida cero en lugar de b^2; si es irracional, racionales con $|x - b| < |b|/2$ tienen salida mayor que $b^2/4$ en lugar de cero. La densidad garantiza tales testigos en cualquier radio. Una cota Lipschitz para todos los pares de alguna bola de cero implicaría continuidad en cada punto interior de esa bola, por radio ε/L si $L > 0$, o constancia si $L = 0$. Elegir allí un $b \neq 0$ produce contradicción. La cota centrada de R3 sigue siendo válida y no equivale a esa cota de pares.

La barrera $|F(x)| \le x^2$ funciona para entradas racionales e irracionales y prueba el límite de secantes en cero. Fuera de cero la densidad entrega entradas de la clase opuesta con salida separada del valor central. Si hubiese una cota Lipschitz en una bola de cero, acreditaría continuidad en un punto no nulo interior de esa bola. Esa contradicción distingue control centrado de control de todos los pares vecinos.

Ejercicio 15. Comparar sólo con el centro

Si $f'(a) = L > 0$, prueba las comparaciones locales con $f(a)$ a cada lado del centro. Indica el alcance exacto.

Solución. Con tolerancia $L/2$, la definición entrega un radio donde $q > L/2 > 0$ para argumentos perforados. La identidad $f(x) - f(a) = q(x)(x - a)$ da diferencia positiva para $x > a$ y negativa para $x < a$, dentro de ese radio y del dominio. No se exige que ambos lados tengan entradas; sólo se afirma la implicación cuando las hay. El centro está fijo: no se han comparado salidas de dos entradas arbitrarias diferentes de a, por lo que no se ha probado monotonía en toda una vecindad.

La positividad de las secantes se obtiene de un límite positivo con un presupuesto que conserva la mitad de su valor. Multiplicar por el incremento cambia el signo según el lado, sin exigir que ambos lados existan en el dominio. La conclusión compara sólo con $f(a)$. Para monotonía entre otros pares haría falta un argumento adicional que controle centros variables.

18.4. Operaciones sobre incrementos

Las identidades de incrementos permiten pasar de las derivadas de dos funciones a las de sus operaciones. Cada identidad debe escribirse en un dominio donde existan todas sus evaluaciones, y el paso al límite debe justificar tanto los cocientes como los valores variables que aparezcan al separarla.

R4 — Suma y producto. Sean $f, g : D \to \mathbb{R}$ derivables en $a \in D \cap \mathrm{Acc}(D)$, con derivadas L, M. Para constantes α, β, la identidad $q_{\alpha f+\beta g,a} = \alpha q_{f,a} + \beta q_{g,a}$ y el álgebra de límites C13 dan $(\alpha f+\beta g)'(a) = \alpha L+\beta M$. Para el producto, sumar y restar $f(a)g(x)$ produce $q_{fg,a}(x) = f(x)q_{g,a}(x) + g(a)q_{f,a}(x)$. R3 asegura $f(x) \to f(a)$; C13 permite multiplicar los límites finitos. Así $(fg)'(a) = f(a)M + g(a)L$. La continuidad se usa exactamente para el factor no centrado. Todos los cocientes viven en $D \setminus \{a\}$; no se ha aplicado la cadena.

Al sumar y restar $f(a)g(x)$, el primer paso da $q_{fg,a}(x) = g(x)q_{f,a}(x) + f(a)q_{g,a}(x)$. Esta expresión coincide con la exhibida porque $(f(x) - f(a))q_{g,a}(x) = (g(x) - g(a))q_{f,a}(x) = (x - a)q_{f,a}(x)q_{g,a}(x)$. También podemos llegar directamente a la forma exhibida sumando y restando $f(x)g(a)$. Las dos descomposiciones son válidas; la forma elegida deja $f(x)$ como factor variable y utiliza su continuidad.

Para invertir g necesitamos que el valor central no sea cero. Si $g(a) \neq 0$, R3 y continuidad con tolerancia $|g(a)|/2$ proporcionan $\rho > 0$ tal que $|g(x)| > |g(a)|/2$ en $D \cap B(a, \rho)$. Por tanto, el dominio efectivo $E = \{x \in D : g(x) \neq 0\}$ contiene una vecindad relativa completa de a. Sigue acumulando allí: para cualquier radio tomamos su mínimo con ρ y usamos un

testigo perforado de D dentro de él. Las derivadas restringidas conservan sus valores por R1. En $E \setminus \{a\}$, la diferencia de recíprocos da $q_{1/g,a}(x) = -\frac{q_{g,a}(x)}{g(x)g(a)}$. El denominador tiende al real no nulo $g(a)^2$, protegido además por el margen local anterior. C13 permite tomar el límite y la regla de producto, aplicada a $f|_E$ y $1/g$, da después el cociente: $(1/g)'(a) = -\frac{M}{g(a)^2}$, $(f/g)'(a) = \frac{Lg(a)-f(a)M}{g(a)^2}$. Ambas funciones están tipadas sobre E; sus derivadas son relativas a ese dominio, aunque los datos de f y g se hayan calculado inicialmente sobre D.

A partir de la identidad, las constantes y el producto obtenemos por inducción $(x^n)'(a) = na^{n-1}$ para enteros $n \geq 1$. El paso inductivo deriva $x^n x$ y produce $na^{n-1}a + a^n = (n+1)a^n$, también en cero, sin exponentes negativos. La potencia cero se trata como la constante uno y tiene derivada cero; así evitamos la expresión indefinida $0a^{-1}$ en el origen. Para $n \geq 1$, el recíproco permite después $(x^{-n})'(a) = -na^{-n-1}$ en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Las sumas finitas dan polinomios y los cocientes dan funciones racionales en sus dominios efectivos. Estas pruebas no incorporan una regla para exponentes reales todavía no construidos.

Cancelar una expresión conserva las entradas sobre las que la igualdad es válida. La función x/x en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ vale uno y tiene derivada cero en cada punto de ese dominio; en cero no dispone de valor ni de derivada. La constante uno sobre toda la recta es una extensión distinta. Del mismo modo, si numerador y denominador se anulan en el centro, la fórmula del cociente no es aplicable allí: hace falta definir y estudiar expresamente una extensión, si existe.

Ejercicios de la sección 18.4.

Ejercicio 16. El producto como identidad

Deriva suma y producto desde las identidades de cocientes, e indica dónde se usa continuidad.

Solución. En el dominio perforado común, $q_{\alpha f+\beta g} = \alpha q_f + \beta q_g$; límites finitos dan $\alpha f'(a) + \beta g'(a)$. Para producto, sumar y restar $f(a)g(x)$ da $q_{fg} = f(x)q_g + g(a)q_f$. La diferenciabilidad de f da continuidad por R3, así el primer factor tiende a $f(a)$; los demás límites son los de los cocientes o la constante. El resultado es $f(a)g'(a) + g(a)f'(a)$. Sin ese paso no se habría justificado el límite del factor $f(x)$.

Cada identidad se verifica antes de pasar al límite y utiliza el mismo dominio perforado. En el producto aparece un valor variable, que necesita el límite proporcionado por continuidad desde derivabilidad. Las demás piezas son constantes o secantes con límite ya supuesto. Esa identificación de factores explica por qué la fórmula no es sólo manipulación formal de símbolos.

Ejercicio 17. Dominio del recíproco

Prueba la regla del recíproco y justifica acumulación de su dominio efectivo.

Solución. Si $g(a) \neq 0$, continuidad da una vecindad relativa donde $|g(x)| > |g(a)|/2$. Por tanto $E = \{g \neq 0\}$ contiene esa vecindad y $a \in E$. Para cada radio, acumulación de D da un testigo perforado dentro de su mínimo con el radio de la vecindad, así $a \in \mathrm{Acc}(E)$. En $E \setminus \{a\}$, $q_{1/g} = -q_g/[g(x)g(a)]$. El denominador tiende al no nulo $g(a)^2$; C13 prueba el límite $-g'(a)/g(a)^2$. El margen verifica tanto las divisiones como el dominio de la derivada.

La no anulación central proporciona por continuidad una ventana donde todas las divisiones son válidas. Esa ventana relativa también conserva acumulación al reducir cualquier radio propuesto. En ella los cocientes restringidos mantienen su límite original. El signo negativo y el cuadrado del denominador provienen directamente de la diferencia de recíprocos.

Ejercicio 18. Un cociente racional

Deriva $f(x) = (x+1)/(x^2+1)$ en su dominio real e indica por qué no hay puntos excluidos.

Solución. El denominador es $x^2+1 \geq 1$, así el dominio es toda $\mathbb{R}$. Numerador y denominador tienen derivadas uno y $2a$. La regla da $f'(a) = [(a^2+1) - 2a(a+1)]/(a^2+1)^2 = (1-2a-a^2)/(a^2+1)^2$. Cada centro real es de acumulación y el denominador no se anula allí. La identidad se obtiene dentro de R4 sin regla de la cadena ni valor medio.

La desigualdad global del denominador acredita que ninguna entrada real queda excluida. La fórmula del cociente se aplica en un centro arbitrario y sus evaluaciones están definidas. Expandir el numerador reúne los términos en $1 - 2a - a^2$. La prueba conserva dominio y acumulación antes de presentar la expresión final de la derivada.

Ejercicio 19. Un hueco no desaparece al cancelar

Una solución simplifica $(x^2-1)/(x-1)$ a $x+1$ y asigna derivada uno en $x = 1$. Revisa el dominio y describe una extensión.

Solución. La función original tiene dominio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$; no tiene valor ni derivada en uno. En ese dominio coincide con $x+1$ y su derivada es uno en cada centro válido. La función $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $G(x) = x+1$, es una extensión distinta que asigna $G(1) = 2$ y sí tiene $G'(1) = 1$. Cancelar permite igualdad de valores donde ambas expresiones están definidas, sin cambiar el dominio de la función original.

La identidad simplificada no modifica el conjunto de entradas del cociente original. En los centros válidos sus cocientes coinciden con los de la afín y tienen derivada uno. Para preguntar por uno hay que definir una extensión con una evaluación allí. La función afín completa ofrece esa extensión y su derivada se acredita como una propiedad del nuevo objeto.

Ejercicio 20. Potencias enteras con base cero

Prueba por inducción la derivada de x^n para $n \geq 1$, trata $n = 0$ y deriva x^{-n} para $n \geq 1$.

Solución. La base $n = 1$ es la identidad, con derivada uno. Si la fórmula vale para $n \geq 1$, producto de x^n e identidad da $na^{n-1}a + a^n = (n+1)a^n$, también en cero; no hay exponentes negativos en esa igualdad. La potencia cero es constante uno, con derivada cero por su cociente, sin usar $0a^{-1}$. En el dominio sin cero, recíproco de x^n da $-na^{n-1}/a^{2n} = -na^{-n-1}$. Cada división está legitimada por $a \neq 0$.

La inducción para exponentes positivos se realiza con producto y nunca requiere invertir la base. El exponente cero se trata como una constante para evitar una expresión con potencia negativa en el origen. Las potencias negativas se declaran después en el dominio sin cero y usan recíprocos legitimados. Separar los casos conserva la fórmula correcta y las divisiones válidas.

18.5. La cadena cuando el incremento interior se anula

En una composición puede cambiar la entrada x sin que cambie la salida interior $g(x)$. El cociente compuesto seguirá definido para $x \neq a$, pero factorizarlo dividiendo por $g(x) - g(a)$ excluiría esas entradas. Para conservarlas prolongaremos el factor de secantes exteriores con el valor de su límite en el centro.

R5 — Regla de la cadena. Sean $g : D \to E$, $f : E \to \mathbb{R}$, $a \in D \cap \mathrm{Acc}(D)$ y $b = g(a) \in E \cap \mathrm{Acc}(E)$. Supongamos $g'(a) = L$ y $f'(b) = M$. Construimos la función auxiliar

$$A : E \to \mathbb{R}, \qquad A(y) = \begin{cases} \dfrac{f(y) - f(b)}{y - b}, & y \neq b, \\ M, & y = b. \end{cases}$$

Es continua en b: en argumentos perforados lo dice la definición de M; en b la diferencia respecto de M vale cero. No se ha definido un cociente con denominador cero; A es otra función. Para todo $y \in E$ se tiene $f(y) - f(b) = A(y)(y-b)$, también si $y = b$, porque ambos lados valen cero.

La identidad de incrementos anterior permite escribir, para todo $x \in D \setminus \{a\}$, $q_{f\circ g,a}(x) = A(g(x))q_{g,a}(x)$. Si $g(x) = b$, tanto el cociente interior como el compuesto son cero, y la identidad sigue siendo válida con $A(b) = M$. R3 asegura continuidad de g en a, y la

continuidad de A en b, mediante C14, da $A(g(x)) \to M$ también cuando las salidas visitan exactamente b. C13 permite multiplicar los límites finitos y concluye $(f \circ g)'(a) = ML$.

El presupuesto puede comprobarse directamente. La cota $C = |L| + 1 > 0$ mantiene $|q_g| < C$ cerca del centro. Pedimos a $A \circ g$ error $\varepsilon/(2C)$ y a q_g error $\varepsilon/[2(|M|+1)]$; tomamos el mínimo de esos radios y el de la cota. Entonces

$$|A(g(x))q_g(x) - ML| \le |A(g(x)) - M||q_g(x)| + |M||q_g(x) - L| < \varepsilon.$$

Las barreras positivas permiten este cálculo también si $L = 0$ o $M = 0$. La identidad sólo divide por $x - a \neq 0$ y no exige que $g[D]$ acumule en b; una función interior constante queda incluida.

C18-F04 · El cambio interior puede detenerse

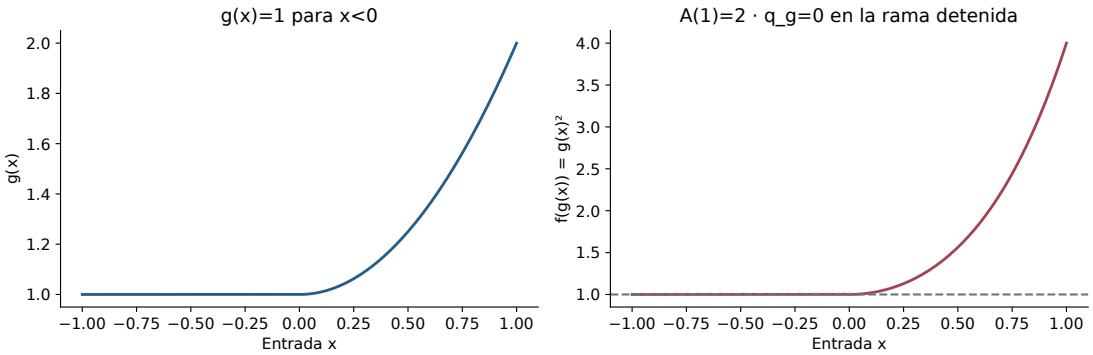


Figura 18.4. La interior vale 1 para x<0 y 1+x² para x≥0. Su derivada en cero es cero; la exterior y² tiene derivada dos en uno. La composición tiene derivada cero. En toda la rama negativa el incremento interior es cero: el factor A(1)=2 conserva la identidad de cocientes multiplicándolo por q_g=0, sin división 0/0.

Por ejemplo, sea $g(x) = 1$ para $x < 0$ y $g(x) = 1 + x^2$ para $x \ge 0$. Su cociente centrado en cero es cero a la izquierda y x a la derecha, de modo que $g'(0) = 0$. Con exterior $f(y) = y^2$ tenemos $f'(1) = 2$ y la cadena da $(f \circ g)'(0) = 0$. En cada entrada negativa, dividir por $g(x) - 1$ sería dividir por cero. La función auxiliar tiene en cambio $A(1) = 2$ y conserva la identidad al multiplicar ese valor por el cociente interior cero.

La compatibilidad de dominios también requiere atención. Si sólo recibimos $g : D \to \mathbb{R}$ y $f : E \to \mathbb{R}$, su composición vive en $T = \{x \in D : g(x) \in E\}$. Para estudiar la derivada hay que verificar $a \in T \cap \mathrm{Acc}(T)$, restringir g a T y retipar su codominio como E. La acumulación de D y de E por separado no asegura la de T: con $g(x) = x^2$, $D = \mathbb{R}$ y $E = (-\infty, 0]$, el dominio efectivo es $T = \{0\}$. La exterior $f(y) = y$ tiene derivada relativa uno en cero y el cuadrado tiene derivada cero en la recta, pero su composición sobre ese singleton no tiene derivada según R1.

Ejercicios de la sección 18.5.

Ejercicio 21. Rellenar el factor exterior

Construye A para una función exterior derivable en b y prueba su continuidad y su identidad de incrementos.

Solución. En $E \setminus \{b\}$ ponemos $A(y) = (f(y) - f(b))/(y - b)$ y en b ponemos $A(b) = M = f'(b)$. Para cualquier tolerancia, los radios de derivabilidad controlan $|A(y) - M|$ fuera del centro; en él esa diferencia es cero, así A es continua en b. Multiplicar la definición da $f(y) - f(b) = A(y)(y - b)$ para $y \neq b$, y en b ambos lados valen cero. Es una nueva función con un valor declarado en el centro, no una división por cero.

Rellenar el factor exterior conserva el límite de sus secantes y añade el caso central con error cero. La identidad de incrementos vale entonces para todas las entradas exteriores,

incluso b. Se obtiene una función continua útil para componer, sin afirmar que el cociente perforado original estuviera definido en su centro. Esta construcción repara el caso de incremento interior nulo.

Ejercicio 22. Los dos presupuestos de la cadena

Prueba la cadena con una estimación de error que siga siendo válida cuando el incremento interior es cero.

Solución. Sea $L = g'(a)$, $M = f'(b)$ y $C = |L| + 1$. La identidad de incrementos con A da $q_{f\circ g} = A(g(x))q_g$ para todo $x \neq a$, incluidos los que satisfacen $g(x) = b$. Cerca del centro, $|q_g| < C$. Continuidad de A en b y de g en a entrega radio para error $|A(g(x))-M| < \varepsilon/(2C)$. Derivabilidad interior entrega otro para $|q_g - L| < \varepsilon/[2(|M| + 1)]$. En el mínimo de estos radios y el de la cota, la diferencia respecto de ML es a lo sumo $|A-M||q_g|+|M||q_g-L| < \varepsilon$. De este modo se prueba el límite sin dividir por $g(x) - b$.

La barrera positiva $C = |L| + 1$ controla el factor interior variable. El primer presupuesto se divide por esa barrera y el segundo por $|M|+1$, evitando problemas si alguna derivada vale cero. El mínimo reúne los tres controles en una misma ventana. Cuando la salida interior es exactamente b, la identidad sigue siendo válida y no introduce una secante exterior indefinida.

Ejercicio 23. Una rama detenida

Para $g(x) = 1$ si $x < 0$ y $g(x) = 1 + x^2$ si $x \geq 0$, calcula la derivada de g y de $g(x)^2$ en cero. Explica el fallo de la factorización que divide por el incremento interior.

Solución. El cociente interior es cero a la izquierda y x a la derecha, por lo que su magnitud es a lo sumo $|x|$ y $g'(0) = 0$. La exterior $f(y) = y^2$ tiene derivada dos en uno. La cadena correcta da derivada cero. Directamente, el cociente compuesto es cero para $x < 0$ y $2x + x^3$ para $x > 0$, con límite cero. En cualquier argumento negativo, $g(x) - g(0) = 0$, así el factor exterior habitual es una división $0/0$. Usar $A(1) = 2$ mantiene la identidad: factor dos por cociente interior cero da cero.

Retorno visual. Véase C18-F04, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba. La rama izquierda produce un incremento interior exactamente nulo en muchas entradas perforadas. La derecha produce un cociente que tiende a cero, compatible con la misma derivada interior. La exterior rellenada tiene valor dos en uno y multiplica correctamente el cero izquierdo. El cálculo compuesto directo confirma el límite sin descartar ninguna rama.

Ejercicio 24. Acumulación perdida en la composición

Sean $g(x) = x^2$ sobre $\mathbb{R}$ y $f(y) = y$ sobre $E = (-\infty, 0]$. Halla el dominio efectivo, revisa las derivadas de los factores y explica por qué no hay derivada compuesta en cero.

Solución. El dominio efectivo $T = \{x : x^2 \leq 0\}$ es $\{0\}$. La interior tiene derivada cero en cero sobre la recta; la exterior tiene derivada relativa uno en cero sobre E, que acumula allí desde la izquierda. Pero cero no acumula en T, por lo que R1 no define una derivada de la composición sobre su dominio. Las acumulaciones de los dominios originales no garantizan la de la preimagen efectiva. La multiplicación formal de derivadas omite una hipótesis de la cadena.

La condición de entrada exterior se traduce en $x^2 \leq 0$, cuya única solución real es cero. Así la composición sí tiene valor central, pero su dominio no aporta entradas perforadas. Las derivadas de los factores en sus propios dominios no reparan esa falta de acumulación. La multiplicación formal omite una premisa de la definición aplicada al objeto compuesto.

Ejercicio 25. Interior constante y exterior no lineal

Sea $g : D \to E$ constante con valor b y $a \in D \cap \mathrm{Acc}(D)$. Si f es derivable en b respecto de E, comprueba la cadena y la acumulación de la imagen interior.

Solución. La interior tiene cociente cero en todo su dominio perforado, así $g'(a) = 0$. La composición es constante con valor $f(b)$ y también tiene derivada cero. La fórmula da $f'(b) \cdot 0 = 0$. La imagen $g[D] = \{b\}$ no acumula en b; esto no impide usar la derivada exterior calculada en E, donde sí se exige acumulación. El factor A puede evaluarse en b y vale $f'(b)$ en todas las entradas compuestas.

La derivada exterior pertenece al dominio E donde fue probada, aunque la interior sólo alcance un valor de él. El factor rellenado se evalúa siempre en ese mismo centro. El cociente interior y el compuesto valen cero en toda entrada perforada. La imagen singleton de la interior no necesita acumular para este argumento compatible de cadena.

18.6. Invertir la pendiente exige volver al punto

Las secantes de una función y su inversa intercambian cambios de entrada y salida, por lo que sus pendientes serán recíprocas cuando estén definidas. Para trasladar ese cálculo al límite necesitamos algo más que la existencia de la inversa: si una salida se acerca a $f(a)$, su antecedente recuperado debe acercarse a a, donde conocemos las pendientes originales. **R6 — Derivada de la inversa.** Sea $f : D \to \mathbb{R}$ inyectiva, $a \in D \cap \mathrm{Acc}(D)$ y $f'(a) = L \neq 0$. Ponemos $H = f[D]$, $b = f(a)$ y construimos la inversa $h : H \to D$, considerada con los mismos valores como función real $h : H \to \mathbb{R}$. Suponemos explícitamente que es continua en b respecto de H. Entonces $h'(b) = 1/L$.

Antes de estudiar el cociente inverso comprobamos que $b \in \mathrm{Acc}(H)$. Para cada $\rho > 0$, la continuidad de f en a, obtenida de R3, proporciona un radio δ con error de salida menor que ρ. La acumulación de D da dentro de él un $x \neq a$ y la inyectividad asegura $f(x) \neq b$. Así encontramos una salida con $0 < |f(x) - b| < \rho$, que acredita acumulación de la imagen sin seleccionar una sucesión.

La tolerancia $|L|/2$ para $q_{f,a}$ proporciona un radio r donde $|q_{f,a}| > |L|/2 > 0$. Para una precisión final $\varepsilon > 0$, otro radio s hace el error original menor que $\varepsilon|L|^2/2$. Continuidad de h en b entrega entonces $\eta > 0$ tal que $y \in H$ y $|y - b| < \eta$ implican $|h(y) - a| < \min(r, s)$. Si además $y \neq b$, la identidad $f(h(y)) = y$ fuerza $h(y) \neq a$, y obtenemos

$$q_{h,b}(y) = \frac{1}{q_{f,a}(h(y))}, \qquad \left| q_{h,b}(y) - \frac{1}{L} \right| = \frac{|q_{f,a}(h(y)) - L|}{|L|\,|q_{f,a}(h(y))|} < \varepsilon.$$

La estimación prueba la existencia del límite de las secantes inversas y su valor $1/L$. Derivar primero $f \circ h = \mathrm{id}$ mediante la cadena habría presupuesto la derivabilidad de h que queríamos demostrar. En este argumento, la inyectividad construye la inversa y conserva las entradas perforadas, su continuidad aproxima los antecedentes y la pendiente no nula protege el denominador.

Para el cuadrado sobre $D = [0, \infty)$, el orden no negativo da inyectividad y C10 identifica su inversa con $\sqrt{y}$. Si $a > 0$ y $b = a^2$, la racionalización da $|\sqrt{y} - a| = |y - a^2|/(\sqrt{y} + a) \leq |y - a^2|/a$, que prueba continuidad de la inversa. R6 se aplica con $L = 2a \neq 0$ y da $(\sqrt{y})'|_{y=b} = 1/(2a) = 1/(2\sqrt{b})$.

En cero la inversa sigue siendo continua, pero la pendiente del cuadrado vale cero. Las secantes relativas de la raíz son $1/\sqrt{y}$ para $y > 0$: dadas una cota $B > 0$ y una escala $r > 0$, basta tomar $0 < y < \min(r, 1/(B+1)^2)$ para superar B. Un límite finito obligaría a una barrera local de secantes, de modo que ese cálculo refuta la derivada finita en cero.

La continuidad inversa tampoco se deduce sólo de inyectividad y pendiente no nula. En $D = [0, 1) \cup [2, 3]$, definimos $f(x) = x$ en la primera pieza y $f(x) = x - 1$ en la segunda. Las imágenes $[0, 1)$ y $[1, 2]$ no se solapan, así que f es inyectiva y $H = [0, 2]$. Cerca de $a = 2$ sólo interviene la segunda rama y la derivada relativa vale uno. Sin embargo, $h(1) = 2$ mientras $y_n = 1 - 1/(n + 2)$ satisface $h(y_n) = y_n \to 1$. La inversa es discontinua en $b = 1$ y R3 impide su derivabilidad allí. Para una función continua e inyectiva en un compacto, C16 sí proporciona continuidad de la inversa; en intervalos puede usarse la interfaz de C15. Esas garantías requieren sus propias hipótesis de dominio.

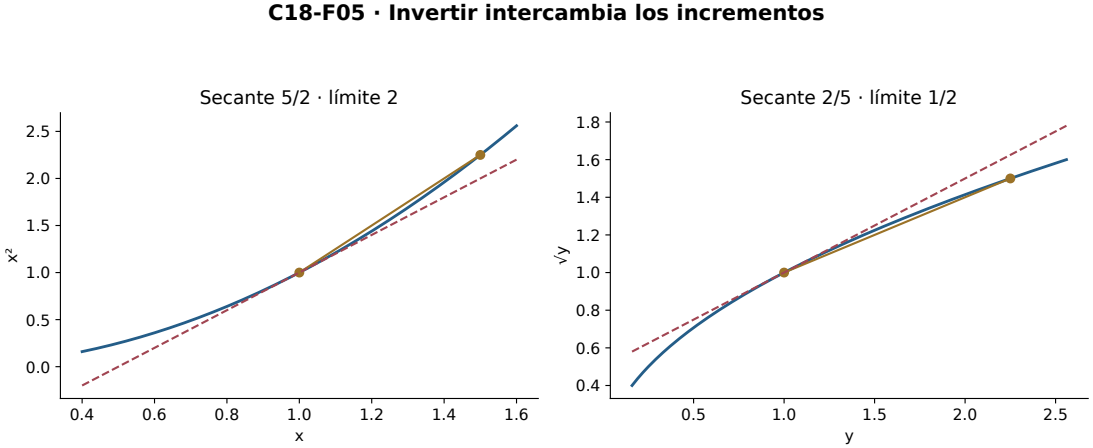


Figura 18.5. Para el cuadrado no negativo, el par 1,3/2 produce valores 1,9/4 y pendiente 5/2. La inversa raíz intercambia coordenadas y tiene pendiente secante 2/5 para ese par. En los centros 1, las pendientes límite son dos y un medio. R6 justifica el paso al límite con inversa continua y pendiente original no nula.

Ejercicios de la sección 18.6.

Ejercicio 26. Tres hipótesis, tres funciones

En R6 explica por separado el papel de inyectividad, continuidad de la inversa y derivada no nula. Prueba que la imagen acumula en b.

Solución. Inyectividad construye un único antecedente por valor de la imagen y hace que $x \neq a$ produzca $f(x) \neq b$. Continuidad de h en b convierte aproximación de salidas en aproximación de antecedentes a a. La condición $L \neq 0$ separa las pendientes originales de cero para invertirlas. Para cada $\rho > 0$, continuidad de f en a da un radio con error menor que ρ; acumulación de D entrega una entrada distinta del centro dentro de él. Su imagen pertenece a H, es distinta de b y está a distancia menor que ρ. Esto prueba acumulación de la imagen sin seleccionar una sucesión.

La derivabilidad original aporta continuidad en a, necesaria para llevar entradas próximas a salidas próximas. La inyectividad protege la evitación del centro y construye la inversa. Su continuidad realiza el transporte contrario de proximidad, y la pendiente no nula protege la inversión de secantes. Nombrar cada función de las hipótesis evita confundir existencia de inversa con continuidad de ese retorno.

Ejercicio 27. Secantes recíprocas del cuadrado

Para el cuadrado en $[0, \infty)$ y $a > 0$, prueba continuidad y derivada de la inversa en $b = a^2$. Relaciona las secantes originales e inversas.

Solución. La inyectividad del cuadrado en el dominio no negativo y C10 identifican la inversa con $h(y) = \sqrt{y}$. Se tiene $|h(y) - a| = |y - a^2|/(\sqrt{y} + a) \leq |y - a^2|/a$, por lo que es continua en b. R6 con $L = 2a \neq 0$ da $h'(b) = 1/(2a)$. Para $y = x^2 \neq a^2$, con $x \geq 0$, la pendiente inversa es $(x - a)/(x^2 - a^2) = 1/(x + a)$, recíproca de la pendiente original $x + a$. Ambas divisiones requieren $x \neq a$, asegurado por inyectividad.

Retorno visual. Véase C18-F05, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba. La racionalización de la diferencia de raíces da una cota de continuidad porque $a > 0$ mantiene el denominador al menos en a. El orden no negativo asegura inyectividad del cuadrado y una inversa legítima. Las secantes inversas son recíprocas de las originales, con denominadores no nulos. El límite original $2a$ permite finalmente invertir y obtener la derivada.

Ejercicio 28. Un centro de pendiente cero

Prueba que el cuadrado tiene derivada relativa cero en cero y que su inversa raíz no tiene allí derivada real finita.

Solución. Para $x > 0$, la pendiente del cuadrado centrada en cero es $x \to 0$. La pendiente de la raíz sobre $[0, \infty)$ es $1/\sqrt{y}$ para $y > 0$. Dadas cota $B > 0$ y escala $r > 0$, se elige $0 < y < \min(r, 1/(B+1)^2)$ y se obtiene cociente mayor que B. Si hubiera límite finito, sus cocientes estarían acotados por $|L| + 1$ en algún radio, contradicción. La inversa existe y es continua, pero no se satisface la hipótesis de pendiente original no nula.

El cuadrado tiene secantes relativas positivas que tienden a cero. Al invertirlas, las secantes de la raíz pueden superar cualquier número en cualquier ventana positiva. Un límite finito tendría una barrera local, por lo que ese crecimiento lo refuta. La existencia y continuidad de la inversa permanecen verdaderas; la premisa que falla es la pendiente original no nula.

Ejercicio 29. Una inversa que salta

En $D = [0, 1) \cup [2, 3]$, sea $f(x) = x$ en la primera pieza y $x - 1$ en la segunda. Analiza inyectividad, imagen, derivada en dos y continuidad de la inversa en uno.

Solución. Las imágenes son $[0, 1)$ y $[1, 2]$, disjuntas, y ambas ramas son inyectivas; la imagen total es $[0, 2]$. En una bola de radio menor que uno centrada en dos sólo hay puntos de la segunda pieza y su cociente es uno, así $f'(2) = 1$ relativamente a D. La inversa satisface $h(1) = 2$, pero para $y_n = 1 - 1/(n+2)$ se tiene $h(y_n) = y_n \to 1$. Sus diferencias respecto de dos son mayores que uno mientras las entradas convergen a uno. No es continua allí y, por R3, no es derivable. Esto refuta que derivada original no nula e inyectividad hagan innecesaria continuidad de la inversa en dominios arbitrarios.

El dominio separado permite aislar la segunda regla cerca de dos y acreditar una secante constante uno. En la imagen las dos piezas se juntan en uno y las salidas inferiores recuperan entradas de la primera pieza. Esas entradas no se aproximan a dos, pese a que las salidas se aproximan a uno. El ejemplo muestra por qué continuidad inversa es una premisa independiente en R6.

Ejercicio 30. Evitar una prueba circular

Una demostración deriva $f \circ h = \mathrm{id}$ y despeja $h'(b)$ sin haber demostrado que existe. Repara la prueba por cocientes.

Solución. La cadena sólo se aplica si la derivada interior existe, así el despeje presupone la conclusión. Se toma directamente un $y \neq b$ de la imagen y $x = h(y) \neq a$. La identidad de inversa da $q_h(y) = 1/q_f(x)$. Continuidad de h asegura $x \to a$; derivada original no nula entrega margen $|q_f| > |L|/2$. Entonces $|q_h - 1/L| \leq 2|q_f - L|/|L|^2$, que se hace menor que cualquier tolerancia con los radios de derivabilidad y continuidad. Así se obtiene existencia antes de usar una regla que la exigiría.

La identidad $q_h = 1/q_f$ se obtiene para entradas perforadas de la inversa sin presuponer que exista su límite. La continuidad de h proporciona cercanía de antecedentes y la derivada original los controla. El margen de pendiente mantiene positivo el denominador de la estimación de error recíproco. Así se demuestra primero existencia de la derivada inversa y después su valor, evitando usar cadena circularmente.

18.7. Una derivada es otra función

Hasta aquí fijábamos un centro para estudiar un límite de secantes. Si repetimos el estudio en cada centro donde ese límite exista, sus valores definen otra función. Esta nueva función necesita un dominio propio y habrá que estudiar por separado cómo varía con el centro; la existencia de cada pendiente no asegura continuidad de esas pendientes.

R7 — Dominio de la función derivada. Definimos

$$\mathrm{Diff}(f) = \{a \in D \cap \mathrm{Acc}(D) : f \text{ es derivable en } a\}, \qquad f' : \mathrm{Diff}(f) \to \mathbb{R}.$$

R1 da un valor único por punto, así esta regla determina una función, sin escoger entre pendientes. Para $|x|$ sobre $\mathbb{R}$, el dominio es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; sus valores son -1 a la izquierda y 1 a la derecha. El límite de esta función en cero puede preguntarse porque cero acumula en su dominio; su continuidad en cero no puede afirmarse porque no está definido allí.

Podemos construir una función derivable en toda la recta cuya derivada sea discontinua usando sólo polinomios. Para $n \in \mathbb{N}$ desde cero, ponemos $c_n = 2^{-(n+1)}$, $w_n = c_n^2/8$ e $I_n = [c_n - w_n, c_n + w_n]$. Los centros se acercan a cero y las anchuras disminuyen más deprisa: entre dos centros consecutivos hay distancia $c_n/2$, mientras $w_n + w_{n+1} = 5c_n^2/32 < c_n/2$. Los intervalos vecinos quedan ordenados y separados, y de ahí la disjunción de cualquier par. Son positivos y están contenidos en $[c_n/2, 3c_n/2]$.

Sobre cada intervalo colocamos el perfil $\phi(u) = (1-u^2)^2$, definido para $u \in [-1,1]$, con altura y anchura reguladas por w_n:

$$F(x) = \begin{cases} w_n \phi((x-c_n)/w_n), & x \in I_n \text{ para algún } n, \\ 0, & x \notin \bigcup_n I_n. \end{cases}$$

La disjunción hace única la regla en cada entrada. En I_n tenemos $0 \le \phi \le 1$ y, como $x \ge c_n/2$, resulta $0 \le F(x) \le w_n = c_n^2/8 \le x^2/2$. Fuera de todos los intervalos, $F(x) = 0$ y la misma barrera vale. Por tanto $F(0) = 0$ y $|q_{F,0}(x)| \le |x|/2$, lo que prueba directamente $F'(0) = 0$.

Para los puntos no nulos, primero aislamos las ramas que pueden intervenir. Si el punto es negativo, una vecindad dentro del semieje negativo no toca ningún intervalo. Si es positivo, los centros y extremos de la cola terminan por quedar por debajo de la mitad de ese punto; en una vecindad pequeña sólo quedan finitos intervalos posibles. Su separación permite aislar el intervalo que contiene al punto, o una zona donde F es constante cero.

En el interior de I_n, R4 y R5 derivan la rama polinómica y dan

$$F'(x) = \phi'((x-c_n)/w_n) = -4u(1-u^2), \qquad u = (x-c_n)/w_n.$$

En cada extremo $e = c_n \pm w_n$, el perfil cumple $\phi(\pm 1) = \phi'(\pm 1) = 0$, pero podemos justificar el límite sin invocar un pegado de derivadas. Dentro de $[-1,1]$, la factorización $(1-u^2)^2 = (1-u)^2(1+u)^2$ da $|\phi(u)| \le 4|u \mp 1|^2$. Traducida a la rama interior, esta cota es $|F(x)| \le 4|x-e|^2/w_n$. Como $F(e) = 0$, el cociente centrado en e tiene magnitud a lo sumo $4|x-e|/w_n$ y tiende a cero. En la parte exterior aislada el cociente es cero. Junto con la prueba directa en el origen, esto demuestra diferenciabilidad de F en toda $\mathbb{R}$ sin un pegado infinito supuesto.

Los puntos $x_n = c_n + w_n/2$ pertenecen al interior de sus bultos y tienden a cero. En todos ellos, $F'(x_n) = \phi'(1/2) = -3/2$, mientras $F'(0) = 0$. La tolerancia uno para continuidad de F' queda infringida por estos puntos dentro de cualquier radio suficientemente pequeño. Las alturas cuadráticas hicieron pequeña la razón $F(x)/x$ en el origen, pero las anchuras de los bultos permiten pendientes interiores que mantienen su magnitud. Esa distinción se verifica para toda la familia mediante sus fórmulas; los bultos dibujados son sólo una muestra finita.

Ejercicios de la sección 18.7.

Ejercicio 31. El dominio de otra función

Escribe el dominio y los valores de la función derivada de $|x|$ sobre $\mathbb{R}$. Distingue límite y continuidad de esa derivada en cero.

Solución. En cada centro positivo hay una vecindad donde la función es la identidad y la derivada vale uno; en cada centro negativo hay una donde es menos la identidad y vale menos uno. En cero no existe derivada. Así su dominio es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Cero acumula en ese dominio, por lo que puede preguntarse su límite; no existe por los dos valores laterales diferentes. No se habla de continuidad allí porque falta un valor de la función derivada en cero.

En los centros no nulos basta una ventana que no cruce cero para identificar la función con una regla afín. En cero las secantes originales impiden definir la derivada. La nueva función derivada tiene por ello dominio perforado y allí dos valores constantes. Un límite en cero

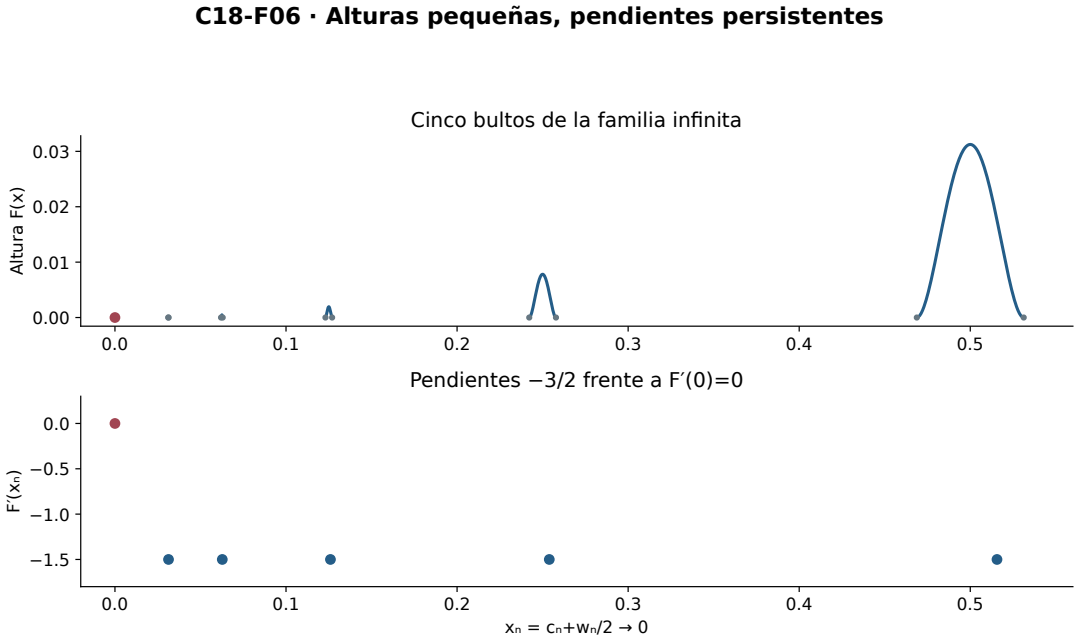


Figura 18.6. Se muestran n=0,…,4 de la familia con c_n=2^{−(n+1)}, w_n=c_n²/8 y perfil (1−u²)². Toda la función satisface 0≤F(x)≤x²/2 y F′(0)=0. En x_n=c_n+w_n/2, la derivada vale −3/2 para todo n, refutando continuidad de F′ en cero. La figura representa una muestra finita; disjunción, extremos, finitud local y cola se prueban en R7.

es una pregunta válida de acumulación, mientras continuidad allí necesitaría una evaluación que falta.

Ejercicio 32. Separar la familia de bultos

Para $c_n = 2^{-(n+1)}$, $w_n = c_n^2/8$, prueba positividad y disjunción de I_n. Justifica que fuera de cero la familia es localmente finita.

Solución. Como $c_n \le 1/2$, $w_n < c_n/2$, por lo que el intervalo es positivo y queda en $[c_n/2, 3c_n/2]$. La distancia entre centros vecinos es $c_n/2$ y la suma de semianchos $w_n + w_{n+1} = 5c_n^2/32 < c_n/2$. Los intervalos quedan ordenados y separados, lo que implica disjunción de cualquier par. Si el punto $x > 0$ está fijado, los centros de la cola y sus extremos quedan por debajo de $x/2$ desde algún índice, dejando sólo finitos intervalos posibles en una bola pequeña. Si $x < 0$, una bola dentro de la semirrecta negativa no toca ninguno. Sólo en cero se acumula la familia.

La escala geométrica de centros hace que los semianchos disminuyan más rápido que su separación. La desigualdad entre vecinos establece un orden con huecos y separa todos los intervalos. Para finitud local basta eliminar una cola completa por debajo de un punto positivo fijado. El origen se distingue porque cualquier vecindad suya sigue encontrando intervalos de esa cola.

Ejercicio 33. Una derivada discontinua sin trigonometría

Completa la prueba de R7: diferenciabilidad en cero, en extremos y en interiores, y discontinuidad de la función derivada en cero.

Solución. En cada intervalo, $0 \le F \le w_n = c_n^2/8 \le x^2/2$ porque $x \ge c_n/2$; fuera de ellos es cero. Así $|q_{F,0}| \le |x|/2$ y $F'(0) = 0$. En interiores, reglas algebraicas y cadena dan $\phi'(u) = -4u(1-u^2)$. En un extremo e, la rama interior satisface $|F(x)| \le 4|x-e|^2/w_n$, así su cociente tiende a cero; la exterior es cero. La finitud local permite aislar el intervalo o la zona exterior en todo punto no nulo. Por tanto F es derivable en toda la recta. Los puntos

$x_n = c_n + w_n/2 \to 0$ tienen derivada $\phi'(1/2) = -3/2$, así contradicen continuidad de F' en cero con tolerancia uno. No se depende de representar gráficamente la cola infinita.

Retorno visual. Véase C18-F06, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba. La cota cuadrática de valores resuelve el origen sin presuponer reglas de pegado infinito. En cada punto no nulo la finitud local reduce el análisis a una zona exterior, un interior o un extremo de bulto. Los extremos usan su propia cota de resto y los interiores las reglas ya probadas. La ruta con derivada menos tres medios refuta continuidad de la derivada mediante una precisión fija.

Ejercicio 34. La forma del extremo

Prueba la cota $|\phi(u)| \le 4|u-1|^2$ cerca del extremo derecho en $[-1,1]$, y su análoga izquierda. Tradúcela al cociente de un bulto.

Solución. En $[-1,1]$, $(1-u^2)^2 = (1-u)^2(1+u)^2 \le 4(u-1)^2$ y también $\le 4(u+1)^2$. Si $e = c_n + w_n$, entonces $u-1 = (x-e)/w_n$, de donde $|F(x)| \le 4|x-e|^2/w_n$. Como $F(e) = 0$, el cociente centrado en e tiene magnitud a lo sumo $4|x-e|/w_n$ en la rama interior y cero fuera. El radio $\eta w_n/4$, reducido para aislar el bulto, da error menor que η. El extremo izquierdo se trata con $u+1$ y el mismo presupuesto.

El factor que no se anula en el extremo tiene magnitud a lo sumo dos en $[-1,1]$. Elevarlo al cuadrado proporciona la constante cuatro, mientras el otro factor conserva la distancia cuadrática al extremo. El cambio de coordenadas introduce w_n y transforma esa cota en un control de secante lineal en $|x-e|$. El radio se reduce además para excluir otros bultos.

Ejercicio 35. Pendiente puntual y función derivada

Compara el dominio de la derivada de la función racional/irracional de R3 con el de la familia de bultos de R7. ¿Qué dos inferencias fallan?

Solución. La primera es derivable en cero y discontinua en todo otro punto; por R3 no es derivable fuera de cero. Su dominio de derivada es exactamente $\{0\}$ y la función derivada allí vale cero. La familia de bultos es derivable en toda la recta, pero su derivada es discontinua en cero. Así fallan dos inferencias distintas: derivabilidad en un centro no garantiza derivabilidad en una vecindad, y derivabilidad en toda una vecindad no garantiza continuidad de la función derivada. La derivada sobre un singleton es continua relativamente a él, aunque ese hecho no la extienda al entorno.

La primera función sólo admite derivada en cero porque en todos los otros puntos falla continuidad. Su derivada en dominio singleton es continua relativamente, pero no ofrece valores vecinos. La segunda admite derivada en todo el dominio real y aun así su función derivada falla continuidad en cero. Estos ejemplos refutan dos implicaciones diferentes y deben leerse con sus dominios propios.

18.8. Certificar una aproximación local

Conocer la derivada identifica la pendiente de primer orden, pero para calcular una aproximación con un error concreto necesitamos una estimación del resto. La vecindad donde esa estimación está probada forma parte del certificado: el radio elegido para una tolerancia debe permanecer dentro de ella. **R8 — De una cota a un certificado.** Si $f'(a) = L$ y para $|h| < \rho$, $a + h \in D$, se conoce $|f(a+h) - f(a) - Lh| \le Bh^2 \qquad (B \ge 0)$, entonces la aproximación $f(a) + Lh$ tiene error absoluto a lo sumo Bh^2. Si $B > 0$, pedir además $|h| < \eta/B$ certifica error normalizado menor que η. Si $B = 0$, el error es exactamente cero en esa vecindad. La existencia de la derivada sólo garantiza un resto $o(|h|)$, sin garantizar por sí sola una cota cuadrática o un algoritmo para encontrar radios.

Para $f(x) = \sqrt{x}$ en $a = 1$, R6 da $L = 1/2$. Podemos calcular el resto mediante racionalización. Si $h > -1$ y $s = \sqrt{1+h}$, entonces $s - 1 = h/(s+1)$, y al restar $h/2$ resulta $s - 1 - h/2 = h(1-s)/[2(s+1)] = -h^2/[2(s+1)^2]$. Hemos obtenido la identidad exacta $\sqrt{1+h} = 1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{2(\sqrt{1+h}+1)^2}$. El denominador es positivo y el resto es no positivo, así que el

modelo $1+h/2$ queda por encima del valor exacto. Para $|h| \le 1/2$, la raíz es real y $s \ge 0$ da una magnitud de resto a lo sumo $h^2/2$. En $h = 1/100$ obtenemos la aproximación $201/200$, cuyo exceso sobre la raíz está entre cero y $1/20000$.

El cociente de secantes, definido para $h \neq 0$, es $q_{f,1}(1+h) = 1/(s+1)$ y satisface $|q_{f,1} - 1/2| \le |h|/2$. Este error de pendiente es el error de valor dividido por $|h|$; en el incremento anterior la cota es $1/200$. La identidad del resto incluye $h = 0$, donde el error de valor es cero, sin asignar allí una secante.

C18-F07 · Una recta y un certificado de error

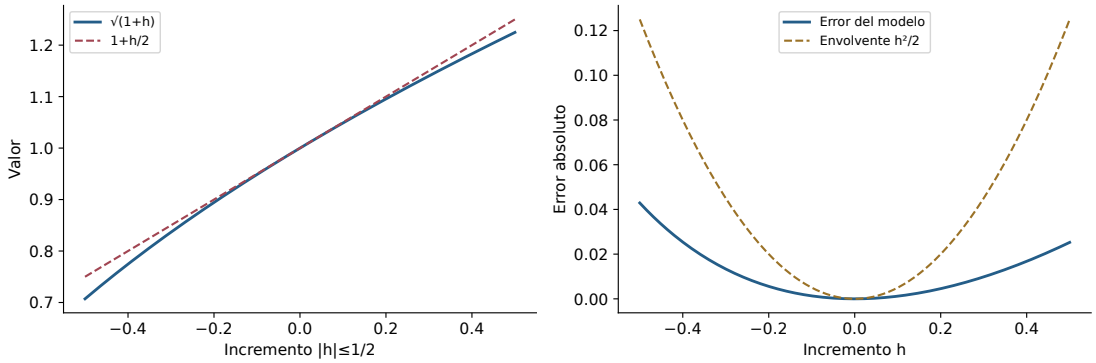


Figura 18.7. En |h|≤1/2, el modelo 1+h/2 aproxima √(1+h) por encima. La identidad exacta da error h²/[2(√(1+h)+1)²]≤h²/2. En h=1/100, el modelo es 201/200 y el error es a lo sumo 1/20000. El panel de errores tiene su propia escala vertical; no es el error de pendiente secante, que divide por |h|.

Una derivada puede existir sin admitir un resto cuadrático. Para $f(x) = |x|^{3/2} = |x|\sqrt{|x|}$, tenemos $f(0) = 0$ y $|q_{f,0}(x)| = \sqrt{|x|} \to 0$, de modo que $f'(0) = 0$; sirve el radio $\delta = \eta^2$. Si existiera una barrera $|x|^{3/2} \le Bx^2$ con $B > 0$ en una vecindad perforada, dividir por x^2 exigiría $1/\sqrt{|x|} \le B$. Una entrada no nula dentro de esa vecindad y con $|x| < 1/(B+1)^2$ lo contradice. Para $B = 0$, cualquier entrada no nula refuta la barrera. La potencia fraccionaria sólo abrevia el producto y la raíz ya construidos; no hemos aplicado una regla general de potencias reales.

También conviene distinguir el control de todas las secantes cercanas de una tabla finita de muestras. Sea $S \subseteq \mathbb{R}$ finito con $0 \in S$ y fijemos cualquier pendiente $c \in \mathbb{R}$. El polinomio $p_c(x) = cx \prod_{s \in S \setminus \{0\}} \frac{x-s}{-s}$ vale cero en todos los nodos: el factor x lo anula en cero y cada otro nodo tiene su factor correspondiente. Los denominadores son no nulos y el producto vacío vale uno. Para $x \neq 0$, el cociente centrado en cero es c multiplicado por esos mismos factores; cada factor tiende a uno y C13 permite tomar el límite del producto finito. Así $p_c'(0) = c$, incluso si $c = 0$ o $S = \{0\}$. La misma tabla de ceros admite cualquier pendiente prescrita, mientras la definición de derivada exige un radio que controle todas las entradas admisibles para cada tolerancia.

Ejercicios de la sección 18.8.

Ejercicio 36. Racionalizar el error de raíz

Demuestra la identidad exacta del resto de $\sqrt{1+h}$ respecto de $1+h/2$, para $h > -1$. Da una cota cuadrática en $|h| \le 1/2$.

Solución. Con $s = \sqrt{1+h} \ge 0$, $s-1 = h/(s+1)$. Entonces $s-1-h/2 = h(1-s)/[2(s+1)] = -h^2/[2(s+1)^2]$. El denominador es positivo. Para $|h| \le 1/2$ sigue siendo al menos dos, así el error tiene magnitud a lo sumo $h^2/2$. La identidad incluye $h = 0$ sin dividir por h y prueba

además que el modelo afín está por encima del valor exacto. Se obtuvo por álgebra y raíces C10, sin Taylor.

Retorno visual. Véase C18-F07, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba. La condición $h > -1$ asegura definición real de la raíz y el denominador $s + 1$ es siempre positivo. La racionalización obtiene una identidad de resto, no sólo un límite. Su signo acredita sobreestimación y su magnitud da una cota cuadrática en la vecindad indicada. La identidad incluye el incremento cero sin dividir por él.

Ejercicio 37. Un valor y dos tolerancias

Certifica la aproximación de $\sqrt{101/100}$ mediante $201/200$. Compara el error absoluto con el error de la secante usada para aproximar la derivada en uno.

Solución. El incremento es $h = 1/100$ y R8 da $0 \le 201/200 - \sqrt{101/100} \le h^2/2 = 1/20000$. El error de la pendiente secante respecto de $1/2$ es el resto dividido por h, con magnitud a lo sumo $1/200$. No son la misma tolerancia: multiplicar el error de pendiente por la magnitud del incremento produce el error del valor. Ambos son certificados para esta entrada admisible, derivados de una identidad que controla toda la vecindad, sin tomar la cifra visual del gráfico como evidencia.

Retorno visual. Véase C18-F07, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba. El incremento utilizado pertenece a la región donde se demostró la cota de resto. La aproximación y ambas cotas se expresan con fracciones exactas. Dividir el error de valor por $|h| = 1/100$ lo amplifica cien veces para obtener el error de secante. La distinción explica por qué las dos tolerancias numéricas son distintas aunque procedan del mismo certificado.

Ejercicio 38. Tolerancias desde una cota dada

Si $|r(a + h)| \le Bh^2$ en $|h| < \rho$, da condiciones para error de valor menor que ε y error normalizado menor que η. Trata $B = 0$.

Solución. Si $B > 0$, basta $|h| < \min(\rho, \sqrt{\varepsilon/B})$ para tener $Bh^2 < \varepsilon$. Para el cociente con $h \neq 0$, basta $|h| < \min(\rho, \eta/B)$, porque $|r/h| \le B|h| < \eta$. En $h = 0$ el error del valor es cero; no se evalúa el cociente. Si $B = 0$, el resto es cero en toda la vecindad admisible y cualquier incremento de ella da valor exacto, mientras todas sus secantes perforadas tienen pendiente exactamente L.

Cada mínimo conserva la vecindad donde se sabe que la cota vale y añade la escala que responde al desafío. Para $B > 0$ el error cuadrático se ajusta con una raíz y el normalizado con un radio lineal. El centro sólo participa en la primera pregunta y tiene resto cero. Cuando $B = 0$, se trata directamente la igualdad de valores y secantes antes de introducir cualquier división por la barrera.

Ejercicio 39. Un resto menor que lineal y mayor que cuadrático

Para $f(x) = |x|\sqrt{|x|}$, prueba derivada cero en cero y ausencia de una cota cuadrática local finita.

Solución. El cociente tiene magnitud $\sqrt{|x|}$, de modo que $\delta = \eta^2$ prueba derivada cero. Si una cota $|f(x)| \le Bx^2$ con $B > 0$ valiera en una vecindad perforada, dividir por x^2 daría $1/\sqrt{|x|} \le B$. Elegir allí $0 < |x| < 1/(B + 1)^2$ lo contradice. Para $B = 0$ cualquier entrada no nula ya contradice la cota. La derivada sólo exige resto de orden menor que lineal; no impone una tasa cuadrática. La expresión usa producto y raíz, sin regla general de potencias fraccionarias.

El resto es todo el valor de la función porque el centro y la pendiente propuestos son cero. Su cociente normalizado tiende a cero y acredita el modelo de primer orden. Al compararlo con x^2, la razón crece sin cota y permite infringir cualquier barrera finita dentro de cualquier radio. La ausencia de tasa cuadrática no contradice la derivada ya demostrada.

Ejercicio 40. Muestras idénticas, pendientes arbitrarias

Dado $S \subseteq \mathbb{R}$ finito con $0 \in S$ y un real c, construye un polinomio que se anule en S y tenga derivada c en cero. Explica la limitación de certificar derivadas con muestras finitas.
Solución. Sea $p_c(x) = cx \prod_{s \in S \setminus \{0\}} (x - s)/(-s)$, con producto vacío igual a uno. Todos los denominadores son no nulos. En cero se anula por el factor x; en cada otro nodo se anula por su factor correspondiente. En $x \neq 0$, el cociente centrado en cero es $c \prod_s (x - s)/(-s)$, que tiende a c porque cada factor tiende a uno y sólo hay finitos. Por tanto $p_c{}'(0) = c$, incluso si $c = 0$ o no hay otros nodos. La misma tabla de ceros es compatible con toda pendiente prescrita. Las muestras no determinan un control de todas las entradas cercanas y no sustituyen la condición de derivabilidad.

Los factores se construyen sólo para nodos no nulos, por lo que todos sus divisores están definidos. Cada nodo tiene un factor de anulación y cero tiene el factor inicial x. El cociente central conserva un producto finito de factores con límite uno, haciendo posible cualquier pendiente c. La tabla fija valores, pero no controla todas las entradas perforadas próximas que exige el certificado de derivada.

Capítulo 19

De lo local a lo global

En C18, una derivada positiva permitía comparar los valores cercanos con el de un centro fijo. Para afirmar que una función crece entre dos entradas cualesquiera necesitamos relacionar ese incremento completo con alguna de sus pendientes locales. El intervalo conserva todas las entradas que hay entre ambas; sobre ese segmento, continuidad y derivabilidad harán posible encontrar una pendiente interior exactamente igual a la secante. Los prerrequisitos centrales son continuidad de C14 y diferenciabilidad de C18. Se usan explícitamente los extremos alcanzados sobre segmentos compactos de C16 para Rolle y Darboux, y el valor intermedio de C15 para existencia de una raíz. Límites, acumulación, raíces y finitud son interfaces heredadas. La cadena lógica es Fermat, Rolle y valor medio, seguida de consecuencias sobre signos, cotas, dos funciones, valores intermedios de derivadas y ceros. No suponemos continuidad de la función derivada ni usamos convexidad, segunda derivada, Taylor, integrales o L'Hôpital.

19.1. Un extremo interior obliga a detenerse

Comenzaremos por un extremo local. Cerca de un mínimo, los cambios de salida son no negativos, pero los incrementos de entrada cambian de signo al cruzar el centro. Si las secantes de ambos lados tienen un mismo límite, sus signos opuestos sólo podrán conciliarse en cero. La disponibilidad de entradas a izquierda y derecha será una hipótesis efectiva de la prueba. **R1 — Fermat.** Sean $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ y a interior a D. Si f tiene un máximo o mínimo local en a y es derivable allí, entonces $f'(a) = 0$. Un mínimo local significa que existe $r > 0$ tal que $f(x) \geq f(a)$ para $x \in D$ con $|x - a| < r$; un máximo invierte la desigualdad. La interioridad proporciona $\rho > 0$ con $B(a, \rho) \subseteq D$, y por tanto acumulación desde ambos lados.

Supongamos que el extremo es un mínimo y llamemos $L = f'(a)$. Dentro del radio r de ese mínimo, el numerador $f(x) - f(a)$ es no negativo: los cocientes son no positivos a la izquierda y no negativos a la derecha. Si $L > 0$, la tolerancia $L/2$ proporciona un radio δ donde $q_{f,a} > L/2$. Tomamos $t = \min(r, \rho, \delta)/2 > 0$ y $x = a - t$. Los tres radios aseguran, respectivamente, la comparación de mínimo, la pertenencia al dominio y el control de pendiente; ese cociente izquierdo tendría que ser a la vez positivo y no positivo.

Si $L < 0$, la tolerancia $|L|/2$ proporciona un radio δ donde $q_{f,a} < L/2 < 0$. Con este radio ponemos $t = \min(r, \rho, \delta)/2$ y la entrada $x = a + t$ contradice ahora el signo derecho. Sólo queda $L = 0$. Para un máximo aplicamos el caso probado a $-f$: conserva dominio e interioridad, convierte el máximo en mínimo y tiene derivada $-L$ por C18. Cada contradicción utiliza una entrada explícita, sin construir una sucesión.

La identidad en $[0, 1]$ tiene mínimo en cero y máximo en uno, y sus derivadas relativas valen uno también en esos bordes. Allí sólo está disponible un lado del dominio, de modo que no podemos repetir las dos contradicciones anteriores. El valor absoluto tiene un mínimo interior en cero, pero sus cocientes de ambos lados impiden una derivada bilateral. El cubo, por su parte, tiene derivada cero en cero y valores de ambos signos arbitrariamente cerca. Estos ejemplos distinguen la necesidad de interioridad y derivabilidad para aplicar Fermat de la insuficiencia de una pendiente nula para clasificar el punto.

La prueba también funciona si el centro acumula desde ambos lados en un dominio con huecos: en cada caso basta encontrar una entrada del lado necesario dentro de los radios

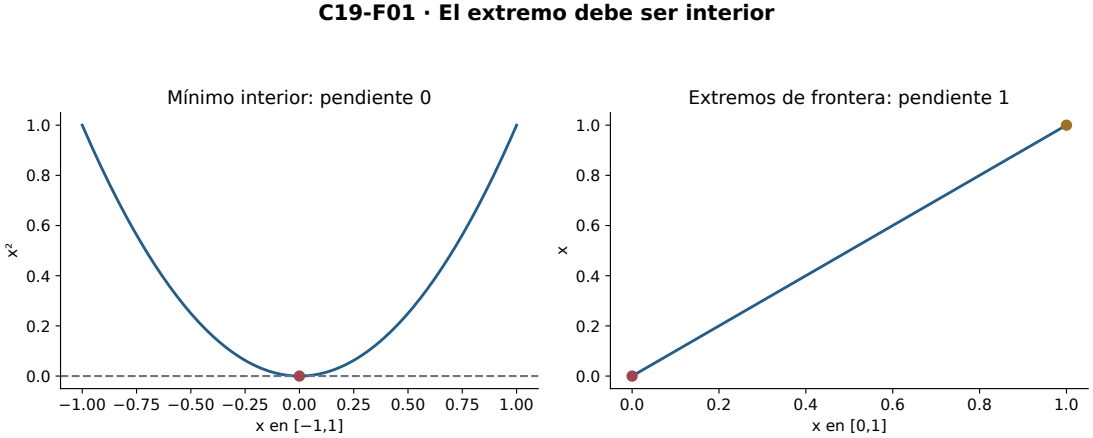


Figura 19.1. El cuadrado tiene mínimo interior en cero y derivada cero. La identidad en [0,1] tiene mínimo y máximo de frontera con derivadas relativas uno. Fermat necesita interioridad o acumulación por ambos lados además de extremo y derivabilidad; las figuras no sustituyen la prueba por signos.

fijados. La interioridad garantiza esa disponibilidad mediante una bola real completa. En el extremo opuesto, un centro aislado puede ser máximo y mínimo local a la vez, pero no tiene derivada según la definición de C18. Los cocientes y las entradas admitidas deciden qué parte del argumento es aplicable.

Ejercicios de la sección 19.1.

Ejercicio 1. Signos en un mínimo

Prueba Fermat para un mínimo interior usando signos de secantes y dos casos para el signo de la derivada.

Solución. En un radio del mínimo, $f(x)-f(a) \geq 0$; las secantes izquierdas son no positivas y las derechas no negativas. Interioridad da una bola dentro del dominio. Si $L > 0$, la tolerancia $L/2$ fuerza pendientes positivas en algún radio: elegir $x = a - \min(r, \rho, \delta)/2$ contradice el signo izquierdo. Si $L < 0$, tolerancia $|L|/2$ fuerza pendientes negativas y la entrada derecha con ese mismo mínimo contradice el signo derecho. Los radios son positivos y las entradas distintas del centro. Por tricotomía sólo queda $L = 0$.

Los tres radios cumplen obligaciones distintas: mantener el extremo local, permanecer dentro del dominio y controlar el error de pendiente. Su mínimo positivo proporciona una entrada válida en el lado que contradice cada signo propuesto. Así se descartan ambas posibilidades no nulas sin usar valor medio ni seleccionar una sucesión.

Ejercicio 2. El borde no es un centro interior

Analiza los extremos y derivadas relativas de $f(x) = x$ sobre $[0, 1]$. Explica por qué no contradicen Fermat.

Solución. El orden da mínimo global en cero y máximo global en uno. En cualquier centro acumulante del segmento el cociente perforado vale uno, también en los dos bordes, así sus derivadas relativas son uno. Cada bola centrada en cero contiene entradas negativas fuera del dominio y cada bola centrada en uno contiene entradas mayores que uno, por lo que ninguno es interior. Fermat no se aplica allí; su prueba necesita ambas clases de entradas admisibles, que faltan en los bordes.

Retorno visual. Véase C19-F01, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba. Los extremos globales también son locales relativos, pero sus centros no contienen una bola real del dominio. La derivada relativa sigue estando definida porque cada borde acumula desde su lado disponible. El ejemplo no invalida Fermat: muestra por qué su hipótesis de ambas direcciones debe mantenerse.

Ejercicio 3. Una esquina y un punto estacionario

Compara $|x|$, x^2 y x^3 en cero: extremo local, derivabilidad y suficiencia de pendiente nula.
Solución. El valor absoluto tiene mínimo global cero, pero secantes de pendientes menos uno y uno, por lo que no es derivable allí. El cuadrado tiene mínimo global y cociente centrado en cero igual a x, así derivada cero. El cubo tiene cociente x^2 y derivada cero, pero entradas positivas y negativas arbitrariamente cercanas dan valores de signos opuestos: no hay extremo local. Por tanto un extremo interior no crea derivabilidad y una derivada nula no garantiza extremo.

Los tres objetos mantienen continuidad en cero, pero sus secantes y valores vecinos responden a preguntas distintas. La esquina no tiene derivada, el cuadrado tiene mínimo y pendiente nula, y el cubo sólo tiene pendiente nula. Estos casos separan necesidad de derivabilidad para aplicar Fermat y falta de suficiencia de su conclusión.

Ejercicio 4. Dos lados sin un intervalo completo

Prueba que en Fermat puede reemplazarse interioridad por acumulación a ambos lados, manteniendo extremo local y derivada relativa existentes.
Solución. Sea L la derivada relativa. Para un mínimo, las pendientes de la izquierda son no positivas y las de la derecha no negativas dentro del radio del extremo. Si $L > 0$, el radio de error $L/2$ obliga a pendientes positivas; acumulación izquierda entrega una entrada dentro del mínimo de ambos radios, contradicción. Si $L < 0$, acumulación derecha y error $|L|/2$ dan la contradicción opuesta. No hace falta una bola completa del dominio, sino entradas de ambos lados en todo radio. Para máximo se aplica el resultado a $-f$. No se infiere esa acumulación sólo de que el centro sea de acumulación por uno de los lados.

Para excluir el signo positivo basta un testigo izquierdo en cada ventana, y para excluir el negativo basta uno derecho. Esa disponibilidad es más débil que contener una bola real completa. La derivada relativa debe controlar también esas entradas y el extremo aportar sus signos. Acumulación de un único lado no alcanza para las dos contradicciones.

Ejercicio 5. Transformar el máximo

Deduce Fermat para un máximo a partir del caso mínimo y verifica las condiciones de la función auxiliar.
Solución. Si f alcanza un máximo local en a, la función $g = -f$ sobre el mismo dominio alcanza un mínimo local con el mismo radio. El centro sigue siendo interior y C18 da derivabilidad $g'(a) = -f'(a)$. El caso mínimo implica $g'(a) = 0$, así $f'(a) = 0$. La transformación conserva tipos y dominio y sólo invierte el orden de valores; no se utiliza un resultado global o valor medio.

Multiplicar por menos uno convierte la comparación superior del máximo en la inferior del mínimo. No cambia qué entradas están disponibles ni el radio del extremo. La regla de derivación conserva el signo opuesto de la pendiente y permite volver a la igualdad cero para la función original.

19.2. Rolle: volver a la misma altura

Fermat permite anular la derivada de un extremo interior ya localizado. Para producir ese extremo sobre un segmento usaremos C16: una función continua en el segmento cerrado no vacío alcanza máximo y mínimo. Si los dos bordes tienen la misma altura y la función toma otro valor, al menos uno de esos extremos alcanzados tendrá que quedar dentro. **R2 — Rolle.** Sean $a < b$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en todo el segmento, derivable en cada punto de (a, b), con $f(a) = f(b)$. Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$. La continuidad en los extremos es relativa al segmento; no se piden derivadas allí ni continuidad de la función derivada.

Escribamos $k = f(a) = f(b)$. Si todos los valores son k, el punto $c = (a + b)/2$ pertenece al interior y sus cocientes son cero. En otro caso hay un y con $f(y) \neq k$, y C16 proporciona

puntos $m, M \in [a, b]$ donde $f(m) \leq f(x) \leq f(M)$ para todo x. Cuando $f(y) > k$, el máximo satisface $f(M) > k$ y su punto no puede ser ninguno de los bordes; Fermat en M da la derivada nula. Cuando $f(y) < k$, el mínimo m queda por debajo de ambos bordes y Fermat se aplica allí.

La continuidad permitió alcanzar los extremos; la igualdad de borde situó uno de ellos en el interior, y la derivabilidad hizo posible aplicar Fermat en ese punto. El otro extremo global puede permanecer en la frontera. La prueba sólo necesita que uno de los dos satisfaga las condiciones interiores.

C19-F02 · Volver a la misma altura

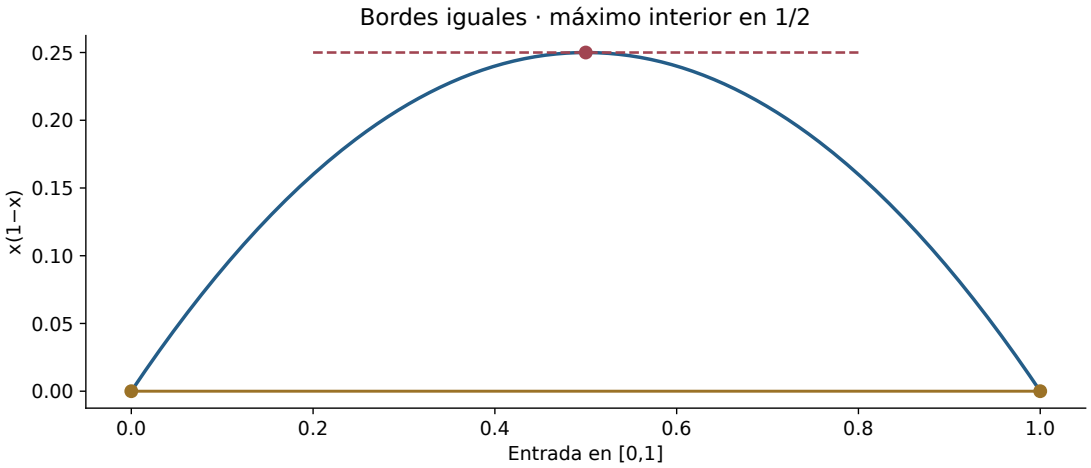


Figura 19.2. Para x(1−x) en [0,1], los bordes valen cero y el máximo interior en 1/2 tiene valor 1/4 y derivada cero. Este ejemplo tiene un único punto estacionario por la fórmula 1−2x; Rolle en general sólo garantiza existencia, sin unicidad ni un cero adicional de la función.

Podemos comprobar por separado qué ocurre al perder cada hipótesis. La función $u(x) = x$ para $0 \leq x < 1$, con $u(1) = 0$, conserva los bordes iguales y la derivada interior uno, pero rompe continuidad en el borde derecho y no tiene una derivada interior nula. La función $v(x) = |x - 1/2|$ en $[0, 1]$ conserva continuidad e igualdad de borde; en el centro no es derivable y todas las otras derivadas interiores valen uno o menos uno. La identidad conserva continuidad y derivabilidad, pero sus bordes difieren y su pendiente tampoco se anula. Cada ejemplo descarta una garantía universal al omitir una condición; no afirma que toda función que tenga algún punto estacionario deba satisfacer las hipótesis de Rolle.

Una constante satisface la conclusión en todos los puntos interiores y muestra que Rolle no da unicidad. Para una función y un segmento fijados podemos usar un testigo de la existencia, sin reunir elecciones para todos los intervalos simultáneamente. Si los valores iguales de borde son ceros de f, el testigo es un cero de f' entre ellos. Su altura puede ser distinta de cero: en $x(1 - x)$, la derivada se anula en $1/2$ y la función vale $1/4$.

Ejercicios de la sección 19.2.

Ejercicio 6. Localizar un extremo interior

Si una continua en $[a, b]$ tiene bordes iguales k y algún valor distinto, prueba que alcanza un extremo global interior.

Solución. C16 entrega un máximo y un mínimo alcanzados en el segmento. Si el valor distinto es mayor que k, el máximo tiene valor al menos tan grande y por tanto mayor que ambos bordes; su punto no puede ser ninguno de ellos y queda en (a, b). Si es menor que k, el mínimo queda estrictamente por debajo de ambos bordes y también es interior. Tricotomía cubre los dos casos. No se afirma que ambos extremos globales tengan esa posición ni que la función sea derivable, pues este paso sólo localiza un extremo desde continuidad.

La continuidad y compacidad se usan para alcanzar el extremo, mientras el valor distinto de los bordes se usa para ubicarlo dentro. En este paso no se necesita todavía derivabilidad. Rolle la añadirá sólo cuando aplique Fermat al extremo interior ya localizado. Separar las dos tareas evita atribuir a continuidad una conclusión sobre pendientes.

Ejercicio 7. Una parábola que vuelve al borde

Aplica Rolle a $f(x) = x(1 - x)$ en $[0, 1]$. Halla todos los puntos de derivada cero y comprueba si son ceros de la función.

Solución. El polinomio es continuo y derivable, con bordes cero. C18 da $f'(x) = 1 - 2x$, que sólo se anula en $c = 1/2$, interior al segmento. Su valor es $1/4$, no cero. Rolle predice existencia de un cero de la derivada entre los dos ceros de la función y en este ejemplo es único por la ecuación explícita; no predice un tercer cero de la función.

Retorno visual. Véase C19-F02, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba. Resolver $1 - 2c = 0$ prueba unicidad del punto estacionario en este ejemplo concreto. Evaluar la función allí responde a otra pregunta y da un cuarto. Rolle no asegura que el testigo tenga la misma altura que los bordes ni que siempre sea único. Ambas conclusiones aquí se investigan por la fórmula explícita.

Ejercicio 8. Perder continuidad en un borde

Para $u(x) = x$ si $0 \leq x < 1$ y $u(1) = 0$, audita Rolle en $[0, 1]$ y prueba que la continuidad interior no basta.

Solución. Los bordes valen cero. Cada punto interior tiene una vecindad donde u es identidad, por lo que su derivada es uno y nunca cero. En uno, las entradas $1 - 1/(n + 2)$ tienen salidas tendentes a uno, distintas del valor cero; no hay continuidad relativa. Se cumplen derivabilidad interior e igualdad de borde, pero falla precisamente continuidad del segmento cerrado. La hipótesis interior por sí sola no garantiza los extremos alcanzados necesarios para la prueba de Rolle.

La restricción interior coincide localmente con la identidad y sus pendientes permanecen en uno. El valor asignado al borde derecho hace coincidir los bordes, pero rompe continuidad relativa allí. Es una sola premisa ausente y la conclusión falla. La auditoría debe revisar todo el segmento cerrado antes de aplicar Rolle.

Ejercicio 9. Omitir la derivabilidad

Analiza Rolle para $|x - 1/2|$ en $[0, 1]$ y contrasta con eliminar igualdad de borde en la identidad.

Solución. La función de valor absoluto trasladada es continua y tiene valores $1/2$ en ambos bordes. A la izquierda de un medio su derivada es menos uno y a la derecha uno; en un medio no existe. Así no hay ninguna derivada interior nula y falla derivabilidad en todo el interior. Para la identidad, continuidad y derivabilidad se cumplen pero los bordes cero y uno son diferentes y su derivada siempre vale uno. Los ejemplos eliminan una sola hipótesis cada vez y muestran que no puede omitirse del enunciado universal.

La esquina interior conserva continuidad e igualdad de bordes, pero elimina la derivada exactamente en el centro que sería candidato. La identidad conserva continuidad y derivabilidad, pero pierde igualdad de bordes. Cada ejemplo conserva las demás premisas y muestra por qué la omitida es necesaria para la garantía universal.

Ejercicio 10. Muchos puntos posibles

Explica por qué Rolle no da unicidad ni una selección simultánea. Trata una función constante y el segmento degenerado.

Solución. En una constante sobre un segmento no degenerado todas las pendientes interiores son cero, por lo que cualquier punto interior sirve. La conclusión existencial no designa uno de ellos; su uso fija una función y un segmento y toma un testigo para esa instancia. Para $a = b$, el interior es vacío y no podría existir tal punto, aunque la igualdad de borde sea automática. Por eso se exige $a < b$. Ninguna de estas conclusiones construye un selector para una familia infinita de intervalos.

En un segmento no degenerado una constante tiene muchos testigos interiores. La afirmación existencial permite utilizar alguno en una aplicación, sin identificar una regla preferida global. En un singleton no hay interior y la conclusión de existencia es imposible. Eso justifica la desigualdad estricta de los extremos en el enunciado.

19.3. Restar la secante para encontrar una tangente

Cuando los bordes tienen alturas diferentes, Rolle no se aplica directamente a la función. La recta secante tiene exactamente ese mismo desnivel, así que restarla hará coincidir los bordes de una nueva función. Una derivada nula de esa diferencia señalará una pendiente original igual a la de la secante.

R3 — Valor medio de Lagrange. Sean $a < b$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en el segmento y derivable en su interior. Existe $c \in (a, b)$ con $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, $\qquad f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Objeto auxiliar y prueba. El incremento de entrada $b-a$ es positivo. Definimos el número $m = [f(b)-f(a)]/(b-a)$, la recta $\ell(x) = f(a)+m(x-a)$ y $H(x) = f(x)-\ell(x)$ sobre el mismo segmento. Por C14/C18, H es continua en todo él, derivable dentro y $H'(x) = f'(x) - m$. Además $H(a) = H(b) = 0$. Rolle aplicado a H da $H'(c) = 0$, por lo que $f'(c) = m$. La recta auxiliar tiene pendiente fijada por los dos bordes y su resta elimina exactamente el desnivel. Lo que se anula en los bordes es H, no necesariamente f.

C19-F03 · La secante se convierte en Rolle

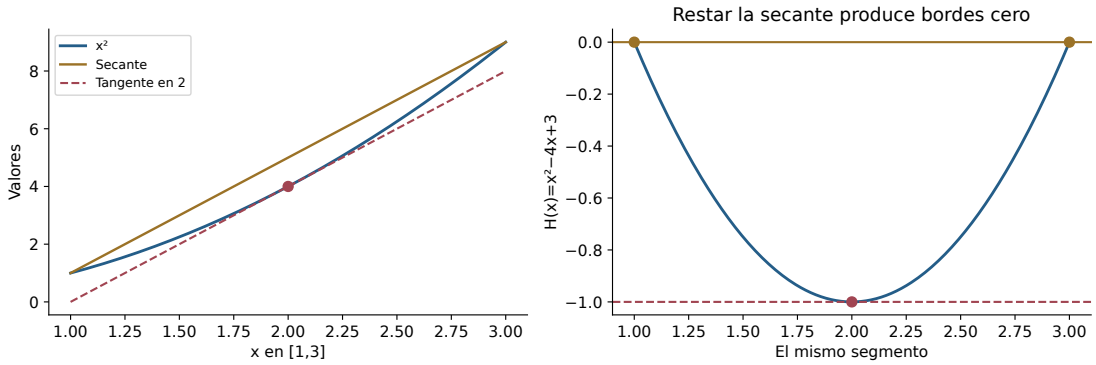


Figura 19.3. En [1,3], la secante del cuadrado tiene pendiente cuatro y recta 4x−3. La tangente en dos tiene igual pendiente. Restar la secante da H=(x−1)(x−3), con bordes cero y H′(2)=0. El punto medio funciona aquí por el cuadrado; no es un punto prescrito por el teorema general.

Para usar el resultado con una función original $f : D \to \mathbb{R}$ entre $u < v$, debemos tener $[u, v] \subseteq D$, continuidad sobre ese segmento y derivabilidad en su interior. La restricción conserva continuidad por C14 y las derivadas por C18: cada centro interior acumula también en el segmento restringido. La igualdad obtenida utiliza entonces las derivadas originales. La sola pertenencia de u y v al dominio no proporciona las evaluaciones intermedias si hay un hueco entre ellos.

En el cuadrado sobre $[a, b]$, la secante tiene pendiente $a + b$ y la ecuación $2c = a + b$ determina el único testigo $c = (a + b)/2$. Esa ubicación no es general. Para el cubo en $[0, 1]$, la pendiente secante es uno y $3c^2 = 1$ da el punto interior $c = 1/\sqrt{3}$, distinto de un medio. En una afín, cualquier punto interior sirve. La existencia de Lagrange no prescribe una receta para encontrar el testigo de una función arbitraria, ni promete que el mismo centro resuelva dos aplicaciones a funciones distintas.

La condición $a < b$ mantiene no nulo el denominador de la secante y no vacío el interior donde debe encontrarse el testigo. Para $a = b$ fallarían ambas obligaciones. Respecto de Rolle sólo hemos retirado la igualdad de borde; la continuidad en todo el segmento y la derivabilidad interior siguen siendo necesarias para la garantía y conservan los contraejemplos ya examinados. La igualdad que obtenemos es exacta aunque no sepamos localizar su punto.

Ejercicios de la sección 19.3.

Ejercicio 11. Construir el residuo de la secante

Construye la función auxiliar de Lagrange y verifica todas las hipótesis de Rolle antes de aplicarlo.

Solución. Con $a < b$, $m = [f(b) - f(a)]/(b - a)$ es real. La recta $\ell(x) = f(a) + m(x - a)$ comparte los valores de borde y $H = f - \ell$ vive en $[a, b]$. Continuidad de f y de la recta hace continua H en todo el segmento; C18 da derivada $H' = f' - m$ en su interior. Ambos bordes de H valen cero. Rolle entrega c interior con $H'(c) = 0$, y la identidad de derivadas implica $f'(c) = m$. No se ha aplicado Rolle directamente a f, cuyos bordes pueden ser distintos.

La auxiliar conserva dominio, continuidad y derivabilidad mediante reglas ya probadas. La secante resta exactamente el incremento total y produce dos bordes iguales. Rolle se aplica sólo después de esas comprobaciones. Su conclusión se traduce por la identidad de derivadas, sin prescribir de antemano el centro obtenido.

Ejercicio 12. Tangente paralela en el cuadrado

Halla el punto de Lagrange para x^2 en $[1, 3]$ y calcula la función auxiliar que resta la secante.

Solución. La pendiente secante es $(9-1)/(3-1) = 4$. La recta es $\ell(x) = 1+4(x-1) = 4x-3$. El residuo $H(x) = x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$ tiene ambos bordes cero y derivada $2x - 4$. Se anula sólo en $c = 2$, interior al segmento; allí la derivada original vale cuatro. La igualdad de pendientes se verifica exactamente, sin localizar el punto leyendo una figura.

Retorno visual. Véase C19-F03, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba. El cuadrado produce una secante de pendiente cuatro en ese segmento y la recta correspondiente pasa por ambos bordes. Su resto factorizado verifica las dos anulaciones y su derivada lineal localiza un único centro interior. El punto medio funciona por esa expresión particular, no por una condición general de Lagrange.

Ejercicio 13. El punto medio no es universal

Una aplicación de Lagrange al cubo en $[0, 1]$ usa automáticamente $c = 1/2$. Corrígela y explica el origen del error.

Solución. El incremento de valores y el de entrada son uno, así la pendiente secante es uno. La derivada del cubo es $3c^2$; en un medio vale $3/4$, por lo que no cumple la igualdad. Resolver $3c^2 = 1$ y exigir $c \in (0, 1)$ da $c = 1/\sqrt{3}$. El punto medio funciona para el cuadrado por su fórmula específica, sin ser un dato del teorema. Lagrange asegura existencia interior, no una localización predeterminada.

El testigo de valor medio se identifica resolviendo una ecuación de pendientes y exigiendo pertenencia al interior. La raíz positiva cumple ambas obligaciones; medio no cumple la igualdad. Pasar de un ejemplo simétrico a una regla universal de ubicación omitiría la parte existencial del teorema.

Ejercicio 14. Restringir sin llenar un hueco

Explica qué se necesita para aplicar Lagrange a $f : D \to \mathbb{R}$ entre $u < v$. Usa un dominio de dos piezas para refutar que basten los extremos.

Solución. Hace falta $[u, v] \subseteq D$, continuidad en ese segmento y derivabilidad en su interior. La restricción conserva continuidad y, porque cada centro interior acumula en el segmento, también las derivadas originales. En $D = [0, 1] \cup [2, 3]$, tomar $u = 1, v = 2$ sólo da dos argumentos válidos y no una función definida en $(1, 2)$. La función cero en la primera pieza y uno en la segunda tiene todas sus derivadas relativas cero, mientras la secante entre esos bordes tiene pendiente uno. Lagrange no se aplica: falta su dominio intervalar completo.

La inclusión de los extremos sólo acredita dos evaluaciones, no todas las entradas del segmento. La función por piezas tiene derivadas relativas cero, pero una secante entre sus piezas de pendiente uno. Ese contraste identifica el gasto de intervalaridad. Restringir conserva derivadas donde haya acumulación, pero no rellena un hueco ausente.

Ejercicio 15. Igualdad sin continuidad de derivada

Explica si Lagrange se aplica a la función de bultos de C18 en un segmento cerrado que cruce cero, aunque su derivada sea discontinua allí.

Solución. C18 demuestra que F es derivable en toda la recta y por tanto continua en cada punto. Su restricción al segmento es continua, y las derivadas de los centros interiores se conservan. Así Lagrange entrega un punto donde la derivada coincide con la pendiente secante. La discontinuidad de F' en cero no elimina ninguna hipótesis del teorema, porque sólo se exige existencia de las derivadas interiores. No se afirma que el punto de valor medio sea cero o que pueda identificarse por una muestra de bultos.

La derivabilidad global de los bultos aporta continuidad de la función y todas las derivadas interiores de cualquier segmento. Son exactamente las premisas de Lagrange. La discontinuidad de la nueva función derivada en cero no interviene en la prueba. No se deduce por ello una ubicación específica del testigo de valor medio.

19.4. El intervalo convierte signos en orden

Fijado cualquier par de entradas de un intervalo, el segmento entre ellas sigue dentro del dominio. Podemos aplicar Lagrange a esa restricción y traducir un signo conocido en todos los centros interiores a una comparación entre los valores del par. Así dejamos de comparar únicamente con un centro privilegiado. **R4 — Monotonía en un intervalo.** Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo no degenerado y $f : I \to \mathbb{R}$ continua en I, derivable en $\operatorname{int}(I)$. Si $f' \geq 0$ en el interior, f es no decreciente. Si $f' > 0$ en el interior, es estrictamente creciente. Las desigualdades opuestas dan los resultados decrecientes.

Sean $x < y$ dos entradas de I. Por ser intervalo, $[x, y] \subseteq I$, y las restricciones conservan continuidad y derivadas interiores. R3 proporciona $c \in (x, y)$ con $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$. El factor $y - x$ es positivo; una derivada no negativa da una diferencia no negativa, y una derivada positiva da una diferencia positiva. Los signos opuestos producen de la misma forma las comparaciones decrecientes. La prueba sirve para un par arbitrario usando un testigo de esa instancia, sin elegir una familia de centros.

En un intervalo abierto, la derivabilidad en cada punto ya da continuidad por C18. Si hay bordes incluidos, conservamos allí la hipótesis de continuidad para poder usar los segmentos que lleguen a ellos. En la dirección recíproca, supongamos que f es no decreciente y que existe su derivada en un centro interior a. Todos sus cocientes centrados en a son no negativos: a la derecha numerador y denominador son no negativos, con denominador positivo; a la izquierda ambos son no positivos, con denominador negativo. Si el límite L fuera negativo, la tolerancia $|L|/2$ y una entrada perforada próxima forzarían un cociente negativo, contradicción. Por tanto $f'(a) \geq 0$, sin deducir la existencia de esa derivada sólo del orden.

La monotonía estricta tampoco obliga a una derivada positiva en cada centro. El cubo tiene $f'(0) = 0$ y es estrictamente creciente: para $x < y$, $y^3 - x^3 = (y - x)(x^2 + xy + y^2) > 0$,

porque $x^2 + xy + y^2 = (x + y/2)^2 + 3y^2/4$ sólo podría anularse con $x = y = 0$, incompatible con ese par ordenado.

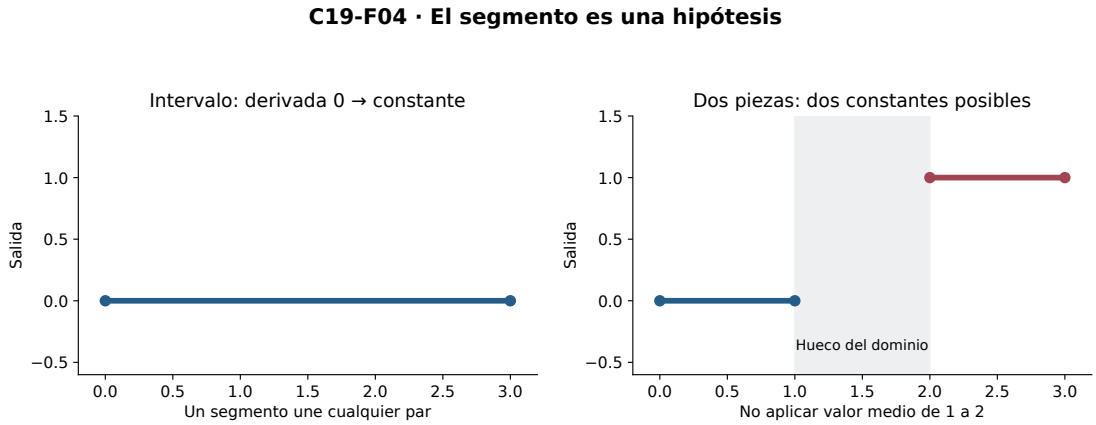


Figura 19.4. En un intervalo, continuidad y derivada interior cero fuerzan constancia por Lagrange. En [0,1]∪[2,3], la función cero en la primera pieza y uno en la segunda tiene derivada relativa cero en cada punto, incluidos bordes, pero no es constante en todo el dominio. El hueco no se rellena y el valor medio no se aplica a través de él.

Si $f' = 0$ en todo el interior, la identidad de Lagrange hace $f(y) - f(x) = 0$ para cada par distinto y prueba constancia en I. Una constante tiene a su vez cocientes cero y satisface la condición derivada. Si dos funciones cumplen las mismas hipótesis y $f' = g'$ en el interior, aplicamos el resultado a $f - g$: su diferencia es constante en todo el intervalo. Coincidir en una entrada fija esa constante en cero y permite identificar ambas funciones.

En $D = [0, 1] \cup [2, 3]$, la función que vale cero en la primera pieza y uno en la segunda tiene derivada relativa cero en todas sus entradas, incluidos los bordes, porque cerca de cada una sólo se visita su propia pieza constante. Sin embargo, sus dos alturas son diferentes. Entre uno y dos falta $(1, 2)$ y no podemos aplicar Lagrange para compararlas. Derivadas positivas dentro de piezas separadas tampoco ordenan automáticamente las salidas a través del hueco. Incluso sobre un intervalo, asignar un salto a un borde incluido puede invalidar la conclusión si sólo conservamos la derivabilidad interior y perdemos la continuidad de borde.

Ejercicios de la sección 19.4.

Ejercicio 16. Del signo a cada par

Prueba que $f' \geq 0$ en el interior de un intervalo, con continuidad de f y derivabilidad interior, implica que f es no decreciente.

Solución. Fijemos $x < y$ en I. Intervalaridad da $[x, y] \subseteq I$, continuidad se conserva en la restricción y cada centro de (x, y) pertenece al interior de I. Lagrange entrega $c \in (x, y)$ con $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$. Como $f'(c) \geq 0$ y $y - x > 0$, resulta $f(x) \leq f(y)$. El par era arbitrario, así la función es no decreciente. El testigo se usa sólo para ese par; no se requiere continuidad de la derivada ni seleccionarlo simultáneamente para todas las parejas.

Ejercicio 17. Crecimiento estricto con una derivada nula

Prueba que el cubo es estrictamente creciente y tiene derivada nula en cero. ¿Qué recíproca se refuta?

Solución. Para $x < y$, $y^3 - x^3 = (y - x)(x^2 + xy + y^2)$. El segundo factor es $(x + y/2)^2 + 3y^2/4$, no negativo y sólo cero si $x = y = 0$, incompatible con $x < y$. Por tanto la diferencia es estrictamente positiva y el cubo es estrictamente creciente. Su derivada es $3x^2$ y vale cero en el origen. El ejemplo refuta que crecimiento estricto exija derivada positiva en cada centro; la condición necesaria donde existe derivada es sólo no negatividad.

Ejercicio 18. Derivadas iguales, valores fijados

Sean f,g continuas en un intervalo y derivables en su interior, con derivadas iguales. Prueba que su diferencia es constante y determina qué ocurre si coinciden en un punto.

Solución. Sea $H = f - g$ en el mismo intervalo. Es continua y derivable interiormente, con $H' = 0$. Para un par $x < y$, Lagrange da $H(y) - H(x) = H'(c)(y - x) = 0$; los pares iguales son triviales y los inversos se intercambian. Así todas las salidas de H son iguales. Si existe a con $f(a) = g(a)$, esa salida común es $H(a) = 0$ y $f = g$ en todo el dominio. El argumento usa sólo diferencias y valor medio, sin introducir integrales ni primitivas.

Ejercicio 19. Constantes distintas en un dominio roto

Construye una función con derivada relativa cero en todos los puntos de $[0, 1] \cup [2, 3]$ que no sea constante. Revisa también los bordes.

Solución. Definimos $f = 0$ en $[0, 1]$ y $f = 1$ en $[2, 3]$. Una bola relativa de radio $1/2$ alrededor de cualquier entrada sólo toca su propia pieza, y allí las secantes perforadas valen cero. Todas las entradas, incluidos los cuatro bordes, acumulan en el dominio al menos desde un lado; por ello sus derivadas relativas existen y son cero. Sin embargo, $f(0) = 0 \neq 1 = f(2)$. El segmento entre piezas falta y no se puede aplicar Lagrange a ese par. La conclusión de constancia requiere intervalo completo, no sólo derivadas relativas nulas.

Retorno visual. Véase C19-F04, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 20. Signo de una derivada existente

Si una función es no decreciente y tiene derivada en un punto interior a su intervalo, prueba que esa derivada es no negativa sin aplicar Lagrange.

Solución. En un centro interior a, toda secante de una función no decreciente es no negativa. A la derecha, numerador y denominador son no negativos y el denominador es positivo; a la izquierda, ambos son no positivos y el denominador es negativo. Si el límite L fuera negativo, la tolerancia $|L|/2$ forzaría secantes menores que $L/2 < 0$ en algún radio. Acumulación aporta una entrada perforada allí y contradice el signo establecido. Por tanto $L \geq 0$. No se deduce existencia de derivada a partir de monotonía: esa existencia era una premisa.

19.5. De cotas de derivadas a cotas de incrementos

Lagrange entrega un punto cuya posición puede desconocerse, pero sabemos que está entre las dos entradas. Una barrera válida para todas las derivadas interiores se aplica también a la suya. Podremos así acotar el incremento sin localizar el testigo ni pedir que la función derivada alcance un máximo.

R5 — Cotas de incrementos. Bajo las condiciones de R4, si $m \leq f'(t) \leq M$ en $\operatorname{int}(I)$, entonces, para $x < y$ en I, $m(y - x) \leq f(y) - f(x) \leq M(y - x)$. R3 entrega el valor $f'(c)$ dentro de esas cotas y multiplicar por $y - x > 0$ conserva el orden. No hace falta que f' sea continua ni alcance un máximo. Si $|f'| \leq L$, $L \geq 0$, se obtiene para todos los pares $|f(y) - f(x)| \leq L|y - x|$. Para $x = y$ ambos lados son cero; si $y < x$ se intercambian las entradas. Ésta es una cota Lipschitz de pares, más fuerte que el control con un único centro de C18. Para $L > 0$, el radio ε/L prueba continuidad uniforme; si $L = 0$, la función es constante y cualquier radio sirve.

Para el cubo en $[-A, A]$, con $A > 0$, la derivada $3t^2$ queda entre cero y $3A^2$. Por R5, cualquier par tiene error de salida a lo sumo $3A^2$ veces su distancia. Si $A = 0$, el dominio es un singleton y la uniformidad se verifica directamente. La raíz en $[\alpha, \beta]$, con $0 < \alpha < \beta$, es continua y tiene derivada $1/(2\sqrt{t})$ en el interior; el denominador está separado de cero y da la barrera $1/(2\sqrt{\alpha})$. Sobre $[0, 1]$ no hay una constante Lipschitz finita para la raíz, pues los cocientes $1/\sqrt{y}$ respecto de cero superan cualquier cota. El radio cuadrático de C17 sigue demostrando continuidad uniforme en ese dominio.

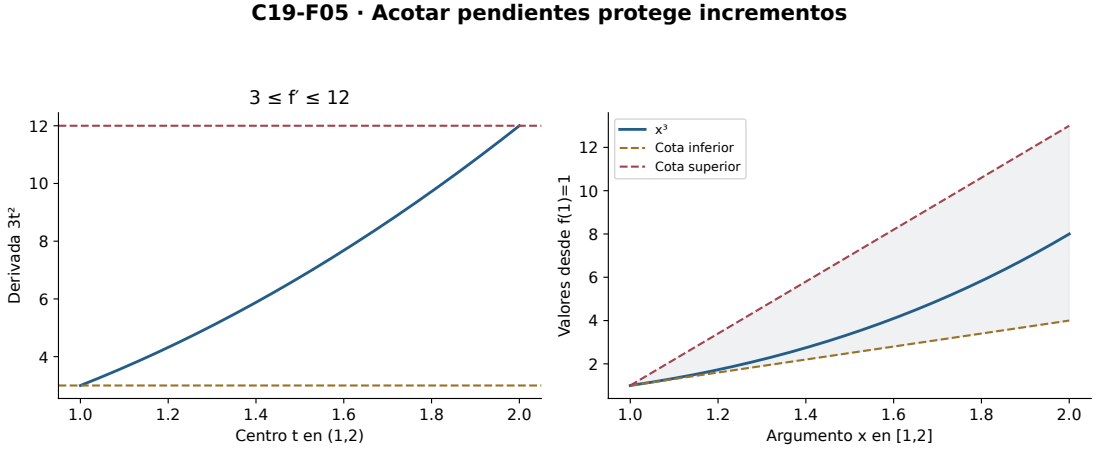


Figura 19.5. Para el cubo en [1,2], $3 \le f' \le 12$ en el interior. R5 da $3(y-x) \le f(y)-f(x) \le 12(y-x)$ para cualquier par ordenado. El panel derecho representa el caso de centro uno, con bandas $1+3(x-1)$ y $1+12(x-1)$. Las fórmulas prueban las cotas universales; un muestreo de la derivada no bastaría.

Podemos aplicar la misma herramienta al error de una recta. Si su pendiente es A y conocemos $|f'(t) - A| \le \eta$ en todos los puntos interiores entre a y x, definimos $H(t) = f(t) - f(a) - A(t-a)$. Con continuidad en ese segmento y derivabilidad en su interior, R5 da $|f(x) - f(a) - A(x-a)| \le \eta|x-a|$. En efecto, $H(a) = 0$ y $|H'| \le \eta$ en todo el interior; si $x = a$, el error se comprueba directamente y es cero. La derivada conocida sólo en a no da por sí sola esta barrera de derivadas en otros centros. El certificado requiere ese control adicional, sin afirmar una tasa cuadrática ni recurrir a Taylor o a una segunda derivada.

Si partimos de una cota Lipschitz L y existe $f'(a)$ en un centro acumulante, todos sus cocientes perforados tienen magnitud a lo sumo L. C13 conserva esa cota al tomar el límite y obtenemos $|f'(a)| \le L$. La existencia del límite sigue siendo una premisa: el valor absoluto es Lipschitz y tiene secantes de pendientes incompatibles en cero. Del mismo modo, una tabla finita de pendientes no acredita una barrera sobre todos los centros que pueda usarse en R5.

Ejercicios de la sección 19.5.

Ejercicio 21. Dos cotas de incrementos

Deriva las cotas $m(y-x) \le f(y) - f(x) \le M(y-x)$ desde cotas de derivada en un intervalo. Indica cómo tratar pares no ordenados para una cota absoluta.

Solución. Para $x < y$, Lagrange da $c \in (x,y)$ con $f(y) - f(x) = f'(c)(y-x)$. Sustituir $m \le f'(c) \le M$ y multiplicar por $y - x > 0$ conserva el orden, obteniendo las dos cotas de incremento. Si $-L \le f' \le L$ con $L \ge 0$, se concluye $|f(y) - f(x)| \le L(y-x)$. Para $y < x$ intercambiamos entradas y usamos simetría de magnitudes; para $x = y$ ambos lados son cero. Así la cota absoluta vale para todos los pares. Continuidad en bordes incluidos permite usar segmentos que los contengan.

Ejercicio 22. Cubo y radio común

Da una constante Lipschitz y un radio uniforme para x^3 en $[-2,2]$ usando la derivada.

Solución. El cubo es continuo en $[-2,2]$ y derivable en su interior. Allí $f'(t) = 3t^2$ satisface $0 \le f'(t) \le 12$, porque $|t| \le 2$. La cota de incrementos da $|y^3 - x^3| \le 12|y-x|$ para cualquier par del segmento. Para $\varepsilon > 0$, el radio $\delta = \varepsilon/12$ convierte distancia estrictamente menor que él en error menor que ε. La constante controla toda la región antes de conocer el par. No se afirma esa barrera global en la recta no acotada.

Retorno visual. Véase C19-F05, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 23. Una frontera rompe el certificado

Para la función de E008, prueba que la derivada interior acotada por uno no da ninguna cota Lipschitz finita en todo $[0,1]$.

Solución. En cada centro interior la función u coincide localmente con la identidad y $u' = 1$. Supongamos una constante Lipschitz finita $L \geq 0$ en todo $[0,1]$. Tomemos $x = (L+1)/(L+2) \in (0,1)$ y $y = 1$. Como $u(y) = 0$ y $u(x) = x$, tenemos $|u(y) - u(x)| = (L+1)/(L+2) > L/(L+2) = L|y-x|$, contradicción. La discontinuidad del borde invalida Lagrange en esos segmentos. Una cota interior de derivada no sustituye continuidad de la función en los bordes.

Ejercicio 24. La raíz lejos de cero

Da una constante Lipschitz para la raíz en $[1/4, 4]$ y explica por qué no puede extenderse una cota finita a $[0,1]$.

Solución. La raíz es continua en $[1/4, 4]$ y tiene derivada $1/(2\sqrt{t})$ en los centros interiores. Como $\sqrt{t} \geq 1/2$, esa derivada tiene magnitud a lo sumo uno. Valor medio da $|\sqrt{y} - \sqrt{x}| \leq |y-x|$, así sirve constante Lipschitz uno. En $[0,1]$, dado $L > 0$, un $0 < y < \min(1, 1/(L+1)^2)$ cumple $\sqrt{y}/y = 1/\sqrt{y} > L$, refutando la cota con el par $(0, y)$. Para $L = 0$ también falla cualquier $y > 0$. La raíz sigue siendo uniforme mediante el radio cuadrático de C17.

Ejercicio 25. Una pendiente cercana en todos los centros

Si $|f'(t) - A| \leq \eta$ en el interior de un segmento con centro a y extremo x, prueba error de modelo a lo sumo $\eta|x-a|$. ¿Qué dato no basta?

Solución. En el segmento entre a y x, definimos $H(t) = f(t) - f(a) - A(t-a)$. Es continua y derivable donde corresponde, con $|H'(t)| = |f'(t) - A| \leq \eta$ en todo el interior. La cota de pares da $|H(x) - H(a)| \leq \eta|x-a|$, y $H(a) = 0$ produce el error solicitado. Si $x = a$, la igualdad de valor se verifica directamente. Saber sólo $f'(a) = A$ no acredita la premisa sobre las otras derivadas. El certificado utiliza ese control adicional y no Taylor.

19.6. Comparar dos variaciones en el mismo punto

Para comparar dos variaciones podríamos aplicar Lagrange a cada función, pero obtendríamos dos testigos que no tienen por qué coincidir. Si queremos relacionar sus derivadas en un mismo centro, debemos combinar las dos variaciones antes de aplicar Rolle. Los incrementos de borde proporcionan los coeficientes de esa combinación. **R6 — Valor medio de Cauchy, sin divisiones.** Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, continuas en el segmento y derivables en su interior. Existe $c \in (a,b)$ con $[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c)$. Escribamos los incrementos determinados por los bordes como $\Delta f, \Delta g$. Definimos $H(x) = \Delta g\,[f(x) - f(a)] - \Delta f\,[g(x) - g(a)]$. Entonces $H(a) = H(b) = 0$, es continua en todo el segmento y derivable dentro, con $H'(x) = \Delta g f'(x) - \Delta f g'(x)$ por C18. Los coeficientes son constantes, no funciones del argumento. Rolle aplicado a H produce la igualdad. La construcción no divide por ningún incremento o derivada y admite los casos nulos.

Para pasar a cocientes añadimos la condición $g'(t) \neq 0$ en todo (a,b). Si los bordes de g fueran iguales, Rolle produciría una derivada nula interior y contradiría esa premisa; por tanto $\Delta g \neq 0$. El punto c entregado por R6 también cumple $g'(c) \neq 0$. Con ambos denominadores justificados podemos dividir la igualdad cruzada y obtener $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{\Delta f}{\Delta g}$. Sin la no anulación, la igualdad de productos permanece definida aunque algún cociente no exista. Cuando g es constante, por ejemplo, su incremento y su derivada son cero y la forma cruzada dice $0 = 0$.

En $[0,1]$, las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$ tienen incrementos uno. Sus aplicaciones separadas de Lagrange dan los puntos únicos $1/2$ y $1/\sqrt{3}$, que son distintos. La condición de Cauchy es otra ecuación: $3c^2 = 2c$ y, como $c > 0$, su testigo es $c = 2/3$. Allí ambas derivadas valen $4/3$ y su razón es uno, igual a la de incrementos. El par $(g(x), f(x))$ permite representar esa comparación intercambiando las coordenadas de salida; el argumento sigue

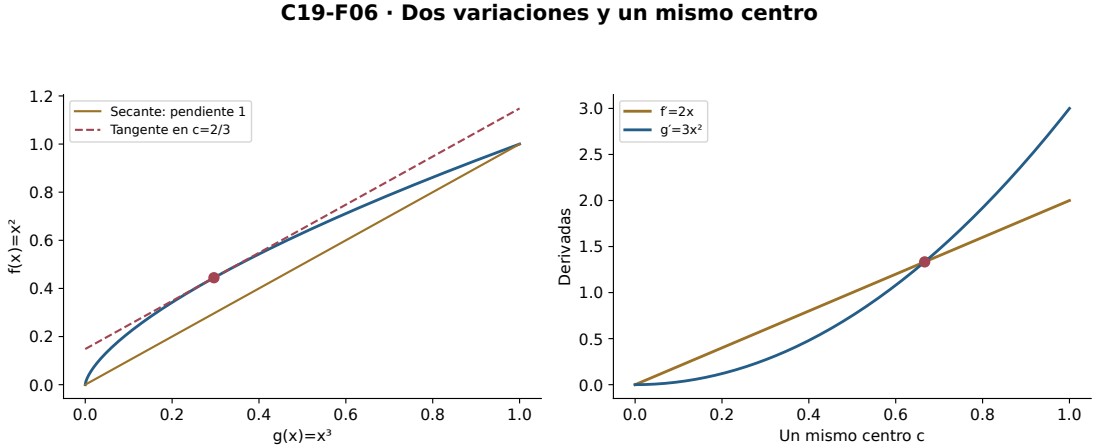


Figura 19.6. Para f=x² y g=x³ en [0,1], ambos incrementos valen uno y Cauchy se satisface en c=2/3. El par (g(c),f(c))=(8/27,4/9) tiene tangente de pendiente f′/g′=1, paralela a la secante de bordes. El gráfico representa el par por su argumento x, sin introducir una regla nueva para curvas. Los puntos de Lagrange separados son $1/2$ y $1/\sqrt{3}$.

siendo la aplicación de Rolle a una función real auxiliar y no necesita teoría de curvas parametrizadas.

Un incremento no nulo tampoco basta por sí solo para dividir en cualquier testigo. Para $f = g = x^3$ en $[-1, 1]$, ambos incrementos valen dos y el producto cruzado se cumple en todo el interior. En cero, sin embargo, las dos derivadas valen cero y su razón no existe. Podríamos verificar una derivada no nula en un testigo concreto o usar la premisa universal anterior. Tomando $g(x) = x$, cuyo incremento $b-a$ es positivo y cuya derivada es uno, ambas divisiones están protegidas y recuperamos Lagrange.

Ejercicios de la sección 19.6.

Ejercicio 26. Productos cruzados antes de cocientes

Construye la auxiliar de Cauchy y prueba la forma sin divisiones del valor medio.

Solución. Fijemos $\Delta f = f(b) - f(a)$ y $\Delta g = g(b) - g(a)$. La auxiliar $H(x) = \Delta g(f(x) - f(a)) - \Delta f(g(x) - g(a))$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Sus bordes son cero y su derivada es $H' = \Delta g\, f' - \Delta f\, g'$, pues los coeficientes están fijados. Rolle proporciona c interior con $H'(c) = 0$, equivalente a $\Delta f\, g'(c) = \Delta g\, f'(c)$. No se divide por incrementos ni derivadas, por lo que la identidad incluye sus posibles anulaciones.

Ejercicio 27. Tres puntos diferentes

Para $f = x^2, g = x^3$ en $[0, 1]$, compara sus dos puntos de Lagrange con el punto de Cauchy.

Solución. Para $f = x^2$ y $g = x^3$ en $[0, 1]$, ambos incrementos son uno. Lagrange para la primera resuelve $2c = 1$ y da $c = 1/2$; para la segunda resuelve $3c^2 = 1$ y da $c = 1/\sqrt{3}$. Son distintos porque $1/4 \neq 1/3$. Cauchy exige $3c^2 = 2c$ y la interioridad excluye cero, dejando $c = 2/3$. Allí las dos derivadas valen $4/3$. Dos existencias separadas no garantizaban un centro compartido; la auxiliar cruzada sí lo proporciona.

Retorno visual. Véase C19-F06, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 28. Legitimar ambas divisiones

Bajo $g'(t) \neq 0$ en todo (a, b), prueba que la forma de cocientes de Cauchy está definida.

Solución. Si $\Delta g = 0$, la igualdad de bordes y las demás premisas permitirían aplicar Rolle a g, produciendo una derivada nula interior. Eso contradice $g'(t) \neq 0$ para todo $t \in (a, b)$, así $\Delta g \neq 0$. El testigo c de Cauchy también cumple $g'(c) \neq 0$. Ahora se divide la igualdad cruzada por $\Delta g\, g'(c)$ y se obtiene $f'(c)/g'(c) = \Delta f/\Delta g$. Las dos divisiones se justifican por separado: un incremento no nulo por sí solo no protege toda derivada.

Ejercicio 29. Un incremento nulo

Aplica la forma cruzada a $f(x) = x$, $g(x) = x(1-x)$ en $[0, 1]$. Localiza el punto y explica por qué la razón de incrementos no está definida.

Solución. Para $f(x) = x$ y $g(x) = x(1-x)$, se tiene $\Delta f = 1$ y $\Delta g = 0$. La igualdad cruzada exige $g'(c) = 0$. Como $g'(c) = 1-2c$, el único centro interior válido es $c = 1/2$. Allí $f'(c) = 1$ y $g'(c) = 0$, de modo que los productos cruzados son ambos cero. Las razones por Δg o por $g'(c)$ no están definidas. La forma general conserva una conclusión correcta que la división no puede expresar aquí.

Ejercicio 30. Un testigo donde no se puede dividir

Para $f = g = x^3$ en $[-1, 1]$, explica por qué $\Delta g \neq 0$ no autoriza dividir la identidad de Cauchy en cualquier punto que la satisfaga.

Solución. Si $f = g = x^3$ en $[-1, 1]$, ambos incrementos valen dos y ambas derivadas son $3c^2$. Por ello la igualdad cruzada se satisface en cualquier centro interior. En $c = 0$, las dos derivadas valen cero y su razón sería $0/0$, indefinida, aunque $\Delta g = 2 \neq 0$. Un centro interior no nulo sí permite dividir en este ejemplo, pero un testigo arbitrario no ofrece esa garantía. Para hacerlo se verifica su derivada concreta o se usa la premisa universal de no anulación.

19.7. Darboux: discontinuidad sin saltar valores

La derivada discontinua construida en C18 conserva una propiedad que una función arbitraria discontinua puede perder: entre dos de sus valores alcanza todos los niveles intermedios. Para demostrarlo volveremos a los extremos de una función continua auxiliar. La continuidad disponible será la de la función original derivable, sin suponer continuidad de su derivada. **R7 — Darboux.** Sea $f : I \to \mathbb{R}$ derivable en todos los puntos de un intervalo abierto I. Para $u < v$ en I y un real λ estrictamente entre $f'(u)$ y $f'(v)$, existe $c \in (u, v)$ con $f'(c) = \lambda$.

Supongamos primero $f'(u) < \lambda < f'(v)$ y pongamos $H(x) = f(x) - \lambda x$. La ecuación buscada equivale a $H'(c) = 0$, y en los bordes del segmento tenemos $H'(u) < 0 < H'(v)$. El signo negativo en u proporciona un radio δ_u con cocientes negativos. La entrada $t = u + \min(\delta_u, v - u)/2$ pertenece a (u, v) y satisface $H(t) < H(u)$, porque su incremento es positivo. En v, el signo positivo da un radio δ_v; la entrada $s = v - \min(\delta_v, v - u)/2$ tiene incremento negativo y cociente positivo, de donde $H(s) < H(v)$. Por tanto ninguno de los bordes minimiza H sobre $[u, v]$.

Por C18, H es continua en todos los puntos del segmento y su restricción también lo es. C16 garantiza un mínimo alcanzado, y las dos comparaciones anteriores obligan a que alguno de sus argumentos sea $c \in (u, v)$. Este mínimo sobre el segmento es local para la función original: una bola suficientemente pequeña de c queda en (u, v). Fermat da $H'(c) = 0$ y, por ello, $f'(c) = \lambda$. Si los valores están en el orden opuesto, $f'(u) > \lambda > f'(v)$, aplicamos el caso probado a $-f$ y al nivel $-\lambda$, o usamos un máximo de la misma auxiliar. Un minimizador para este segmento basta; no reunimos una familia de ellos.

Si f' nunca se anula en I, tampoco puede tomar valores de signos opuestos: cero sería un nivel estrictamente intermedio y Darboux obligaría a alcanzarlo. En un intervalo no vacío fijamos un punto y su signo no nulo; el opuesto queda excluido en todos los demás. R4 convierte ese signo común en monotonía estricta de f. La no anulación no proporciona por sí sola una barrera positiva uniforme para $|f'|$.

La familia de bultos de C18 es derivable en toda la recta y cumple $F'(0) = 0$, mientras $F'(x_n) = -3/2$ para puntos $x_n \to 0$. Darboux obliga a alcanzar cada valor de $(-3/2, 0)$ entre

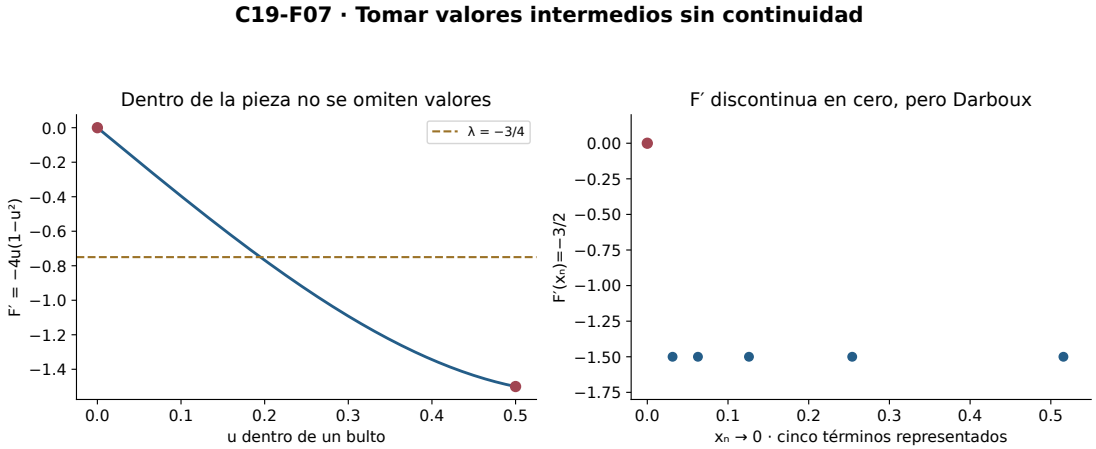


Figura 19.7. En un bulto de C18, F′=−4u(1−u²) y entre u=0 y u=1/2 aparecen todos los valores entre cero y −3/2. La familia completa tiene F′(0)=0 y F′(x_n)=−3/2 con x_n→0, así no es continua en cero. Se representan cinco términos; R7 garantiza todos los valores intermedios entre los centros por una prueba de extremos, sin suponer continuidad de F′.

cero y cada x_n, aunque las derivadas de esa ruta sigan separadas del valor central. Dentro de un bulto, el perfil $-4u(1-u^2)$ permite reconocer esa variación; la propiedad para toda la función se obtiene de R7, no de una pieza dibujada. Así pueden coexistir discontinuidad y valores intermedios. Un escalón que sólo tome -1 y 1 omitiendo cero no podría ser una derivada existente en todos los puntos de un intervalo que contenga ambos lados.

Ejercicios de la sección 19.7.

Ejercicio 31. Excluir los bordes de un mínimo

Si $H'(u) < 0 < H'(v)$ y H es derivable en un intervalo abierto que contiene $[u, v]$, prueba que alcanza un mínimo interior en ese segmento.

Solución. El límite negativo de secantes en u entrega $\delta_u > 0$ con cocientes negativos. La entrada $t = u + \min(\delta_u, v-u)/2$ está dentro del segmento y cumple $H(t) < H(u)$. En v, el límite positivo entrega $\delta_v > 0$; la entrada $s = v - \min(\delta_v, v-u)/2$ tiene incremento negativo y secante positiva, así $H(s) < H(v)$. Derivabilidad implica continuidad y Weierstrass da un mínimo alcanzado en $[u, v]$. Ningún borde puede alcanzarlo, de modo que un minimizador c es interior y también un mínimo local de la función original.

Ejercicio 32. Una derivada intermedia sin suponer continuidad

Prueba Darboux para $f'(u) < \lambda < f'(v)$ y explica cómo tratar el orden opuesto.

Solución. Sea $H(x) = f(x) - \lambda x$. Cuando $f'(u) < \lambda < f'(v)$, sus derivadas de borde cumplen $H'(u) < 0 < H'(v)$. El argumento anterior localiza un mínimo interior de H en $[u, v]$; Fermat da $H'(c) = 0$ y por ello $f'(c) = \lambda$. La continuidad usada es la de H, consecuencia de derivabilidad de f, sin suponer continuidad de f'. Si las derivadas están en orden opuesto, aplicamos el caso probado a $-f$ y $-\lambda$ y traducimos la igualdad al signo original.

Ejercicio 33. Continuidad y ausencia de saltos

Usa la familia de bultos de C18 para distinguir continuidad de derivada y propiedad de Darboux. Explica qué valores deben aparecer entre cero y cada x_n.

Solución. La función de bultos es derivable en toda la recta, con $F'(0) = 0$ y $F'(x_n) = -3/2$ para una ruta $x_n \to 0$. Esta ruta refuta continuidad de F' en cero. Sin embargo, Darboux se aplica entre cero y cada $x_n > 0$: para cualquier $\lambda \in (-3/2, 0)$ existe un centro estrictamente entre ambos con $F' = \lambda$. El testigo puede depender del nivel y del índice. Alcanzar esos valores intermedios no obliga a que las derivadas de la ruta converjan al valor central.

Retorno visual. Véase C19-F07, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 34. Una derivada sin ceros tiene un signo

Prueba que una derivada no nula en un intervalo abierto tiene signo constante, sin asumir continuidad de esa derivada.

Solución. Si hubiera una derivada positiva y otra negativa en el intervalo abierto, cero estaría estrictamente entre sus valores. Darboux produciría un centro intermedio de derivada cero, contradiciendo la premisa. Para el intervalo no vacío fijamos un centro y su signo no nulo; el opuesto queda excluido en todos los demás. Por las reglas de signo, la función es estrictamente creciente o decreciente según ese signo. No se obtiene automáticamente una separación uniforme de las magnitudes de la derivada respecto de cero.

Ejercicio 35. Un escalón no puede ser una derivada

En $(-1,1)$, sea h menos uno para $x<0$ y uno para $x\geq 0$. Prueba que no existe una función derivable en todo ese intervalo con derivada h.

Solución. Supongamos una función derivable en $(-1,1)$ con derivada h. En $u=-1/2$ su derivada sería menos uno y en $v=1/2$ sería uno. Darboux aplicado al nivel cero entregaría $c\in(-1/2,1/2)$ con derivada cero. Pero h sólo toma menos uno y uno, contradicción. No se ha supuesto continuidad de h ni se ha utilizado el gráfico de su salto; se infringe una propiedad necesaria de toda derivada en un intervalo.

19.8. Certificar ceros y soluciones únicas

Para certificar una raíz necesitaremos tareas diferentes: asegurar que existe, impedir que haya otra y medir cuánto dista de un aproximante. Rolle puede descartar valores repetidos y contar ceros a partir de los de la derivada; la existencia de una raíz vendrá de continuidad y valor intermedio. Las cotas de incrementos convertirán después el residuo en un error de posición. **R8 — Ceros separados y unicidad.** Bajo las hipótesis de continuidad y derivabilidad sobre los segmentos de un intervalo I, si f' nunca vale cero en su interior, f es inyectiva. En efecto, $f(x)=f(y)$ con $x<y$ permitiría aplicar Rolle a $[x,y]$ y daría un cero de f' entre ellos. Si f' tiene a lo sumo k ceros distintos, $k\geq 0$ entero, f tiene a lo sumo $k+1$ ceros distintos. Si hubiera $k+2$, ordenamos esa lista finita; Rolle en cada uno de sus $k+1$ segmentos vecinos entrega un cero de f' en el respectivo interior. Son distintos porque esos interiores son disjuntos, contradicción. Sólo se instancian finitas existencias, sin una selección numerable.

Consideremos $p(x)=x^3+x-1$ en $[0,1]$. El polinomio es continuo y sus valores $p(0)=-1$ y $p(1)=1$ permiten aplicar el valor intermedio de C15 para obtener una raíz $r\in(0,1)$. Su derivada $3x^2+1\geq 1$ nunca se anula: R8 descarta otra raíz y R4 da crecimiento estricto. La raíz se obtuvo por continuidad; Rolle y el signo de derivada aportan unicidad y orden.

Los valores exactos $p(1/2)=-3/8$ y $p(3/4)=11/64$ sitúan la única raíz en $(1/2,3/4)$: el valor intermedio produce una raíz en ese subsegmento y la unicidad la identifica con r. Para el aproximante $x=2/3$ tenemos $p(x)=-1/27$; como p crece y $p(r)=0$, resulta $x<r$. Todos los puntos del segmento entre ellos están en $[1/2,3/4]$, donde $1/4\leq t^2\leq 9/16$ y, por tanto, $\frac{7}{4}\leq p'(t)\leq\frac{43}{16}$. R5 aplica esas dos barreras al incremento entre x y r: $\frac{7}{4}(r-x)\leq p(r)-p(x)=\frac{1}{27}\leq\frac{43}{16}(r-x)$, y al dividir por constantes positivas obtenemos $\frac{16}{1161}\leq r-\frac{2}{3}\leq\frac{4}{189}$. La cota superior de derivada da aquí la cota inferior de distancia, y la inferior da la superior. En general, si $f'\geq m>0$ en el interior del segmento entre un aproximante x y una raíz r, con continuidad y derivabilidad donde corresponde, la cota de incrementos implica $m|x-r|\leq|f(x)-f(r)|=|f(x)|$. Así $|x-r|\leq|f(x)|/m$, sin localizar el punto de valor medio ni extraer cifras de un gráfico.

El número máximo de ceros permitido por R8 puede alcanzarse. Para $q(x)=x^3-3x$, la derivada $3x^2-3$ tiene exactamente los dos ceros $-1,1$, así que q tiene a lo sumo tres ceros distintos. La factorización $q(x)=x(x^2-3)$ y las raíces de C10 exhiben precisamente

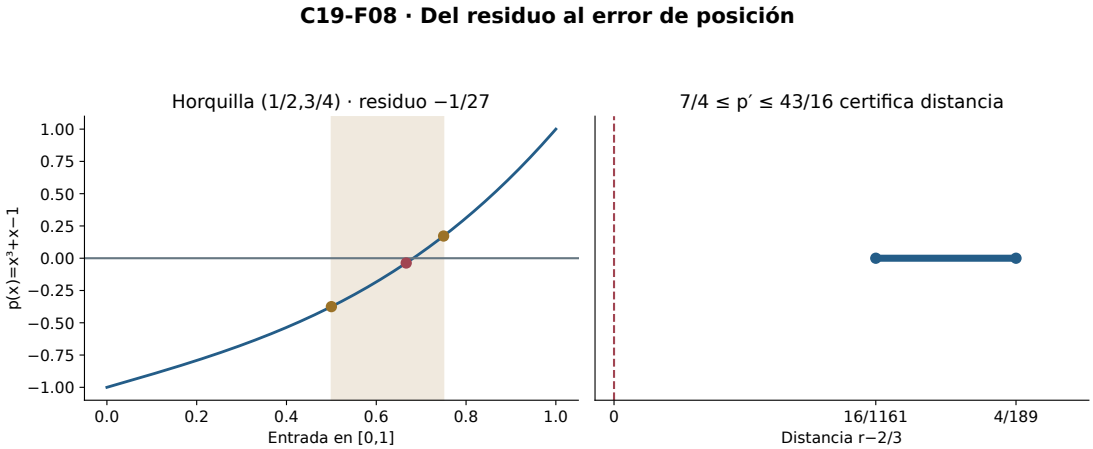


Figura 19.8. C15 garantiza la raíz r y Rolle su unicidad. Los signos exactos en 1/2 y 3/4 la encierran; p(2/3)=−1/27 la sitúa a la derecha del aproximante. Las cotas 7/4≤p′≤43/16 en ese segmento dan 16/1161≤r−2/3≤4/189. Los extremos de la banda son cotas cerradas, sin atribuir a r una coordenada numérica extraída del dibujo.

$-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$. El conteo sólo utiliza finitos segmentos de Rolle y no necesita derivadas de orden superior.

Para convertir estos argumentos en un certificado, la barrera de derivadas debe valer en todos los centros interiores pertinentes. Una tabla finita no impide que el punto de valor medio caiga en un centro no controlado. Del mismo modo, antes de aplicar Rolle entre dos valores iguales debemos conservar el segmento completo del dominio. La conclusión sobre ceros tiene una dirección precisa: de dos ceros de la función obtenemos uno de su derivada entre ellos; dos puntos estacionarios no aseguran por sí solos nuevas raíces de la función.

Ejercicios de la sección 19.8.

Ejercicio 36. Inyectividad desde Rolle

Prueba inyectividad de una función continua y derivable interiormente en un intervalo si su derivada nunca se anula. Trata la diferencia entre igualdad de valores y cero de la función.
Solución. Supongamos $f(x) = f(y)$ con $x < y$. Intervalaridad conserva todo $[x, y]$ en el dominio, continuidad se hereda y su interior dispone de derivadas. Rolle produce $c \in (x, y)$ con $f'(c) = 0$, contradicción. Así entradas distintas no tienen la misma salida y la función es inyectiva. El valor repetido no necesitaba ser cero. La conclusión sólo garantiza a lo sumo una solución por nivel; existencia de una solución requiere otro dato.

Ejercicio 37. Contar ceros por segmentos vecinos

Si f' tiene a lo sumo k ceros en el interior de un intervalo, prueba que f tiene a lo sumo k+1 ceros distintos bajo las hipótesis de R8.
Solución. Si hubiera $k + 2$ ceros distintos, ordenamos esa lista finita como $x_0 < \cdots < x_{k+1}$. Cada segmento vecino cumple Rolle y entrega $c_j \in (x_j, x_{j+1})$ con $f'(c_j) = 0$, para $j = 0, \ldots, k$. Sus interiores son disjuntos, así los $k + 1$ testigos son distintos y contradicen la cota k. Sólo se usan finitas aplicaciones, no una selección numerable de puntos. El recuento corresponde a raíces distintas y no a multiplicidades.

Ejercicio 38. Existencia, unicidad y primera horquilla

Para $p(x) = x^3 + x - 1$ en $[0, 1]$, prueba existencia y unicidad de un cero y enciérralo entre 1/2 y 3/4.

Solución. El polinomio $p = x^3 + x - 1$ es continuo, con $p(0) = -1$ y $p(1) = 1$. Valor intermedio da una raíz interior. Su derivada $p'(x) = 3x^2 + 1 \geq 1$ no se anula, así Rolle descarta dos raíces distintas y la raíz r es única. Además $p(1/2) = -3/8 < 0$ y $p(3/4) = 11/64 > 0$. Valor intermedio en ese subsegmento da una raíz en $(1/2, 3/4)$, que por unicidad es r. Existencia y localización proceden de continuidad; Rolle aporta la parte de unicidad.

Ejercicio 39. Un máximo de tres ceros que se alcanza

Usa la derivada de $q(x) = x^3 - 3x$ para acotar sus ceros y comprueba cuántos tiene. ¿Dos ceros de f' garantizan tres de f?

Solución. Para $q = x^3 - 3x$, la derivada $q' = 3x^2 - 3$ se anula exactamente en menos uno y uno. El recuento por Rolle limita a tres los ceros distintos de q. La factorización $q = x(x^2 - 3)$ muestra que $-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$ son esos tres ceros. La recíproca no vale: $Q = q + 10$ en $[-2, 2]$ conserva dos ceros interiores de derivada, pero $Q(-2) = 8$, $Q(-1) = 12$, $Q(1) = 8$, $Q(2) = 12$. Los signos de Q' en las tres piezas y las reglas de orden aseguran $Q \geq 8$ en todo ese dominio, sin ninguna raíz.

Ejercicio 40. Residuo convertido en distancia

Para la raíz única r de E038 y el aproximante $x = 2/3$, demuestra las cotas racionales $16/1161 \leq r - x \leq 4/189$.

Solución. La raíz r y $x = 2/3$ están en $(1/2, 3/4)$. Sustituir da $p(x) = -1/27$; el crecimiento estricto y $p(r) = 0$ implican $r > x$. En el segmento entre ambos, $1/4 \leq t^2 \leq 9/16$, así $7/4 \leq p'(t) \leq 43/16$. La cota de incrementos entrega $(7/4)(r - x) \leq 1/27 \leq (43/16)(r - x)$. Dividir por las constantes positivas produce $16/1161 \leq r - x \leq 4/189$. Las barreras de derivada se probaron para todos los centros pertinentes, sin identificar el testigo de valor medio ni usar cifras de un gráfico.

Retorno visual. Véase C19-F08, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Capítulo 20

Convexidad y control por tangentes y secantes

Entre dos puntos de la parábola, la cuerda queda por encima de la curva. Podemos medir esa diferencia con una identidad algebraica, sin conocer todavía sus derivadas. La comparación también tiene sentido para una curva con esquina, como el valor absoluto. Al exigirla para todas las entradas y todos los pesos aparecerá un orden de secantes que permitirá construir continuidad interior y rectas de soporte; las derivadas entrarán después, como otra forma de reconocer ese orden.

C18 aporta derivadas y sus reglas; C19 transporta pendientes por Lagrange, signo y constancia. Completitud para supremos, continuidad y raíces son interfaces heredadas de C03/C10/C14. C16 garantiza mínimos sólo cuando se añade continuidad sobre compacto. No se usa Taylor, integración ni nuevas reglas para potencias reales generales. Convexidad no supone derivabilidad o continuidad de borde; las extensiones al borde se justifican por separado.

20.1. Un segmento impone un orden

Fijemos dos entradas a, b de un intervalo I y un peso $t \in [0,1]$. El intervalo contiene la entrada combinada $z = (1-t)a + tb$, así que podemos evaluar $f(z)$ y compararlo con la altura interpolada $(1-t)f(a) + tf(b)$. En un procedimiento combinamos las entradas antes de evaluar; en el otro combinamos las salidas con los mismos pesos. La convexidad decidirá el orden entre esas dos alturas.

Una función real finita $f : I \to \mathbb{R}$ es **convexa** si, para todo $a, b \in I$ y todo $t \in [0,1]$, $f((1-t)a+tb) \le (1-t)f(a)+tf(b)$. Es **estrictamente convexa** si la desigualdad es estricta cuando $a \neq b$ y $0 < t < 1$. Las exclusiones son necesarias: si se repite la entrada o un peso es cero, ambos procedimientos coinciden. **Cóncava** significa la desigualdad opuesta; equivale a que $-f$ sea convexa. Estrictamente cóncava se define de la misma forma. No añadimos continuidad o derivabilidad a estas definiciones. En un singleton la condición estricta es vacía; los teoremas diferenciales siguientes trabajarán sobre intervalos abiertos no vacíos.

En el cuadrado, una expansión permite calcular exactamente cuánto supera la cuerda al valor de la función: $(1-t)a^2+tb^2-((1-t)a+tb)^2 = t(1-t)(b-a)^2$. El producto es no negativo para todos los pesos permitidos y es positivo cuando las entradas son distintas y el peso es interior. Esto demuestra convexidad estricta de x^2 en toda la recta y determina también los casos de igualdad. En una afín $A + Bx$ la diferencia es siempre cero: es convexa y cóncava, aunque no estrictamente convexa sobre ningún intervalo con dos entradas. Por la misma igualdad, sumar una afín a cualquier función deja intactas sus diferencias de convexidad.

El valor absoluto también es convexo. La desigualdad triangular y la homogeneidad para pesos no negativos dan $|(1-t)a + tb| \le (1-t)|a| + t|b|$. En el tramo positivo, el valor absoluto coincide con la identidad y da igualdad entre entradas distintas con pesos interiores. Es, por tanto, convexo sin ser estrictamente convexo. Tampoco es derivable en cero por C18. La definición mediante cuerdas incluye esa esquina porque sólo utiliza valores y sus comparaciones; no presupone una tangente.

Si f y g son convexas en el mismo intervalo, multiplicamos sus desigualdades por $\alpha, \beta \ge 0$ y las sumamos para obtener convexidad de $\alpha f + \beta g$. Un coeficiente negativo podría invertir la comparación y pierde esa garantía. Restringir a un subintervalo conserva las combinaciones y también la propiedad. La monotonía responde a otra comparación: x^2 decrece a la izquierda de cero y mantiene convexidad en toda la recta.

C20-F01 · La definición controla todas las cuerdas

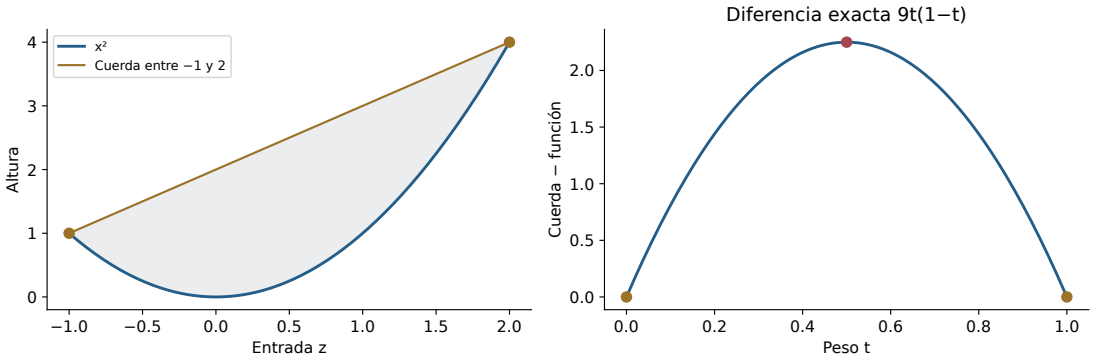


Figura 20.1. En el cuadrado, entre −1 y2, la cuerda es z+2. Para z=−1+3t su diferencia con z² es9t(1−t), positiva para0<t<1 y nula en bordes. La identidad prueba convexidad estricta; el muestreo sólo la representa.

La figura ilustra una cuerda y su diferencia exacta. La identidad anterior controla cualquier par de entradas y cualquier peso, que es la obligación universal de la definición; una colección finita de cuerdas dibujadas no la sustituye.

Ejercicios de la sección 20.1.

Ejercicio 1. La diferencia exacta de una cuerda

Para $f(x) = x^2$ y $z = (1-t)a+tb$, calcula la diferencia entre la altura de la cuerda y $f(z)$. Usa el resultado para decidir convexidad y sus casos de igualdad.

Solución. Expandimos $z^2 = (1-t)^2a^2 + 2t(1-t)ab + t^2b^2$. Restar de $(1-t)a^2 + tb^2$ deja $t(1-t)(a^2 - 2ab + b^2) = t(1-t)(b-a)^2$. En $0 \le t \le 1$ es no negativa y prueba convexidad en toda la recta. Se anula exactamente si $t = 0$, $t = 1$ o $a = b$. Cuando $0 < t < 1$ y $a \neq b$ es positiva, por lo que la convexidad es estricta.

El cálculo da una identidad para todos los pesos de la definición, no sólo una comparación en el punto medio. La positividad de cada factor determina estrictitud y la anulación identifica los casos triviales. Así la misma expansión acredita convexidad débil, estricta y sus igualdades sin utilizar derivadas.

Ejercicio 2. Una esquina bajo sus cuerdas

Demuestra que $|x|$ es convexa y no estrictamente convexa. Identifica además por qué no admite derivada bilateral en cero.

Solución. Para pesos no negativos, la triangular da $|(1-t)a + tb| \le |(1-t)a| + |tb| = (1-t)|a| + t|b|$. Vale para todas las entradas y pesos de la definición. Entre $a = 1$ y $b = 2$, la función es x, de modo que cualquier peso interior da igualdad; falla convexidad estricta. En cero, el cociente $|h|/h$ es1 para $h > 0$ y−1 para $h < 0$. Sus límites laterales distintos excluyen derivada bilateral. Es una función convexa continua con esquina, no una excepción a la definición.

Los pesos no negativos permiten sacar sus factores de los valores absolutos sin cambiar signo. El tramo positivo afín proporciona un par que refuta estrictitud, mientras las secantes de ambos lados de cero refutan derivabilidad. Son dos fallos distintos que no afectan la desigualdad convexa ya demostrada. **Retorno visual.** Véase C20-F01, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 3. Sumar sin invertir el orden

Sean f, g convexas sobre I. Demuestra convexidad de $\alpha f+\beta g$ para $\alpha, \beta \ge 0$ y de $f+A+Bx$. Exhibe una falla si se permite un coeficiente negativo.

Solución. Aplicamos convexidad de cada función en $z = (1-t)a + tb$, multiplicamos por α, β no negativos y sumamos. La salida queda acotada por la combinación de salidas de $\alpha f + \beta g$. La recta satisface igualdad en cada combinación, por lo que sumarla conserva la diferencia de convexidad de f. Un coeficiente negativo invierte la comparación: con $f = x^2$ y $\alpha = -1$, en $a = -1$, $b = 1$, $t = 1/2$ la salida de $-f$ es0 y la media de salidas es-1. La desigualdad $0 \leq -1$ es falsa.

La suma de desigualdades conserva el control porque sus coeficientes no invierten el orden. Agregar una afín contribuye con igualdad y deja intacta la diferencia convexa. El ejemplo negativo elimina exactamente esa condición de signo. No demuestra que ninguna combinación con coeficiente negativo pueda ser convexa, sino que se pierde la garantía universal.

Ejercicio 4. Una subida que no decide curvatura

Compara monotonía y convexidad de x^2 y x^3 sobre $\mathbb{R}$ sin invocar el criterio de segunda derivada.

Solución. El cuadrado es estrictamente convexo por E001. No es no decreciente en toda la recta: $-2 < -1$ pero4>1. El cubo es estrictamente creciente porque, para $x < y$, $y^3 - x^3 = (y-x)(x^2+xy+y^2) > 0$; el segundo factor sólo podría ser cero si ambos fueran cero, imposible con $x < y$. No es convexo en toda la recta: para entradas-2 y0 y peso$1/2$, la salida en-1 es-1, mayor que la media-4. Monotonía ordena dos salidas; convexidad compara una salida intermedia con una altura interpolada.

En el cuadrado, alturas decrecientes del lado negativo conviven con convexidad estricta. En el cubo, el crecimiento de todos los pares convive con una comparación de cuerda que falla. Las identidades y el contraejemplo de valores bastan para separar propiedades, sin usar un criterio diferencial futuro.

Ejercicio 5. Supremo de curvas convexas

Sea una familia no vacía (f_j) de funciones convexas sobre el mismo intervalo. Supón que $F(x) = \sup_j f_j(x)$ es real finito para cada x. Prueba convexidad de F. Explica las condiciones de no vaciedad y finitud.

Solución. Para cada j, $f_j(z) \leq (1-t)f_j(a) + tf_j(b) \leq (1-t)F(a) + tF(b)$, porque los pesos son no negativos. El lado derecho es una cota superior real común; tomar el supremo de los valores en z produce $F(z) \leq (1-t)F(a) + tF(b)$. La familia no vacía permite el supremo real de un conjunto de valores no vacío y la hipótesis de finitud evita un valor infinito fuera del codominio declarado. No se exige que un índice alcance el supremo. Las rectas son un caso particular.

Para cada índice se obtiene la misma cota superior en la entrada combinada, formada con los dos supremos de borde. El supremo de valores allí no puede superar esa cota. La prueba no supone un índice que maximice cada altura ni reúne elecciones de índices para las entradas. La finitud declarada mantiene la función resultante con valores reales.

20.2. Tres pendientes y una rigidez

Para traducir esa comparación de alturas a pendientes, tomemos tres entradas ordenadas $u < v < w$ de I. La entrada central se expresa como una combinación interior de las otras dos, y sus coeficientes son las proporciones de las longitudes: $S(u,v) = \frac{f(v)-f(u)}{v-u}$, $v = \frac{w-v}{w-u}u + \frac{v-u}{w-u}w$. Los denominadores son positivos. Aplicar convexidad en v y multiplicar por $w-u$ produce

$(w-u)f(v) \leq (w-v)f(u) + (v-u)f(w)$. Restar los términos correspondientes y dividir por productos positivos da $S(u,v) \leq S(u,w) \leq S(v,w)$. La diferencia total de valores es la suma de los incrementos de sus dos piezas. Por eso $S(u,w)$ es la media ponderada de $S(u,v)$ y $S(v,w)$ con pesos $(v-u)/(w-u)$ y $(w-v)/(w-u)$, ambos positivos y de suma uno. La cadena equivale entonces a ordenar las dos pendientes cortas: $S(u,v) \leq S(v,w)$. En sentido inverso, multiplicar esta desigualdad por $(v-u)(w-v) > 0$ y reagrupar los términos recupera la comparación de cuerda en v. Cada combinación interior puede escribirse como un triple

así; las entradas coincidentes y los pesos extremos se verifican por igualdad. La equivalencia queda demostrada sólo con álgebra.

Si la convexidad es estricta, la comparación de altura en v es estricta y las operaciones con denominadores positivos conservan ese signo. Las dos pendientes cortas quedan estrictamente ordenadas y su media larga queda entre ambas, también estrictamente; el argumento inverso recupera convexidad estricta. Para el cuadrado, $S(u,v) = u+v$: con entradas $0, 1, 3$ aparecen $1 < 3 < 4$, y la pendiente larga es $(1/3)1 + (2/3)4 = 3$.

La igualdad interior impone una restricción adicional. Sea f convexa en $[a,b]$, con $a < b$, y supongamos que coincide con su cuerda ℓ en algún $z \in (a,b)$. La diferencia $h = \ell - f$ es cóncava, no negativa en todo el segmento y satisface $h(a) = h(z) = h(b) = 0$. Veremos que no puede conservar una altura positiva en ninguno de los lados del contacto.

Si $a < x < z$, escribimos $z = \theta x + (1-\theta)b$, donde $\theta = (b-z)/(b-x) \in (0,1)$. La concavidad da $0 = h(z) \geq \theta h(x) + (1-\theta)h(b) = \theta h(x)$, así que la no negatividad obliga a $h(x) = 0$. Si $z < x < b$, usamos $z = (1-\eta)a + \eta x$, con $\eta = (z-a)/(x-a) \in (0,1)$, y obtenemos $0 \geq \eta h(x)$ y la misma conclusión. Los bordes y z ya tenían valor cero: f coincide con la cuerda en todo $[a,b]$.

Este argumento demuestra la **rigidez de una cuerda**: una igualdad interior en una función convexa obliga a un tramo afín completo. En consecuencia, una función convexa es estrictamente convexa exactamente cuando no es afín en ningún subsegmento no degenerado. No se requiere segunda derivada, y un tramo recto puede aparecer sin que toda la función sea una recta.

C20-F02 · Tres pendientes y una igualdad rígida

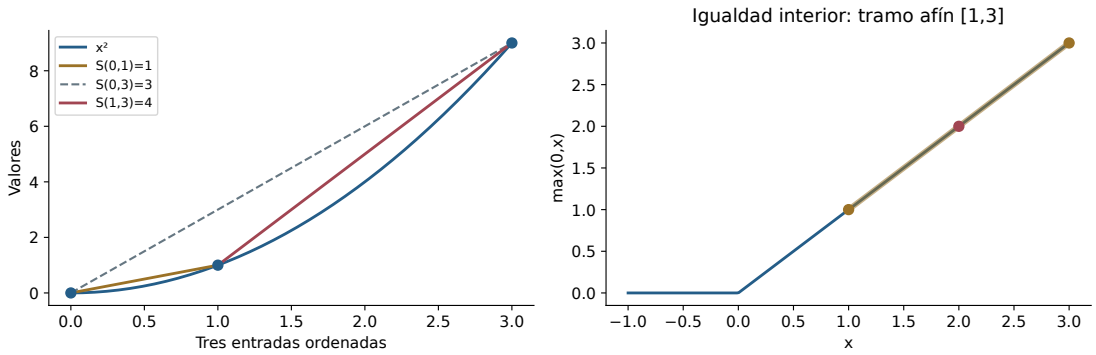


Figura 20.2. El cuadrado tiene pendientes1,3,4 para las cuerdas de0,1,3. La secante larga es una media ponderada de las cortas. En max(0,x), el contacto interior con la cuerda de1 a3 fuerza afinidad en ese segmento; no obliga a una recta en todo el dominio.

El orden de triples también permite mover un extremo dejando el otro fijo. Con centro c, la pendiente $S(c,x)$ no decrece al aumentar $x > c$, y $S(x,c)$ no decrece al aumentar $x < c$. Al acercarnos a c por cada lado recorreremos estas familias en direcciones diferentes. Sus cotas óptimas proporcionarán los dos límites laterales.

Ejercicios de la sección 20.2.

Ejercicio 6. Reconstruir la cuerda desde pendientes

Para $u < v < w$, demuestra algebraicamente que $S(u,v) \leq S(v,w)$ equivale a la desigualdad de convexidad en v entre u, w. Recupera también el orden de la secante larga.

Solución. Multiplicamos por $(v-u)(w-v)>0$: $(w-v)(f(v)-f(u)) \le (v-u)(f(w)-f(v))$. Agrupar $f(v)$ da $(w-u)f(v) \le (w-v)f(u)+(v-u)f(w)$. Dividir por $w-u$ da la cuerda en v, con pesos positivos que suman1. A su vez $S(u,w) = [(v-u)S(u,v)+(w-v)S(v,w)]/(w-u)$; una media con pesos positivos de dos valores ordenados está entre ellos. Por ello $S(u,v) \le S(u,w) \le S(v,w)$.

Las longitudes de los dos tramos son estrictamente positivas y legitiman todas las multiplicaciones y divisiones. El reordenamiento produce exactamente los pesos de la entrada intermedia. La secante larga es una media de las cortas y conserva su banda. Esta equivalencia es algebraica y no requiere derivadas.

Ejercicio 7. Tres pendientes del cuadrado

Calcula las pendientes de x^2 entre las entradas0,1,3. Comprueba su orden y relaciona cada una con la fórmula general $S(u,v)$.

Solución. Para el cuadrado, $(v^2-u^2)/(v-u) = u+v$ cuando $u<v$. Las pendientes cortas son $S(0,1)=1$ y $S(1,3)=4$; la larga es $S(0,3)=3$. Se obtiene1<3<4. La media ponderada es $(1/3)1 + (2/3)4 = 3$. La desigualdad estricta concuerda con convexidad estricta; una secante larga no toma por definición la pendiente de una de sus piezas.

Cancelar la diferencia de entradas exige extremos distintos, cumplido en las tres secantes. Las longitudes uno y dos se convierten en pesos un tercio y dos tercios para la larga. El resultado tres queda estrictamente entre uno y cuatro. Esa cuenta muestra por qué una secante larga no coincide necesariamente con ninguna de sus partes. **Retorno visual.** Véase C20-F02, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 8. Una igualdad que se propaga

Sea f convexa en $[a,b]$, y sea ℓ la cuerda entre sus bordes. Si $f(z)=\ell(z)$ para un z interior, demuestra que $f=\ell$ en todo el segmento.

Solución. Ponemos $h = \ell - f$. Es cóncava, no negativa por la cuerda y nula en a, z, b. Para $a<x<z$, escribimos $z = \theta x + (1-\theta)b$, con $\theta = (b-z)/(b-x) > 0$. Concavidad da $0 = h(z) \ge \theta h(x)$, así $h(x)=0$. Para $z<x<b$, escribimos $z = (1-\eta)a + \eta x$, con $\eta = (z-a)/(x-a) > 0$ y obtenemos $0 \ge \eta h(x)$, de nuevo $h(x)=0$. La no negatividad descarta valores negativos y los puntos restantes ya eran ceros. La igualdad interior ha forzado un tramo afín completo.

La cuerda ya aporta $h \ge 0$ y la concavidad proporciona la desigualdad que propaga el contacto. Cada punto no central se relaciona con el contacto mediante el borde opuesto. Como su peso es positivo, una altura positiva sería incompatible con el cero de la combinación. Se concluye igualdad en todo el segmento, no fuera de él.

Ejercicio 9. Cero curvatura en una pieza

Construye una función convexa que no sea afín en toda $\mathbb{R}$ y que tenga una igualdad interior en alguna cuerda. Explica por qué no contradice E008.

Solución. Tomamos $f(x) = \max\{0, x\}$. Es convexa como supremo finito de las rectas0 y x por E005. En $[1,3]$ coincide con x, y en2 hay igualdad con la cuerda. No es afín en toda la recta: es0 para entradas negativas y x para positivas. E008 fuerza afinidad sólo en el segmento cuyos bordes e igualdad se fijaron, aquí $[1,3]$. No propaga la recta fuera de ese segmento.

Las dos rectas son una familia finita no vacía con supremo real en cada entrada. En la pieza positiva su máximo es la identidad y produce las igualdades pedidas. En la negativa es la constante cero, incompatible con una única regla afín global. La rigidez de una cuerda sólo utiliza el segmento cuyos datos se han fijado.

Ejercicio 10. Sin tramo recto, con desigualdad estricta

Prueba que una función convexa es estrictamente convexa si y sólo si no es afín en ningún subsegmento con extremos distintos.

Solución. Si es estrictamente convexa, una afinidad en un segmento no degenerado daría igualdad en cualquier combinación interior de sus bordes, contradicción. Para la otra dirección, si falla convexidad estricta, existen $a \neq b$ y un peso interior con igualdad: la convexidad débil ya excluye que el signo sea el contrario. Ordenamos a, b; la entrada combinada queda interior. E008 hace afín todo ese subsegmento. Contradice la ausencia de tramos afines. Las combinaciones triviales no intervienen.

La dirección recíproca parte de convexidad débil, que impide una desigualdad contraria. Un fallo de estrictitud interior debe por ello ser igualdad, y la rigidez la convierte en afinidad del tramo. La ausencia de tramos afines descarta ese caso. Los pesos extremos y entradas repetidas se excluyen porque siempre producen igualdad.

20.3. La convexidad fabrica continuidad

Para construir continuidad necesitamos una barrera de pendientes que funcione para todos los pares de una región. Sea f convexa y finita en un intervalo I, y fijemos $[c, d]$ en su interior, con $c < d$. Podemos tomar entradas exteriores $a < c < d < b$ de I. Las secantes entre esas anclas y la región interior encierran cualquier pendiente con $c \leq x < y \leq d$:

$S(a, c) \leq S(a, x) \leq S(x, y) \leq S(y, b) \leq S(d, b)$. Cuando $x = c$ o $y = d$, una comparación es simplemente igualdad; no se divide por cero. Los números exteriores son finitos porque los valores de f lo son y los denominadores son positivos. Definamos $L = \max\{|S(a, c)|,\ |S(d, b)|\}$. Toda pendiente de esa banda tiene magnitud a lo sumo L, de donde $|f(y) - f(x)| \leq L|y - x|$. Los pares iguales tienen incremento cero y los invertidos se cubren por simetría. Así la restricción a $[c, d]$ es Lipschitz: para $L > 0$ sirve el radio uniforme $\delta = \varepsilon/L$, y para $L = 0$ todas las salidas son iguales y cualquier radio positivo sirve. Cada centro interior puede situarse dentro de un segmento con margen a ambos lados, lo que prueba continuidad en él. El argumento no utilizó derivadas ni supuso previamente la continuidad que acaba de obtener.

El margen interior importa. En $[0, 1]$, la función que vale uno en cero y cero en toda entrada positiva es convexa: si la combinación es positiva, su salida es cero y no supera la media no negativa de salidas; si es cero, todas las entradas con peso positivo son cero y las dos alturas valen uno. Sin embargo, las entradas positivas que tienden a cero mantienen salida cero, distinta de $f(0) = 1$. La convexidad finita garantiza continuidad interior sin imponerla en un borde incluido.

Hay también pendientes laterales bien determinadas. Fijemos ahora $c \in \operatorname{int} I$ y consideremos $A = \sup_{x<c,\ x\in I} S(x, c)$, $\quad B = \inf_{y>c,\ y\in I} S(c, y)$. Como c es interior, las dos familias de secantes son no vacías. El orden de triples sitúa cada pendiente izquierda por debajo de cada pendiente derecha: una secante derecha fija acota superiormente toda la familia izquierda y una izquierda fija acota inferiormente toda la derecha. La completitud da entonces un supremo A y un ínfimo B reales finitos. Para cada pendiente derecha, el supremo izquierdo sigue estando por debajo; al tomar después el ínfimo derecho obtenemos $A \leq B$.

Para demostrar el límite izquierdo, dada $\varepsilon > 0$, el número $A - \varepsilon$ no es cota superior de las pendientes izquierdas. Existe, pues, un $x_0 < c$ con $A - \varepsilon < S(x_0, c) \leq A$. Cuando $x_0 < x < c$, el orden con extremo fijo da $A - \varepsilon < S(x_0, c) \leq S(x, c) \leq A$. El radio $c - x_0 > 0$ acredita el límite A sin exigir que el supremo se alcance. A la derecha, la propiedad del ínfimo proporciona $y_0 > c$ con $B \leq S(c, y_0) < B + \varepsilon$. Para $c < y < y_0$, la pendiente queda entre B y esa cota superior, y el radio $y_0 - c$ demuestra el límite B.

Por definición de cociente incremental, $f'_-(c) = A$ y $f'_+(c) = B$. La derivada bilateral existe exactamente cuando $A = B$: si coinciden, el mínimo de los dos radios sirve a ambos lados; si existe una derivada, sus dos restricciones tienen el mismo límite. Para $|x|$ en cero se obtienen $A = -1$ y $B = 1$. La continuidad fabricada por convexidad admite una esquina.

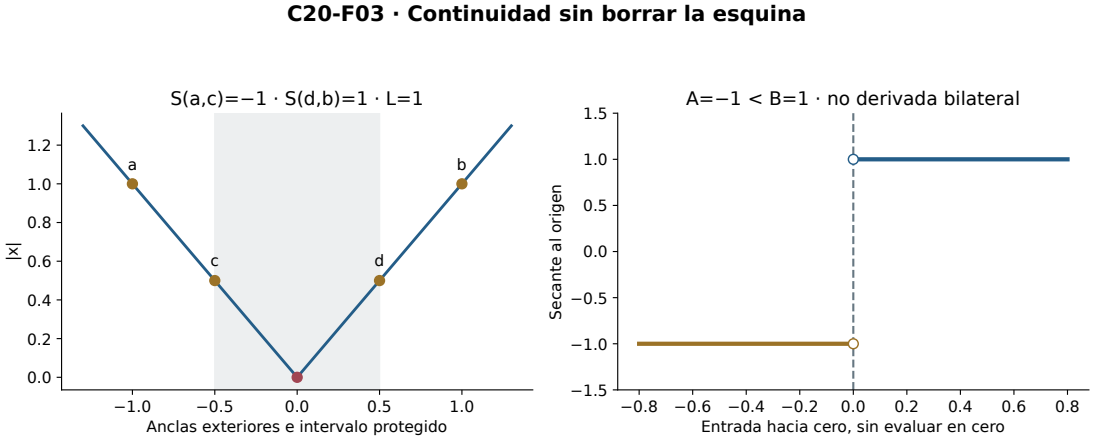


Figura 20.3. Para |x|, anclas−1 y1 encierran las secantes de[−1/2,1/2] entre−1 y1, dando L=1. Al centro0, las secantes izquierdas valen−1 y las derechas1; los círculos abiertos excluyen el cociente de incremento nulo. La función es continua y Lipschitz, pero no derivable en cero.

La finitud de estos límites se ha probado en centros interiores, donde hay secantes de ambos lados que los acotan. No podemos trasladarla a los bordes ni convertir las constantes de segmentos interiores en una sola constante Lipschitz para un intervalo abierto no acotado.

Ejercicios de la sección 20.3.

Ejercicio 11. Un radio construido con secantes

Sea f convexa finita y $a < c < d < b$ en su intervalo. Construye una constante Lipschitz en $[c, d]$ y un radio de continuidad sin usar derivadas.

Solución. Para $c \le x < y \le d$, la regla de triples da $S(a,c) \le S(a,x) \le S(x,y) \le S(y,b) \le S(d,b)$. Con $L = \max\{|S(a,c)|, |S(d,b)|\}$ resulta $|S(x,y)| \le L$, luego $|f(y)-f(x)| \le L|y-x|$. Entradas iguales dan incremento cero y entradas invertidas se cubren por simetría. Si $L > 0$, tomamos $\delta = \varepsilon/L$; si $L = 0$, la función es constante en el segmento y cualquier radio positivo sirve. Los puntos exteriores son la hipótesis que mantiene finitas las cotas.

La cadena de secantes usa centros exteriores a la región que se controla y conserva sus barreras al mover x, y. Si algún centro coincide con c o d, la comparación correspondiente es igualdad y se omite el triple degenerado. La banda finita da un control para todos los pares y su radio uniforme. No se utiliza una cota de derivadas para fabricar continuidad.

Ejercicio 12. Dos pendientes laterales en una esquina

Calcula las derivadas laterales de $|x|$ en cero y las constantes de secante que las definen. Decide continuidad, derivabilidad y una constante Lipschitz global.

Solución. Para $x < 0$, $S(x,0) = (0-|x|)/(0-x) = -1$, así el supremo izquierdo es−1. Para $y > 0$, $S(0,y) = 1$, así el ínfimo derecho es1. Las pendientes laterales difieren y no existe derivada bilateral. La triangular aplicada a $x = (x-y)+y$ y luego con x, y intercambiados da $||x|-|y|| \le |x-y|$. Es Lipschitz con constante1 en toda la recta, y por ello continua incluso en la esquina.

Las dos familias laterales son constantes y sus cotas óptimas se alcanzan en toda entrada de su lado. Sus valores diferentes impiden un único límite bilateral. La desigualdad triangular inversa controla en cambio todas las diferencias de valores, incluida la esquina. Esto distingue continuidad y Lipschitz de existencia de derivada. **Retorno visual.** Véase C20-F03, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 13. Una discontinuidad convexa de borde

En $[0,1]$, toma $f(0) = 1$ y $f(x) = 0$ para $x > 0$. Prueba convexidad y falta de continuidad en cero. Explica qué afirmación de continuidad permanece válida.

Solución. Para cualquier combinación de dos entradas no negativas, si la entrada combinada es positiva la salida es0 y la media de salidas es no negativa. Si la combinación es cero, todas las entradas con peso positivo son cero y la media de salidas vale1, igual que la salida. Esto prueba convexidad para todos los pesos. La sucesión positiva $1/(n+1)$ tiene salidas0 y converge a cero, cuya salida es1; no hay continuidad en ese borde. En cada punto interior la función es constante en un radio pequeño y continua. La continuidad interior de una función convexa finita no incluye automáticamente la frontera.

Una combinación no negativa sólo puede ser cero si todas sus entradas activas son cero. Ese caso preserva exactamente la altura excepcional del borde. Las entradas positivas próximas refutan continuidad allí sin alterar convexidad. La conclusión de continuidad para convexas finitas se mantiene en los centros interiores que tienen margen por ambos lados.

Ejercicio 14. El supremo convertido en límite

Para c interior de una función convexa finita, demuestra que $A = \sup_{x<c} S(x,c)$ es real y es el límite de esas secantes al acercarse desde la izquierda.

Solución. Hay entradas a ambos lados de c. Una secante derecha fija acota todas las secantes izquierdas por la regla de triples, y una secante izquierda fija muestra que el conjunto no es vacío y da una cota inferior a su supremo. La completitud proporciona $A \in \mathbb{R}$. Para $\varepsilon > 0$, elegimos $x_0 < c$ con $A - \varepsilon < S(x_0, c) \le A$. Si $x_0 < x < c$, la monotonía de secantes con extremo fijo da $A - \varepsilon < S(x_0, c) \le S(x, c) \le A$. El radio $c - x_0$ produce la condición de límite izquierdo. El cociente de derivada para incremento negativo es precisamente $S(x, c)$.

La secante derecha fija aporta una cota superior a todo el conjunto izquierdo, y un miembro izquierdo acredita no vacuidad. El supremo real existe por completitud. Su propiedad aproximante y el orden de secantes permiten diseñar un radio a partir de un solo testigo. No se supone que el supremo sea una pendiente alcanzada ni se selecciona una ruta.

Ejercicio 15. Ni constante global ni borde protegido

Explica con x^2 en $\mathbb{R}$ por qué la convexidad no implica Lipschitz global. Da también una función convexa continua en $[0,1]$ que no sea Lipschitz allí.

Solución. Si el cuadrado tuviera constante global L, comparar0 y $x > 0$ daría $x^2 \le Lx$ y por tanto $x \le L$ para todos los positivos, imposible tomando $x > L$. Para el borde, $f(x) = -\sqrt{x}$ es convexa continua en $[0,1]$: sobre el interior su segunda derivada es positiva según20.6, y continuidad permite extender convexidad a los bordes por20.5. Si fuera Lipschitz con constante L, comparar0 con $x > 0$ daría $1/\sqrt{x} \le L$, imposible cerca de cero. No se usa este ejemplo como premisa de la prueba temprana de continuidad; se verifica con herramientas ya disponibles.

El control local interior puede cambiar de constante al cambiar la región y no da una constante para toda la recta. Cerca de un borde, incluso continuidad no asegura una banda de secantes finita. Los dos ejemplos infringen barreras propuestas con pares válidos. Usar después criterios diferenciales para verificar el segundo ejemplo no los convierte en premisas de la prueba temprana.

20.4. Rectas que sostienen y una envolvente

Las cuerdas quedan por encima de la curva dentro de sus propios segmentos. El orden lateral permite construir también rectas que queden por debajo en todas las entradas del intervalo. Fijemos un centro interior c, sus pendientes laterales $A = f'_-(c) \le B = f'_+(c)$ y cualquier $p \in [A, B]$. Consideremos la recta $\ell_{c,p}(x) = f(c) + p(x - c)$.

Para $x > c$, la definición de B da $S(c, x) \ge B \ge p$; multiplicar por $x - c > 0$ produce $f(x) - f(c) \ge p(x - c)$. Para $x < c$, tenemos $S(x, c) \le A \le p$, y al multiplicar por $x - c < 0$

se invierte el orden y obtenemos la misma comparación de alturas. En el centro hay igualdad. Por tanto $\ell_{c,p}(x) \le f(x)$ en todo I, y llamamos a esa recta un soporte en c.

Si una recta por $(c, f(c))$ es soporte, las mismas divisiones permiten determinar su pendiente. A la derecha exige $p \le S(c, x)$ para todas las entradas y, por ello, $p \le B$. A la izquierda exige $S(x, c) \le p$ para todas y, por ello, $A \le p$. Así el intervalo cerrado $[A, B]$ contiene exactamente las pendientes permitidas. Una esquina puede tener varias, aun cuando no haya tangente bilateral.

Cuando f es derivable en c, $A = B = f'(c)$ y la única recta de soporte que pasa por ese punto es la tangente: $f(x) \ge f(c) + f'(c)(x - c)$. En cero, el valor absoluto admite todos los soportes px con $-1 \le p \le 1$; las rectas extremas x y $-x$ sostienen sus dos tramos. El cuadrado tiene tangente $2cx - c^2$ en c, y la identidad $x^2 - (2cx - c^2) = (x - c)^2 \ge 0$ prueba su soporte en toda la recta. La comparación no se limita a un radio pequeño alrededor del contacto.

Una función convexa finita sobre un intervalo abierto no vacío es la **envolvente superior** de sus rectas de soporte: $f(x) = \sup_{c \in I,\ p \in [f'_-(c), f'_+(c)]} \ell_{c,p}(x)$. Para un x fijo, la familia de valores de los soportes es no vacía y todos están acotados superiormente por el real $f(x)$. Además x es un centro interior y podemos usar $c = x$, por ejemplo con pendiente $p = f'_-(x)$, para obtener igualdad en esa entrada. El supremo existe y vale $f(x)$. La formulación sobre un intervalo abierto evita reclamar un soporte finito en un borde donde podría faltar.

Recíprocamente, sea una familia no vacía de rectas ℓ_j con supremo $F(x)$ real finito en cada entrada de un intervalo. Para cada índice, la igualdad afín y las dos cotas de borde dan $\ell_j((1-t)a + tb) = (1-t)\ell_j(a) + t\ell_j(b) \le (1-t)F(a) + tF(b)$. El lado derecho es una barrera común; tomar el supremo en la entrada combinada prueba convexidad de F, aunque ningún índice alcance ese supremo. El valor absoluto tiene una representación especialmente breve: $|x| = \max\{x, -x\}$.

C20-F04 · Rectas que sostienen y envuelven

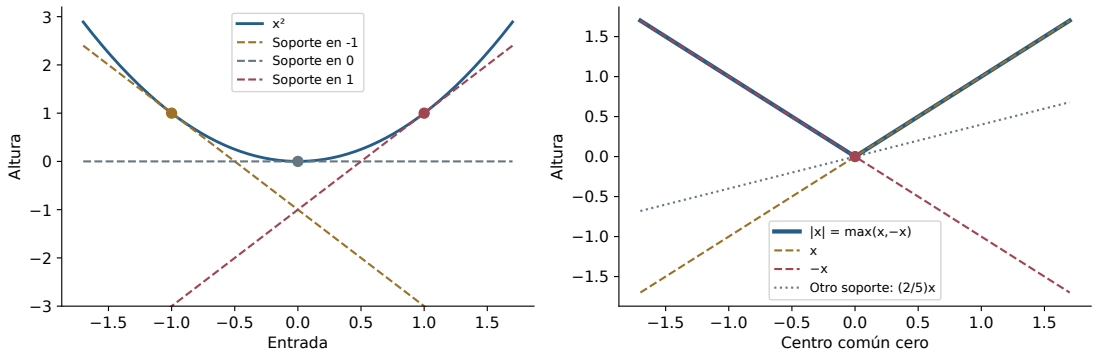


Figura 20.4. Las tangentes2cx−c² sostienen x² porque su diferencia es(x−c)². Se representan tres; la envolvente completa requiere todos los centros y alcanza x² al tomar c=x. El valor absoluto es la envolvente de x y−x, y en cero admite todo soporte px con−1≤p≤1.

La cuerda controla por arriba dentro de su segmento y el soporte por abajo en todo el intervalo. Si un soporte toca en dos entradas distintas a, b, convexidad obliga a que la función no supere la recta entre ellas, mientras el soporte obliga a que no quede debajo. Hay igualdad en todo $[a, b]$. En una función estrictamente convexa ese tramo afín es imposible, así que una tangente de una convexa estricta derivable sólo toca en su propio centro.

Ejercicios de la sección 20.4.

Ejercicio 16. Todas las rectas que sostienen la esquina

Determina todos los p para los que $px \le |x|$ para todo x. Relaciona el resultado con las dos pendientes laterales.

Solución. Para $x > 0$, dividir por x exige $p \le 1$. Para $x < 0$, la desigualdad $px \le -x$ y la división negativa exigen $p \ge -1$. En cero siempre hay igualdad. A la inversa, si $-1 \le p \le 1$, estas dos condiciones prueban el soporte en ambas mitades. Las pendientes laterales son-1 y1, así se recupera exactamente su intervalo cerrado. Las rectas pasan por el centro y son soportes, aunque no haya derivada bilateral.

Dividir por entradas negativas invierte el orden y produce la restricción inferior de pendiente. En las positivas la división conserva el orden y produce la superior. El centro cero tiene igualdad sin formar un cociente. Ambas condiciones reunidas dan exactamente el intervalo de soportes, aunque no exista tangente bilateral.

Ejercicio 17. Una familia que envuelve el cuadrado

Prueba $x^2 = \sup_{c\in\mathbb{R}}(2cx - c^2)$, indicando existencia de la cota y un centro que alcance el supremo.

Solución. La identidad $x^2 - 2cx + c^2 = (x - c)^2 \ge 0$ da $2cx - c^2 \le x^2$ para todo c. La familia es no vacía y está acotada superiormente por el real x^2, así tiene supremo real. El centro $c = x$ produce el valor $2x^2 - x^2 = x^2$. Por tanto el supremo coincide con x^2. Las rectas son las tangentes y soportes globales del cuadrado. La igualdad se prueba para cada x, no a partir de una colección finita dibujada.

La diferencia cuadrática prueba una cota común para toda la familia de rectas. Luego una recta del propio centro $c = x$ alcanza esa cota y acredita la igualdad del supremo. Un dibujo con algunas tangentes sólo representaría parte de la familia. La fórmula verifica el resultado para todas las entradas y centros reales. **Retorno visual.** Véase C20-F04, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 18. Por qué el soporte invierte un signo

Sea f convexa y c interior. Prueba que las pendientes de una recta de soporte por $(c, f(c))$ son exactamente $[A, B]$, con $A = f'_-(c)$ y $B = f'_+(c)$.

Solución. Si $A \le p \le B$, para $x > c$ usamos $S(c, x) \ge B \ge p$ y multiplicamos por $x - c > 0$. Para $x < c$, usamos $S(x, c) \le A \le p$ y multiplicamos por $x - c < 0$, invirtiendo el orden. En ambos casos $f(x) \ge f(c) + p(x - c)$; en el centro hay igualdad. Recíprocamente, el soporte dividido a la derecha obliga a $p \le S(c, x)$ para todos los $x > c$, luego $p \le B$. A la izquierda obliga a $S(x, c) \le p$ para todos los $x < c$, luego $A \le p$. Ambas orientaciones son necesarias.

El lado izquierdo y el derecho exigen orientaciones distintas al pasar de pendientes a alturas. El supremo izquierdo es la menor cota superior y el ínfimo derecho la mayor cota inferior de sus familias. Por ello las comparaciones para todas las entradas equivalen a $A \le p \le B$. La prueba verifica necesidad y suficiencia, con igualdad directa en el centro.

Ejercicio 19. Un borde sin soporte finito

Para $f(x) = -\sqrt{x}$ en $[0, 1]$, demuestra que no existe una recta de pendiente real finita por $(0, 0)$ que quede debajo en todo el segmento. ¿Contradice la existencia interior de soportes?

Solución. Una recta por el origen sería px. El soporte exigiría $px \le -\sqrt{x}$ para cada $x > 0$, y al dividir por x daría $p \le -1/\sqrt{x}$. Dado un real p, podemos tomar $x > 0$ suficientemente pequeño para que $-1/\sqrt{x} < p$, contradicción. La función es convexa y continua por E015. La construcción de soportes con pendientes finitas requería un centro interior con entradas por ambos lados; cero es frontera y queda fuera de esa conclusión.

Para cualquier pendiente candidata, las secantes desde el borde toman valores arbitrariamente negativos. Por tanto ninguna recta finita puede mantenerse por debajo cerca de cero. La continuidad de valores no limita esa razón por la distancia de entrada. El teorema de soportes finitos se formuló para centros interiores y no incluye esa frontera.

Ejercicio 20. Un segundo contacto fuerza una pieza recta

Sea f convexa y sea ℓ un soporte. Si $f(a) = \ell(a)$ y $f(b) = \ell(b)$ para $a < b$, prueba $f = \ell$ en $[a, b]$. Deduce la unicidad del contacto de una tangente de una función estrictamente convexa. **Solución.** En una entrada $z = (1-t)a + tb$, convexidad da $f(z) \le (1-t)f(a) + tf(b) = (1-t)\ell(a) + t\ell(b) = \ell(z)$. El soporte da la desigualdad opuesta, de modo que hay igualdad en cada entrada del segmento. Para una función estrictamente convexa, dos contactos distintos crearían un tramo afín no degenerado, imposible por E010. La tangente en un centro derivable ya es soporte y tiene al menos su contacto central; no puede tener otro.

El soporte aporta una cota inferior en la entrada combinada y la cuerda una superior con la misma recta, pues comparten sus bordes. Ambas obligan a igualdad. Dos contactos de una convexa estricta crearían así un tramo afín prohibido. En el caso derivable, la tangente ya tiene su contacto central y sólo puede tener ése.

20.5. Derivadas ordenadas, curvas convexas

Sea I un intervalo abierto no vacío y f derivable en todos sus puntos. La convexidad equivale a que f' sea no decreciente. Las dos implicaciones usan herramientas diferentes. Si f es convexa, para $x < y$ las secantes al acercarse a sus extremos dan $f'(x) \le S(x, y) \le f'(y)$. La primera comparación usa el límite de las secantes derechas centradas en x, y la segunda el de las izquierdas centradas en y, ambos identificados en §20.3. Resulta $f'(x) \le f'(y)$ para todo par ordenado. Hemos obtenido el orden de la función derivada sin suponer su continuidad.

Supongamos ahora que f' es no decreciente. Para $u < v < w$ en I, la función es continua en los bordes de los dos segmentos por C18 y derivable en sus interiores. Lagrange de C19 da $c \in (u, v)$ y $d \in (v, w)$ con $S(u, v) = f'(c)$ y $S(v, w) = f'(d)$. La ubicación asegura $c < d$, de modo que el orden de f' da $S(u, v) \le S(v, w)$. La equivalencia algebraica de §20.2 recupera convexidad. Aquí sí nos sirven dos testigos diferentes: los segmentos vecinos ya los dejan en el orden que necesitamos.

También podemos reconocer convexidad por el soporte de todas las tangentes. Una dirección procede de §20.4. Para la otra, tomamos $a < b$, $0 < t < 1$ y $z = (1-t)a + tb$. El soporte centrado en z da comparaciones para las entradas a, b. Al multiplicarlas por $1-t, t$ y sumar, el término de pendiente desaparece porque $(1-t)(a-z) + t(b-z) = 0$, y queda $(1-t)f(a) + tf(b) \ge f(z)$. Los pesos extremos o las entradas repetidas dan igualdad directamente. Se utilizó el soporte global en ambas entradas, no sólo una aproximación local.

La versión estricta exige cuidado. Si f' es estrictamente creciente, los dos centros $c < d$ de valor medio producen pendientes estrictamente ordenadas y por20.2 f es estrictamente convexa. Si f es estrictamente convexa, ya sabemos que f' no decrece. Si para algún $x < y$ ocurriera $f'(x) = f'(y)$, el orden encerraría todas las derivadas entre ambos en el mismo valor k. C19 aplicado a $f(t) - kt$ lo haría constante en $[x, y]$. Ese tramo afín contradice la convexidad estricta. Así f' es estrictamente creciente.

El orden de f' y su signo responden a preguntas diferentes. En el cuadrado, $f' = 2x$ es estrictamente creciente y certifica convexidad estricta; la propia función decrece en $(-\infty, 0]$ y crece en $[0, \infty)$ por el signo de esa derivada. El cubo es estrictamente creciente, pero su derivada $3x^2$ no es no decreciente en toda la recta y, por tanto, el cubo no es globalmente convexo. Ordenar pendientes no equivale a ordenar las salidas.

En un segmento cerrado $[a, b]$, continuidad incluyendo los bordes y derivabilidad en (a, b) permiten la misma prueba con dos aplicaciones de Lagrange. Sigue siendo válida cuando el primer extremo es a o el último es b, así que el orden de la derivada interior da convexidad en todo el segmento. Las tangentes de centros interiores sostienen también los valores de borde, por continuidad y paso al límite. Si retiramos continuidad, el criterio puede fallar: la función $f(0) = -1$ y $f(x) = 0$ para $0 < x \le 1$ tiene derivada interior cero, pero su valor en $1/2$ es cero y la cuerda de cero a uno tiene allí altura $-1/2$.

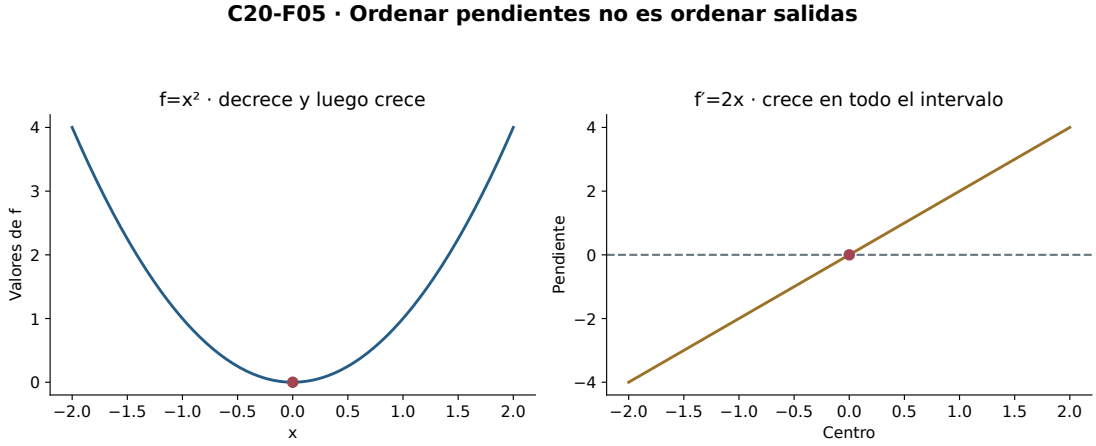


Figura 20.5. El cuadrado tiene derivada2x estrictamente creciente y por ello es estrictamente convexo. El signo negativo de esa derivada a la izquierda de cero hace decrecer f allí; el positivo a la derecha la hace crecer. El orden de pendientes y el orden de salidas son controles diferentes.

Ejercicios de la sección 20.5.

Ejercicio 21. Dos centros en segmentos vecinos

Demuestra que una función derivable en un intervalo abierto es convexa si su derivada es no decreciente. Declara las hipótesis de cada aplicación de Lagrange.

Solución. Fijamos $u < v < w$. Ambos segmentos $[u, v]$ y $[v, w]$ están en el dominio por carácter intervalar. La función es derivable en sus interiores y continua en sus bordes por derivabilidad en el intervalo abierto. Lagrange da $c \in (u, v)$ y $d \in (v, w)$ con $S(u, v) = f'(c)$ y $S(v, w) = f'(d)$. Como $c < d$, el orden de f' da $S(u, v) \leq S(v, w)$. E006 recupera convexidad en cada entrada intermedia. No pedimos continuidad de f' ni un mismo testigo para las dos instancias.

La derivabilidad en el intervalo abierto garantiza continuidad en los extremos de ambos subsegmentos, además de sus derivadas interiores. La ubicación de los testigos, uno antes y otro después de v, permite aplicar el orden de la derivada. Así se recupera la comparación de secantes que caracteriza convexidad. No se necesita continuidad de la función derivada.

Ejercicio 22. Orden de derivadas sin orden de valores

Para x^2, explica por qué la derivada creciente certifica convexidad pero no crecimiento global de la función. Encuentra sus intervalos de monotonía.

Solución. La derivada es $2x$, estrictamente creciente en toda la recta.20.5 certifica convexidad estricta. Sus valores son negativos para $x < 0$ y positivos para $x > 0$, así C19 hace decreciente al cuadrado en $(-\infty, 0]$ y creciente en $[0, \infty)$, estrictamente en pares distintos de cada tramo. Por ejemplo, $f(-2) = 4 > f(-1) = 1$. El orden de la derivada compara pendientes entre centros; su signo decide dirección de los incrementos de la función.

La pendiente $2x$ tiene orden estricto entre centros, pero su signo cambia en cero. El primer hecho prueba convexidad estricta y el segundo determina las dos zonas de monotonía. Para pares que incluyen cero se utiliza valor medio con centro interior de signo estricto en su tramo. No hay crecimiento global del cuadrado. **Retorno visual.** Véase C20-F05, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 23. Un plateau de derivadas destruye lo estricto

Supón que f es derivable y convexa sobre un intervalo abierto. Si $x < y$ y $f'(x) = f'(y) = k$, demuestra que f es afín en $[x, y]$. Usa esto para el criterio estricto.

Solución. Por20.5 la derivada no decrece, por lo que $k = f'(x) \leq f'(t) \leq f'(y) = k$ para cada $x < t < y$. Así $f'(t) = k$. La función $f(t) - kt$ es continua sobre el segmento y tiene derivada interior cero; la constancia de C19 la hace constante allí. Resulta $f(t) = kt + A$ en $[x, y]$. Si f fuera estrictamente convexa, este tramo afín sería imposible. Por ello la derivada de una función estrictamente convexa derivable debe ser estrictamente creciente; la recíproca se prueba con los dos centros ordenados de E021.

El orden de la derivada encierra sus valores intermedios entre dos iguales y los fija en k. Restar la recta de pendiente k produce derivada cero y permite aplicar constancia sobre el segmento. La pieza afín contradice estrictitud. El criterio recíproco usa centros de Lagrange estrictamente ordenados y conserva la desigualdad estricta de secantes.

Ejercicio 24. Tangentes que prueban convexidad

Supón que f es derivable en I y que cada tangente en un centro de I queda debajo de todas las salidas de f en I. Prueba convexidad sin comparar derivadas directamente.

Solución. Para $a < b$ y $0 < t < 1$, sea $z = (1 - t)a + tb \in I$. El soporte en z da $f(a) \geq f(z) + f'(z)(a - z)$ y $f(b) \geq f(z) + f'(z)(b - z)$. Multiplicamos por $1 - t$ y t y sumamos. El término de pendiente es $f'(z)((1-t)(a-z)+t(b-z)) = 0$. Entonces $(1-t)f(a)+tf(b) \geq f(z)$. Para pesos extremos o entradas coincidentes hay igualdad. Se gastó el soporte en todas las entradas, no sólo en un radio vecinal.

El soporte se utiliza en el centro combinado z y se evalúa en ambos bordes. Al sumar con pesos positivos desaparecen los incrementos dirigidos porque su combinación es cero. La conclusión es exactamente la comparación de cuerda. Un control sólo local de tangentes no proporcionaría necesariamente esas dos evaluaciones de soporte global.

Ejercicio 25. La derivada interior no arregla el borde

En $[0, 1]$, toma $f(0) = -1$ y $f(x) = 0$ si $x > 0$. Comprueba que la derivada interior es no decreciente y que la función no es convexa. Identifica la hipótesis ausente.

Solución. En cualquier centro interior hay un radio donde $f = 0$, así $f' = 0$ en todo $(0, 1)$ y no decrece. Pero la cuerda entre0 y1 tiene altura$-1/2$ en$1/2$, mientras $f(1/2) = 0$. La desigualdad convexa $0 \leq -1/2$ falla. Falta continuidad en el borde0. El criterio sobre un intervalo abierto no incluía ese borde; su extensión a un segmento cerrado exigía continuidad de f en ambos extremos.

Modificar el borde no afecta las derivadas en centros interiores, que siguen siendo cero. Pero cambia la cuerda que incluye ese borde y su altura cae por debajo del valor interior. La falta de continuidad impide extender el criterio abierto al segmento cerrado. El ejemplo conserva orden de derivadas y muestra el gasto de la hipótesis de borde.

20.6. La segunda derivada y sus límites

La segunda derivada es la derivada de la función f' en los centros donde esta nueva derivada existe. No basta con que exista f' en un solo punto. Supongamos que f es dos veces derivable en cada punto de un intervalo abierto I. Entonces

$$f \text{ es convexa en } I \quad \Longleftrightarrow \quad f''(x) \geq 0 \text{ para todo } x \in I.$$

Si $f'' \geq 0$, aplicamos el resultado de signo de C19 a f'. La existencia de su derivada la hace continua en cada segmento interior, y el signo hace a f' no decreciente. El criterio de §20.5 da entonces convexidad de f. A la inversa, convexidad hace no decreciente a f'; todos sus cocientes incrementales son no negativos, también para incrementos negativos, porque numerador y denominador cambian de signo juntos. El límite existente f'' conserva la cota cero. Ninguna dirección requiere continuidad de la segunda derivada.

Con $f'' > 0$ en todo el intervalo, C19 hace estrictamente creciente a f' y obtenemos convexidad estricta. La vuelta no es válida: x^4 tiene primera derivada $4x^3$ estrictamente creciente y es estrictamente convexa, pero su segunda derivada vale cero en el origen. La

desigualdad débil $f'' \geq 0$ caracteriza convexidad bajo la hipótesis de doble derivabilidad; la positividad en todos los centros ofrece una condición suficiente más fuerte para estrictitud.

Aplicando estos resultados a $-f$, el signo $f'' \leq 0$ da concavidad y $f'' < 0$ da concavidad estricta. En $(0, \infty)$, el recíproco tiene $f' = -1/x^2 < 0$ y $f'' = 2/x^3 > 0$: sus valores decrecen y sus pendientes aumentan, de modo que es estrictamente convexo. Para la raíz, C18 da $g' = 1/(2\sqrt{x}) > 0$; derivar ese recíproco mediante las mismas reglas da $g'' = -(1/\sqrt{x})/(4x) = -1/(4x^{3/2}) < 0$. Es creciente y estrictamente cóncava en el semieje positivo. Todas las divisiones se realizan allí; la potencia fraccionaria sólo abrevia productos y raíces construidos. La continuidad de la raíz en cero permite pasar las desigualdades de concavidad a segmentos que incluyan ese borde, sin atribuirle una segunda derivada finita allí.

Si una función convexa es derivable en un centro interior c y $f'(c) = 0$, su soporte es horizontal y da $f(x) \geq f(c)$ en todo el dominio. El centro ya aporta un mínimo global, y la convexidad estricta lo hace único. En sentido contrario, Fermat de C19 fuerza derivada cero en un mínimo interior derivable. La frontera queda fuera de esa necesidad: la identidad en $[0, 1]$ tiene mínimo en cero con derivada relativa uno.

Para aplicar un criterio global necesitamos controlar todo el intervalo. La función $q(x) = x^2 - x^4$ tiene $q''(0) = 2 > 0$, pero $q''(x) = 2 - 12x^2$ vale -10 en uno y excluye convexidad en toda la recta. Una segunda derivada nula en un centro tampoco decide lo que sucede a sus lados: x^4 conserva convexidad al cruzar cero, mientras x^3 es cóncava a la izquierda, convexa a la derecha y no tiene extremo en cero. El dato puntual no reemplaza esas comparaciones vecinas.

C20-F06 · Un cero que no destruye lo estricto

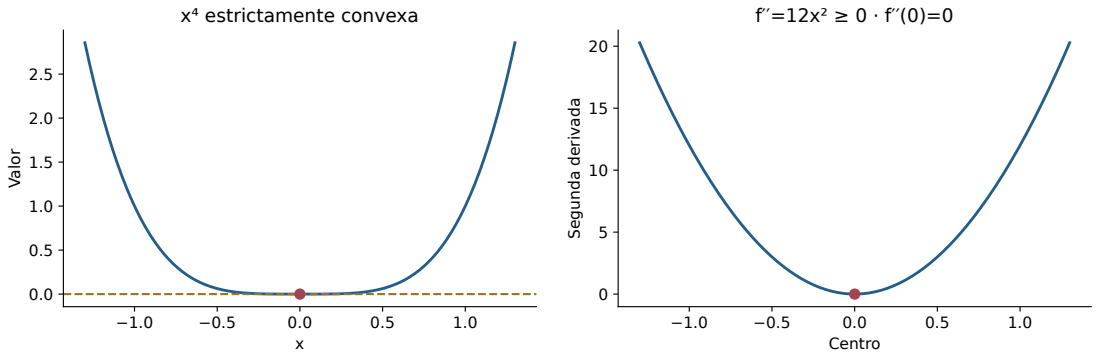


Figura 20.6. La derivada$4x^3$ del cuarto poder es estrictamente creciente y prueba convexidad estricta. Su segunda derivada$12x^2$ se anula en cero, sin cambio de convexidad. Positividad estricta en todos los centros es suficiente pero no necesaria, y no hay margen uniforme m>0 alrededor del origen.

La unicidad de un mínimo, cuando existe, no produce por sí sola una entrada que lo alcance. El cuadrado en $(0, 1)$ es estrictamente convexo y tiene ínfimo cero sin mínimo: cada entrada x tiene otra $x/2$ con menor salida. Sobre un segmento compacto, C16 sí asegura un mínimo al añadir continuidad, y esa hipótesis debe mantenerse cuando se usa.

Ejercicios de la sección 20.6.

Ejercicio 26. Dos derivadas, una equivalencia

Sea f dos veces derivable en un intervalo abierto. Demuestra ambas direcciones de la equivalencia entre convexidad y $f'' \geq 0$, sin suponer continuidad de f''.

Solución. Si $f'' \geq 0$, aplicamos C19 a f': es derivable y por ello continua en cada segmento interior. El signo de su derivada hace a f' no decreciente y20.5 hace convexa a f. Si f es convexa,20.5 hace a f' no decreciente. En un centro donde es derivable, el cociente de f' es no negativo para incrementos positivos; también para negativos, pues numerador y denominador son no positivos. El límite f'' es no negativo. Ninguna dirección utiliza continuidad de f''.

La segunda derivada se entiende como derivada de la primera en todos los centros del intervalo. Eso permite aplicar el resultado de signo a la primera función y después el criterio convexo. En la dirección opuesta, el orden de una primera derivada convexa obliga a que su derivada existente sea no negativa. Ningún paso requiere continuidad de la segunda derivada.

Ejercicio 27. Convexidad estricta con segunda derivada nula

Prueba que x^4 es estrictamente convexa en toda la recta y que no cumple $f'' > 0$ en todos los puntos.

Solución. Las reglas de C18 dan $f' = 4x^3$ y $f'' = 12x^2$. El cubo es estrictamente creciente por la identidad de E004, de modo que $4x^3$ también lo es.20.5 da convexidad estricta. Sin embargo $f''(0) = 0$. La condición positiva en todos los centros es suficiente, pero no necesaria; el criterio débil sigue verificándose en toda la recta.

La estrictitud procede del orden estricto de $4x^3$, probado con pares y no de una segunda derivada positiva en cada punto. La segunda derivada $12x^2$ mantiene el signo débil y se anula en cero. Ese centro no produce un tramo afín. Por ello la anulación puntual no destruye convexidad estricta. **Retorno visual.** Véase C20-F06, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 28. Recíproco y raíz: dos direcciones

Calcula las dos primeras derivadas de $1/x$ y de $\sqrt{x}$ para $x > 0$. Decide monotonía y convexidad o concavidad. Justifica la extensión de concavidad de la raíz a cero.

Solución. Para el recíproco, las reglas de cociente dan $f' = -1/x^2 < 0$ y $f'' = 2/x^3 > 0$: es estrictamente decreciente y estrictamente convexa en $(0, \infty)$. Para la raíz, C18 da $g' = 1/(2\sqrt{x}) > 0$. Derivamos el recíproco de $2\sqrt{x}$: $g'' = -(1/\sqrt{x})/(4x) = -1/(4x^{3/2}) < 0$. Es creciente y estrictamente cóncava en el interior. La raíz es continua en cero por C10/C14. Aplicamos el criterio de borde para $-g$ sobre cada $[0, b]$, o pasamos al límite en desigualdades interiores. No afirmamos una segunda derivada finita en cero.

Todas las divisiones se realizan en centros positivos, donde las raíces y potencias de denominador son no nulas. El signo de la primera derivada decide monotonía y el de la segunda orden de pendientes. La continuidad de la raíz en cero permite pasar a la comparación de borde. No se aplica allí una fórmula de segunda derivada que carecería de valor finito.

Ejercicio 29. Una muestra de curvatura no basta

Para $q = x^2 - x^4$, compara $q''(0)$ y $q''(1)$ y decide convexidad global. Explica además por qué $f''(0) = 0$ no identifica un cambio de convexidad.

Solución. Tenemos $q''(x) = 2 - 12x^2$, así $q''(0) = 2 > 0$ y $q''(1) = -10 < 0$. Como es dos veces derivable en toda la recta, la necesidad de20.6 excluye convexidad global. Un signo central no reemplaza el signo en todos los puntos. Para la segunda pregunta, x^4 tiene segunda derivada0 en el origen y conserva convexidad a ambos lados; x^3 también tiene segunda derivada0 allí pero $6x$ cambia de signo y sus dos lados tienen concavidades opuestas. El valor nulo por sí solo no decide el fenómeno.

El criterio requiere el signo de curvatura en todo el intervalo y el valor negativo en uno basta para refutar esa premisa global. Una evaluación positiva en cero no la repone. Para curvatura nula, los dos polinomios comparados muestran comportamientos vecinos diferentes. El fenómeno de cambio de convexidad necesita información a ambos lados y no una cifra aislada.

Ejercicio 30. Existencia, frontera y soporte horizontal

Distingue las conclusiones sobre mínimos de: (i) función convexa derivable con $f'(c) = 0$ interior; (ii) x sobre $[0, 1]$; (iii) x^2 sobre $(0, 1)$. Indica cuándo hay unicidad y existencia.
Solución.

(i) El soporte en c es horizontal, de modo que $f(x) \geq f(c)$ para todas las entradas: el mínimo existe porque ya tenemos c. Si la convexidad es estricta, la desigualdad es estricta para toda entrada distinta y el mínimo es único. (ii) La identidad es afín y su mínimo único está en el borde0; tiene derivada relativa1, así la condición necesaria de Fermat interior no aplica. (iii) El cuadrado es estrictamente convexo y todas sus salidas son positivas; para cualquier entrada x la entrada $x/2$ tiene menor salida. No hay mínimo alcanzado, aunque el ínfimo sea0. La convexidad no fabrica una entrada estacionaria.

Un centro estacionario interior ya proporciona una entrada y su soporte horizontal acredita el mínimo global. Estrictitud asegura unicidad si ese mínimo existe. En una frontera puede haber mínimo sin pendiente relativa cero, y en un intervalo abierto puede faltar por completo el minimizador. Existencia, ubicación y unicidad responden a hipótesis diferentes.

20.7. Jensen: combinar sin perder el control

Para una función convexa, la comparación de dos entradas se extiende a una media finita. Si $x_1, \dots, x_n$ están en I, los pesos $\lambda_i \geq 0$ suman1 y $n \geq 1$, entonces $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$. La desigualdad se llama Jensen finito. Antes de evaluar su lado izquierdo necesitamos saber que la media pertenece a I. La inducción siguiente demostrará a la vez esa pertenencia y la comparación, reduciendo una media de varias entradas a combinaciones de dos dentro del mismo intervalo.

Para $n = 1$, el único peso vale uno y hay igualdad. Supongamos probado el caso $n - 1$ y pongamos $s = \sum_{i<n} \lambda_i = 1 - \lambda_n$. Si $s = 0$, la no negatividad fuerza todos los pesos anteriores a ser cero y sólo queda x_n. Si $\lambda_n = 0$, los primeros pesos ya suman uno y basta la hipótesis inductiva. En el caso restante $0 < s < 1$, la media normalizada $y = \sum_{i<n} (\lambda_i/s) x_i$ pertenece a I por inducción y cumple $f(y) \leq \sum_{i<n} (\lambda_i/s) f(x_i)$. Convexidad aplicada a $sy + (1 - s)x_n$ mantiene la media completa en I y da $f(\sum_i \lambda_i x_i) \leq s f(y) + (1 - s) f(x_n)$. Sustituir la cota inductiva termina el paso sin dividir por ningún peso total nulo.

Para una función estrictamente convexa, hay igualdad exactamente cuando todas las entradas con peso positivo coinciden; las de peso cero no afectan ninguna de las dos alturas. Si las entradas activas coinciden, la igualdad es directa. Si difieren, agrupamos todas las de valor mínimo y llamamos θ a su peso total. Queda al menos una entrada mayor, por lo que $0 < \theta < 1$. La media y del resto es estrictamente mayor que el mínimo: todos sus pesos normalizados son positivos y todas sus entradas lo superan. La comparación estricta entre ese mínimo e y, seguida de Jensen dentro de los grupos, hace estricta la desigualdad completa. Sólo se agrupan finitos términos.

Para el cuadrado, con $\mu = \sum_i \lambda_i x_i$, la diferencia tiene una identidad exacta: $\sum_i \lambda_i x_i^2 - \mu^2 = \sum_i \lambda_i (x_i - \mu)^2 \geq 0$. Al expandir las desviaciones, las relaciones $\sum_i \lambda_i = 1$ y $\sum_i \lambda_i x_i = \mu$ cancelan los términos cruzados y dejan la identidad. Cada sumando de la derecha es no negativo; la igualdad exige que se anulen todos los de peso positivo. Con pesos $(1/4, 1/2, 1/4)$ y entradas $(0, 1, 3)$ obtenemos $\mu = 5/4$, media de cuadrados $11/4$ y diferencia $11/4 - 25/16 = 19/16$. Las tres desviaciones ponderadas son $25/64$, $2/64$ y $49/64$, cuya suma coincide con esa diferencia.

Para entradas positivas usamos la convexidad estricta de $1/x$ ya demostrada: $\frac{1}{\sum_i \lambda_i x_i} \leq \sum_i \frac{\lambda_i}{x_i}$. La media es positiva porque algún peso es positivo y todas las entradas lo son; por tanto pertenece al dominio del recíproco. Si los pesos son iguales a $1/n$, la desigualdad se convierte en $n/(\sum_i x_i) \leq (1/n) \sum_i 1/x_i$. Multiplicar por $n \sum_i x_i > 0$ da $(\sum_i x_i)(\sum_i 1/x_i) \geq$

n^2. Todos esos pesos son positivos, así la igualdad ocurre exactamente cuando todas las entradas coinciden, también para $n = 1$. La prueba sólo utiliza Jensen y la convexidad ya demostrada del recíproco.

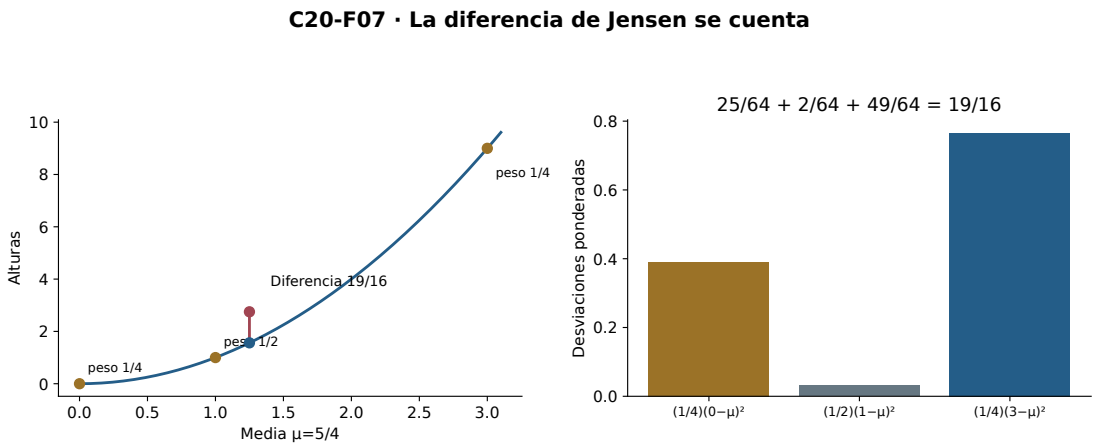


Figura 20.7. Con entradas0,1,3 y pesos1/4,1/2,1/4, la media es5/4, f(media)=25/16 y la media de cuadrados11/4. La diferencia19/16 coincide con las desviaciones ponderadas25/64,2/64,49/64. La identidad prueba no negatividad; los tres datos sólo ilustran Jensen finito.

Mantener la suma uno sin conservar el signo de los pesos puede destruir la desigualdad. Para el cuadrado, los pesos $2, -1$ y entradas $0, 1$ dan media -1, de cuadrado uno, mientras la combinación de cuadrados es -1. La comparación $1 \leq -1$ falla. Un peso negativo puede sacar la entrada del segmento y, al ponderar desigualdades, invierte su sentido. Jensen finito exigía no negatividad; el resultado no se extiende aquí a medias infinitas o integrales.

Ejercicios de la sección 20.7.

Ejercicio 31. El peso nulo en la inducción

Prueba Jensen finito por inducción para pesos no negativos que suman1, separando las posibilidades que podrían causar una división por cero.

Solución. Para una entrada hay igualdad. En el paso, sea $s = 1 - \lambda_n$. Si $s = 0$, todos los pesos anteriores son cero y sólo se evalúa x_n. Si $\lambda_n = 0$, aplicamos la hipótesis inductiva a los primeros pesos, que ya suman1. Si $0 < s < 1$, la media $y = \sum_{i<n}(\lambda_i/s)x_i$ pertenece al intervalo por inducción de combinaciones y $f(y) \leq \sum_{i<n}(\lambda_i/s)f(x_i)$. Convexidad entre y y x_n con pesos $s, 1-s$ y multiplicación de la cota por $s > 0$ dan la desigualdad de n entradas. No se normaliza un grupo de peso cero.

La inducción tiene un caso base no vacío y separa los pesos extremos antes de normalizar. Con un grupo de peso positivo, sus proporciones suman uno y su media permanece en el intervalo. La combinación final utiliza convexidad de dos entradas y el control inductivo del grupo. La finitud asegura que el procedimiento reduce efectivamente la lista.

Ejercicio 32. Igualdad con entradas inactivas

En Jensen para una función estrictamente convexa, ¿qué condición de igualdad corresponde a pesos positivos y a pesos cero? Prueba la condición necesaria.

Solución. Los pesos cero se eliminan sin cambiar media ni salida. Si todas las entradas restantes coinciden, hay igualdad. Si difieren, agrupamos las entradas activas de valor mínimo con peso total θ. Hay al menos una entrada mayor, por lo que $0 < \theta < 1$, y la media y de las restantes es estrictamente mayor que el mínimo. La convexidad estricta entre ambos valores da una desigualdad estricta; Jensen en los grupos acota las salidas sin cambiar ese signo. Por tanto la desigualdad total es estricta. La igualdad exige que las entradas con peso positivo sean iguales; las inactivas son libres.

Retirar los pesos nulos deja exactamente la misma media y combinación de salidas. Si las entradas activas difieren, el grupo de valor mínimo y el resto tienen pesos totales estrictamente entre cero y uno. La media del resto es mayor y la comparación estricta entre ambos valores se conserva al usar Jensen dentro del grupo. Esto demuestra necesidad de coincidencia de todas las entradas activas.

Ejercicio 33. Una diferencia de diecinueve dieciseisavos

Para pesos $(1/4, 1/2, 1/4)$ y entradas $(0, 1, 3)$, calcula la media, la media de cuadrados y su diferencia. Verifica la identidad de suma de desviaciones cuadráticas.
Solución. La media es $\mu = 0 + 1/2 + 3/4 = 5/4$. La media de cuadrados es $0 + 1/2 + 9/4 = 11/4$. Restar $\mu^2 = 25/16$ deja $44/16 - 25/16 = 19/16$. La suma de desviaciones es $(1/4)(25/16) + (1/2)(1/16) + (1/4)(49/16) = 25/64 + 2/64 + 49/64 = 76/64 = 19/16$. La identidad proviene de expandir los cuadrados y usar las dos relaciones de pesos y media; la cuenta ejemplifica una prueba universal.

La identidad general se obtiene expandiendo $(x_i - \mu)^2$ y usando $\sum \lambda_i = 1$ y $\sum \lambda_i x_i = \mu$. La cuenta exacta muestra que los dos modos de evaluar dan alturas diferentes. Su diferencia es una suma no negativa de desviaciones y aquí es positiva porque hay entradas activas distintas. **Retorno visual.** Véase C20-F07, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 34. Una desigualdad sin logaritmos

Para $x_i > 0$, demuestra $(\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} 1/x_i) \geq n^2$ por Jensen y da su caso de igualdad.
Solución. La función $1/x$ es estrictamente convexa en $(0, \infty)$ por E028. Con pesos iguales $1/n$, la media $\mu = (\sum_i x_i)/n$ es positiva y Jensen da $1/\mu \leq (1/n)\sum_i 1/x_i$. Como $1/\mu = n/\sum_i x_i$, multiplicamos por $n\sum_i x_i > 0$ y obtenemos $n^2 \leq (\sum_i x_i)(\sum_i 1/x_i)$. Todos los pesos son positivos, así E032 dice que la igualdad ocurre exactamente cuando las entradas son todas iguales. Para $n = 1$ esa condición es automática.

La media positiva pertenece al dominio del recíproco y todas las multiplicaciones usadas para despejar conservan el orden. Los pesos iguales son positivos, así la igualdad estrictamente convexa obliga a igualdad de todas las entradas. El caso de una sola entrada cumple la condición automáticamente. No se utiliza logaritmo ni una regla ajena a Jensen.

Ejercicio 35. Una suma de pesos que no protege el signo

Exhibe la falla de Jensen para el cuadrado con pesos2 y−1. Explica el paso de la prueba que deja de ser válido y por qué no es un contraejemplo a Jensen.
Solución. Con entradas0 y1, la combinación es−1 y su cuadrado vale1. La media de cuadrados es $2 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1$, así la desigualdad pedida sería $1 \leq -1$, falsa. Los pesos suman1 pero uno es negativo. El paso de convexidad de dos entradas sólo admite pesos entre0 y1; además multiplicar cotas por un peso negativo invierte el orden. Jensen requería pesos no negativos, de modo que la construcción muestra necesidad de esa condición, no una falla del teorema.

El contraejemplo mantiene suma uno pero pierde no negatividad. La entrada combinada puede salir del segmento entre las muestras y ponderar una desigualdad con signo negativo invierte su sentido. Esas son las obligaciones que dejan de estar disponibles en la prueba. La conclusión falsa no contradice el teorema con sus premisas completas.

20.8. Bandas cuadráticas y mínimos certificados

Una tangente aporta una cota inferior a una función convexa. Si además controlamos la segunda derivada, podemos encerrar el error entre dos cantidades explícitas sin usar Taylor. Sea f dos veces derivable en un intervalo abierto I, y supongamos $m \leq f''(x) \leq M$ en todos sus puntos, con $m \leq M$ reales. Restar un cuadrado permite convertir una barrera de segunda derivada en convexidad. Para $q_m(x) = f(x) - (m/2)x^2$, la segunda derivada es $f'' - m \geq 0$, así que §20.6 la hace convexa. Su tangente de soporte en c proporciona

$q_m(x) \geq q_m(c) + q_m'(c)(x-c)$. Al sustituir $q_m' = f' - mx$, los términos cuadráticos se reúnen mediante $x^2 - c^2 - 2c(x-c) = (x-c)^2$, y la desigualdad se convierte en $f(x) - f(c) - f'(c)(x-c) \geq \frac{m}{2}(x-c)^2$. Del mismo modo $q_M(x) = f(x) - (M/2)x^2$ es cóncava, y el soporte superior de una función cóncava produce la cota opuesta. Para todo $c, x \in I$,

$$\frac{m}{2}(x-c)^2 \leq f(x) - f(c) - f'(c)(x-c) \leq \frac{M}{2}(x-c)^2.$$

La banda admite m negativo: lo que vuelve convexa a q_m es la diferencia $f'' - m$, no el signo propio de m. Si sólo conocemos $|f''| \leq K$, tomamos $m = -K$ y $M = K$ y obtenemos una cota absoluta de resto $K(x-c)^2/2$. La derivabilidad de C18 no daba por sí sola este coeficiente; aquí procede de cotas válidas en todos los centros y del criterio de convexidad.

El mismo truco aplicado a cuerdas, con $z = (1-t)a + tb$, da

$$\frac{m}{2}\,t(1-t)(b-a)^2 \leq (1-t)f(a) + tf(b) - f(z) \leq \frac{M}{2}\,t(1-t)(b-a)^2.$$

Aplicamos convexidad a q_m en la combinación z y trasladamos sus términos cuadráticos. La identidad de §20.1 deja la barrera inferior de cuerda; la concavidad de q_M da la superior. Para $t = 0, 1$, ambos errores y factores valen cero sin dividir. Si f es continua en los bordes de un segmento y las cotas rigen en su interior, las auxiliares también son continuas allí y el criterio de §20.5 extiende estas bandas de cuerda a todo el segmento. Las comparaciones con tangentes de centros interiores incluyen igualmente las entradas de borde por paso al límite.

C20-F08 · Cotas universales, certificados concretos

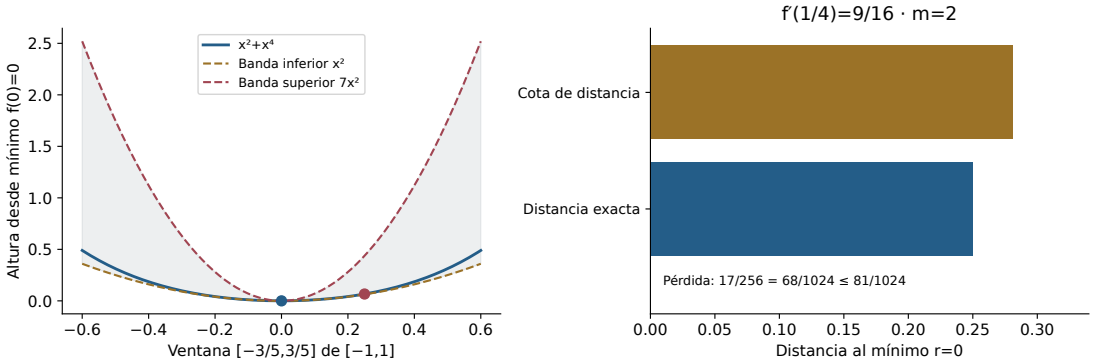


Figura 20.8. En$[-1,1]$, x^2+x^4 tiene$2 \leq f'' \leq 14$; desde su mínimo único0 queda entre x^2 y$7x^2$. El panel muestra una ventana interior. En $x=1/4$, la pendiente$9/16$ y $m=2$ certifican distancia$\leq 9/32$ y pérdida$\leq 81/1024$; los valores exactos son$1/4$ y$17/256$. La existencia del centro estacionario se verifica antes de usar el certificado.

Si $m > 0$, la banda de cuerda tiene barrera inferior positiva para entradas distintas y pesos interiores, y hace estrictamente convexa a f; este margen se llama convexidad fuerte con constante m. Si existe un centro r con $f'(r) = 0$, su soporte horizontal lo convierte en el único mínimo global. Para cualquier otra entrada x, C19 aplicado a f' entre r y x da $|f'(x)| \geq m|x-r|$, porque cada segunda derivada intermedia es al menos m y $f'(r) = 0$. Dividir por el margen positivo produce $|x-r| \leq \frac{|f'(x)|}{m}$. Además, aplicando la banda inferior con centro x y entrada r,

$$0 \leq f(x) - f(r) \leq f'(x)(x-r) - \frac{m}{2}(x-r)^2 \leq \frac{f'(x)^2}{2m}.$$

Para ver la última desigualdad, ponemos $d = x - r$ y completamos el cuadrado: $f'(x)d - (m/2)d^2 = f'(x)^2/(2m) - (m/2)(d - f'(x)/m)^2 \leq f'(x)^2/(2m)$. La no negatividad de la

pérdida procede de que r es mínimo. Su existencia sigue siendo una premisa: incluso con $m > 0$, el cuadrado en $(0, 1)$ no tiene centro estacionario ni alcanza su ínfimo.

Para $f(x) = x^2 + x^4$ en $[-1, 1]$, la segunda derivada $2 + 12x^2$ permite $m = 2$ y $M = 14$, y la continuidad de bordes mantiene las bandas en el segmento. El centro $r = 0$ es estacionario y su soporte, reforzado por la barrera positiva, acredita el mínimo único. En $x = 1/4$ tenemos $f'(x) = 9/16$ y $f(x) = 17/256$. El certificado de posición es $|x-r| \le 9/32$ y el de pérdida $f(x)-f(r) \le 81/1024$. Los errores exactos son $1/4 = 8/32$ y $17/256 = 68/1024$, respectivamente. Esas cuentas comparan la precisión efectiva del ejemplo con las garantías ya demostradas para todas las entradas.

La convexidad estricta del cuarto poder no ofrece un margen positivo uniforme alrededor de cero. Su segunda derivada $12x^2$ se anula en el origen y puede hacerse menor que cualquier $m > 0$ incluso al excluir ese centro. También $|f'(x)|/|x| = 4x^2$ tiende a cero para $x \neq 0$ que se acerca al origen. Las divisiones de los certificados requieren una barrera cuantitativa demostrada, que no se obtiene de la sola estrictitud.

Ejercicios de la sección 20.8.

Ejercicio 36. Restar un cuadrado para obtener una banda

Supón $m \le f'' \le M$ en todo un intervalo abierto. Demuestra las dos cotas del error de tangente sin Taylor ni integrales.

Solución. La función $q_m = f - (m/2)x^2$ tiene segunda derivada $f'' - m \ge 0$, así es convexa. Su soporte en c da $f(x) - (m/2)x^2 \ge f(c) - (m/2)c^2 + (f'(c) - mc)(x - c)$. Reorganizar deja el error de tangente al menos $(m/2)(x - c)^2$. La función $q_M = f - (M/2)x^2$ tiene segunda derivada no positiva, por lo que es cóncava y su tangente queda arriba; el mismo álgebra da la cota superior $(M/2)(x - c)^2$. No se requiere que m sea positivo ni que f'' sea continua.

Las auxiliares desplazan la curvatura por constantes conocidas y permiten aplicar criterios ya probados. Sus tangentes se comparan globalmente en el intervalo. Al reorganizar términos aparece el cuadrado de distancia al centro y las dos bandas firmadas. Esta ruta no necesita un desarrollo de Taylor ni continuidad de la segunda derivada.

Ejercicio 37. La banda de una cuerda

Deriva la banda del error de cuerda entre a, b para $z = (1 - t)a + tb$ a partir de q_m y q_M. Incluye los pesos extremos.

Solución. Convexidad de q_m da $q_m(z) \le (1 - t)q_m(a) + tq_m(b)$. Sustituimos y trasladamos el cuadrado: la diferencia de cuerda de f es al menos $(m/2)((1-t)a^2+tb^2-z^2) = (m/2)t(1-t)(b-a)^2$. Concavidad de q_M da la comparación opuesta y la cota superior con M. Para $t = 0$ o1, tanto diferencia de cuerda como factor son cero, sin división. Si los bordes pertenecen a un segmento cerrado, continuidad de f en ellos y el criterio extendido legitiman el mismo razonamiento.

La desigualdad convexa de la auxiliar inferior y la cóncava de la superior se evalúan con los mismos pesos. La diferencia de cuadrados produce el factor exacto de cuerda. Los pesos extremos se verifican por igualdad, sin dividir por un factor nulo. Para bordes incluidos se conserva la continuidad necesaria del criterio extendido.

Ejercicio 38. Una banda que alcanza ambos lados

Para $f(x) = x^2$ en $[0, 2]$ y $m = M = 2$, calcula el error de cuerda en1 y el error de tangente desde $c = 1$ hasta $x = 3/2$. Comprueba que las bandas son exactas.

Solución. La cuerda entre0 y2 tiene altura2 en1, mientras $f(1) = 1$; el error es1. El factor $(m/2)t(1-t)(b-a)^2$ con $t = 1/2$ es $1 \cdot (1/4) \cdot 4 = 1$, tanto inferior como superior. La tangente en1 es $1 + 2(x - 1)$. En $x = 3/2$ vale2 y $f(x) = 9/4$, así el error es1/4. La banda de tangente da $(2/2)(1/2)^2 = 1/4$ en ambos lados. La función tiene segunda derivada constante2 y bordes continuos, por lo que cumple todas las condiciones.

La curvatura constante dos hace coincidir las barreras inferior y superior. Por eso ambos certificados determinan exactamente los errores, no sólo intervalos que los contienen. La

diferencia de cuerda y la de tangente se calculan en centros y distancias distintos. Comprobar las dos cuentas mantiene separadas sus fórmulas.

Ejercicio 39. Lo estricto no da un margen uniforme

Para $f(x) = x^4$ cerca de cero, demuestra que la convexidad estricta no permite una cota $f'' \geq m > 0$ ni una cota $|f'(x)| \geq m|x|$ con constante positiva uniforme.

Solución. La convexidad estricta fue demostrada en E027. Pero $f''(0) = 0$, que impide cualquier cota positiva que incluya cero. Incluso excluyendo el centro, $f''(x) = 12x^2$ puede hacerse menor que todo $m > 0$ acercándose a cero. Para la otra cota, si $x \neq 0$, $|f'(x)|/|x| = 4x^2$, también arbitrariamente pequeño. No existe una constante positiva uniforme en un radio completo alrededor de cero. El certificado con división por m gasta convexidad fuerte cuantitativa y no sólo convexidad estricta.

La anulación en cero refuta una barrera de curvatura positiva que incluya el centro. Incluso al quitarlo, las magnitudes próximas pueden hacerse menores que cualquier barrera propuesta. El mismo argumento vale para la razón pendiente/distancia. La estrictitud cualitativa no legitima una división por una constante positiva que no se ha demostrado.

Ejercicio 40. De una pendiente a dos certificados

Para $f(x) = x^2 + x^4$ en $[-1, 1]$, prueba mínimo único en0 y usa $m = 2$ para certificar posición y pérdida en $x = 1/4$. Calcula las cantidades exactas y compara certificado con valor real.

Solución. La segunda derivada $2 + 12x^2$ está entre2 y14 en el segmento, y la función es continua en sus bordes. En el interior es fuertemente convexa, con extensión de las bandas al segmento. La derivada $2x + 4x^3$ se anula en0; el soporte horizontal y la banda positiva muestran que0 es el mínimo único, también frente a los bordes. En $x = 1/4$, $f'(x) = 1/2 + 1/16 = 9/16$. C19 aplicado a f' y la cota $m = 2$ dan $|x| \leq (9/16)/2 = 9/32$. La banda inferior con centro x y entrada0, seguida de completar el cuadrado, da $f(x) - f(0) \leq (9/16)^2/4 = 81/1024$. El valor exacto es $1/16 + 1/256 = 17/256 = 68/1024$. Así $1/4 = 8/32 \leq 9/32$ y $68/1024 \leq 81/1024$. Se distinguen las desigualdades universales probadas de su comprobación particular.

El margen dos se demuestra para todas las segundas derivadas, no sólo en el aproximante. El centro cero es estacionario y su soporte horizontal, reforzado por la banda positiva, da mínimo único. Los certificados de posición y pérdida usan ese margen y una pendiente residual exacta. Sus cotas se comparan después con los valores exactos, distinguiendo una garantía universal de la precisión efectiva de este ejemplo.

Retorno visual. Véase C20-F08, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Capítulo 21

Taylor: modelos locales y error

En el cubo centrado en uno, la recta que conserva el valor y la pendiente deja un error que podemos calcular por expansión. Añadir el término cuadrático reduce ese error a un cubo del desplazamiento. Para extender esta observación a otras funciones tendremos que relacionar los datos de un centro con lo que ocurre entre dos entradas: el polinomio se construye con las derivadas centrales, pero la garantía de error dependerá de las hipótesis disponibles en el segmento o cerca del centro.

C18 aporta diferenciabilidad y reglas; C19 Rolle, Lagrange y Cauchy; C20 bandas y alcance de convexidad. Inducción, sumas finitas, tipos, límites, continuidad y raíces son interfaces heredadas. No se usan integrales, sumas infinitas ni reglas nuevas para potencias reales generales. El polinomio vive en toda la recta, pero el error se evalúa sólo donde la función original existe.

21.1. Un polinomio para los datos de un centro

La recta de C18 conserva el valor y la primera derivada de una función en un centro. Para conservar más derivadas buscaremos un polinomio escrito en potencias del desplazamiento respecto de ese centro. Esta elección hará que, al evaluar cada derivada en él, desaparezcan todos los términos salvo uno; podremos determinar los coeficientes por separado antes de estudiar el error fuera del centro. Fijemos $n \geq 0$ y un centro c. Escribimos $f^{(0)} = f$ y $f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$ donde esas derivadas existen en el dominio indicado. El factorial se define por $0! = 1$ y $(k+1)! = (k+1)k!$. Inducción demuestra su positividad. En fórmulas reales, $k!$ abrevia su copia real positiva mediante la incrustación de naturales; no identificamos silenciosamente los dos tipos. La potencia de exponente cero es la función constante1, también en el centro.

Busquemos $P(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k (t-c)^k$. Las reglas de C18 para productos finitos dan, por inducción, que la derivada de orden j de la potencia $(t-c)^k$ es cero si $j > k$, y es $k!/(k-j)!\,(t-c)^{k-j}$ si $j \leq k$. En la derivada del término completo se conserva además el factor a_k. Al evaluar en c, las potencias positivas se anulan y sólo sobrevive el término $k = j$, cuya potencia de exponente cero vale uno. Por tanto

$P^{(j)}(c) = j!a_j, \qquad 0 \leq j \leq n$. Para imponer $P^{(j)}(c) = f^{(j)}(c)$ no hay elección libre: $a_j = f^{(j)}(c)/j!$. Queda determinado el **polinomio de Taylor de orden** n: $T_{n,c}f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(t-c)^k$. Es el único polinomio de grado a lo sumo n que reproduce todos esos datos en el centro. «Orden n» no significa grado exactamente n: el coeficiente superior puede ser cero. Para $n = 0$ sólo retenemos el valor; para $n = 1$ recuperamos la recta; para $n = 2$ aparece $f''(c)(t-c)^2/2$. La definición usa datos finitos, no infinitas derivadas ni una suma infinita.

Para $f(t) = t^3$ y $c = 1$, los datos son $f(c) = 1$, $f'(c) = 3$ y $f''(c) = 6$. Obtenemos $T_{2,1}f(1+h) = 1 + 3h + 3h^2$. Al expandir $(1+h)^3$, la diferencia respecto de este polinomio es exactamente h^3. En el mismo ejemplo, la recta $1 + 3h$ deja $3h^2 + h^3$: incorporar el dato de segunda derivada elimina el término cuadrático del error. La identidad del cubo permite esta comparación exacta; para una función general todavía necesitamos demostrar qué queda fuera de su polinomio.

La igualdad de datos centrales tampoco determina toda una función. Para un n fijo, los polinomios $P(t)$ y $P(t) + A(t-c)^{n+1}$ tienen los mismos valores derivados de órdenes0 an en

c, para cualquier real A, pero difieren fuera del centro si $A \neq 0$. La unicidad afirmada sólo afecta a polinomios de grado a lo sumo n.

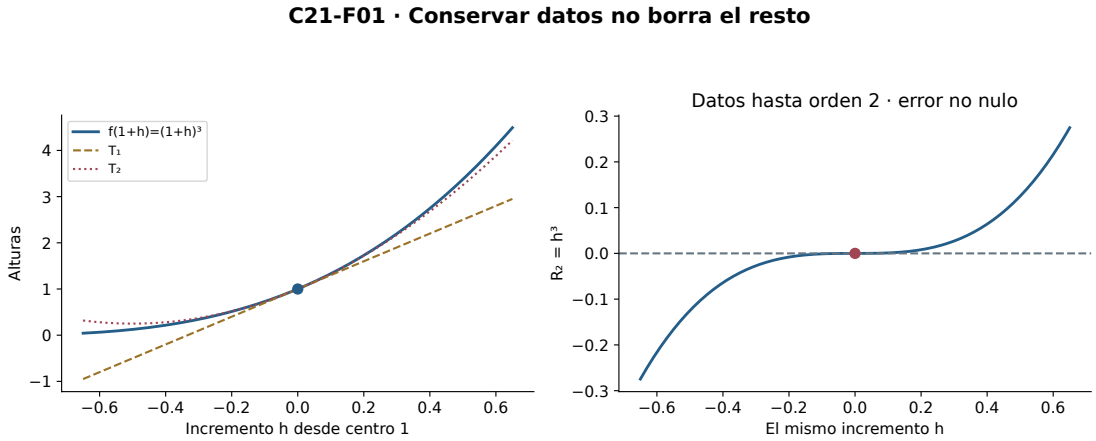


Figura 21.1. El cubo centrado en1 tiene T_1=1+3h y T_2=1+3h+3h². El resto de orden2 es h³, no cero fuera del centro. Las identidades finitas prueban estos valores; la coincidencia central no determina una función completa.

Escribiremos $R_{n,c}(x) = f(x) - T_{n,c}f(x)$ para el resto. Su dominio es el de f: aunque el polinomio esté definido en toda $\mathbb{R}$, la diferencia sólo tiene sentido donde existe la función original. Esta restricción acompañará tanto a las identidades exactas como a las cotas de error.

Ejercicios de la sección 21.1.

Ejercicio 1. Los coeficientes no se eligen a ojo

Para $P(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k(t-c)^k$, demuestra $P^{(j)}(c) = j!a_j$ y deduce existencia y unicidad del polinomio que conserva los datos de órdenes0 an.

Solución. Derivamos cada monomio con la regla de producto finito. Si $j > k$, su derivada es cero; si $j \leq k$, es $k!/(k-j)!\,(t-c)^{k-j}$. En el centro se anulan los términos con $k > j$ y el término $k = j$ vale $j!$, incluida la potencia de exponente cero definida como1. Así $P^{(j)}(c) = j!a_j$. El factorial tiene copia real positiva por inducción, luego $a_j = f^{(j)}(c)/j!$ es el único valor posible. La suma finita con esos coeficientes existe como polinomio y cumple los datos al sustituir. La unicidad se limita a grado a lo sumo$n$.

La derivación de la suma es finita y se utiliza sólo en monomios enteros ya legitimados. La evaluación central selecciona un único coeficiente por cada orden. Esa relación triangular prueba existencia por construcción y unicidad dentro de la clase de grado a lo sumo n. Una función de grado mayor puede compartir los mismos datos.

Ejercicio 2. El cubo visto desde uno

Construye los polinomios de Taylor de órdenes1,2,3 de t^3 en$c = 1$, usando$h = t-1$. Calcula sus restos exactos.

Solución. Los datos son1,3,6,6 para órdenes0 a3. Por tanto $T_1 = 1 + 3h$, $T_2 = 1 + 3h + 3h^2$ y $T_3 = 1 + 3h + 3h^2 + h^3$. La expansión finita de $(1 + h)^3$ da restos $R_1 = 3h^2 + h^3$, $R_2 = h^3$ y $R_3 = 0$. Cada factorial convierte derivada en coeficiente; en orden3 se divide6 por6. Los órdenes bajos conservan sus datos aunque no igualen la función fuera del centro.

Los factoriales convierten las derivadas centrales en coeficientes de incrementos, no en los mismos números sin escala. Cada resto se obtiene restando su modelo de la expansión exacta. Aumentar el orden conserva más datos y aquí finalmente elimina el resto porque se conoce el polinomio completo. **Retorno visual.** Véase C21-F01, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 3. Orden mayor que el grado

Encuentra el Taylor de orden4 de$2-3t+t^2$ en cero y explica por qué la palabra orden no exige grado4.

Solución. Las derivadas centrales son2,−3,2 y luego0 para órdenes3 y4. El Taylor es $2-3t+t^2$, pues el coeficiente cuadrático es$2/2$=1 y los superiores son cero. Su grado es2, menor que4. Orden4 exige conservar los datos hasta ese orden, no que el último coeficiente sea no nulo. El resto es cero porque la función ya es ese polinomio. Las derivadas superiores son datos legítimos aunque valgan cero. Los coeficientes de esos órdenes se anulan y no cambian el grado efectivo. La igualdad exacta con la función prueba resto cero sin necesitar un punto intermedio de Lagrange.

Ejercicio 4. Mismos datos, salidas diferentes

Para$n$ fijo y un polinomio$P$ de grado a lo sumo$n$, prueba que$P+A(t-c)^{n+1}$ conserva sus datos centrales hasta orden$n$ y puede alcanzar cualquier valor prescrito en una entrada$x\neq c$.

Solución. Cada derivada de la potencia de órdenes0 an contiene un factor positivo de grado al menos1 en$t-c$ y se anula en$c$. Así se conservan los datos. En$x\neq c$, el factor $(x-c)^{n+1}$ es no cero. Para imponer una salida$b$, tomamos $A=(b-P(x))/(x-c)^{n+1}$. La función resultante es un polinomio y tiene valor$b$ en$x$. No contradice la unicidad de Taylor porque su grado puede superar$n$.

La potencia adicional se anula junto con todas sus derivadas centrales hasta el orden fijado. En la entrada distinta su valor es no nulo y permite despejar el coeficiente libre. Se puede modificar cualquier salida fuera del centro manteniendo el modelo anterior, porque la clase resultante admite grados mayores.

Ejercicio 5. Centro, dominio y factorial

Explica los tres controles necesarios para escribir Taylor de$1/(1-t)$ en$c=0$ y por qué la definición del polinomio no certifica su error cerca de$t=1$.

Solución. El centro0 pertenece al dominio declarado$t<1$; las derivadas centrales usadas deben existir, lo que aquí dan las reglas del cociente e inducción. Los denominadores$k!$ se leen como sus copias reales positivas, incluido0!=1. El polinomio puede evaluarse en cualquier real, pero el resto sólo en el dominio original. La definición únicamente iguala datos en0: para controlar el error fuera se necesita una fórmula o cota adicional. Cerca de la singularidad1, el margen del denominador puede ser arbitrariamente pequeño.

El contrato debe acreditar pertenencia del centro, existencia de los datos y lectura real de los factoriales. El polinomio definido por ellos no tiene una singularidad, pero la función sí pierde definición en uno. Una cota de error requiere controlar la región donde se comparan ambas y su distancia a esa singularidad.

21.2. Rolle se repite sin perder sus hipótesis

Para convertir coincidencias de derivadas en una identidad del resto necesitamos una herramienta de C19 repetida un número finito de veces. Sea $x\neq c$ y $K=[\min(c,x),\max(c,x)]$. Supongamos que hay funciones $H_0,\dots,H_n$ continuas en K, con $H_k'=H_{k+1}$ en su interior para $k<n$, y que H_n también es derivable en el interior. Exijamos

$$H_k(c)=0\quad(0\le k\le n),\qquad H_0(x)=0.$$

No exigimos continuidad de H_n' ni su existencia en los bordes. Empezamos con $z_0=x$. Los valores $H_0(c)=H_0(z_0)=0$, junto con continuidad en el segmento y derivabilidad en su interior, permiten aplicar Rolle y obtener un z_1 estrictamente entre ambos con $H_0'(z_1)=0$. Si $n\ge 1$, la relación $H_0'=H_1$ convierte ese resultado en $H_1(z_1)=0$. Como también $H_1(c)=0$, el siguiente miembro tiene de nuevo dos valores iguales y podemos aplicar Rolle entre c y z_1.

En general, al llegar al miembro H_k conservamos $H_k(c)=H_k(z_k)=0$, con $z_k\neq c$. La continuidad en K se restringe al nuevo subsegmento y su interior sigue dentro del interior de

K, donde existe la derivada requerida. Rolle proporciona entonces z_{k+1} estrictamente entre c y z_k, con $H_k'(z_{k+1}) = 0$. Para $k < n$, la relación entre miembros da $H_{k+1}(z_{k+1}) = 0$ y permite continuar. Cuando $k = n$, ya hemos alcanzado la conclusión:

$$H_n'(z_{n+1}) = 0, \qquad z_{n+1} \text{ estrictamente entre } c \text{ y } x.$$

Se han usado $n + 1$ aplicaciones de Rolle, no n. El caso $n = 0$ consiste en una sola. Si $x < c$, todos los segmentos se ordenan mediante mínimo y máximo; los nuevos puntos siguen acercándose a c por el lado izquierdo. La derivada de una restricción interior coincide con la original, y cada subsegmento mantiene extremos distintos. Si $x = c$, no hay segmento no degenerado y no se afirma un punto intermedio.

Cuando partimos de una función H con derivadas continuas hasta orden n en ese segmento y derivada de orden $n + 1$ en su interior, tomamos $H_k = H^{(k)}$. Las igualdades centrales suministran un cero para cada miembro; el otro procede del paso anterior. Así puede repetirse Rolle aun cuando el último miembro derivado no sea continuo: su continuidad no interviene después de obtener el punto final.

Para seguir una cadena concreta, tomemos $H(t) = t^3(1-t)$, $c = 0$, $x = 1$ y $n = 2$. Tenemos $H(0) = H'(0) = H''(0) = 0$ y $H(1) = 0$. Las derivadas $H'(t) = 3t^2 - 4t^3$, $H''(t) = 6t - 12t^2$ y $H'''(t) = 6 - 24t$ permiten escoger $z_1 = 3/4$, $z_2 = 1/2$ y $z_3 = 1/4$, respectivamente. Cada punto anula la derivada correspondiente y queda estrictamente entre cero y el anterior. Las coordenadas se han podido calcular porque conocemos este polinomio; el lema asegura existencia sin exigir un cálculo semejante.

C21-F02 · Tres aplicaciones, tres segmentos

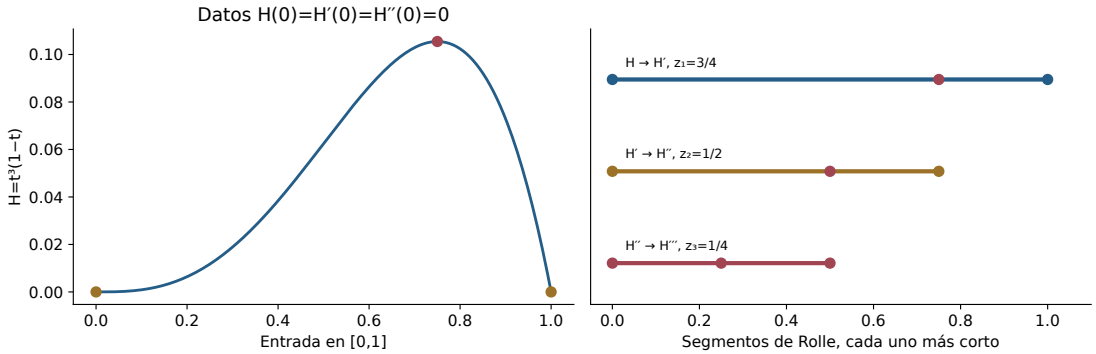


Figura 21.2. Para H=t³(1−t), con n=2, una cadena válida usa z_1=3/4, z_2=1/2 y z_3=1/4. Cada paso conserva un cero en el centro0 y obtiene el otro en el segmento anterior. Hay n+1=3 aplicaciones; los puntos exactos son particulares del ejemplo.

Para cada n y cada x fijados, los puntos se obtienen mediante una inducción finita. No necesitamos escogerlos simultáneamente para todas las entradas o todos los órdenes. En la cadena, el cero central de cada miembro hace posible el paso siguiente, aunque los otros ceros pertenezcan a funciones derivadas diferentes.

Ejercicios de la sección 21.2.

Ejercicio 6. El invariante de Rolle repetido

Escribe una prueba por inducción finita del lema de21.2, declarando el invariante y el número de aplicaciones.

Solución. Ponemos $z_0 = x$. En el paso$k$, $H_k(c) = H_k(z_k) = 0$ y$z_k \neq c$. La restricción al segmento de esos extremos es continua, y su derivada existe interiormente y coincide con la original. Rolle daz_{k+1} estrictamente entre ambos con$H_k{}'(z_{k+1}) = 0$. Si$k < n$, la cadena convierte esa igualdad en$H_{k+1}(z_{k+1}) = 0$, mientras$H_{k+1}(c) = 0$ era dato, y permite continuar.

En el paso$n$ se obtiene la derivada final nula. Hay$n+1$ pasos, de0 an. La longitud es finita y fijada de antemano.

En cada paso el dato central nulo pertenece al nuevo miembro y el testigo anterior aporta su otro cero. La relación de derivadas transmite la conclusión y la posición estricta conserva extremos distintos. El número finito de pasos evita una selección simultánea de testigos para una familia infinita.

Ejercicio 7. Una cadena de tres puntos

Para$H(t) = t^3(1-t)$ entre0 y1, comprueba los ceros centrales hasta orden2 y la cadena de puntos$3/4, 1/2, 1/4$ de Rolle.

Solución. Expandimos$H = t^3 - t^4$. Sus derivadas son$H' = 3t^2 - 4t^3$, $H'' = 6t - 12t^2$ y$H^{(3)} = 6 - 24t$. En0, H, H', H'' valen0 y$H(1) = 0$. Evaluar da$H'(3/4) = 0$, $H''(1/2) = 0$ y$H^{(3)}(1/4) = 0$. Se cumple$0 < 1/4 < 1/2 < 3/4 < 1$, de modo que cada punto está entre el centro y el punto anterior. La cadena realiza tres aplicaciones para$n = 2$; sus valores exactos no son prescritos por el lema general.

Las tres anulaciones centrales preparan el orden dos y el cero en uno inicia el segmento. Los puntos explícitos satisfacen además las inclusiones estrictas requeridas por la cadena. Las cuentas verifican este ejemplo, pero el lema general sólo proporciona existencias y no prescribe esas fracciones. **Retorno visual.** Véase C21-F02, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 8. Un dato central que no puede perderse

Para$n = 1$, muestra que$H(0) = H(1) = 0$ sin exigir$H'(0) = 0$ no garantiza un cero deH'' interior.

Solución. Tomamos$H(t) = t(1-t)$. Tiene bordes0 y0, y Rolle da un cero de$H' = 1 - 2t$ en$1/2$. Sin embargo$H'(0) = 1$, no cero, y$H'' = -2$ no se anula en el interior. Falta el borde central nulo del segundo miembro de la cadena, así no se puede repetir Rolle entre0 y$1/2$. La igualdad de valores de la función no basta para toda la cadena.

La primera aplicación de Rolle se mantiene válida porque los bordes de H son iguales. La segunda necesitaría igualdad de valores de H' entre el centro y el testigo obtenido, y esa premisa falta. La segunda derivada constante no nula muestra que la conclusión no puede repararse sólo con los ceros iniciales.

Ejercicio 9. Rolle hacia la izquierda

Aplica el esquema de$n = 1$ a$H(t) = t^2(t+1)$ entre$c = 0$ y$x = -1$. Calcula una cadena de testigos y explica la orientación.

Solución. Tenemos$H(0) = H'(0) = 0$ y$H(-1) = 0$. La primera derivada$3t^2 + 2t = t(3t+2)$ se anula interiormente en$z_1 = -2/3$. La segunda$6t + 2$ se anula en$z_2 = -1/3$, estrictamente entre$-2/3$ y0. La cadena cumple$-1 < -2/3 < -1/3 < 0$: se acerca al centro por la izquierda. Cada aplicación usa el segmento con extremos ordenados mediante mínimo y máximo; no se invierte una hipótesis de continuidad o interioridad.

El segmento se escribe con extremos ordenados aunque el avance hacia el centro sea de izquierda a derecha. Los dos testigos permanecen interiores en sus respectivos subsegmentos. La fórmula de las derivadas confirma cada anulación y no se cambia el sentido de una hipótesis por tener incremento negativo.

Ejercicio 10. Qué continuidad consume cada paso

Distingue las hipótesis de continuidad de$H_0, \dots, H_n$ y la hipótesis sobre$H_n{}'$. Explica por qué no hace falta una familia infinita de puntos.

Solución. CadaH_k se usa como función de un Rolle sobre un subsegmento, así necesita continuidad incluyendo sus extremos. Para$k < n$ su derivabilidad interior y la igualdad$H_k{}' = H_{k+1}$ permiten enlazar el próximo miembro. El últimoH_n necesita derivabilidad interior, pero Rolle no exige continuidad de$H_n{}'$ ni su existencia en bordes. El proceso fija$n$ y construye

sólo$n+1$ existencias, mediante inducción finita; no define un selector para todas las entradas o todos los órdenes simultáneamente.

Los papeles de función y derivada cambian al pasar al siguiente miembro. Cada nueva función de Rolle debe tener continuidad en sus dos bordes, pero la última derivada no necesita ese control como función de otro paso. La prueba declara un orden fijo y termina antes de exigir una continuidad adicional no prevista.

21.3. Forzar el resto: la fórmula de Lagrange

Tomemos una función f derivable hasta orden $n+1$ en un intervalo abierto J, y un centro c y una entrada x de J. La existencia de cada derivada hasta orden $n+1$ hace continuas a las funciones $f, \dots, f^{(n)}$ sobre cada segmento interior. No se supone continuidad de $f^{(n+1)}$. Si $x = c$, la construcción da directamente $R_{n,c}(c) = 0$. Para $x \neq c$ queremos que una función auxiliar tenga ese mismo cero central con todas las derivadas hasta orden n, y además se anule en x. Restar el polinomio de Taylor ya consigue las condiciones centrales. Podemos imponer la condición restante restando un múltiplo de $(t-c)^{n+1}$, pues esa potencia y sus primeras n derivadas se anulan en c. El coeficiente necesario es

$A = \frac{R_{n,c}(x)}{(x-c)^{n+1}}$. El denominador es no nulo y la elección del numerador hará que la nueva diferencia se anule en x. Fijamos esta entrada durante toda la prueba; A puede cambiar cuando cambie x. Definamos en el segmento que une c y x $H(t) = f(t) - T_{n,c}f(t) - A(t-c)^{n+1}$.

Al sustituir $t = x$ obtenemos $H(x) = 0$. En el centro, la coincidencia de datos de Taylor y el exponente $n+1$ dan $H^{(k)}(c) = 0$ para $0 \leq k \leq n$. La hipótesis de derivabilidad hace continuos a los miembros hasta orden n y proporciona sus relaciones de derivación en el interior. Se cumplen así todas las condiciones del lema anterior, que da un ξ estrictamente entre c y x con $H^{(n+1)}(\xi) = 0$.

La derivada de orden $n+1$ del polinomio de Taylor es cero; la de $(t-c)^{n+1}$ es la constante $(n+1)!$. Entonces $0 = f^{(n+1)}(\xi) - A(n+1)!$. Como $(n+1)!$ es positivo, podemos despejar A en esta igualdad. Sustituir después su definición y multiplicar por $(x-c)^{n+1}$ devuelve el resto que habíamos incorporado al auxiliar: $f(x) = T_{n,c}f(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$.

Es Taylor finito con **resto de Lagrange**. Para $n = 0$ recupera el valor medio de C19; para $n = 1$ convierte la diferencia respecto de la tangente en una segunda derivada intermedia por $(x-c)^2/2$. El testigo puede depender de f, n, c, x y no tiene por qué ser único o el punto medio. No se lo usa como una constante al variar esos datos.

La prueba también admite un contrato sobre un segmento cerrado: una cadena dada $f_0, \dots, f_n$ continua incluyendo los bordes, con $f_k' = f_{k+1}$ en el interior, y f_n' existente en todo el interior. El polinomio usa los valores $f_k(c)$ de esas extensiones continuas; la derivada final sólo se evalúa en ξ. No se presupone un operador de derivación en los bordes. Las identidades para H_k y Rolle son las mismas. Este contrato incluye centros fronterizos y no pide la derivada final en el propio centro.

Volvamos al cubo con centro 1 y orden 2. Su tercera derivada vale 6 en toda la recta, por lo que la fórmula da $6h^3/3! = h^3$, el resto exacto de §21.1. Cualquier punto interior sirve en este caso: todos producen el mismo valor de derivada. Lo mismo ocurre para el cuadrado con orden 1, cuya segunda derivada es constante.

Ejercicios de la sección 21.3.

Ejercicio 11. El auxiliar que obliga a la igualdad

Demuestra Taylor–Lagrange a orden$n$ mediante$H = f - T_{n,c}f - A(t-c)^{n+1}$, justificando cada división y el caso$x = c$.

Solución. Si$x = c$, el resto es0 por los datos centrales y no se pide testigo interior. Si$x \neq c$, definimos$A = R(x)/(x-c)^{n+1}$, con denominador no cero. Esto hace$H(x) = 0$. Los datos de Taylor y la potencia de grado$n+1$ dan$H^{(k)}(c) = 0$ para$k \leq n$. Bajo el contrato diferencial, los primeros miembros son continuos y sus derivadas enlazan; Rolle repetido da$H^{(n+1)}(\xi) = 0$.

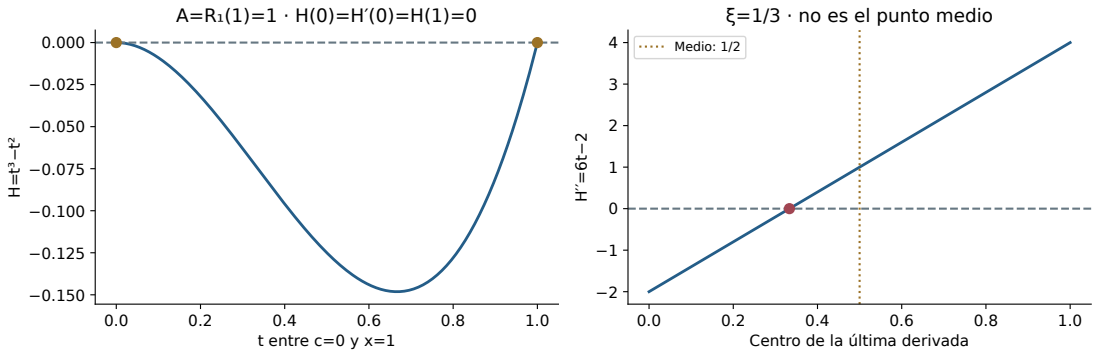


Figura 21.3. Para t^3 en centro0, entrada1 y orden1, R=1 y A=1. El auxiliar $H=t^3-t^2$ tiene los ceros centrales requeridos y otro en1. La derivada final $H''=6t-2$ se anula en $\xi=1/3$ y devuelve $R=f''(\xi)/2=1$.

La derivada final del polinomio es0 y la de la potencia es$(n+1)!$, así$A = f^{(n+1)}(\xi)/(n+1)!$. Este factorial real es positivo, por lo que se puede despejar. Sustituimos$A$ para obtener la fórmula.

El caso central se separa antes de introducir la división por el incremento. En el caso perforado, el auxiliar se diseña para conservar toda la cadena de ceros centrales y anularse en la entrada final. La última derivada nula determina su coeficiente libre. Sustituirlo produce la fórmula sin asumirla durante la construcción.

Ejercicio 12. Un testigo que no es el medio

Para$f(t) = t^3$, centro0, entrada1 y Taylor de orden1, calcula el testigo de Lagrange y compáralo con el punto medio.

Solución. $T_{1,0} = 0$, así$R(1) = 1$. La fórmula dice$1 = f''(\xi)/2 = 6\xi/2 = 3\xi$, de donde$\xi = 1/3$. Pertenece estrictamente a$(0, 1)$ pero no es el medio$1/2$. Este caso tiene un único testigo porque la segunda derivada es estrictamente creciente. No se infiere unicidad del teorema general. La segunda derivada del cubo cambia con el testigo, por lo que la ecuación del resto identifica aquí una fracción concreta. El medio produciría un valor diferente y no satisface la igualdad. Unicidad en este ejemplo procede de esa ecuación, no de una afirmación general del teorema.

Retorno visual. Véase C21-F03, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 13. Una derivada constante deja muchos testigos

Parat^3 a orden2 y centro1, muestra que cualquier punto interior entre1 y$x \neq 1$ verifica el resto. ¿Qué demuestra sobre la unicidad?

Solución. La expansión exacta da$R = (x-1)^3$. La tercera derivada es6 en cada punto, de modo que$[f^{(3)}(\xi)/3!](x-1)^3 = (x-1)^3$ para cualquierξ estrictamente interior. Hay infinitos puntos posibles en ese segmento y ninguna unicidad. El teorema garantiza uno; una fórmula constante puede hacer válidos todos. La tercera derivada constante hace que el factor de Lagrange sea siempre uno después de dividir por el factorial. Por ello cualquier testigo interior reproduce el mismo resto cúbico. La fórmula puede ser exacta y admitir muchos testigos a la vez. Existencia no equivale a elección única.

Ejercicio 14. Un centro fronterizo sin última derivada

En$[0, 1]$, usa$f(t) = t^{5/2} = t^2\sqrt{t}$ para Taylor de orden2 y centro0 mediante el contrato cerrado. Verifica los miembros continuos y explica qué pasa con la tercera derivada en el borde.

Solución. Los miembros son$f_0 = t^2\sqrt{t}$, $f_1 = (5/2)t\sqrt{t}$ y$f_2 = (15/4)\sqrt{t}$, con valores0 en el borde. Son continuos sobre$[0,1]$ y las relaciones de derivación se cumplen en$(0,1)$. La derivada$f_2{}' = (15/8)/\sqrt{t}$ existe interiormente aunque no es finita en0. El contrato cerrado legitima Taylor de orden2 para$x > 0$, usando los valores centrales dados; la derivada final se evalúa sólo en un testigo interior. No se obtiene por eso una cota uniforme de tercera derivada cerca de0.

Los tres miembros dados tienen límites centrales cero y proporcionan las extensiones continuas requeridas por el contrato cerrado. Sus relaciones de derivación se verifican en entradas positivas. La última derivada sólo debe existir en el testigo interior y no tiene por qué extenderse finitamente al borde. Su crecimiento cerca de cero impide una barrera uniforme allí.

Ejercicio 15. El caso de orden cero

Reduce Taylor–Lagrange de orden0 al valor medio de C19 y señala las hipótesis que siguen siendo necesarias.

Solución. El polinomio es$T_{0,c} = f(c)$ y1!=1, de modo que$f(x)-f(c) = f'(\xi)(x-c)$. Para$x \neq c$ esto es exactamente Lagrange sobre el segmento. Se conserva continuidad incluyendo ambos extremos y derivabilidad interior; el carácter intervalar asegura que el segmento está en el dominio. Para$x = c$ hay igualdad de valores sin testigo entre extremos coincidentes. La reducción no elimina ninguna de esas condiciones.

El factorial y el incremento reducen la fórmula a la igualdad de valor medio, pero conservan sus condiciones de dominio. Un segmento no degenerado necesita continuidad de bordes y derivabilidad interior. En el centro coincidente el resto se anula directamente y no se añade un testigo inexistente.

21.4. Un punto desconocido, una cota verificable

La fórmula exacta contiene un punto desconocido. Para certificar error conviene eliminarlo mediante una cota que controle todas sus ubicaciones posibles. Bajo el contrato anterior, si $|f^{(n+1)}(t)| \le M$ en todo el interior del segmento, con $M \ge 0$, obtenemos $|R_{n,c}(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}|x-c|^{n+1}$. Para $x = c$ los dos lados son cero; para $x \neq c$ aplicamos la cota en un testigo suministrado por Lagrange. No hace falta que la derivada final alcance un máximo o sea continua. Si $M = 0$, el resto es cero y no se divide por M.

Fijemos ahora una región $[c-\rho, c+\rho]$, con $\rho > 0$, donde se cumpla el contrato anterior y una misma M controle la derivada final en su interior. Para cada entrada x de la región, el punto intermedio queda dentro de ella y $|x-c| \le \rho$. Por tanto $M\rho^{n+1}/(n+1)!$ acota simultáneamente todos los errores. La cota universal de la derivada se establece antes de elegir la entrada y su testigo; así la conclusión no depende de conocerlos ni de escoger una familia de puntos intermedios.

Otra forma exacta del resto se obtiene dejando variar el centro del polinomio auxiliar. Bajo el contrato abierto de §21.3, fijemos $x \neq c$ y consideremos $G(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$. En $t = x$, el término de grado cero da $G(x) = 0$; en $t = c$ tenemos $G(c) = R_{n,c}(x)$. Al derivar el término de índice k, aparecen una parte que deriva $f^{(k)}(t)$ y, para $k \ge 1$, otra que deriva $(x-t)^k$. Esta última es $-f^{(k)}(t)(x-t)^{k-1}/(k-1)!$ y cancela con la primera parte del índice $k-1$. Sólo queda la parte que deriva el coeficiente del término de índice n. Como la suma se resta en G, obtenemos

$G'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$. Para $n = 0$ no hay términos que cancelar y la fórmula se reduce a $G' = -f'$. En cualquier orden, el contrato abierto garantiza continuidad de G en el segmento y derivabilidad en su interior. Lagrange aplicado a G, o Cauchy de C19 con la segunda función t, da un η estrictamente entre c y x para el que $G(x)-G(c) = G'(\eta)(x-c)$. Sustituir los valores de borde y la derivada conduce a

$R_{n,c}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{n!}(x-\eta)^n(x-c)$. Ésta es la forma de Cauchy del resto. Los signos negativos de $G(x) - G(c) = -R_{n,c}(x)$ y de G' se cancelan. Para $n = 0$, la potencia de exponente cero vale uno y no hay ningún cociente nulo. Como $|x - \eta| \leq |x - c|$, una cota $|f^{(n+1)}| \leq M$ en el interior da $|R| \leq M|x - c|^{n+1}/n!$. Con esa misma cota constante, Lagrange ofrece un denominador factorial mayor cuando $n \geq 1$. Las dos identidades son exactas y pueden usar puntos intermedios diferentes.

Si $m \leq f^{(n+1)} \leq M$, el coeficiente $R/(x - c)^{n+1}$ de Lagrange está entre $m/(n + 1)!$ y $M/(n+1)!$. Para transformarlo en una banda del resto hay que atender al signo de $(x-c)^{n+1}$. Si es negativo, el orden de las cotas se invierte. Una cota absoluta evita este cambio; una banda firmada conserva información direccional.

C21-F04 · Cauchy usa otro auxiliar y otro punto

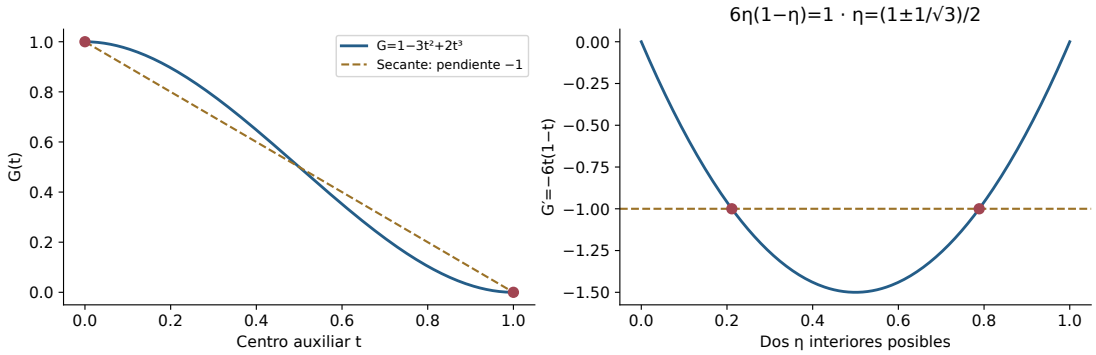


Figura 21.4. Con f=t³, c=0, x=1 y n=1, G=1−3t²+2t³ y G′=−6t(1−t). La secante de G tiene pendiente−1 y dos testigos $\eta=(1\pm1/\sqrt{3})/2$. Ambos dan R=6η(1−η)=1, distintos del ξ=1/3 de Lagrange.

Con $n = 1$, el factor $(x-c)^2$ es no negativo y las cotas de la segunda derivada recuperan las bandas cuadráticas de C20. Con $n = 2$ y tercera derivada positiva, el cubo del desplazamiento hace positivo el resto a la derecha y negativo a la izquierda. La banda firmada informa de qué lado del aproximante se encuentra la función, además de controlar la magnitud de la diferencia.

Ejercicios de la sección 21.4.

Ejercicio 16. Una cota que no necesita máximo

Deriva la cota absoluta de resto desde Lagrange con$|f^{(n+1)}| \leq M$. Incluye$x = c$ y$M = 0$ y explica por qué no se requiere derivada final continua.

Solución. Para$x \neq c$, tomamos valores absolutos en$R = f^{(n+1)}(\xi)(x - c)^{n+1}/(n + 1)!$ y aplicamos la cota universal enξ. Resulta$|R| \leq M|x - c|^{n+1}/(n + 1)!$. Si$x = c$, ambos lados son0. Si$M = 0$, la desigualdad fuerza$R = 0$ sin dividir por$M$. Una cota suministrada controla todos los valores posibles del testigo; no se necesita obtenerla como máximo alcanzado ni presuponer continuidad de la derivada final.

La barrera de la derivada final se declara antes del testigo y sirve para cualquiera de sus posiciones admisibles. Tomar magnitudes produce una cota no estricta sin pedir que la barrera se alcance. Los casos central y de barrera cero se verifican directamente. Así no se usa continuidad de la última derivada para fabricar un máximo.

Ejercicio 17. La cancelación de Cauchy

Calcula la derivada de$G(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(t)(x-t)^k/k!$ con$x$ fijado y deduce su forma de resto.

Solución. Derivamos la suma finita. La parte que derivа$f^{(k)}$ es$\sum_{k=0}^{n} f^{(k+1)}(t)(x-t)^k/k!$; la que deriva la potencia es$-\sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(t)(x-t)^{k-1}/(k-1)!$. Tras reindexar la segunda, se cancelan todos salvo el término superior de la primera. Como$G$ es negativo de la suma más una constante,$G' = -f^{(n+1)}(t)(x-t)^n/n!$. Se tiene$G(x) = 0$ y$G(c) = R$. Lagrange sobre$G$ da$-R = G'(\eta)(x-c)$; sustituir produce$R = f^{(n+1)}(\eta)(x-\eta)^n(x-c)/n!$.

La entrada x permanece fija al derivar respecto de t. La cancelación se verifica reindexando dos sumas finitas, con un único término superior restante. Después se auditan las condiciones de valor medio para G. Sus valores de borde permiten obtener el resto con su signo correcto. **Retorno visual.** Véase C21-F04, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 18. Una banda que cambia de orientación

Si$2 \le f^{(3)} \le 6$ entre$c$ yx, escribe las bandas firmadas para el resto de orden2 cuando$x > c$ y cuando$x < c$.

Solución. El coeficiente$R/(x-c)^3$ queda entre$2/6{=}1/3$ y$6/6{=}1$. Si$x > c$, la potencia es positiva y$(x-c)^3/3 \le R \le (x-c)^3$. Si$x < c$, la potencia es negativa y se invierte el orden:$(x-c)^3 \le R \le (x-c)^3/3$. En el centro$R = 0$. En ambos lados la cota absoluta$|R| \le |x-c|^3$ sigue siendo válida, pero la banda firmada retiene el signo.

El intervalo de coeficientes se obtiene dividiendo por el factorial positivo. La potencia cúbica conserva o invierte la orientación según el lado de la entrada. En el centro no se divide y el resto es cero. La banda firmada aporta información de signo que se pierde al tomar sólo magnitudes.

Ejercicio 19. Testigos diferentes para el mismo error

Parat^3, centro0, entrada1 y orden1, encuentra un testigo de Cauchy y compáralo con el de Lagrange. Compara sus cotas con$|f'''| \le 6$.

Solución. El resto es1. Lagrange dio$\xi = 1/3$. Cauchy exige$1 = 6\eta(1-\eta)$; las soluciones$\eta = (1 \pm 1/\sqrt{3})/2$ pertenecen a$(0,1)$ y ambas sirven. Ninguna es$1/3$. Con$M = 6$, Lagrange da$|R| \le 6/2 = 3$, mientras la estimación constante de Cauchy da$|R| \le 6/1 = 6$. Ambas cotas son correctas aunque poco ajustadas frente al error exacto1; sus puntos y factores no se intercambian.

Las auxiliares distintas producen ecuaciones diferentes para sus testigos. Resolverlas y comprobar interioridad acredita sus ubicaciones en este ejemplo. Las cotas resultantes pueden ser poco ajustadas y seguir siendo válidas. No se intercambian los factores de una fórmula con los puntos de la otra.

Ejercicio 20. Una región antes de una entrada

Supón$|f^{(n+1)}| \le M$ en el interior de$[c-\rho, c+\rho]$ bajo el contrato cerrado. Demuestra un control uniforme y explica por qué una muestra de esa derivada no lo sustituye.

Solución. Para cada entrada$x$ del segmento, la prueba de Lagrange se aplica a su subsegmento con$c$. Su testigo pertenece al interior de la región completa, donde vale la misma$M$. Así$|R(x)| \le M|x-c|^{n+1}/(n+1)! \le M\rho^{n+1}/(n+1)!$. El caso central es0. La cota se eligió antes de$x$ y sirve para todas las entradas, sin seleccionar sus testigos simultáneamente. Una muestra finita sólo acota valores muestreados, no cualquier ubicación interior que puede producir el teorema.

Para cada entrada el segmento que la une al centro está dentro de la región protegida. La misma barrera sirve para cualquier testigo interior de cualquiera de esos segmentos. La distancia máxima ρ convierte el control puntual en uno común. No se eligen simultáneamente testigos ni se infiere la barrera de una muestra finita.

21.5. Peano: lo que desaparece al cambiar de escala

La cota anterior gasta una derivada adicional. Existe una conclusión local bajo menos información: para $n \ge 1$, si f tiene derivadas hasta orden $n-1$ en un intervalo abierto

alrededor de c, y la función $f^{(n-1)}$ es derivable en c, entonces $R_{n,c}(c+h) = o(|h|^n) \qquad (h \to 0)$. Para $n = 1$ la hipótesis significa solamente que f es derivable en c; no pide derivabilidad en otros centros. Para $n \geq 2$ las derivadas inferiores existen en un entorno, pero la de orden n se exige sólo en el centro. El símbolo o abrevia la condición: para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$0 < |h| < \delta \implies |R_{n,c}(c+h)| < \varepsilon |h|^n$. El radio se toma suficientemente pequeño para mantener $c + h$ en el dominio. La forma de **Peano** controla el error después de dividirlo por $|h|^n$: para cualquier margen positivo acaba quedando por debajo de él. Esta conclusión no proporciona por sí sola una constante para $|h|^{n+1}$ ni un radio numérico calculable.

La demostraremos por inducción. Para $n = 1$, el cociente del resto lineal por h tiende a cero por la definición de derivada en c; tomar valores absolutos y multiplicar por $|h|$ da la afirmación. Para $n \geq 2$, pongamos $H = f - T_{n,c}f$. Se tiene $H^{(k)}(c) = 0$ para $0 \leq k \leq n$. La función H' cumple las hipótesis de Peano de orden $n-1$: dispone de derivadas hasta orden $n-2$ en un entorno y su derivada de ese orden es derivable en c. Todos sus datos centrales hasta orden $n-1$ son cero. La hipótesis inductiva da entonces

$H'(c+u) = o(|u|^{n-1})$. Para pasar de esta estimación de H' a la de H, compararemos sus incrementos con los de la potencia de orden n. Fijada $\varepsilon > 0$, elegimos un radio dentro del dominio donde $|H'(c+u)| < n\varepsilon |u|^{n-1}$ para toda entrada perforada. El factor n compensará la derivada de la potencia. Si $0 < |h|$ está dentro del radio, Cauchy de C19 aplicado entre c y $c+h$ a $H(t)$ y $(t-c)^n$ proporciona un ξ interior y la identidad

$\frac{H(c+h)}{h^n} = \frac{H'(\xi)}{n(\xi - c)^{n-1}}$. Para $n \geq 2$, H' existe en un entorno, de modo que H es continua en el segmento y derivable en su interior; la potencia tiene ambas propiedades. Su incremento es $h^n \neq 0$ y su derivada interior $n(\xi - c)^{n-1}$ tampoco se anula, porque $\xi \neq c$. Podemos, pues, escribir el cociente mostrado. Además $0 < |\xi - c| < |h|$, de manera que la cota inductiva se aplica en ξ. Al tomar valores absolutos y dividir por $n|\xi - c|^{n-1}$ obtenemos un número menor que ε. Esto prueba el paso sin pedir una derivada de orden $n+1$ ni continuidad de la derivada de orden n en un entorno.

Para $n = 0$, la afirmación $f(c+h) - f(c) = o(1)$ es continuidad en c y se trata separadamente. Tampoco se deriva un resto pequeño: de $r(h) = o(|h|^n)$ no se puede inferir una fórmula para $r'(h)$ sin hipótesis adicionales. La función $f(h) = h^2\sqrt{|h|}$ permite distinguir esta conclusión de una cota cúbica. Fuera de cero, las reglas de producto y de raíz aplicadas en cada lado dan $f'(h) = (5/2)\operatorname{sgn}(h)|h|^{3/2}$ y $f''(h) = (15/4)\sqrt{|h|}$. En cero, el cociente de $f(h) - f(0)$ por h es $h\sqrt{|h|}$ y tiende a cero, por lo que $f'(0) = 0$. A su vez, el cociente de $f'(h) - f'(0)$ por h es $(5/2)\sqrt{|h|}$ y también tiende a cero: $f''(0) = 0$. El polinomio de orden 2 es, por tanto, cero, y los dos errores normalizados son

$\frac{f(h)}{|h|^2} = \sqrt{|h|} \to 0, \qquad \frac{f(h)}{|h|^3} = \frac{1}{\sqrt{|h|}}$. El primer cociente tiende a cero y acredita Peano de orden 2. El segundo crece sin cota al acercarse al centro, por lo que ninguna constante finita C puede hacer $|f(h)| \leq C|h|^3$ en un radio. La tercera derivada existe fuera de cero y no está acotada cerca de él. El contrato cerrado de Lagrange permite obtener testigos en cada segmento unilateral, ya que f, f', f'' son continuas hasta cero; esos testigos no proporcionan una cota uniforme de la tercera derivada.

En este ejemplo el error absoluto tiende a cero, pero sólo una de las dos normalizaciones desaparece. La figura representa esas identidades para distancias positivas al centro. Acercar la vista a la curva no sustituye la estimación que ha de controlar todas las entradas de un radio.

Ejercicios de la sección 21.5.

Ejercicio 21. Peano por Cauchy e inducción

Prueba el paso inductivo de Peano de ordenn ≥ 2 a partir del resultado paraH', con$H = f - T_{n,c}f$. Declara el denominador no nulo.

C21-F05 · La escala decide qué error desaparece

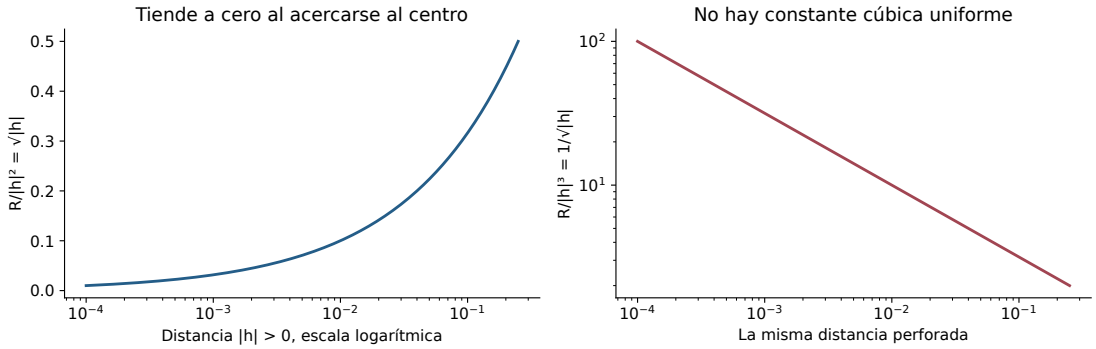


Figura 21.5. Para R=h²√|h|, el cociente por |h|² es √|h| y tiende a cero, mientras el cociente por |h|³ es1/√|h| y no está acotado cerca de cero. Se representan distancias positivas con escala logarítmica y se excluye la entrada0. Las identidades y radios, no el dibujo, prueban ambos comportamientos.

Solución. Los datos centrales de$H$ hasta orden$n$ son0. El resultado de orden$n-1$ aplicado aH' da$H'(c+u) = o(|u|^{n-1})$. Para$\varepsilon > 0$ tomamos un radio donde$|H'(c+u)| < n\varepsilon|u|^{n-1}$. Para$0 < |h|$ dentro del radio, Cauchy en$H$ y$(t-c)^n$ da$H(c+h)/h^n = H'(\xi)/[n(\xi-c)^{n-1}]$. El testigo no es$c$, así la derivada del denominador no se anula; el incrementoh^n tampoco. La cota inductiva hace al valor absoluto del cociente menor queε. Se requiere queH' exista en el segmento, garantizado por las hipótesis inferiores para$n \geq 2$.

La inducción aplicada a H' controla su error respecto de la escala de orden $n-1$. Cauchy lo relaciona con la razón del valor de H por el monomio de orden n. El testigo distinto del centro legitima el denominador derivado. El presupuesto con factor n se cancela y entrega exactamente la tolerancia requerida.

Ejercicio 22. Peano sin un orden cúbico de error

Para$f(h) = h^2\sqrt{|h|}$, verifica los datos centrales hasta orden2 y demuestra$o(|h|^2)$ pero ausencia de cota$C|h|^3$ cerca de cero.

Solución. $f(0) = 0$ y$f(h)/h = \operatorname{sgn}(h)|h|^{3/2} \to 0$, así$f'(0) = 0$. Fuera de0,$f'(h) = (5/2)\operatorname{sgn}(h)|h|^{3/2}$. Dividir por$h$ da$(5/2)\sqrt{|h|} \to 0$, luego$f''(0) = 0$. El Taylor de orden2 es cero. El cociente$f(h)/|h|^2 = \sqrt{|h|}$ tiende a0, pero$f(h)/|h|^3 = 1/\sqrt{|h|}$ excede cualquier constante finita tomando entradas suficientemente pequeñas. El resultado es Peano sin una cota uniforme del siguiente orden.

Las derivadas centrales se verifican mediante cocientes y no diferenciando una abreviatura asintótica. El resto cuadrático normalizado queda como raíz de magnitud y tiende a cero. Compararlo con el orden cúbico deja un recíproco que crece sin barrera. La misma función separa con precisión ambas garantías de error. **Retorno visual.** Véase C21-F05, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 23. Error absoluto y error normalizado

Para$n \geq 1$, comparar$r(h) = h^n$ y$s(h) = h^{n+1}$ cerca de cero. Decide qué errores son$o(|h|^n)$ y muestra por qué tender a cero no basta.

Solución. Ambas funciones tienden a0 en valor absoluto. Pero$|r(h)|/|h|^n = 1$ en todas las entradas perforadas, así no tiende a0 yr no es$o(|h|^n)$. En cambio$|s(h)|/|h|^n = |h| \to 0$, ys sí tiene esa propiedad. Peano mide error respecto de una escala, no sólo tamaño absoluto. La convergencia absoluta de los dos errores sólo afirma que sus valores se hacen pequeños. La normalización pregunta si son pequeños en comparación con una escala fijada. Uno conserva

razón de magnitud uno y el otro añade un factor de distancia que desaparece. Por ello sólo el segundo cumple Peano al orden solicitado.

Ejercicio 24. Un modelo asintótico también es único

SiP, Q tienen grado a lo sumo$n$ y$f - P = o(|h|^n)$ y$f - Q = o(|h|^n)$ en centro0, demuestra$P = Q$ sin derivar los restos.

Solución. La resta y la triangular dan$P - Q = o(|h|^n)$. Si el polinomio diferencia fuera no cero, tendría un término de menor grado$j \leq n$ con coeficiente$a \neq 0$: $P - Q = h^j(a + hB(h))$. Por continuidad del polinomio$B$, el factor interior tiende aa y su valor absoluto es al menos$|a|/2$ en un radio. Dividir por$|h|^n$ da al menos$(|a|/2)|h|^{j-n}$, que no tiende a0: si$j = n$ es constante positiva y si$j < n$ crece sin cota. Contradicción. No se utilizó una regla de derivación para$o$.

El menor grado no nulo del polinomio diferencia domina sus otros términos cerca de cero. La continuidad del factor restante protege su magnitud por una constante positiva. Después de normalizar, esa barrera no desaparece para ningún grado hasta n. Esto contradice el error pequeño y prueba igualdad sin derivar los restos.

Ejercicio 25. Un radio para un error de raíz

Para el ejemplo de E022, produce un radio explícito que haga$|f(h)| < \varepsilon|h|^2$. Explica qué no prueba ese radio sobre una cota cúbica.

Solución. Como$|f(h)|/|h|^2 = \sqrt{|h|}$, tomamos$\delta = \varepsilon^2$ o el mínimo con un radio de dominio. Para$0 < |h| < \delta$ se cumple$\sqrt{|h|} < \varepsilon$ y la desigualdad requerida. Esto prueba Peano de orden2 con radio explícito para este ejemplo. No produce una constante cúbica: el cociente por$|h|^3$ sigue siendo$1/\sqrt{|h|}$, arbitrariamente grande. El radio cuadrático se diseña a partir de la precisión del error normalizado. Multiplicar la desigualdad de raíz por la escala positiva devuelve el error de valor pedido. El cociente del siguiente orden sigue sin barrera, así el mismo radio no acredita una tasa cúbica uniforme.

21.6. La primera derivada que no se anula

Taylor local puede decidir la forma de una función cerca de un centro, incluso cuando las primeras pendientes no distinguen el caso. Supongamos las hipótesis de Peano de orden $m \geq 1$, que $f^{(k)}(c) = 0$ para $1 \leq k < m$, y que $f^{(m)}(c) \neq 0$. Con $a = f^{(m)}(c)/m!$, $f(c + h) - f(c) = ah^m + r(h), \qquad r(h) = o(|h|^m)$.

Como $a \neq 0$, podemos usar $|a|/2$ como margen en Peano y elegir un radio donde $|r(h)| < (|a|/2)|h|^m$. Para $h \neq 0$, el término principal tiene magnitud $|a||h|^m$, de modo que el resto no puede cambiar su signo. Si m es par, $h^m = |h|^m$ en ambos lados: $a > 0$ da un mínimo local estricto y $a < 0$ un máximo local estricto. Si m es impar, el signo cambia al pasar de un lado al otro y hay valores mayores y menores que $f(c)$ arbitrariamente cerca del centro. En este caso no hay extremo local. La última conclusión utiliza entradas por ambos lados, por lo que el criterio se afirma en un centro interior.

Para $m = 2$, el argumento da el criterio de segunda derivada en un punto estacionario sin exigir continuidad de f'' en un entorno. En cero, x^4 tiene su primer coeficiente no nulo positivo en orden 4 y presenta mínimo estricto; x^3 lo tiene positivo en orden 3 y cambia de signo. La derivada primera nula que comparten no alcanza para distinguirlos, mientras el primer orden no nulo sí lo hace.

Si todos los datos hasta orden n se anulan, el criterio guarda silencio. Los polinomios $h^{2(n+1)}$, $-h^{2(n+1)}$ y $h^{2(n+1)+1}$ tienen los mismos datos hasta ese orden, incluidos el valor cero, y respectivamente presentan mínimo, máximo y ausencia de extremo en cero. No se dice que sus primeras derivadas no nulas sean las mismas: precisamente esa información está fuera del paquete de datos fijado.

El radio de Peano sólo da una conclusión local. Para $q(h) = h^2 - h^4$, el primer término no nulo en cero es positivo y de orden 2, así que hay mínimo local estricto. Sin embargo, $q(2) = -12 < q(0) = 0$. En C20, una pendiente cero podía acreditar mínimo global al

añadirse convexidad en todo el intervalo; los datos centrales de este ejemplo no aportan esa hipótesis.

Para un error de signo conocido también importa la paridad. Si $f^{(n+1)}$ tiene signo positivo en todo el segmento y no es cero en el testigo, el resto de Lagrange tiene el signo de $(x-c)^{n+1}$. En cambio Peano no ofrece un signo del resto; permite controlar su tamaño relativo frente a un término principal no nulo.

C21-F06 · El primer orden no nulo cambia la forma

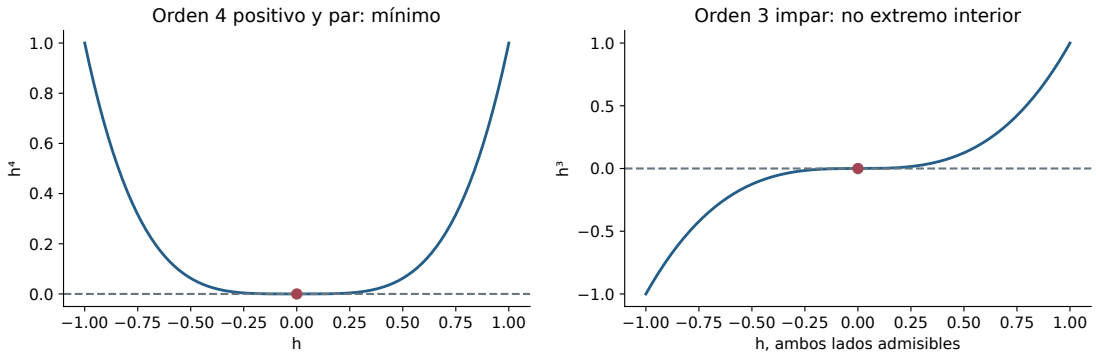


Figura 21.6. En cero, h^4 tiene primer coeficiente no nulo positivo de orden4 y mínimo estricto; h^3 lo tiene de orden3 y cambia de signo. El criterio usa un radio donde el resto no supera la mitad del término principal y exige un centro interior con ambos lados.

Cuando el centro es borde, sólo hay un lado admisible y el caso impar puede comportarse como un extremo relativo. La función x en $[0,1]$ tiene mínimo en cero. Antes de aplicar un criterio de paridad hay que fijar el dominio y sus entradas admisibles.

Ejercicios de la sección 21.6.

Ejercicio 26. Dominar el resto para decidir un signo

Demuestra el criterio de la primera derivada no nula usando$ah^m+o(|h|^m)$ y una tolerancia explícita.

Solución. Como$a \neq 0$, elegimos$\varepsilon = |a|/2$ en la condicióno. En el radio resultante el error tiene magnitud menor que la mitad del término principal. Sim es par, éste tiene signo$a$ en ambos lados, y la suma conserva ese signo: mínimo estricto para$a > 0$ y máximo estricto para$a < 0$. Sim es impar, el principal cambia de signo de un lado a otro y el error no puede invertirlo; hay salidas mayores y menores arbitrariamente próximas. El centro debe ser interior para disponer de ambos lados.

La mitad del coeficiente principal reserva un margen para que el resto no anule su signo. La paridad decide entonces las comparaciones de valores disponibles a ambos lados. Interioridad permite usar esas dos direcciones en el caso impar. La conclusión es local en el radio proporcionado por Peano.

Ejercicio 27. Cuarto poder frente a cubo

Comparax^4 yx^3 en cero por el primer orden diferencial no nulo y verifica las conclusiones directamente.

Solución. Parax^4, las primeras tres derivadas centrales son0 y la cuarta vale24; su coeficiente es24/4!=1. El orden par positivo da mínimo local estricto, y directamente$x^4 > 0$ para$x \neq 0$. Parax^3, las primeras dos son0 y la tercera6, de coeficiente1. El orden impar da ausencia de extremo interior; directamentex^3 es negativo a la izquierda y positivo a la derecha. Una pendiente central cero común no distingue estos casos.

La primera derivada no nula se convierte en coeficiente uno después de dividir por su factorial. El exponente par del cuarto poder mantiene signo positivo y el impar del cubo lo cambia. La comprobación directa de valores confirma las conclusiones y muestra por qué pendiente cero por sí sola no las distingue. **Retorno visual.** Véase C21-F06, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 28. Datos nulos con tres respuestas

Para$n$ fijo, construye tres polinomios con iguales datos centrales hasta orden$n$ en0 y con mínimo, máximo y ningún extremo local allí.

Solución. Tomamos$p = h^{2(n+1)}$, $q = -h^{2(n+1)}$ y$r = h^{2(n+1)+1}$. Todos los exponentes superan$n$, por lo que el valor y las derivadas hasta ese orden se anulan en0. El primero es positivo en entradas no nulas y tiene mínimo estricto; el segundo negativo y tiene máximo estricto; el tercero cambia de signo y no tiene extremo interior. La falta de datos no nulos disponibles impide aplicar el criterio, no demuestra que no exista un extremo.

Los exponentes elegidos superan el orden de todos los datos que se desean conservar. Sus signos en entradas no nulas deciden tres comportamientos distintos. La lista finita de datos nulos es compatible con todos ellos. El criterio no clasifica cuando falta un primer término no nulo disponible.

Ejercicio 29. El mínimo que no gobierna toda la recta

Para$q(h) = h^2 - h^4$, prueba mínimo local estricto en0 y falla de mínimo global. Compara con la hipótesis de C20.

Solución. El primer orden no nulo es2, con$q''(0) = 2 > 0$, por lo que el criterio local da mínimo estricto. Directamente$q = h^2(1 - h^2) > 0$ para$0 < |h| < 1$. Pero$q(2) = 4 - 16 = -12 < 0$, así0 no es mínimo global. La segunda derivada$2 - 12h^2$ se vuelve negativa; no hay convexidad global que permita utilizar el soporte horizontal de C20. Un dato central positivo no reemplaza esa propiedad en todo el intervalo.

La cota local se verifica mientras el factor $1-h^2$ sea positivo. Fuera de esa región hay una salida menor que la central y se refuta mínimo global. La curvatura negativa en zonas lejanas impide usar soporte convexo global. Un dato central positivo no sustituye esa hipótesis en toda la recta.

Ejercicio 30. El orden impar en una frontera

Explica por qué el criterio impar no excluye un mínimo de$x$ en0 sobre$[0, 1]$. Declara una versión unilateral de la comparación de signos.

Solución. La función tiene primer coeficiente1 y orden1 impar, pero el dominio sólo ofrece incrementos$h \geq 0$ desde el centro0. Para$h > 0$, el término principal$h$ es positivo y no hay entradas negativas que produzcan el signo contrario. En$[0, 1]$, la función alcanza mínimo único en0. Un desarrollo unilateral con error menor que la mitad del término principal certifica el signo en el lado disponible; la conclusión de ausencia de extremo del criterio impar requería centro interior y acumulación bilateral.

El dominio de frontera sólo admite el lado positivo del incremento. La comparación de término principal y resto puede preservar su signo en ese lado sin producir ninguna salida negativa. Esa versión unilateral permite un mínimo relativo. La conclusión impar interior necesitaba precisamente las entradas del lado ausente.

21.7. Aproximantes con certificados racionales

Para aproximar una cantidad concreta tendremos que acompañar el valor del polinomio con una región donde podamos controlar el resto. En los ejemplos siguientes, una identidad finita y una cota de derivada ofrecen dos maneras de construir ese certificado. En ambas mantendremos explícito el dominio de las operaciones. Primero tomemos $f(h) = 1/(1 - h)$ para $h < 1$, centro0. Inducción con la regla del cociente da $f^{(k)}(h) = k!/(1-h)^{k+1}$ y por ello

$T_{n,0}f(h) = \sum_{k=0}^{n} h^k$. La identidad geométrica finita proporciona un resto más preciso que un testigo:

$(1-h)\sum_{k=0}^{n} h^k = 1-h^{n+1}$, $\qquad R_{n,0}(h) = \frac{h^{n+1}}{1-h}$. En $|h| \le \rho < 1$, el denominador satisface $1-h \ge 1-\rho > 0$. Dividir por esa barrera positiva y acotar el numerador da $|R| \le \rho^{n+1}/(1-\rho)$ para todas las entradas de la región. El margen $1-\rho$ mide aquí la separación de la singularidad. La identidad sólo ha usado una suma finita y la cota no permite cruzar $h = 1$.

Para una raíz, sea $g(h) = \sqrt{1+h}$, $h > -1$. C18 da

$$g'(h) = \frac{1}{2\sqrt{1+h}}, \quad g''(h) = -\frac{1}{4(1+h)^{3/2}}, \quad g'''(h) = \frac{3}{8(1+h)^{5/2}}.$$

Aquí $(1+h)^{3/2}$ y $(1+h)^{5/2}$ abrevian productos de potencias enteras por la raíz positiva; las fórmulas proceden de producto, cociente y cadena, no de una regla nueva para exponentes reales. En cero, el aproximante de orden2 es $T_{2,0}g(h) = 1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8}$. Para $|h| \le 1/4$ tenemos $1+h \ge 3/4$. También $\sqrt{1+h} \ge 3/4$: los dos lados son no negativos y $(3/4)^2 \le 3/4 \le 1+h$. Esta barrera algo menor que la raíz del borde mantiene racional toda la estimación. Como $(1+h)^{5/2} = (1+h)^2\sqrt{1+h}$, obtenemos

$0 < g'''(h) \le \frac{3}{8(3/4)^2(3/4)} = \frac{8}{9}$. Lagrange da $|R_2(h)| \le (4/27)|h|^3$. En $h = 1/4$, el resto es positivo y $\frac{143}{128} < \sqrt{\frac{5}{4}} \le \frac{143}{128} + \frac{1}{432}$. El número 143/128 resulta de evaluar el polinomio en 1/4, y 1/432 resulta de sustituir esa entrada en $(4/27)|h|^3$. La tercera derivada es estrictamente positiva en todo el segmento y el desplazamiento también es positivo, por lo que el resto es mayor que cero. Esto justifica el extremo inferior abierto del intervalo.

Podemos cotejar el certificado con un mecanismo algebraico independiente. La diferencia de cuadrados es $5/4 - (143/128)^2 = 31/16384 > 0$. Racionalizar da $\sqrt{\frac{5}{4}} - \frac{143}{128} = \frac{31}{16384\left(\sqrt{5/4}+143/128\right)} \le \frac{31}{34688}$. Como $\sqrt{5/4} \ge 1$, el denominador es al menos $16384(271/128) = 34688$. Además $31 \cdot 432 = 13392 < 34688$, de modo que $31/34688 < 1/432$. La racionalización da en este caso una cota más ajustada; la obtenida con Taylor sigue siendo un certificado válido del mismo error.

C21-F07 · Aproximar y conservar un intervalo de error

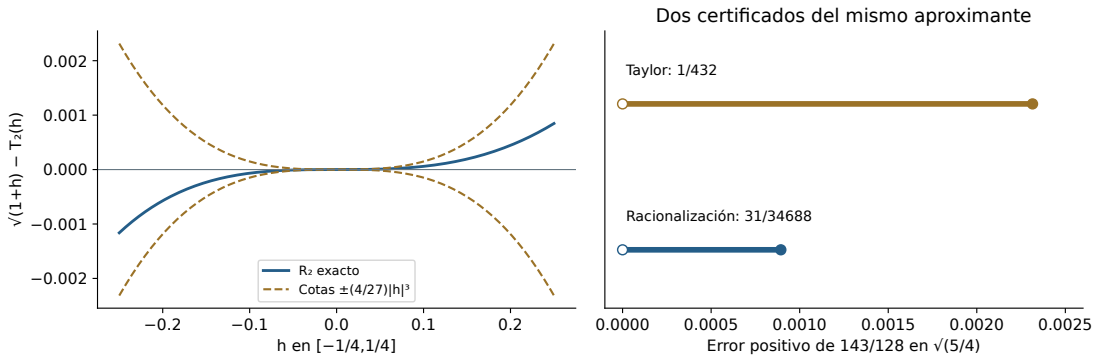


Figura 21.7. Para la raíz, T_2=1+h/2−h²/8 y en |h|≤1/4 vale $|R_2|$≤(4/27)|h|³. En h=1/4 el aproximante143/128 es inferior a √(5/4); Taylor acota su error por1/432 y racionalización por31/34688. Los extremos izquierdos abiertos indican error estrictamente positivo; no se infiere una coordenada de raíz desde la figura.

En cada certificado intervienen el aproximante, la región y una estimación válida en toda ella. Unas pocas muestras no dan por sí solas esa estimación ni permiten descubrir un denominador que se anula entre las entradas examinadas. El error controlado forma parte del resultado de la aproximación.

Ejercicios de la sección 21.7.

Ejercicio 31. Una identidad geométrica todavía finita

Demuestra$T_{n,0}(1/(1-h)) = \sum_{k=0}^{n} h^k$ y calcula su resto exacto sin usar series.

Solución. Inducción con cociente y producto da$f^{(k)} = k!/(1-h)^{k+1}$; al evaluar en0 el coeficiente de Taylor es1. Multiplicar la suma finita por$1-h$ cancela términos vecinos y deja$1-h^{n+1}$. Como$1-h \neq 0$ en el dominio$h < 1$, despejamos la función y obtenemos resto$h^{n+1}/(1-h)$. No se tomó un límite de sumas ni se identificó una serie infinita.

La inducción de coeficientes y la identidad geométrica usan únicamente operaciones finitas. El resto exacto conserva el denominador de la función y exige no anulación. No se ha justificado una serie infinita al escribir el modelo. Cada orden dispone de su propia identidad y región de control.

Ejercicio 32. La raíz y su tercera derivada

Calcula$T_{2,0}\sqrt{1+h}$ y justifica la cota$0 < g^{(3)} \leq 8/9$ en$|h| \leq 1/4$ con productos y raíces.

Solución. Por C18, $g' = 1/(2\sqrt{1+h})$, $g'' = -1/[4(1+h)\sqrt{1+h}]$ y$g^{(3)} = 3/[8(1+h)^2\sqrt{1+h}]$. En0 se obtienen1,1/2,$-1/4$, luego$T_2 = 1 + h/2 - h^2/8$. En el segmento$1+h \geq 3/4$ y su raíz positiva es al menos3/4, pues$(3/4)^2 \leq 3/4$. El denominador de la tercera derivada es al menos$8(3/4)^3 = 27/8$; el cociente queda a lo sumo8/9 y es positivo. No usamos derivación de una potencia real general.

Las reglas de raíz y recíproco se aplican en entradas mayores que menos uno, donde los denominadores son positivos. Los datos centrales dan el coeficiente cuadrático menos un octavo. Las barreras racionales inferiores del denominador producen el control de tercera derivada en toda la región, incluso sin conocer raíces exactas de sus entradas.

Ejercicio 33. Un intervalo racional para una raíz

Usa E032 y Taylor–Lagrange para certificar$\sqrt{5/4}$ por un intervalo racional. Explica la inclusión estricta o débil de cada borde.

Solución. En$h = 1/4$, $T_2 = 1 + 1/8 - 1/128 = 143/128$. La cota de tercera derivada8/9 da$|R_2| \leq (8/9)(1/4)^3/6 = 1/432$. Como la tercera derivada es positiva en todo el segmento y el incremento cúbico es positivo, $R_2 > 0$. Así$143/128 < \sqrt{5/4} \leq 143/128 + 1/432$. La primera desigualdad es estricta por signo; la segunda sólo es una cota superior no estricta. No se extrajo una raíz aproximada del dibujo.

La entrada un cuarto queda dentro de la región controlada y el testigo es interior a su segmento con cero. La tercera derivada positiva y el incremento cúbico positivo hacen estricto el borde inferior del certificado. La cota absoluta sólo da desigualdad débil en el superior. Las fracciones proceden de sustituciones exactas. **Retorno visual.** Véase C21-F07, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 34. Un cotejo por racionalización

Calcula un certificado de error para$143/128$ como aproximante de$\sqrt{5/4}$ mediante diferencia de cuadrados, y compáralo con$1/432$.

Solución. La diferencia es$5/4 - 20449/16384 = 31/16384 > 0$, por lo que el aproximante es inferior a la raíz positiva. Racionalizar da error$31/[16384(\sqrt{5/4} + 143/128)]$. Como la raíz es al menos1, el denominador es al menos$16384(271/128) = 34688$, y el error es a lo sumo$31/34688$. Para comparar, $31 \cdot 432 = 13392 < 34688$, así$31/34688 < 1/432$. La cota algebraica es más ajustada; ambas certifican el mismo aproximante con premisas distintas.

La diferencia positiva de cuadrados compara dos cantidades no negativas y determina el sentido del error. La racionalización lo expresa como cociente por una suma protegida. Una cota inferior sencilla de la raíz basta para obtener una barrera racional más pequeña. El cotejo es independiente del testigo de Taylor.

Ejercicio 35. La singularidad impone el margen

Para$1/(1-h)$ con centro0 yn fijo, demuestra la cota en$|h| \le \rho < 1$ y explica por qué no se conserva una cota uniforme al acercarse a$h = 1$.

Solución. El resto exacto es$h^{n+1}/(1-h)$. En la región declarada, $1-h \ge 1-\rho > 0$ y$|h|^{n+1} \le \rho^{n+1}$, así$|R| \le \rho^{n+1}/(1-\rho)$. Para$n$ fijo, si$h \uparrow 1$, el numerador tiende a1 y el denominador positivo a0. Por ejemplo, para$h$ suficientemente próximo el numerador supera$1/2$, y tomar$1-h$ menor que$1/(2B)$ hace al resto mayor que cualquier$B > 0$. El margen de dominio no puede borrarse.

El margen $1-\rho$ limita el denominador uniformemente sólo en la región fijada. Al acercarse a la singularidad ese margen desaparece y el numerador del resto no tiende a cero para un orden fijo. Una barrera de error previa puede entonces infringirse con entradas todavía válidas. No se elimina una condición de dominio al conservar la fórmula.

21.8. Combinar modelos y elegir la resolución

Los modelos locales también pueden combinarse. Para un $n \ge 1$ fijo y centro0, supongamos $f(h) = P(h)+u(h)$ y $g(h) = Q(h)+v(h)$, con polinomios de grado a lo sumo$n$ y $u, v = o(|h|^n)$. La suma tiene modelo $P + Q$ porque la triangular suma los dos errores normalizados. Para el producto, $fg = PQ + Pv + Qu + uv$.

Los polinomios P, Q están acotados en algún radio por continuidad en cero. Por tanto $|Pv|/|h|^n$ y $|Qu|/|h|^n$ tienden a cero: en cada producto hay un factor acotado y otro que desaparece. Además $v(h) \to 0$ y $|uv|/|h|^n = (|u|/|h|^n)|v| \to 0$. La suma de estos tres errores es $o(|h|^n)$. Si PQ tiene términos de grado mayor que n, su suma finita se escribe como $h^{n+1}B(h)$, con B polinómico y acotado cerca de cero. Su valor absoluto dividido por $|h|^n$ es $|h||B(h)|$ y también tiende a cero. Podemos eliminar esos términos y conservar un modelo de grado a lo sumo n, sin derivar los restos.

Al sustituir expresiones en una aproximación hay que conservar tanto la región como la escala del error. Para verlo con un denominador explícito, consideremos $F(h) = \frac{1}{1-h-h^2}$. En $|h| \le 1/4$, el denominador es al menos $1 - 1/4 - 1/16 = 11/16 > 0$. Un cálculo exacto da $(1 + h + 2h^2)(1 - h - h^2) = 1 - 3h^3 - 2h^4$, y así

$F(h) = 1+h+2h^2+\frac{3h^3+2h^4}{1-h-h^2}$. En el segmento elegido, $|3h^3+2h^4| \le (3+2/4)|h|^3 = (7/2)|h|^3$. Dividir por la barrera $11/16$ da la cota $(56/11)|h|^3$ para el resto. Podemos verificar además que el polinomio es el Taylor de orden 2. Si $d(h) = 1 - h - h^2$, cociente y cadena dan $F' = (1 + 2h)/d^2$ y $F'' = 2/d^2 + 2(1 + 2h)^2/d^3$. En cero resultan $F(0) = 1$, $F'(0) = 1$ y $F''(0) = 4$, que producen los coeficientes $1, 1, 2$. La barrera del denominador garantiza la validez de estas operaciones en toda la región.

La misma disciplina permite elegir el grado a partir de una tolerancia. Fijemos la región $|h| \le 1/4$ y pidamos error a lo sumo $1/1000$ para $1/(1 - h)$. La identidad de §21.7 expresa la cota en función del orden: $|R_n(h)| \le \frac{(1/4)^{n+1}}{3/4} = \frac{1}{3\cdot 4^n}$. Para $n = 4$ resulta $1/768 > 1/1000$, y para $n = 5$ resulta $1/3072 < 1/1000$. El orden 5 certifica, pues, la tolerancia en toda la región. Para comprobar que es el menor orden que sirve, usamos el resto exacto en $h = 1/4$, donde se alcanza la cota. Cada orden hasta 4 tiene allí un error al menos $1/768$, porque los valores de la cota decrecen al multiplicarse por $1/4$. En esa entrada, el polinomio de orden 5 vale $1365/1024$ y su diferencia respecto de $4/3$ es exactamente $1/3072$.

Cambiar el centro también cambia todos los datos. Para una función polinómica conocida se puede reexpandir exactamente; para una función general no se trasladan los coeficientes centrales sin nueva información o un control del error de traslado. Aquí cada expansión conserva su centro declarado. Podemos precisar también el límite de los datos finitos, incluso si añadimos valores muestreados. Sean $h_1, \dots, h_m$ muestras no nulas y P un modelo central de orden n. Los polinomios

$P(h) + A\,h^{n+1}\prod_{j=1}^{m}(h-h_j)^2$ conservan los datos centrales hasta orden n, pues el término añadido tiene el factor h^{n+1}, y conservan los valores de todas las muestras, donde se anula

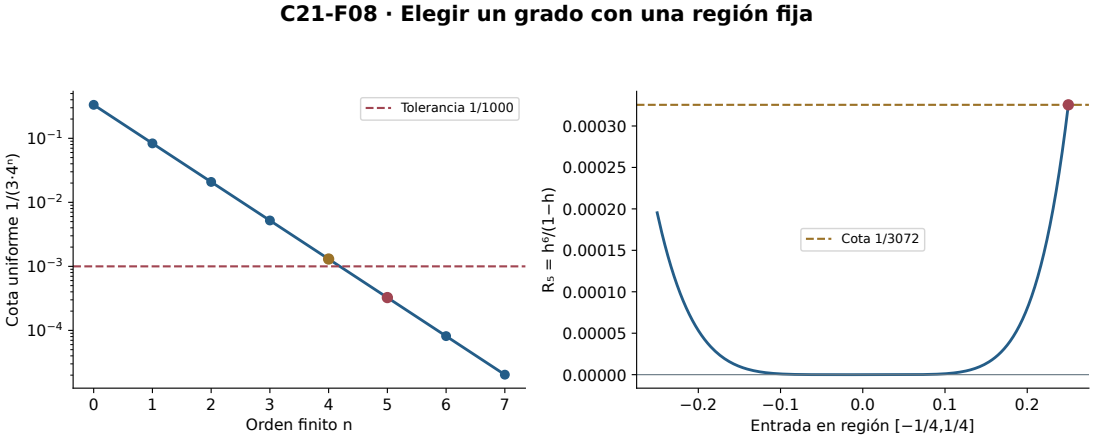


Figura 21.8. Para$1/(1-h)$ en $|h|\le 1/4$, el resto finito da cota$1/(3\cdot 4^n)$. El orden4 falla la tolerancia$1/1000$ porque en$1/4$ su error es$1/768$; orden5 la satisface con$1/3072$, que se alcanza allí. El panel izquierdo representa ocho grados finitos y no afirma una expansión infinita.

otro factor. En cualquier otra entrada no nula, el factor que multiplica a A es distinto de cero: al variar este real podemos modificar allí el valor arbitrariamente. Si no hay muestras, el producto vacío vale uno y el mismo razonamiento sigue siendo válido. Los datos centrales y las muestras no determinan una función completa ni una cota universal fuera de la región certificada.

Reducir el radio con un orden fijo y aumentar el grado en una región fija son problemas diferentes. Peano responde al primero mediante un límite normalizado; en el ejemplo del recíproco, la identidad finita permitió resolver el segundo con una cota explícita. Ninguna de estas conclusiones afirma por sí sola que una expansión infinita represente a la función: para ello habría que estudiar las sumas infinitas y justificar de nuevo el comportamiento del resto.

Ejercicios de la sección 21.8.

Ejercicio 36. Multiplicar modelos sin derivar errores

Si$f = P + u$ y$g = Q + v$ con$u, v = o(|h|^n)$ y$n \ge 1$, demuestra que el producto truncado dePQ a grado$n$ es un modelo del mismo orden.

Solución. El producto exacto es$PQ + Pv + Qu + uv$. Los polinomios están acotados cerca de0; por ello los cocientes normalizados dePv yQu tienden a0. También$v \to 0$ y$|uv|/|h|^n = (|u|/|h|^n)|v| \to 0$. Eliminar términos de grado mayor que$n$ dePQ añade un error$h^{n+1}B(h)$ con$B$ polinómico acotado; normalizar deja un factor$|h|$ y tiende a0. La triangular reúne esos errores. No se derivaronu, v ni se supuso que sus derivadas fueran pequeñas.

La expansión exacta del producto exhibe sus tres errores antes de estimarlos. Las barreras de polinomios y la convergencia de razones normalizadas controlan los términos cruzados. Los términos truncados tienen grado superior y aportan otro error pequeño. Ningún paso requiere derivadas de los restos.

Ejercicio 37. Sustitución con denominador protegido

Construye el Taylor de orden2 de$F(h) = 1/(1-h-h^2)$ y una cota cúbica válida en$|h| \le 1/4$.

Solución. Pongamos$d = 1-h-h^2$, que es al menos$11/16$ en la región. Por cociente,$F' = (1+2h)/d^2$, de valor1 en0; derivar da$F'' = 2/d^2 + 2(1+2h)^2/d^3$, de valor4 en0. Así$T_2 = 1+h+2h^2$. La identidad$(1+h+2h^2)d = 1-3h^3-2h^4$ da resto$(3h^3+2h^4)/d$. Su magnitud es a lo sumo$(3+2/4)|h|^3/(11/16) = (56/11)|h|^3$. El margen protege tanto la función como su certificado.

El denominador se protege mediante una desigualdad en toda la región antes de aplicar reglas de cociente. Los datos centrales y la multiplicación del modelo por ese denominador verifican coeficientes y resto. La barrera once dieciseisavos permite convertir la identidad en cota cúbica. Es una garantía uniforme de región, no una cuenta aislada.

Ejercicio 38. Elegir el menor grado certificado

Para$1/(1-h)$ en$|h| \le 1/4$, encuentra el menor orden que garantiza error menor que$1/1000$ usando la fórmula geométrica. Comprueba el valor en$h = 1/4$.

Solución. La cota exacta uniforme es$1/(3 \cdot 4^n)$ y se alcanza en$h = 1/4$. Para$n = 4$ vale$1/768 > 1/1000$; para$n = 5$ vale$1/3072 < 1/1000$. Como cada aumento divide por4, ningún orden menor que4 puede servir, y4 tampoco: el mínimo es5. El polinomio en$1/4$ es la suma de seis términos$1 + 1/4 + 1/16 + 1/64 + 1/256 + 1/1024 = 1365/1024$. La función vale$4/3$; la diferencia es$(4096 - 4095)/3072 = 1/3072$.

La cota exacta se alcanza en la entrada positiva un cuarto. Por eso el fracaso del orden cuatro es un error real en una entrada, no sólo falta de un certificado. La reducción geométrica de las cotas descarta también todos los órdenes menores. El orden cinco cumple la tolerancia estricta y su valor se verifica con seis términos finitos.

Ejercicio 39. Trasladar un centro conocido

Reexpandet^3 en centro2 y compara con centro1. Explica por qué este traslado exacto no autoriza trasladar sin datos los coeficientes de una función general.

Solución. En centro2, con$u = t - 2$, la identidad$(2 + u)^3 = 8 + 12u + 6u^2 + u^3$ da los datos y todos los coeficientes. En centro1, con$h = t - 1$, eran$1 + 3h + 3h^2 + h^3$. Se relacionan sustituyendo$h = 1 + u$, porque conocemos la función polinómica completa y el resto de orden3 es0. Para una función general, el modelo central finito conserva sólo datos en su centro y lleva un resto fuera de él. Trasladarlo sin controlar ese resto puede cambiar incluso el valor y las derivadas en el nuevo centro.

El traslado exacto utiliza la identidad del cubo completo, cuyo resto al orden tres es cero. Sustituir la relación entre incrementos reexpande sus términos sin perder información. En una función general el resto puede alterar incluso la evaluación en el nuevo centro. Por ello trasladar un modelo finito exige datos o control adicional.

Ejercicio 40. Muestras y datos que no determinan otra salida

Prueba que$P(h) + Ah^{n+1} \prod_{j=1}^{m} (h - h_j)^2$ conserva datos centrales hasta orden$n$ y valores en muestras no nulash_j. Muestra que en otra entrada$h_* \neq 0$ distinta de ellas puede imponerse cualquier salida.

Solución. El producto es polinómico. Multiplicarlo porh^{n+1} garantiza un factor de grado al menos$n + 1$ en0, de modo que todas las derivadas centrales hasta$n$ se anulan. En cadah_j hay un factor cero y se conserva$P(h_j)$. Enh_* distinto de0 y de todas las muestras, el factor$B = h_*^{n+1} \prod_j (h_* - h_j)^2$ es no cero. Para imponer salida$b$, elegimos$A = (b - P(h_*))/B$. Es una construcción finita, también con producto vacío1 si$m = 0$. Conservar esos datos no certifica por sí solo un error en una región completa ni una representación infinita.

Los factores de muestra conservan sus evaluaciones y la potencia central conserva las derivadas hasta el orden declarado. En una entrada distinta de todas ellas el producto es no nulo y se puede despejar el coeficiente libre. El caso de ninguna muestra adicional usa producto vacío uno. La construcción muestra los valores de región que una tabla y datos centrales finitos dejan indeterminados. **Retorno visual.** Véase C21-F08, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Capítulo 22

Partir, refinar, acumular

Para acumular los valores de una función en un intervalo, podemos dividirlo en piezas, escoger una altura en cada una y sumar los productos de altura por anchura. El resultado depende de las piezas y de las alturas elegidas. Antes de llamarlo integral necesitamos precisar qué significa hacer pequeñas todas las piezas y cómo controlar el efecto de esas elecciones. Las primeras garantías procederán de identidades entre sumas finitas.

C01–C03 aportan naturales, orden real y arquimedianidad; funciones, inducción y sumas finitas son interfaces heredadas. La integral elemental externa motiva y no se usa para demostrar. C23 reserva Darboux y sus equivalencias; C24 el teorema fundamental.

22.1. Un intervalo convertido en datos finitos

Fijemos reales $a < b$. Una partición es una lista finita estrictamente creciente

$$P = (x_0, \dots, x_n), \qquad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \quad n \geq 1.$$

La lista representa una función tipada del segmento natural $\{0, \dots, n\}$ a $[a, b]$, junto con su longitud. El índice es natural, el nodo y la anchura son reales. La colección de tales objetos es un conjunto: sus grafos viven en el conjunto potencia de $\mathbb{N} \times [a, b]$; separar los grafos tipados y las listas que cumplen las condiciones da las particiones. Es no vacía porque (a, b) es una partición.

Para $1 \leq i \leq n$, llamamos $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ y $\Delta_i = x_i - x_{i-1} > 0$. La inducción que añade una diferencia al final prueba la telescopía $\sum_{i=1}^{n} \Delta_i = b - a$. En el paso, $(x_n - a) + (x_{n+1} - x_n) = x_{n+1} - a$; no hay suma infinita. Además, estos intervalos cubren $[a, b]$. Si $t < b$, el menor índice j con $t < x_j$ existe en un conjunto natural finito no vacío; entonces $x_{j-1} \leq t < x_j$. Si $t = b$, usamos el último intervalo. Dos interiores distintos son disjuntos; intervalos consecutivos comparten un nodo. No llamamos disjuntos a los intervalos cerrados.

Para una representación como piezas disjuntas se puede usar $[a, x_1]$ y $(x_{i-1}, x_i]$ para $i \geq 2$. Más adelante distinguiremos el reparto de nodos de la longitud de las piezas. En $[0, 1]$, la lista $(0, 1/4, 1)$ tiene anchuras $1/4, 3/4$, no dos partes iguales. La longitud $b - a$ es un dato algebraico demostrado. Un dibujo de rectángulos ayuda a reconocerla, pero aquí no presupone una noción de área para regiones curvas. Los intervalos degenerados y la orientación inversa quedan fuera de este contrato inicial.

Ejercicios de la sección 22.1.

Ejercicio 1. Lista o dibujo

Decide cuáles de $(0, 1/2, 1)$, $(0, 1/2, 1/2, 1)$ y $(0, 3/4, 1/4, 1)$ son particiones de $[0, 1]$.

Solución. La lista $(0, 1/2, 1)$ cumple $0 < 1/2 < 1$ y conserva los dos extremos, así es una partición. En $(0, 1/2, 1/2, 1)$ aparece una comparación de igualdad y la anchura correspondiente es cero. La tercera lista tiene $3/4 > 1/4$, por lo que deja de crecer y produce una anchura negativa. Sólo la primera satisface todas las condiciones del contrato.

Ejercicio 2. Longitudes que telescopan

Calcula anchuras de $P = (-1, -1/4, 1/2, 2)$ y demuestra la suma general por inducción.

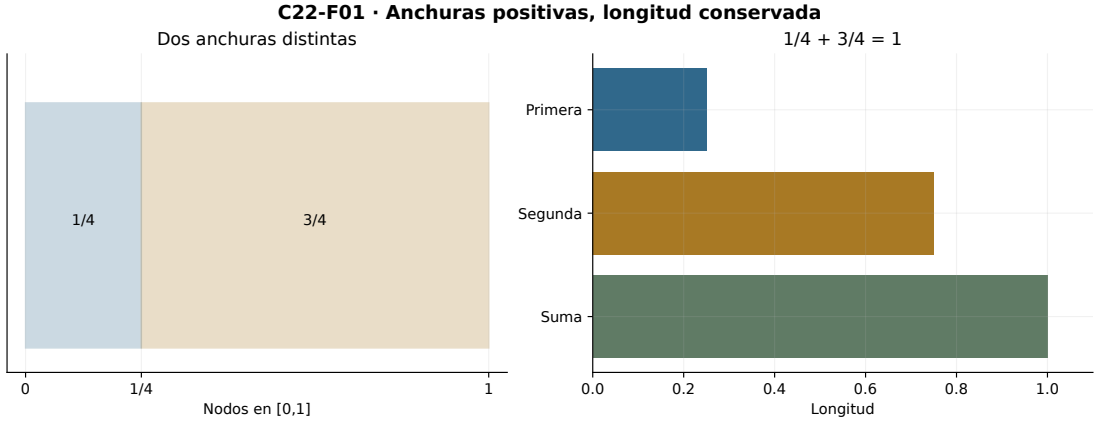


Figura 22.1. En [0,1], P=(0,1/4,1) tiene anchuras1/4 y3/4, suma1. Los cerrados vecinos comparten1/4; sus interiores son disjuntos.

Solución. Las anchuras son $-1/4-(-1)=3/4$, $1/2-(-1/4)=3/4$ y $2-1/2=3/2$. Su suma vale $3=2-(-1)$. Para una pieza, la suma general es x_1-x_0. Si hasta la pieza r vale x_r-x_0, añadir $x_{r+1}-x_r$ deja $x_{r+1}-x_0$. La inducción finita prueba la identidad de longitudes para cualquier partición. **Retorno visual.** Véase C22-F01, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 3. Una entrada en su pieza

Para la partición del ejercicio anterior localiza $t=0$ y $t=2$; demuestra la cobertura general.

Solución. Cero queda en $[-1/4,1/2]$, la segunda pieza, y dos en $[1/2,2]$, la última. Para una entrada $t<b$, el conjunto de índices con $t<x_j$ es no vacío porque contiene a n. Su mínimo j es positivo y la minimalidad da $x_{j-1}\le t<x_j$. Para $t=b$ se usa directamente la última pieza, existente porque $n\ge 1$. Así todo el segmento queda cubierto.

Ejercicio 4. Cerrar no es separar

Explica el solapamiento de piezas cerradas y construye una cobertura disjunta para $(0,1/3,2/3,1)$.

Solución. Las piezas cerradas comparten sus nodos interiores: un tercio está en las dos primeras y dos tercios en las dos últimas. Una cobertura disjunta es $[0,1/3]$, $(1/3,2/3]$ y $(2/3,1]$. Los nodos compartidos se asignan ahora a una sola pieza y las demás entradas conservan su ubicación. La unión sigue siendo $[0,1]$ y las longitudes son las mismas.

Ejercicio 5. El tipo de los objetos

Describe una codificación de todas las particiones como conjunto y exhibe un elemento.

Solución. Una partición puede codificarse por (n,p), donde $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 1$ y $p:\{0,\dots,n\}\to[a,b]$. Los grafos de esas funciones pertenecen al conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{N}\times[a,b])$, así un ambiente para los códigos es $\mathbb{N}\times\mathcal{P}(\mathbb{N}\times[a,b])$. Separar los códigos con extremos $p(0)=a$, $p(n)=b$ y crecimiento estricto define el conjunto de particiones. El código con $n=1$ y valores a,b pertenece a él porque $a<b$.

22.2. Refinar conservando los cortes

Escribimos $V(P)=\{x_0,\dots,x_n\}$. La relación $P\preceq Q$ significa $V(P)\subseteq V(Q)$: el miembro derecho conserva todos los cortes antiguos. Admitimos igualdad; un refinamiento propio exige inclusión propia. Reflexividad y transitividad vienen de inclusión. Si hay inclusión en ambas direcciones, las listas estrictamente ordenadas del mismo conjunto finito coinciden: su primer nodo es el mínimo y se repite este argumento en el conjunto restante. Así tenemos antisimetría.

Para insertar $t \in (a,b)\setminus V(P)$, tomamos el menor j con $t < x_j$. La minimalidad y $t \neq x_{j-1}$ dan $x_{j-1} < t < x_j$. La nueva lista copia los nodos anteriores a j, coloca t en j y desplaza una posición los demás. Sus únicas nuevas comparaciones son $x_{j-1} < t < x_j$; conserva extremos y es estricta. Divide una anchura en dos cuya suma es la antigua:

$(t-x_{j-1})+(x_j-t) = x_j-x_{j-1}$. Insertar un nodo ya presente no modifica la lista. Repetir un nodo produciría una anchura cero y violaría la definición. Dos particiones pueden tener cortes diferentes, de modo que ninguna refine a la otra. Para compararlas conservaremos todos los nodos de ambas. Recorremos la lista de Q e insertamos en P cada nodo que aún no aparezca. El procedimiento de inserción anterior y una inducción finita construyen una partición R con $V(R) = V(P)\cup V(Q)$. Por construcción $P \preceq R$ y $Q \preceq R$. Si otra partición S refina a ambas, contiene todos los nodos de la unión y por ello $R \preceq S$. Así obtenemos el menor refinamiento común mediante un número finito de inserciones.

Por ejemplo, $(0,1/2,1)$ y $(0,1/3,2/3,1)$ tienen refinamiento común $(0,1/3,1/2,2/3,1)$. Sus cuatro anchuras son $1/3,1/6,1/6,1/3$. Refinar no quiere decir desplazar los cortes a posiciones aparentemente más regulares: reemplazar $1/2$ por $1/3$ pierde un nodo.

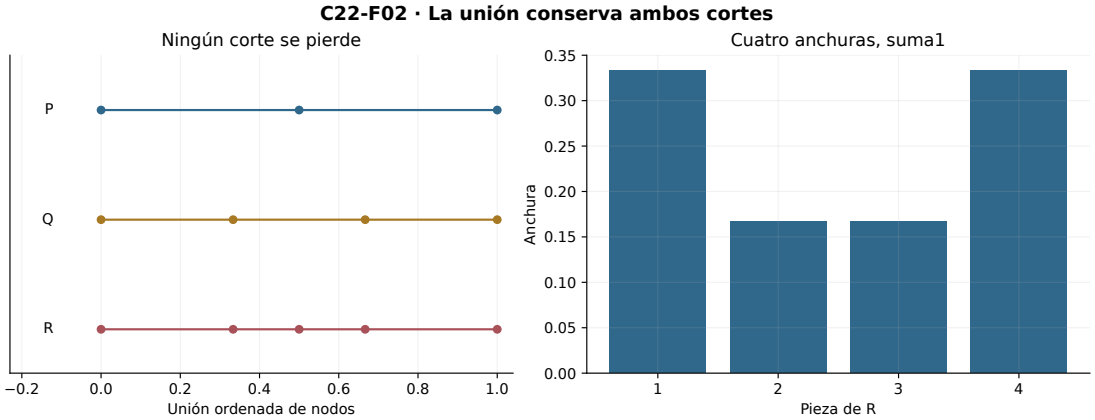


Figura 22.2. P=(0,1/2,1) y Q=(0,1/3,2/3,1) se conservan en R=(0,1/3,1/2,2/3,1). Las anchuras de R son1/3,1/6,1/6,1/3.

Ejercicios de la sección 22.2.

Ejercicio 6. Insertar sin repetir

Inserta $t = 2/5$ en $(0,1/4,3/4,1)$; identifica las dos anchuras nuevas.

Solución. Las desigualdades $1/4 < 2/5 < 3/4$ localizan la inserción en la segunda pieza. La nueva lista es $(0,1/4,2/5,3/4,1)$. Sus dos anchuras nuevas son $2/5-1/4 = 3/20$ y $3/4-2/5 = 7/20$, ambas positivas y con suma $1/2$. Las otras dos anchuras siguen siendo $1/4$. Se conserva cada corte antiguo y se añade una pieza.

Ejercicio 7. La unión que compara

Construye el menor refinamiento común de $(0,1/2,1)$ y $(0,1/3,2/3,1)$ y justifica minimalidad.

Solución. La unión de nodos ordenada es $(0,1/3,1/2,2/3,1)$. Contiene ambas listas originales, por lo que las refina. Cualquier refinamiento común debe contener cada nodo de una u otra y por tanto esta unión; de ahí que sea el menor. Las anchuras son $1/3,1/6,1/6,1/3$, todas positivas y con suma uno. **Retorno visual.** Véase C22-F02, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 8. Un nodo antiguo

Explica por qué insertar $1/2$ en $(0,1/2,1)$ no añade una pieza válida.

Solución. El punto medio ya pertenece al conjunto de nodos. Insertar una segunda copia produciría dos coordenadas consecutivas iguales y anchura cero. La inserción válida deja la lista $(0, 1/2, 1)$ como estaba. Su conjunto ordenado de nodos no contiene una nueva pieza.

Ejercicio 9. Orden de resolución

Demuestra reflexividad, transitividad y antisimetría de $\preceq$.

Solución. Reflexividad y transitividad proceden de las mismas propiedades de inclusión de conjuntos de nodos. Para antisimetría, $P \preceq Q$ y $Q \preceq P$ implican $V(P) = V(Q)$. Un conjunto finito de reales tiene una única lista estrictamente creciente: su primera entrada es el mínimo y, al retirarla, la inducción determina las restantes. Así las listas y sus longitudes coinciden y $P = Q$.

Ejercicio 10. Mover no es añadir

Compara $(0, 1/2, 1)$ y $(0, 1/3, 2/3, 1)$ bajo refinamiento; explica cómo corregir la comparación.

Solución. La segunda lista no contiene el nodo $1/2$ y la primera no contiene $1/3$ ni $2/3$. Ninguna conserva todos los nodos de la otra, así son incomparables bajo refinamiento. Su unión ordenada sí da un refinamiento común. Mover un corte o comparar sólo el número de piezas no sustituye la inclusión requerida.

22.3. La malla mide el peor intervalo

La **malla** es el máximo finito de las anchuras positivas: $\|P\| = \max_{1 \le i \le n} \Delta_i$. Ese máximo existe por inducción finita: comparar el siguiente real con el máximo anterior. Se cumplen $0 < \|P\| \le b - a$ y $b - a \le n\|P\|$, donde n en la última expresión significa su copia real. Por tanto $\|P\| \ge (b - a)/n$. Si $P \preceq Q$, cada pieza de Q queda dentro de alguna pieza de P. En efecto, entre dos nodos consecutivos de Q no puede haber un nodo antiguo: también sería de Q y contradiría que los extremos son consecutivos. Localizando el extremo izquierdo se identifica, pues, una pieza antigua que contiene toda la nueva. Su anchura no supera la del padre, y tomar máximos da $\|Q\| \le \|P\|$. La desigualdad puede ser una igualdad aun en un refinamiento propio: basta dejar sin dividir una pieza que conserve la anchura máxima.

Para conseguir una malla menor que un radio dado $\delta > 0$, repartimos la longitud en partes iguales. La partición uniforme U_n tiene nodos $a + (b - a)i/n$ y malla $(b - a)/n$. La arquimedianidad de C03 proporciona un natural $n > (b - a)/\delta$; es positivo y permite dividir para obtener $\|U_n\| < \delta$. Si también debemos conservar una partición ya fijada, tomamos su refinamiento común con U_n. Como refina a la uniforme, su malla sigue siendo menor que δ.

Contar intervalos no basta. En $[0, 1]$ podemos conservar $[0, 1/2]$ y dividir $[1/2, 1]$ en m piezas iguales. Hay $m + 1$ piezas, pero la malla es siempre $1/2$. Repetir este refinamiento con $m = 2^k$ da una cadena anidada cuyo número de piezas crece sin que la malla tienda a cero. La resolución requerida es global sobre todas las piezas, no sólo sobre la región donde se añadieron cortes.

Ejercicios de la sección 22.3.

Ejercicio 11. Máximo o promedio

Calcula malla y anchura media de $(0, 1/4, 1)$; demuestra $(b - a)/n \le \|P\|$.

Solución. Las anchuras son $1/4$ y $3/4$, por lo que la malla es $3/4$ y el promedio $1/2$. En general, cada $\Delta_i \le \|P\|$. Sumar las n desigualdades y usar telescopía da $b - a \le n\|P\|$. La copia real de $n \ge 1$ es positiva, y dividir entrega $(b - a)/n \le \|P\|$.

Ejercicio 12. Cada hija tiene padre

Demuestra que $P \preceq Q$ implica $\|Q\| \le \|P\|$.

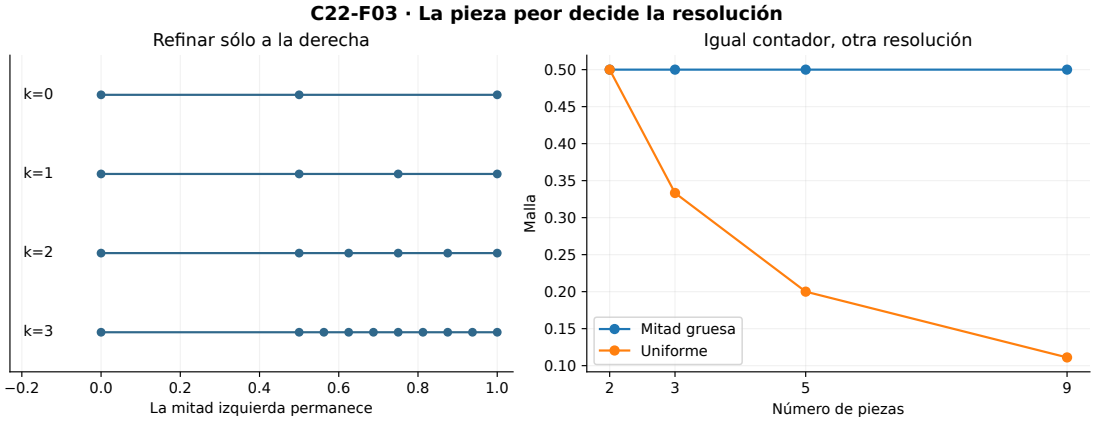


Figura 22.3. Dividir sólo la mitad derecha produce2ˆk+1 piezas y malla fija1/2. La uniforme de n piezas tiene malla1/n. Contar no controla la pieza mayor.

Solución. Sean $u < v$ dos nodos consecutivos de Q. Ningún nodo de P puede quedar estrictamente entre ellos, pues también sería nodo de Q. Por ello la pieza $[u, v]$ está contenida en algún padre de P. Su anchura no supera la del padre, que a su vez no supera $\|P\|$. Tomar el máximo de todas las anchuras nuevas da $\|Q\| \le \|P\|$. **Retorno visual.** Véase C22-F03, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 13. Más piezas, mismo defecto

Construye una cadena de refinamientos de $[0, 1]$ con número de piezas creciente y malla$1/2$.
Solución. Para $k \ge 0$ tomamos los nodos cero, un medio y $1/2 + j/2^{k+1}$ para $1 \le j \le 2^k$. Los nuevos cortes sólo subdividen la mitad derecha y los cortes anteriores se conservan. La mitad izquierda sigue siendo una pieza de anchura $1/2$, mientras todas las derechas miden $1/2^{k+1} \le 1/2$. La malla es siempre $1/2$, aunque el número de piezas $2^k + 1$ crece sin cota.

Ejercicio 14. Resolución prescrita

Construye una partición de $[-1, 2]$ con malla estrictamente menor que$1/10$.
Solución. El segmento tiene longitud tres. Una uniforme de treinta y una piezas tiene nodos $x_i = -1+3i/31$ y anchura $3/31 < 1/10$. Su lista es estrictamente creciente y va de menos uno a dos. Con treinta piezas se obtendría malla exactamente $1/10$, insuficiente para el pedido estricto.

Ejercicio 15. Conservar y mejorar

Dada P y $\delta > 0$, prueba que hay un refinamiento de P de malla menor que δ.
Solución. Arquimedianidad da un natural $n > (b-a)/\delta$, y la uniforme U_n cumple $\|U_n\| < \delta$. Formamos el refinamiento común R con los nodos de P y U_n. Conserva todos los cortes de P y su malla no supera la de U_n. Por tanto $P \preceq R$ y $\|R\| < \delta$.

22.4. Etiquetas y acumulación firmada

Una partición etiquetada es (P, ξ), con un dato real $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ por cada pieza. La familia de etiquetas es una función de índices, no un conjunto que olvide cuál corresponde a cada pieza. Un nodo compartido puede etiquetar las dos piezas vecinas; no hay prohibición de repetir etiquetas. Existen etiquetas explícitas: extremos izquierdos, derechos o puntos medios. Para $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definimos la suma finita

$S(f; P, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i$. Cada altura se evalúa dentro del dominio. La suma existe incluso si f no es acotada, pues se evalúa sólo un número finito de valores reales; eso no garantiza control uniforme de todas las sumas. Para $f \equiv c$, telescopía da $S = c(b - a)$ para

cualquier partición y etiquetas. Alturas negativas producen contribuciones negativas: la suma es acumulación firmada, no área geométrica siempre positiva.

Por distributividad de sumas finitas, $S(\alpha f+\beta g;P,\xi)=\alpha S(f;P,\xi)+\beta S(g;P,\xi)$. Si $f\le g$ en todo el intervalo, la positividad de cada anchura da $S(f;P,\xi)\le S(g;P,\xi)$. Se comparan la misma partición y las mismas etiquetas; cambiar esos datos puede cambiar el orden. Si $|f|\le M$, la triangular da $|S(f;P,\xi)|\le M(b-a)$, sin que f alcance su cota.

Para $f(x)=x$ en $[0,1]$, $P=(0,1/2,1)$ tiene sumas izquierda $1/4$, media $1/2$ y derecha $3/4$. Para $f(x)=2x-1$, las mismas etiquetas producen $-1/2,0,1/2$. La cancelación de la suma media no borra las dos contribuciones de distinto signo.

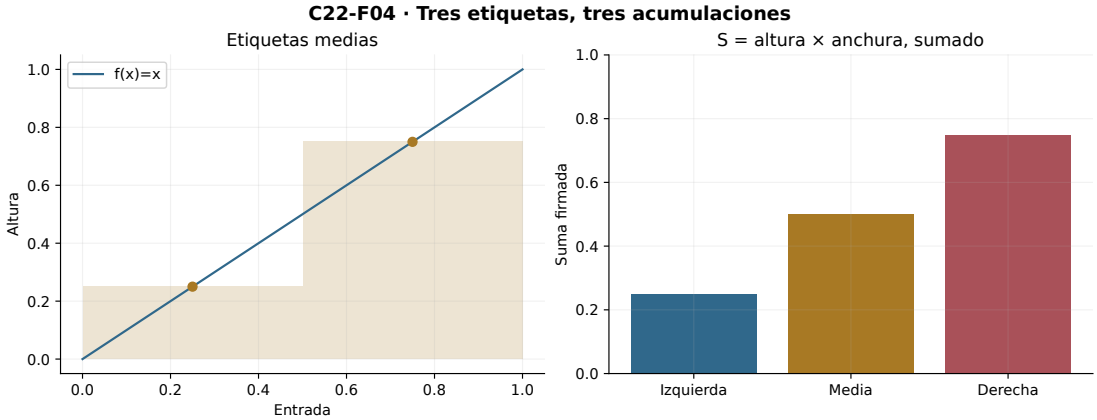


Figura 22.4. Para x en[0,1], dos piezas iguales dan sumas izquierda1/4, media1/2 y derecha3/4. Alturas etiquetadas, anchuras y valores se distinguen.

Ejercicios de la sección 22.4.

Ejercicio 16. Lineal con tres etiquetas

Para $f(x)=x$ y $(0,1/2,1)$ calcula sumas izquierda, media y derecha.

Solución. Las dos anchuras son $1/2$. Las etiquetas izquierdas $(0,1/2)$ dan $0\cdot 1/2+(1/2)\cdot 1/2=1/4$. Las medias $(1/4,3/4)$ dan $1/2$, y las derechas $(1/2,1)$ dan $3/4$. La función y partición son las mismas; sólo cambia la familia de alturas. Estas sumas finitas todavía no son iguales entre sí.

Ejercicio 17. Acumular con signo

Para $f(x)=2x-1$ y la misma partición calcula las tres sumas y explica la cancelación media.

Solución. Para $2x-1$, las alturas izquierdas son menos uno y cero, las medias menos un medio y un medio, y las derechas cero y uno. Ponderar cada pareja por las anchuras $1/2$ produce sumas $-1/2$, cero y $1/2$. En la media se cancelan contribuciones $-1/4$ y $1/4$. El resultado describe acumulación firmada; las magnitudes geométricas de ambas regiones no se cancelarían.

Retorno visual. Véase C22-F04, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 18. Álgebra de una suma

Demuestra linealidad y preservación de orden con partición y etiquetas fijas.

Solución. Con partición y etiquetas fijas, sustituimos $(\alpha f+\beta g)(\xi_i)=\alpha f(\xi_i)+\beta g(\xi_i)$. La distributividad de sumas finitas da $S(\alpha f+\beta g)=\alpha S(f)+\beta S(g)$. Si $f\le g$, cada término $(g(\xi_i)-f(\xi_i))\Delta_i$ es no negativo porque la anchura es positiva. Sumar prueba $S(f)\le S(g)$.

Ejercicio 19. Compartir una etiqueta

En $(0, 1/2, 1)$ usa la etiqueta$1/2$ para ambas piezas. ¿Es válida? Calcula la suma de x^2.
Solución. La etiqueta $1/2$ pertenece tanto a $[0, 1/2]$ como a $[1/2, 1]$, así es válida en ambas. Para el cuadrado, ambas alturas valen $1/4$. La suma es $(1/4)(1/2) + (1/4)(1/2) = 1/4$. Las etiquetas siguen siendo dos datos indexados aunque coincida su coordenada.

Ejercicio 20. Cota sin máximo

Si $-2 \le f \le 3$ en $[-1, 2]$, acota todas las sumas y su valor absoluto.
Solución. La longitud de $[-1, 2]$ es tres. Comparar las alturas con constantes da $-2 \cdot 3 \le S \le 3 \cdot 3$, es decir $-6 \le S \le 9$. La triangular y $|f| \le 3$ dan además $|S| \le 9$. Las barreras protegen todas las entradas sin exigir que exista un argumento de máximo o mínimo.

22.5. Lo que un cambio de etiquetas puede alterar

En una partición fija, dos familias ξ, η cumplen $|S(f; P, \xi) - S(f; P, \eta)| \le \sum_i |f(\xi_i) - f(\eta_i)|\Delta_i$. Al restar las sumas con la misma partición, las anchuras coinciden término a término. La desigualdad triangular da entonces la fórmula. Si para cada pieza disponemos de un número $d_i \ge 0$ que acota $|f(s) - f(t)|$ para todos $s, t \in I_i$, podemos sustituir esas cotas y obtener el certificado $\sum_i d_i \Delta_i$. Basta que sean barreras válidas; no exigimos que se alcancen ni que sean las mejores posibles. La oscilación exacta se construirá con supremos en C23.

Si f es Lipschitz con constante dada $L \ge 0$, entonces $|f(s) - f(t)| \le L|s - t|$ en todo el intervalo. Como las dos etiquetas de una pieza distan a lo sumo Δ_i, $|S(f; P, \xi) - S(f; P, \eta)| \le L \sum_i \Delta_i^2 \le L\|P\|(b - a)$. Se ha demostrado independencia progresiva de etiquetas sobre una partición; aún no existencia de un número límite para todas las particiones.

La misma idea permite comparar una partición con un refinamiento Q. Dentro de cada padre I_i, las anchuras de las piezas hijas J suman Δ_i. Podemos por ello escribir su contribución antigua como $\sum_{J \subset I_i} f(\xi_i)|J|$ y restar las nuevas contribuciones. Las dos alturas se evalúan en el mismo padre, así que su diferencia absoluta es a lo sumo $L\Delta_i \le L\|P\|$. Multiplicar por $|J|$ y sumar todas las hijas deja como longitud total $b - a$. Resulta

$|S(f; Q, \eta) - S(f; P, \xi)| \le L\|P\|(b - a)$. Para comparar P, Q arbitrarias, las llevamos a su refinamiento común R y elegimos allí etiquetas explícitas, por ejemplo los extremos izquierdos. El error entre cada suma original y la de R está controlado por la malla de su propia partición. La triangular da así $L(b - a)(\|P\| + \|Q\|)$. Una sola familia de etiquetas en un refinamiento finito basta para esta comparación.

No hay monotonía general de sumas etiquetadas al refinar. Para $f(x) = x$, la partición trivial etiquetada en $1/2$ da $1/2$; el refinamiento en mitades con etiquetas izquierdas da $1/4$ y con derechas $3/4$. Malla decreciente y orden de valores son asuntos distintos.

Ejercicios de la sección 22.5.

Ejercicio 21. Etiquetas que cambian

Demuestra la cota de diferencia de etiquetas y aplícala a $f(x) = x$ en una partición de $[0, 1]$.
Solución. Restar sumas con las mismas anchuras da $S_\xi - S_\eta = \sum_i (f(\xi_i) - f(\eta_i))\Delta_i$. Por triangular, su magnitud no supera $\sum_i |f(\xi_i) - f(\eta_i)|\Delta_i$. Para la identidad, cada diferencia es $|\xi_i - \eta_i| \le \Delta_i$. En $[0, 1]$ resulta $|S_\xi - S_\eta| \le \sum_i \Delta_i^2 \le \|P\|$, porque las anchuras suman uno.

Ejercicio 22. De muestras a todas las entradas

Explica por qué dos alturas casi iguales no proporcionan una cota local universal.
Solución. En una pieza de longitud positiva tomamos dos entradas muestreadas y una tercera distinta. Una función puede valer cero en las dos primeras y una altura H arbitrariamente grande en la tercera. Las muestras coinciden exactamente, pero usar la

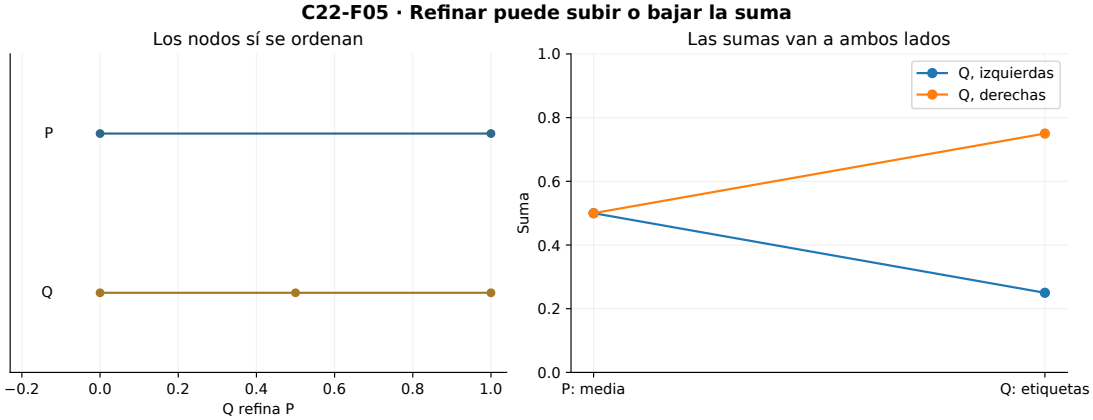


Figura 22.5. Para x, la partición trivial etiquetada en1/2 da1/2. El refinamiento en mitades puede dar1/4 con izquierdas o3/4 con derechas. No hay monotonía de sumas arbitrarias.

tercera como etiqueta cambia su contribución en H por la anchura. La cota local que protege cualquier etiqueta debe limitar todas las parejas de entradas de la pieza.

Ejercicio 23. Comparar con hijas

Prueba la cota $L\|P\|(b-a)$ entre una suma sobre P y otra sobre un refinamiento bajo Lipschitz.

Solución. En cada padre I_i, las anchuras de sus hijas suman Δ_i. Reescribimos la contribución antigua como $\sum_{J\subseteq I_i} f(\xi_i)|J|$. La etiqueta de cada hija y la antigua están en ese padre, de modo que Lipschitz limita su diferencia de alturas por $L\Delta_i$. Ponderar por las longitudes hijas y sumar da $L\Delta_i^2$. Finalmente, la triangular entrega $|S_P - S_Q| \le L\sum_i \Delta_i^2 \le L\|P\|(b-a)$.

Ejercicio 24. Una suma puede ir a ambos lados

Da dos sumas de un mismo refinamiento que estén a ambos lados de la suma media1/2 de x en la partición trivial.

Solución. La partición trivial $(0,1)$ con etiqueta media produce suma $1/2$ para la identidad. En el refinamiento $(0,1/2,1)$, las etiquetas izquierdas producen $1/4$ y las derechas $3/4$. Una queda por debajo y otra por encima de la suma antigua. Refinar conserva cortes, pero no decide un sentido de cambio para sumas etiquetadas. **Retorno visual.** Véase C22-F05, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 25. Dos resoluciones distintas

Si f es Lipschitz3 en $[0,2]$ y las mallas de P, Q son$\le$1/10 y$\le$1/20, acota cualquier diferencia de sus sumas.

Solución. Tomamos el refinamiento común y una familia explícita de etiquetas en él, por ejemplo las izquierdas. Cada suma original se compara con esa tercera usando su malla y la barrera Lipschitz tres. La triangular da $|S_P - S_Q| \le 3\cdot 2(\|P\|+\|Q\|) \le 6(1/10+1/20) = 9/10$. La cota protege todas las etiquetas originales y no identifica todavía un valor integral.

22.6. Escalones: exactitud finita y nodos excepcionales

Un modelo escalonado tiene nodos $a = z_0 < \cdots < z_m = b$ y valores c_j constantes en cada interior (z_{j-1}, z_j). En los nodos permite valores reales dados, distintos de los vecinos. Definimos su acumulación elemental $A(s) = \sum_{j=1}^{m} c_j(z_j - z_{j-1})$. Insertar un corte dentro de una pieza reparte su anchura y copia la misma constante en las dos hijas, por lo que

conserva A. Si dos representaciones describen la misma función en los interiores, pasamos a su refinamiento común. Cada interior hijo contiene su punto medio y está dentro de un interior de cada representación. Evaluar allí la función identifica las dos constantes; sumar las contribuciones de las hijas muestra que ambas representaciones dan el mismo A. Los valores en los nodos pueden ser excepcionales, pero esos puntos no añaden ninguna anchura a la suma definida.

No confundamos ese funcional con cualquier suma etiquetada. Si una partición respeta los cortes y sus etiquetas evitan los nodos, la suma es exactamente A. Si una etiqueta cae en un nodo cuyo valor es excepcional, puede perder esa igualdad. Más generalmente, si f, g sólo difieren en k puntos y $|f-g| \le D$, una etiqueta que no esté en esos puntos da diferencia cero. Cada punto puede pertenecer a lo sumo a dos piezas cerradas de una partición. Por ello

$|S(f;P,\xi) - S(g;P,\xi)| \le 2kD\|P\|$. La cuenta puede sobreestimar, y en extremos sólo interviene una pieza; es una cota suficiente. Para $k = 0$ es cero. Para controlar también particiones que no respetan los cortes del escalón, sea $B \ge 0$ una cota de todos sus valores, incluidas las excepciones. Refinamos P con la representación del escalón y asignamos a cada hija su constante interior; esta suma vale A. Un padre cerrado que no toca ningún nodo del escalón tiene altura constante y su contribución no cambia. Sólo debemos estimar los padres que tocan algún nodo. Cada uno de los $m+1$ nodos pertenece a lo sumo a dos padres, cada padre tiene longitud a lo sumo $\|P\|$ y cada diferencia de alturas es a lo sumo $2B$. Aunque esta cuenta repita algún padre, proporciona la barrera suficiente

$|S(s;P,\xi) - A(s)| \le 4B(m+1)\|P\|$. Es un certificado conservador válido para cualquier partición y etiquetas; no se invoca una integral previa.

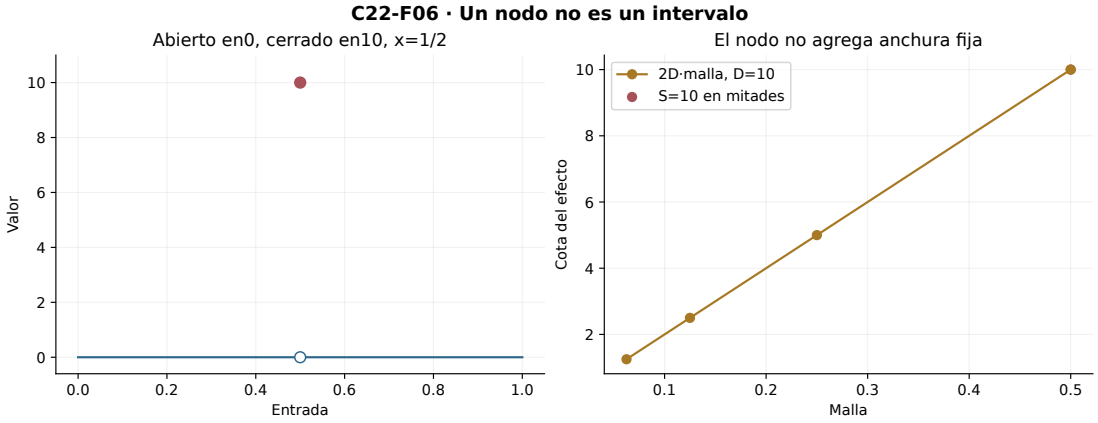


Figura 22.6. Función cero salvo valor10 en1/2: en la partición en mitades ambas etiquetas pueden caer en1/2 y dar S=10, aunque la acumulación escalonada sea0. La cota2D · malla controla el efecto cuando la malla disminuye.

Ejercicios de la sección 22.6.

Ejercicio 26. Un escalón firmado

Sea $s = 2$ en $(0, 1/3)$ y $s = -1$ en $(1/3, 1)$ con valores nodales arbitrarios. Calcula A y prueba invariancia por una inserción.

Solución. La acumulación es $A = 2(1/3) + (-1)(2/3) = 0$. Insertar un corte t dentro de una región constante de altura c conserva su contribución porque $c(t-u)+c(v-t) = c(v-u)$. Las demás regiones quedan intactas. Los valores nodales arbitrarios no aparecen en esta fórmula; su efecto sobre sumas etiquetadas se controla por otro argumento.

Ejercicio 27. Una etiqueta excepcional

Para la función cero salvo $s(1/2) = 10$, toma $(0, 1/2, 1)$ con ambas etiquetas en1/2. Compara S y A.

Solución. Las dos etiquetas iguales a un medio leen la altura excepcional diez. Con anchuras medias, $S = 10/2 + 10/2 = 10$. Las constantes interiores de ambos lados son cero y su acumulación A es cero. Esta diferencia pertenece a una suma concreta de malla $1/2$; al reducir la malla el certificado limita cuánto pueden pesar etiquetas excepcionales. **Retorno visual.** Véase C22-F06, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 28. Dos piezas por punto

Prueba la cota $2kD\|P\|$ para funciones que sólo difieren en k puntos y $|f - g| \le D$.
Solución. Un término sólo cambia si su etiqueta es alguno de los k puntos modificados. Cada punto pertenece como máximo a dos piezas cerradas, así hay a lo sumo $2k$ términos afectados. Cada uno tiene magnitud a lo sumo $D\Delta_i \le D\|P\|$. La triangular da $|S_f - S_g| \le 2kD\|P\|$. Si $k = 0$ o $D = 0$, las sumas coinciden.

Ejercicio 29. Sin alinear los cortes

Demuestra el certificado $4B(m + 1)\|P\|$ para un escalón con m piezas y $|s| \le B$.
Solución. Refinamos P añadiendo los $m + 1$ nodos del escalón y calculamos A con sus constantes interiores en las piezas hijas. Un padre que no toca esos nodos queda dentro de una región constante y aporta exactamente lo mismo que sus hijas. Los padres restantes son a lo sumo $2(m + 1)$ y su longitud total no supera $2(m + 1)\|P\|$. En cada uno, la diferencia entre su altura y cualquier altura hija no supera $2B$. Ponderar y sumar produce $|S - A| \le 4B(m + 1)\|P\|$, aun si el recuento repite algún padre.

Ejercicio 30. Representación duplicada

Representa la constante3 en $[0, 2]$ con una pieza y con cortes1/2 y3/2; demuestra que ambas acumulaciones valen6.
Solución. Una única pieza de longitud dos y altura tres aporta seis. Con cortes $1/2$ y $3/2$, las anchuras son $1/2$, uno y $1/2$, y las contribuciones $3/2$, tres y $3/2$ suman seis. La identidad de longitudes explica esta igualdad para cualquier subdivisión de una región constante. Dos representaciones generales se comparan mediante su refinamiento común.

22.7. Un límite que todas las etiquetas deben compartir

Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es **integrable de Riemann** si existe un real I tal que

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall (P, \xi) : \quad \|P\| < \delta \implies |S(f; P, \xi) - I| < \varepsilon.$$

El radio puede depender de $f, [a, b]$ y ε, pero se elige antes de la partición y de todas sus etiquetas. Denotamos ese real por $\int_a^b f(x)\,dx$. Es una definición mediante sumas finitas y tolerancias; la notación no afirma una antiderivada ni integra infinitesimales. Que se vea área en una figura es interpretación, no existencia automática. Para probar unicidad, supongamos que dos reales I, J cumplen el contrato y que $d = |I - J| > 0$. Pedimos error menor que $d/3$ a ambos. La construcción de §22.3 permite tomar una partición uniforme con malla menor que los dos radios; fijamos en ella etiquetas explícitas. Su suma queda a distancia menor que $d/3$ de cada candidato. La triangular daría entonces $d < 2d/3$, contradicción. La existencia de particiones pequeñas es esencial: permite usar las dos garantías sobre una misma suma.

Si un certificado demostrado tiene forma $|S - I| \le C\|P\|$ para todas las particiones y etiquetas, con $C \ge 0$, la definición se cumple: para $C > 0$ tomamos $\delta = \varepsilon/C$ y para $C = 0$ cualquier radio positivo. Por la sección anterior, los escalones son integrables y su integral es A. La cota de diferencias en k puntos prueba que cambiar valores finitos conserva cualquier integral existente: para $2kD > 0$ escogemos además $\|P\| < \varepsilon/(4kD)$ y pedimos error $\varepsilon/2$ al original; los casos de constante cero se separan.

El límite de una selección de sumas es consecuencia, no sustituto del contrato. Si $\|P_r\| \to 0$ y cada $\xi^{(r)}$ es una familia dada, integrabilidad implica $S(f; P_r, \xi^{(r)}) \to I$: para un δ válido,

las mallas eventualmente quedan por debajo. Observar sólo una familia de etiquetas o una cadena de refinamientos no controla las demás. En particular, contar piezas no demuestra ni siquiera que sus mallas tiendan a cero.

Estos certificados dan existencia para escalones y para las modificaciones finitas de una función ya integrable. Todavía falta un procedimiento que decida la integrabilidad de clases más amplias, como las funciones continuas. Las cotas inferiores y superiores de Darboux proporcionarán ese procedimiento en C23; la relación con la derivación requerirá después el teorema fundamental de C24.

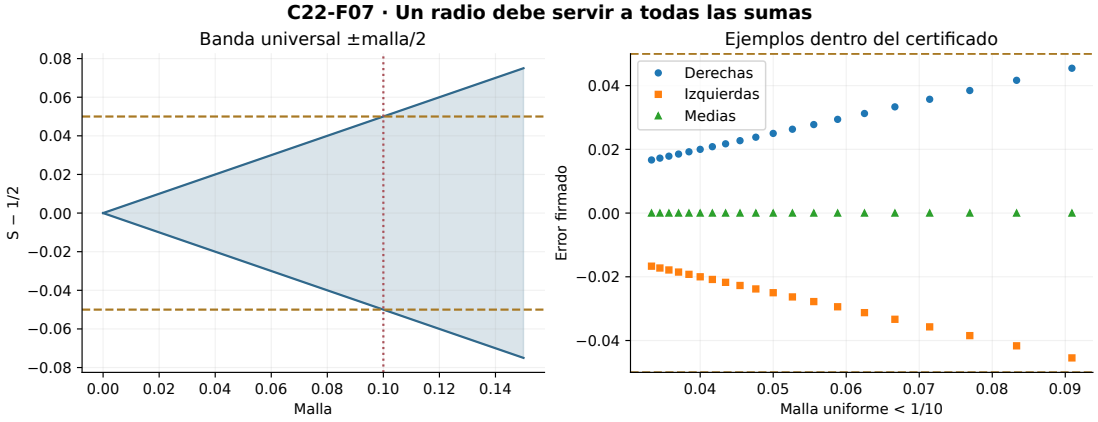


Figura 22.7. Para x en[0,1], todas las sumas cumplen |S−1/2|≤malla/2. Con tolerancia1/20, un radio1/10 sirve; se exige malla estrictamente menor. Las muestras sólo ilustran la banda universal demostrada.

Ejercicios de la sección 22.7.

Ejercicio 31. El orden de los cuantificadores

Escribe el contrato de integral y explica qué falla si el radio se permite depender de una partición ya elegida.

Solución. El contrato pide un real I tal que para cada $\varepsilon > 0$ exista $\delta > 0$ y para toda partición etiquetada con $\|P\| < \delta$ se cumpla $|S - I| < \varepsilon$. Si se permite elegir el radio después de una partición particular, puede tomarse $\delta \leq \|P\|$ y dejar falsa la premisa de esa implicación. Ese truco no controla las particiones realmente finas. El radio debe responder a la tolerancia antes de examinar cualquier partición o etiqueta.

Ejercicio 32. Un valor único

Demuestra unicidad del valor integral incluyendo una partición que satisfaga los dos radios.

Solución. Si $I \neq J$, fijamos $d = |I - J| > 0$ y obtenemos radios para error $d/3$ de ambos contratos. Arquimedianidad da una uniforme de malla menor que su mínimo. Con etiquetas izquierdas explícitas, su suma S cumple ambos errores. La triangular da $d \leq |I - S| + |S - J| < 2d/3$, contradicción. La partición construida muestra que la prueba aplica a una suma existente.

Ejercicio 33. Un radio efectivo

Si todas las sumas cumplen $|S - I| \leq 5\|P\|$ en $[0, 1]$, produce radio para tolerancia1/100 y número uniforme suficiente.

Solución. La barrera cinco pide malla estrictamente menor que $(1/100)/5 = 1/500$. Por ello sirve radio $\delta = 1/500$. Una uniforme de quinientas una piezas en $[0, 1]$ tiene malla $1/501 < \delta$ y garantiza el desafío. Con quinientas, la cota sólo daría error menor o igual que $1/100$, insuficiente para garantizar estrictitud. **Retorno visual.** Véase C22-F07, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 34. Cambiar finitos valores

Si f es integrable y g difiere sólo en k puntos por diferencias$\le D$, demuestra misma integral.
Solución. Con los mismos datos, $|S_g - I| \le |S_g - S_f| + |S_f - I|$. Pedimos primero a la integrabilidad de f un radio para error $\varepsilon/2$. Si $kD > 0$, la cota de modificación finita queda menor que $\varepsilon/2$ al exigir además malla menor que $\varepsilon/(4kD)$. El mínimo de ambos radios protege cualquier suma de g. Si $kD = 0$, las sumas coinciden y basta el primer radio. Así g cumple el contrato con el mismo I.

Ejercicio 35. De universal a una sucesión

Sea $\|P_r\| \to 0$ con etiquetas dadas. Demuestra convergencia de las sumas si f es integrable y distingue la recíproca no demostrada.
Solución. Para una tolerancia ε, el contrato universal entrega $\delta > 0$. Como las mallas dadas tienden a cero, existe un índice N desde el que todas son menores que δ. Sus sumas, con las etiquetas dadas, cumplen entonces $|S_r - I| < \varepsilon$. Esto prueba convergencia a I. Una sola sucesión de datos no controla por ese argumento las otras particiones y etiquetas cuantificadas por el contrato.

22.8. Certificados antes de fórmulas de integración

Para $f(x) = x$ en $[a, b]$, el punto medio $m_i = (x_{i-1} + x_i)/2$ satisface $\sum_i m_i \Delta_i = \frac{1}{2}\sum_i (x_i^2 - x_{i-1}^2) = \frac{b^2 - a^2}{2}$. Como $|\xi_i - m_i| \le \Delta_i/2$, cualquier suma etiquetada tiene error a lo sumo $(b - a)\|P\|/2$ respecto de ese número. Así queda probada su integral sin antiderivada. Para $\alpha x + \beta$, distributividad y telescopía producen valor $\alpha(b^2 - a^2)/2 + \beta(b - a)$ y cota $|\alpha|(b - a)\|P\|/2$.

Para $f(x) = x^2$ en $[0, 1]$, pongamos $u = x_{i-1}$, $v = x_i$. La identidad del cubo da $\frac{v^3 - u^3}{3} = (v - u)\frac{u^2 + uv + v^2}{3}$. Como $0 \le u \le \xi_i \le v \le 1$, los números u^2, uv, v^2 y ξ_i^2 quedan entre u^2 y v^2. También la media de los tres primeros está en esa banda. La diferencia entre ella y ξ_i^2 tiene, por tanto, magnitud a lo sumo $v^2 - u^2 = (v - u)(v + u) \le 2\Delta_i$. Al multiplicar por la anchura y sumar, los incrementos cúbicos de la identidad anterior telescopan y dejan $1/3$. Obtenemos

$\left|S(x^2; P, \xi) - \frac{1}{3}\right| \le 2\sum_i \Delta_i^2 \le 2\|P\|$. Existe integral y vale $1/3$. No hemos usado una regla general de integrar potencias. En la partición uniforme, sumas izquierda/derecha dan valores exactos $\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$, $\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$. La identidad $\sum_{i=1}^{n} i^2 = n(n + 1)(2n + 1)/6$ que los produce se demuestra por inducción: el caso1 es directo; añadir $(n + 1)^2$ y factorizar da la expresión con $n + 1$. Las copias reales de índices y $n > 0$ preceden a estas divisiones. Para $n = 4$ los valores son $7/32$ y $15/32$, alrededor de $1/3$. La suma media es $1/3 - 1/(12n^2)$; procede de expandir $(i - 1/2)^2$ y sumar. Una etiqueta central no da exactitud cuadrática.

Para exigir error menor que $1/100$, la cota $2\|P\|$ pide malla menor que $1/200$. En la partición uniforme basta elegir $n > 200$; cualquier otra partición con esa malla satisface la misma garantía, incluidas todas sus mezclas de etiquetas. Las fórmulas izquierda, derecha y media permiten comparar aproximaciones concretas, mientras el certificado universal es el que demuestra la existencia de la integral.

Ejercicios de la sección 22.8.

Ejercicio 36. Una integral sin antiderivada

Demuestra integral de x en $[-1, 2]$ usando puntos medios y da certificado.
Solución. En cada pieza $[u, v]$, la contribución media de la identidad vale $(u+v)(v-u)/2 = (v^2 - u^2)/2$. La suma telescópica en $[-1, 2]$ es $(4 - 1)/2 = 3/2$. Cualquier etiqueta dista del medio a lo sumo media anchura, así su error total no supera $(1/2)\sum_i \Delta_i^2 \le (3/2)\|P\|$. Para una tolerancia ε sirve radio $2\varepsilon/3$. El contrato prueba integral $3/2$ sin antiderivadas.

Ejercicio 37. Afín y firmada

Calcula la integral de $2x - 1$ en $[0, 1]$ mediante sumas finitas y certificado.

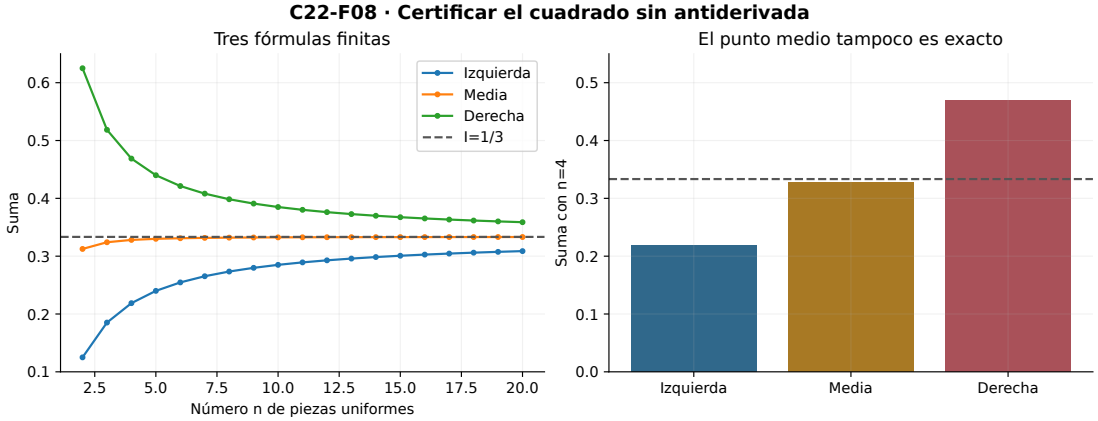


Figura 22.8. Para x² en[0,1], sumas uniformes izquierda/media/derecha se acercan a1/3 por fórmulas finitas. Con n4 valen7/32,21/64,15/32; el certificado2 · malla sirve para toda etiqueta, no sólo estas tres.

Solución. La linealidad finita da $S(2x-1) = 2S(x) - 1$ en $[0,1]$. El certificado de la identidad ofrece candidato $1/2$ y error a lo sumo $\|P\|/2$. Por tanto el nuevo candidato es cero y $|S(2x-1)| \le \|P\|$. El radio $\delta = \varepsilon$ satisface el contrato para todas las etiquetas. El valor cero representa una cancelación firmada de contribuciones.

Ejercicio 38. El cubo controla el cuadrado

Prueba el certificado universal de x^2 en $[0,1]$ y su valor integral.

Solución. En una pieza $[u,v] \subseteq [0,1]$, tanto ξ^2 como $(u^2+uv+v^2)/3$ quedan entre u^2 y v^2. Su diferencia de magnitudes no supera $v^2-u^2 = (v-u)(v+u) \le 2(v-u)$. Multiplicar por la anchura compara la contribución etiquetada con $(v^3-u^3)/3$ con error a lo sumo $2\Delta_i^2$. Los incrementos cúbicos telescopan a $1/3$ y la triangular da $|S-1/3| \le 2\|P\|$. Para $\varepsilon > 0$, el radio $\varepsilon/2$ prueba el contrato.

Ejercicio 39. Cuatro piezas no son el límite

Calcula sumas izquierda, derecha y media de x^2 en uniforme de cuatro piezas, justificando las identidades de sumas.

Solución. Para cuatro piezas, las sumas de bordes son $(0+1+4+9)/64 = 7/32$ y $(1+4+9+16)/64 = 15/32$. Las medias producen $(1+9+25+49)/256 = 21/64$. Las identidades finitas $\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2$ y $\sum_{i=1}^{n} i^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ se prueban por inducción sumando el término siguiente. Sustituirlas da sumas izquierda $1/3-1/(2n)+1/(6n^2)$, derecha $1/3+1/(2n)+1/(6n^2)$ y media $1/3-1/(12n^2)$. En $n=4$ esta última difiere de $1/3$ en $1/192$. Las tres cuentas son sumas finitas y no el valor límite.

Ejercicio 40. Resolución de una tolerancia

Elige una uniforme que certifique error de x^2 menor que$1/100$ para todas sus etiquetas; compara con el error de sus puntos medios.

Solución. La uniforme de doscientas una piezas tiene malla $1/201$. El certificado universal da error a lo sumo $2/201 < 1/100$ para cualquier etiqueta. Las medias de esa misma partición tienen error exacto $1/(12 \cdot 201^2)$, mucho menor. Esa mejora depende de usar las medias y no protege una familia arbitraria de etiquetas. La elección de resolución universal utiliza la barrera que sí cubre todas.

Retorno visual. Véase C22-F08, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Capítulo 23

Integral de Riemann y Darboux

Una suma etiquetada puede cambiar al refinar porque también cambian las alturas elegidas. Si en cada pieza usamos la mejor cota inferior y la mejor cota superior, obtenemos en cambio dos sumas que encierran todas las elecciones posibles. El refinamiento las acercará desde lados opuestos. Construiremos la integral cuando ese intervalo de incertidumbre pueda hacerse arbitrariamente estrecho y demostraremos que coincide con el límite exigido en C22.

C02/C03 orden y completitud, C14 continuidad y C22 particiones/sumas son herramientas centrales. C16/C17 ya cerrados aportan la interfaz de compacidad y escala uniforme sólo para el caso continuo. No usamos antiderivadas ni el teorema fundamental, reservado para C24.

23.1. Cotas de valores y oscilación

Fijemos $a < b$ y una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Hasta que se diga otra cosa, suponemos una cota dada $|f(t)| \le B$ con $B \ge 0$, válida para todas las entradas. Para cualquier conjunto no vacío $J \subseteq [a, b]$, su imagen es no vacía y acotada. Completitud de C03 da los reales

$$m(f, J) = \inf f[J], \qquad M(f, J) = \sup f[J], \qquad \omega(f, J) = M(f, J) - m(f, J) \ge 0.$$

La oscilación mide la anchura de la banda completa de valores de f sobre J. Sus extremos pueden no alcanzarse, de modo que no basta restar dos muestras elegidas. Al restringir el conjunto de entradas desaparecen posibles valores: una cota inferior anterior sigue siendo inferior y una superior sigue siendo superior. Por ello, si $J \subseteq K$,

$$m(f, K) \le m(f, J) \le M(f, J) \le M(f, K), \qquad \omega(f, J) \le \omega(f, K).$$

En efecto, toda cota inferior de $f[K]$ acota $f[J]$, y toda cota superior de $f[K]$ también; maximalidad del ínfimo y minimalidad del supremo prueban las comparaciones. Se dispone de $-B \le m \le M \le B$, de modo que $\omega \le 2B$. Para $\eta > 0$ hay entradas $s, t \in J$ con $f(s) > M - \eta$ y $f(t) < m + \eta$: de lo contrario $M - \eta$ sería cota superior o $m + \eta$ cota inferior, contradiciendo su carácter extremo. Son testigos para la precisión fijada; no una regla que alcance el supremo.

Por ejemplo, en $[0, 1]$ definamos $g(x) = x$ para $0 < x < 1$ y $g(0) = g(1) = 1/2$. Su ínfimo es0 y su supremo1, ninguno alcanzado. Las cotas son verificables: todo valor está entre0 y1, y entradas positivas arbitrariamente próximas a0 o a1 impiden mejorarlas. La oscilación vale1. Por contraste, para x^2 en $[u, v] \subseteq [0, 1]$, $m = u^2$, $M = v^2$ y $\omega = v^2 - u^2$, pues el cuadrado preserva el orden no negativo.

Ejercicios de la sección 23.1.

Ejercicio 1. Cotas sin extremos alcanzados

Para g(x)=x en(0,1) y g(0)=g(1)=1/2, prueba ínfimo0 y supremo1 sin puntos que los alcancen.

Solución. La imagen de g está contenida en $(0, 1)$: en el interior $g(x) = x$, y los dos extremos del dominio tienen altura $1/2$. Por tanto cero es cota inferior y uno cota superior, y ninguno pertenece a la imagen. Para $\eta > 0$ tomamos $t = \min(\eta/2, 1/4)$. Entonces t y $1 - t$ son interiores, $g(t) = t < \eta$ y $g(1 - t) = 1 - t > 1 - \eta$. Una cota inferior positiva se contradice

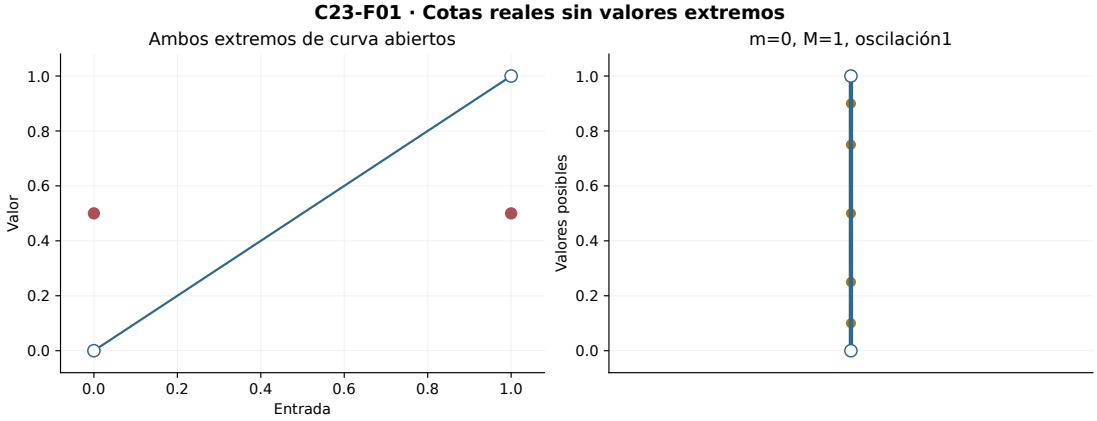


Figura 23.1. g(x)=x en(0,1), con g(0)=g(1)=1/2: ínfimo0 y supremo1 no alcanzados. Extremos de curva abiertos; valores nodales cerrados en1/2.

tomando η igual a ella; una cota superior menor que uno se contradice tomando η igual a su distancia a uno. En consecuencia $\inf g = 0$ y $\sup g = 1$, sin extremos alcanzados.

Retorno visual. Véase C23-F01, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 2. Restringir disminuye oscilación

Demuestra la cadena de cotas para J⊆K no vacíos y acotados.

Solución. Escribimos $m_J = \inf f[J]$, $M_J = \sup f[J]$ y análogamente para K. Se requiere que las imágenes sean no vacías y acotadas. La inclusión $J \subseteq K$ implica $f[J] \subseteq f[K]$. Toda cota inferior de $f[K]$ acota también $f[J]$, de donde $m_K \leq m_J$; toda cota superior de $f[K]$ acota $f[J]$, de donde $M_J \leq M_K$. Una entrada de J da además $m_J \leq M_J$. Así $m_K \leq m_J \leq M_J \leq M_K$, y al restar $0 \leq M_J - m_J \leq M_K - m_K$. La conclusión depende de la inclusión de imágenes, sin continuidad.

Ejercicio 3. Cuadrado en una pieza

Calcula m,M,ω de x^2 en[1/4,3/4] y explica por qué la restricción no negativa importa.

Solución. Para $1/4 \leq x \leq 3/4$, la monotonía del cuadrado sobre los no negativos da $1/16 \leq x^2 \leq 9/16$. Los valores extremos se alcanzan en los bordes, así $m = 1/16$, $M = 9/16$ y $\omega = 9/16 - 1/16 = 1/2$. La condición de no negatividad justifica esa monotonía: si $0 \leq s < t$, entonces $t^2 - s^2 = (t-s)(t+s) > 0$. En $[-1,1]$ los dos bordes tienen altura uno, pero el mínimo del cuadrado es cero en el interior. Allí no sirve la misma regla de tomar el borde izquierdo como ínfimo.

Ejercicio 4. De cotas a testigos

Demuestra que para η>0 hay s con f(s)>M−η y t con f(t)<m+η.

Solución. Sean $M = \sup f[J]$ y $m = \inf f[J]$, con imagen no vacía y acotada. Si no existiera $s \in J$ con $f(s) > M - \eta$, tendríamos $f(s) \leq M - \eta$ para todas las entradas. El real $M - \eta < M$ sería entonces una cota superior, contradiciendo que M sea la menor. De igual forma, la ausencia de un t con $f(t) < m + \eta$ haría de $m + \eta > m$ una cota inferior, contra la maximalidad de m. Estos dos argumentos dan testigos para cada $\eta > 0$, aunque las alturas extremas no se alcancen.

Ejercicio 5. Dos muestras no controlan

Construye sobre[0,1] una función con muestras0 en0 y1 y oscilación arbitrariamente grande.

Solución. Dado un tamaño deseado $R > 0$, elegimos $H = R + 1$ y definimos $f(1/2) = H$, $f(x) = 0$ para las demás entradas de $[0, 1]$. Las muestras en cero y uno son ambas cero. Sin embargo, la imagen es $\{0, H\}$, así $m = 0$, $M = H$ y $\omega = H > R$. Para cada H fijo la función está acotada. Esta familia muestra que conservar las dos muestras no limita la altura de una entrada distinta y, por tanto, no limita la oscilación.

23.2. Dos sumas que el refinamiento sí ordena

Sea $P = (x_0, \dots, x_n)$ una partición de C22, $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ y $\Delta_i > 0$. Definimos

$$L(f, P) = \sum_i m(f, I_i)\Delta_i, \qquad U(f, P) = \sum_i M(f, I_i)\Delta_i.$$

Son números reales finitos. Para cualquier familia de etiquetas admisibles,

$$-B(b - a) \le L(f, P) \le S(f; P, \xi) \le U(f, P) \le B(b - a).$$

Multiplicar $m_i \le f(\xi_i) \le M_i$ por anchuras positivas y sumar prueba el encierro. Restar suma a suma da la identidad fundamental $G(f, P) := U(f, P) - L(f, P) = \sum_i \omega(f, I_i)\Delta_i$. La brecha es no negativa porque todas las oscilaciones y anchuras lo son. Si vale cero, cada producto de la suma debe ser cero; como las anchuras son positivas, todas las oscilaciones son cero. Esto hace constante a f en cada pieza cerrada. El nodo que comparten dos piezas obliga a que sus constantes coincidan y, recorriendo la lista, f resulta constante en todo $[a, b]$. Para integrar una función que varía necesitaremos brechas arbitrariamente pequeñas, aunque ninguna llegue a anularse.

Si $P \preceq Q$, cada pieza hija está contenida en su padre; su ínfimo no es menor y su supremo no es mayor. Las anchuras de las hijas suman la del padre. Multiplicar las comparaciones por esas anchuras y agrupar finitamente prueba $L(f, P) \le L(f, Q) \le U(f, Q) \le U(f, P)$. Aquí sí existe monotonía, a diferencia de sumas etiquetadas arbitrarias. Para particiones distintas P, Q, su refinamiento común R da $L(f, P) \le L(f, R) \le U(f, R) \le U(f, Q)$. Toda suma inferior queda bajo toda superior, aunque procedan de cortes incompatibles.

Para x^2 en uniforme de n piezas sobre $[0, 1]$, las sumas son las izquierda y derecha calculadas en C22:

$$L_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}, \quad U_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}, \quad G_n = \frac{1}{n}.$$

El encierro usa cotas verdaderas sobre cada pieza, no una colección de muestras sin garantía.

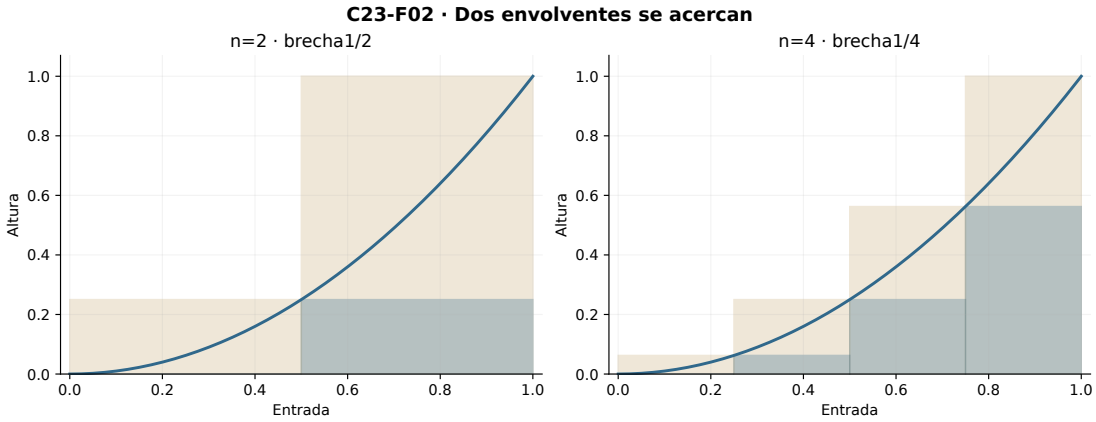


Figura 23.2. x² en[0,1]: rectángulos inferiores/superiores con n2 y n4. Las cotas locales son extremos verdaderos; brechas1/2 y1/4. La recta curva es la misma en ambos paneles.

Ejercicios de la sección 23.2.

Ejercicio 6. Sumas del cuadrado

Calcula L,U y brecha de x^2 en la uniforme de cuatro piezas de[0,1].

Solución. Los nodos son $0, 1/4, 1/2, 3/4, 1$ y las cuatro anchuras valen $1/4$. Como el cuadrado es creciente allí, las alturas inferiores son $0, 1/16, 4/16, 9/16$ y las superiores $1/16, 4/16, 9/16, 16/16$. Por tanto $L = (0 + 1 + 4 + 9)/64 = 14/64 = 7/32$ y $U = (1 + 4 + 9 + 16)/64 = 30/64 = 15/32$. La brecha es $U - L = 8/32 = 1/4$. Las alturas usadas son extremos de la imagen completa de cada pieza; por eso las dos sumas encierran cualquier suma etiquetada de esta partición.

Retorno visual. Véase C23-F02, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 7. Una inserción mejora

Prueba monotonía de L y U al insertar t en una pieza[u,v].

Solución. Sean $u < t < v$, $m = \inf f([u, v])$ y $M = \sup f([u, v])$. Para las hijas ponemos m_1, m_2, M_1, M_2. La inclusión de cada hija en el padre da $m \le m_1, m_2$ y $M_1, M_2 \le M$. Como las anchuras son positivas, $m(v-u) \le m_1(t-u)+m_2(v-t)$ y $M_1(t-u)+M_2(v-t) \le M(v-u)$. Se usó $(t-u)+(v-t) = v-u$. Las demás piezas aportan los mismos términos antes y después de insertar el corte. Así la suma inferior no baja y la superior no sube. Una sucesión finita de inserciones prueba lo mismo para cualquier refinamiento.

Ejercicio 8. Cruzar dos particiones

Prueba L(P)≤U(Q) aunque P y Q no sean comparables por refinamiento.

Solución. Formamos R ordenando la unión finita de los nodos de P y Q y eliminando repeticiones. Tiene los mismos extremos y refina ambas particiones. La monotonía respecto de P da $L(f, P) \le L(f, R)$; el orden en la partición R da $L(f, R) \le U(f, R)$; la monotonía respecto de Q da $U(f, R) \le U(f, Q)$. Concatenar las tres comparaciones prueba $L(f, P) \le U(f, Q)$. No es preciso que las listas originales tengan igual número de piezas o compartan los cortes interiores.

Ejercicio 9. Brecha cero fuerza constancia

Demuestra que si G(f,P)=0 en una partición de cerrado, f es constante global.

Solución. La igualdad $G(f, P) = \sum_i \omega_i \Delta_i = 0$ es una suma finita de reales no negativos. Si alguno fuera positivo, la suma también lo sería; por tanto todos son cero. Como $\Delta_i > 0$, cada $\omega_i = 0$ y $m_i = M_i$. Toda altura de la pieza queda entre esos dos extremos iguales, así f es constante allí. Las piezas I_i e I_{i+1} contienen el nodo x_i, donde ambas constantes deben valer $f(x_i)$. Por inducción sobre los índices, todas coinciden. El uso de piezas cerradas hace posible esa propagación de igualdad.

Ejercicio 10. Una suma no es una cota

Explica por qué S=1/4 y S=3/4 para x en mitades no contradicen monotonía de Darboux al refinar.

Solución. Para $f(x) = x$, la partición trivial tiene $L = 0$ y $U = 1$, y su etiqueta media da $S = 1/2$. En las mitades, las etiquetas izquierdas dan $S = (0 + 1/2)/2 = 1/4$ y las derechas $S = (1/2 + 1)/2 = 3/4$. Son, respectivamente, L y U de la partición refinada. La monotonía de Darboux se verifica en $0 \le 1/4$ y $3/4 \le 1$: mejoran las dos barreras. Comparar esas dos sumas etiquetadas con $1/2$ da movimientos opuestos, porque las etiquetas se han cambiado. Ninguna de esas comparaciones contradice la monotonía de las barreras.

23.3. Completitud y criterio de Darboux

Los conjuntos $\mathcal{L}_f = \{L(f, P) : P \text{ partición}\}$ y $\mathcal{U}_f = \{U(f, P) : P \text{ partición}\}$ son imágenes de funciones reales sobre el conjunto de particiones construido en C22. La partición trivial

prueba que son no vacíos; las cotas de la sección anterior prueban acotación. Definimos la integral inferior $\ell_f = \sup \mathcal{L}_f$ y la superior $u_f = \inf \mathcal{U}_f$. Para toda P, Q,

$L(f,P) \le \ell_f \le u_f \le U(f,Q)$. La desigualdad central merece prueba: cada $U(f,Q)$ acota todas las sumas inferiores, así que $\ell_f \le U(f,Q)$; al valer para todo Q, ℓ_f es cota inferior de $\mathcal{U}_f$ y no supera su ínfimo. No se postula una partición óptima. Llamamos integrable de Darboux a f cuando $\ell_f = u_f$. Su valor común se escribirá I_D. El **criterio de Darboux** es

$$\ell_f = u_f \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists P : \; G(f,P) < \varepsilon.$$

Si $\ell_f = u_f$, aproximamos ese valor por debajo con una suma inferior y por arriba con una superior: la propiedad del supremo da P con $L(f,P) > \ell_f - \varepsilon/2$ y la del ínfimo da Q con $U(f,Q) < u_f + \varepsilon/2$. Los cortes pueden ser distintos, pero su refinamiento común R aumenta la suma inferior y disminuye la superior. Su brecha es, por tanto, menor que ε. Sólo hemos escogido dos testigos para una tolerancia fijada. En sentido inverso, la banda anterior da $0 \le u_f - \ell_f \le G(f,P)$ para toda P. Si la diferencia fuera $d > 0$, una partición con brecha menor que $d/2$ contradiría esa desigualdad. Luego la diferencia es cero.

Una partición buena conserva la precisión bajo todo refinamiento. El criterio equivale también a: para cada tolerancia existe P tal que todos sus refinamientos tienen brecha menor que ella; la recíproca usa el refinamiento reflexivo $P \preceq P$. Si f es integrable, I_D y todas las sumas etiquetadas de P están en $[L,U]$, por lo que $|S - I_D| \le G$. El punto medio numérico $A_P = (L+U)/2$ tiene certificado más fino $|A_P - I_D| \le G/2$. No afirma que A_P sea una suma etiquetada ni el valor exacto. Para x^2, $G_n = 1/n \to 0$, así que el criterio recupera el valor 1/3 de C22, aunque ninguna partición tenga brecha cero.

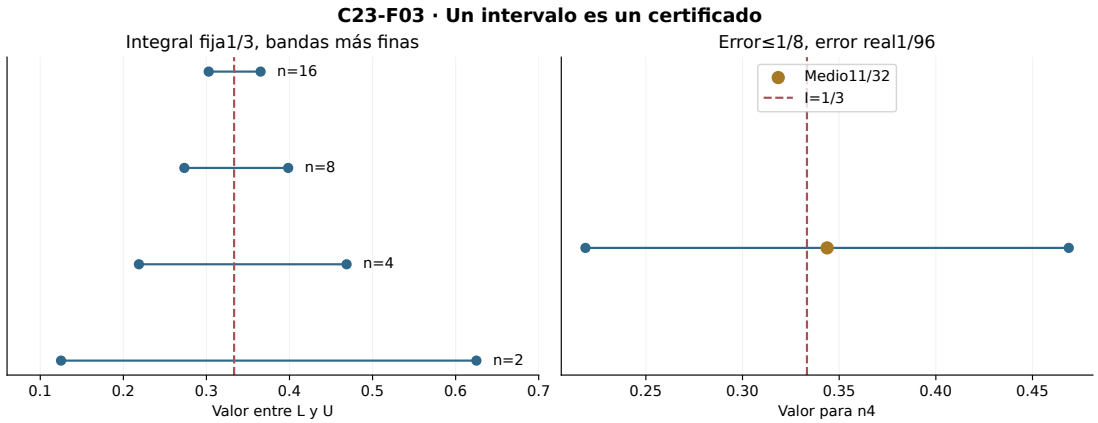


Figura 23.3. En x², los intervalos [L_n,U_n] para n2,4,8,16 se acercan a1/3. Con n4, medio11/32 y media anchura1/8; no se afirma exactitud del medio.

Ejercicios de la sección 23.3.

Ejercicio 11. Extremos de conjuntos de sumas

Justifica existencia de ℓ y u y su orden, indicando las hipótesis.

Solución. Suponemos $a < b$ y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada, con $|f| \le B$. La partición trivial prueba que los conjuntos $\mathcal{L}_f$ y $\mathcal{U}_f$ son no vacíos. Todas sus sumas satisfacen $-B(b-a) \le L(f,P) \le U(f,P) \le B(b-a)$, por las cotas de alturas y la identidad de longitudes. Completitud proporciona $\ell_f = \sup \mathcal{L}_f$ y $u_f = \inf \mathcal{U}_f$. Para cualquier Q, la comparación por refinamiento común da $L(f,P) \le U(f,Q)$ para toda P. Por tanto $\ell_f \le U(f,Q)$ para toda Q, y al tomar ínfimo queda $\ell_f \le u_f$.

Ejercicio 12. Una partición para dos aproximaciones

Si ℓ=u=I, construye una partición de brecha menor que ε sin suponer extremos alcanzados.

Solución. Sea $\varepsilon > 0$. Como I es el supremo de las sumas inferiores, existe P con $L(f,P) > I - \varepsilon/2$; de otro modo ese real menor sería una cota superior del conjunto. Como I es el ínfimo de las superiores, existe Q con $U(f,Q) < I + \varepsilon/2$. Tomamos el refinamiento común R. La monotonía da $L(f,R) \geq L(f,P) > I - \varepsilon/2$ y $U(f,R) \leq U(f,Q) < I + \varepsilon/2$. Restar prueba $G(f,R) < \varepsilon$. Las particiones aproximan los extremos; no necesitan realizarlos exactamente.

Ejercicio 13. La recíproca del criterio

Demuestra que brechas arbitrariamente pequeñas fuerzan ℓ=u.

Solución. Por definición de los dos extremos, para cada partición P se tiene $L(f,P) \leq \ell_f \leq u_f \leq U(f,P)$. De ahí $0 \leq u_f - \ell_f \leq G(f,P)$. Supongamos que $d = u_f - \ell_f > 0$. La hipótesis de brechas arbitrariamente pequeñas aplicada a $\varepsilon = d/2$ produce P con $G(f,P) < d/2$. Esto daría $d \leq G(f,P) < d/2$, imposible. Por no negatividad queda $d = 0$ y las integrales inferior y superior coinciden.

Ejercicio 14. Persistencia de precisión

Prueba equivalencia del criterio con una partición cuyos refinamientos todos tienen brecha menor que ε.

Solución. Fijada $\varepsilon > 0$, si existe P_* con $G(f,P_*) < \varepsilon$, toda Q que la refina satisface $L(f,P_*) \leq L(f,Q)$ y $U(f,Q) \leq U(f,P_*)$. Restar da $G(f,Q) \leq G(f,P_*) < \varepsilon$. Esto prueba la persistencia con los cuantificadores $\forall \varepsilon > 0\ \exists P_*\ \forall Q \succeq P_*$. En la dirección inversa se toma $Q = P_*$: una partición se refina a sí misma. Así la condición persistente entrega una partición de brecha menor que cada tolerancia y recupera el criterio de Darboux.

Ejercicio 15. Centro del intervalo certificado

Con L=7/32,U=15/32 e I=1/3, calcula el punto medio, cota y error real.

Solución. El centro de las cotas es $A = (7/32 + 15/32)/2 = 11/32$. La longitud del intervalo certificado es $15/32 - 7/32 = 1/4$, así su semilongitud es $1/8$. Como I está en ese intervalo, $|A - I| \leq 1/8$. Con el dato $I = 1/3$, el error efectivo es $|11/32 - 1/3| = |33/96 - 32/96| = 1/96$. El centro sobreestima el valor en $1/96$ y cumple la cota. Esta operación promedia las dos sumas de Darboux; no es la suma con etiquetas en los puntos medios, que para estas piezas vale $21/64$.

Retorno visual. Véase C23-F03, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

23.4. El puente hacia todas las sumas de Riemann

C22 definió Riemann por un real I_R y el contrato $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall (P, \xi)$, malla menor que δ implica $|S - I_R| < \varepsilon$. Demostraremos su equivalencia con Darboux, con igualdad de valores. El contrato de Riemann obliga primero a que f esté acotada, aunque no se haya supuesto. Pedimos tolerancia 1 y tomamos una partición uniforme P de malla menor que el radio, con etiquetas medias. Dentro de una pieza I_i dejamos fijas las otras etiquetas y variamos sólo $t \in I_i$. La suma tiene forma $f(t)\Delta_i + C_i$, donde C_i permanece fijo, y el contrato la mantiene entre $I_R - 1$ e $I_R + 1$. Así $|f(t)| \leq (|I_R| + 1 + |C_i|)/\Delta_i$. La anchura positiva permite dividir y proporciona una cota para cada pieza. El máximo de estas finitísimas cotas controla toda la función, pues las piezas cubren el intervalo.

Para una partición fija y $\eta > 0$, hay etiquetas ξ^+ y ξ^- con

$$U(f,P) - \eta < S(f;P,\xi^+) \leq U(f,P), \quad L(f,P) \leq S(f;P,\xi^-) < L(f,P) + \eta.$$

Para aproximar la suma superior escogemos en cada pieza un valor a distancia menor que $\eta/(b-a)$ de su supremo; para la inferior hacemos lo mismo con su ínfimo. Multiplicar por las anchuras y sumar acumula un error menor que η, porque las anchuras suman $b - a$. Los testigos pueden reunirse por inducción en el número finito de piezas. Así obtenemos familias de etiquetas sin suponer extremos alcanzados ni recurrir a una elección infinita.

Si existe I_R, pedimos error $\varepsilon/4$ y fijamos una uniforme que cumpla el radio. El lema con $\eta = \varepsilon/4$ da $U < I_R + \varepsilon/2$ y $L > I_R - \varepsilon/2$, luego $G < \varepsilon$. Darboux existe y su valor queda entre esos extremos para cada tolerancia; si difería de I_R, elegir una tolerancia menor que la distancia contradice ese encierro. Por tanto $I_D = I_R$.

Para la vuelta, una partición de brecha pequeña no basta directamente: Riemann exige controlar también cortes que no la refinan. Fijemos P_* con brecha menor que $\varepsilon/2$ y llamemos q a su número de nodos interiores. Dada cualquier Q, formamos el refinamiento común $R = Q \cup P_*$. Una pieza de Q sólo se modifica si contiene en su interior algún nodo interior de P_*. Como los interiores de las piezas son disjuntos, hay a lo sumo q piezas modificadas. En cada una, la suma superior puede bajar a lo sumo $2B$ veces su anchura: la altura antigua y las alturas hijas pertenecen a $[-B, B]$, y las anchuras hijas suman la del padre. El aumento de la suma inferior tiene la misma cota. Cada anchura modificada es a lo sumo $\|Q\|$, por lo que

$G(f, Q) \le G(f, R) + 4Bq\|Q\| \le G(f, P_*) + 4Bq\|Q\|$. Si $Bq > 0$, tomamos $\delta = \varepsilon/(8Bq)$. Malla menor da brecha menor que ε, y el encierro común de S e I_D prueba el contrato de Riemann. Si $Bq = 0$, el segundo término es cero y cualquier radio positivo sirve: no se divide por cero. Queda además demostrado que, para una función acotada integrable, todas las particiones de malla suficientemente pequeña tienen brecha pequeña. Conservar los cortes y reducir la malla son rutas distintas, conectadas por este conteo finito.

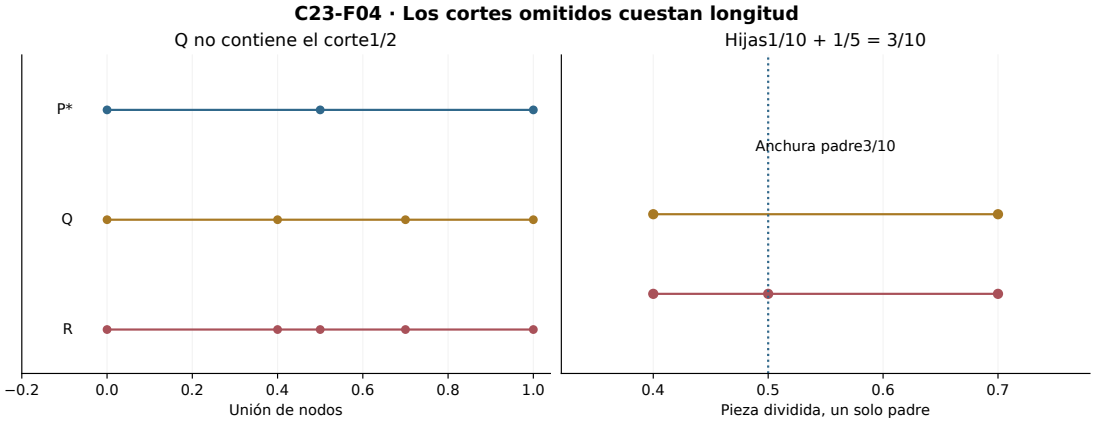


Figura 23.4. P*=(0,1/2,1), Q=(0,2/5,7/10,1). Sólo la pieza[2/5,7/10] de Q contiene el corte1/2 en su interior. R es la unión; q1 y malla Q2/5 controlan el coste por4Bq · malla.

Ejercicios de la sección 23.4.

Ejercicio 16. Riemann también exige acotación

Prueba acotación de f desde el contrato de C22, sin añadirla como hipótesis.

Solución. Aplicamos el contrato de Riemann con tolerancia uno y obtenemos $\delta > 0$. Elegimos una partición uniforme con malla menor que δ y fijamos etiquetas de referencia. Para cada pieza I_i, mantenemos esas etiquetas en las demás y dejamos variar $t \in I_i$. La suma resultante es $S = f(t)\Delta_i + C_i$, donde C_i es una suma finita fija. El contrato implica $|S - I| < 1$, luego $|S| < |I| + 1$ y $|f(t)|\Delta_i = |S - C_i| \le |S| + |C_i| < |I| + 1 + |C_i|$. Dividir por $\Delta_i > 0$ da una cota en toda I_i. El máximo finito de esas cotas limita $|f|$ en el intervalo, porque las piezas lo cubren, incluidos sus bordes.

Ejercicio 17. Etiquetas próximas a U

Para una partición fija, demuestra U−η<S para alguna familia, sin máximos.

Solución. Sean $M_i = \sup f[I_i]$ y $\eta > 0$. Como $b-a > 0$, el número $\eta/(b-a)$ es positivo. En cada pieza existe ξ_i con $f(\xi_i) > M_i - \eta/(b-a)$. Construimos la familia por inducción finita sobre sus n piezas. Al multiplicar por $\Delta_i > 0$ y sumar, $S > \sum_i M_i\Delta_i - \eta\sum_i \Delta_i/(b-a) = U-\eta$. Además $S \le U$ por la cota superior de cada altura. Por tanto $U - \eta < S \le U$. La misma construcción con ínfimos proporciona $L \le S^- < L + \eta$.

Ejercicio 18. Un sentido del puente

Deduce Darboux e igualdad de valor desde Riemann usando tolerancia $\varepsilon/4$.

Solución. La acotación ya se deduce del contrato de Riemann, así las sumas de Darboux están definidas. Para $\varepsilon > 0$, tomamos una partición uniforme de malla menor que el radio que garantiza error $\varepsilon/4$ respecto de I_R. Aproximamos sus extremos con etiquetas para obtener $U - \varepsilon/4 < S^+$ y $S^- < L + \varepsilon/4$. El contrato da $S^+ < I_R + \varepsilon/4$ y $S^- > I_R - \varepsilon/4$. Así $U < I_R + \varepsilon/2$ y $L > I_R - \varepsilon/2$, de donde $G < \varepsilon$. Darboux produce una integral I_D, que queda entre L y U. Estas mismas desigualdades dan $|I_D - I_R| < \varepsilon/2$ para cada $\varepsilon > 0$; una distancia positiva sería incompatible con una tolerancia menor. Por tanto los valores coinciden.

Ejercicio 19. Cortes omitidos

Si P* tiene q nodos interiores, justifica G(Q)≤G(P*)+4Bq · malla(Q).

Solución. Sea $|f| \le B$ y formemos $R = P_* \cup Q$. Una pieza de Q se divide sólo cuando contiene un nodo interior de P_* en su interior. Como los interiores de las piezas son disjuntos, hay a lo sumo q padres afectados; sus anchuras suman a lo sumo $q\|Q\|$. En un padre de anchura Δ, el supremo antiguo y los de sus hijas están entre $-B$ y B. La disminución de la contribución superior es no negativa y no supera $2B\Delta$, porque las anchuras hijas suman Δ. Igualmente el aumento de la contribución inferior no supera $2B\Delta$. Por tanto $G(f,Q) - G(f,R) \le 4Bq\|Q\|$. Como R refina P_*, $G(f,R) \le G(f,P_*)$. Sumando las desigualdades obtenemos $G(f,Q) \le G(f,P_*) + 4Bq\|Q\|$.

Retorno visual. Véase C23-F04, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 20. Radio del puente y caso cero

Para B=2,q=3 y brecha buena<$\varepsilon/2$, produce radio suficiente; trata Bq=0.

Solución. Con $B = 2$ y $q = 3$, la corrección del puente es $4Bq\|Q\| = 24\|Q\|$. Si $G(f,P_*) < \varepsilon/2$, elegimos $\delta = \varepsilon/48 > 0$. Toda Q de malla menor que δ cumple $G(f,Q) < \varepsilon/2 + 24\delta = \varepsilon$. Una suma etiquetada de Q y la integral de Darboux están ambas entre $L(f,Q)$ y $U(f,Q)$, así su distancia es menor que ε: queda probado el contrato de Riemann. Para $Bq = 0$ la corrección es cero y cualquier radio positivo sirve. Si $B = 0$, la función es cero; si $q = 0$, la partición buena es la trivial y todas las particiones la refinan.

23.5. Clases integrables y radios útiles

Una función no decreciente en $[a,b]$ está acotada entre sus valores extremos. En cada pieza, $m_i = f(x_{i-1})$, $M_i = f(x_i)$, de donde

$$G(f,P) = \sum_i (f(x_i) - f(x_{i-1}))\Delta_i \le \|P\|(f(b) - f(a)).$$

Las diferencias son no negativas y su suma telescopa. Uniformes de malla pequeña y el criterio prueban integrabilidad, sin continuidad. Si la diferencia extrema es cero, la función es constante y no se divide por ella. Para funciones no crecientes se aplica lo anterior a $-f$, o se invierten los extremos; la cota es $\|P\||f(b)-f(a)|$. Si f es Lipschitz con constante $L \ge 0$, en una pieza toda diferencia de valores tiene magnitud a lo sumo $L\Delta_i$. Para trasladar esa comparación a los extremos, escribimos $f(s) \le f(t) + L\Delta_i$ para todo s,t. Tomar primero el supremo en s da $M_i \le f(t) + L\Delta_i$; tomar luego el ínfimo en t da $M_i - m_i \le L\Delta_i$. De aquí $G \le L\|P\|(b-a)$ y el criterio prueba integrabilidad. Si $L > 0$ la cota proporciona un radio explícito; si $L = 0$, la función es constante y la brecha ya es cero.

Toda función continua en $[a, b]$ es integrable. Precisemos la herramienta heredada: C16 da compacidad del intervalo cerrado y subcubrimientos finitos; C17 conecta esa compacidad con una escala uniforme. Reconstruimos el mecanismo que necesitamos sin selección infinita. Para tolerancia1, consideramos todos los pares (c, r) con $c \in [a, b]$, $r > 0$ y $|f(y) - f(c)| < 1$ cuando y está en el dominio y $|y - c| < r$. Sus bolas de radio $r/2$ cubren el intervalo por continuidad. Un subcubrimiento finito da cota $\max_j(|f(c_j)| + 1)$.

Para conseguir un control uniforme de diferencias, repetimos la construcción con error $\eta/2$, donde $\eta > 0$. Un subcubrimiento finito por las bolas de radio $r_j/2$ permite fijar $\delta = \min_j r_j/2 > 0$. Si $|s - t| < \delta$, alguna bola interior contiene s. Entonces $|s - c_j| < r_j/2$ y $|t - c_j| \leq |t - s| + |s - c_j| < r_j$. Ambos valores difieren del valor central menos que $\eta/2$, así que $|f(s) - f(t)| < \eta$. En una pieza de anchura menor que δ todas las diferencias satisfacen esa cota; al pasar a supremo e ínfimo obtenemos oscilación a lo sumo η. Elegimos $\eta = \varepsilon/(2(b-a))$: cualquier partición de esa malla cumple $G \leq \eta(b-a) = \varepsilon/2 < \varepsilon$. El margen final conserva la desigualdad estricta requerida aunque tomar extremos haya producido una cota no estricta.

C22 ya probó integrabilidad de escalones y estabilidad por modificaciones finitas; la equivalencia les asigna también el mismo valor de Darboux. Continuidad es suficiente, no necesaria. Un salto monotónico o un valor aislado puede ser integrable. La continuidad local sola sobre un intervalo abierto no suministra la compacidad ni la acotación usadas aquí.

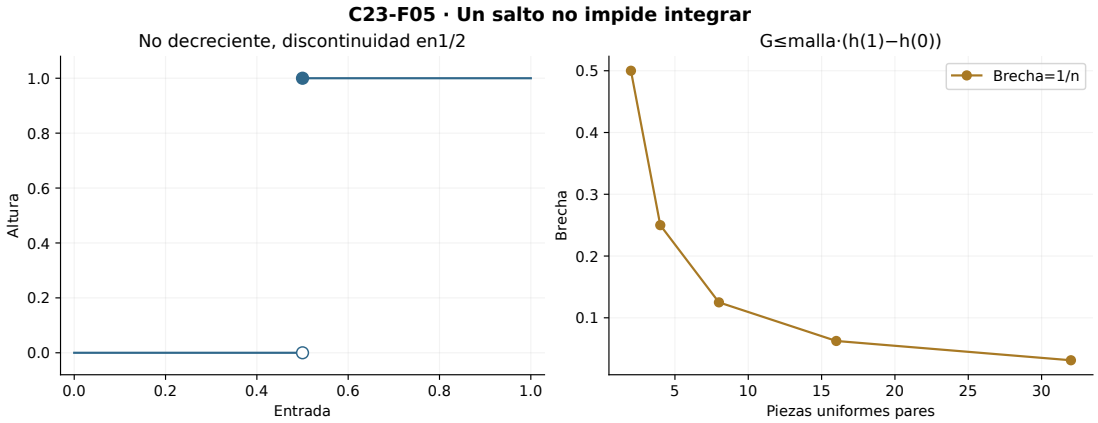


Figura 23.5. h=0 para x<1/2 y h=1 para x≥1/2 es monótona con salto. En uniformes pares su brecha1/n tiende a0, controlada por malla, sin continuidad.

Ejercicios de la sección 23.5.

Ejercicio 21. Monótona con salto

Sea h=0 para x<1/2 y h=1 para x≥1/2 en[0,1]. Prueba integrabilidad y da cota por malla. **Solución.** La función h es no decreciente y sus extremos son $h(0) = 0$, $h(1) = 1$. En cualquier partición, $G(h, P) = \sum_i (h(x_i) - h(x_{i-1}))\Delta_i \leq \|P\| \sum_i (h(x_i) - h(x_{i-1})) = \|P\|$. Para una tolerancia $\varepsilon > 0$, una uniforme de malla menor que ε tiene brecha menor que ella. El criterio prueba integrabilidad a pesar del salto. Para identificar el valor, insertamos $1/2$ en una uniforme cada vez más fina. La suma inferior en esa partición vale $1/2$, mientras la superior vale $1/2 + d$, siendo d la anchura de la pieza inmediatamente izquierda al salto. Esa pieza incluye el nodo de altura uno y aporta d a la suma superior. Como d puede hacerse arbitrariamente pequeño, la integral es $1/2$.

Retorno visual. Véase C23-F05, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 22. Lipschitz como certificado

Si L=3 en un intervalo de longitud2, acota la brecha y fabrica malla para brecha<1/100.

Solución. En cada pieza de anchura Δ_i, la hipótesis Lipschitz con constante tres da $|f(s)-f(t)| \le 3\Delta_i$ para toda pareja de entradas. De ahí $\omega_i \le 3\Delta_i$. Al ponderar y sumar, $G \le 3\sum_i \Delta_i^2 \le 3\|P\|\sum_i \Delta_i = 6\|P\|$, porque la longitud total es dos. Por tanto $\|P\| < 1/600$ garantiza $G < 6/600 = 1/100$. Una uniforme de 1201 piezas tiene malla $2/1201 < 1/600$ y cumple el pedido. La hipótesis Lipschitz se usa sobre todas las parejas de cada pieza.

Ejercicio 23. Continua: de local a uniforme

Explica la construcción de radio uniforme por un subcubrimiento finito, evitando escoger radios simultáneamente para todos los centros.

Solución. Fijemos un error de alturas $\eta > 0$. Consideramos el conjunto de todos los pares (c, r) con $c \in [a, b]$, $r > 0$ y $|f(x)-f(c)| < \eta/2$ para las entradas del dominio a distancia menor que r de c. La continuidad garantiza al menos un par por centro, así las bolas relativas de radio $r/2$ forman una cobertura abierta del cerrado. Compacidad da un subcubrimiento finito con pares (c_j, r_j). Ponemos $\delta = \min_j r_j/2 > 0$. Si s, t están en el dominio y $|s-t| < \delta$, elegimos una bola reducida que contenga a s. Entonces $|s-c_j| < r_j/2$ y $|t-c_j| \le |t-s|+|s-c_j| < r_j$. Los dos errores respecto del centro son menores que $\eta/2$, por lo que $|f(s) - f(t)| < \eta$. La construcción sólo extrae una lista finita de pares de la cobertura completa.

Ejercicio 24. El margen al tomar supremos

Si todos los valores de una pieza difieren menos que η, explica por qué $\omega \le \eta$ y cómo garantizar brecha$<\varepsilon$.

Solución. Si $|f(s) - f(t)| < \eta$ para toda pareja de una pieza, fijar t da $f(s) < f(t) + \eta$ para todo s. Al tomar supremo, $M \le f(t) + \eta$; al tomar ínfimo en t, $M \le m + \eta$. Así $\omega \le \eta$, con posible pérdida de estrictitud. Por ejemplo, para $f(x) = x$ en $(0, \eta)$, todas las diferencias son menores que η pero la oscilación es exactamente η. Para el intervalo de longitud positiva $b-a$, pedimos la escala uniforme correspondiente a $\eta = \varepsilon/(2(b-a))$. Una partición de malla menor que esa escala cumple $G \le \eta(b-a) = \varepsilon/2 < \varepsilon$.

Ejercicio 25. Un cerrado importa

Da una función continua en(0,1] que no tenga la cota global usada en la prueba continua de este capítulo.

Solución. La función $f(x) = 1/x$ es continua en $(0, 1]$. Para cualquier $M > 0$ tomamos $x = 1/(M+1)$, que pertenece al dominio y satisface $f(x) = M + 1 > M$. Por tanto no existe cota superior global. El dominio no es compacto: la sucesión $1/(n+1)$ tiende a cero, que queda fuera de él. La construcción por subcubrimiento finito de este capítulo exige un cerrado $[a, b]$; en este ejemplo no entrega la cota necesaria para las sumas de Darboux del intervalo completo.

23.6. Álgebra de funciones e integrales

Para funciones acotadas, comparar todos los pares de valores da

$$\omega(f+g, J) \le \omega(f, J) + \omega(g, J), \qquad \omega(\alpha f, J) = |\alpha|\omega(f, J).$$

La primera sigue porque $(f+g)(s) - (f+g)(t)$ está bajo la suma de las dos oscilaciones; tomar los extremos justifica la cota. Para $\alpha < 0$, supremo e ínfimo intercambian su papel, de donde el valor absoluto; para $\alpha = 0$ ambos son cero. También $||f(s)| - |f(t)|| \le |f(s) - f(t)|$, por lo que $\omega(|f|, J) \le \omega(f, J)$. Si $|f| \le B_f$, $|g| \le B_g$, la identidad

$$f(s)g(s) - f(t)g(t) = f(s)(g(s) - g(t)) + g(t)(f(s) - f(t))$$

da $\omega(fg, J) \le B_f\omega(g, J) + B_g\omega(f, J)$. No se multiplica una integral por otra: es una cota local del producto de funciones. Para trasladar estas cotas locales a la integrabilidad, necesitamos una misma partición en la que sean pequeñas las brechas de f y de g. Elegimos una para cada función y pasamos al refinamiento común, donde ninguna brecha aumenta.

Las desigualdades anteriores hacen entonces arbitrariamente pequeñas las de la suma, los múltiplos, el valor absoluto y el producto. En este último caso basta pedir a ambas brecha menor que $\varepsilon/(B_f + B_g + 1)$: la suma ponderada por B_f, B_g queda menor que ε, sin dividir por una constante que pudiera ser cero.

Los valores de sumas y múltiplos se calculan con la equivalencia de Riemann y la identidad finita de C22. Para $h = \alpha f + \beta g$, pedimos a ambos errores menores que $\varepsilon/(|\alpha| + |\beta| + 1)$ y tomamos el menor de sus radios. Triangular demuestra que $S(h)$ se acerca a $\alpha I_f + \beta I_g$ con error menor que ε; unicidad identifica el valor. Es linealidad de la integral, no una regla de primitivas.

Si $f \le g$, entonces $I_f \le I_g$: de lo contrario su diferencia $d > 0$ y una misma partición fina darían, con errores $d/3$, $S(f) > S(g)$, contradiciendo el orden de sumas con las mismas etiquetas. Como $-|f| \le f \le |f|$, el orden y la linealidad dan $|I_f| \le I_{|f|}$. Generalmente no hay igualdad. Para $f(x) = 2x - 1$ en $[0, 1]$, C22 da $I_f = 0$; dividir en $1/2$ y sumar dos triángulos mediante las fórmulas afines que justificaremos en la sección siguiente da $I_{|f|} = 1/2$. El producto tampoco tiene integral $I_f I_g$: para $f = g = x$, $I_{x^2} = 1/3$ frente a $I_x^2 = 1/4$.

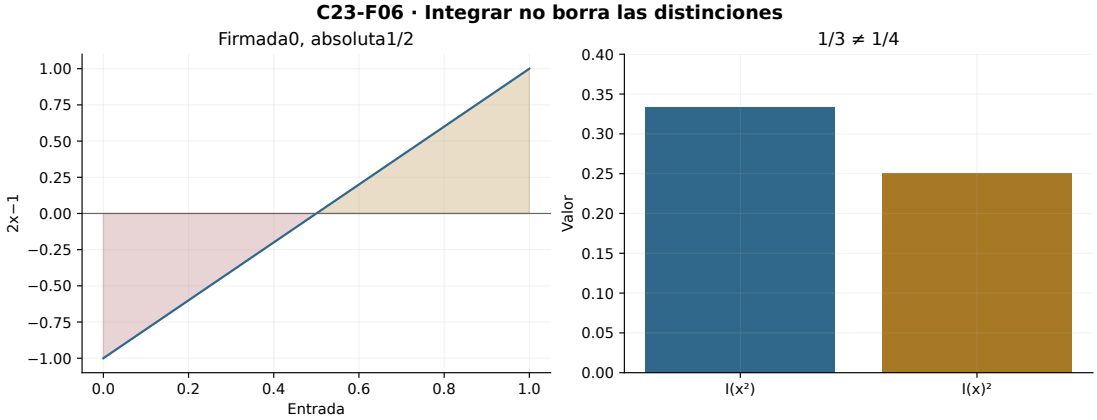


Figura 23.6. f=2x−1 tiene integral firmada0 y valor absoluto integral1/2. En el panel derecho, x² tiene integral1/3 y el cuadrado de la integral de x es1/4: el producto de funciones no da producto de integrales.

Ejercicios de la sección 23.6.

Ejercicio 26. Signo de un múltiplo

Demuestra $\omega(\alpha f)=|\alpha|\omega(f)$ incluyendo $\alpha<0$ y $\alpha=0$.

Solución. Si $\alpha > 0$, αm y αM son, respectivamente, el ínfimo y el supremo de $\alpha f[J]$: las desigualdades escalan y los testigos próximos a los extremos prueban su optimalidad. Por ello la oscilación es $\alpha(M - m)$. Si $\alpha < 0$, las desigualdades se invierten, y los mismos testigos dan $m(\alpha f, J) = \alpha M$ y $M(\alpha f, J) = \alpha m$. La diferencia es $\alpha m - \alpha M = -\alpha(M - m) = |\alpha|\omega(f, J)$. Para $\alpha = 0$ la imagen es $\{0\}$ y ambas oscilaciones son cero. Quedan cubiertos los tres signos sin suponer extremos alcanzados.

Ejercicio 27. Producto integrable

Con integrables f,g y cotas Bf,Bg, prueba integrabilidad de fg con particiones comunes.

Solución. Sean $|f| \le B_f$ y $|g| \le B_g$. Para s, t en una pieza, la identidad $f(s)g(s) - f(t)g(t) = f(s)(g(s) - g(t)) + g(t)(f(s) - f(t))$ da $\omega(fg, J) \le B_f\omega(g, J) + B_g\omega(f, J)$ al tomar extremos. El producto está acotado por $B_f B_g$. Dado $\varepsilon > 0$, elegimos particiones para ambas funciones con brechas menores que $\eta = \varepsilon/(B_f + B_g + 1)$ y tomamos su refinamiento común R. Las brechas de f y g conservan esa cota. Al ponderar la desigualdad local resulta $G(fg, R) \le B_f G(g, R) + B_g G(f, R) \le (B_f + B_g)\eta < \varepsilon$. La última desigualdad también cubre $B_f + B_g = 0$. El criterio prueba integrabilidad del producto.

Ejercicio 28. Linealidad del valor

Demuestra I(αf+βg)=αIf+βIg desde sumas y radios, sin antiderivadas.

Solución. Para cualquier partición y las mismas etiquetas, la distributividad finita da $S(\alpha f+\beta g) = \alpha S(f) + \beta S(g)$. Dado $\varepsilon > 0$, ponemos $\eta = \varepsilon/(|\alpha| + |\beta| + 1)$ y tomamos los radios de ambos contratos de Riemann para ese error. Con δ igual al mínimo, toda partición de malla menor que δ satisface $|S(\alpha f + \beta g) - (\alpha I_f + \beta I_g)| \le |\alpha||S(f) - I_f| + |\beta||S(g) - I_g| \le (|\alpha| + |\beta|)\eta < \varepsilon$. Esto prueba el contrato con candidato $\alpha I_f + \beta I_g$, incluidos coeficientes cero. La equivalencia y unicidad identifican ese real con la integral de Darboux.

Ejercicio 29. Producto no multiplicativo

Para f=g=x en[0,1], compara I(fg) e IfIg usando C22.

Solución. En $[0, 1]$, los certificados de sumas de C22 prueban $I_x = 1/2$ e $I_{x^2} = 1/3$ sin antiderivadas. Como $f = g = x$, su producto es $fg = x^2$. Por tanto $I(fg) = 1/3$ y $I_f I_g = (1/2)(1/2) = 1/4$. La diferencia es $1/12 > 0$. El teorema sobre productos garantiza la integrabilidad de fg; este cálculo muestra que el valor de su integral no se obtiene multiplicando los dos valores integrales.

Retorno visual. Véase C23-F06, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 30. Valor absoluto y orden

Prueba |If|≤I|f| y calcula la desigualdad para2x−1 en[0,1] una vez habilitada la aditividad de23.7.

Solución. La triangular inversa implica $\omega(|f|, J) \le \omega(f, J)$ en cada pieza. Toda partición de brecha pequeña para f tiene brecha al menos tan pequeña para $|f|$, así ésta es integrable. El orden $-|f| \le f \le |f|$, junto con linealidad, da $-I_{|f|} \le I_f \le I_{|f|}$, luego $|I_f| \le I_{|f|}$. Para $f(x) = 2x - 1$ en $[0, 1]$, linealidad da $I_f = 2(1/2) - 1 = 0$. Una vez probada aditividad, partimos en 1/2: $|f| = 1 - 2x$ a la izquierda y $|f| = 2x - 1$ a la derecha. El certificado afín de C22 da $I_{[0,1/2]}x = 1/8$ e $I_{[1/2,1]}x = 3/8$. Las dos contribuciones son $1/2 - 2(1/8) = 1/4$ y $2(3/8) - 1/2 = 1/4$. Por tanto $0 = |I_f| < I_{|f|} = 1/2$.

23.7. Restringir, pegar y orientar

Sea $a < c < b$ y f acotada. Si es integrable en $[a, b]$, también lo es en cada subintervalo. Dada una partición de brecha pequeña, insertamos c: la brecha no aumenta y se descompone exactamente en las dos brechas de las particiones restringidas. Como ambas son no negativas, cada una es menor que la tolerancia original. El criterio prueba las dos integrabilidades.

Recíprocamente, si las restricciones son integrables, para cada tolerancia tomamos particiones de ambas con brechas menores que $\varepsilon/2$. Concatenarlas en el nodo común c da una partición de $[a, b]$ cuya brecha es la suma, menor que ε. Aquí el valor de $f(c)$ es uno y el mismo en ambas restricciones; no se pegan dos valores incompatibles. Así f es integrable en todo el intervalo.

La concatenación permite identificar también el valor, además de demostrar existencia. Elegimos en ambos lados particiones con brechas menores que $\varepsilon/4$ y etiquetas explícitas. Al concatenarlas, las sumas cumplen exactamente $S_{a,b} = S_{a,c} + S_{c,b}$. Cada integral lateral dista de su suma menos que $\varepsilon/4$ y la integral completa dista de la suma concatenada menos que $\varepsilon/2$, porque ésa es la cota para la brecha total. La triangular da

$\big|I_{a,b} - (I_{a,c} + I_{c,b})\big| < \varepsilon$. Para todo ε implica igualdad. Por inducción se extiende a finitísimas piezas; no una aditividad numerable sin nuevas hipótesis. Con ello, $|2x - 1|$ se integra como $1 - 2x$ a la izquierda de $1/2$ y $2x - 1$ a la derecha. La fórmula afín de C22 da $1/4$ en cada mitad, total $1/2$. Un único punto no aporta una anchura positiva: C22 prueba que cambiar finitos valores conserva integral; el puente de este capítulo lo traslada a Darboux, aun cuando sus sumas para una partición fija cambien.

Extendemos ahora la notación mediante las convenciones $\int_a^a f = 0$ y $\int_b^a f = -\int_a^b f$, siempre que exista la integral sobre el intervalo ordenado. Las anchuras de las particiones utilizadas en la construcción siguen siendo positivas; el signo de orientación se incorpora después. Para cualquier orden de tres extremos, la aditividad se obtiene ordenándolos, aplicando la igualdad ya probada y transponiendo términos con estas convenciones. Se exige integrabilidad en el intervalo que los contiene.

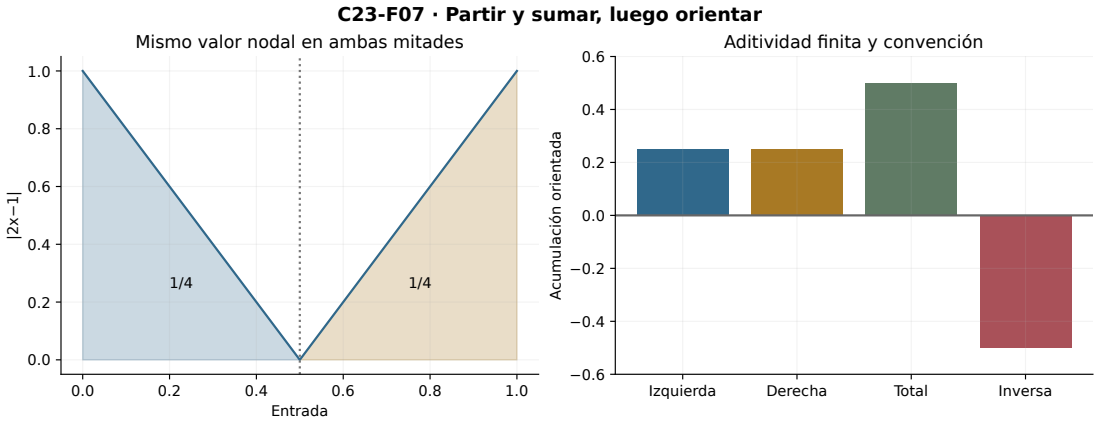


Figura 23.7. |2x−1| se acumula con1/4 en cada mitad, total1/2. Orientación inversa da−1/2 por convención posterior, sin piezas de anchura negativa.

Ejercicios de la sección 23.7.

Ejercicio 31. Restricción a dos lados

Prueba integrabilidad de restricciones al insertar c en una partición buena.

Solución. Sea $a < c < b$ y f integrable en $[a, b]$. Para $\varepsilon > 0$, elegimos P con $G(f, P) < \varepsilon$ e insertamos c si todavía no es nodo. La nueva partición R tiene brecha no mayor. Sus piezas se separan en dos listas que forman particiones de $[a, c]$ y $[c, b]$. Las alturas de cada pieza son las mismas para la función y su restricción correspondiente, por lo que $G(f, R) = G(f|_{[a,c]}, R_1) + G(f|_{[c,b]}, R_2)$. Ambas cantidades son no negativas y cada una es menor que ε. Las restricciones conservan la acotación de f y cumplen el criterio para toda tolerancia.

Ejercicio 32. Pegar dos integrales

Prueba integrabilidad global desde ambas restricciones, con el mismo valor de f(c).

Solución. Suponemos que ambas restricciones son integrables y que comparten la altura $f(c)$, con $a < c < b$. Cada lado está acotado; el máximo de sus dos cotas absolutas acota la función global. Para $\varepsilon > 0$, tomamos particiones de cada lado con brechas menores que $\varepsilon/2$. Concatenamos sus nodos omitiendo la segunda copia de c. La lista global es estrictamente creciente y sus piezas son exactamente las de las dos listas. Como los extremos locales incluyen el mismo valor en c, la brecha global es la suma de las dos brechas, menor que ε. El criterio prueba la integrabilidad de la función en $[a, b]$.

Ejercicio 33. Aditividad del valor

Demuestra Iab=Iac+Icb mediante sumas concatenadas y brechas.

Solución. Ya se sabe que las tres integrales existen. Para $\varepsilon > 0$, tomamos particiones de los lados con brechas $G_1, G_2 < \varepsilon/4$ y las concatenamos en R. La brecha global es $G_1 + G_2 < \varepsilon/2$. Elegimos cualquier familia de etiquetas en los lados y la concatenamos. Sus sumas satisfacen exactamente $S_{ab} = S_{ac} + S_{cb}$. El encierro de cada suma y su integral da $|I_{ab} - S_{ab}| \le G_1 + G_2$, $|I_{ac} - S_{ac}| \le G_1$ y $|I_{cb} - S_{cb}| \le G_2$. Así $|I_{ab} - I_{ac} - I_{cb}| \le 2(G_1 + G_2) < \varepsilon$. Como esto vale para toda tolerancia positiva, la distancia es cero y $I_{ab} = I_{ac} + I_{cb}$.

Retorno visual. Véase C23-F07, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 34. Orientar sin nuevas piezas

Si I0,1(x)=1/2 y I1,2(x)=3/2, calcula I2,0(x) e I1,1(x), indicando convenciones.

Solución. La aditividad en intervalos ordenados da $I_{0,2}(x) = I_{0,1}(x)+I_{1,2}(x) = 1/2+3/2 = 2$. La convención de orientación inversa define $I_{2,0}(x) = -I_{0,2}(x) = -2$. La convención para un intervalo degenerado define $I_{1,1}(x) = 0$. Estas dos extensiones actúan sobre los valores integrales; la construcción de las sumas sigue usando piezas de anchura positiva cuando los extremos son distintos y están ordenados.

Ejercicio 35. Cambiar un nodo

Explica por qué alterar sólo f(c) conserva la integral pero puede cambiar L y U de una partición.

Solución. Sean f y g iguales excepto en c, con $D = |f(c) - g(c)|$. Una etiqueta igual a c puede aparecer en a lo sumo dos piezas cerradas. Por tanto $|S_f - S_g| \le 2D\|P\|$. Para una tolerancia ε, el contrato de f con error $\varepsilon/2$ y una malla además menor que $\varepsilon/(4D)$, si $D > 0$, dan el mismo contrato para g y el mismo valor por triangular. Si $D = 0$, las funciones coinciden. La equivalencia transfiere la conclusión a Darboux. En una partición fija, el valor de c sí puede alterar un extremo local: la función cero tiene $L = U = 0$, mientras al poner altura uno en $c = 1/2$, sobre las mitades queda $L = 0$ y $U = 1$. Las dos funciones tienen integral cero.

23.8. Certificar un valor y reconocer el alcance

Las cotas de Darboux producen un certificado numérico cuando se conocen cotas locales universales. Si no calculamos los extremos exactos, pero tenemos $a_i \le f(t) \le b_i$ para todo $t \in I_i$, entonces $\sum_i a_i\Delta_i \le L(f,P) \le I_f \le U(f,P) \le \sum_i b_i\Delta_i$ para una función cuya integrabilidad se haya demostrado. La anchura del intervalo exterior es un error certificado; una sola pareja de cotas estrechas no prueba integrabilidad para todas las tolerancias. Si se producen tales brechas exteriores arbitrariamente pequeñas, el criterio sí la prueba.

Para x^2 en $[0,1]$, $n = 4$ uniforme da $[7/32, 15/32]$. Su punto medio es $11/32$ y su certificado de error es $1/8$; el error real respecto de $1/3$ es $1/96$, menor que esa cota. La precisión garantizada por el punto medio de las cotas para uniforme general es $1/(2n)$; para error menor que $1/100$ basta $n > 50$. Este certificado es de ese aproximante numérico, no de toda suma etiquetada, que con la misma partición tiene error a lo sumo $1/n$.

Un valor aislado separa integrabilidad de exactitud finita. Sea $p(1/2) = 1$ y $p(x) = 0$ para el resto de $[0,1]$. En la partición $(0, 1/2, 1)$, los dos cerrados contienen el pico: $L = 0$, $U = 1$. Para $0 < r < 1/2$, insertemos los nodos $1/2 - r$ y $1/2 + r$. Sólo las dos piezas vecinas al pico tienen supremo1; sus anchuras suman $2r$. Por tanto $L = 0$, $U = 2r$. Elegir $r < \min(1/2, \varepsilon/2)$ da el criterio y valor0. Ninguna partición tiene brecha cero porque el pico pertenece a por lo menos una pieza de anchura positiva. No se usa teoría de medida.

Una brecha persistente puede, por el contrario, impedir integrabilidad. Si una función acotada toma0 y1 en toda pieza no degenerada, todas sus sumas inferiores son0 y superiores $b - a$. Sus integrales extremas difieren. Es una condición universal sobre cada pieza, no una conclusión que se pueda extraer de unos puntos de dibujo; C25 estudiará ejemplos de discontinuidad y esa frontera con detalle. La integral queda así determinada por dos procedimientos equivalentes: el límite de todas las sumas de malla pequeña y la coincidencia de las cotas extremas de Darboux. Sus operaciones proceden de comparaciones finitas y de tolerancias. La relación con las antiderivadas aún requiere otra prueba, que parta de esta acumulación ya construida.

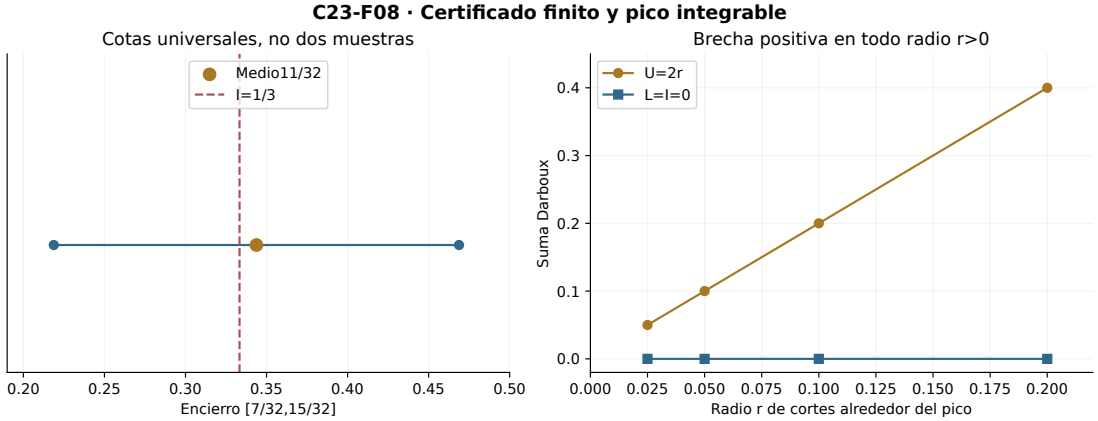


Figura 23.8. Con n4, x² está certificado entre7/32 y15/32 y su medio11/32. Para el pico p(1/2)=1, p=0 fuera, cortes1/2±r dan L0,U2r: integral0 con toda brecha finita positiva.

Ejercicios de la sección 23.8.

Ejercicio 36. Cotas exteriores

Si se prueban ai≤f≤bi en cada pieza y f ya es integrable, demuestra el encierro exterior y su certificado medio.

Solución. Sean $A = \sum_i a_i \Delta_i$ y $C = \sum_i b_i \Delta_i$. La hipótesis universal en la pieza da $a_i \le m_i \le M_i \le b_i$. Ponderar por anchuras positivas y sumar produce $A \le L(f,P) \le I_f \le U(f,P) \le C$, usando que la integral ya existe. Para $H = (A+C)/2$, cualquier real en $[A,C]$ está a distancia a lo sumo $(C-A)/2$ de H. En particular $|H - I_f| \le (C-A)/2$. El certificado puede ser menos ajustado que el de Darboux si las cotas exteriores no son los extremos exactos.

Ejercicio 37. Elegir resolución de un certificado

Para x², usa las cotas uniformes de Darboux para error de su medio menor que1/100.

Solución. Para la uniforme de $n \ge 1$ piezas, las sumas del cuadrado son $L_n = 1/3 - 1/(2n) + 1/(6n^2)$ y $U_n = 1/3 + 1/(2n) + 1/(6n^2)$, obtenidas de las identidades finitas de C22. Su brecha es $1/n$ y su centro $H_n = 1/3 + 1/(6n^2)$. El certificado de encierro da $|H_n - I| \le 1/(2n)$. Tomando $n = 51$, se obtiene $1/102 < 1/100$, por lo que cumple la resolución pedida. La fórmula permite además ver que el error real es $1/(6 \cdot 51^2) = 1/15606$. Una suma etiquetada arbitraria recibe la cota $1/n$; para certificar el mismo umbral a todas ellas mediante esa cota haría falta $n > 100$.

Ejercicio 38. El pico se encierra

Para p(1/2)=1 y p=0 fuera, calcula L,U en P=(0,1/2−r,1/2,1/2+r,1),0<r<1/2, y demuestra integral0.

Solución. Para $0 < r < 1/2$, los cinco nodos dados son estrictamente crecientes. Cada pieza contiene entradas diferentes de $1/2$, donde $p = 0$, así todos los ínfimos son cero y $L = 0$. Sólo $[1/2 - r, 1/2]$ y $[1/2, 1/2 + r]$ contienen el pico; sus supremos son uno y cada anchura vale r. Por tanto $U = 2r$ y $G = 2r$. Dado $\varepsilon > 0$, elegimos $r = \min(1/4, \varepsilon/4)$; cumple $0 < r < 1/2$ y $2r \le \varepsilon/2 < \varepsilon$. Darboux prueba integrabilidad. Todas las sumas inferiores valen cero, así $\ell_p = 0$; la coincidencia de extremos da $I_p = 0$.

Retorno visual. Véase C23-F08, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 39. Integrable sin brecha cero

Demuestra que el pico anterior no tiene ninguna partición de brecha cero.

Solución. Sea P cualquier partición de $[0,1]$. Como sus piezas cubren el intervalo, alguna contiene $1/2$. Esa pieza tiene anchura positiva, por lo que contiene otra entrada distinta de $1/2$. La imagen sobre ella contiene cero y uno y sólo esas alturas, así su oscilación es uno. Su contribución a la brecha es su anchura, estrictamente positiva; las demás contribuciones son no negativas. Luego $G(p,P) > 0$ para toda partición. El ejercicio anterior proporciona brechas arbitrariamente pequeñas y prueba integral cero. Así el ínfimo de las brechas puede ser cero aunque ninguna brecha lo alcance.

Ejercicio 40. Brecha persistente

Bajo la hipótesis de que f toma0 y1 en toda pieza no degenerada y sólo esos valores, prueba no integrabilidad en[a,b].

Solución. Suponemos $a < b$ y que la función sólo toma cero y uno, alcanzando ambas alturas en toda pieza no degenerada. Cada pieza de cualquier partición tiene anchura positiva y por hipótesis su ínfimo es cero y su supremo uno. Por tanto $L(f,P) = 0$ y $U(f,P) = \sum_i \Delta_i = b - a$. Los conjuntos de sumas son $\mathcal{L}_f = \{0\}$ y $\mathcal{U}_f = \{b-a\}$, así $\ell_f = 0$ y $u_f = b - a > 0$. También el criterio falla con $\varepsilon = (b-a)/2$, pues ninguna brecha es menor que ella. La hipótesis sobre todas las piezas sostiene el argumento; una colección finita de muestras no demostraría esa distribución de alturas.

Capítulo 24

El teorema fundamental del cálculo

Al integrar una tasa en tramos cada vez más cortos, su promedio debería acercarse al valor de la tasa en el centro, siempre que ésta sea continua allí. Ésa será una dirección del teorema fundamental. La otra parte de una primitiva y compara sus incrementos con las sumas que construyeron la integral. Las dos pruebas enlazan las operaciones de C18 y C23, pero utilizan hipótesis diferentes.

C18 aporta derivadas relativas y reglas; C19, Lagrange y constancia; C23, integrabilidad, cotas, álgebra, aditividad y orientación. C14 es interfaz de continuidad. C15/C16 se declaran sólo para el promedio integral alcanzado opcional, después de las dos pruebas centrales. No se supone integrabilidad de toda derivada.

24.1. Construir una función de acumulación

Fijemos $a < b$ y una función integrable $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Para dar sentido a la acumulación hasta una entrada variable x, necesitamos primero que exista la integral en cada $[a, x]$. C23 proporciona esa restricción y la unicidad de su valor, además de acotación y aditividad. Podemos así asociar a cada entrada un único número acumulado. **R1 — Acumulación con origen fijo.** Para $x \in [a, b]$ definimos $A_f(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. La notación abrevia la integral de la restricción $f|_{[a,x]}$. Si $x > a$, existe por restricción de C23. Si $x = a$, usamos exclusivamente la convención de integral degenerada, de valor cero; no hay partición estricta de un singleton. La unicidad del valor integral hace única la salida para cada entrada.

Podemos construir el grafo como el subconjunto de $[a, b] \times \mathbb{R}$ formado por los pares (x, z) que cumplen esa igualdad, con el caso degenerado separado. Existencia y unicidad muestran que es una función de dominio exacto $[a, b]$ y codominio real. No se elige una familia de testigos para construirla: cada salida está determinada por la relación funcional. En particular, $A_f(a) = 0, \qquad A_f(b) = \int_a^b f$.

Primera identidad reutilizable. Para $a \le x \le y \le b$, las restricciones sucesivas de f conservan dominio, codominio y valores; por aditividad finita, $A_f(y) - A_f(x) = \int_x^y f$. Si $x = y$, ambos miembros son cero. Para $y < x$, la convención de orientación de C23 da la misma fórmula: invertir los límites cambia el signo. Así el incremento depende sólo del tramo entre las entradas, aunque cada valor de A_f recuerde el origen a.

Si elegimos otro origen $c \in [a, b]$, la función $A_{f,c}(x) = \int_c^x f$ también existe para todas las entradas, incluidas las anteriores a c, y aditividad orientada prueba $A_{f,c}(x) = A_f(x) - A_f(c)$. Cambiar el origen traslada toda la acumulación por una constante; no altera ninguno de sus incrementos. Esto se prueba antes de derivar y no presupone primitivas.

Para $f(t) = 2t - 1$ en $[0, 1]$, la fórmula afín de C22, aplicada a cada $[0, x]$, da $A_f(x) = x^2 - x$. La acumulación es negativa en el interior y vuelve a cero en 1: las contribuciones iniciales negativas se compensan con las posteriores positivas. Su signo y su crecimiento dependen de la tasa; acumular cantidades firmadas no obliga a producir una función no negativa o creciente.

Ejercicios de la sección 24.1.

Ejercicio 1. Acumular una tasa afín

En $[0, 1]$, calcula $A_f(x)$ para $f(t) = 2t - 1$ usando la fórmula por sumas de C22, e identifica sus valores en $0, 1/2, 1$.

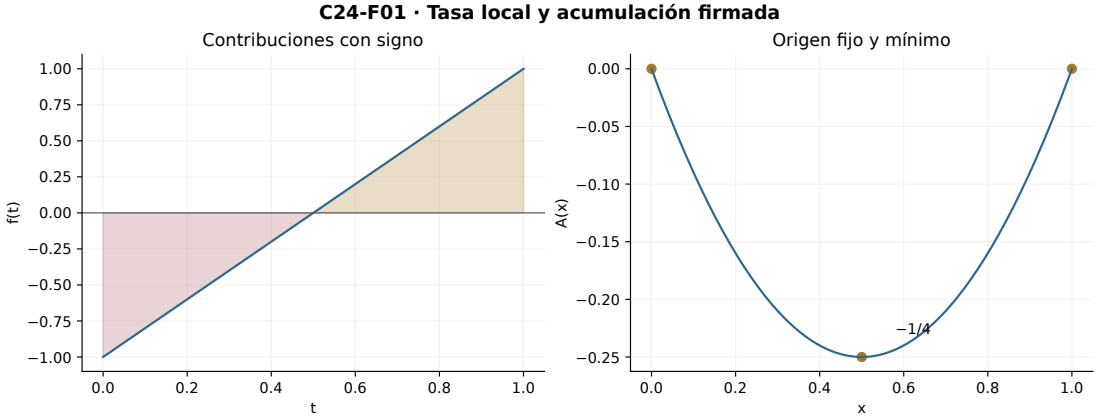


Figura 24.1. En [0,1], f(t)=2t−1 y A(x)=x²−x. La acumulada tiene origen0, valor−1/4 en1/2 y valor0 en1; contribuciones firmadas de mitades opuestas.

Solución. La tasa afín es integrable y sus restricciones también. Para $x > 0$, la fórmula de C22 calcula la integral de una afín como la longitud por el promedio de sus alturas extremas. Por tanto $A_f(x) = x((-1) + (2x - 1))/2 = x^2 - x$. En $x = 0$, la convención degenerada da cero y coincide con la fórmula. Así $A_f(0) = 0$, $A_f(1/2) = -1/4$ y $A_f(1) = 0$. En el interior, $x(x - 1) < 0$. La acumulación baja mientras la tasa es negativa y vuelve al valor inicial cuando la contribución positiva completa la compensación.

Retorno visual. Véase C24-F01, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 2. Cambiar de origen

Demuestra para una integrable que $A_{f,c}(x) = A_f(x) - A_f(c)$ para toda entrada, y aplícalo a $f = 1$ con $c = 3/4$ en $[0, 1]$.

Solución. Definimos $A_{f,c}(x) = \int_c^x f$ mediante restricción y orientación. Si $c \le x$, aditividad da $A_f(x) = A_f(c) + \int_c^x f$. Si $x < c$, da $A_f(c) = A_f(x) + \int_x^c f$; al restar y negar la integral se obtiene la misma igualdad $A_{f,c}(x) = A_f(x) - A_f(c)$. Para $x = c$ ambos lados son cero. Con $f = 1$ en $[0, 1]$, $A_f(x) = x$ y el nuevo origen $c = 3/4$ da $A_{f,c}(x) = x - 3/4$. Sus valores negativos antes de c reflejan la orientación de esos tramos.

Ejercicio 3. Grafo sin selección

Justifica que la relación que define A_f tiene dominio exacto $[a, b]$ y codominio real, separando el borde.

Solución. Para $a < x \le b$, C23 garantiza la integrabilidad de $f|_{[a,x]}$ y la unicidad de su valor integral. En $x = a$ declaramos la única salida cero. Dentro de $[a, b] \times \mathbb{R}$, consideramos la relación que contiene $(a, 0)$ y los pares (x, r) con $a < x \le b$ y $r = \int_a^x f$. Cada entrada del intervalo tiene exactamente una salida real, y ninguna entrada exterior pertenece al producto. La relación es por tanto el grafo de una función con dominio exacto $[a, b]$. La unicidad determina las salidas, sin una selección simultánea de testigos de integración.

Ejercicio 4. Incremento orientado

Prueba $A_f(y) - A_f(x) = \int_x^y f$ también cuando $y < x$ y cuando son iguales.

Solución. Si $x < y$, aditividad sobre los intervalos contiguos da $\int_a^y f = \int_a^x f + \int_x^y f$, incluyendo el caso $x = a$ por la convención degenerada. Así $A_f(y) - A_f(x) = \int_x^y f$. Si $y < x$, la identidad ordenada da $A_f(x) - A_f(y) = \int_y^x f$. Al negar se obtiene $A_f(y) - A_f(x) = -\int_y^x f = \int_x^y f$. Con $x = y$, tanto la diferencia como la integral degenerada valen cero. Las integrales existen por restricción; la inversión de extremos modifica su signo.

Ejercicio 5. Acumular un escalón

Para el escalón de corte $1/2$, deduce la acumulada, incluido el valor en el corte, mediante restricciones y cambios finitos.

Solución. Sea $h(t) = 0$ para $t < 1/2$ y $h(t) = 1$ para $t \geq 1/2$. Si $0 < x < 1/2$, la restricción a $[0, x]$ es cero y su integral vale cero. Si $x = 1/2$, difiere de la función cero sólo en su último punto; C23 conserva la integral cero. Si $x > 1/2$, aditividad da $A_h(x) = \int_0^{1/2} h + \int_{1/2}^{x} h = 0 + (x - 1/2)$. Junto con $A_h(0) = 0$, queda $A_h(x) = 0$ para $x \leq 1/2$ y $A_h(x) = x - 1/2$ para $x \geq 1/2$. Las dos fórmulas tienen el mismo valor en el corte, por lo que no hay salto en la acumulada.

24.2. Incrementos, cotas y continuidad

La identidad del incremento permite usar las cotas de f en un tramo para encerrar el cambio de A_f en él. Si las alturas quedan entre dos constantes, el orden de la integral sitúa la acumulación entre los productos de esas constantes por la longitud. Esta comparación permitirá demostrar continuidad antes de buscar una derivada. **R2 — Encierro y regularidad automática.** Si $x < y$ y $m \leq f(t) \leq M$ para todo $t \in [x, y]$, el orden de la integral de C23 y la integral de una constante dan $m(y - x) \leq A_f(y) - A_f(x) \leq M(y - x)$. Dividir por $y - x > 0$ conserva el orden. Podemos tomar $m = \inf f([x, y])$, $M = \sup f([x, y])$, porque la imagen es no vacía y acotada; no tienen por qué alcanzarse. El cociente queda encerrado entre cotas de toda la pieza, no entre dos muestras.

La integrabilidad asegura una cota global $|f(t)| \leq B$ con $B \geq 0$. Para $x < y$, aplicar el encierro con $-B, B$ da $|A_f(y) - A_f(x)| \leq B(y - x)$. Para $y < x$, intercambiar las entradas y usar simetría del absoluto; para igualdad, ambos lados son cero. Por tanto, $|A_f(y) - A_f(x)| \leq B|y - x| \qquad (x, y \in [a, b])$. La acumulada es Lipschitz. Para cada $\varepsilon > 0$, el radio $\delta = \varepsilon/(B+1) > 0$ funciona para todos los pares: si $B > 0$, la diferencia es menor que $B\delta < \varepsilon$; si $B = 0$, es cero. Queda probada continuidad uniforme, incluso en los bordes relativos del dominio. También $|A_f(x)| \leq B(b - a)$ por comparar con a.

El signo gobierna incrementos. Si $f \geq 0$, cada integral sobre $[x, y]$, con $x < y$, es no negativa y A_f es no decreciente. Para $f \leq 0$ resulta no creciente. Una barrera $f \geq m > 0$ da $A_f(y) - A_f(x) \geq m(y - x) > 0$ y crecimiento estricto. Un valor positivo aislado no basta: el pico de C23 tiene integral cero. Si f es continua y estrictamente positiva, fijamos un punto interior de cualquier $[x, y]$; la continuidad mantiene allí f por encima de la mitad de ese valor en un pequeño segmento. Su integral es positiva, y las de las piezas restantes son no negativas. La aditividad da incremento positivo en todo $[x, y]$.

Para el escalón $s(t) = 0$ si $t < 1/2$ y $s(t) = 1$ si $t \geq 1/2$ en $[0, 1]$, la acumulada es 0 hasta $1/2$ y $x - 1/2$ después. El valor nodal no aporta anchura, por cambios finitos de C23. Es continua y Lipschitz de constante 1 aunque la integranda tenga un salto.

Ejercicios de la sección 24.2.

Ejercicio 6. Lipschitz de la acumulada

Si $|f| \leq 3$ en $[-1, 2]$, prueba continuidad uniforme de A_f con radio explícito y una cota de su valor.

Solución. El origen es $a = -1$. Para $x < y$, el orden integral aplicado a $-3 \leq f \leq 3$ da $-3(y - x) \leq \int_x^y f \leq 3(y - x)$. La identidad de incrementos implica $|A_f(y) - A_f(x)| \leq 3|y - x|$; intercambiar entradas prueba el mismo resultado si $y < x$, y la igualdad es inmediata. Dada $\varepsilon > 0$, el radio $\delta = \varepsilon/4$ sirve para todos los centros: si $|y - x| < \delta$, el incremento tiene magnitud menor que $3\varepsilon/4 < \varepsilon$. Esto prueba continuidad uniforme. Como $A_f(-1) = 0$, también $|A_f(x)| \leq 3(x + 1) \leq 9$ en todo el intervalo.

Retorno visual. Véase C24-F02, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

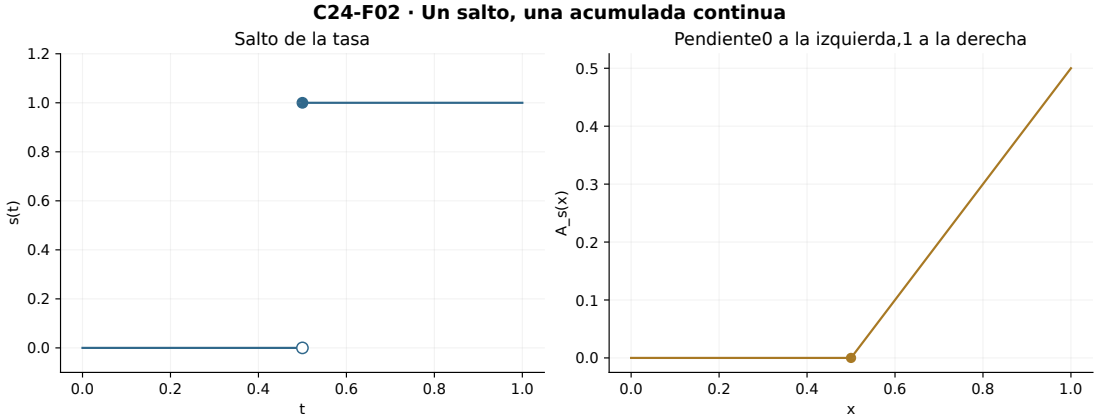


Figura 24.2. El escalón vale0 antes de1/2 y1 desde el corte. Su acumulada vale0 hasta1/2 y x−1/2 después: continua y Lipschitz1, aunque haya salto.

Ejercicio 7. El caso de cota nula

Explica por qué el radio $\varepsilon/(B+1)$ prueba continuidad uniforme incluso con $B = 0$.

Solución. La cota absoluta tiene $B \geq 0$, así $B+1 > 0$ y $\delta = \varepsilon/(B+1)$ es un radio positivo para toda tolerancia positiva. Si $B > 0$ y $|y-x| < \delta$, se obtiene $|A_f(y) - A_f(x)| \leq B|y-x| < B\varepsilon/(B+1) < \varepsilon$. Si $B = 0$, la desigualdad $|f| \leq 0$ hace la tasa idénticamente cero y todos los incrementos de la acumulada son cero. El mismo radio sirve en ese caso. Como no depende del centro, demuestra continuidad uniforme.

Ejercicio 8. Signo y orden

Demuestra que $f \geq m > 0$ implica crecimiento estricto de su acumulada y una cota inferior de cada incremento.

Solución. Sean $x < y$. La restricción de f es integrable y la constante m tiene integral $m(y-x)$. El orden $f \geq m$ implica $A_f(y) - A_f(x) = \int_x^y f \geq m(y-x)$. Tanto m como $y-x$ son positivos, así el incremento es estrictamente positivo. Por tanto A_f es estrictamente creciente y satisface la cota cuantitativa $A_f(y) - A_f(x) \geq m(y-x)$ en todo par ordenado. Esta cota también impide que un tramo de longitud positiva tenga acumulación nula.

Ejercicio 9. Positivo en un punto

Refuta que una tasa integrable no negativa, positiva en algún punto, tenga acumulada estrictamente creciente.

Solución. Definimos $p(1/2) = 1$ y $p(t) = 0$ para las demás entradas de $[0,1]$. Es integrable por el argumento del pico de C23, no negativa y positiva en $1/2$. En cada $[0,x]$ difiere de la función cero en a lo sumo un punto, por lo que $\int_0^x p = 0$. Su acumulada es idénticamente cero y tiene iguales valores en cualesquiera dos entradas. Esto refuta el crecimiento estricto bajo la sola hipótesis de positividad en algún punto.

Ejercicio 10. Cociente encerrado

Si $-2 \leq f \leq 5$ sobre $[x,y]$, $x < y$, encierra el incremento y el cociente de su acumulada. ¿Hace falta alcanzar esas cotas?

Solución. La integral de las constantes en $[x,y]$ vale, respectivamente, $-2(y-x)$ y $5(y-x)$. Al integrar las cotas universales resulta $-2(y-x) \leq \int_x^y f = A_f(y) - A_f(x) \leq 5(y-x)$. Como $y - x > 0$, dividir conserva el orden y da $-2 \leq (A_f(y) - A_f(x))/(y-x) \leq 5$. La conclusión sólo requiere que las cotas valgan para todas las entradas del tramo. No necesita que alguna altura sea exactamente menos dos o cinco, ni que esas cotas sean los extremos óptimos de la imagen.

24.3. La tasa reaparece en un punto

Ya sabemos que toda integranda integrable produce una acumulada continua. Para derivarla en un centro x, el cociente incremental expresa el promedio de f entre x y una entrada cercana. Si todos los valores de ese tramo están cerca de $f(x)$, el promedio también lo estará. La continuidad puntual proporcionará precisamente esa banda de alturas. **Lema del promedio local.** Sean $x \neq y$ en $[a,b]$ y $\eta \geq 0$. Si $|f(t)-f(x)| \leq \eta$ para toda entrada del segmento que une x con y, entonces $\left|\frac{A_f(y)-A_f(x)}{y-x} - f(x)\right| \leq \eta$. Para $y > x$, integrar las cotas $f(x)-\eta \leq f(t) \leq f(x)+\eta$ y dividir por anchura positiva prueba la afirmación. Para $y < x$, aplicar el mismo argumento a $[y,x]$ produce el cociente $[A_f(x)-A_f(y)]/(x-y)$; cambiar los signos de numerador y denominador lo identifica con el cociente requerido. No se divide una desigualdad por un negativo conservando su orden.

R3 — Primera parte, continuidad puntual. Si f es continua en un punto $x \in (a,b)$, entonces A_f es derivable allí y $A_f'(x) = f(x)$. Fijemos $\varepsilon > 0$. Continuidad relativa de f en x da $\rho > 0$ tal que $|t-x| < \rho$ y $t \in [a,b]$ implican $|f(t)-f(x)| < \varepsilon/2$. Elegimos $\delta = \min\{\rho, (x-a)/2, (b-x)/2\} > 0$. Para cualquier y admisible con $0 < |y-x| < \delta$, cada punto t del segmento entre ellos satisface $|t-x| \leq |y-x| < \rho$. El lema con $\eta = \varepsilon/2$ da error del cociente a lo sumo $\varepsilon/2 < \varepsilon$. Ese mismo radio controla todas las entradas a ambos lados; es exactamente la definición de C18. El centro acumula por ambos lados: para cualquier radio $r > 0$, $x \pm \frac{1}{2}\min\{r, x-a, b-x\}$ son entradas distintas suficientemente cercanas. Unicidad legitima la notación de derivada.

El radio procede de la continuidad de f sólo en x, pero controla a la vez todos los puntos del segmento corto. La existencia de A_f requiere, en cambio, integrabilidad en todo $[a,b]$. La prueba conserva separadas ambas obligaciones y no necesita representar cada promedio mediante un punto de valor medio integral. **Certificado adicional cuando hay Lipschitz.** Si $|f(t)-f(x)| \leq L|t-x|$, el lema da error del cociente a lo sumo $L|y-x|$. Hay una cota más fina: por álgebra y orden de integrales, $|A_f(y)-A_f(x)-f(x)(y-x)| \leq \frac{L}{2}|y-x|^2$. Para $y > x$, integrar $|f(t)-f(x)| \leq L(t-x)$ y usar la integral afín heredada da $L(y-x)^2/2$. Para $y < x$, invertir orientación y usar $L(x-t)$ sobre $[y,x]$ da el mismo resultado. No se usó Taylor. Si $L = 0$, el residuo es exactamente cero.

Con $f(t) = t^2$ y $x = 1/2$ en $[0,1]$, la acumulada ya calculada por sumas es $x^3/3$. Para incrementos admisibles $h \neq 0$, el cociente es $1/4 + h/2 + h^2/3$, que converge a $f(1/2) = 1/4$. El término adicional tiene signo y tamaño explícitos, sin depender de una lista de muestras.

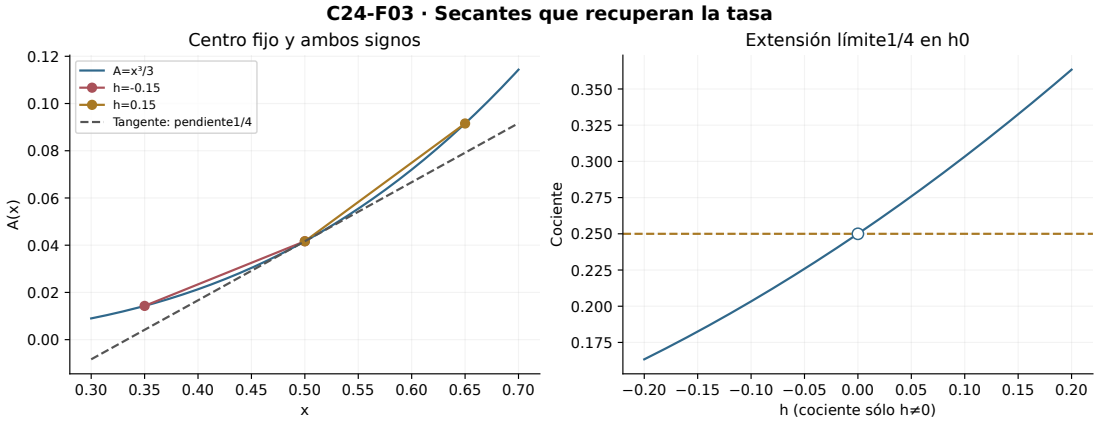


Figura 24.3. Para f(t)=t², A(x)=x³/3 y centro1/2, el cociente con incremento h es1/4+h/2+h²/3. Desde ambos signos converge a1/4; la curva exacta, no las muestras, prueba el límite.

Ejercicios de la sección 24.3.

Ejercicio 11. El lado negativo del cociente

Prueba el lema del promedio local cuando $y < x$, sin dividir una desigualdad por un negativo.

Solución. Suponemos $y < x$ y $|f(t) - f(x)| \le \eta$ para todo $t \in [y, x]$. Integramos $f(x) - \eta \le f(t) \le f(x) + \eta$ sobre ese segmento ordenado. Su longitud positiva permite dividir y obtener $f(x) - \eta \le (\int_y^x f)/(x - y) \le f(x) + \eta$. Por aditividad, el cociente central es $(A_f(x) - A_f(y))/(x - y)$, igual a $(A_f(y) - A_f(x))/(y - x)$ al cambiar los dos signos. Restar $f(x)$ da un error entre $-\eta$ y η, equivalente a magnitud a lo sumo η. Así el lado negativo queda cubierto sin dividir una desigualdad por un número negativo.

Ejercicio 12. Radio puntual completo

Escribe la prueba ε–δ de $A_f'(x) = f(x)$ para una integrable continua en un centro interior.

Solución. Sea $x \in (a, b)$ y $\varepsilon > 0$. La continuidad de f en x proporciona $\rho > 0$ tal que $|f(t) - f(x)| < \varepsilon/2$ para toda entrada del dominio con $|t - x| < \rho$. Tomamos $\delta = \min\{\rho, (x - a)/2, (b - x)/2\} > 0$. Para cualquier y con $0 < |y - x| < \delta$, todo punto del segmento entre x e y dista de x a lo sumo $|y - x| < \rho$. El error de la tasa en todo ese tramo está acotado por $\varepsilon/2$. El lema del promedio, válido para los dos órdenes, da $\left|(A_f(y) - A_f(x))/(y - x) - f(x)\right| \le \varepsilon/2 < \varepsilon$. El radio precede a toda y y ambos lados contienen entradas cercanas al centro, así esta es la prueba completa de $A_f'(x) = f(x)$.

Ejercicio 13. Cociente exacto del cuadrado

Para $f(t) = t^2$ en $[0, 1]$ y centro $1/2$, calcula el cociente con incremento h admisible y no nulo, usando $A_f(x) = x^3/3$ de C22.

Solución. Los incrementos admisibles satisfacen $-1/2 \le h \le 1/2$ y $h \neq 0$. La fórmula por sumas de C22 da $A_f(x) = x^3/3$. Por tanto el cociente en $1/2$ es $((1/2 + h)^3 - (1/2)^3)/(3h)$. Expandir el cubo produce numerador $3h/4 + 3h^2/2 + h^3$ y dividir da $1/4 + h/2 + h^2/3$. Su diferencia respecto de $1/4$ tiene magnitud a lo sumo $|h|/2 + h^2/3$. Para $|h| \le 1/2$, esto no supera $2|h|/3$, que tiende a cero. La misma cuenta cubre ambos signos y confirma la derivada $1/4$.

Retorno visual. Véase C24-F03, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 14. Residuo cuadrático sin Taylor

Si f es Lipschitz de constante L, demuestra la cota $|A_f(y) - A_f(x) - f(x)(y - x)| \le L|y - x|^2/2$.

Solución. Por linealidad e incrementos, el residuo $R = A_f(y) - A_f(x) - f(x)(y - x)$ es $\int_x^y (f(t) - f(x))\, dt$. Si $x < y$, la triangular integral y Lipschitz dan $|R| \le \int_x^y |f(t) - f(x)|\, dt \le \int_x^y L(t - x)\, dt = L(y - x)^2/2$. La última evaluación es la fórmula afín de C22. Si $y < x$, invertimos orientación para trabajar en $[y, x]$, donde $|f(t) - f(x)| \le L(x - t)$; su integral vale $L(x - y)^2/2$. Si $x = y$, el residuo es cero. Así $|R| \le L|y - x|^2/2$ en todos los casos, también con $L = 0$, sin usar Taylor.

Ejercicio 15. Continuidad local y global

Explica qué hipótesis locales y globales se gastan al derivar la acumulada en un único centro.

Solución. La integrabilidad en todo $[a, b]$ permite restringir la tasa, construir cada valor de A_f y escribir los incrementos como integrales. Además aporta una cota absoluta que demuestra continuidad de la acumulada. Para derivarla en una entrada interior fija x, sólo se necesita continuidad de f en x: el radio puntual controla todas las alturas del segmento entre x y una entrada cercana. El promedio local fuerza entonces el límite del cociente a $f(x)$.

No interviene continuidad de la tasa en el resto del intervalo. El carácter interior del centro permite acercamientos por ambos lados; en los bordes la misma prueba produce derivadas relativas.

24.4. Bordes, saltos y valores aislados

En un extremo sólo podemos comparar la acumulación con entradas de un lado del dominio. El mismo encierro de promedios seguirá funcionando, con la continuidad relativa y el límite unilateral correspondientes. **R4 — Bordes y límites de la recuperación.** Si f es continua relativamente a $[a, b]$ en a, el mismo lema local prueba $\lim_{y \downarrow a} \frac{A_f(y) - A_f(a)}{y - a} = f(a)$. Basta tomar el radio de continuidad para $\varepsilon/2$, reducirlo si hace falta a $(b-a)/2$, y controlar $t \in [a, y]$. En b, usar $[y, b]$ y cambiar ambos signos prueba el límite desde la izquierda, de valor $f(b)$. Ambos extremos acumulan unilateralmente. No se afirma una derivada bilateral de una prolongación desconocida.

Si f es continua en todo $[a, b]$, C23 asegura su integrabilidad. R2 hace continua a A_f, R3 identifica su derivada en cada punto interior y el argumento anterior da las derivadas relativas de borde. Disponemos así de una función concreta cuya derivada recupera la tasa, incluso con el alcance unilateral que corresponde en los extremos. **Un salto impide la derivada de la acumulada.** Para el escalón de R2, en $c = 1/2$ los cocientes de la acumulada son 0 desde la izquierda y 1 desde la derecha. Si existiera una derivada D, la tolerancia $1/3$ y un radio común permitirían tomar $c - r, c + r$ dentro del dominio, con r positivo menor que ese radio. Resultarían $|D| < 1/3$ y $|1 - D| < 1/3$, contradiciendo $1 \leq |D| + |1 - D| < 2/3$. Continuidad de la acumulada no implica derivabilidad.

Un valor aislado muestra otra falla. Sea $p(c) = 1$ y $p(t) = 0$ para $t \neq c$, con $c = 1/2$. Cambios finitos de C23 dan integral cero en cualquier restricción, luego $A_p \equiv 0$. Su derivada existe también en c y vale cero, distinta de $p(c) = 1$. Sin continuidad local puede existir la derivada y fallar la igualdad. Continuidad es una condición suficiente de recuperación, no se ha probado que sea necesaria para que exista una derivada.

Modificar un valor de borde también deja todas las integrales intactas. La función que vale cero salvo $f(a) = 1$ tiene acumulada cero y derivada derecha cero, distinta de ese valor de borde. Precisamente falla la continuidad relativa en a. El teorema no puede recuperar información que los cambios finitos borran de la integral.

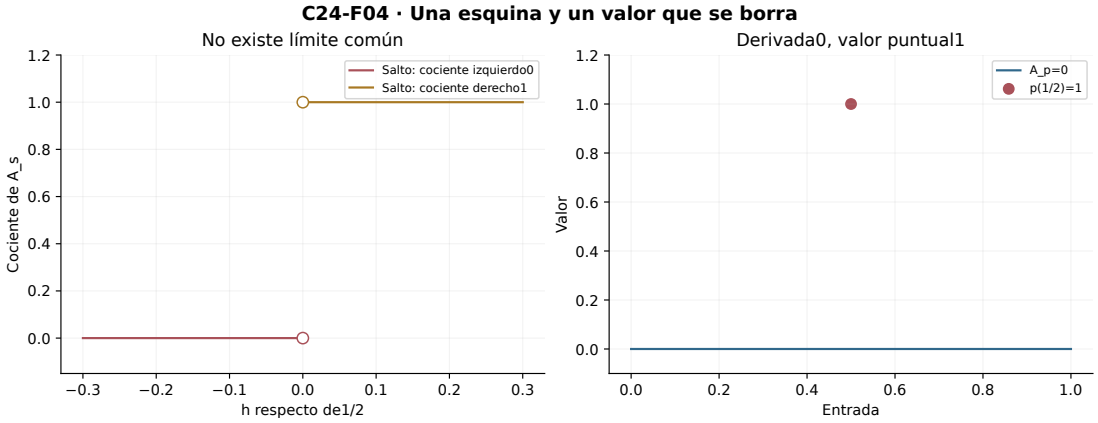


Figura 24.4. En el salto, los cocientes de la acumulada en el corte son0 y1 desde lados distintos. El pico aislado tiene acumulada cero y derivada cero, diferente del valor1 en el pico.

Ejercicios de la sección 24.4.

Ejercicio 16. Derivada en el borde

Para una integrable continua relativamente en a, demuestra que la derivada derecha de A_f vale $f(a)$.

Solución. Sea $\varepsilon > 0$. La continuidad relativa de f en a proporciona $\rho > 0$ con $|f(t)-f(a)| < \varepsilon/2$ para las entradas del dominio a distancia menor que ρ de a. Ponemos $\delta = \min\{\rho, (b-a)/2\} > 0$. Si $a < y \le b$ y $y-a < \delta$, todos los puntos de $[a, y]$ están en esa vecindad. Integrar las cotas y dividir por $y-a > 0$ da $\left|(A_f(y) - A_f(a))/(y-a) - f(a)\right| \le \varepsilon/2 < \varepsilon$. Como $a < b$, existen entradas derechas arbitrariamente próximas. El límite derecho, que es la derivada relativa al cerrado en a, vale $f(a)$.

Ejercicio 17. Dos pendientes incompatibles

Prueba por contradicción cuantificada que la acumulada del escalón no tiene derivada en $1/2$.

Solución. La acumulada del escalón es cero hasta $c = 1/2$ y $x - c$ después. Sus cocientes en c valen cero para incrementos negativos y uno para positivos. Supongamos que tuviera derivada D. Con tolerancia $1/3$ existiría $\delta > 0$ tal que todos los cocientes de entradas a distancia positiva menor que δ estuvieran a distancia menor que $1/3$ de D. Elegimos $r = \frac{1}{2}\min\{\delta, 1/2\} > 0$. Las entradas $c-r, c+r$ pertenecen al dominio y cumplen la escala pedida. Sus cocientes dan $|D| < 1/3$ y $|1-D| < 1/3$. La triangular implicaría $1 \le |D|+|1-D| < 2/3$, contradicción. La acumulada es continua en el corte y carece de derivada allí.

Ejercicio 18. Derivada existente, valor no recuperado

Para el pico aislado de altura uno, calcula su acumulada y su derivada en el pico; identifica la hipótesis fallida.

Solución. Para el pico $p(1/2) = 1$, $p = 0$ fuera, cada restricción a $[0, x]$ difiere de la tasa cero en a lo sumo una entrada. C23 conserva sus integrales, incluso si el punto excepcional coincide con el extremo x. Por ello $A_p(x) = 0$ para toda entrada. En el centro $c = 1/2$, todos sus cocientes son cero y $A_p'(c) = 0$. En cambio $p(c) = 1$. La tasa no es continua en c: cualquier vecindad contiene entradas distintas donde vale cero. Falla precisamente la hipótesis que permite recuperar el valor puntual de la tasa.

Retorno visual. Véase C24-F04, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 19. Modificar un extremo

En $[0, 1]$, toma $f(0) = 1$ y $f(t) = 0$ para $t > 0$. Evalúa A_f y su derivada derecha en cero.

Solución. La función dada difiere de cero sólo en el extremo izquierdo. Sobre cada $[0, x]$ de longitud positiva, el cambio finito conserva la integral cero; en $x = 0$ la convención da también cero. Así A_f es la función cero. Para $y > 0$, $(A_f(y) - A_f(0))/y = 0$, por lo que su derivada derecha en cero vale cero. Este valor difiere de $f(0) = 1$. La continuidad relativa de la tasa falla allí, pues todas las entradas positivas próximas tienen altura cero. El ejemplo muestra que también en un borde un valor aislado puede perderse al acumular.

Ejercicio 20. Corolario de tasa continua

Justifica que una continua sobre todo $[a, b]$ produce una acumulada continua y derivable con los valores relativos correctos.

Solución. Una función continua sobre $[a, b]$, con $a < b$, está acotada y es integrable por C23. Sus restricciones construyen A_f, y la cota absoluta prueba que esa acumulada es Lipschitz y continua en todo el cerrado. En cada punto de (a, b), la continuidad puntual de la tasa permite aplicar la primera parte del fundamental y obtener $A_f' = f$. En a se usa el argumento derecho; en b, el izquierdo. Ambos recuperan los valores de la tasa por continuidad relativa. Se obtiene una primitiva normalizada, con derivadas de borde referidas al dominio original.

24.5. De una primitiva a la integral

Para evaluar la integral a partir de una función H cuya derivada sea f, compararemos los incrementos de H con las mismas sumas inferiores y superiores que encierran la integral. Esta prueba utilizará Lagrange en cada pieza. Necesitaremos continuidad de H en el cerrado y, para llegar al valor integral, integrabilidad de f; no tendremos que exigir continuidad de f. **Primitiva en un cerrado.** Para $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, llamaremos primitiva a una función $H : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en todo el cerrado, derivable en (a, b) y con $H'(t) = f(t)$ allí. No pedimos derivadas bilaterales en los extremos ni incorporamos integrabilidad de f a la definición. La continuidad de H en los bordes será necesaria al usar C19.

Encierro antes de integrar. Si f es acotada y H es primitiva, para toda partición $P = (x_0, \dots, x_n)$, $L(f, P) \le H(b) - H(a) \le U(f, P)$. Fijado un índice i, la restricción de H es continua en $[x_{i-1}, x_i]$ y derivable dentro, por C14/C18. C19, valor medio de Lagrange, entrega c interior con $H(x_i) - H(x_{i-1}) = H'(c)\Delta_i = f(c)\Delta_i$. Cotas locales y $\Delta_i > 0$ dan $m_i\Delta_i \le H(x_i) - H(x_{i-1}) \le M_i\Delta_i$. El testigo ya no aparece en esta desigualdad. Por tanto podemos sumar la afirmación universal para todos los índices finitos sin construir una familia de puntos seleccionados. La suma central telescopa por cancelación finita y da el incremento total. La cota no ha supuesto integrabilidad.

R5 — Newton–Leibniz. Si además f es integrable, entonces $\int_a^b f(t)\,dt = H(b) - H(a)$. La integral I y el incremento $D = H(b) - H(a)$ están ambos en $[L(f, P), U(f, P)]$ para cualquier P. Dada $\varepsilon > 0$, el criterio de Darboux da una partición con brecha menor que ε, luego $|I - D| < \varepsilon$. Si esa distancia fuera positiva d, elegir $\varepsilon = d/2$ contradice el encierro; así $I = D$. Esta prueba no usa R3 ni continuidad de f. La primitiva es una hipótesis, su existencia no se deduce aquí de mera integrabilidad.

La restricción a cualquier $[u, v] \subseteq [a, b]$, con $u < v$, conserva todas las hipótesis y da $\int_u^v f = H(v) - H(u)$. Para igualdad, ambos lados cero; para límites invertidos, orientación de C23 cambia ambos signos. Así también $A_f(x) = H(x) - H(a)$ si existe esta primitiva, aun cuando f no sea continua. **Por qué conservar los bordes.** En $[0, 1]$, tome $f \equiv 0$, $H(0) = 1$ y $H(x) = 0$ para $x > 0$. La igualdad $H' = f$ vale en el interior, pero la integral es cero y $H(1) - H(0) = -1$. Falta continuidad de la primitiva en el borde; Lagrange no se aplica al primer segmento. La fórmula de evaluación no es una nueva definición de integral.

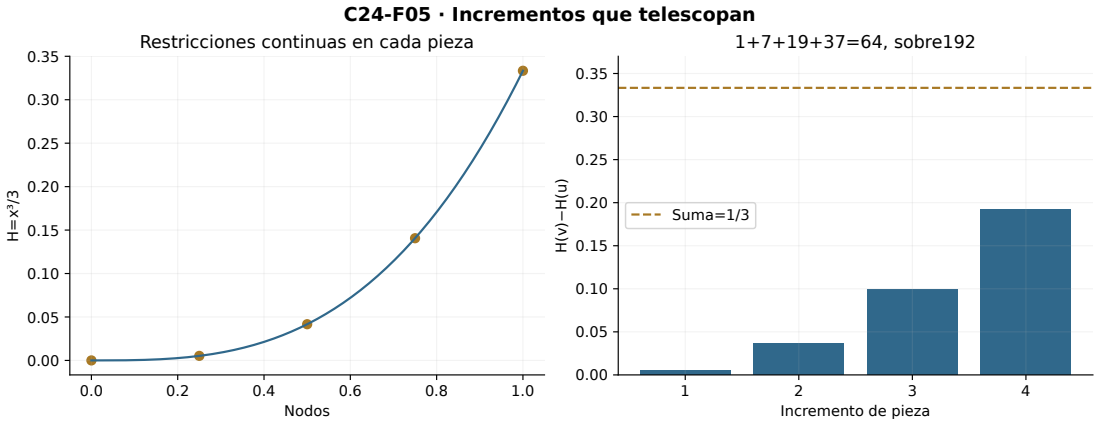


Figura 24.5. Para H(x)=x³/3, los incrementos sobre nodos0,1/4,1/2,3/4,1 suman1/3. Cada incremento se encierra por Darboux; la suma cancela nodos interiores.

Ejercicios de la sección 24.5.

Ejercicio 21. Telescopía de una primitiva

Para una acotada f y primitiva H, prueba el encierro de $H(b)-H(a)$ por $L(f,P), U(f,P)$ sin formar etiquetas de Lagrange.

Solución. Fijemos una pieza $[x_{i-1}, x_i]$ de P. La continuidad de H en el cerrado y su derivabilidad interior permiten aplicar Lagrange en esa pieza. Existe c en su interior con $H(x_i) - H(x_{i-1}) = H'(c)\Delta_i = f(c)\Delta_i$. Como $m_i \le f(c) \le M_i$ y $\Delta_i > 0$, queda $m_i\Delta_i \le H(x_i) - H(x_{i-1}) \le M_i\Delta_i$. El testigo ha desaparecido de esta conclusión, que vale para cualquier índice. Sumamos las desigualdades finitas; los valores de H en nodos interiores se cancelan y obtenemos $L(f,P) \le H(b) - H(a) \le U(f,P)$. La acotación de f garantiza extremos reales, y no se necesitó formar una familia de etiquetas ni suponer integrabilidad.

Retorno visual. Véase C24-F05, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 22. Encierro y evaluación

Añade integrabilidad a la tarea anterior y deriva Newton–Leibniz mediante una tolerancia arbitraria.

Solución. Sea $I = \int_a^b f$, cuya existencia se añade como hipótesis. Para toda partición, el encierro del ejercicio anterior y el de la integral sitúan $H(b)-H(a)$ e I en el mismo intervalo $[L(f,P), U(f,P)]$. Por tanto $|H(b)-H(a)-I| \le G(f,P)$. Dada $\varepsilon > 0$, el criterio de Darboux produce una partición de brecha menor que ε, dando distancia menor que ella. Si la distancia fuera $d > 0$, aplicar el criterio con $d/2$ produciría $d < d/2$, imposible. Luego $I = H(b)-H(a)$. La prueba usa Lagrange e integrabilidad; no requiere continuidad de f.

Ejercicio 23. Borde discontinuo de la candidata

En $[0,1]$, $f = 0$, $H(0) = 1$ y $H(x) = 0$ para $x > 0$. ¿Basta $H' = f$ interior para evaluar la integral?

Solución. Para $x \in (0,1)$, la función H es localmente constante cero, así $H'(x) = 0 = f(x)$. La tasa cero es integrable y $\int_0^1 f = 0$. Sin embargo, $H(1)-H(0) = 0-1 = -1$, así la igualdad de evaluación falla. La candidata es discontinua en cero, porque sus valores derechos son cero y su valor inicial es uno. Por tanto no es una primitiva admisible según la definición del capítulo. En cualquier primera pieza que empiece en cero, falta la continuidad requerida por Lagrange, que era el paso que conectaba la derivada interior con el incremento nodal.

Ejercicio 24. Subintervalo y orientación

Si H es una primitiva de una integrable, demuestra la fórmula de evaluación para todos los pares u, v del dominio.

Solución. Si $u < v$, la tasa restringida a $[u,v]$ es integrable. La restricción de H es continua en ese cerrado y derivable en su interior, con derivada igual a la tasa allí. Newton–Leibniz da $\int_u^v f = H(v) - H(u)$. Si $u = v$, la integral degenerada y la diferencia valen cero. Si $v < u$, aplicamos la fórmula ordenada sobre $[v,u]$ y negamos: $\int_u^v f = -\int_v^u f = -(H(u) - H(v)) = H(v) - H(u)$. Así la evaluación vale para todos los pares del dominio, con la orientación correspondiente.

Ejercicio 25. Hipótesis independientes

Distingue las premisas de la primera y la segunda parte del teorema.

Solución. La primera parte empieza con una tasa integrable y construye su acumulada. Para recuperar la tasa al derivar en una entrada se añade continuidad en esa entrada; si es un borde, la continuidad y la derivada son relativas. La segunda parte empieza con una tasa integrable y una primitiva H ya dada, continua en el cerrado y derivable dentro, con $H' = f$ en el interior. Evalúa la integral por incrementos de H sin exigir continuidad de f. La primera dirección construye una primitiva cuando la tasa es continua; la segunda evalúa mediante una primitiva admisible existente. Ambas conservan la hipótesis de integrabilidad que legitima sus valores integrales.

24.6. Normalización, cálculo y signo

Dos primitivas de la misma tasa tienen diferencia de derivada cero. La constancia demostrada en C19 permitirá fijar esa diferencia mediante un solo valor inicial. Con esa normalización podremos pasar de las reglas de derivación disponibles a fórmulas de integración. **R6 — Unicidad salvo constante.** Si H, K son primitivas de la misma f en $[a, b]$, su diferencia es continua en el cerrado y derivable dentro, con $(H - K)' = 0$ por C18. C19 aplicado a cualquier par de entradas prueba constancia: $H(x) - K(x) = C$, donde $C = H(a) - K(a)$ es único al evaluar en a. Recíprocamente, sumar cualquier constante a una primitiva conserva ambas condiciones. El intervalo completo importa: dos componentes separadas podrían llevar constantes distintas.

Para una f continua, R4 construye la primitiva A_f que se anula en a. R6 muestra que cualquier otra tiene forma $A_f + C$, así que imponer $H(a) = c_0$ determina exactamente $C = c_0$. La solución única de $H' = f$ entre las funciones continuas en el cerrado y derivables en el interior es, por tanto, $H(x) = c_0 + A_f(x)$. La tasa está dada de antemano; esta construcción no resuelve una ecuación diferencial general en la que la función desconocida aparezca también a la derecha.

Polinomios y potencias enteras. C18 demostró por inducción $D(x^{n+1}) = (n + 1)x^n$ para enteros $n \geq 0$; el denominador $n + 1$ es positivo. La función $H(t) = t^{n+1}/(n + 1)$ es continua y primitiva de t^n. Esa integranda es continua e integrable por C23, de modo que $\int_u^v t^n \, dt = \frac{v^{n+1} - u^{n+1}}{n+1}$. Con $n = 0$ se recupera la integral constante sin potencias negativas. Sumas finitas y escalar de C23 permiten integrar polinomios término a término. No se extiende esta prueba a exponentes reales, ni a una serie infinita.

En particular $\int_0^1 t^2 \, dt = 1/3$, en acuerdo con el cálculo por sumas de C22/C23. Para $f(t) = 2t - 1$, una primitiva es $t^2 - t$, y $\int_0^1 f = 0$; sin embargo, partir en $1/2$ da $\int_0^{1/2} |2t - 1| \, dt = \frac{1}{4}$, $\int_{1/2}^1 |2t - 1| \, dt = \frac{1}{4}$. La integral de su absoluto es $1/2$. La cancelación no mide variación total ni vuelve cero a la integranda.

La acumulación de una continua positiva crece, por R3/C19 o directamente por R2. Cuando la tasa continua cambia de negativa a positiva, la acumulada puede tener un mínimo: para $2t - 1$ en $[0, 1]$, $A_f(1/2) = -1/4$. Ceros de la tasa corresponden a puntos estacionarios interiores por R3; no todo punto estacionario es extremo, como muestra una tasa $f(t) = 3t^2$ en $[-1, 1]$, cuya acumulada $t^3 + 1$ sigue creciendo a través de cero.

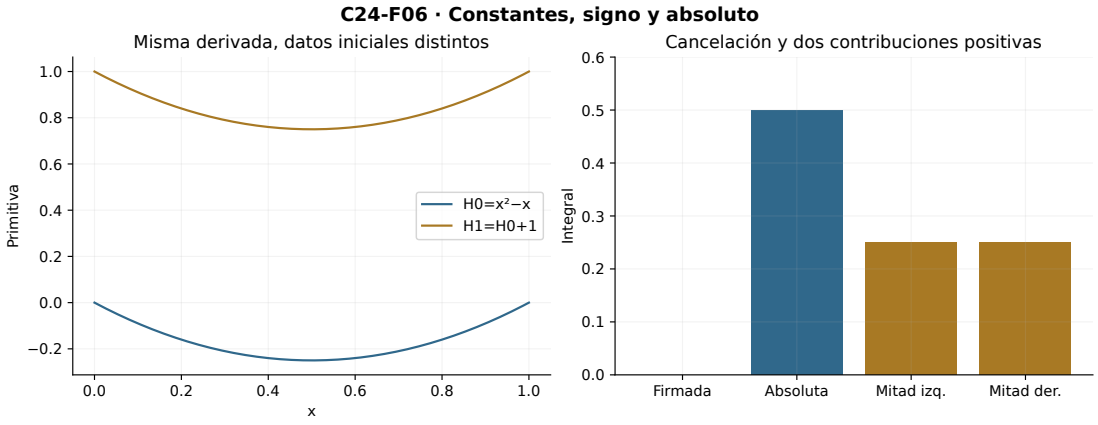


Figura 24.6. Las primitivas x²−x y x²−x+1 difieren en constante1. Integral firmada de2t−1 es0; integral absoluta1/2 y aportes absolutos1/4 por mitad.

Ejercicios de la sección 24.6.

Ejercicio 26. Constante de primitivas

Prueba unicidad salvo constante y determina la constante si $H(a) = 3$ y $K(a) = -2$.

Solución. La diferencia $D = H - K$ es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y tiene derivada $D' = H' - K' = 0$. Para cualesquiera $u < v$ del dominio, Lagrange sobre $[u, v]$ da $D(v) - D(u) = D'(c)(v - u) = 0$. Por tanto D es constante en todo el intervalo, incluidos los bordes. Evaluar en a fija $D(a) = 3 - (-2) = 5$, así $H(x) = K(x) + 5$ para toda entrada. La misma evaluación muestra que ninguna otra constante podría satisfacer esos datos.

Ejercicio 27. Un dato inicial

Para $f(t) = 2t - 1$ en $[0, 1]$ y $H(0) = 2$, encuentra y justifica la solución única del problema $H' = f$.

Solución. La acumulada de la tasa afín es $A_f(x) = x^2 - x$. Por tanto proponemos $H(x) = 2 + x^2 - x$. Es continua en $[0, 1]$, derivable dentro, tiene $H'(x) = 2x - 1$ por las reglas de C18 y cumple $H(0) = 2$. Si K es otra solución admisible, $K - H$ es continua en el cerrado y tiene derivada cero en el interior. Lagrange la hace constante, y el dato inicial da $K(0) - H(0) = 0$. Así $K = H$ y la solución es única entre las primitivas con la regularidad declarada.

Ejercicio 28. Potencia entera

Calcula $\int_{-1}^{2} t^3\,dt$ y justifica la primitiva con herramientas anteriores.

Solución. La tasa t^3 es continua en $[-1, 2]$ y por tanto integrable. La regla de potencias enteras de C18 da $(t^4/4)' = t^3$, y la función $H(t) = t^4/4$ es continua en el cerrado y derivable dentro. Es una primitiva admisible. Newton–Leibniz permite evaluar $\int_{-1}^{2} t^3\,dt = H(2) - H(-1) = (16 - 1)/4 = 15/4$. Por aditividad, el tramo negativo aporta $-1/4$ y el positivo aporta cuatro, dando la misma suma firmada.

Ejercicio 29. Cancelación y absoluto

Calcula las integrales de $2t - 1$ y de su absoluto en $[0, 1]$, sin confundirlas.

Solución. Para $2t - 1$, la primitiva $H(t) = t^2 - t$ da $\int_0^1 (2t - 1)\,dt = H(1) - H(0) = 0$. Para el absoluto, partimos en $1/2$. Sobre $[0, 1/2]$ vale $1 - 2t$ y la primitiva $t - t^2$ da $1/2 - 1/4 = 1/4$. Sobre $[1/2, 1]$ vale $2t - 1$ y su integral es $0 - (-1/4) = 1/4$. Las funciones son continuas e integrables en los segmentos usados. Aditividad produce $\int_0^1 |2t - 1|\,dt = 1/2$. En la integral firmada los aportes son $-1/4$ y $1/4$; al tomar el absoluto se suman sus magnitudes.

Retorno visual. Véase C24-F06, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 30. Estacionario sin extremo

En $[-1, 1]$, toma $f(t) = 3t^2$. Calcula su acumulada y demuestra que cero es estacionario sin ser extremo.

Solución. La tasa continua $3t^2$ tiene primitiva t^3. Con origen en menos uno, Newton–Leibniz da $A_f(x) = x^3 - (-1)^3 = x^3 + 1$. Su derivada en cero es $3 \cdot 0^2 = 0$, así el punto es estacionario. Sin embargo, $A_f(x) < 1 = A_f(0)$ para $x < 0$ y $A_f(x) > 1$ para $x > 0$, con entradas de ambos tipos en toda vecindad de cero. Esto excluye tanto un máximo como un mínimo local. Además el cubo es estrictamente creciente: si $u < v$, $v^3 - u^3 = (v - u)(v^2 + uv + u^2) > 0$, pues el segundo factor sólo podría ser cero con $u = v = 0$.

24.7. Partes y cambio de variable

La regla del producto y la regla de la cadena proporcionan primitivas de nuevas integrandas. Para usarlas mediante Newton–Leibniz debemos comprobar también la existencia de las integrales que aparecerán. Mantendremos explícita esa condición al obtener integración por partes y cambio de variable. **R7a — Integración por partes.**

Sean p, q continuas en $[a,b]$, derivables en (a,b). Sean $v, w : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrables, iguales respectivamente a p', q' en el interior. Los valores en los bordes son extensiones declaradas; cambios finitos no afectan integrales. Las funciones continuas p, q son integrables por C23; productos y sumas de integrables lo son por su álgebra. Por tanto pw y vq son integrables.

La regla del producto de C18 dice que pq es una primitiva, continua en el cerrado, de $vq + pw$. Newton–Leibniz y linealidad dan $\int_a^b p(t)w(t)\,dt = p(b)q(b) - p(a)q(a) - \int_a^b v(t)q(t)\,dt$. No basta que p', q' existan; aquí se exige la integrabilidad de las extensiones. Un caso suficiente es que sean continuas en el cerrado. Para $p(t) = t$, $q(t) = t^2/2$ en $[0,1]$, la identidad da $\int_0^1 t^2 = 1/2 - 1/6 = 1/3$, con el segundo valor calculado por R6. Es comprobación, no prueba circular del valor usado.

R7b — Cambio de variable con signo. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Sea $g : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ continua, con $\alpha < \beta$, derivable en el interior, y sea v una extensión integrable de g' a ese cerrado. La composición $f \circ g$ es continua, por lo que $(f \circ g)v$ es integrable por C23. Entonces $\int_\alpha^\beta f(g(t))v(t)\,dt = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(s)\,ds$. Para probarlo, tome $F = A_f$. R3/R4 dan su derivada relativa de valor f en todo $[a,b]$, incluidos los extremos. La cadena relativa de C18 aplicada a $F \circ g$ da derivada $f(g(t))g'(t)$ en cada punto interior. Todos los centros $g(t)$ acumulan en $[a,b]$; si un incremento de g se anula, la versión de la cadena de C18 no divide por él. La composición es continua en el cerrado y constituye una primitiva de la integranda. R5 evalúa su integral como $F(g(\beta)) - F(g(\alpha))$, y R1 identifica ese incremento con la integral orientada requerida.

El signo de g' ya registra los recorridos en sentidos opuestos, por lo que no se exige monotonía de g. Para $f(s) = s$ en $[0,1]$ y $g(t) = t^2$ en $[-1,1]$, el integrando es $2t^3$ y la integral vale cero: ambos extremos transformados son uno. Para $g(t) = 1 - t$ en $[0,1]$, obtenemos $-(1-t)$ e integral $-1/2$, igual a $\int_1^0 s\,ds$. Sustituir g' por $|g'|$ eliminaría esa información de orientación y produciría otra expresión.

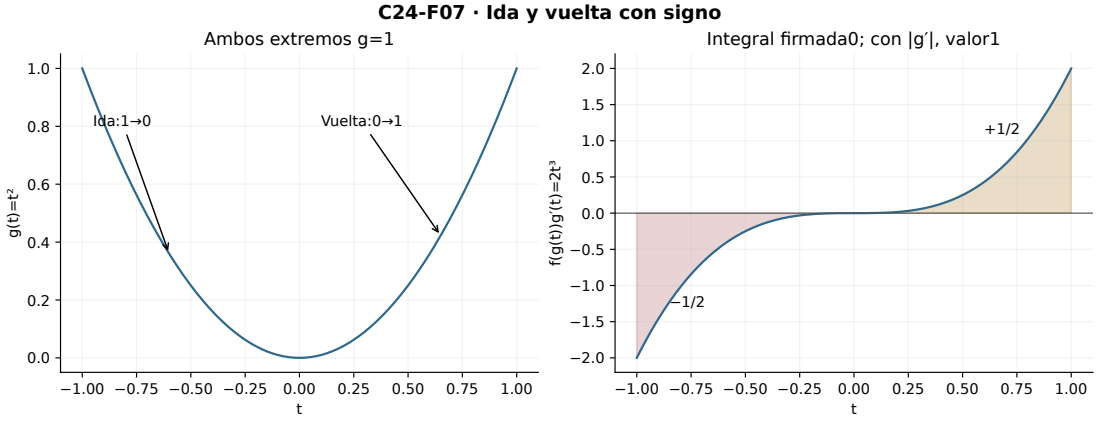


Figura 24.7. Con g(t)=t² en[−1,1] y f(s)=s, el integrando es2t³. Aportes−1/2 y1/2 cancelan; ambos extremos transformados son1. Con valor absoluto de g′ se obtiene1, una expresión diferente.

Ejercicios de la sección 24.7.

Ejercicio 31. Partes desde producto

Demuestra integración por partes bajo las hipótesis de R7a, explicando por qué existen ambas integrales.

Solución. Suponemos p, q continuas en $[a, b]$ y derivables dentro, con extensiones integrables v, w de sus derivadas interiores. C23 hace integrables a p, q por continuidad y a los productos pw, vq y su suma por el álgebra de integrables. La función $H = pq$ es continua en el cerrado y la regla del producto da $H' = vq + pw$ en el interior. Es una primitiva admisible de esa suma. Newton–Leibniz da $\int_a^b (vq + pw) = p(b)q(b) - p(a)q(a)$. Por linealidad y existencia de ambas integrales, podemos restar $\int_a^b vq$ y obtener $\int_a^b pw = p(b)q(b) - p(a)q(a) - \int_a^b vq$. Los valores escogidos para v, w en los bordes no cambian los valores integrales, por invariancia ante modificaciones finitas.

Ejercicio 32. Comprobar una integración por partes

Con $p(t) = t$, $q(t) = t^2/2$ en $[0, 1]$, verifica la fórmula y sus hipótesis.

Solución. Para $p(t) = t$ y $q(t) = t^2/2$, las extensiones de derivadas $v(t) = 1$ y $w(t) = t$ son continuas en $[0, 1]$, por tanto integrables. Los productos también lo son. La contribución de borde es $p(1)q(1) - p(0)q(0) = 1/2$. La regla de potencias ya permite evaluar $\int_0^1 vq = \int_0^1 t^2/2 = 1/6$ mediante la primitiva $t^3/6$. La fórmula de partes da $\int_0^1 pw = 1/2 - 1/6 = 1/3$. Como $pw = t^2$, coincide con la evaluación directa por $t^3/3$. Esta comprobación utiliza valores de potencias previamente justificados.

Ejercicio 33. Cambio de variable decreciente

Aplica R7b a $f(s) = s$, $g(t) = 1 - t$ en $[0, 1]$ y explica el signo.

Solución. La tasa $f(s) = s$ es continua en $[0, 1]$. La función $g(t) = 1 - t$ lleva $[0, 1]$ a ese intervalo, es continua y tiene derivada extendida $v(t) = -1$, integrable. Así la integranda transformada es $f(g(t))v(t) = -(1 - t) = t - 1$. Su integral vale $[t^2/2 - t]_0^1 = -1/2$. Las imágenes extremas son $g(0) = 1$ y $g(1) = 0$, por lo que el lado derecho es $\int_1^0 s\,ds = -\int_0^1 s\,ds = -1/2$. El signo negativo de la derivada registra el recorrido decreciente y coincide con la orientación de los extremos transformados.

Ejercicio 34. Ida y vuelta sin monotonía

Usa $f(s) = s$ en $[0, 1]$ y $g(t) = t^2$ en $[-1, 1]$ para verificar el cambio de variable y mostrar qué sucede con $|g'|$.

Solución. La función $g(t) = t^2$ lleva $[-1, 1]$ a $[0, 1]$ y tiene extensión continua de derivada $v(t) = 2t$. Para la tasa continua $f(s) = s$, la integranda $f(g(t))v(t) = 2t^3$ es integrable. Su primitiva $t^4/2$ da integral cero, igual a $\int_{g(-1)}^{g(1)} s\,ds = \int_1^1 s\,ds = 0$. Por separado, los aportes son $-1/2$ en $[-1, 0]$ y $1/2$ en $[0, 1]$. Si se sustituye v por $|v|$, la integranda pasa a $2|t|^3$. En cada mitad su integral es $1/2$, así el total es uno. El recorrido de ida y vuelta, sin monotonía global, se cancela sólo en la fórmula con signo.

Retorno visual. Véase C24-F07, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 35. La imagen toca un borde

Explica por qué la prueba con $A_f \circ g$ sigue válida si una entrada interior de g tiene imagen en a o b, o si su incremento es cero.

Solución. Sea $F = A_f$, con f continua en $[a, b]$. La primera parte del fundamental da a F derivadas relativas también en los extremos, con valores $f(a), f(b)$. Por tanto, si un centro interior t de g tiene imagen $c = g(t)$ en un borde, la aproximación de F sigue siendo válida para los incrementos de imagen que permanecen en $[a, b]$. Escribimos $F(c + k) - F(c) = f(c)k + r(k)$, con $r(k)/|k| \to 0$ para incrementos admisibles no nulos y $r(0) = 0$. Tomando $k = g(t + h) - g(t)$, la derivabilidad de g limita $|k|/|h|$ cerca de cero. Así $r(k)/h \to 0$, y para $k = 0$ el residuo es exactamente cero. Queda $(F \circ g)'(t) = f(g(t))g'(t)$ sin dividir por k. La composición es continua en el cerrado; la extensión integrable de g' y el álgebra de C23 hacen integrable su tasa transformada, permitiendo Newton–Leibniz.

24.8. Qué invierte el teorema y qué conserva

La constante inicial explica la asimetría entre las dos composiciones de operaciones: derivar olvida una constante, mientras integrar desde un origen fija una normalización. Además, las hipótesis de recuperación de la tasa y de reconstrucción de una primitiva deben conservarse por separado. **R8 — Dos direcciones y estabilidad.** En las funciones continuas $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, integrar desde a y después derivar recupera f en el interior, y en los bordes mediante derivadas relativas. En las funciones H continuas en el cerrado, derivables dentro y con una extensión integrable f de su derivada, derivar e integrar recupera $H(x) - H(a)$. La constante inicial desaparece al derivar y debe reponerse al reconstruir H. La segunda dirección es R5 sobre cada restricción, no una consecuencia de continuidad de f que no se ha exigido.

Para dos integrables f, g con cota universal $|f(t) - g(t)| \leq \eta$, $\eta \geq 0$, la linealidad y la estimación integral dan $|A_f(x) - A_g(x)| \leq \eta(x - a) \leq \eta(b - a)$. Además, para dos entradas, el cambio de la diferencia está acotado por $\eta|y - x|$. La acumulación amortigua perturbaciones uniformemente acotadas en el sentido de este certificado. Si $H' = f$ con $H(a) = c_0$ y otra primitiva $K' = g$ con $K(a) = d_0$, R5 sobre restricciones da $|H(x) - K(x)| \leq |c_0 - d_0| + \eta(x - a)$. Cada hipótesis es universal sobre el intervalo: una tabla de errores pequeños no certifica la desigualdad. Si f, g difieren sólo en un conjunto finito, C23 asegura integrales iguales en todas las restricciones, por lo que $A_f = A_g$ aunque no haya recuperación de sus valores excepcionales.

Promedio alcanzado, con una herramienta adicional declarada. Para una continua en $[u, v]$ con $u < v$, C16 da mínimo m y máximo M alcanzados. Orden integral encierra el promedio $\frac{1}{v-u}\int_u^v f$ entre ellos; C15, valor intermedio, entrega una entrada $c \in [u, v]$ donde $f(c)$ coincide con él. Es una consecuencia opcional del encierro, distinta de Lagrange y no usada en R3 ni R5. No garantiza unicidad ni un punto prescrible; para una constante, todos sirven. Para el escalón con salto a $1/2$, el promedio en $[0, 1]$ es $1/2$, que no es ninguno de sus valores $0, 1$: integrabilidad sola no garantiza un promedio alcanzado.

La integrabilidad basta para construir una acumulada continua, pero el escalón y el pico muestran que no basta para recuperar todos los valores de la tasa mediante su derivada. Tampoco se ha demostrado que toda derivada sea integrable o que toda integrable tenga primitiva. Los resultados anteriores se refieren a las hipótesis expresas de cada dirección, sin utilizar criterios de medida ni integrales impropias. En el libro de cálculo estos puentes podían utilizarse como reglas. Aquí la primera dirección procede del encierro de los promedios locales; la segunda, de Lagrange y la telescopía de incrementos. Cada una se apoya en la integral ya construida y permite precisar qué información se conserva al pasar de una operación a la otra.

Ejercicios de la sección 24.8.

Ejercicio 36. Error uniforme de la tasa

Si $|f - g| \leq 1/100$ en $[0, 3]$ y ambas son integrables, certifica el error entre sus acumuladas en cualquier entrada y en 3.

Solución. La diferencia $f - g$ es integrable por el álgebra de C23. Para $0 < x \leq 3$, linealidad da $A_f(x) - A_g(x) = \int_0^x (f - g)$. La cota universal $|f - g| \leq 1/100$ y el orden integral implican $|A_f(x) - A_g(x)| \leq x/100 \leq 3/100$. En $x = 0$ la diferencia es cero y cumple la fórmula. En $x = 3$ el error certificado es a lo sumo $3/100$. La cota es alcanzable, por ejemplo si $f - g$ es constantemente $1/100$, pero para tasas generales no afirma que el error efectivo alcance ese máximo.

Retorno visual. Véase C24-F08, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

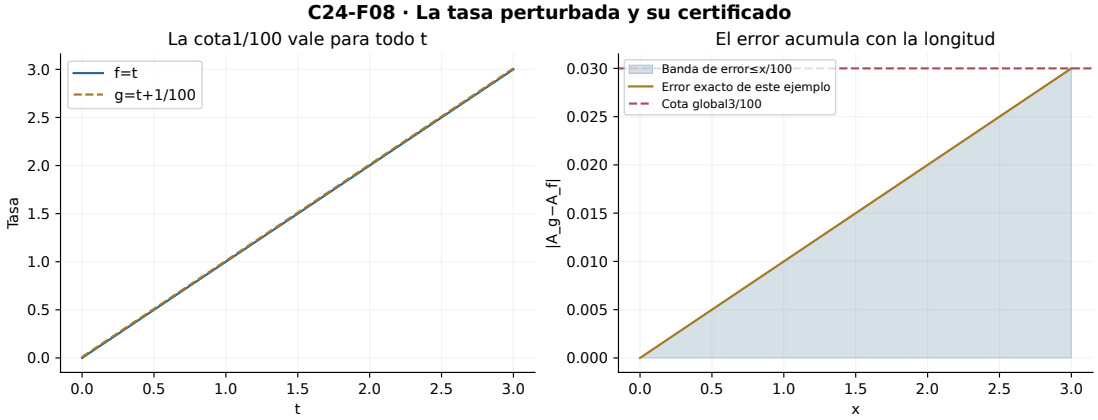


Figura 24.8. En[0,3], tasas f(t)=t y g(t)=t+1/100 satisfacen error uniforme1/100. Diferencia de acumuladas x/100 y cota global3/100; la banda es un certificado universal probado.

Ejercicio 37. Dato inicial y tasa

Si primitivas admisibles H, K tienen datos iniciales con distancia $1/10$ en 0 y sus tasas integrables difieren a lo sumo $1/100$ en $[0, 2]$, certifica la diferencia de salidas.

Solución. Sean $c_0 = H(0)$ y $d_0 = K(0)$, con $|c_0 - d_0| = 1/10$. Newton–Leibniz sobre cada restricción da $H(x) = c_0 + \int_0^x f$ y $K(x) = d_0 + \int_0^x g$, donde las tasas integrables satisfacen $|f - g| \leq 1/100$. La triangular y la cota integral producen $|H(x) - K(x)| \leq 1/10 + x/100$ para $0 \leq x \leq 2$. En todo el dominio esto no supera $1/10 + 2/100 = 3/25$. El dato inicial aporta una diferencia fija y la discrepancia de las tasas aporta una cantidad proporcional a la longitud recorrida. Si ambas tienen el mismo signo, la cota puede alcanzarse.

Ejercicio 38. Misma acumulada, distintas tasas

Construye dos integrables diferentes con acumuladas iguales y explica por qué no contradicen la primera parte.

Solución. Tomamos $f(t) = 0$ en $[0, 1]$ y $g(1/2) = 1$, $g(t) = 0$ en las demás entradas. La segunda tasa es integrable por modificación finita de la primera, y ambas son diferentes en $1/2$. Sobre cada $[0, x]$ sus integrales coinciden, así $A_f = A_g = 0$ en todo el dominio. En el punto excepcional, g es discontinua y la primera parte del fundamental no afirma recuperar su altura. En las demás entradas ambas tasas valen cero y son continuas relativamente, por lo que la derivada de la acumulada sí coincide con ellas. El ejemplo muestra por qué el requisito de continuidad puntual importa para identificar la tasa a partir de su acumulada.

Ejercicio 39. Promedio alcanzado

Demuestra el valor medio integral para una continua en un cerrado y refuta su extensión a toda integrable mediante el escalón.

Solución. Sea f continua en $[u, v]$, con $u < v$. Por C16, tiene mínimo m y máximo M alcanzados en entradas s, t. Integrar $m \leq f \leq M$ y dividir por $v - u > 0$ da $m \leq \mu \leq M$, donde $\mu = (v - u)^{-1} \int_u^v f$. Si $m = M$, la función es constante y todas las entradas realizan el promedio. Si $m < M$, los puntos de los extremos son distintos; el valor intermedio en el segmento ordenado que los une entrega c con $f(c) = \mu$, incluyendo los casos en que el promedio sea uno de los extremos. Para el escalón de corte $1/2$ en $[0, 1]$, la integral y el promedio valen $1/2$, pero la imagen es $\{0, 1\}$. Es una tasa integrable que no alcanza su promedio, así la conclusión no se extiende a toda integrable.

Ejercicio 40. Dos operaciones y una constante

Formula qué recupera cada composición de derivar e integrar, e identifica una afirmación no habilitada por el capítulo.

Solución. Para una tasa continua f en $[a, b]$, integrar desde a produce A_f y derivarla recupera f en los puntos interiores y mediante derivadas relativas en los bordes. Para una función H continua en el cerrado, derivable dentro y con extensión integrable f de su derivada, integrar esa tasa produce $A_f(x) = H(x) - H(a)$. El valor inicial debe reponerse para reconstruir H. En la primera composición se conserva cada altura por continuidad; en la segunda se pierde una constante al derivar. El capítulo no demuestra que toda derivada sea integrable ni que toda tasa integrable tenga una primitiva: las hipótesis de los dos contratos siguen siendo necesarias para aplicar las fórmulas aquí probadas.

Capítulo 25

La frontera de Riemann

Un salto no impide necesariamente integrar: la oscilación puede mantenerse alta en las piezas que lo tocan y, sin embargo, esas piezas pueden ocupar una longitud cada vez menor. Dirichlet y Thomae obligarán a mirar por separado la altura de la oscilación y el lugar donde persiste. El criterio de Darboux permitirá convertir esa distinción en pruebas de integrabilidad y en una caracterización por niveles positivos.

C23 es el prerrequisito central. Completitud/arquimedianidad de C03, vecindades/cerrados de C04, geométricas de C06, continuidad de C14 y compacto de C16 son interfaces previas declaradas. Normalización racional, paridad y raíz2 pertenecen al toolbox aritmético heredado; densidad se reconstruye antes de usarla. No se construye ni se usa aquí medida o integral de Lebesgue.

25.1. El presupuesto de oscilación

En la brecha de Darboux, cada oscilación se multiplica por la anchura de su pieza. Una gran oscilación en pocas piezas cortas puede aportar poco al total, mientras una oscilación menor que persista sobre toda la longitud puede impedir que desaparezca. Fijemos $a < b$ y una función acotada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, con $|f| \le B$, $B \ge 0$, para cuantificar ambas contribuciones.

R1 — Presupuesto ponderado. Para una partición P con piezas cerradas I_i y anchuras $\Delta_i > 0$, escribimos $\omega_i = \sup f(I_i) - \inf f(I_i)$, de modo que $G(f, P) = U(f, P) - L(f, P) = \sum_i \omega_i \Delta_i$. Fijado $\eta > 0$, llamaremos malas las piezas con $\omega_i \ge \eta$ y buenas las restantes. No contamos sólo cuántas son malas: medimos la suma finita de sus anchuras, $\lambda_P(\eta)$. Positividad y la cota $\omega_i \le 2B$ dan

$$\eta \lambda_P(\eta) \le G(f, P), \qquad G(f, P) \le \eta(b - a) + 2B\lambda_P(\eta).$$

La primera desigualdad retiene sólo términos malos; la segunda acota los buenos por $\eta\Delta_i$ y los malos por $2B\Delta_i$. Los interiores disjuntos y la telescopía de anchuras, heredados de C22/C23, justifican el presupuesto de longitud. Los nodos compartidos no agregan longitud, pero sí pueden afectar oscilación en las dos piezas vecinas.

Oscilación en un punto. Para $x \in [a, b]$ y $r > 0$, sea $V_r(x) = [a, b] \cap (x - r, x + r)$. Su imagen es no vacía, pues contiene $f(x)$, y acotada. Definimos $\Omega_f(x) = \inf_{r>0} \omega(f, V_r(x))$. El conjunto de oscilaciones es no vacío y está en $[0, 2B]$; completitud asegura el ínfimo. No suponemos un radio mínimo ni un extremo alcanzado. Los radios menores no aumentan oscilación por restricción.

La igualdad $\Omega_f(x) = 0$ equivale a continuidad relativa de f en x. Si f es continua, elegimos una vecindad donde cada valor dista de $f(x)$ menos que $\varepsilon/3$. Dos valores de ella difieren menos que $2\varepsilon/3$; al tomar las cotas extremas la oscilación es a lo sumo ese número. Como podemos hacerlo para todo $\varepsilon > 0$, el ínfimo es cero. Recíprocamente, un ínfimo cero proporciona para cada $\varepsilon > 0$ un radio cuya oscilación es menor que ε. El valor central pertenece a la misma banda que todos los demás, así que su distancia a cualquiera de ellos es menor que ε. Recuperamos la condición de continuidad.

Para cada $\eta > 0$, sea $D_\eta = \{x : \Omega_f(x) \ge \eta\}$. Veremos que es cerrado relativo. Si $\Omega_f(x) < \eta$, alguna vecindad $V_r(x)$ tiene oscilación menor que η. Todo centro y suficientemente próximo a x admite una vecindad más pequeña contenida en $V_r(x)$; por restricción su oscilación puntual también es menor que η. Así el complemento de D_η es abierto relativo. C16 hace

compacto a este cerrado del segmento. Cada nivel separa los puntos según una amplitud que no desaparece al reducir el radio.

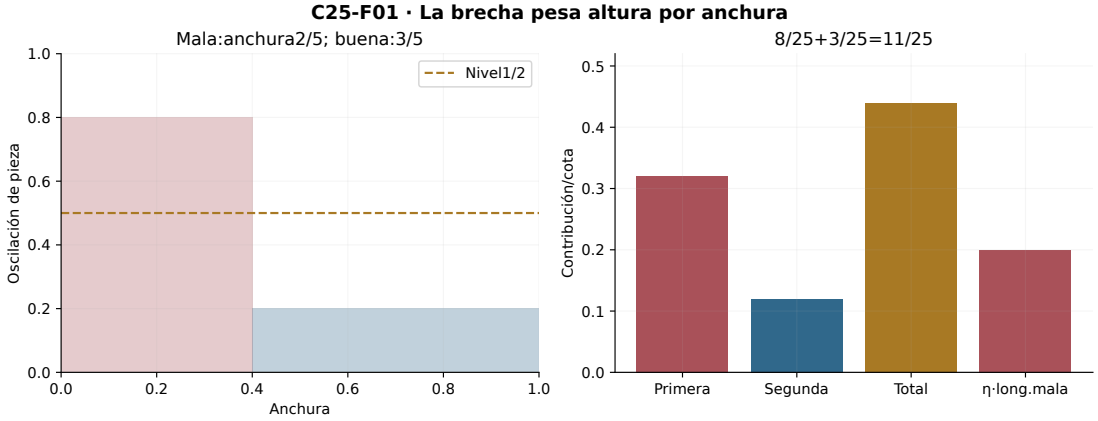


Figura 25.1. Dos piezas de anchuras2/5 y3/5 con oscilaciones4/5 y1/5 aportan8/25 y3/25 a la brecha, total11/25. Para nivel1/2, la longitud mala es2/5 y su contribución mínima1/5.

Ejercicios de la sección 25.1.

Ejercicio 1. Longitud de las piezas malas

Prueba las dos desigualdades de R1 usando sólo orden y sumas finitas.

Solución. Sea $\mathcal{B} = \{i : \omega_i \geq \eta\}$ y $\lambda = \sum_{i\in\mathcal{B}} \Delta_i$. En el grupo malo, $\omega_i\Delta_i \geq \eta\Delta_i$. Los restantes productos son no negativos, por lo que $G = \sum_i \omega_i\Delta_i \geq \eta\lambda$. Para la cota superior, las piezas buenas cumplen $\omega_i < \eta$ y las malas $\omega_i \leq 2B$, deducido de $-B \leq f \leq B$. Así $G \leq \eta\sum_{i\notin\mathcal{B}} \Delta_i + 2B\sum_{i\in\mathcal{B}} \Delta_i = \eta((b-a)-\lambda) + 2B\lambda \leq \eta(b-a) + 2B\lambda$. Sólo se han usado orden, anchuras positivas y la suma finita de longitudes.

Retorno visual. Véase C25-F01, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 2. Oscilación puntual y continuidad

Demuestra ambas direcciones de la equivalencia, sin suponer un radio que alcance el ínfimo.

Solución. Si f es continua relativamente en x, dado $\varepsilon > 0$ existe $r > 0$ con $|f(t)-f(x)| < \varepsilon/3$ para todas las entradas de $V_r(x)$. Dos alturas de esa vecindad difieren en magnitud menos que $2\varepsilon/3$, así su oscilación es a lo sumo esa cantidad. Luego $0 \leq \Omega_f(x) \leq 2\varepsilon/3$ para toda tolerancia, obligando a $\Omega_f(x) = 0$. Recíprocamente, si el ínfimo es cero, su propiedad de aproximación proporciona para cada $\varepsilon > 0$ un radio con $\omega(f, V_r(x)) < \varepsilon$. El centro pertenece a la vecindad, así $|f(t)-f(x)| \leq \omega(f, V_r(x)) < \varepsilon$ para todas sus entradas. Ésta es continuidad con ese radio; no se necesita que el ínfimo se alcance.

Ejercicio 3. Nivel cerrado

Prueba que D_η es cerrado relativo y compacto.

Solución. Si $x \notin D_\eta$, se tiene $\Omega_f(x) < \eta$ y algún radio $r > 0$ cumple $\omega(f, V_r(x)) < \eta$. Para y del dominio con $|y - x| < r/2$, la triangular muestra $V_{r/2}(y) \subseteq V_r(x)$. La oscilación disminuye al restringir, así $\Omega_f(y) \leq \omega(f, V_{r/2}(y)) \leq \omega(f, V_r(x)) < \eta$. Toda esa vecindad relativa de centros queda fuera del nivel. Por tanto su complemento es abierto relativo y D_η es cerrado en $[a, b]$. Como el segmento es compacto, C16 hace compacto al nivel, incluido el caso vacío.

Ejercicio 4. Un presupuesto numérico

En un intervalo de longitud3 con B=2, nivelη=1/10 y longitud malaλ=1/100, certifica una cota de brecha. ¿Es exacta?

Solución. Sustituimos los datos en la cota $G \le \eta(b-a) + 2B\lambda$. Resulta $G \le (1/10)\cdot 3 + 2\cdot 2\cdot(1/100) = 3/10 + 1/25 = 17/50$. Es un certificado superior de $0,34$. No determina la brecha exacta, porque las amplitudes reales de las piezas pueden ser menores que los límites usados. En particular, la suma de anchuras malas no informa por sí sola de cuánto supera cada oscilación el nivel.

Ejercicio 5. Nodos y oscilación

Explica por qué un valor excepcional en un nodo puede afectar dos piezas, aunque no tenga anchura propia.

Solución. Las piezas $[x_{i-1}, x_i]$ y $[x_i, x_{i+1}]$ contienen el nodo compartido x_i. Si la tasa es cero salvo por altura uno en ese nodo, las dos piezas tienen ínfimo cero y supremo uno. Su contribución a la brecha es la suma de sus dos anchuras. No aparece un término separado por el punto: su efecto está en las imágenes de las piezas que lo incluyen. Al afinar alrededor del nodo esas anchuras pueden hacerse pequeñas, y la invariancia ante cambios finitos de C23 conserva el valor integral.

25.2. Discontinuidades que caben en collares

Alrededor de un número finito de discontinuidades podemos reservar intervalos cortos y admitir allí la barrera global $2B$. Fuera de ellos, la continuidad reducirá la oscilación. Para sumar ambas estimaciones necesitaremos una sola partición que distinga las dos regiones. **R2 — Un número finito de discontinuidades.** Una función acotada en $[a,b]$ y continua fuera de un conjunto finito E es integrable. Dada $\varepsilon > 0$, si $B = 0$ la función es cero y el resultado es inmediato. Para cubrir también ese caso sin dividir por cero, fijemos $\eta = \varepsilon/[2(b-a)]$ y $\sigma = \varepsilon/[4(B+1)]$. Si E tiene k puntos, cada uno puede cubrirse por un intervalo abierto de radio $r = \sigma/[4(k+1)]$. Su unión O tiene una cobertura finita cuya suma de longitudes es $2kr < \sigma$. Con E vacío tomamos O vacío.

Fuera de O, la continuidad da un radio $r_x > 0$ con oscilación menor que η sobre $V_{r_x}(x)$: basta controlar la distancia de cada valor al central por $\eta/3$. Dentro de O, la apertura da un radio cuya vecindad queda contenida en O. Consideramos todos los pares centro/radio que satisfacen alguna de estas condiciones; sus vecindades de radio medio cubren $[a,b]$. Así no hace falta seleccionar un radio para cada centro antes de usar C16. Un subcubrimiento finito proporciona el mínimo positivo de esos radios medios, que llamamos δ.

Tomamos una partición uniforme de malla menor que δ. Dada una pieza, elegimos un punto suyo y una vecindad de radio medio que lo contenga. Si el radio grande es r, cualquier otro punto de la pieza dista de ese centro menos que $\delta + r/2 \le r$. Toda la pieza queda entonces en la vecindad grande: está contenida en O o tiene oscilación menor que η. La escala común ha convertido la información local en una alternativa válida para cada pieza completa.

Las piezas del primer tipo tienen suma de anchuras menor que σ. El hecho finito usado aquí se demuestra cortando en todos los extremos de la cobertura de O: cada celda cubierta contribuye una sola vez a la unión y al menos una vez a la suma de longitudes de los intervalos que la cubren. Por tanto la longitud total de piezas con interiores disjuntos contenidas en esa unión es a lo sumo dicha suma. R1 da $G(f,P) \le \eta(b-a) + 2B\sigma = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{B\varepsilon}{2(B+1)} < \varepsilon$. El criterio de C23 concluye. No se presume uniformidad local junto a los saltos: el subcubrimiento finito fabrica la escala en las regiones donde hace falta.

En $[0,1]$, el escalón de corte $c = 1/2$ tiene brecha a lo sumo igual a la anchura total de piezas que tocan ese corte. Insertando $c-r, c, c+r$, con $0 < r < 1/2$, las piezas que tocan el corte suman $2r$, una cota de la longitud mala. Con el valor nodal uno, la pieza derecha es constante y sólo la izquierda oscila: $L = 1/2$, $U = 1/2 + r$ y la brecha exacta es $r \le 2r$.

El valor del nodo afecta ambos lados por ser piezas cerradas; C23 asegura que cambiarlo no altera el valor integral.

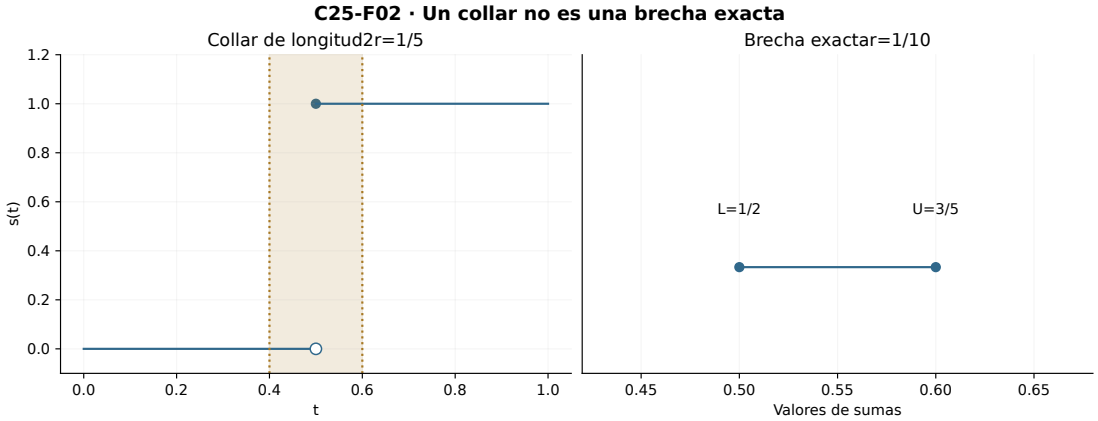


Figura 25.2. Escalón de corte1/2, valor nodal1, radio r=1/10. Los collares tocan dos piezas de longitud total1/5, pero la derecha es constante: L1/2,U3/5,brecha1/10.

Ejercicios de la sección 25.2.

Ejercicio 6. Collares de un conjunto finito

Si E tiene k puntos, construye una cobertura abierta de longitud total menor que σ, incluido k0.

Solución. Sea $E = \{e_1, \dots, e_k\}$ y $\sigma > 0$. Si $k > 0$, tomamos $r = \sigma/[4(k+1)] > 0$ y los intervalos abiertos $(e_j - r, e_j + r)$. Cubren todos los puntos, incluidos los extremos del dominio, aunque parte del collar quede fuera del segmento. La suma de longitudes es $2kr = \sigma k/[2(k+1)] < \sigma$. Si $k = 0$, la cobertura vacía tiene longitud total cero y cumple el pedido. El denominador $k+1$ mantiene la fórmula definida sin dividir por el número de puntos.

Ejercicio 7. Fabricar una escala común

Explica la cubierta de radios medios que prueba R2, sin seleccionar un radio para cada centro.

Solución. Sea O la unión de los collares que cubren las excepciones. Consideramos todos los pares (x, r) de dos tipos: si $x \in O$, se pide $V_r(x) \subseteq O$; si $x \notin O$, se pide $\omega(f, V_r(x)) < \eta$. La apertura da pares del primer tipo y la continuidad fuera de las excepciones da pares del segundo. Las vecindades $V_{r/2}(x)$ de todos esos pares cubren $[a, b]$. Compacidad extrae finitísimos y permite tomar δ como el mínimo positivo de sus radios medios. Para una pieza de malla menor que δ, escogemos un punto suyo en una de las vecindades medias. La triangular coloca todos los demás puntos en la vecindad grande. Así cada pieza está dentro de O o tiene oscilación menor que η. La construcción sólo selecciona una lista finita de pares después de formar la cubierta completa.

Ejercicio 8. El escalón y su brecha

Para el escalón con corte1/2 y P=(0,1/2−r,1/2,1/2+r,1), 0<r<1/2, calcula L,U y G.

Solución. Las anchuras de la partición son $1/2 - r, r, r, 1/2 - r$. En las dos primeras piezas los ínfimos son cero; la segunda tiene supremo uno por incluir el corte de valor uno. Las dos últimas son constantes uno. Por tanto $L = r + (1/2 - r) = 1/2$ y $U = r + r + (1/2 - r) = 1/2 + r$. La brecha exacta es r. Las dos piezas adyacentes al corte tienen longitud total $2r$, que proporciona una cota más amplia: sólo la izquierda oscila con la convención nodal dada. La cuenta conserva la altura del corte en las dos imágenes cerradas.

Retorno visual. Véase C25-F02, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 9. La hipótesis de acotación

Refuta la afirmación «continua salvo finitísimos puntos implica integrable», si se omite acotación.

Solución. En $[0,1]$, definimos $h(0)=0$ y $h(x)=1/x$ para $x>0$. Es continua en todas las entradas positivas y sólo falla en cero. Para cualquier $B>0$, la entrada $x=1/(B+1)\in(0,1]$ tiene altura $h(x)=B+1>B$. Por tanto no es acotada. C23 probó que el contrato propio de Riemann obliga acotación, así esta tasa no es integrable en ese sentido. Tener sólo un punto de discontinuidad no permite omitir la hipótesis de amplitud global finita.

Ejercicio 10. Gastar la tolerancia

Verifica que $\eta{=}\varepsilon/[2(\mathrm{b}-\mathrm{a})]$ y $\sigma{=}\varepsilon/[4(\mathrm{B}{+}1)]$ aseguran $\mathrm{G}{<}\varepsilon$ bajo la clasificación de R2.

Solución. Sean $a<b$, $|f|\le B$ y $\varepsilon>0$. Con $\eta=\varepsilon/[2(b-a)]$ y $\sigma=\varepsilon/[4(B+1)]$, la clasificación de R2 da longitud mala menor que σ. La cota de R1 implica $G\le\eta(b{-}a){+}2B\sigma=\varepsilon/2+B\varepsilon/[2(B+1)]$. Como $B/(B+1)<1$, el último número es estrictamente menor que ε. Las desigualdades no estrictas obtenidas al sumar no agotan el margen. Si $B=0$, la función y la brecha son cero; los mismos parámetros permanecen definidos.

25.3. La obstrucción densa de Dirichlet

Para que una oscilación impida toda reducción de la brecha, debe persistir en cualquier pieza de anchura positiva. Construiremos ese caso mediante valores racionales e irracionales. Antes de calcular los extremos locales necesitamos probar que ambos tipos de entradas aparecen en todo intervalo abierto. **Densidad que vamos a gastar.** Entre dos reales $u<v$ existe un racional. Por arquimedianidad elija un natural positivo n con $n(v-u)>1$. El principio del menor natural, después de trasladar nu por un entero positivo si hace falta, proporciona un entero k con $nu<k\le nu+1<nv$. Entonces $k/n\in(u,v)$. Este argumento es el lema de parte entera construido por mínimo natural; no presupone un punto racional obtenido por aproximación numérica.

También existe un irracional. Parta de un racional $q\in(u,v)$ y del irracional positivo $\sqrt{2}$ disponible en el toolbox de raíces. Su irracionalidad se prueba por paridad: una fracción reducida p/q cuyo cuadrado fuera dos obligaría a que numerador y denominador fueran pares. Elija un natural positivo n con $\sqrt{2}/n<v-q$. El número $q+\sqrt{2}/n$ está en (u,v) y es irracional, pues si fuera racional restar q y multiplicar por n haría racional a $\sqrt{2}$. Las vecindades relativas de borde también contienen intervalos abiertos no degenerados. Usamos normalización de fracciones y paridad como aritmética heredada, no elección de una familia infinita.

R3 — Dirichlet no es integrable. Defina $d(x)=1$ si x es racional y $d(x)=0$ si es irracional, sobre $[a,b]$. En toda pieza no degenerada hay valores cero y uno, de modo que sus cotas son exactamente $m_i=0, M_i=1$ y $\omega_i=1$. Por tanto, para toda partición,

$$L(d,P)=0,\qquad U(d,P)=b-a,\qquad G(d,P)=b-a>0.$$

Elegir $\varepsilon=(b-a)/2$ refuta el criterio. El factor longitud es indispensable: la suma superior no vale uno en cualquier intervalo, sólo cuando su longitud es uno.

En cada vecindad relativa hay ambos valores, luego $\Omega_d(x)=1$ en todo el dominio. Toda pieza es mala para $0<\eta\le1$ y su presupuesto total de anchura es siempre $b-a$. Refinar no reduce esa oscilación. El contrato de sumas etiquetadas también falla directamente: dada cualquier malla tan pequeña como se desee, elegir etiquetas racionales en las finitísimas piezas produce suma $b-a$, e irracionales produce suma cero. Un mismo candidato no puede quedar a distancia menor que $(b{-}a)/3$ de ambos. Se instancian sólo existencias finitas por inducción, no una selección sobre todas las particiones a la vez.

La densidad demostrada es la que permite fijar las cotas exactas en cada pieza de cualquier partición. Una muestra finita de puntos racionales e irracionales no controla los intervalos que faltan, por más abundante que parezca en un dibujo.

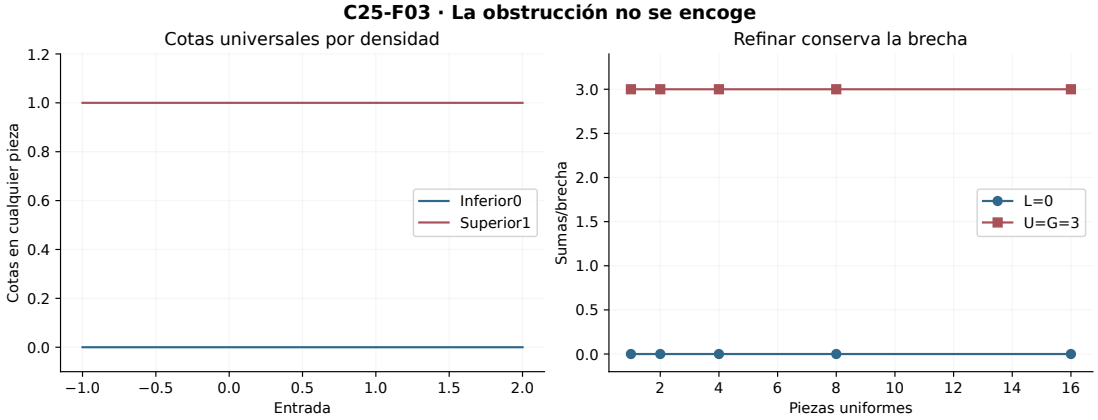


Figura 25.3. Dirichlet en[−1,2]: densidad racional e irracional prueba m0,M1 en toda pieza. Toda partición tiene L0,U3 y brecha3; el gráfico representa bandas certificadas, no una muestra que pruebe densidad.

Ejercicios de la sección 25.3.

Ejercicio 11. Racionales en toda pieza

Reconstruye la densidad racional mediante arquimedianidad y mínimo natural, indicando el traslado para entradas negativas.

Solución. Fijemos $u < v$. Arquimedianidad da un natural $n \geq 1$ con $n(v-u) > 1$. Para admitir cualquier signo de u, elegimos un natural M con $nu + M \geq 0$. El conjunto de naturales estrictamente mayores que $nu+M$ es no vacío, así tiene mínimo j. Como $j > 0$, la minimalidad da $j-1 \leq nu+M$. Ponemos el entero $k = j-M$. Entonces $nu < k \leq nu+1 < nv$. Dividir por $n > 0$ da $u < k/n < v$. El traslado por M sólo permitió usar el mínimo natural; al restarlo queda un numerador entero, quizá negativo, y una fracción racional interior.

Ejercicio 12. Irracionales en toda pieza

Partiendo de un racional interior y de raíz2 irracional, construye un irracional en el mismo intervalo.

Solución. Por densidad racional, tomamos $r \in \mathbb{Q}$ con $u < r < v$. El número $v-r$ es positivo, así arquimedianidad proporciona $n \geq 1$ con $\sqrt{2}/n < v-r$. Definimos $z = r+\sqrt{2}/n$. Entonces $u < r < z < v$. Si z fuera racional, la diferencia $z-r$ y su múltiplo entero $n(z-r)$ serían racionales. Pero ese múltiplo es $\sqrt{2}$, cuya irracionalidad se probó mediante reducción de una fracción y paridad. La contradicción hace a z un testigo irracional dentro del intervalo.

Ejercicio 13. La longitud correcta

Calcula las sumas de Darboux de Dirichlet en[−1,2] y refuta integrabilidad con tolerancia concreta.

Solución. Cada pieza de una partición de $[-1, 2]$ tiene longitud positiva y contiene racionales e irracionales. Para Dirichlet, su imagen es por tanto $\{0, 1\}$, con ínfimo cero, supremo uno y oscilación uno. Resulta $L(d, P) = 0$, $U(d, P) = \sum_i \Delta_i = 2 - (-1) = 3$ y $G(d, P) = 3$ para todas las particiones. Con tolerancia $\varepsilon = 3/2$, ninguna brecha es menor que ella, así falla Darboux. La suma superior es la longitud tres, no uno.

Retorno visual. Véase C25-F03, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 14. Etiquetas incompatibles

Prueba directamente que el contrato universal de Riemann falla para Dirichlet sobre[a,b].

Solución. Supongamos que existe un candidato integral I sobre $[a, b]$, con $a < b$. Pedimos al contrato error $\varepsilon = (b-a)/3$ y obtenemos un radio $\delta > 0$. C22 permite construir una uniforme de malla menor que δ. En cada pieza, densidad da una etiqueta racional y una irracional; inducción finita forma las dos familias. La primera suma vale $b-a$ y la segunda cero. Ambas deberían estar a distancia menor que ε de I. La triangular daría $b-a \le |b-a-I| + |I| < 2(b-a)/3$, imposible. El problema persiste por fina que sea la malla.

Ejercicio 15. Una muestra no prueba densidad

Explica por qué los puntos dibujados de Dirichlet no justifican sus cotas locales.

Solución. Una representación de Dirichlet dibuja finitísimas entradas de cada tipo. Siempre puede elegirse un intervalo pequeño que evite todas las entradas dibujadas. El cálculo de los extremos requiere, sin embargo, una altura cero y una altura uno en cada pieza no degenerada real. Las pruebas aritméticas construyen esos testigos para un intervalo arbitrario, sin depender de una resolución gráfica. Sólo después de establecer esa densidad puede concluirse que todas las oscilaciones valen uno.

25.4. Thomae: alturas pequeñas y picos finitos

Thomae también será discontinua en todos los racionales, pero su altura dependerá del denominador reducido. A partir de una altura positiva sólo quedarán finitísimos picos por aislar; el resto se controlará por una barrera pequeña válida en todas las entradas. **R4 — Función de Thomae.** Sobre $[0, 1]$, definimos $T(x) = 0$ si x es irracional; si $x = p/q$ en su forma reducida única, $q \ge 1$, ponemos $T(x) = 1/q$. En particular $T(0) = T(1) = 1$, por denominador uno. La normalización racional heredada asegura una salida única; $0 \le T \le 1$.

Fijado un entero $N \ge 1$, los racionales de denominador reducido a lo sumo N forman un conjunto finito E_N. Para cada denominador q entre 1 y N, basta examinar los numeradores $0 \le p \le q$. Hay a lo sumo $\sum_{q=1}^{N}(q+1) = N(N+3)/2$ candidatos; las fracciones repetidas sólo reducen esa cantidad. Fuera de E_N, un racional tiene denominador al menos $N+1$ y un irracional tiene altura cero, de modo que $T \le 1/(N+1)$ en todo el complemento. En particular, todo pico mayor que $1/N$ pertenece a E_N.

Continuidad exacta. En un irracional x, dado $\varepsilon > 0$, elija N con $1/(N+1) < \varepsilon$. Como E_N es finito y no contiene x, la mínima distancia a él es positiva. Un radio menor evita todos sus picos, y allí $|T(t) - T(x)| = T(t) \le 1/(N+1) < \varepsilon$. Si el conjunto fuese vacío cualquier radio serviría. En un racional $x = p/q$, cualquier vecindad contiene un irracional de valor cero, a distancia de salida $1/q$ respecto del centro. La tolerancia $1/(2q)$ refuta continuidad, también relativamente en los bordes. Así sus discontinuidades son exactamente los racionales. Además, en $x = p/q$ podemos evitar el conjunto finito $E_q \setminus \{x\}$ con un radio positivo. En esa vecindad todos los valores son a lo sumo $1/q$ y existe un irracional de valor cero, mientras el centro vale $1/q$. Su oscilación es $1/q$; toda vecindad contiene esos dos valores y tiene oscilación al menos $1/q$. Por ello $\Omega_T(x) = 1/q$, y en los irracionales es cero.

Integral cero mediante collares finitos. Dada $\varepsilon > 0$, elija N con $1/(N+1) < \varepsilon/2$. Cubra los $k = |E_N|$ picos grandes con collares de radio $r > 0$ tan pequeño que $2kr < \varepsilon/2$; por ejemplo $r = \varepsilon/[8(k+1)]$. Forme una partición que incluya esos picos y los extremos de sus collares recortados a $[0, 1]$, eliminando repeticiones y ordenando. Toda pieza que contiene alguno de esos picos queda dentro de la unión de collares cerrados: los cortes a ambos lados impiden que se prolongue fuera de ella. Sus anchuras totales son a lo sumo $2kr < \varepsilon/2$. En las piezas restantes, todos los valores son a lo sumo $1/(N+1)$. Por eso $0 \le U(T, P) \le 2kr + \frac{1}{N+1} < \varepsilon$. Cada pieza contiene un irracional, así $L(T, P) = 0$. El criterio de Darboux prueba integrabilidad; el encierro $0 \le I \le U(T, P) < \varepsilon$ para toda tolerancia obliga a $I = 0$.

Para $N = 4$, los picos que deben aislarse están en $0, 1/4, 1/3, 1/2, 2/3, 3/4, 1$; fuera de ellos la altura es a lo sumo $1/5$. Esta cuenta finita sirve de certificado parcial, no de dibujo del conjunto completo de discontinuidades.

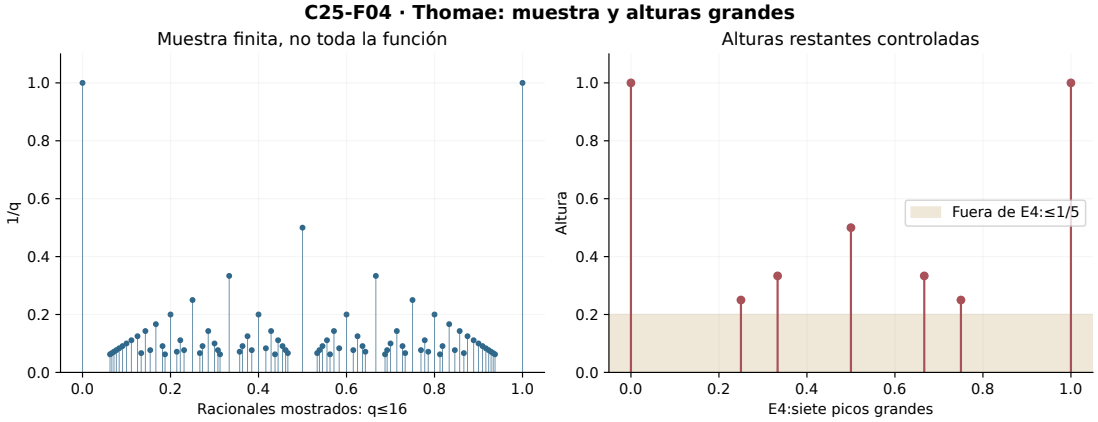


Figura 25.4. Thomae en[0,1]: panel izquierdo muestra sólo racionales de denominador≤16. Panel derecho aísla E4, siete picos; todo punto omitido de E4 tiene altura≤1/5. Los puntos dibujados no son toda la función.

Ejercicios de la sección 25.4.

Ejercicio 16. Contar picos de denominador pequeño

Prueba la cota cardinal N(N+3)/2 para E_N y lista E_4 en orden.

Solución. Para un denominador q con $1 \le q \le N$, hay $q+1$ posibles numeradores enteros de cero a q. Antes de reducir y quitar duplicados hay por tanto $\sum_{q=1}^{N}(q+1) = N(N+1)/2 + N = N(N+3)/2$ candidatos. Cada entrada de E_N aparece entre ellos, así ésa es una cota cardinal. Para $N = 4$, las fracciones reducidas distintas dan, en orden, $E_4 = \{0, 1/4, 1/3, 1/2, 2/3, 3/4, 1\}$. Tiene siete entradas; la cota general es catorce, mayor porque cuenta también representaciones repetidas y no reducidas.

Retorno visual. Véase C25-F04, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 17. Un irracional evita picos grandes

Demuestra continuidad de Thomae en un irracional, con radio positivo justificado.

Solución. Sea $x \in [0,1]$ irracional y $\varepsilon > 0$. Elegimos $N \ge 1$ con $1/(N+1) < \varepsilon$. El conjunto finito E_N no contiene a x, así las distancias $|x-e|$, con $e \in E_N$, son positivas y tienen mínimo $d > 0$. Si $|t-x| < d/2$, la entrada t no pertenece a E_N. Allí la altura es cero si es irracional y a lo sumo $1/(N+1)$ si es racional. Como $T(x) = 0$, queda $|T(t) - T(x)| \le 1/(N+1) < \varepsilon$. El radio $d/2$ demuestra continuidad en x con control de todos los picos omitidos.

Ejercicio 18. Oscilación en un racional

Para x=p/q reducido, prueba Ω_T(x)=1/q y discontinuidad.

Solución. Sea $x = p/q$ en forma reducida. Cada vecindad relativa contiene al centro, con altura $1/q$, y a un irracional, con altura cero. Por tanto todas sus oscilaciones son al menos $1/q$. El conjunto $E_q \setminus \{x\}$ es finito y no contiene el centro; elegimos un radio que lo evite, mediante el mínimo de distancias positivas, o cualquier radio si es vacío. En esa vecindad las demás alturas racionales son a lo sumo $1/(q+1)$, mientras el centro conserva la mayor altura $1/q$. El ínfimo es cero por densidad irracional y el supremo $1/q$, así una oscilación vale exactamente ese número. Se concluye $\Omega_T(x) = 1/q$. Los irracionales cercanos, con error $1/q$, refutan continuidad usando tolerancia $1/(2q)$.

Ejercicio 19. Un certificado para Thomae

Si fuera de E_N la altura es≤1/(N+1), y las piezas que tocan E_N suman anchura≤α, prueba U≤α+1/(N+1) en[0,1].

Solución. Separamos las piezas que tocan E_N de las restantes. En las primeras el supremo de T es a lo sumo uno, así su suma superior aporta a lo sumo su longitud total, que no supera α. Ninguna entrada de las otras pertenece a E_N, por lo que sus supremos son a lo sumo $1/(N+1)$. Sus anchuras suman a lo sumo uno, y su contribución no supera $1/(N+1)$. Así $U(T,P) \le \alpha + 1/(N+1)$. Todos los ínfimos son cero por densidad irracional. Para una tolerancia elegimos primero N con el segundo término menor que $\varepsilon/2$ y después collares y malla que hagan $\alpha < \varepsilon/2$. Esto prueba brechas arbitrariamente pequeñas e integral cero.

Ejercicio 20. Discontinuidades densas, integral cero

Compara Thomae y Dirichlet sin usar un criterio de medida.

Solución. Dirichlet mantiene las alturas cero y uno en toda vecindad; su oscilación puntual es uno y su brecha en $[0,1]$ es siempre uno. Thomae vale cero en los irracionales y en los racionales tiene altura inversa al denominador reducido. Para cada nivel positivo sólo finitísimos picos lo alcanzan. Una cobertura corta de esos picos limita su aporte superior, y la cota universal de los demás limita el resto. Se obtienen sumas superiores arbitrariamente pequeñas y sumas inferiores cero, de modo que Thomae integra cero. Aunque ambas tienen discontinuidades en todos los racionales, sus amplitudes en vecindades pequeñas son diferentes. El argumento utiliza denominadores y coberturas finitas, sin un criterio de medida.

25.5. Un criterio exacto por niveles

Los ejemplos anteriores sugieren examinar, para cada amplitud positiva, el conjunto donde esa oscilación persiste en cualquier radio. Los conjuntos D_η permiten hacerlo sin exigir que todas las discontinuidades puedan cubrirse de una vez con longitud pequeña. Bastarán coberturas finitas de cada nivel por separado. **Contenido finito nulo.** Diremos que un conjunto $E \subseteq [a,b]$ tiene esta propiedad si para cada $\sigma > 0$ admite una cobertura por finitísimos intervalos abiertos con extremos reales finitos cuya suma de longitudes es menor que σ. El vacío admite la cobertura vacía. No estamos definiendo una medida, ni declarando aditividad numerable. Un conjunto finito tiene la propiedad por collares; el segmento completo no la tiene, porque la longitud de una unión finita que lo cubre es al menos $b-a$, por el corte en extremos y subaditividad finita de R2.

R5 — Criterio por niveles de oscilación. Para una función acotada en un cerrado no degenerado,

$$f \text{ es integrable} \quad \Longleftrightarrow \quad D_\eta \text{ tiene contenido finito nulo para todo } \eta > 0.$$

Necesidad. Fije $\eta, \sigma > 0$. El criterio de C23 entrega P con $G(f,P) < \eta\sigma/4$. Las piezas con oscilación al menos η tienen longitud total menor que $\sigma/4$, por R1. Un punto de D_η que no sea nodo pertenece al interior de una pieza. Si esa pieza fuera buena, una vecindad del punto cabría dentro de ella y daría oscilación puntual menor que η, contradicción. Así D_η está contenido en las piezas malas y los finitísimos nodos.

Si P tiene n piezas, amplíe cada pieza mala por un radio $r = \sigma/[8(n+1)]$ y cubra cada uno de los $n+1$ nodos con otro intervalo de ese radio. La longitud de esta cobertura abierta es menor que $\frac{\sigma}{4} + 2r(2n+1) < \frac{3\sigma}{4} < \sigma$. Los nodos de borde también se cubren por intervalos reales, aunque parte de ellos quede fuera del dominio. No se ha supuesto que el conjunto de discontinuidades sea cerrado.

Suficiencia. Para $\varepsilon > 0$ tome $\eta = \varepsilon/[2(b-a)]$ y $\sigma = \varepsilon/[4(B+1)]$. Por hipótesis cubra D_η con finitísimos abiertos de longitud total menor que σ y llame O a su unión. Para un centro fuera de O, $\Omega_f(x) < \eta$, de modo que existe una vecindad con oscilación menor que η. Para un centro dentro de O, hay una vecindad contenida en O.

Las vecindades de radio medio de todos esos pares válidos cubren el segmento. C16 da un subcubrimiento finito y el mínimo de sus radios medios proporciona una escala común. Como en R2, cada pieza de malla menor que ella queda dentro de O o de una vecindad con oscilación menor que η. Las piezas del primer tipo suman anchura menor que σ por la

subaditividad finita; las restantes se estiman con η. El presupuesto de R1 y las elecciones de η, σ dan el mismo cálculo de R2: $G(f, P) < \varepsilon$. El criterio de C23 concluye la integrabilidad.

Los niveles compactos, no la unión de todas las discontinuidades, reciben el certificado finito. Para Thomae, $D_\eta = \{p/q : 1/q \geq \eta\}$ es finito cuando $\eta > 0$, aunque la unión de sus niveles positivos sea densa. Para Dirichlet, $D_\eta = [a, b]$ si $0 < \eta \leq 1$, y falla la cobertura pequeña. No se ha desarrollado aquí el criterio de Lebesgue basado en medida.

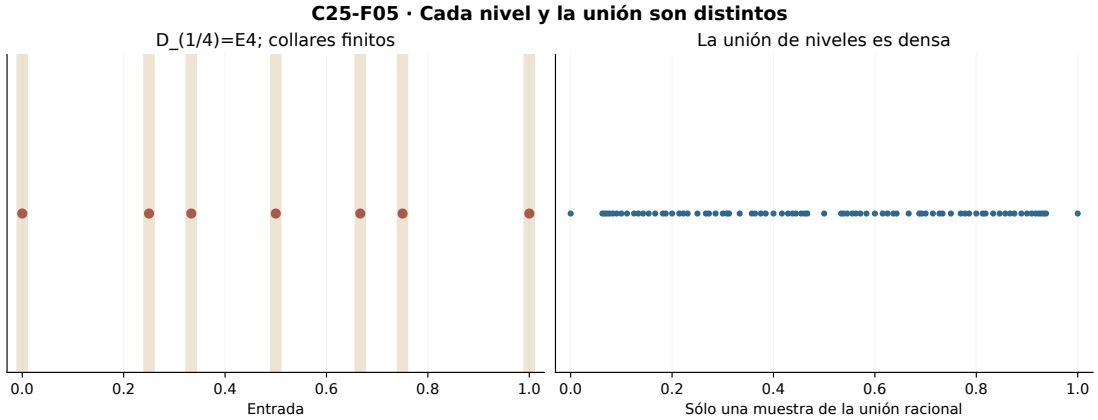


Figura 25.5. Para Thomae, D_(1/4)=E4 es finito y admite collares pequeños. Su unión de niveles positivos contiene todos los racionales, densa; la banda inferior sólo representa una muestra, sin convertirla en un conjunto finito.

Ejercicios de la sección 25.5.

Ejercicio 21. Cubrir los niveles desde una brecha

Prueba la necesidad de R5, incluyendo los nodos de partición.

Solución. Fijemos $\eta, \sigma > 0$. La integrabilidad proporciona P con $G(f, P) < \eta\sigma/4$. Por R1, las piezas malas de oscilación al menos η suman longitud $\lambda < \sigma/4$. Si un punto de D_η no es nodo, está en el interior de una pieza; una pieza buena admitiría allí una vecindad de oscilación menor que η, contradicción. Así el nivel queda cubierto por las piezas malas y los nodos. Si hay n piezas, ponemos $r = \sigma/[8(n+1)]$. Ampliamos cada pieza mala en r por ambos lados y cubrimos cada uno de los $n+1$ nodos con un intervalo abierto de radio r. Hay a lo sumo n malas y la longitud total de la cobertura es a lo sumo $\lambda + 2r(2n+1) < \sigma/4 + \sigma/2 = 3\sigma/4 < \sigma$. Los intervalos reales también cubren los nodos de borde. Queda probado el contenido finito nulo de cada nivel.

Ejercicio 22. De niveles pequeños a integrabilidad

Prueba la suficiencia de R5 con los parámetros de tolerancia.

Solución. Supongamos $|f| \leq B$ y contenido finito nulo de cada nivel positivo. Para $\varepsilon > 0$, fijamos $\eta = \varepsilon/[2(b-a)]$ y $\sigma = \varepsilon/[4(B+1)]$. Cubrimos D_η por finitísimos abiertos de longitud total menor que σ, cuya unión llamamos O. Fuera de O se tiene $\Omega_f(x) < \eta$, así algún radio da oscilación menor que η; dentro, la apertura da un radio cuya vecindad cabe en O. Los radios medios de todos los pares válidos cubren el segmento. Compacidad extrae una lista finita y su mínimo radio medio $\delta > 0$. Una uniforme de malla menor que δ tiene cada pieza dentro de O o en una vecindad buena. Las piezas malas deben ser del primer tipo, y la comparación finita de longitudes da $\lambda < \sigma$. R1 implica $G \leq \varepsilon/2 + B\varepsilon/[2(B+1)] < \varepsilon$. Darboux prueba integrabilidad; para $B = 0$ la tasa es cero y la conclusión es inmediata.

Ejercicio 23. No cubrir toda la unión

Explica por qué el criterio exige Dη para cada η>0 y no contenido finito nulo del conjunto completo de discontinuidades.

Solución. En Thomae, $\Omega_T(p/q) = 1/q$ para racionales y cero para irracionales. Para un $\eta > 0$ fijo, el nivel D_η sólo puede contener denominadores $q \leq 1/\eta$, así es finito y admite collares arbitrariamente cortos. La unión de esos niveles sobre todos los valores positivos de η es $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$, porque cada racional tiene una amplitud positiva. Esa unión es densa y cualquier cobertura abierta finita suya tiene longitud total al menos uno, como se demuestra cerrando los intervalos y usando densidad. Por tanto una tasa integrable puede tener todos los niveles con contenido finito nulo y no tener esa propiedad en el conjunto completo de discontinuidades.

Retorno visual. Véase C25-F05, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 24. Longitud de una cobertura del segmento

Justifica que una cobertura finita por intervalos abiertos de[a,b] tiene suma de longitudes≥b−a.

Solución. Cortamos $[a, b]$ en los finitísimos extremos de los intervalos de cobertura que queden dentro del segmento, añadiendo a, b. En cada celda abierta entre cortes consecutivos, la pertenencia a cada intervalo de cobertura es constante, porque no hay un extremo interior que la cambie. Como la cobertura contiene todo el segmento, cada celda está en al menos uno de los intervalos. Las longitudes de las celdas suman $b - a$. Si se suman las longitudes de los intervalos, cada celda cubierta se cuenta al menos una vez, quizá más, y las partes exteriores sólo agregan longitud. Así la suma total es al menos $b - a$. Los finitísimos cortes no aportan anchura propia.

Ejercicio 25. Los casos vacíos

Verifica el contenido finito nulo del vacío y de conjuntos finitos; explica el papel del caso B0 en la suficiencia.

Solución. El vacío tiene una cobertura vacía cuya suma de longitudes es cero para cualquier tolerancia positiva. Para un conjunto de $k > 0$ puntos, los collares de radio $\sigma/[4(k + 1)]$ dan suma $\sigma k/[2(k + 1)] < \sigma$. Así los conjuntos finitos tienen contenido finito nulo. Si la cota absoluta es $B = 0$, entonces $f = 0$, todas las oscilaciones puntuales son cero y todos los niveles positivos son vacíos. La brecha también es cero. En la suficiencia, el parámetro $\sigma = \varepsilon/[4(B + 1)]$ sigue definido y positivo; no se requiere dividir por B.

25.6. Un soporte infinito de longitud evanescente

También podemos obtener integral cero concentrando una función acotada en un soporte geométrico infinito. La propiedad útil será poder encerrar todo ese soporte en una cobertura finita de longitud arbitrariamente pequeña. La compacidad permitirá ajustar las particiones a la cobertura.

Lema de soporte compacto. Sea $E \subseteq [a, b]$ compacto y de contenido finito nulo. Si f es acotada, no negativa y cero fuera de E, entonces es integrable y su integral es cero. Cubra E con una unión abierta O de longitud total menor que $\varepsilon/(B + 1)$. Para todos los pares (x, r) con $x \in E$ y $V_r(x) \subseteq O$, los radios medios cubren E; extraiga finitos por compacidad. Si E es vacío, $f = 0$. Si no, su mínimo radio medio $\delta > 0$ tiene esta propiedad: toda pieza de malla menor que δ que toque E queda dentro de O. Las demás tienen supremo cero. Las primeras suman anchura menor que la cobertura, luego $0 \leq U(f, P) < B\varepsilon/(B + 1) < \varepsilon$ si $B > 0$; con $B = 0$ es cero. Así $G \leq U < \varepsilon$ y el encierro obliga al valor cero. Se controlan también etiquetas en extremos del soporte.

R6 — El conjunto ternario de Cantor. Empiece con $C_0 = [0, 1]$; en cada paso elimine el tercio medio abierto de cada componente cerrada. Por inducción, C_n es unión de 2^n segmentos cerrados de longitud 3^{-n}, con longitud total $(2/3)^n$. Defina $C = \bigcap_{n\geq 0} C_n$. Es cerrado, por intersección de cerrados de C04, contenido en el compacto $[0, 1]$ y por tanto compacto por C16. Contiene cero y uno.

Tiene contenido finito nulo: para cualquier $\sigma > 0$, la convergencia geométrica de C06 permite elegir n con $(2/3)^n < \sigma/2$. Ampliar ligeramente sus finitísimas componentes produce intervalos abiertos que cubren C, con longitud total menor que σ. No estamos atribuyendo una medida a la intersección: sólo construimos esa cobertura para cada tolerancia. Tiene interior vacío. Si contuviera un intervalo abierto no degenerado, éste contendría un segmento de anchura $\ell > 0$. Elija n con $3^{-n} < \ell$. Ese segmento no cabe en una componente de C_n, ni puede atravesar el hueco entre dos de ellas manteniéndose dentro de C_n. Contradicción. El argumento usa orden de intervalos, no una afirmación extraída de la figura.

La indicadora $\mathbf{1}_C$ es discontinua exactamente en C. Fuera de él, la apertura del complemento da una vecindad donde vale cero. En un punto de C, toda vecindad relativa contiene un punto fuera de C, por interior vacío y también en bordes, y la salida cambia de uno a cero. El lema de soporte prueba integrabilidad y valor cero. El conjunto es infinito: por ejemplo todos los extremos 3^{-n}, $n \geq 1$, sobreviven en C y son distintos. No necesitamos demostrar aquí su cardinalidad exacta. Lo que decide esta integral son coberturas finitas de longitud pequeña, no el número de puntos. Una etapa C_n no es el conjunto final; sus intervalos completos no se deben dibujar como si todos sus puntos sobrevivieran.

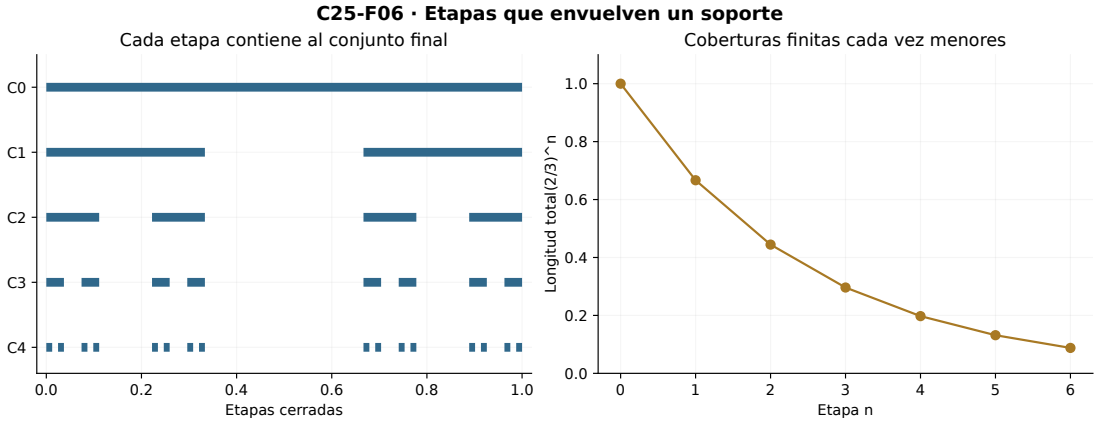


Figura 25.6. Etapas C0 a C4 de la construcción ternaria: cada una envuelve C y tiene2^n componentes de3^(−n), total(2/3)^n. La figura no dibuja toda la intersección ni afirma que cada punto de una etapa sobreviva.

Ejercicios de la sección 25.6.

Ejercicio 26. Etapas ternarias

Prueba por inducción el número de componentes, su longitud y la longitud total de C_n.
Solución. La etapa cero consta de $[0, 1]$, con una componente de longitud uno. Supongamos que C_n tiene 2^n componentes de longitud 3^{-n}. Quitar el tercio medio abierto de cada una deja dos segmentos cerrados de longitud $3^{-n}/3 = 3^{-(n+1)}$. Los huecos nuevos y los antiguos mantienen separadas las componentes, así hay $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$. Esto prueba por inducción ambas fórmulas. La suma de longitudes en la etapa n es $2^n 3^{-n} = (2/3)^n$, porque las componentes no se solapan.

Retorno visual. Véase C25-F06, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 27. Una cobertura abierta del conjunto final

A partir de C_n, construye cobertura de C con longitud total<σ y demuestra compacidad.
Solución. Cada C_n es una unión finita de cerrados y $C = \bigcap_{n \geq 0} C_n$ es cerrado. Está contenido en el compacto $[0, 1]$, así es compacto por C16. Para $\sigma > 0$, la convergencia geométrica permite elegir n con $(2/3)^n < \sigma/2$. Cada una de las 2^n componentes $[u_j, v_j]$ se amplía al abierto $(u_j - r, v_j + r)$ con $r = \sigma/[8 \cdot 2^n] > 0$. Cubren a C porque $C \subseteq C_n$. La suma

de longitudes es $(2/3)^n + 2 \cdot 2^n r < \sigma/2 + \sigma/4 < \sigma$. Se obtiene contenido finito nulo mediante coberturas reales abiertas, también alrededor de cero y uno.

Ejercicio 28. Interior vacío

Prueba que C no contiene un intervalo abierto no degenerado.

Solución. Supongamos que C contiene un intervalo abierto no degenerado. Elegimos dentro de él un segmento cerrado $[u, v]$ de longitud $\ell = v - u > 0$. Para n suficientemente grande, $3^{-n} < \ell$. Como $C \subseteq C_n$, ese segmento debería quedar en la unión de las componentes de C_n. Si estuviera dentro de una sola, su longitud no podría exceder 3^{-n}. Si tocara dos componentes distintas, contendría el hueco abierto que las separa, y por tanto algún punto fuera de C_n. Ambas posibilidades contradicen la inclusión. Luego C tiene interior vacío. En sus bordes del dominio, una vecindad relativa completamente contenida en C también contendría un intervalo abierto interior, así queda excluida.

Ejercicio 29. Indicadora y discontinuidades

Determina los puntos de discontinuidad y la integral de la indicadora de C.

Solución. Si $x \notin C$, la cerradura de C da una vecindad relativa del centro disjunta de él. Allí la indicadora vale cero y es continua. Si $x \in C$, su valor es uno, pero toda vecindad relativa contiene alguna entrada fuera de C por interior vacío; allí vale cero. El error uno impide continuidad con tolerancia $1/2$. Por tanto las discontinuidades son exactamente C, incluidos cero y uno relativamente. La función está entre cero y uno y es cero fuera del compacto C de contenido finito nulo. El lema de soporte hace su integral existente y de valor cero.

Ejercicio 30. Controlar todas las piezas que tocan el soporte

Demuestra el paso de malla del lema de soporte compacto sin ignorar nodos.

Solución. Sea E no vacío compacto y O una unión abierta que lo cubre. Para todos los pares (c, r) con $c \in E$, $r > 0$ y $V_r(c) \subseteq O$, las vecindades $V_{r/2}(c)$ cubren E. Compacidad extrae finitísimos pares y da $\delta = \min_j r_j/2 > 0$. Si una pieza de malla menor que δ toca E en t, elegimos una vecindad media que contenga a t. Para cualquier entrada s de esa pieza, $|s - c_j| \le |s - t| + |t - c_j| < \delta + r_j/2 \le r_j$, así toda la pieza está en O. El razonamiento funciona también cuando t es un nodo de borde o compartido, y entonces controla ambas piezas que lo toquen. Sus interiores disjuntos permiten acotar la suma de anchuras por la longitud total de la cobertura. Si E es vacío, no hay piezas afectadas.

25.7. Cambiar muchos valores y aproximar

C23 permite cambiar finitísimos valores sin alterar integrales. Reemplazar finito por numerable sería una afirmación diferente y puede fallar incluso en existencia.

R7 — La cota global permite aproximar. Sean g integrable y f acotada, con $|f(t) - g(t)| \le \delta$ para toda entrada. En cada pieza,

$$\omega(f, I) \le \omega(g, I) + 2\delta, \qquad G(f, P) \le G(g, P) + 2\delta(b - a).$$

En efecto, para dos entradas cualesquiera la diferencia de valores de f se acota por la correspondiente de g más 2δ; tomar cotas extremas prueba la primera desigualdad, y ponderar por anchuras la segunda. Por tanto, si para toda $\delta > 0$ existe una integrable g con esa cota global, f es integrable: dada $\varepsilon > 0$, use $\delta = \varepsilon/[4(b - a)]$, y una partición de g con brecha menor que $\varepsilon/2$.

Una vez probada la integrabilidad de f, el orden y la linealidad dan $|\int f - \int g| \le \delta(b - a)$. El argumento de brechas ha sido necesario antes: la estimación entre valores integrales sólo tiene sentido cuando ambas integrales existen. Para Thomae, defina $T_N = T$ en E_N y cero fuera. Su soporte es finito, por lo que es integrable de valor cero. La cota $|T - T_N| \le 1/(N+1)$ vale para toda entrada. R7 da otra prueba de integrabilidad y del valor cero de T. No es sólo que para cada entrada se encuentre un índice: un único N controla simultáneamente todas las entradas con la tolerancia fijada.

Una familia distinta pierde integrabilidad. Sea $d_N = \mathbf{1}_{E_N}$. Cada una tiene integral cero por cambios finitos. En un racional de denominador reducido q, $d_N(x) = 1$ para todo $N \geq q$; en un irracional, todos los valores son cero. Por eso, en cada entrada, los valores se estabilizan en la función de Dirichlet. Esa función no es integrable por R3. Para todo N existen racionales de denominador mayor que él: el conjunto de racionales de cualquier intervalo es infinito por densidad, mientras E_N es finito. En alguna entrada $|d - d_N| = 1$, de modo que no existe una cota global que tienda a cero. La estabilización entrada por entrada no permite pasar de integrales existentes a integral del límite. Aquí no se escribe $\int d$ ni se intercambian símbolos que carecen de existencia.

Thomae y cero difieren en todos los racionales, aunque sus integrales coinciden; Dirichlet y cero también difieren sólo allí, pero la primera ni siquiera es integrable. Así modificaciones en una familia infinita dada requieren un argumento nuevo. Las sucesiones de funciones tendrán su teoría en C26/C27; este contraste sólo establece las estimaciones y el fallo concretos que motivan ese paso.

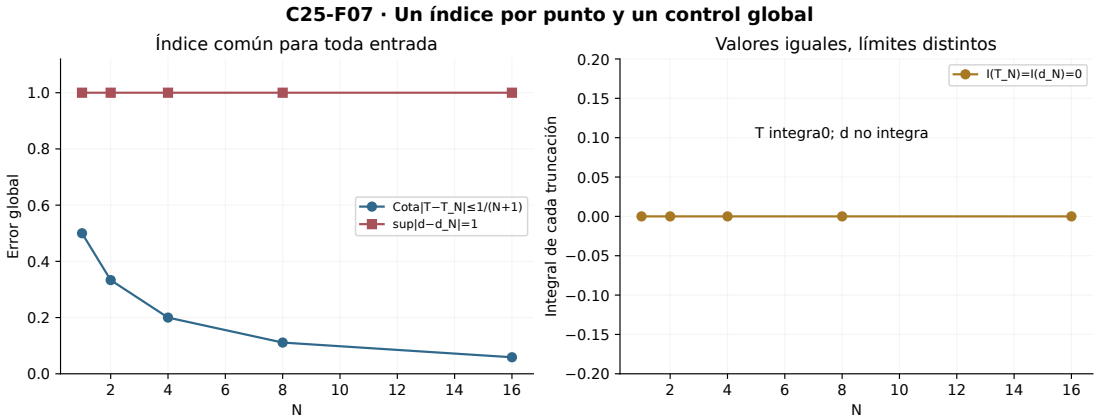


Figura 25.7. Truncar Thomae en E_N conserva integral0 y error global≤1/(N+1). Los indicadores de E_N también integran0 y se estabilizan entrada por entrada en Dirichlet, pero mantienen error global1.

Ejercicios de la sección 25.7.

Ejercicio 31. Dos errores de salida, una oscilación

Demuestra ω(f,I)≤ω(g,I)+2δ si |f−g|≤δ universalmente.

Solución. Supongamos imágenes no vacías y acotadas y $|f(t) - g(t)| \leq \delta$ para toda entrada de I. Para $s, t \in I$, escribimos $f(s) - f(t) = (f(s) - g(s)) + (g(s) - g(t)) + (g(t) - f(t)) \leq \omega(g, I) + 2\delta$. Fijado t, tomar supremo en s da $M_f - f(t) \leq \omega(g, I) + 2\delta$. Luego $M_f \leq f(t) + \omega(g, I) + 2\delta$ para toda t, y tomar ínfimo en t produce $M_f \leq m_f + \omega(g, I) + 2\delta$. Restar m_f prueba $\omega(f, I) \leq \omega(g, I) + 2\delta$. La optimalidad de las cotas sustituye a cualquier supuesto de extremos alcanzados.

Ejercicio 32. Aproximantes integrables certifican existencia

Prueba la conclusión de R7 y después la cota de diferencia de integrales.

Solución. Sea f acotada y supongamos que para toda $\delta > 0$ existe una integrable g con error global a lo sumo δ. Dada $\varepsilon > 0$, elegimos $\delta = \varepsilon/[4(b-a)]$ y una g correspondiente. Darboux proporciona una partición con $G(g, P) < \varepsilon/2$. La comparación de oscilaciones ponderadas da $G(f, P) \leq G(g, P) + 2\delta(b-a) < \varepsilon$. Por tanto f es integrable. Con su integral ya existente, para cualquier aproximante integrable de error global δ, la diferencia $f - g$ es integrable y satisface $-\delta \leq f - g \leq \delta$. Orden y linealidad dan $|\int_a^b f - \int_a^b g| \leq \delta(b-a)$. La prueba de existencia precede a esta comparación de valores.

Ejercicio 33. Truncar alturas de Thomae

Define T_N y demuestra error global≤1/(N+1), integrabilidad y valor integral de T.

Solución. Para $N \geq 1$, definimos $T_N(x) = T(x)$ si $x \in E_N$ y cero en las demás entradas. Tiene soporte finito, por lo que es integrable con valor cero por cambios finitos de la tasa nula. En E_N el error es cero; fuera, la altura de T no supera $1/(N+1)$. Así $|T - T_N| \leq 1/(N+1)$ universalmente. Como esas cotas tienden a cero y T está acotada, R7 prueba su integrabilidad. Después, la cota de diferencia de integrales en longitud uno da $|I_T| \leq 1/(N+1)$ para todo $N \geq 1$. Una distancia positiva quedaría contradicha por un N suficientemente grande, así $I_T = 0$.

Ejercicio 34. Estabilizar entradas no controla la familia

Prueba que d_N=1 en E_N y0 fuera se estabiliza en Dirichlet entrada por entrada, pero conserva error global1.

Solución. Para un racional $x = p/q$ reducido, se tiene $x \in E_N$ desde $N \geq q$, así $d_N(x) = 1$ a partir de ese índice. Para un irracional, $d_N(x) = 0$ para todo N. Cada entrada se estabiliza en su altura de Dirichlet. Sin embargo, para cada $N \geq 1$ la entrada $x_N = 1/(N+1)$ tiene denominador reducido $N+1$ y queda fuera de E_N. Allí $d_N(x_N) = 0$ y $d(x_N) = 1$. El error global es por tanto al menos uno y, como ambas alturas están entre cero y uno, exactamente uno. Ningún índice controla todas las entradas con error menor que $1/2$, aunque cada entrada fija acabe estabilizada.

Retorno visual. Véase C25-F07, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 35. Regla finita y cambios infinitos

Compara dos modificaciones de la función cero en los racionales y precisa sus resultados.

Solución. Sobre $[0,1]$, sustituimos las alturas de la tasa cero en los racionales de dos maneras. Si ponemos en cada fracción reducida p/q la altura $1/q$, obtenemos Thomae, integrable con valor cero por la separación de picos grandes y alturas pequeñas. Si ponemos altura uno en todos los racionales, obtenemos Dirichlet, no integrable por su brecha fija. En ambos casos el conjunto modificado es la misma colección numerable de racionales. El resultado de cambios finitos de C23 no decide ninguna modificación infinita por sí solo; las amplitudes y su distribución requieren una prueba nueva.

25.8. La frontera y el paso que todavía falta

La acotación permite formar los extremos locales, pero sólo la reducción de sus brechas permite integrar. El criterio por niveles separa esas dos obligaciones y muestra por qué conjuntos densos de discontinuidades pueden tener comportamientos diferentes. **R8 — Balance de la teoría disponible.** En un cerrado no degenerado, integrabilidad de Riemann exige acotación, como probó C23 desde su contrato universal de etiquetas. Con acotación, R5 caracteriza exactamente la existencia mediante contenido finito nulo de cada nivel positivo de oscilación. No exige ausencia de discontinuidades, ni que el conjunto completo de ellas admita una cobertura finita de longitud arbitrariamente pequeña.

En particular los racionales de $[0,1]$ no tienen contenido finito nulo. Si una unión finita de intervalos abiertos los cubre, su clausura finita cubre $[0,1]$ por densidad; la longitud de esa unión de intervalos cerrados es a lo sumo la suma de longitudes originales y al menos uno. Por tanto esa suma no puede ser menor que uno. Sin embargo, los niveles positivos de oscilación de Thomae son finitos y su integral existe. Pedir contenido finito nulo al conjunto entero de discontinuidades sería una condición suficiente más fuerte, no el criterio exacto de R5.

Tampoco basta limitar el número de discontinuidades sin verificar acotación. En $[0,1]$, declare $h(0) = 0$ y $h(x) = 1/x$ para $x > 0$. Es continua fuera de cero, pero no acotada: para cualquier $B > 0$ una entrada positiva menor que $1/(B+1)$ tiene valor mayor que B. No

tiene integral de Riemann en el sentido propio de C23. No desarrollamos aquí una integral impropia ni inferimos su valor por un proceso distinto.

Las figuras conservan en estos ejemplos el alcance de sus estimaciones. En Thomae, la cota $1/(N+1)$ controla todos los picos omitidos de E_N. En Cantor, la etapa C_n encierra toda la intersección y su longitud $(2/3)^n$ permite construir la cobertura. Los rectángulos de Darboux usan cotas de todas las entradas de cada pieza, incluidos los nodos compartidos. Cada dibujo representa un control previamente demostrado.

La terminología de longitud usada hasta aquí es finita y elemental. Una teoría más amplia podrá organizar coberturas numerables y tratar otras clases de funciones, pero necesitará construir sus nociones, probar sus reglas y definir otra integral. No se asigna aquí una integral alternativa a Dirichlet ni se usa el criterio de Lebesgue como una herramienta ya disponible. El contraste entre las truncaciones de Thomae y los indicadores de E_N deja una dificultad precisa: estabilizar los valores en cada entrada no basta para conservar integrabilidad. Para hacerlo, la aproximación necesita una estimación que controle todas las entradas a la vez. Esa diferencia ya aparece en los ejemplos finitos y exige distinguir cuidadosamente el orden de los cuantificadores al estudiar sucesiones de funciones.

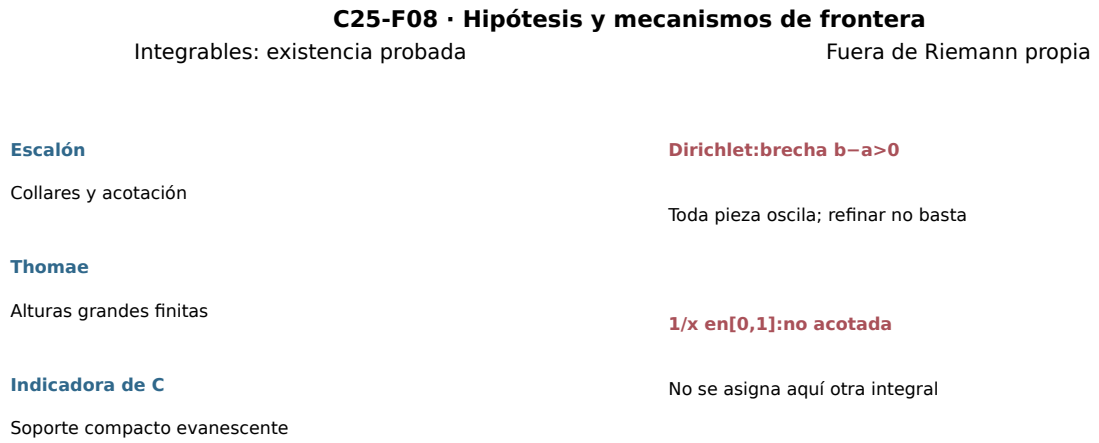


Figura 25.8. Escalón,Thomae e indicadora de C tienen integral propia con los mecanismos probados; Dirichlet falla por brecha persistente y1/x falla por acotación. Las barras de Dirichlet son brechas, no valores integrales alternativos.

Ejercicios de la sección 25.8.

Ejercicio 36. Una cobertura de racionales

Prueba que Q∩[0,1] no tiene contenido finito nulo.

Solución. Supongamos una cobertura de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ por los abiertos (u_j, v_j), $1 \le j \le k$. Su unión O contiene un conjunto denso en $[0,1]$, así $[0,1] \subseteq \overline{O}$. Como la unión es finita, $\overline{O} = \bigcup_{j=1}^{k} [u_j, v_j]$. Los intervalos cerrados conservan las longitudes $v_j - u_j$. Cortar en sus finitísimos extremos demuestra que una cobertura del segmento tiene suma de longitudes al menos uno. Por tanto $\sum_j (v_j - u_j) \ge 1$ para la cobertura abierta original. La tolerancia $\sigma = 1/2$ no admite una cobertura de ese tipo, refutando el contenido finito nulo.

Ejercicio 37. Un punto problemático no acotado

Para h0 en cero y h(x)=1/x en(0,1], refuta integral propia sin analizar integrales impropias.

Solución. La tasa $h(0) = 0$, $h(x) = 1/x$ para $x > 0$, toma valores reales en todo $[0,1]$. Si fuera integrable propiamente, C23 daría una cota absoluta finita $B \ge 0$. Elegimos $x = 1/(B+2)$, que está en $(0,1]$, y obtenemos $h(x) = B + 2 > B$, contradicción. La tasa es continua en las entradas positivas, pero la pérdida de acotación al acercarse a cero impide el contrato propio. No se necesita investigar otro tipo de integral para esta conclusión.

Ejercicio 38. Qué certifica una etapa de Cantor

Distingue el significado de (2/3)^n y el del conjunto C, sin identificar una etapa con el límite.

Solución. La cantidad $(2/3)^n$ es la suma de longitudes de los finitísimos componentes de C_n. Como $C \subseteq C_n$, ampliar esos componentes proporciona una cobertura abierta del conjunto final con longitud próxima a esa suma. El conjunto C es la intersección de todas las etapas, no una de ellas. Por ejemplo $1/(2 \cdot 3^n)$ está en la componente izquierda de C_n y se elimina al quitar su tercio medio en el paso siguiente. La etapa certifica una envolvente útil para cubrir C; no afirma que todos sus intervalos sobrevivan ni construye una medida de la intersección.

Ejercicio 39. Frontera exacta y condición más fuerte

Formula R5 y explica por qué exigir que todas las discontinuidades juntas tengan contenido finito nulo sería sólo suficiente.

Solución. Para una función acotada en un cerrado no degenerado, R5 afirma f integrable si y sólo si cada $D_\eta = \{x : \Omega_f(x) \geq \eta\}$, con $\eta > 0$, tiene contenido finito nulo. Si el conjunto completo de discontinuidades tuviera esa propiedad, cada nivel, al estar contenido en él, la heredaría y R5 daría integrabilidad. Es una condición suficiente más fuerte. Thomae muestra que no es necesaria: sus niveles positivos son finitos y la tasa integra cero, mientras sus discontinuidades son todos los racionales del segmento y no tienen contenido finito nulo.

Ejercicio 40. Cerrar sin importar otra integral

Resume qué mecanismos deciden Dirichlet, Thomae y la indicadora de C, y qué teoría no se desarrolló.

Solución. Dirichlet mantiene amplitud uno en toda pieza, así su brecha positiva fija impide integrabilidad. Thomae permite separar una colección finita de picos grandes y cubrirla con longitud pequeña, mientras una cota aritmética controla todos los picos restantes; integra cero. La indicadora de Cantor confina sus alturas no nulas en un compacto con coberturas finitas arbitrariamente cortas y también integra cero. Estas decisiones usan oscilación, compacidad y sumas finitas de longitudes. El capítulo no construye una medida ni una integral de Lebesgue y no asigna con ellas un valor a Dirichlet. El contraste de aproximantes deja preparada la cuestión del control de sucesiones de funciones.

Retorno visual. Véase C25-F08, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Capítulo 26

Sucesiones de funciones: converger punto por punto

La familia $f_n(x) = x/(n+1)$ tiende a cero en cada entrada real fija, aunque en toda etapa podamos encontrar una entrada donde su valor sea uno. Para entender esa diferencia, consideraremos cada columna como una sucesión numérica de C06 y mantendremos visible qué puede depender de la entrada. C12–C14 aportan funciones, límites y continuidad; la arquimedianidad de C03 y las herramientas de C18 y C23–C25 se utilizarán con sus hipótesis en los ejemplos.

26.1. Dos índices, dos maneras de mirar

Una sucesión numérica entrega un número para cada índice. Ahora cada índice entrega una función completa. El dominio permanece fijo: sea $X \subseteq \mathbb{R}$, y para cada $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ sea $f_n : X \to \mathbb{R}$. El número $f_n(x)$ tiene dos argumentos de naturaleza distinta: n ordena las etapas; x señala una entrada del dominio. Cambiar el dominio entre etapas impide comparar columnas sin declarar antes una restricción común.

Construir el objeto sin confundir sus representaciones. Por la teoría elemental de conjuntos y funciones declarada en C12, la colección $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ existe: sus elementos son los subconjuntos de $X \times \mathbb{R}$ que satisfacen existencia y unicidad de salida. Una sucesión de funciones es una aplicación $\mathbb{N} \to \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$. Equivalentemente, podemos dar una sola función $F : \mathbb{N} \times X \to \mathbb{R}, \qquad F(n, x) = f_n(x)$. En la ida, la evaluación produce una salida única; en la vuelta, la sección $x \mapsto F(n, x)$ produce cada función. No se elige una salida entre varias. El grafo reúne pares con salidas ya únicas.

Hay dos maneras de recorrer el mismo objeto. Al fijar n obtenemos la fila f_n, cuya gráfica tiene entrada x y salida real. Al fijar x obtenemos una columna, la sucesión numérica $n \mapsto f_n(x)$, donde el eje horizontal representa ahora índices. Distinguir estos ejes evita atribuir a la función completa lo que sólo hemos comprobado para una entrada. Por ejemplo, $f_n(x) = \frac{x}{n+1}, \qquad X = \mathbb{R}$. El denominador es positivo para todo índice, por lo que cada fila es una función real bien definida. En $x = 2$ vemos $2, 1, 2/3, ...$; en $x = -1$ vemos $-1, -1/2, -1/3, ...$ Para una entrada fija x, el error respecto de cero es $|x|/(n+1)$. El destino es el mismo, pero los umbrales que lo certifican pueden depender de la columna.

El conjunto donde las columnas convergen. No toda familia converge en todo su dominio. Definimos

$$C = \{x \in X : \text{existe } y \in \mathbb{R} \text{ con } f_n(x) \to y\}.$$

Para cada $x \in C$, la unicidad de C06 identifica un único y. El subconjunto $G = \{(x, y) \in C \times \mathbb{R} : f_n(x) \to y\}$ es, por tanto, el grafo de una función $f : C \to \mathbb{R}$. No se invoca una selección numerable de límites: existencia y unicidad en cada fibra son precisamente la condición de función.

Para $f_n(x) = (-1)^n x$ en $\mathbb{R}$, la columna de cero es constante y converge. Si $x \neq 0$, las subsecuencias pares e impares son constantes de valores x y $-x$. Un supuesto límite tendría que coincidir con ambos por la transferencia a subsecuencias de C06; son distintos. Así $C = \{0\}$. Dar la fórmula de cada fila no garantiza la existencia de una función límite en todo X.

Si X es vacío, existe una única función $X \to \mathbb{R}$ y toda afirmación para sus entradas es vacua. Los ejemplos y las refutaciones siguientes tendrán dominios no vacíos. Una figura

con unas pocas columnas permite leer el tipo del objeto; no certifica las columnas que no muestra.

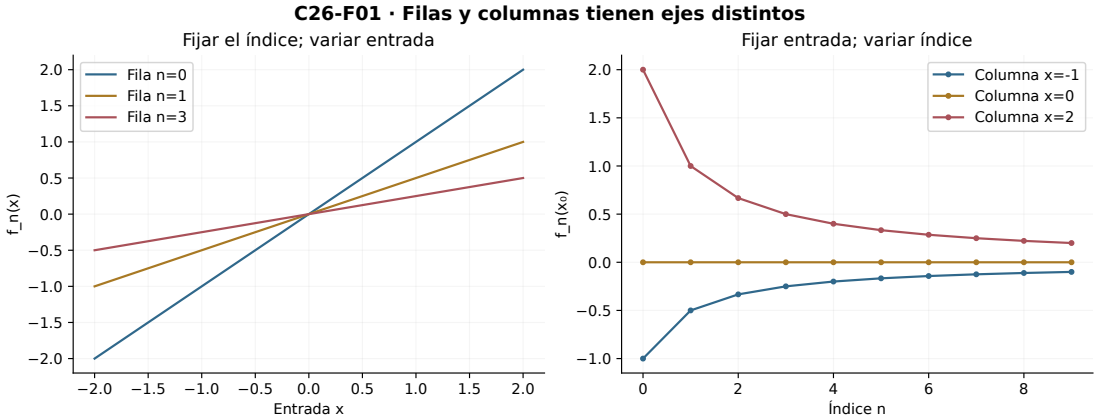


Figura 26.1. Familia x/(n+1): las filas son gráficas respecto de x; las columnas fijan entradas y dibujan valores respecto del índice. Sólo se muestran tres entradas y tres etapas: la prueba para toda entrada está en R1–R2.

Ejercicios de la sección 26.1.

Ejercicio 1. Fila y columna

Para $F(n,x) = (n+1)x$ en $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$, identifica filas, columnas y las entradas donde hay límite real.

Solución. La fila n es $f_n : x \mapsto (n+1)x$ sobre $\mathbb{R}$; la columna x es la sucesión $((n+1)x)_{n\geq 0}$. En $x = 0$ todos los valores son cero. Si $x \neq 0$, sus magnitudes $(n+1)|x|$ exceden cualquier $M > 0$ desde un índice con $n + 1 > M/|x|$. La columna es entonces no acotada y no puede converger a un real, pues C06 hace acotada toda sucesión convergente. Para $x > 0$ crece sin cota superior y para $x < 0$ decrece sin cota inferior. El conjunto de convergencia real es exactamente $\{0\}$ y la función límite sobre él vale cero.

Retorno visual. Véase C26-F01, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 2. El dominio que se conserva

Las fórmulas $f_n(x) = 1/(x-n)$ tienen dominio $\mathbb{R} \setminus \{n\}$. Encuentra un dominio común y el límite allí.

Solución. Como los índices son $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$, la intersección de los dominios es $X = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. En ese conjunto cada denominador $x - n$ es no nulo para todo índice. Fijados $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, elegimos un natural $N > |x| + 1/\varepsilon$. Para $n \geq N$, la triangular inversa da $|x-n| \geq n - |x| > 1/\varepsilon$, así $|1/(x-n)| < \varepsilon$. Las restricciones convergen puntualmente a cero en X. Éste es el mayor dominio común de las fórmulas dadas; podrían elegirse subconjuntos suyos, pero incluir un natural exigiría declarar cómo se repara su fila singular.

Ejercicio 3. Alternancia dependiente de la entrada

Calcula el conjunto de convergencia de $f_n(x) = (-1)^n(x-2)$ en $\mathbb{R}$.

Solución. En $x = 2$ todos los valores de la columna son cero. Para $x \neq 2$, los índices pares tienen altura $x - 2$ y los impares altura $2 - x$. Si hubiera un límite real, ambas subsucesiones deberían converger a él por C06. Son constantes y sus valores son distintos, de modo que la unicidad lo hace imposible. El conjunto de convergencia es $\{2\}$ y la función límite allí vale cero. La alternancia no depende de una etapa inicial excepcional: sigue produciendo ambos valores en índices arbitrariamente tardíos.

Ejercicio 4. Grafo del límite

Explica por qué la existencia de límite real en cada columna de X define una función sin escoger un límite arbitrario por entrada.

Solución. Definimos $G = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : f_n(x) \to y\}$. La hipótesis de convergencia de cada columna proporciona al menos un y para cada entrada. La unicidad del límite numérico proporciona a lo sumo uno. Por tanto G es total y univaluada sobre X, y define una función $f : X \to \mathbb{R}$. La salida está determinada por una propiedad que tiene un único valor, sin elegir entre alternativas por entrada. Si X es vacío, el mismo procedimiento produce el único grafo vacío.

Ejercicio 5. Toda entrada salvo una

Define $f_n(x) = 1$ si $x = n$ y 0 en otro caso, en $\mathbb{R}$. Determina su límite y explica por qué las gráficas no bastan.

Solución. Si $x \notin \mathbb{N}$, ninguna fila tiene su pico en esa entrada y la columna es cero desde el inicio. Si $x = m \in \mathbb{N}$, el único término de altura uno es el de índice m; desde $N = m + 1$ toda la cola es cero. Así $f_n(x) \to 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Cada fila contiene un pico de altura uno, pero éste aparece en una entrada diferente al aumentar el índice. El argumento clasifica una entrada arbitraria y controla su cola completa; unas pocas gráficas no certificarían esa afirmación universal.

26.2. Una cola para cada entrada

Decimos que f_n converge **puntualmente** a $f : X \to \mathbb{R}$ si

$$\forall x \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Es exactamente la convergencia numérica de C06 aplicada a cada entrada fija. Recibimos x y ε antes de construir N; después controlamos toda la cola en esa entrada. Escribimos $f_n \to f$ puntualmente en X y dejamos explícito el dominio.

Responder al desafío completo. Para $f_n(x) = x/(n + 1)$ y $x = 0$, sirve $N = 0$. Si $x \neq 0$, por la arquimedianidad de C03 elegimos un natural $N > |x|/\varepsilon$. Para $n \geq N$, $|f_n(x)| = \frac{|x|}{n+1} \leq \frac{|x|}{N+1} < \varepsilon$. La elección sirve también para $x = 0$, pero separar la columna constante muestra que no necesitamos dividir por cero. La prueba responde a todo x real y a toda tolerancia; comprobar dos entradas de una tabla no lo haría.

Aunque la definición permite que el corte dependa de la entrada, no obliga a que sea diferente en cada una. Para una tolerancia y un conjunto finito $A = \{x_1, \dots, x_m\}$, podemos reunir los cortes puntuales y tomar su máximo. Toda cola posterior satisface las m obligaciones a la vez. Si A es vacío, cualquier corte sirve. La finitud es lo que permite esta operación; una familia infinita de umbrales puede no tener un máximo natural.

Unicidad y negación. Si $f_n \to f$ y $f_n \to g$ puntualmente, fijemos x. Si $d = |f(x) - g(x)| > 0$, los dos cortes para $d/3$ tienen un máximo N. Entonces $d \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - g(x)| < 2d/3$, contradicción. Por tanto $f(x) = g(x)$ para toda entrada y C12 da igualdad de funciones.

La negación, para una candidata f fija, es

$$\exists x \in X\ \exists \varepsilon_0 > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N : \quad |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_0.$$

El punto infractor debe permanecer fijo cuando N varía. Si ante cada corte fabricamos una entrada distinta, habremos refutado una obligación simultánea más fuerte, no necesariamente la convergencia puntual.

Para la familia $(-1)^n x$ y la candidata cero, la entrada fija $x = 1$ conserva error uno en todo índice. Con $\varepsilon_0 = 1/2$ refutamos la convergencia puntual. En cambio, para $x/(n + 1)$ podemos lograr el mismo error tomando $x_n = n + 1$, pero ya hemos cambiado la entrada con la etapa. Esa ruta no contradice la prueba para cada columna fija; muestra que sus cortes no controlan simultáneamente toda la recta.

Umbrales mínimos sin elegir infinitamente. Para cada par (x, ε), el conjunto $H(x, \varepsilon) = \{N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N,\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}$ es no vacío cuando hay convergencia puntual. El buen orden de los naturales da su mínimo $\tau(x, \varepsilon)$. Esta regla es única y define una función sobre los pares autorizados. Si ε disminuye, las obligaciones se vuelven más fuertes y el umbral mínimo no puede disminuir. Una fórmula suficiente de corte puede ser mayor que τ; minimalidad y validez son preguntas distintas.

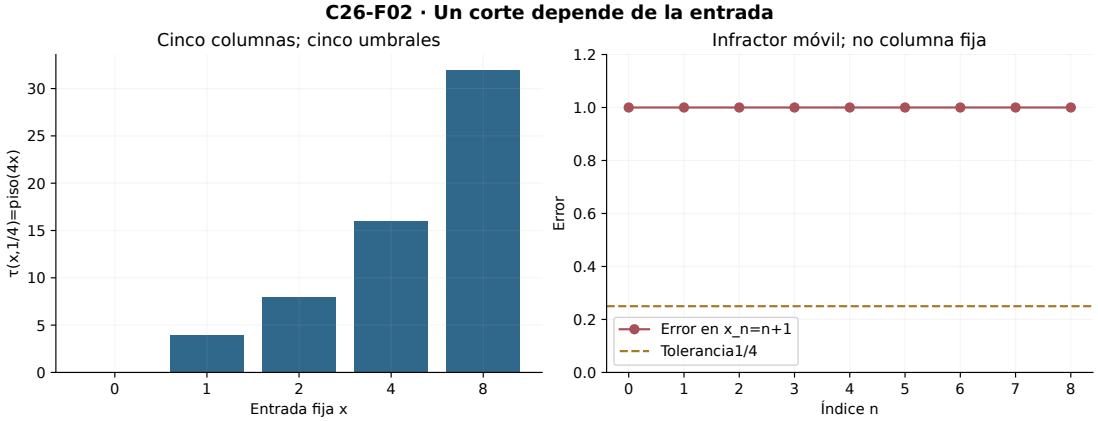


Figura 26.2. Para x/(n+1) y tolerancia1/4, el umbral mínimo en las entradas no negativas mostradas es piso(4x). En cambio, la entrada móvil x_n=n+1 produce error1 en toda etapa. Esa ruta no refuta la convergencia puntual.

Ejercicios de la sección 26.2.

Ejercicio 6. Certificado explícito

Da un corte para $f_n(x) = (x^2 + 1)/(n + 1) \to 0$ en $\mathbb{R}$ con error estricto menor que ε.

Solución. Fijamos $x \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$. El numerador $x^2 + 1$ es positivo. Por arquimedianidad elegimos un natural $N > (x^2 + 1)/\varepsilon$. Para cualquier $n \geq N$, se tiene $0 < (x^2 + 1)/(n + 1) \leq (x^2 + 1)/(N + 1) < \varepsilon$. El corte sirve para toda la cola y depende sólo de los desafíos recibidos, la entrada y la tolerancia. Se obtiene convergencia puntual a cero en toda la recta.

Ejercicio 7. Negar en el orden correcto

Escribe la negación de convergencia puntual hacia una candidata f y úsala para refutar $f_n(x) = (-1)^n$ hacia cero en un dominio no vacío.

Solución. La negación hacia una candidata fija f es $\exists x \in X\ \exists \varepsilon_0 > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N$: $|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_0$. Para la candidata cero y $f_n(x) = (-1)^n$, fijamos cualquier entrada del dominio no vacío y $\varepsilon_0 = 1/2$. Ante cada corte N, el índice $n = N$ tiene error uno, así infringe la obligación. La entrada permanece fija y la refutación sí es puntual. La familia tampoco converge a otra candidata real en esa entrada, porque las subsucesiones constantes uno y menos uno no podrían compartir un límite.

Ejercicio 8. Un infractor móvil

Para $f_n(x) = x/(n + 1)$ en $\mathbb{R}$, elige ante cada corte una entrada con error1. ¿Qué queda refutado?

Solución. El límite puntual es cero: para cada entrada fija, un corte $N > |x|/\varepsilon$ controla $|x|/(n + 1)$ en toda la cola. Para refutar un corte simultáneo, fijamos tolerancia $1/2$. Ante cualquier N, tomamos $n = N$ y $x = N+1$, obteniendo $|f_N(x)| = 1$. Se demuestra $\forall N\ \exists x\ \exists n \geq N$ con error grande. La entrada se elige después del corte, de modo que esa afirmación no es la negación del contrato puntual, cuyo infractor tendría que ser una misma entrada para todos los cortes.

Retorno visual. Véase C26-F02, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 9. Reunión finita de obligaciones

Para $f_n(x) = x/(n+1)$ y $A = \{-3, 0, 5\}$, produce un corte simultáneo y justifica la generalización a un conjunto finito.

Solución. En $A = \{-3, 0, 5\}$, todas las magnitudes de entrada están acotadas por cinco. Un natural $N > 5/\varepsilon$ da, para todo $n \geq N$ y todo $x \in A$, $|f_n(x)| \leq 5/(N+1) < \varepsilon$. Para una familia puntualmente convergente cualquiera sobre un conjunto finito, la tolerancia fija proporciona un corte por cada entrada. Se construye esa lista finita de cortes y se toma su máximo; cualquier índice posterior cumple todas las obligaciones. En el vacío sirve cero. La extensión a infinitas entradas necesitaría demostrar que sus umbrales tienen una barrera natural común.

Ejercicio 10. Umbral mínimo

Para $f_n(x) = x/(n+1)$ calcula $\tau(x, \varepsilon)$ y comprueba la frontera estricta.

Solución. Sea $r = |x|/\varepsilon \geq 0$. Como el error $|x|/(n+1)$ no aumenta con n, un corte N es válido exactamente cuando $N+1 > r$. Ponemos $m = \lfloor r \rfloor$, caracterizado por $m \leq r < m+1$. El corte $N = m$ cumple la desigualdad estricta. Si un natural $N < m$, entonces $N+1 \leq m \leq r$, de modo que ya el error en ese índice es al menos ε y falla. Por tanto $\tau(x, \varepsilon) = \lfloor |x|/\varepsilon \rfloor$, incluido $x = 0$, donde el mínimo es cero. Cuando r es un entero positivo, el índice anterior da error exactamente igual a ε, que no satisface el contrato estricto.

26.3. Lo que se transporta columna por columna

Para estudiar las operaciones fijamos primero una entrada x. Cada familia se convierte entonces en una sucesión de números reales y podemos aplicar las reglas de C06. Reconstruiremos las estimaciones para distinguir las constantes y cortes que dependen de esa entrada de los que, bajo otra hipótesis, podrían valer en todo el dominio.

Sumas, productos y cocientes. Si $f_n \to f$ y $g_n \to g$ puntualmente en X, entonces $\alpha f_n + \beta g_n \to \alpha f + \beta g$ para constantes reales. Repartimos una tolerancia entre los errores: bastan errores menores que $\varepsilon/[2(|\alpha|+1)]$ y $\varepsilon/[2(|\beta|+1)]$. El máximo de los dos cortes da error total menor que ε.

Para el producto, la convergencia de $f_n(x)$ da una cola con $|f_n(x)| \leq |f(x)| + 1 =: B_x$. Allí

$$|f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \leq B_x|g_n(x) - g(x)| + |g(x)|\,|f_n(x) - f(x)|.$$

Elegimos los dos errores con los denominadores positivos $2(B_x+1)$ y $2(|g(x)|+1)$ y reunimos los tres cortes. No hemos obtenido una cota de f_n que valga en todo X; sólo la cota necesaria en la entrada fijada.

Si $g(x) \neq 0$, una cola con error menor que $|g(x)|/2$ satisface $|g_n(x)| > |g(x)|/2$. En esa cola el recíproco está definido y $\left|\frac{1}{g_n(x)} - \frac{1}{g(x)}\right| \leq \frac{2|g_n(x)-g(x)|}{|g(x)|^2} \longrightarrow 0$. Esto prueba el cociente por el producto. Para hablar de una sucesión de funciones f_n/g_n sobre un dominio fijo Y, se debe asegurar $g_n(x) \neq 0$ para **todo** n y $x \in Y$, o declarar valores de reparación para los ceros de cada fila. Que cada columna deje de tener ceros eventualmente no produce automáticamente un único comienzo válido para todas.

Orden, encierro y composición. Si para la entrada fija x se tiene $f_n(x) \leq g_n(x)$ eventualmente, entonces $f(x) \leq g(x)$. De fallar, con distancia $d = f(x) - g(x) > 0$, dos errores menores que $d/3$ harían $f_n(x) > g_n(x)$ en una cola, contradicción. El comienzo de la desigualdad puede depender de x. Si $a_n(x) \leq f_n(x) \leq b_n(x)$ eventualmente y ambos extremos convergen al mismo $h(x)$, entonces para errores extremos menores que ε también $|f_n(x) - h(x)| < \varepsilon$. Para una función $\phi : D \to \mathbb{R}$ continua en $f(x) \in D$, y todas las entradas $f_n(x) \in D$, el radio de continuidad seguido del corte puntual prueba $\phi(f_n(x)) \to \phi(f(x))$. La pertenencia al dominio va antes de componer. No se necesita continuidad de cada f_n para estas reglas.

Tres alcances de acotación. La convergencia numérica en una columna proporciona una cota para todos sus términos: acotamos una cola y tomamos después el máximo con los finitísimos términos iniciales. Así, para cada x existe B_x con $|f_n(x)| \leq B_x$ para todo n. Esa barrera puede crecer al cambiar x. También puede ocurrir que cada fila esté acotada y que sus cotas crezcan con n. Ninguna de esas afirmaciones produce por sí sola una constante para todas las filas y entradas.

En $[0, \infty)$, $u_n(x) = \min(n, x)$ converge a $u(x) = x$: para $n \geq x$ ya coincide. Cada fila está acotada por n, pero el límite no está acotado. En cambio, si $|f_n(x)| \leq B$ para todos n, x, la preservación del orden da $|f(x)| \leq B$ para todo x. La posición de la constante dentro o fuera de los cuantificadores determina qué puede heredarse.

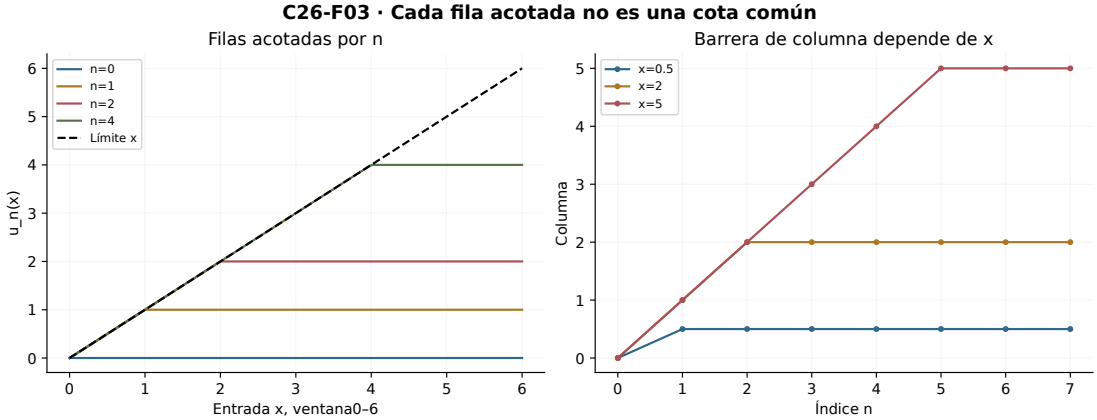


Figura 26.3. Filas u_n(x)=min(n,x), aquí restringidas a la ventana0≤x≤6 para dibujar. Cada fila tiene barrera n; cada columna tiene barrera x. El límite en todo[0,∞) es x, no acotado. La ventana finita no demuestra la falta de cota global.

Ejercicios de la sección 26.3.

Ejercicio 11. Dos errores y una cota

Prueba directamente que el producto de dos familias puntualmente convergentes converge al producto de sus límites.

Solución. Fijamos una entrada x y abreviamos $f(x) = a$, $g(x) = b$. La convergencia de la primera columna da un corte de acotación con $|f_n(x)| \leq B = |a| + 1$. Usamos la identidad $f_n g_n - ab = f_n(g_n - b) + b(f_n - a)$. Su magnitud no supera $B|g_n - b| + |b||f_n - a|$. Pedimos a la segunda columna error menor que $\varepsilon/[2(B + 1)]$ y a la primera menor que $\varepsilon/[2(|b| + 1)]$. El máximo de esos dos cortes y el de acotación garantiza que la suma anterior es menor que ε, pues cada coeficiente sobre su denominador más uno es menor que uno. La entrada era arbitraria, así el producto converge puntualmente a fg. No se necesitó una cota global de las familias.

Ejercicio 12. Ceros por filas

En $X = (0, 1]$ sea $g_n(x) = x - 1/(n + 1)$. Prueba convergencia puntual y explica por qué $1/g_n$ no define una familia en todo X.

Solución. Para $x \in (0, 1]$, $|g_n(x) - x| = 1/(n+1) \to 0$, así el límite puntual es $g(x) = x > 0$. Sin embargo, cada fila se anula en $x_n = 1/(n + 1)$, que pertenece al dominio. Por eso $1/g_n$ no define una función real en todo X en ninguna etapa. Un dominio común posible para los recíprocos es $Y = X \setminus \{1/(n + 1) : n \in \mathbb{N}\}$. En una entrada fija de Y, desde un corte con $1/(n + 1) < x/2$ tenemos $g_n(x) > x/2$. Entonces $|1/g_n(x) - 1/x| = |x - g_n(x)|/(x|g_n(x)|) \leq 2/[x^2(n + 1)] \to 0$. La barrera eventual justifica el límite, mientras la restricción común justifica la existencia de todas las filas.

Ejercicio 13. Orden eventual

Si $f_n \to f$, $g_n \to g$ puntualmente y para cada x hay un corte con $f_n(x) \le g_n(x)$ después de él, demuestra $f \le g$.

Solución. Fijemos x y supongamos por contradicción que $d = f(x) - g(x) > 0$. Reunimos los cortes para errores menores que $d/3$ de ambas columnas y el corte a partir del que se cumple su orden. En cualquier índice posterior, $f_n(x) > f(x) - d/3$ y $g_n(x) < g(x) + d/3$, así $f_n(x) - g_n(x) > d - 2d/3 = d/3 > 0$. Esto contradice $f_n(x) \le g_n(x)$. Por tanto $f(x) \le g(x)$ para toda entrada. La estrictitud no pasa automáticamente: las columnas $1/(n+1) > 0$ y cero tienen el mismo límite cero.

Ejercicio 14. Filas acotadas, límite sin cota

Analiza $u_n(x) = \min(n, x)$ en $[0, \infty)$ respecto de acotación de filas, columnas, límite y familia completa.

Solución. Para cada n, la fila u_n satisface $0 \le u_n(x) \le n$ en todo $[0, \infty)$, así está acotada. Para cada entrada fija x, su columna satisface $0 \le u_n(x) \le x$ y desde cualquier natural $N > x$ coincide con x. Por tanto su límite es $u(x) = x$. Esta función no tiene cota superior en todo el dominio. Tampoco hay una barrera común para toda la familia: dado $B \ge 0$, elegimos un natural $n > B$ y tomamos $x = n$, obteniendo $u_n(n) = n > B$. Las cotas por filas y por columnas son válidas, pero dependen de argumentos diferentes y ninguna proporciona esa barrera global.

Retorno visual. Véase C26-F03, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 15. Componer dentro del tipo

Si $f_n \to f$ puntualmente y todos sus valores y los de f son no negativos, demuestra $\sqrt{f_n} \to \sqrt{f}$ sin suponer continuidad de las filas.

Solución. Para una entrada fija, escribimos $u_n = f_n(x) \ge 0$ y $u = f(x) \ge 0$. Sus raíces reales están definidas. Si $u_n \ge u$, la diferencia de raíces es no negativa y $u_n - u = (\sqrt{u_n} - \sqrt{u})(\sqrt{u_n} + \sqrt{u}) \ge (\sqrt{u_n} - \sqrt{u})^2$. Intercambiar los dos valores cubre el orden inverso, así $|\sqrt{u_n} - \sqrt{u}|^2 \le |u_n - u|$. Para $\varepsilon > 0$, la convergencia de la columna da una cola con $|u_n - u| < \varepsilon^2$, luego el error de raíces es menor que ε. Esto también cubre $u = 0$. Sólo se usa el control de la columna y la operación raíz, sin continuidad de las filas.

26.4. Potencias y una discontinuidad nueva

En $X = [0, 1]$ definimos $p_0(x) = 1$ y $p_{n+1}(x) = x\, p_n(x)$. Así $p_n(x) = x^n$ para $n \ge 1$, sin dejar ambiguo el valor inicial en cero. Las filas son polinomios continuos por C14. El dominio compacto no evita por sí solo que el límite cambie la continuidad.

Demostrar la convergencia, incluidos los extremos. En cero, $p_n(0) = 0$ desde $n = 1$; en uno, $p_n(1) = 1$ siempre. Para $0 < x < 1$ ponemos $t = 1/x - 1 > 0$. Por inducción, $(1+t)^n \ge 1 + nt \quad (n \in \mathbb{N})$. El paso multiplica por $1 + t > 0$ y conserva el término adicional $nt^2 \ge 0$. Por ello $0 \le x^n \le \frac{1}{1+nt}$. Para $\varepsilon > 0$ elegimos $N > 1/(\varepsilon t)$. Si $n \ge N$, la última cota es menor que ε. El límite puntual es

$$p(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

La prueba identifica primero los valores y después reúne las columnas; ningún argumento visual reemplaza la estimación.

Para $x < 1$, un radio menor que $1 - x$ mantiene las entradas en la región donde p es constante, por lo que el límite es continuo allí. En uno ocurre lo contrario: dado cualquier $\delta > 0$, tomamos $d = \min(\delta/2, 1/2) > 0$ e $y = 1 - d$. Se cumple $0 < |y - 1| < \delta$ y la diferencia de salidas es uno. Ningún radio sirve para la tolerancia $1/2$. Las filas continuas tienen, por tanto, un límite puntual discontinuo, incluso sobre este dominio compacto.

La entrada cercana al extremo responde tarde. Para cualquier índice $n \geq 1$, el punto $x_n = 1 - \frac{1}{2(n+1)}$ es menor que uno, por lo que $p(x_n) = 0$. La desigualdad de Bernoulli en su versión $(1-s)^n \geq 1-ns$, $0 \leq s \leq 1$, se obtiene por inducción: al multiplicar, el término extra ns^2 es no negativo. De aquí $p_n(x_n) \geq 1 - \frac{n}{2(n+1)} > 1/2$. Cada etapa tiene una entrada con error grande aunque toda entrada fija menor que uno termina con error pequeño. Ante un supuesto corte común, tomar $n \geq \max(N, 1)$ y ese x_n lo refuta. No es una refutación de la convergencia puntual, pues la entrada varía.

Restringir a $[0, c]$ con $0 < c < 1$ permite usar el mismo $t_c = 1/c-1$ para todas las entradas: $x^n \leq c^n \leq 1/(1+nt_c)$. Si $c = 0$, desde $n = 1$ el error es cero. En $[0, 1)$ el límite es continuo, pero los x_n siguen perteneciendo al dominio y el error simultáneo persiste. Continuidad del límite y control simultáneo son obligaciones diferentes.

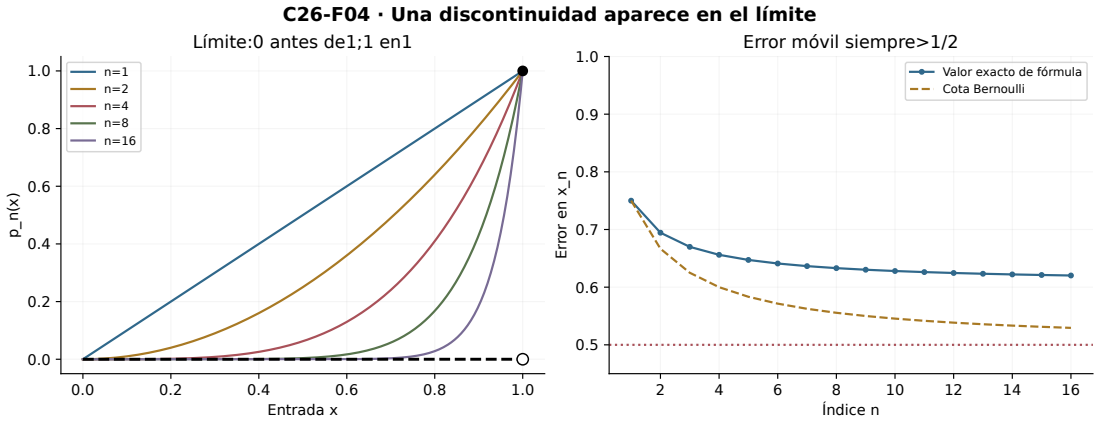


Figura 26.4. Potencias en[0,1], con p0=1. El límite vale0 antes de1, punto abierto allí, y1 en1, punto cerrado. La ruta x_n=1−1/[2(n+1)] mantiene error mayor que1/2 mediante Bernoulli, aunque toda columna interior converge a cero.

Ejercicios de la sección 26.4.

Ejercicio 16. Potencias y extremos

Demuestra el límite puntual de $p_0 = 1$, $p_n(x) = x^n$ para $n \geq 1$, en $[0, 1]$, sin logaritmos.
Solución. La recurrencia declara $p_0 = 1$. En cero, $p_n(0) = 0$ para $n \geq 1$, así el límite es cero; en uno, todos los términos son uno. Si $0 < x < 1$, ponemos $t = 1/x - 1 > 0$. Bernoulli, probado por inducción, da $(1+t)^n \geq 1+nt$, luego $0 < p_n(x) = x^n \leq 1/(1+nt)$. Para $\varepsilon > 0$, un natural $N > 1/(\varepsilon t)$ hace esta cota menor que ε para todos los índices posteriores. Por tanto el límite puntual vale cero en $[0, 1)$ y uno en el extremo uno. La prueba mantiene la entrada fija y no usa logaritmos.

Ejercicio 17. Discontinuidad relativa

Refuta continuidad del límite de las potencias en1 con un testigo para cada radio.
Solución. Sea p el límite, con $p(1) = 1$ y $p(y) = 0$ para $y < 1$. Fijamos tolerancia $1/2$. Para cualquier $\delta > 0$, tomamos $d = \min(\delta/2, 1/2) > 0$ y $y = 1 - d$. Entonces $y \in [0, 1)$ y $0 < |y-1| = d < \delta$, pero $|p(y)-p(1)| = 1$. Ningún radio cumple continuidad relativa en uno. En un centro $x < 1$, en cambio, un radio menor que $1 - x$ evita el punto excepcional y deja la función constante cero. La discontinuidad nueva está exactamente en el extremo uno.

Ejercicio 18. Una infracción en cada etapa

Con $x_n = 1 - 1/[2(n+1)]$, prueba $p_n(x_n) > 1/2$ y determina el alcance de la conclusión.

Solución. Para cada $n \geq 0$, la entrada $x_n = 1 - 1/[2(n+1)]$ está entre cero y uno. La versión de Bernoulli $(1-s)^n \geq 1 - ns$ para $0 \leq s \leq 1$ da $p_n(x_n) \geq 1 - n/[2(n+1)] = (n+2)/[2(n+1)] > 1/2$; para $n = 0$ la fila inicial vale uno. Como el límite en $x_n < 1$ es cero, el error supera $1/2$ en cada etapa. Ante cualquier corte común sirve la infracción de esa misma etapa. Sin embargo, las entradas varían con el índice y se aproximan a uno. El resultado refuta control simultáneo en todo el dominio, conservando la convergencia de cada columna fija.

Retorno visual. Véase C26-F04, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 19. Cambiar el dominio

Compara las potencias en $[0, c]$, $0 < c < 1$, y en $[0, 1)$.

Solución. En $[0, c]$, con $0 < c < 1$, el límite puntual es cero. Para $n \geq 1$ y todas las entradas de ese segmento, $p_n(x) \leq c^n \leq 1/[1 + n(1/c - 1)]$. Un natural $N > 1/[\varepsilon(1/c - 1)]$, también positivo, controla toda la cola y todas las entradas a la vez. En $[0, 1)$, el límite sigue siendo cero, pero las entradas $x_n = 1 - 1/[2(n+1)]$ pertenecen al dominio y tienen error mayor que $1/2$ en cada etapa. Allí no existe un corte simultáneo para esa tolerancia. La candidata es continua en ambos dominios; la pérdida de separación respecto del borde uno cambia el control global.

Ejercicio 20. Dominio ampliado

Calcula el conjunto de convergencia real de la misma familia de potencias en $[-1, 1]$.

Solución. Si $|x| < 1$, para $n \geq 1$ tenemos $|p_n(x)| = |x|^n$. La prueba geométrica anterior aplicada a $|x|$ da límite cero, con el caso $x = 0$ tratado por la recurrencia. En $x = 1$, todos los valores son uno. En $x = -1$, las subsucesiones pares e impares son constantes uno y menos uno, así la columna no tiene límite real. Por tanto el conjunto de convergencia en $[-1, 1]$ es $(-1, 1]$. La función límite sobre él vale cero en $(-1, 1)$ y uno en el extremo uno. La familia no converge puntualmente en todo el dominio ampliado porque falla la nueva columna de menos uno.

26.5. Cambiar la entrada mientras cambia el índice

La convergencia puntual mantiene fija la entrada durante toda la prueba. Una **diagonal** dada $x_n \in X$ cambia a la vez fila y columna; el dato $f_n(x_n)$ no está cubierto automáticamente por el contrato.

Una capa de transición con fórmula racional. En $[0, 1]$, sea $a_n(x) = \frac{(n+1)x}{1+(n+1)x}$. El denominador es al menos1; cada fila es continua. En cero vale0. Para $x > 0$, $|a_n(x) - 1| = \frac{1}{1+(n+1)x} \leq \frac{1}{(n+1)x} \longrightarrow 0$. Un corte natural mayor que $1/(\varepsilon x)$ controla la cola. El límite a vale0 en cero y1 para $x > 0$; es discontinuo en el origen, por el mismo argumento de ventana relativa usado en §26.4.

Tomemos ahora entradas explícitas: $u_n = \frac{1}{n+1}$, $v_n = \frac{1}{(n+1)^2}$. Ambas convergen a cero y pertenecen al dominio, pero $a_n(u_n) = 1/2$, $a_n(v_n) = \frac{1}{n+2} \longrightarrow 0$. Una tercera ruta, $w_n = 1/\sqrt{n+1}$, da $a_n(w_n) = \sqrt{n+1}/(1+\sqrt{n+1}) \to 1$. La raíz positiva existe por C03; para justificar que el denominador crece, dado $M > 0$ basta $n + 1 > M^2$. La diferencia respecto de1 es su recíproco. Las tres rutas llegan a la misma entrada y sus salidas tienen tres destinos.

Más generalmente, para $c > 0$ y $u_n = c/(n+1)$, la ruta pertenece a $[0, 1]$ desde un índice mayor que c y allí $a_n(u_n) = c/(1+c)$. Podemos reparar el prefijo finito para obtener una ruta definida desde cero sin alterar ese límite. No basta poner una fórmula que abandona el dominio en las primeras etapas.

Dos límites iterados efectivamente calculados. Para cada n fijo, la continuidad y $a_n(0) = 0$ dan $\lim_{x\to 0^+} a_n(x) = 0$, $\lim_{n\to\infty}(\lim_{x\to 0^+} a_n(x)) = 0$. Por otra parte, para todo $x > 0$ el límite en n es1, de modo que $\lim_{x\to 0^+}(\lim_{n\to\infty} a_n(x)) = 1$. Se han comprobado ambas existencias antes de comparar. Que ambas operaciones de límite estén definidas no autoriza a permutarlas. Una figura de la transición muestra dónde se comprime el cambio, pero las dos evaluaciones son la prueba.

En la capa racional, el límite ya pierde continuidad en el origen. El ejemplo siguiente separará esa pérdida del problema de las diagonales: tendrá límite cero continuo, pero una ruta de entradas podrá seguir un pico de altura uno. Más adelante comprobaremos cómo una misma estimación Lipschitz para todas las filas sí permite controlar una ruta convergente.

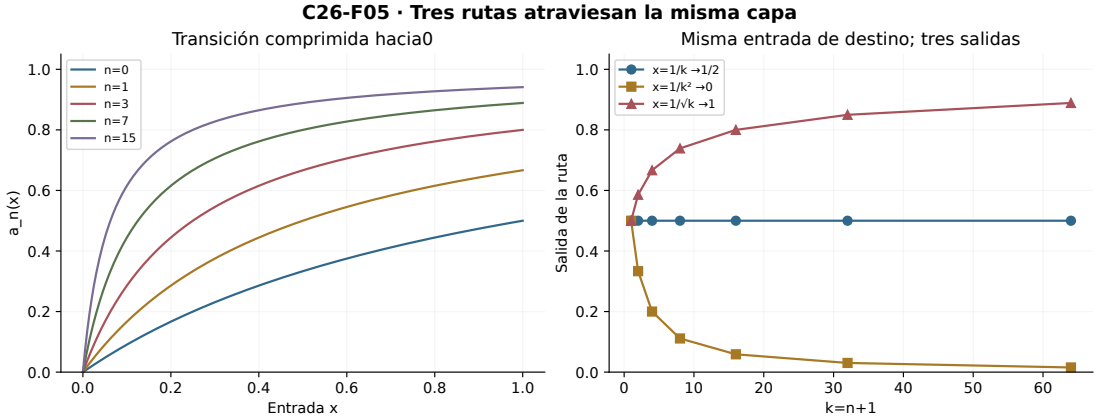


Figura 26.5. Capa a_n(x)=(n+1)x/[1+(n+1)x]. Las rutas1/(n+1),1/(n+1)^2 y1/√(n+1) llegan a0 pero sus salidas tienden a1/2,0 y1. Los límites iterados en entrada e índice dan0 y1; las curvas son representaciones de fórmulas probadas.

Ejercicios de la sección 26.5.

Ejercicio 21. Capa racional

Para $a_n(x) = (n+1)x/[1+(n+1)x]$ en $[0,1]$, prueba el límite y su fallo de continuidad en0.

Solución. Los denominadores son al menos uno en $[0,1]$, así cada fila está definida y es continua. En cero, $a_n(0) = 0$ para todo n. Para una entrada fija $x > 0$, $|a_n(x) - 1| = 1/[1+(n+1)x] \le 1/[(n+1)x]$. Un natural $N > 1/(\varepsilon x)$ controla este error en toda la cola. El límite a vale cero en cero y uno en las entradas positivas. Con tolerancia $1/2$, ante cualquier $\delta > 0$ tomamos $y = \min(\delta/2, 1/2) > 0$; pertenece al dominio, queda a distancia menor que δ del origen y tiene $|a(y) - a(0)| = 1$. Así el límite no es continuo relativamente en cero.

Ejercicio 22. Dos rutas, dos destinos

Calcula $a_n(1/(n+1))$ y $a_n(1/(n+1)^2)$ y explica por qué no contradicen el límite puntual.

Solución. Ambas rutas permanecen en $[0,1]$ y tienden a cero. En la primera, $(n+1)/(n+1) = 1$, así $a_n(1/(n+1)) = 1/2$ para todo índice. En la segunda, el producto de escala es $1/(n+1)$ y $a_n(1/(n+1)^2) = [1/(n+1)]/[1+1/(n+1)] = 1/(n+2) \to 0$. Sus destinos de salida son, por tanto, distintos. El límite puntual fija x antes de variar n; ninguna de estas rutas es una columna fija. Sus resultados muestran cómo la elección simultánea de entrada e índice puede retener comportamientos que el contrato puntual no controla.

Retorno visual. Véase C26-F05, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 23. Una escala intermedia

Para $w_n = 1/\sqrt{n+1}$ calcula el destino de $a_n(w_n)$ y justifica las raíces y la convergencia.

Solución. Como $n+1 \geq 1$, existe su raíz positiva y satisface $\sqrt{n+1} \geq 1$, así $w_n = 1/\sqrt{n+1} \in (0,1]$. Para cualquier $\varepsilon > 0$, desde $n+1 > 1/\varepsilon^2$ se tiene $w_n < \varepsilon$, por lo que la ruta tiende a cero. Usando $n+1 = (\sqrt{n+1})^2$, el producto $(n+1)w_n$ es $\sqrt{n+1}$. Entonces $a_n(w_n) = \sqrt{n+1}/(1+\sqrt{n+1})$ y su error respecto de uno es $1/(1+\sqrt{n+1}) \leq w_n \to 0$. El destino de esta escala intermedia es uno.

Ejercicio 24. Límites iterados

Calcula las dos operaciones iteradas en $n \to \infty$ y $x \to 0^+$ para a_n.

Solución. Fijado n, la fila es continua en cero y su valor allí es cero. Por tanto $\lim_{x\to 0^+} a_n(x) = 0$, y el límite en n de esa sucesión constante es cero. En el orden contrario, para cada entrada positiva fija ya se probó $\lim_{n\to\infty} a_n(x) = 1$. La función resultante sobre $(0,1]$ es constante uno, así su límite por $x \to 0^+$ es uno. Las dos operaciones iteradas existen y dan $\lim_n \lim_{x\to 0^+} a_n(x) = 0$ y $\lim_{x\to 0^+} \lim_n a_n(x) = 1$. Su diferencia muestra que el orden de operaciones no puede intercambiarse con la sola convergencia puntual.

Ejercicio 25. Reparar un prefijo fuera del dominio

Para $c > 0$ construye una ruta en $[0,1]$ que coincida eventualmente con $c/(n+1)$ y calcula las salidas de a_n.

Solución. Para $c > 0$, definimos $x_n = \min(1, c/(n+1))$. Cada entrada pertenece a $(0,1]$. Elegimos un natural $N > c$; para $n \geq N$, se tiene $c/(n+1) < 1$ y la ruta coincide con la fórmula requerida. Esa cola tiende a cero, así toda la ruta también. En ella $(n+1)x_n = c$ y $a_n(x_n) = c/(1+c)$ exactamente. Las salidas iniciales pueden ser distintas, pero su prefijo finito no cambia el límite $c/(1+c)$. La reparación permite evaluar todas las etapas aunque $c > 1$.

26.6. Picos que ninguna entrada fija retiene

Una anomalía puede moverse de manera que ninguna entrada fija la retenga. Para $k = n+3$, definimos en $[0,1]$ $t_n(x) = \max\{0, 1-|kx-2|\}$. El máximo se expresa por $(u+v+|u-v|)/2$, de modo que C14 prueba continuidad de cada fila. La región positiva es $(1/k, 3/k)$, el centro $2/k$ tiene altura1 y los extremos del soporte tienen valor0. Como $k \geq 3$, todo el soporte está dentro del segmento, también en la primera etapa.

Captura fija y seguimiento del pico. En cero, $t_n(0) = 0$. Para un $x > 0$ fijo, elegimos N natural con $N+3 > 3/x$. Si $n \geq N$, entonces $kx > 3$ y $t_n(x) = 0$. La columna queda exactamente en cero desde ese corte, no sólo aproximadamente. Así $t_n \to 0$ puntualmente. La ruta $z_n = 2/(n+3)$ converge a cero y satisface $t_n(z_n) = 1$ en todo índice. El límite cero es continuo; la diagonal vale1. De nuevo se ve el gasto de mantener fija la entrada. Hay, además, una cota común $0 \leq t_n \leq 1$: ni esa cota ni la continuidad fila por fila solucionan el cambio de entrada.

El área y la altura son gastos distintos. Las dos ramas no nulas son

$$t_n(x) = kx - 1 \text{ en } [1/k, 2/k], \qquad t_n(x) = 3 - kx \text{ en } [2/k, 3/k].$$

C23 da integrabilidad por continuidad, restricción y aditividad. Para verificar el valor sin inferirlo de una figura, una función afín en un intervalo de anchura d, con valores extremos A, B, tiene integral $d(A+B)/2$: una primitiva cuadrática de C18 y C24 lo demuestra. Cada rama tiene anchura $1/k$ y extremos0,1 o1,0. Por tanto $\int_0^1 t_n(x)\,dx = \frac{1}{k} \longrightarrow 0$. El límite puntual también tiene integral0.

Ahora normalizamos la altura: $b_n(x) = k\,t_n(x)$. Para cada entrada positiva, desde el mismo corte el valor es exactamente cero; en cero también. Por ello $b_n \to 0$ puntualmente. Cada fila sigue siendo continua e integrable. Sin embargo, $b_n(z_n) = k, \qquad \int_0^1 b_n(x)\,dx = 1$. El límite de las integrales vale1 y la integral del límite vale0. Los dos valores existen y

difieren. La amplitud compensa exactamente la anchura del soporte. Este ejemplo muestra un intercambio fallido, no un teorema general sobre cuándo intercambiar.

La altura común de t_n deja que sus integrales disminuyan con la anchura; al multiplicar por k, la familia b_n compensa exactamente esa disminución. En ambas, cada columna termina en cero y queda acotada por su prefijo finito, pero las cotas de las filas de b_n crecen. La ruta explícita $z_n = 2/(n+3)$ sigue las alturas máximas en todo índice y distingue esos controles que una tabla finita podría confundir.

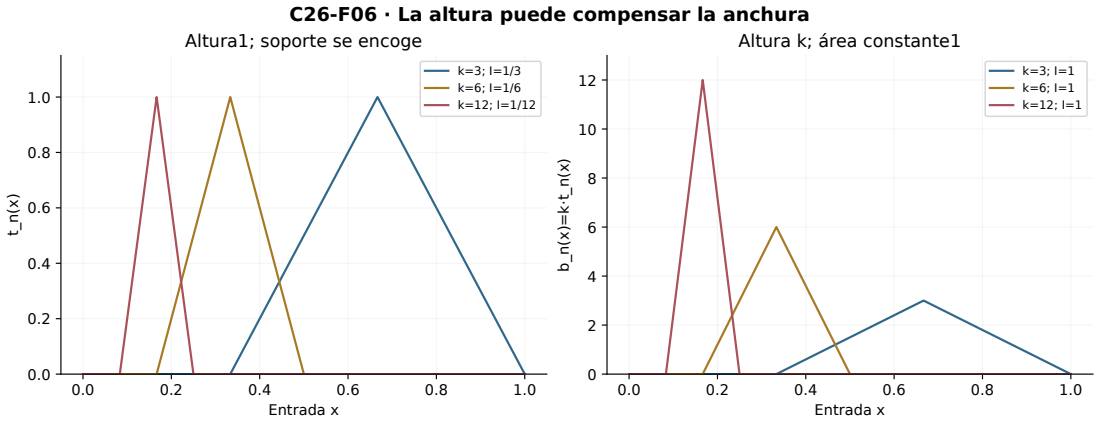


Figura 26.6. Tiendas con k=n+3, soporte[1/k,3/k] dentro[0,1]. Altura1 y área1/k a la izquierda; altura k y área1 a la derecha. Ambas familias convergen puntualmente a cero; seguir2/k mantiene el pico. No se infiere el área desde el dibujo: se calculó por ramas.

Ejercicios de la sección 26.6.

Ejercicio 26. Tiendas continuas

Para $k = n+3$ demuestra continuidad, soporte y convergencia puntual a cero de $t_n(x) = \max(0, 1-|kx-2|)$ en $[0,1]$.

Solución. Con $k = n+3 \geq 3$, la composición afín $kx-2$, su valor absoluto y el máximo con cero son continuos, por las reglas de C14. Por tanto t_n es continua en $[0,1]$. Su altura es positiva si y sólo si $|kx-2| < 1$, equivalente a $1/k < x < 3/k$; en los dos extremos vale cero y fuera también. El soporte cerrado es $[1/k, 3/k] \subseteq [0,1]$. En cero toda columna vale cero. Para $x > 0$ fijo, elegimos N con $N+3 > 3/x$; desde ese corte $(n+3)x > 3$ y todos los términos son cero. Así $t_n \to 0$ puntualmente, por coincidencia eventual exacta en cada entrada.

Ejercicio 27. Seguir el centro

Encuentra una ruta convergente al origen que produzca salidas constantes1 en las tiendas. ¿Bastan límite continuo y cota común para evitarlo?

Solución. Tomamos $z_n = 2/(n+3)$, que pertenece a $[0,1]$ y tiende al origen. En esa entrada, $(n+3)z_n = 2$, así $t_n(z_n) = \max(0, 1-0) = 1$ para toda etapa. El límite puntual es la función cero y es continuo; todas las filas son continuas y comparten la cota $0 \leq t_n \leq 1$ en el dominio compacto. Aun así, la ruta central mantiene salidas uno, distintas de la salida cero del límite en su destino de entrada. Las condiciones mencionadas no aportan un control común de cómo varían las filas con la entrada.

Ejercicio 28. Certificar el área

Calcula $\int_0^1 t_n$ por ramas, acreditando existencia antes del valor.

Solución. La continuidad de t_n en el cerrado prueba primero su integrabilidad por C23. Fuera del soporte su integral es cero. En $[1/k, 2/k]$ vale $kx - 1$, y en $[2/k, 3/k]$ vale $3 - kx$. Ambas ramas tienen anchura $1/k$ y alturas extremas cero y uno en orden inverso. La fórmula afín por sumas de C22 da integral $1/(2k)$ en cada rama. Restricción y aditividad producen $\int_0^1 t_n = 1/k = 1/(n+3)$. Estos valores tienden a cero, coincidiendo en este ejemplo con la integral del límite puntual nulo. La igualdad se ha calculado para la familia dada, sin asumir un teorema general de intercambio.

Ejercicio 29. Altura que compensa anchura

Para $b_n = (n+3)t_n$ demuestra convergencia puntual y compara límite de integrales e integral del límite.

Solución. Definimos $b_n = (n+3)t_n = kt_n$. Cada columna de t_n es exactamente cero en una cola; multiplicar su altura por k conserva ese hecho, así $b_n \to 0$ puntualmente. Cada fila es continua e integrable. Por linealidad y la cuenta anterior, $\int_0^1 b_n = k\int_0^1 t_n = k/k = 1$. La sucesión de integrales tiene límite uno, mientras la función límite cero es integrable con valor cero. Existen las dos operaciones comparadas y dan valores distintos. Aquí el aumento de altura compensa la contracción del soporte.

Retorno visual. Véase C26-F06, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 30. Pendientes sin constante común

Demuestra que las tiendas t_n no satisfacen una cota Lipschitz con la misma constante para todas las filas.

Solución. Para cualquier índice, ponemos $u_n = 1/k$ y $v_n = 2/k$, con $k = n+3$. Ambas entradas pertenecen al dominio y sus alturas son $t_n(u_n) = 0$ y $t_n(v_n) = 1$. Si existiera una constante Lipschitz común $L \geq 0$, tendría que cumplirse $1 = |t_n(v_n) - t_n(u_n)| \leq L|v_n - u_n| = L/k$, luego $k \leq L$ para todo índice. Arquimedianidad proporciona n con $n+3 > L$, contradicción. Cada fila sí tiene constante k, pues el absoluto y el máximo con cero no aumentan diferencias y la función afín tiene pendiente k. Lo que falta es una barrera independiente de la etapa.

26.7. Tres intercambios que pueden fallar

Los ejemplos siguientes separan dos fallos posibles: que una operación deje de existir en el límite o que siga existiendo y produzca un valor distinto del límite de los resultados. El caso de Dirichlet de C25 ofrece el primero; las tiendas de altura creciente ya ofrecieron el segundo para las integrales.

La integrabilidad puede desaparecer. Sea $E_m \subseteq [0,1]$ el conjunto de racionales irreducibles con denominador como máximo m, y $d_n = \mathbf{1}_{E_{n+1}}$. C25 demostró finitud de E_m e integral0 de su indicadora. Si x es irracional, $d_n(x) = 0$ siempre. Si $x = p/q$ irreducible, $d_n(x) = 1$ desde $n+1 \geq q$. Por ello d_n converge puntualmente a la indicadora de los racionales, la función de Dirichlet.

Cada fila es integrable de valor cero y toda la familia queda entre cero y uno. Sin embargo, C25 demuestra que el límite de Dirichlet no tiene integral de Riemann. Aquí no hay dos valores integrales que comparar. En la familia b_n sí existían tanto la integral del límite como el límite de las integrales y diferían. Mantener esta distinción permite formular exactamente qué refuta cada ejemplo.

Las derivadas pueden tener otro límite. Para $k = n+1$, sea en $\mathbb{R}$ $h_n(x) = \frac{x}{1+kx^2}$. El denominador es positivo; las reglas de C18 dan $h_n'(x) = \frac{1-kx^2}{(1+kx^2)^2}$. En cero, $h_n(0) = 0$. Para $x \neq 0$, $|h_n(x)| \leq \frac{1}{k|x|} \longrightarrow 0$. Así el límite h es la función cero, derivable con $h' = 0$. Pero $h_n'(0) = 1$ para todo índice. Si $x \neq 0$, ponemos $s = kx^2 > 0$ y obtenemos $|h_n'(x)| \leq \frac{1+s}{(1+s)^2} =$

$\frac{1}{1+s} \longrightarrow 0$. Las derivadas convergen puntualmente a $g = \mathbf{1}_{\{0\}}$, que difiere de h' en cero. En este ejemplo existen tanto la derivada del límite como el límite puntual de las derivadas; no son iguales. No se está afirmando que g sea una derivada. La discontinuidad de g no es, por sí sola, una prueba de que ninguna función pueda tenerla como derivada; ese sería otro problema.

Incluso el error de h_n admite una cota para todas las entradas:

$$1 + kx^2 \geq 2\sqrt{k}|x| \quad \Longrightarrow \quad |h_n(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$

La primera desigualdad procede del cuadrado $(\sqrt{k}|x|-1)^2 \geq 0$; en cero la segunda se verifica directamente. En $x = 1/\sqrt{k}$ se alcanza la cota. Así una estimación global de los valores tampoco basta por sí sola para intercambiar derivadas. No formulamos aquí la teoría que sí permite hacerlo; C28 la desarrollará con sus hipótesis propias.

Continuidad: dónde se rompe la prueba tentadora. Para tratar de probar continuidad de f, la desigualdad natural es

$$|f(y) - f(x)| \leq |f(y) - f_n(y)| + |f_n(y) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|.$$

El control puntual en x elige un n grande para el último término; la continuidad de esa fila controla el término central cerca de x. El primer término requiere ahora controlar entradas y variables con esa misma fila. La convergencia puntual no proporciona ese control en toda la ventana. Ese es el paso inválido, no la desigualdad triangular. Los ejemplos de potencias y capa racional lo hacen visible.

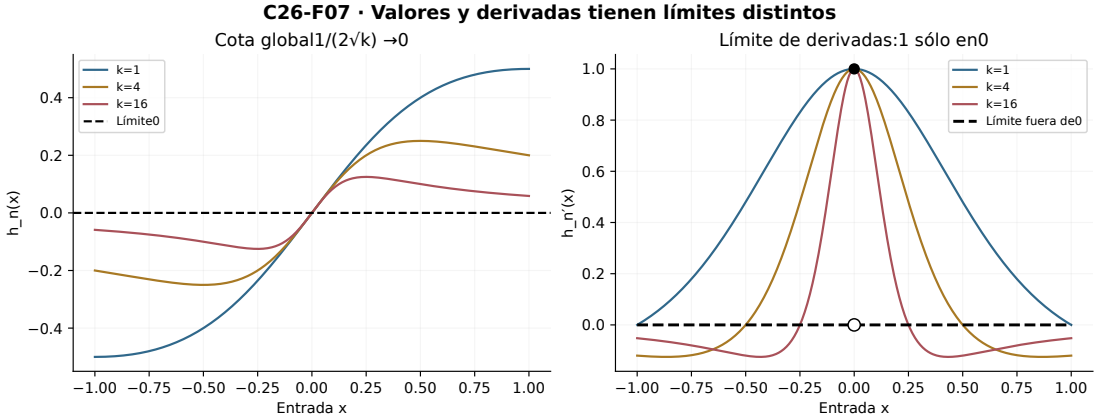


Figura 26.7. h_n=x/(1+kx²) y h_n′=(1−kx²)/(1+kx²)², k=n+1. Los valores tienden a cero con máximo1/(2√k); las derivadas tienden a0 fuera de0 pero conservan1 en0. El punto excepcional del límite de derivadas está marcado; la derivada del límite vale0.

Ejercicios de la sección 26.7.

Ejercicio 31. Límite sin integral propia

Con $d_n = \mathbf{1}_{E_{n+1}}$ de C25, prueba límite puntual y explica qué comparación integral está mal tipada.

Solución. El conjunto E_{n+1} es finito y su indicadora es una modificación finita de la tasa cero. Por tanto cada d_n es integrable con valor cero. En los irracionales todas sus columnas son cero; en un racional reducido de denominador q la columna vale uno desde $n+1 \geq q$. El límite puntual es Dirichlet, que C25 probó no integrable. Así $\lim_n \int_0^1 d_n = 0$ existe, pero $\int_0^1 \lim_n d_n$ no es un valor real definido como integral propia de Riemann. No hay dos valores integrales que comparar en ese caso. La cota común entre cero y uno no asegura la integrabilidad del límite.

Ejercicio 32. Calcular las derivadas

Para $h_n(x) = x/[1 + (n+1)x^2]$ en $\mathbb{R}$, calcula derivadas y demuestra convergencia puntual de valores y derivadas.

Solución. Escribimos $k = n+1 > 0$. El denominador $1+kx^2$ es positivo en toda la recta, y la regla del cociente da $h_n'(x) = [(1+kx^2) - x(2kx)]/(1+kx^2)^2 = (1-kx^2)/(1+kx^2)^2$. En cero, $h_n(0) = 0$ y $h_n'(0) = 1$. Si $x \neq 0$, $|h_n(x)| \leq 1/(k|x|) \to 0$. Además $|1-kx^2| \leq 1+kx^2$, así $|h_n'(x)| \leq 1/(1+kx^2) \to 0$. Cada cota ofrece un corte arquimediano para la entrada fija. Por tanto $h_n \to h = 0$ y $h_n' \to g = \mathbf{1}_{\{0\}}$ puntualmente. La derivada de h es cero y difiere de g en el origen, donde ambas operaciones existen.

Ejercicio 33. Un máximo exacto de error

Prueba la cota global $|h_n(x)| \leq 1/[2\sqrt{n+1}]$ y que se alcanza.

Solución. Sea $k = n+1$ y $r = \sqrt{k} > 0$. El cuadrado $(r|x|-1)^2 \geq 0$ equivale a $1+kx^2 \geq 2r|x|$. Para $x \neq 0$, dividir por los denominadores positivos da $|h_n(x)| = |x|/(1+kx^2) \leq 1/(2r)$. En cero el valor es cero y cumple la misma cota. En $x = \pm 1/r$, el denominador es dos y la magnitud $1/(2r)$, así la cota se alcanza y es el máximo exacto. Tiende a cero al aumentar el índice y controla todos los valores simultáneamente. Sin embargo $h_n'(0) = 1$ para toda etapa, por lo que esa cota global de valores no basta para intercambiar derivadas.

Retorno visual. Véase C26-F07, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 34. Auditar la prueba triangular

En el intento de deducir continuidad del límite puntual de funciones continuas, identifica el paso no autorizado.

Solución. La triangular $|f(y) - f(x)| \leq |f(y) - f_n(y)| + |f_n(y) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|$ es válida. El error puntual en x permite escoger un índice para el último término. La continuidad de esa fila permite elegir un radio que controle el término central para entradas cercanas. El primer término requiere ahora controlar $|f(y) - f_n(y)|$ para todas esas entradas con el mismo índice ya escogido. La convergencia puntual sólo da cortes que pueden depender de y y no proporciona ese control de ventana. Las potencias en $[0,1]$, con filas continuas y límite discontinuo en uno, prueban que la conclusión pretendida puede ser falsa.

Ejercicio 35. Clasificar tres fracasos

Compara potencias, tiendas normalizadas y d_n según qué propiedad falla y qué objetos existen.

Solución. En las potencias sobre $[0,1]$ todas las filas son continuas y el límite puntual existe, pero es discontinuo en uno. En las tiendas normalizadas b_n existen las integrales de todas las filas y del límite nulo; el límite de las primeras es uno y la segunda vale cero. En $d_n = \mathbf{1}_{E_{n+1}}$, las filas tienen integral cero y límite puntual Dirichlet, pero éste carece de integral propia. Los dos ejemplos integrales fallan de formas distintas: uno da valores desiguales y el otro deja inexistente una operación. Cada afirmación debe conservar esa diferencia de alcance.

26.8. Certificados que recuperan control

La convergencia en cada entrada ha permitido operar con columnas, pero no ha dado control automático de entradas móviles. Buscaremos una hipótesis que relacione los valores de cada fila en dos entradas mediante una misma constante. Esa relación podrá pasar al límite y cerrar directamente el error de una diagonal.

Una estimación común de proximidad pasa al límite. Supongamos que $f_n \to f$ puntualmente en X y que existe $L \geq 0$ con

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq L|x-y| \quad \text{para todo } n \text{ y todo } x, y \in X.$$

Fijados dos puntos, la regla de diferencias y la continuidad del valor absoluto permiten pasar al límite en el miembro izquierdo. La preservación del orden de §26.3 da $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$. La constante es la misma para todas las filas y pares antes de tomar límites. Esta desigualdad prueba continuidad de f: un radio $\delta = \varepsilon/(L + 1)$ hace el error menor que ε. Si $L = 0$, la estimación dice que todas las filas y el límite son constantes en cualquier dominio no vacío; no se divide por L.

Además, para cualquier ruta dada $x_n \in X$ con $x_n \to x \in X$, $|f_n(x_n) - f(x)| \leq L|x_n - x| + |f_n(x) - f(x)| \longrightarrow 0$. Para una tolerancia, basta reunir el corte de la ruta para $\varepsilon/[2(L + 1)]$ y el corte puntual en x para $\varepsilon/2$. Aquí una hipótesis común ha cerrado el hueco de la diagonal. Las pendientes de las tiendas t_n crecen como $n + 3$, por lo que ese ejemplo no tiene una constante L válida para todas sus filas.

Monotonía por columnas y barreras dependientes de la entrada. Si para cada x la columna $f_n(x)$ es creciente y tiene una cota superior real M_x, definimos $f(x) = \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$. La imagen es no vacía y acotada antes de aplicar completitud de C03. Para $\varepsilon > 0$, existe j con $f_j(x) > f(x) - \varepsilon$: de no existir, $f(x) - \varepsilon$ sería una cota superior menor que el supremo. Para $n \geq j$, la monotonía da $f(x) - \varepsilon < f_j(x) \leq f_n(x) \leq f(x)$. Esto prueba convergencia puntual. Cada fibra tiene un único supremo, por lo que el grafo define f sin seleccionar arbitrariamente cotas M_x. No se requiere una misma cota para todas las entradas. La versión decreciente usa el ínfimo y la desigualdad $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$.

Para $u_n(x) = \min(n, x)$ en $[0, \infty)$, las columnas son crecientes y acotadas por x; el límite es x, no acotado en todo el dominio. Si, además, todas las filas tienen una barrera común, el límite la hereda. Que una sucesión sea monótona por columnas no significa que cada fila sea monótona respecto de su variable; son órdenes sobre argumentos distintos.

Qué debe entregar una prueba. En una prueba puntual, la entrada y la tolerancia se fijan antes de construir el corte, y la estimación debe valer en toda la cola. Para refutarla necesitamos mantener una entrada y una tolerancia con infracciones arbitrariamente tardías. Mover la entrada puede refutar un corte simultáneo, como hacen las rutas explícitas anteriores, pero no el contrato puntual. Antes de comparar límites con integrales o derivadas comprobamos además que existan las operaciones de ambos lados.

En un conjunto finito, el máximo de umbrales resuelve todas las entradas para una tolerancia. En un conjunto infinito, ese máximo puede no existir. Compactitud del dominio, continuidad de las filas, continuidad del límite y una cota común de valores, considerados por separado, no borran las dependencias que los ejemplos han exhibido. El obstáculo en los ejemplos es la ausencia de un solo corte que sirva para todas las entradas. Exigir ese corte cambiará el contrato de convergencia y hará posible medir el error de la función completa. La prueba puntual, por sí sola, deja esa obligación abierta.

Ejercicios de la sección 26.8.

Ejercicio 36. Transportar una cota común de proximidad

Si $f_n \to f$ puntualmente y todas las filas son Lipschitz con la misma constante $L \geq 0$, prueba que f lo es y es continua.

Solución. Fijamos $x, y \in X$. La convergencia de sus dos columnas y el álgebra numérica dan $f_n(x) - f_n(y) \to f(x) - f(y)$. La continuidad del absoluto da convergencia de sus magnitudes. Como todas están acotadas por el mismo $L|x - y|$, la preservación del orden produce $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$. Esto vale para todo par, así f es Lipschitz con la misma constante. Para $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta = \varepsilon/(L + 1) > 0$. Si $L > 0$ y la distancia es menor que δ, el error es menor que $L\varepsilon/(L + 1) < \varepsilon$; si $L = 0$, es cero. Se obtiene continuidad relativa, incluso uniforme en el dominio.

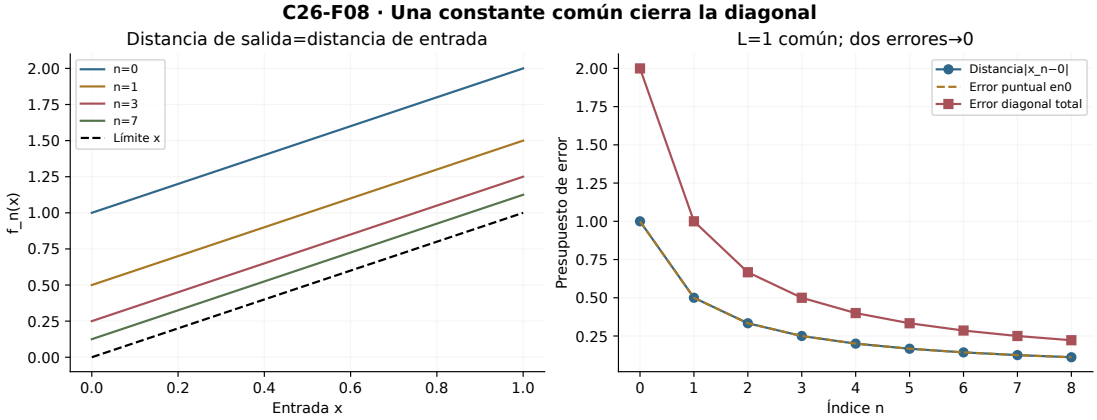


Figura 26.8. Familia f_n(x)=x+1/(n+1), con constante Lipschitz común L=1 y límite x. En la ruta x_n=1/(n+1), el error hacia f(0) es2/(n+1), suma de distancia de entrada y error puntual. La estimación común, no una muestra finita, justifica el control para cualquier ruta convergente dada.

Ejercicio 37. Diagonal con presupuesto común

Bajo la hipótesis del ejercicio anterior, si una ruta dada $x_n \to x \in X$ permanece en X, prueba $f_n(x_n) \to f(x)$.

Solución. La ruta está dada con $x_n \in X$ y $x_n \to x \in X$. La triangular y la cota común dan $|f_n(x_n) - f(x)| \le |f_n(x_n) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| \le L|x_n - x| + |f_n(x) - f(x)|$. Dada $\varepsilon > 0$, tomamos el corte de la ruta para error menor que $\varepsilon/[2(L+1)]$ y el corte puntual en x para error menor que $\varepsilon/2$. Su máximo garantiza que la expresión anterior es menor que ε. Para $L = 0$ el primer término es cero y el mismo argumento sirve. La constante común controla el cambio de entrada que la convergencia puntual sola dejaba sin resolver.

Ejercicio 38. Monotonía sin barrera universal

Prueba existencia de límite puntual para columnas crecientes acotadas por una barrera que puede depender de la entrada.

Solución. Para cada entrada fija x, la imagen de su columna es no vacía y tiene una cota superior real por hipótesis. Completitud proporciona el supremo único s_x. Para $\varepsilon > 0$, algún índice j satisface $f_j(x) > s_x - \varepsilon$; de otro modo ese número menor sería cota superior. La monotonía por índice mantiene, para $n \ge j$, $s_x - \varepsilon < f_j(x) \le f_n(x) \le s_x$. Por tanto $|f_n(x) - s_x| < \varepsilon$ en toda la cola. Los supremos únicos forman el grafo de la función límite sin seleccionar una cota arbitraria por entrada. No se requiere una barrera común sobre todo X, ni se concluye que el límite esté globalmente acotado.

Ejercicio 39. Monotonía del índice y de la variable

Construye una familia creciente por columnas cuyas filas no sean crecientes ni decrecientes en su variable.

Solución. En $X = [-1, 1]$, definimos $f_n(x) = x^2 - 1/(n+1)$. Para cada entrada, $f_{n+1}(x) - f_n(x) = 1/[(n+1)(n+2)] > 0$, así las columnas son estrictamente crecientes y convergen a x^2. Sin embargo, en una fila fija se tiene $f_n(-1) = f_n(1) = 1 - 1/(n+1)$ y $f_n(0) = -1/(n+1)$, estrictamente menor. El orden $-1 < 0$ refuta que esa fila sea no decreciente, y $0 < 1$ refuta que sea no creciente. La monotonía por columnas compara etapas distintas; la monotonía respecto de la variable compara entradas distintas de una misma etapa.

Ejercicio 40. Un certificado y su límite de alcance

Para $f_n(x) = x + 1/(n+1)$ en $\mathbb{R}$, verifica límite puntual, cota Lipschitz común y toda diagonal $x_n \to x$. Compáralo con t_n.

Solución. Para cualquier entrada x, $|f_n(x) - x| = 1/(n+1) \to 0$, así el límite puntual es la identidad. Para todo par u, v, $|f_n(u) - f_n(v)| = |u - v|$, dando constante Lipschitz común uno. Si $x_n \to x$ es una ruta dada, la triangular ofrece $|f_n(x_n) - x| \leq |x_n - x| + 1/(n+1) \to 0$, reuniendo sus dos cortes. En las tiendas, las filas y el límite también son continuos, pero sus constantes Lipschitz crecen como $n + 3$. La ruta central mantiene salida uno, así esas condiciones de continuidad no reemplazan la cota común que hace funcionar la prueba positiva.

Retorno visual. Véase C26-F08, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Capítulo 27

Convergencia uniforme: controlar toda la función a la vez

La familia $x/(n+1)$ permite esperar tanto como haga falta en una entrada fija y, sin embargo, conserva errores grandes en otras entradas de cada etapa. Para controlar una función completa exigiremos un solo corte para todo el dominio. El supremo medirá ese error cuando esté acotado, y el criterio de Cauchy permitirá construir un destino sin conocer su fórmula. Utilizaremos completitud de C03 y C10 y las herramientas de C14 para rutas dadas; los teoremas de intercambio se demostrarán después, en C28.

27.1. Una cola que sirve para todas las entradas

C26 mantuvo fija una entrada y construyó para ella una cola. Ahora recibimos una tolerancia y debemos entregar una sola cola que funcione en todas las entradas del dominio. Sea $X \subseteq \mathbb{R}$, y sean $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ para $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, ...\}$. Decimos que f_n converge **uniformemente** a f en X si

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N \; \forall x \in X : \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Escribimos $f_n \to f$ uniformemente en X. La elección de N precede a la entrada que habrá que controlar. El dominio es parte del contrato; una misma fórmula puede cumplirlo en un dominio y fallarlo en otro.

Ver una banda y formular lo que significa. Para una tolerancia fija, la banda abierta $\{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : f(x) - \varepsilon < y < f(x) + \varepsilon\}$ contiene las gráficas completas de todas las filas posteriores a N. La anchura vertical es 2ε. No se afirma que la banda sea horizontal ni que el límite sea continuo: está definida alrededor de los valores de una función dada. El requisito es que ninguna entrada de ninguna fila de la cola salga de ella.

Por ejemplo, $f_n(x) = x + 1/(n+1)$ converge uniformemente a $f(x) = x$ en toda $\mathbb{R}$. Dada $\varepsilon > 0$, elegimos un natural $N > 1/\varepsilon$. Para todo $n \geq N$ y todo x, $|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{N+1} < \varepsilon$. El corte no depende de x. Aunque las funciones no están acotadas en la recta, su **diferencia** sí tiene una barrera común. No se debe confundir acotación de los valores con acotación del error.

Comparar y negar los dos contratos. La convergencia uniforme implica la puntual: el corte que funciona en todas las entradas sirve en la entrada que fijemos. La unicidad del límite puntual de C26 da también unicidad uniforme. Si X es vacío, el contrato es vacuo y todas las filas y el límite son la única función vacía; no es necesario formar un supremo de una imagen vacía.

La negación hacia una candidata fija es

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \; \forall N \in \mathbb{N} \; \exists n \geq N \; \exists x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_0.$$

Ahora la entrada infractora puede cambiar con el corte y el índice. Para $g_n(x) = x/(n+1)$ en $\mathbb{R}$, C26 probó límite puntual cero. Con $\varepsilon_0 = 1/2$, ante cualquier N tomamos $n = N$ y $x = N + 1$: el error es1. Por tanto la convergencia no es uniforme en la recta.

En esta refutación, la fórmula $n = N$, $x = N + 1$ proporciona los testigos ante cualquier corte propuesto. La negación del contrato sólo pide esas existencias. Si quisiéramos reunir infractores arbitrarios en una sucesión, tendríamos que justificar una regla de selección; aquí las rutas que usaremos están dadas explícitamente.

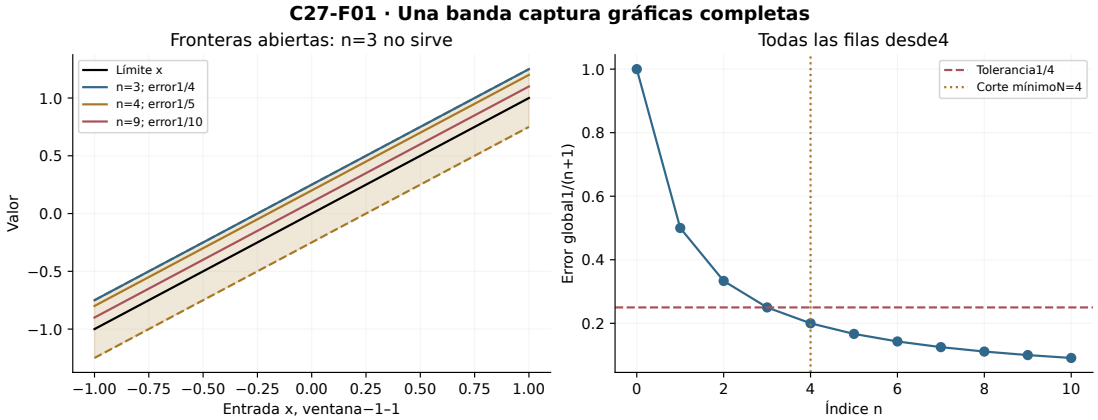


Figura 27.1. En la ventana dibujada−1≤x≤1, f_n=x+1/(n+1) y límite f=x. La banda de tolerancia1/4 tiene fronteras abiertas: n=3 cae en la frontera y no sirve; n=4 y n=9 quedan dentro. La prueba controla toda la recta y todas las filas desdeN=4.

Ejercicios de la sección 27.1.

Ejercicio 1. Banda sobre una función no acotada

Prueba uniformidad de $f_n(x) = x + 1/(n+1)$ hacia x en $\mathbb{R}$ y explica qué está acotado.

Solución. La diferencia entre $f_n(x) = x + 1/(n+1)$ y la candidata $f(x) = x$ es $1/(n+1)$ para todas las entradas de la recta. Dada $\varepsilon > 0$, elegimos un natural $N > 1/\varepsilon$. Para todo $n \geq N$ y todo $x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x) - f(x)| = 1/(n+1) \leq 1/(N+1) < \varepsilon$. El corte se eligió antes de examinar la entrada, así la convergencia es uniforme. Ninguna de esas funciones es acotada en la recta. Sus diferencias sí son funciones constantes acotadas, que es el control utilizado por el contrato.

Retorno visual. Véase C27-F01, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 2. Negación con testigo móvil

Refuta uniformidad hacia cero de $g_n(x) = x/(n+1)$ en $\mathbb{R}$, sin refutar su convergencia puntual.

Solución. Cada entrada fija tiene $|g_n(x)| = |x|/(n+1) \to 0$, con un corte $N > |x|/\varepsilon$, así hay convergencia puntual a cero. Para refutar uniformidad, fijamos $\varepsilon_0 = 1/2$. Ante cualquier corte N, elegimos $n = N$ y $x = N+1$. El error es entonces $|g_N(x)| = 1 \geq \varepsilon_0$. Se obtiene una infracción en cada cola con una entrada que puede depender del corte. Ésta es la negación uniforme y es compatible con el control de cada columna fija.

Ejercicio 3. Unicidad sin nueva selección

Demuestra que una familia tiene a lo sumo un límite uniforme en un dominio común, incluido el vacío.

Solución. Si f y g son límites uniformes, también son límites puntuales, porque cada corte simultáneo sirve para una entrada fijada. Para $x \in X$, si $d = |f(x) - g(x)| > 0$, los cortes de ambos contratos con error $d/3$ tienen un máximo N. En ese índice, $d \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - g(x)| < 2d/3$, contradicción. Así coinciden en cada entrada y son la misma función. Si X es vacío, hay una única función vacía y la conclusión vale directamente, sin elegir una entrada inexistente.

Ejercicio 4. Toda la cola, no una fila

En un dominio no vacío, toma filas constantes $f_n = (-1)^n$. Explica por qué las filas pares no certifican convergencia uniforme.

Solución. Las filas de índice par son la función constante uno, así esa subsucesión converge uniformemente a uno con error cero. Las de índice impar son la función constante menos uno. Si toda la familia convergiera uniformemente, sería puntualmente convergente en cualquier entrada del dominio no vacío. Sus dos subsucesiones numéricas constantes deberían compartir el mismo límite, pero sus valores son distintos. Por tanto no hay límite uniforme de la familia completa. Un número infinito de filas favorables no asegura que todas las etapas posteriores al corte sean favorables.

Ejercicio 5. Cambiar el prefijo

Prueba que modificar un número finito de filas no altera una convergencia uniforme dada. **Solución.** Sean $f_n \to f$ uniformemente y $g_n = f_n$ para todo $n \geq M$. Ante $\varepsilon > 0$, el contrato original proporciona un corte N independiente de la entrada. Tomamos $K = \max(N, M)$. Para $n \geq K$ y toda entrada, $|g_n(x)-f(x)| = |f_n(x)-f(x)| < \varepsilon$. Así la familia modificada tiene el mismo límite uniforme. Las filas del prefijo pueden cambiar de modo arbitrario, incluso perder acotación, siempre que sigan siendo funciones sobre el dominio común declarado.

27.2. La envolvente de error y sus fronteras

Para una fila n y candidata f, definimos el conjunto de errores $A_n = \{|f_n(x)-f(x)| : x \in X\}$. Si X es no vacío, este conjunto es no vacío y está formado por números no negativos. Antes de escribir un supremo real debemos comprobar que tiene una cota superior. Cuando la tiene, C03 permite definir $E_n = \sup A_n$. Esta **envolvente de error** es una barrera, aunque ninguna entrada la alcance.

El criterio de las envolventes, con su dominio exacto. Proposición. Para $X \neq \emptyset$, la convergencia uniforme equivale a que desde algún índice todos los A_n sean acotados y sus supremos reales E_n tiendan a cero. Se permite que unas pocas filas iniciales tengan error no acotado. Si hay convergencia uniforme, aplicamos primero el contrato con tolerancia1. En la cola correspondiente todos los errores son menores que1, así existe cada E_n. Para una precisión $\varepsilon > 0$, usamos ahora la tolerancia $\varepsilon/2$ y reunimos ese corte con el primero. Entonces, en toda fila de la nueva cola, $0 \leq E_n \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$. La primera desigualdad no requiere un máximo; la segunda se obtiene porque $\varepsilon/2$ es cota superior de **todos** los errores de la fila.

Recíprocamente, si los E_n reales de una cola convergen a cero, un corte con $E_n < \varepsilon$ da, para toda entrada, $|f_n(x) - f(x)| \leq E_n < \varepsilon$. Eso es el contrato uniforme. La prueba incluye todos los índices posteriores, no sólo una subsucesión de filas favorables. Podemos adoptar para el vacío la convención $E_n = 0$ y conservar la equivalencia. Es una convención para el error de la función vacía; no se dice que el conjunto vacío tenga supremo real cero en el orden usual.

Estricto en cada entrada no es estricto en el supremo. En $X = (0, 1)$, el error $e(x) = x$ es menor que uno en toda entrada, pero su supremo es uno. En efecto, uno es cota superior y cualquier $c < 1$ deja dentro del intervalo un punto mayor, por ejemplo $(1 + \max(c, 0))/2$. El supremo no tiene por qué conservar una desigualdad estricta válida en cada entrada. Por eso la prueba anterior pide error menor que $\varepsilon/2$: al tomar el supremo queda una cota no estricta que todavía es menor que la tolerancia final ε.

Tampoco se puede exigir que todos los errores iniciales sean acotados. En $X = (0, 1]$, definamos $f_0(x) = 1/x$ y $f_n(x) = 0$ para $n \geq 1$, con candidata cero. La convergencia es uniforme: sirve $N = 1$ para cualquier tolerancia. Pero la imagen de errores de la primera fila no tiene cota real. Suprimir el prefijo no altera una propiedad de cola.

Regiones de infracción. Para $\eta > 0$, sea $B_n(\eta) = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \eta\}$. La convergencia uniforme dice que para cada η esos conjuntos son vacíos en toda una cola. La puntual dice que cada entrada deja de pertenecer a ellos eventualmente, con un corte que puede depender de ella. Todos los puntos pueden salir eventualmente sin que llegue una

etapa en que el conjunto entero quede vacío. Las tiendas de C26 realizan exactamente esa posibilidad.

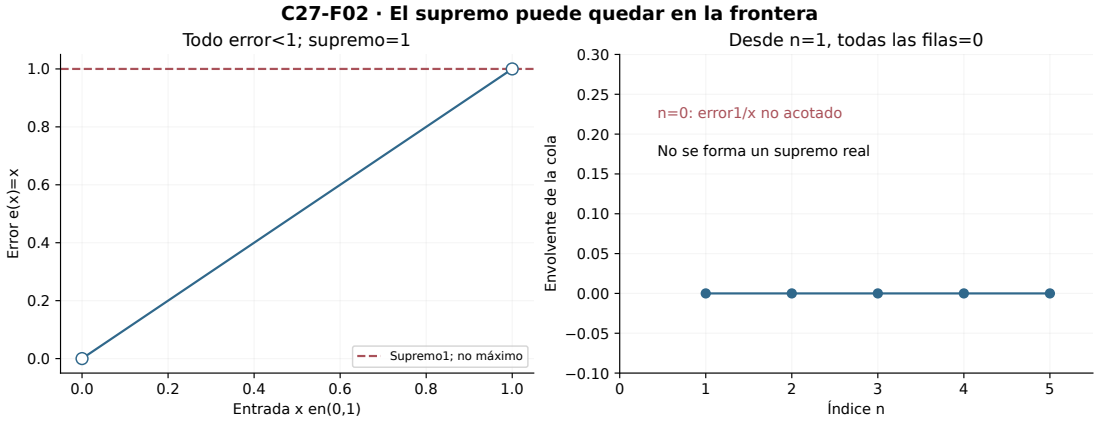


Figura 27.2. En(0,1), e(x)=x es menor que1 en toda entrada pero tiene supremo1 no alcanzado. A la derecha, la familia f0=1/x y fn=0 desde n=1 converge uniformemente aunque la primera fila no tenga envolvente real. No se representa un supremo infinito como número.

Ejercicios de la sección 27.2.

Ejercicio 6. Supremo y frontera abierta

En $X = (0, 1)$ demuestra que todos los errores $e(x) = x$ son menores que1 pero su supremo es1.

Solución. En $(0, 1)$, todas las alturas $e(x) = x$ satisfacen $e(x) < 1$, así uno es cota superior. Si $c < 1$, ponemos $y = (1 + \max(c, 0))/2$. Esta entrada pertenece a $(0, 1)$ y cumple $y > c$, de modo que c no es cota superior. Por tanto $\sup e(X) = 1$. Como uno no pertenece al dominio, ningún valor alcanza ese supremo. La conclusión muestra que desigualdades estrictas en todas las entradas pueden producir sólo una desigualdad no estricta al tomar supremo.

Retorno visual. Véase C27-F02, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 7. Una fila sin envolvente real

En $(0, 1]$, define $f_0(x) = 1/x$ y $f_n = 0$ para $n \geq 1$. Analiza uniformidad y existencia de envolventes.

Solución. La candidata es cero. Para cualquier tolerancia sirve $N = 1$, pues todas las filas posteriores son idénticamente cero en $(0, 1]$. Hay por tanto convergencia uniforme. En la primera fila, dado $B \geq 0$, la entrada $x = 1/(B + 1)$ pertenece al dominio y tiene error $B+1 > B$. Esa imagen de errores es no acotada y no tiene supremo real. Desde el índice uno las envolventes existen y valen cero. La caracterización de uniformidad utiliza envolventes reales de una cola y no exige que el prefijo también las posea.

Ejercicio 8. Acreditar el criterio

Demuestra que si las envolventes reales de una cola satisfacen $E_n \to 0$, hay convergencia uniforme.

Solución. Supongamos que desde un índice M existen envolventes reales E_n y que $E_n \to 0$. Para $\varepsilon > 0$, el límite numérico da un corte $N \geq M$ con $E_n < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. Como el supremo acota cada error, para toda entrada $|f_n(x) - f(x)| \leq E_n < \varepsilon$. El mismo corte controla todas las entradas y toda la cola, probando uniformidad. En el dominio vacío se usa la convención $E_n = 0$ y el contrato se satisface vacuamente.

Ejercicio 9. El margen al pasar al supremo

Prueba la dirección uniforme⇒envolventes de cola tendentes a cero, cuidando la desigualdad estricta.

Solución. Si $X \neq \emptyset$, la uniformidad con tolerancia uno entrega una cola cuyas imágenes de error son no vacías y acotadas. Completitud define allí los supremos reales E_n. Para $\varepsilon > 0$, usamos el contrato con tolerancia $\varepsilon/2$ y reunimos su corte con el de existencia de las envolventes. Cada error posterior es menor que $\varepsilon/2$, por lo que cada supremo es a lo sumo $\varepsilon/2 < \varepsilon$. Así $E_n \to 0$. El factor dos conserva un margen tras el paso al supremo. Para el vacío, las envolventes se declaran cero y cumplen directamente el límite.

Ejercicio 10. Regiones que nunca se vacían

Para las tiendas t_n de C26, analiza $B_n(1/2) = \{x : t_n(x) \geq 1/2\}$ y sus columnas.

Solución. Con $k = n + 3$, la condición $t_n(x) \geq 1/2$ equivale a $1 - |kx - 2| \geq 1/2$, es decir $|kx - 2| \leq 1/2$. Por tanto $B_n(1/2) = [3/(2k), 5/(2k)]$, un segmento no vacío contenido en $[0, 1]$. Los extremos pertenecen porque la infracción incluye igualdad. La entrada cero queda fuera siempre. Para $x > 0$ fijo, desde un corte con $n + 3 > 3/x$ queda a la derecha de todo el soporte y no vuelve a pertenecer al conjunto infractor. Cada entrada sale eventualmente, pero ningún conjunto completo queda vacío. Ésa es la diferencia entre el contrato puntual y el uniforme en este ejemplo.

27.3. Calcular la peor discrepancia

Para calcular una envolvente debemos dar una cota válida en todas las entradas y mostrar que ninguna menor sirve. A veces la igualdad se realiza en una entrada; otras veces sólo podemos aproximarla. Los ejemplos siguientes separan ambas situaciones y muestran cómo cambia el resultado al restringir el dominio.

Potencias: una barrera que no se alcanza. Con $p_0 = 1$, $p_n(x) = x^n$ para $n \geq 1$ en $[0, 1]$, C26 probó límite puntual $p = 0$ antes de1 y $p(1) = 1$. Para $n \geq 1$, el error en1 es0 y en toda entrada menor que1 es $x^n < 1$. No hay máximo de error, pero su supremo es1. Para probar la última afirmación, sea $0 \leq c < 1$ una supuesta cota menor. Elegimos $0 < s < (1 - c)/(n + 1)$ y $x = 1 - s \in [0, 1)$. Bernoulli de C26 da $x^n \geq 1 - ns > c$. Así c no es cota. Las cotas negativas tampoco lo son porque hay error0. La envolvente vale1 en todas las filas, incluido el prefijo p_0, y no tiende a cero. En $[0, 1)$ el límite es cero continuo, pero la misma envolvente1 impide convergencia uniforme.

En cambio, en $[0, c]$ con $0 < c < 1$, la candidata es cero y el máximo de error es c^n, alcanzado en c. Con $t = 1/c - 1 > 0$, Bernoulli da $c^n \leq 1/(1 + nt) \to 0$. Sobre $[0, 0]$, el error es cero desde $n = 1$. El dominio modifica la peor discrepancia.

Tiendas: máximo móvil. Para $k = n + 3$ y $t_n(x) = \max(0, 1 - |kx - 2|)$ en $[0, 1]$, C26 probó límite puntual cero. La cota $0 \leq t_n \leq 1$ se alcanza en $x = 2/k$, de modo que $E_n = 1$. Para las tiendas normalizadas $b_n = k\, t_n$, el máximo de error es k. Ambas familias fallan el contrato uniforme aunque sus columnas queden eventualmente en cero. Aquí la obstrucción es un máximo realizado, a diferencia de las potencias.

Un máximo decreciente en toda la recta. Para $k = n+1$ y $h_n(x) = \frac{x}{1+kx^2}$, $x \in \mathbb{R}$, el límite puntual es cero. El cuadrado $(\sqrt{k}|x| - 1)^2 \geq 0$ demuestra $1 + kx^2 \geq 2\sqrt{k}|x|$. En $x \neq 0$, dividir por denominadores positivos da $|h_n(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}$. En cero se verifica directamente. La igualdad se alcanza en $x = \pm 1/\sqrt{k}$, por lo que $E_n = 1/(2\sqrt{k})$. Dada $\varepsilon > 0$, un natural $N > 1/(4\varepsilon^2)$ hace $E_n < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. Tenemos convergencia uniforme en un dominio no acotado.

La cota en toda la recta procede del cuadrado no negativo y su exactitud, de los dos puntos de igualdad. Así queda justificado el supremo fuera de cualquier ventana elegida para dibujar. El ejemplo converge uniformemente sobre un dominio no acotado, mientras

las potencias fallaban en un segmento: el tamaño del dominio, por sí solo, no decide la uniformidad.

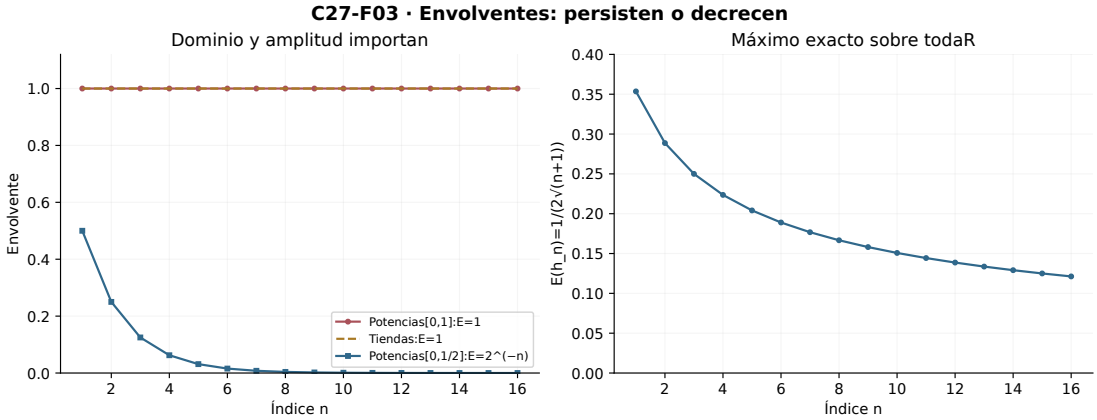


Figura 27.3. Potencias en[0,1] y tiendas de altura1 conservan envolvente1; potencias en[0,1/2] tienen máximo2^(−n); h_n sobreR tiene máximo1/(2√(n+1)). Las líneas muestran envolventes certificadas por fórmulas, no supremos inferidos de un muestreo.

Ejercicios de la sección 27.3.

Ejercicio 11. Supremo sin máximo de las potencias

Calcula la envolvente del error respecto del límite puntual de las potencias en $[0, 1]$ para $n \geq 1$.

Solución. Para $n \geq 1$, el error respecto del límite puntual es x^n si $0 \leq x < 1$ y cero en $x = 1$. Todos los errores son menores que uno, así uno es una cota superior que no se alcanza. Para probar optimalidad, si $0 \leq c < 1$ ponemos $s = (1-c)/[2(n+1)] > 0$ y $x = 1-s \in [0, 1)$. Bernoulli da $x^n \geq 1 - ns > c$, porque $ns < (1-c)$. Una cota negativa ya falla ante un error cero. Por tanto $E_n = 1$ para cada $n \geq 1$, sin máximo, y esas envolventes refutan uniformidad.

Ejercicio 12. Una restricción con máximo

Para $0 < c < 1$, calcula la envolvente de las potencias hacia cero en $[0, c]$ y un corte suficiente.

Solución. En $[0, c]$, con $0 < c < 1$, el límite es cero y para $n \geq 1$ el orden de potencias no negativas da $0 \leq x^n \leq c^n$. La entrada c alcanza el último valor, así $E_n = c^n$ es un máximo. Escribiendo $t = 1/c - 1 > 0$, Bernoulli da $c^n \leq 1/(1 + nt)$. Un natural $N > 1/(\varepsilon t)$, reunido con el índice uno, garantiza error menor que ε en toda entrada y toda la cola. La convergencia es uniforme. Si se permite $c = 0$, la única columna es cero desde la etapa uno y se trata directamente.

Ejercicio 13. Un pico que sigue siendo grande

Calcula las envolventes de t_n y $(n + 3)t_n$ en $[0, 1]$ y refuta sus convergencias uniformes hacia cero.

Solución. Las tiendas satisfacen $0 \leq t_n \leq 1$ y alcanzan uno en $z_n = 2/(n + 3)$. Como su límite puntual es cero, su envolvente de error es $E_n(t) = 1$. Con $k = n + 3$, la tienda normalizada $b_n = kt_n$ está entre cero y k y alcanza k en el mismo centro, así $E_n(b) = k$. Para tolerancia $1/2$, ante cualquier corte tomamos una etapa posterior y su centro, que sigue en $[0, 1]$. Ambas familias infringen allí la tolerancia. Ninguna converge uniformemente hacia cero, aunque cada columna termine siendo exactamente cero.

Ejercicio 14. Un máximo global decreciente

Para $h_n = x/[1 + (n + 1)x^2]$ en $\mathbb{R}$, prueba el máximo exacto del error y uniformidad.

Solución. Escribimos $k = n + 1 > 0$. La desigualdad $(\sqrt{k}|x| - 1)^2 \geq 0$ da $1 + kx^2 \geq 2\sqrt{k}|x|$. Para $x \neq 0$, dividir permite concluir $|h_n(x)| \leq 1/(2\sqrt{k})$; en cero la magnitud es cero. En $x = \pm 1/\sqrt{k}$ el denominador vale dos y se alcanza esa cota, así $E_n = 1/(2\sqrt{n+1})$ es el máximo exacto en toda la recta. Para $\varepsilon > 0$, un natural $N > 1/(4\varepsilon^2)$ garantiza $n+1 > 1/(4\varepsilon^2)$ cuando $n \geq N$, y por tanto $E_n < \varepsilon$. Queda probada uniformidad hacia cero sin restringir el dominio.

Retorno visual. Véase C27-F03, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 15. La amplitud reduce el error

Define $v_n(x) = x^{n+1}/(n + 1)$ en $[0, 1]$. Calcula el máximo y demuestra uniformidad hacia cero.

Solución. Para $0 \leq x \leq 1$, se tiene $0 \leq x^{n+1} \leq 1$. Así $|v_n(x)| \leq 1/(n + 1)$ y la entrada uno alcanza la cota. Es el máximo y la envolvente de error respecto de cero. Un natural $N > 1/\varepsilon$ da $1/(n + 1) < \varepsilon$ para todos los índices posteriores, uniformemente en la entrada. En las potencias sin ese divisor el peor error permanece cerca de uno; aquí la amplitud decreciente controla también las entradas próximas al extremo.

27.4. Restringir el dominio y seguir rutas

Restringir el dominio conserva el corte uniforme, pues reduce las entradas que debemos controlar. Reunir dominios exige, en cambio, un corte que cubra todos sus miembros. La finitud hará posible tomar el máximo de los cortes; una unión infinita puede perder esa garantía.

Restringir y reunir finitamente. Si $f_n \to f$ uniformemente en X y $Y \subseteq X$, el mismo corte funciona en Y. Cuando ambos conjuntos son no vacíos y las envolventes existen, la inclusión de imágenes de error da $E_n(Y) \leq E_n(X)$ por C02. La igualdad no está garantizada. Si $X = X_1 \cup \cdots \cup X_m$ y hay convergencia uniforme de las restricciones hacia la misma candidata en cada pieza, para una tolerancia tomamos los m cortes y su máximo. Toda entrada de X pertenece a alguna pieza y queda controlada. Las piezas vacías no añaden obligaciones. No se exige que sean abiertas o cerradas: el argumento es finito y lógico.

Una unión infinita no admite automáticamente el mismo paso. En $X = [0, 1)$, sea

$$X_j = [0, c_j], \qquad c_j = 1 - \frac{1}{j + 2}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Estas piezas cubren X: para $x < 1$, la arquimedianidad permite $1/(j + 2) \leq 1 - x$. Las potencias convergen uniformemente a cero en cada X_j por §27.3, pero no en su unión. Los cortes pueden crecer con la pieza y no tienen por qué tener una barrera común.

Un contrato que controla cualquier ruta dada. Supongamos convergencia uniforme y que está dada cualquier sucesión $x_n \in X$. El mismo corte entrega $|f_n(x_n) - f(x_n)| \longrightarrow 0$. No necesitamos que las entradas converjan. A diferencia de C26, ahora pueden variar porque todas estaban incluidas en la obligación después del corte. Si además $x_n \to x \in X$ y f es continua en x, la dirección secuencial directa de C14 da $f(x_n) \to f(x)$. La desigualdad $|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)|$ prueba convergencia de la diagonal a $f(x)$. Aquí continuidad del límite se declara como hipótesis; aún no la hemos deducido de continuidad de las filas. C28 estudiará esa preservación.

Una ruta explícita con errores que no desaparecen en índices arbitrariamente tardíos basta para refutar uniformidad. Las tiendas proporcionan $x_n = 2/(n+3)$ y error uno en todo índice. La ruta prueba la obstrucción sin tener que convertir una familia de existencias arbitrarias en una selección simultánea.

Reindexar y conservar una cola. Cambiar unas pocas filas iniciales no altera convergencia uniforme: se reúne el corte anterior con el final del prefijo modificado. Para una subsucesión de índices estrictamente crecientes n_j, la inducción da $n_j \geq j$, así el corte uniforme en n también funciona desde $j \geq N$. Toda subsucesión converge uniformemente al mismo límite. La conversa no vale con una sola subsucesión. Filas constantes $f_n(x) = (-1)^n$ en un dominio no vacío tienen subsucesión par uniformemente igual a1, pero la familia completa no converge ni puntualmente. Capturar algunas filas no captura toda una cola.

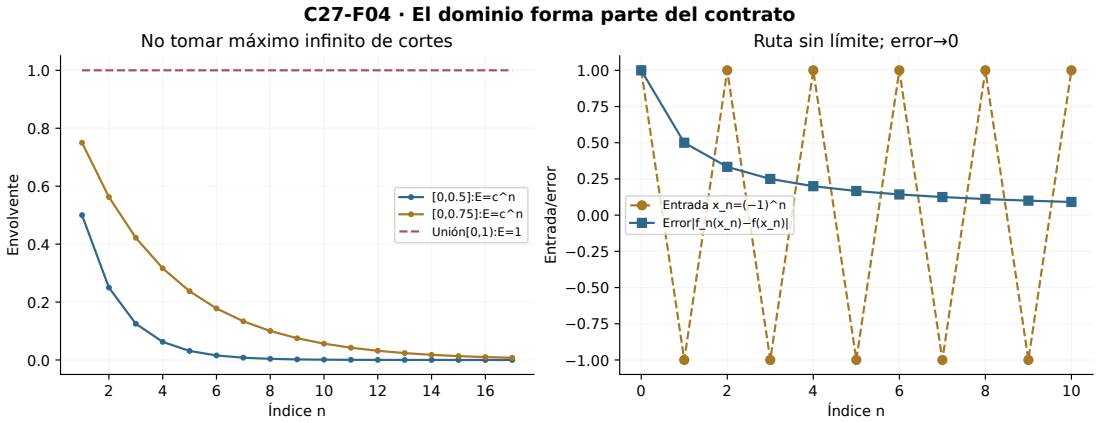


Figura 27.4. A la izquierda, envolventes de potencias en dos miembros de la familia X_j=[0,1−1/(j+2)] y en la unión de todos sus miembros[0,1). Cada restricción cerrada tiene cota decreciente, pero la unión infinita mantiene error supremo1. A la derecha, una ruta sin límite x_n=(−1)^n sigue teniendo error1/(n+1) bajo la familia uniforme x+1/(n+1).

Ejercicios de la sección 27.4.

Ejercicio 16. Restricción con barrera común

Si hay convergencia uniforme en X, demuestra uniformidad en cualquier $Y \subseteq X$ y compara envolventes cuando existen.

Solución. Si $Y \subseteq X$, el corte uniforme elegido en X sigue siendo válido para toda entrada de Y, así las restricciones convergen uniformemente. Si ambos conjuntos son no vacíos y existen las envolventes de la fila examinada, la imagen de errores sobre Y está contenida en la de X. Todo número que acote la segunda acota la primera, y la minimalidad del supremo da $E_n(Y) \leq E_n(X)$. Si Y es vacío, su error se declara cero y no hay obligaciones de entrada. La restricción puede reducir la envolvente y no obliga a conservarla exactamente.

Ejercicio 17. Reunión de dos contratos

Si $X = A \cup B$ y las restricciones convergen uniformemente a la misma candidata, acredita el contrato en X.

Solución. Para $\varepsilon > 0$, las restricciones a A y B proporcionan cortes N_A, N_B. Tomamos $N = \max(N_A, N_B)$. Si $n \geq N$ y $x \in X = A \cup B$, la entrada pertenece al menos a una de las piezas y el contrato de esa pieza da $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. La misma candidata se usa en las dos restricciones, así no hay discrepancias en su intersección. El argumento incluye piezas vacías y no requiere condiciones topológicas: el máximo finito de cortes es el dato que une los contratos.

Ejercicio 18. Una unión infinita falla

Usa $X_j = [0, 1 - 1/(j+2)]$ para mostrar que uniformidad en cada pieza no implica uniformidad en la unión.

Solución. La pieza X_j tiene extremo $c_j = 1 - 1/(j+2) < 1$, así las potencias convergen uniformemente a cero en ella con envolvente c_j^n. Su unión es $[0,1)$: cada entrada $x < 1$ pertenece a alguna pieza porque puede elegirse j con $1/(j+2) \le 1 - x$. Sobre la unión, para cada $n \ge 1$ el supremo del error es uno, mediante entradas arbitrariamente próximas al extremo ausente. Por tanto allí la convergencia no es uniforme. Los cortes de las piezas dependen de j y no tienen una barrera común que permita repetir el argumento de unión finita.

Retorno visual. Véase C27-F04, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 19. Una ruta cualquiera

Si $f_n \to f$ uniformemente y está dada una ruta $x_n \in X$, prueba $|f_n(x_n) - f(x_n)| \to 0$. ¿Se exige convergencia de la ruta?

Solución. La ruta $x_n \in X$ está dada. Para $\varepsilon > 0$, el contrato uniforme proporciona N que sirve a todas las entradas de todas las filas posteriores. En particular, si $n \ge N$ sirve en la entrada x_n, y $|f_n(x_n) - f(x_n)| < \varepsilon$. Esto prueba que el error diagonal tiende a cero sin exigir convergencia de la ruta. Para reemplazar el valor móvil $f(x_n)$ por $f(x)$ haría falta, por ejemplo, $x_n \to x \in X$ y continuidad de f en ese destino; entonces una segunda aplicación de la triangular completa la comparación.

Ejercicio 20. Subsucesión y prefijo

Prueba transferencia uniforme a una subsucesión estrictamente creciente de índices y explica por qué la conversa con una sola subsucesión falla.

Solución. Sea (n_j) una sucesión estrictamente creciente de naturales. La inducción da $n_j \ge j$: el primer término es no negativo y cada siguiente es al menos una unidad mayor. Si N es un corte uniforme de la familia, entonces para $j \ge N$ se tiene $n_j \ge N$ y $|f_{n_j}(x) - f(x)| < \varepsilon$ para toda entrada. Así la subsucesión hereda el límite uniforme. La conversa falla en las filas constantes $(-1)^n$ sobre un dominio no vacío: la subsucesión par es idénticamente uno, mientras la completa alterna y no tiene límite puntual ni uniforme.

27.5. Operar bajo un presupuesto común

Las estimaciones uniformes permiten reunir cortes sin volver a fijar una entrada. En sumas basta repartir el error; en productos y cocientes también debemos controlar los factores que multiplican ese error y separar los denominadores de cero. Las barreras necesarias han de valer en todo el dominio.

Reglas lineales y operaciones de proximidad. Si $f_n \to f$ y $g_n \to g$ uniformemente en X, entonces $\alpha f_n + \beta g_n \to \alpha f + \beta g$ uniformemente. Las cotas $|\alpha(f_n - f) + \beta(g_n - g)| \le |\alpha||f_n - f| + |\beta||g_n - g|$ valen entrada por entrada; pedimos errores menores que $\varepsilon/[2(|\alpha|+1)]$ y $\varepsilon/[2(|\beta|+1)]$ y reunimos dos cortes independientes de la entrada. La triangular inversa prueba uniformidad de $|f_n| \to |f|$. Para el máximo de dos valores usamos $\max(u,v) = \frac{u+v+|u-v|}{2}$; las reglas anteriores dan $\max(f_n, g_n) \to \max(f, g)$ uniformemente.

Más generalmente, si $\phi : D \to \mathbb{R}$ cumple una cota Lipschitz común $|\phi(u) - \phi(v)| \le L|u - v|$ y todos los valores de f_n, f están en D, entonces $\phi \circ f_n \to \phi \circ f$ uniformemente. La precisión $\varepsilon/(L+1)$ para las entradas de ϕ da el error requerido, incluido $L = 0$. El dominio y la constante común van antes de la composición.

Productos: declarar la barrera que se gasta. Supongamos además $|f(x)| \le A$ y $|g(x)| \le B$ en todo X. Un corte uniforme para $|f_n - f| < 1$ da $|f_n(x)| \le A + 1$ en todas las entradas de la cola. Allí

$$|f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \le (A+1)|g_n(x) - g(x)| + B|f_n(x) - f(x)|.$$

Usando errores menores que $\varepsilon/[2(A+2)]$ y $\varepsilon/[2(B+1)]$, y el corte de la barrera, obtenemos convergencia uniforme del producto.

El supuesto de valores acotados no puede eliminarse sin otro control. En $\mathbb{R}$, $f_n(x) = x$ converge uniformemente a x con error cero y $g_n(x) = 1/(n+1)$ converge uniformemente a cero. El producto $x/(n+1)$ sólo converge puntualmente a cero, como §27.1 refutó. El error pequeño del segundo factor se multiplica por entradas sin barrera. Tampoco continuidad de la operación exterior basta por sí sola en un dominio de valores no acotado. Las funciones $x + 1/(n+1)$ convergen uniformemente a x, pero después de elevar al cuadrado el error es $\left|\frac{2x}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}\right|$, no acotado en $\mathbb{R}$ para ninguna fila. En un rango $[-M, M]$ común, en cambio, $|u^2 - v^2| \le 2M|u - v|$ certifica esa composición.

Recíprocos con margen común. Si $|g(x)| \ge m > 0$ en todo X y $g_n \to g$ uniformemente, un corte para error menor que $m/2$ da $|g_n(x)| > m/2$ simultáneamente. Los recíprocos están definidos en toda esa cola y $\left|\frac{1}{g_n(x)} - \frac{1}{g(x)}\right| \le \frac{2|g_n(x)-g(x)|}{m^2}$. La estimación prueba uniformidad de la cola de recíprocos. Para una familia definida desde el índice cero se requiere que las filas iniciales no tengan ceros o que se declare una reparación; la prueba sólo garantiza el dominio de la cola. Con numeradores uniformemente convergentes a una función acotada, el producto anterior da el cociente.

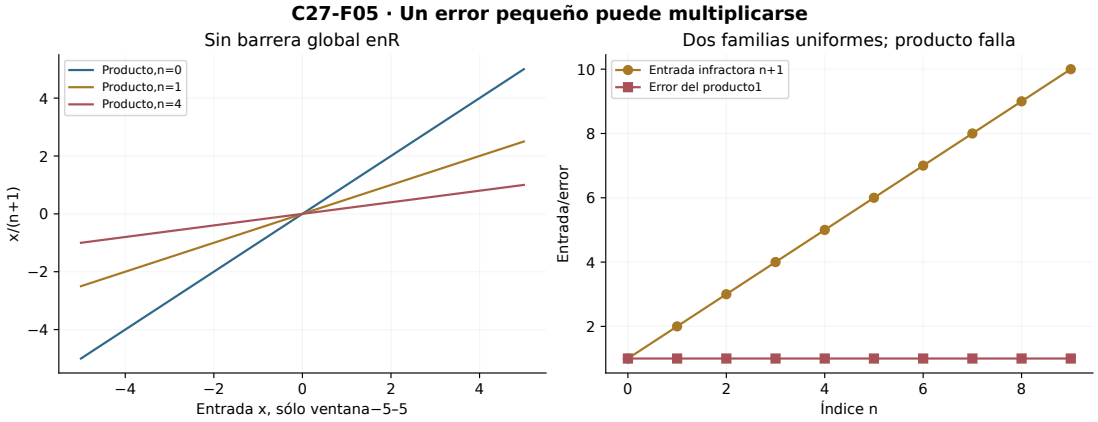


Figura 27.5. Familias x y1/(n+1) convergen uniformemente por separado enR, pero el producto x/(n+1) tiene error sin barrera global. Las gráficas sólo muestran una ventana; la ruta x_n=n+1 da error1 y acredita el fallo en cada etapa. La barrera de valores que exige la prueba del producto falta.

Ejercicios de la sección 27.5.

Ejercicio 21. Álgebra con dos presupuestos

Prueba convergencia uniforme de $\alpha f_n + \beta g_n$ cuando ambas familias convergen uniformemente.

Solución. Dada $\varepsilon > 0$, pedimos a las dos familias errores menores que $\varepsilon/[2(|\alpha| + 1)]$ y $\varepsilon/[2(|\beta| + 1)]$, respectivamente. Sus cortes uniformes tienen un máximo N. En toda entrada de cualquier fila posterior, el error de la combinación es a lo sumo $|\alpha||f_n - f| + |\beta||g_n - g| \le (\varepsilon/2)(|\alpha|/(|\alpha| + 1) + |\beta|/(|\beta| + 1)) < \varepsilon$. Los coeficientes nulos están incluidos porque los denominadores siguen positivos. Por tanto $\alpha f_n + \beta g_n$ converge uniformemente a $\alpha f + \beta g$.

Ejercicio 22. Producto con barreras declaradas

Demuestra uniformidad del producto cuando $|f| \le A$, $|g| \le B$ y hay uniformidad de las dos familias hacia esos límites.

Solución. Suponemos $|f| \le A$ y $|g| \le B$, con $A, B \ge 0$ globales. El corte uniforme para $|f_n - f| < 1$ da $|f_n| \le A + 1$ en toda entrada de la cola. La identidad $f_n g_n - fg = f_n(g_n - g) + g(f_n - f)$ proporciona error a lo sumo $(A + 1)|g_n - g| + B|f_n - f|$. Pedimos al error de g_n una cota $\varepsilon/[2(A + 2)]$ y al de f_n una cota $\varepsilon/[2(B + 1)]$, reuniendo sus cortes con el de la

barrera. La suma resultante es menor que ε. Todas las constantes son independientes de la entrada, así el producto converge uniformemente a fg.

Ejercicio 23. Producto sin barrera

Construye dos familias uniformemente convergentes en $\mathbb{R}$ cuyo producto no converge uniformemente al producto de límites.

Solución. En la recta, tomamos $f_n(x) = x$ en toda etapa y $g_n(x) = 1/(n+1)$. La primera familia converge uniformemente a $f(x) = x$ con error cero; la segunda converge uniformemente a $g = 0$ con error constante $1/(n+1)$. El producto de filas es $x/(n+1)$ y el producto de límites es cero. Ante cualquier corte N, la entrada $x = N+1$ de la fila $n = N$ da error uno, refutando uniformidad con tolerancia $1/2$. La magnitud del límite $f(x) = x$ no tiene barrera global y el factor creciente amplifica el error pequeño del segundo.

Retorno visual. Véase C27-F05, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 24. Cuadrar una aproximación global

Analiza el cuadrado de $f_n(x) = x+1/(n+1)$ en $\mathbb{R}$ y explica qué control permitiría cuadrar.

Solución. La familia original tiene error global $1/(n+1)$ respecto de la identidad. Al cuadrar, la diferencia es $(x + 1/(n+1))^2 - x^2 = 2x/(n+1) + 1/(n+1)^2$. Para cada índice crece sin cota en magnitud al variar x por la recta. Un testigo explícito es $x = n+1$, donde el error vale $2+1/(n+1)^2 > 1$; por tanto no hay uniformidad hacia x^2. Si los valores de filas y límite utilizados estuvieran todos en $[-M, M]$, se tendría $|u^2-v^2| = |u-v||u+v| \le 2M|u-v|$. Esa barrera convierte el cuadrado en una operación Lipschitz sobre el rango común y sí permite transportar uniformidad.

Ejercicio 25. Recíproco con margen

Si $|g(x)| \ge m > 0$ y $g_n \to g$ uniformemente, prueba uniformidad de los recíprocos de la cola y declara su dominio.

Solución. El contrato uniforme para error $m/2$ proporciona una cola en la que $|g_n(x)| \ge |g(x)| - |g_n(x) - g(x)| > m/2$ para todas las entradas. Así los recíprocos de esa cola son funciones reales sobre el mismo X. Allí $|1/g_n - 1/g| = |g_n - g|/(|g_n||g|) \le 2|g_n - g|/m^2$. Para $\varepsilon > 0$, reunimos el corte de dominio con el corte uniforme para error original menor que $\varepsilon m^2/2$. El error recíproco es entonces menor que ε. Las filas iniciales pueden tener ceros; para hablar de una familia desde el índice cero deben revisarse o reemplazarse explícitamente por funciones definidas, sin alterar esta cola.

27.6. Una distancia entre funciones acotadas

La envolvente puede medir la distancia entre dos funciones completas si su diferencia tiene magnitud acotada. Para que la fórmula dé siempre un número real, comenzaremos con el conjunto de funciones acotadas. Después veremos cómo extender la misma construcción a funciones que comparten una base no acotada.

Construir el espacio y la norma. Sea $\mathcal{B}(X) = \{u : X \to \mathbb{R} : \exists B \ge 0\ \forall x \in X,\ |u(x)| \le B\}$. Es un subconjunto de la colección de funciones de C26. Sumas y múltiplos permanecen en él por $|u+v| \le B_u + B_v$ y $|\alpha u| \le |\alpha| B_u$. La función cero pertenece a él. Para $X \neq \emptyset$, la imagen de $|u|$ es no vacía y acotada; C03 da $\|u\|_\infty = \sup_{x\in X} |u(x)|$. Para $X = \emptyset$ definimos $\|u\|_\infty = 0$. Verifiquemos las propiedades, sin suponer máximos inexistentes.

La norma es no negativa. Si vale cero, cada $|u(x)| \le 0$, luego u es cero; la conversa es inmediata. Para una constante $\alpha \neq 0$, multiplicar todas las cotas por $|\alpha|$ y dividirlas de vuelta prueba $\|\alpha u\|_\infty = |\alpha|\,\|u\|_\infty$. Más explícitamente, $|\alpha|\|u\|_\infty$ es cota de los valores de $|\alpha u|$, y cualquier cota de éstos, dividida por $|\alpha|$, acota los de $|u|$. Para $\alpha = 0$ la igualdad se comprueba aparte.

Finalmente, $|u(x)+v(x)| \le \|u\|_\infty + \|v\|_\infty$ para todo x, de modo que el miembro derecho es cota superior y $\|u+v\|_\infty \le \|u\|_\infty + \|v\|_\infty$. Estas propiedades también valen para el vacío, donde sólo hay una función.

La distancia suprema. Definimos $d_\infty(u,v) = \|u-v\|_\infty$. Es finita porque $u-v$ es acotada; es no negativa, simétrica y vale cero exactamente cuando $u=v$. Como $u-w = (u-v)+(v-w)$, la desigualdad de norma prueba $d_\infty(u,w) \le d_\infty(u,v) + d_\infty(v,w)$. Estas son las propiedades de una distancia. La teoría general de espacios métricos llegará en C30; aquí la distancia ha sido construida y verificada en un caso concreto.

Converger para esta distancia significa $d_\infty(f_n, f) \to 0$. Cuando todos los objetos pertenecen a $\mathcal{B}(X)$, §27.2 demuestra que equivale al contrato uniforme. La bola de radio $r>0$ está dada por $d_\infty(u,v) < r$: todas las diferencias de valores son menores que r. La conversa para un radio fijo puede fallar si todos los errores son menores que r pero su supremo es r. Las bandas y las bolas dan el mismo modo de convergencia al permitir precisiones menores, no siempre el mismo conjunto para una frontera estricta fija.

Funciones no acotadas y clases de diferencia acotada. No obtenemos una distancia real en la colección de **todas** las funciones poniendo el mismo símbolo. En $X=\mathbb{R}$, la diferencia entre $u(x)=x$ y cero no tiene cota superior de magnitud, así no tiene un supremo real. Tampoco el vacío se resuelve fingiendo un supremo que no existe. Sin embargo, fijada una función cualquiera f_0, la clase $f_0 + \mathcal{B}(X) = \{f_0+u : u \in \mathcal{B}(X)\}$ sí tiene diferencias acotadas: entre dos miembros se cancela f_0. La misma fórmula define una distancia allí. Esto explica por qué $x + 1/(n+1)$ puede converger uniformemente a x aunque ninguna función pertenezca a $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. No se necesita asignar distancia finita a pares cuyo error no está acotado.

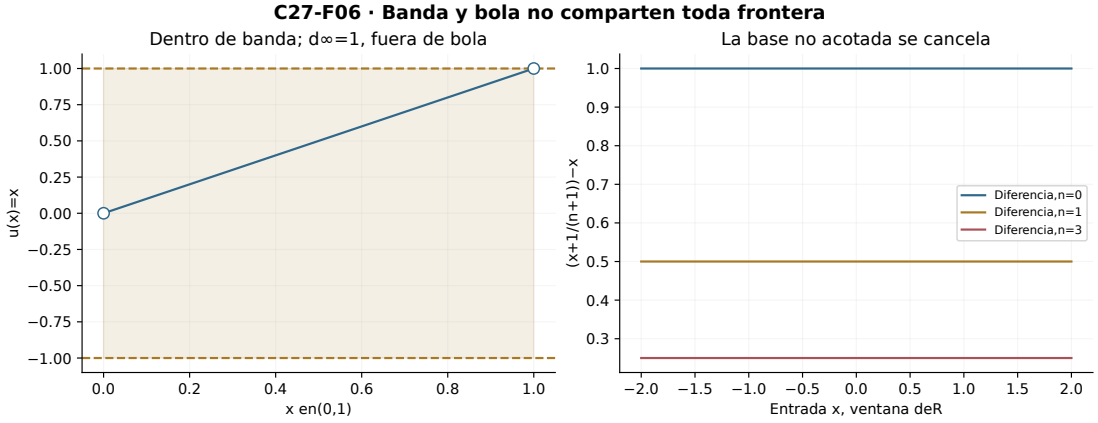


Figura 27.6. Para u(x)=x en(0,1), toda gráfica cae en la banda abierta de radio1 alrededor de cero, pero d∞(u,0)=1 queda fuera de la bola estricta. A la derecha, las diferencias entre x+1/(n+1) y x son constantes: las bases no acotadas se cancelan y viven en una clase trasladada con distancia real.

Ejercicios de la sección 27.6.

Ejercicio 26. Norma y salida cero

Prueba que $\|u\|_\infty = 0$ en $\mathcal{B}(X)$ si y sólo si u es la función cero, incluido X vacío.
Solución. Si $X \neq \emptyset$, cada $|u(x)|$ está entre cero y su supremo $\|u\|_\infty$. Si la norma es cero, todas esas magnitudes son cero, así u coincide con la función nula. Recíprocamente, para la función nula la imagen de magnitudes es $\{0\}$ y su supremo es cero. En el dominio vacío se declaró norma cero para la única función, que también es la función nula vacía. Así la equivalencia vale en ambos casos, manteniendo separada la convención del vacío de la existencia de un supremo real.

Ejercicio 27. Homogeneidad sin máximos

Demuestra $\|\alpha u\|_\infty = |\alpha|\|u\|_\infty$ sin suponer que la norma se alcance.

Solución. Supongamos $X \neq \emptyset$ y $\alpha \neq 0$. El número $|\alpha|\|u\|_\infty$ acota todas las magnitudes $|\alpha u(x)|$. Si C es cualquier cota superior de éstas, dividir por $|\alpha| > 0$ da una cota $C/|\alpha|$ para todas las magnitudes de u. La minimalidad de su supremo implica $|\alpha|\|u\|_\infty \leq C$. Por tanto ese número es exactamente $\|\alpha u\|_\infty$. Si $\alpha = 0$, ambos lados valen cero directamente. Si X es vacío, ambas normas se definieron cero y la igualdad también es inmediata. No se usó un punto que alcanzara la norma.

Ejercicio 28. Distancia triangular

Verifica la desigualdad triangular de $d_\infty(u, v) = \|u - v\|_\infty$ para funciones acotadas.

Solución. Las diferencias de funciones acotadas siguen acotadas, así las tres distancias existen. Para cada entrada, $|u(x)-w(x)| \leq |u(x)-v(x)|+|v(x)-w(x)| \leq d_\infty(u, v)+d_\infty(v, w)$. El último real es por tanto una cota superior de toda la imagen de magnitudes de $u - w$. Tomar su supremo da $d_\infty(u, w) \leq d_\infty(u, v) + d_\infty(v, w)$. La conclusión usa cotas universales y no necesita máximos alcanzados. En el vacío, todas las distancias son cero por convención.

Ejercicio 29. Banda y bola de frontera estricta

En $X = (0, 1)$, compara la banda de radio1 entre $u(x) = x$ y cero con la bola $d_\infty(u, 0) < 1$.

Solución. Para $u(x) = x$ en $(0, 1)$, cada entrada satisface $|u(x) - 0| = x < 1$. Por tanto la gráfica queda dentro de la banda abierta entre menos uno y uno alrededor de la función cero. Sin embargo el supremo de las magnitudes es uno, así $d_\infty(u, 0) = 1$. La condición de bola estricta pide una distancia menor que uno y no se cumple. El error nunca alcanza la frontera, pero se aproxima a ella sin un margen común positivo. Al probar equivalencias de convergencia, usar tolerancia $\varepsilon/2$ evita este problema de frontera.

Retorno visual. Véase C27-F06, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 30. Clase trasladada

En $\mathbb{R}$ explica por qué la distancia suprema no es real entre x y0, pero sí entre $x + u$ y $x + v$ para u, v acotadas.

Solución. La diferencia entre la identidad $r(x) = x$ y cero tiene magnitud $|x|$, no acotada en la recta. Por tanto no tiene supremo real y $d_\infty(r, 0)$ no es una distancia real definida en esta teoría. Si u, v son acotadas, en cambio, $(r + u) - (r + v) = u - v$ tiene una barrera global dada por la suma de sus cotas. Su norma existe y define la distancia entre esas dos traslaciones. La clase $r + \mathcal{B}(\mathbb{R})$ permite medir diferencias acotadas con una base común no acotada; no extiende la distancia real a todos los pares arbitrarios de funciones.

27.7. Cauchy uniforme y completitud

En C10, controlar todos los pares tardíos de una sucesión real permitió construir un límite sin conocerlo de antemano. Para funciones pediremos que ese mismo corte controle los pares en cualquier entrada. La completitud real resolverá cada columna; la parte decisiva será comprobar que los límites obtenidos conservan el corte común.

El criterio uniforme de Cauchy. Una familia dada es **uniformemente de Cauchy** en X si

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall m, n \geq N \; \forall x \in X : \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Teorema. Para funciones reales en un dominio común, este contrato equivale a la existencia de una función $f : X \to \mathbb{R}$ hacia la que la familia converge uniformemente.

En la ida, un corte de convergencia con tolerancia $\varepsilon/3$ controla dos errores. Para m, n posteriores y cualquier x,

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < 2\varepsilon/3 < \varepsilon.$$

Esta dirección no usa completitud.

En la vuelta, fijamos una entrada x. El contrato uniforme hace de Cauchy su columna numérica, y C10 proporciona un único límite real. Como esto vale para cada entrada, el grafo de las salidas únicas construye una función $f : X \to \mathbb{R}$, según C26. Falta demostrar que la aproximación a esa función es uniforme; la existencia columna por columna todavía no lo dice. Fijemos ahora $\varepsilon > 0$ y recibamos un único corte N del contrato de Cauchy con tolerancia $\varepsilon/3$. Para cualquier $n \geq N$ y cualquier x, todos los índices $m \geq N$ cumplen $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon/3$. Mantenemos **fijos** n y x y hacemos tender m a infinito. El álgebra numérica, continuidad del absoluto y preservación del orden de C26 dan $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/3 < \varepsilon$. La desigualdad después del límite es no estricta y tiene ese sentido, no el inverso. Como el corte se eligió antes de n y x, el resultado vale para toda la cola y todo el dominio. Hemos probado uniformidad, no sólo puntualidad.

En el vacío la función única resuelve el teorema vacuamente. Ninguna parte de la vuelta requiere continuidad de las filas, un dominio compacto o una fórmula explícita del límite.

Completitud de las funciones acotadas. Para una sucesión en $\mathcal{B}(X)$, el criterio de Cauchy para d_∞ equivale al contrato anterior. Una distancia menor que ε controla cada entrada. En sentido inverso, usar el contrato con $\varepsilon/2$ da supremo como máximo $\varepsilon/2 < \varepsilon$. Otra vez se cuida la frontera del supremo. Sea una sucesión de Cauchy en esa distancia. El teorema produce un límite uniforme real f. Falta probar que permanece en $\mathcal{B}(X)$. El contrato de Cauchy con tolerancia1 da un corte N. Para cualquier x, los valores posteriores satisfacen $|f_m(x) - f_N(x)| < 1$; al pasar al límite, $|f(x)| \leq |f_N(x)| + 1 \leq \|f_N\|_\infty + 1$. Así f es acotada. §27.2 da $d_\infty(f_n, f) \to 0$. Hemos demostrado **completitud secuencial**: toda sucesión de Cauchy para esta distancia tiene límite dentro del espacio. La existencia del destino procede de la completitud de $\mathbb{R}$ en cada columna, y el control común lo conserva dentro del conjunto de funciones acotadas.

Dos precauciones antes de reutilizar. Cauchy puntual no basta: las tiendas de C26 tienen columnas convergentes, pero no son uniformemente de Cauchy, pues de serlo el teorema las haría uniformemente convergentes al único límite puntual cero, contra §27.3. Controlar sólo vecinos tampoco basta. Para filas constantes $q_n(x) = H_n$, donde $H_0 = 0$ y $H_n = \sum_{j=1}^{n} 1/j$, las diferencias de vecinos son $1/(n+1) \to 0$ en todas las entradas. Pero entre etapas m y $2m$, $H_{2m} - H_m = \sum_{j=m+1}^{2m} \frac{1}{j} \geq \frac{1}{2}$. Para un dominio no vacío, ante cualquier corte elegimos un entero $m \geq \max(N, 1)$ y obtenemos dos filas tardías separadas. El contrato exige todos los pares, no sólo los consecutivos.

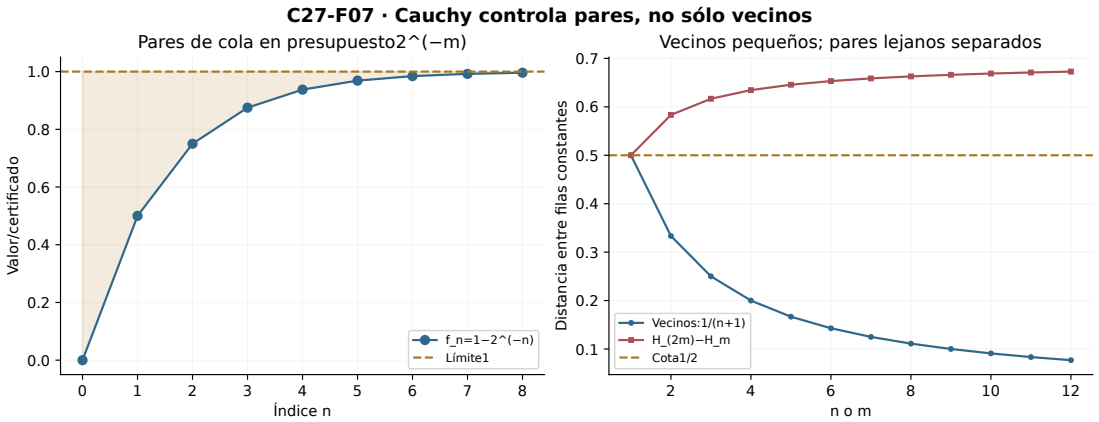


Figura 27.7. Filas constantes dyádicas f_n=1−2^(−n) admiten un presupuesto común para todos los pares y convergen a1. Las filas H_n tienen diferencias vecinas1/(n+1)→0, pero H_(2m)−H_m≥1/2 para todo m≥1. Las muestras de índices ilustran una cota demostrada para todos los pares tardíos necesarios.

Ejercicios de la sección 27.7.

Ejercicio 31. De destino a pares

Prueba que convergencia uniforme implica el contrato uniforme de Cauchy e identifica el uso de completitud.

Solución. Dada $\varepsilon > 0$, la convergencia uniforme a f entrega un corte N para error $\varepsilon/3$. Para todo $m, n \geq N$ y toda entrada, la triangular da $|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < 2\varepsilon/3 < \varepsilon$. Éste es el contrato uniforme de Cauchy, con dos índices posteriores al mismo corte. La función destino ya existe por hipótesis. La prueba sólo reúne errores mediante la triangular y no usa completitud para construir ningún valor nuevo.

Ejercicio 32. Construir primero el límite

Desde Cauchy uniforme, demuestra existencia de un límite uniforme sin conocer su fórmula.

Solución. Cauchy uniforme implica Cauchy numérico en cada entrada fija. C10 proporciona un límite real único por columna y esas salidas forman una función $f : X \to \mathbb{R}$. Para demostrar uniformidad, fijamos $\varepsilon > 0$ y elegimos un corte común N de Cauchy para error $\varepsilon/3$. Fijados $n \geq N$ y x, para todo $m \geq N$ tenemos $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon/3$. Al llevar m al límite, la continuidad del absoluto y la preservación del orden dan $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/3 < \varepsilon$. El corte precedía a n y a x, así controla todas las filas y entradas requeridas. En el vacío se obtiene directamente la función vacía.

Ejercicio 33. Conservar el destino en funciones acotadas

Prueba completitud secuencial de $\mathcal{B}(X)$ para la distancia suprema.

Solución. Una sucesión de Cauchy en d_∞ cumple el contrato uniforme de Cauchy porque cada error de entrada está acotado por esa distancia. El criterio anterior construye un límite uniforme real f. Falta comprobar que permanece en $\mathcal{B}(X)$. Usamos Cauchy con tolerancia uno y fijamos la fila de referencia f_N. Para todos los índices $m \geq N$ y todas las entradas, $|f_m(x) - f_N(x)| < 1$. Pasar m al límite da $|f(x) - f_N(x)| \leq 1$, luego $|f(x)| \leq \|f_N\|_\infty + 1$. Así f es acotada. La caracterización por envolventes convierte después el contrato uniforme en $d_\infty(f_n, f) \to 0$. Queda probada completitud secuencial, con el vacío incluido por sus convenciones.

Ejercicio 34. Vecinos cada vez más próximos

Para filas constantes $H_n = \sum_{j=1}^{n} 1/j$, $H_0 = 0$, prueba que diferencias de vecinos tendentes a cero no bastan para Cauchy uniforme.

Solución. Sobre un dominio no vacío, cada H_n es una función constante y $d_\infty(H_{n+1}, H_n) = 1/(n+1) \to 0$. Pero para $m \geq 1$, $H_{2m} - H_m = \sum_{j=m+1}^{2m} 1/j \geq m/(2m) = 1/2$. Ante cualquier corte N, tomamos $m \geq \max(N, 1)$; ambos índices $m, 2m$ quedan en la cola y en cualquier entrada su diferencia es al menos $1/2$. La tolerancia $1/2$ refuta el error estricto pedido por Cauchy uniforme. Los incrementos vecinos pequeños no controlan la acumulación de muchos incrementos entre etapas lejanas. En un dominio vacío todas las filas serían la misma función, así ese caso no sería un contraejemplo.

Retorno visual. Véase C27-F07, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 35. La completitud tiene un lugar

Explica qué pasos del criterio uniforme de Cauchy gastan completitud y cuáles sólo usan orden y cortes.

Solución. La dirección de convergencia uniforme a Cauchy sólo usa el destino dado, la triangular y un corte común. En la dirección inversa, la completitud de los reales interviene al aplicar C10 para obtener el límite de cada columna de Cauchy. La unicidad de esas salidas construye el grafo de una función. Para recuperar uniformidad se mantiene fijo un índice y

una entrada y se lleva la otra columna al límite: continuidad del absoluto y orden conservan una cota no estricta, cuyo margen $\varepsilon/3$ basta para el contrato. Si se trabaja en $\mathcal{B}(X)$, una fila acotada de referencia aporta después la barrera del destino. Ningún paso exige compacidad del dominio ni continuidad de las filas.

27.8. Certificar una aproximación completa

Podemos aplicar el criterio de Cauchy cuando conocemos cuánto cambia una etapa respecto de la siguiente. Las diferencias vecinas sólo serán suficientes si su acumulación entre dos índices tardíos admite una barrera que desaparezca. Un presupuesto geométrico permite demostrarlo mediante sumas finitas y obtener después una cota de error hacia el destino construido.

Sumar sólo un presupuesto finito de incrementos. Supongamos que hay constantes $C \geq 0$ y $0 < q < 1$ con

$$|f_{j+1}(x) - f_j(x)| \leq Cq^j \quad \text{para todo } j \in \mathbb{N},\ x \in X.$$

Si $n > m$, telescopar incrementos y aplicar la triangular da $|f_n(x) - f_m(x)| \leq C\sum_{j=m}^{n-1} q^j = Cq^m \frac{1-q^{n-m}}{1-q} \leq \frac{Cq^m}{1-q}$. La identidad geométrica es finita y se verifica multiplicando la suma por $1-q$; no se usa teoría de series de funciones. Para $m > n$ intercambiamos los índices y para $m = n$ la diferencia es cero. Como $q^m \to 0$ por C06, un corte independiente de la entrada hace esta barrera menor que cualquier tolerancia. La familia es uniformemente de Cauchy y §27.7 produce un límite uniforme f.

Manteniendo fijo m y pasando n al límite en la cota, obtenemos el certificado posterior $|f(x) - f_m(x)| \leq \frac{Cq^m}{1-q}$ para toda x. Si $C = 0$ todas las filas coinciden. Si se desea permitir $q = 0$, se define la cota de incremento inicial como C y las posteriores como cero; desde la etapa1 la familia es constante. No se deja un 0^0 ambiguo dentro de un presupuesto.

Si la fila inicial está acotada, telescopar desde ella da $|f_n(x)| \leq \|f_0\|_\infty + C/(1-q)$ y el límite pertenece a $\mathcal{B}(X)$. Si no lo está, las diferencias $f_n - f_0$ sí están acotadas por la misma constante: la familia y el límite viven en la clase $f_0 + \mathcal{B}(X)$. La acotación del destino se concluye sólo en el caso que la acredita.

Como ejemplo, con cualquier a acotada por1 y cualquier función base r, la familia $f_n(x) = r(x) + (1 - 2^{-n})a(x)$ tiene incremento $2^{-(n+1)}a(x)$, por lo que sirve $C = 1/2$ y $q = 1/2$. El certificado de error es 2^{-n} y el límite explícito es $r + a$. La construcción funciona aunque r no sea acotada.

Hipótesis que parecen suficientes y no lo son. Columnas monótonas y límite continuo no garantizan uniformidad sin otros datos. En $[0,1]$, sea $s_n(x) = \mathbf{1}_{(0,\,1/(n+1))}(x)$. La columna de cero siempre vale0. Cada entrada positiva queda fuera del intervalo eventualmente, y los intervalos se encogen: $s_{n+1}(x) \leq s_n(x)$ para toda entrada. El límite puntual es cero, continuo. Sin embargo, en $x_n = 1/[2(n+1)]$ todas las filas valen1 y sus envolventes son1. La convergencia no es uniforme. Las filas son discontinuas; no se puede importar un teorema sobre continuidad y monotonía omitiendo esa hipótesis.

Tampoco ser uniformemente convergente significa tener valores conjuntamente acotados si las filas son no acotadas, como mostró la traslación de x. Si las filas sí pertenecen a $\mathcal{B}(X)$, uniformidad da límite acotado y una barrera común de toda la familia: la cola se controla por una fila de referencia y el límite, y los supremos de las filas iniciales finitas se reúnen por un máximo. Cada premisa desempeña un papel.

Volver a mirar el contrato. Una cota común del error basta para acreditar uniformidad, aunque no sea el supremo exacto. Para refutarla, una tolerancia fija y testigos tardíos dentro del dominio bastan. El uso de una distancia exige declarar primero dónde las diferencias están acotadas; la construcción desde Cauchy exige además mantener el corte común al pasar al límite en cada columna. La uniformidad controla valores completos, pero

el ejemplo de las derivadas de $x/(1+kx^2)$ mostró que ese control por sí solo no autoriza a derivar el límite. La continuidad, la integración y la diferenciación impondrán obligaciones diferentes al intentar transportar este modo de aproximación.

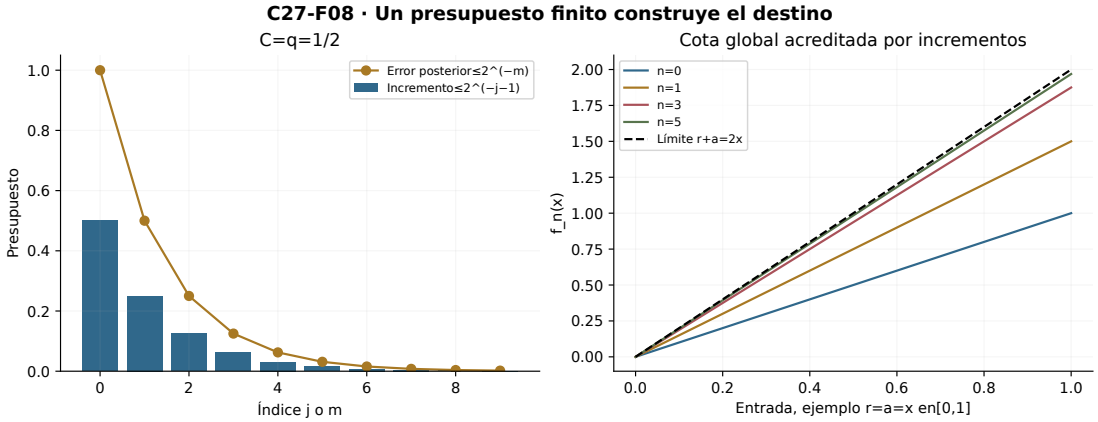


Figura 27.8. Con C=q=1/2, las cotas de incrementos son2^(−j−1) y el presupuesto posterior2^(−m). En la familia f_n=r+(1−2^(−n))a, |a|≤1, ese presupuesto controla todo el error hacia r+a, aunque r sea no acotada. El destino se acredita por Cauchy uniforme antes de usar la estimación posterior.

Ejercicios de la sección 27.8.

Ejercicio 36. Presupuesto geométrico finito

Si $|f_{j+1}(x) - f_j(x)| \le Cq^j$ con $0 < q < 1$, prueba Cauchy uniforme y una cota del error posterior.

Solución. Suponemos $C \ge 0$ y $0 < q < 1$. Para $n > m$, telescopía y triangular dan $|f_n(x) - f_m(x)| \le \sum_{j=m}^{n-1} |f_{j+1}(x) - f_j(x)| \le C \sum_{j=m}^{n-1} q^j = Cq^m(1-q^{n-m})/(1-q) \le Cq^m/(1-q)$. La suma utilizada es finita. Para $m > n$ se intercambian los índices, y para igualdad el error es cero. Como $q^j \to 0$, un corte común del menor índice hace la cota menor que cualquier tolerancia, demostrando Cauchy uniforme. Su criterio produce f. Fijados m, x, pasar n al límite conserva $|f(x) - f_m(x)| \le Cq^m/(1-q)$, un certificado válido en todo el dominio. Si $C = 0$, las filas coinciden y se verifica directamente.

Ejercicio 37. Destino acotado o diferencia acotada

Bajo el presupuesto geométrico, compara el caso de una fila inicial acotada con el de una base arbitraria.

Solución. El presupuesto telescópico desde la etapa cero da $|f_n(x) - f_0(x)| \le C/(1-q)$ para todos los índices y entradas. Tras construir el límite, el mismo paso numérico conserva $|f(x) - f_0(x)| \le C/(1-q)$. Si f_0 es acotada, sumar su barrera da $|f_n|, |f| \le \|f_0\|_\infty + C/(1-q)$ y todos pertenecen a $\mathcal{B}(X)$. Si la base es arbitraria, sólo se garantiza que cada diferencia respecto de ella es acotada, así las funciones viven en $f_0 + \mathcal{B}(X)$. Por ejemplo una base identidad en la recta puede conservar su crecimiento no acotado aunque las correcciones converjan uniformemente.

Ejercicio 38. Un presupuesto que se alcanza

Con $|a| \le 1$ y base arbitraria r, estudia $f_n = r + (1 - 2^{-n})a$ y calcula una cota uniforme de error.

Solución. La familia está definida sobre un dominio común, con $|a(x)| \le 1$ y base r arbitraria. Su incremento es $f_{n+1} - f_n = 2^{-n-1}a$, de magnitud a lo sumo $(1/2)(1/2)^n$. El presupuesto geométrico tiene por tanto $C = q = 1/2$ y certifica error a lo sumo 2^{-n}. La cuenta directa identifica el destino $f = r + a$, pues $f_n - f = -2^{-n}a$. Así la convergencia

es uniforme con la misma cota. En dominio no vacío la envolvente exacta es $2^{-n}\sup|a|$; si ese supremo es uno, la barrera 2^{-n} es exacta, alcanzada sólo cuando alguna magnitud de a alcance uno. La base puede ser no acotada porque se cancela en la diferencia.

Retorno visual. Véase C27-F08, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 39. Monotonía con límite continuo

En $[0,1]$, analiza $s_n = \mathbf{1}_{(0,1/(n+1))}$: monotonía, límite, continuidad de éste y uniformidad.
Solución. Los intervalos $(0,1/(n+1))$ se encogen, así $s_{n+1}(x) \le s_n(x)$ para toda entrada. En cero todas las alturas son cero. Para $x>0$ fijo, desde un corte con $n+1>1/x$ la entrada queda fuera del intervalo positivo y la columna es cero. El límite puntual es la función cero, continua. Sin embargo $x_n = 1/[2(n+1)]$ pertenece al intervalo de la fila n y tiene error uno respecto de ese límite. Con tolerancia $1/2$ ninguna cola es uniforme. Las filas tienen discontinuidades en sus bordes de salto, incluida la discontinuidad relativa en cero; ese dato impide omitir la regularidad de las filas en cualquier comparación con teoremas adicionales.

Ejercicio 40. Una auditoría de condiciones

Reúne los datos que se necesitan para afirmar uniformidad, usar la distancia suprema y comparar una diagonal con el valor límite en su destino.
Solución. Para afirmar uniformidad se necesitan un dominio común, una candidata y, para cada tolerancia, un corte que controle toda entrada en toda fila posterior. Una barrera universal de error que tienda a cero proporciona ese certificado. Para usar una distancia suprema real hay que demostrar que las diferencias medidas están acotadas y tratar el vacío por su convención; esto vale en $\mathcal{B}(X)$ o en una clase trasladada con base común. Para una ruta dada, uniformidad controla $f_n(x_n)-f(x_n)$ sin pedir convergencia de las entradas. Si se quiere comparar con $f(x)$, se añade $x_n \to x \in X$ y continuidad del límite en ese centro, o un control equivalente que justifique $f(x_n)\to f(x)$. Estos datos identifican exactamente qué error queda protegido en cada conclusión.

Capítulo 28

Intercambiar límites con operaciones

Una banda uniforme permite escoger una fila antes de acercar la entrada a un centro. Con ese orden podremos completar la prueba de continuidad que fallaba para convergencia puntual. La integración aprovechará además una longitud fija; la diferenciación necesitará controlar incrementos y un valor de anclaje. Construiremos cada destino antes de identificarlo, usando C14, C18 y C23 y las interfaces declaradas de C10, C13, C16, C17, C19 y C24.

28.1. Fijar una fila para conservar continuidad

C27 permite escoger una etapa antes de conocer la entrada. Ésa es la diferencia que faltaba en el argumento de continuidad de C26. Sean $X \subseteq \mathbb{R}$, $f_n : X \to \mathbb{R}$ y $f_n \to f$ uniformemente. La continuidad se entiende relativamente a X, también en sus bordes y puntos aislados. **R1 — Límite uniforme de continuas.** Si las filas son continuas en un punto $x_0 \in X$, entonces f es continua allí. Para $\varepsilon > 0$, el contrato uniforme da un corte con error menor que $\varepsilon/3$ en toda entrada y toda fila posterior. Fijamos una sola fila f_N. Su continuidad en x_0 entrega $\delta > 0$ para error menor que $\varepsilon/3$. Si $x \in X$ y $|x - x_0| < \delta$,

$$|f(x) - f(x_0)| \le |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Después de escoger la fila, su continuidad proporciona el radio. No hace falta un radio válido para todas las filas ni una barrera de sus valores. Incluso basta que existan filas continuas en el punto con índices arbitrariamente grandes: para cada tolerancia elegimos una después del corte uniforme. Si todas las filas son continuas en X, repetimos el argumento en cada centro y obtenemos continuidad de f en X. El caso vacío no tiene puntos que comprobar.

Continuidad uniforme es otra propiedad. Si las filas son uniformemente continuas en X, la misma prueba usa el radio de una fila para todo par $x, y \in X$. Así el límite es uniformemente continuo. No se exige de antemano un radio común a la familia de filas. Si sólo sabemos continuidad ordinaria de las filas, obtenemos continuidad ordinaria; en un compacto, C17 convierte después la del límite en uniforme.

Para $f_n(x) = x + 1/(n+1)$ en toda la recta, el error de aproximación es $1/(n+1)$ y el límite es la identidad, uniformemente continua y no acotada. El control de errores no es una barrera de valores. La contraposición permite reutilizar las potencias de C26 en $[0, 1]$. Sus filas son continuas y su límite es discontinuo en uno, así que la convergencia no puede ser uniforme; coincide con la envolvente uno calculada en C27. Sobre $[0, 1)$ el límite sí es continuo y la convergencia sigue sin ser uniforme. La continuidad del destino se hereda bajo uniformidad, pero no caracteriza por sí sola ese modo de convergencia.

Ejercicios de la sección 28.1.

Ejercicio 1. Una fila dentro de la banda

Prueba continuidad del límite uniforme en un punto donde todas las filas son continuas.
Solución. Sea x_0 el centro y $\varepsilon > 0$. La uniformidad permite fijar una fila f_N con $|f_N(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ para toda entrada del dominio. La continuidad de esa fila en x_0 proporciona $\delta > 0$ tal que $|f_N(x) - f_N(x_0)| < \varepsilon/3$ si x es admisible y $|x - x_0| < \delta$. Entonces $|f(x) - f(x_0)| \le |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$. El radio se obtuvo después de fijar la fila, y los errores de aproximación ya controlaban toda la vecindad. La prueba vale relativamente al dominio, incluidos sus bordes.

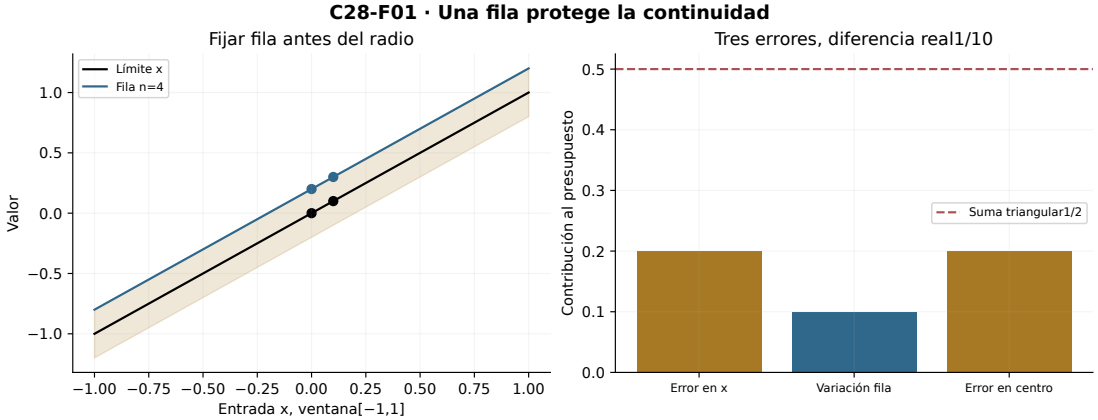


Figura 28.1. En la ventana [−1,1], la fila x+1/5 aproxima la identidad con error1/5. Los tres tramos en el segundo panel separan aproximación en ambas entradas y variación de la fila fija. Para entradas0 y1/10, el presupuesto triangular es1/2, aunque la diferencia real es1/10. La prueba general fija fila antes del radio.

Retorno visual. Véase C28-F01, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 2. Radios para todos los pares

Prueba que un límite uniforme de funciones uniformemente continuas es uniformemente continuo, sin radio común previo para las filas.

Solución. Para $\varepsilon > 0$, fijamos una fila de error global menor que $\varepsilon/3$. Su continuidad uniforme proporciona un radio $\delta > 0$ que sirve para todos los pares x, y con $|x-y| < \delta$. En esos pares, la triangular da $|f(x)-f(y)| \le |f(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-f_N(y)|+|f_N(y)-f(y)| < \varepsilon$. El radio es común a los pares del dominio porque pertenece a una fila uniformemente continua. Puede depender de la fila escogida para esta tolerancia; no se necesita que las otras filas compartan el mismo radio.

Ejercicio 3. Destino continuo sin uniformidad

Explica por qué las potencias en $[0,1)$ refutan la recíproca del teorema de continuidad.

Solución. Las potencias declaradas con fila inicial uno tienen límite cero en cada entrada fija de $[0,1)$. Esa candidata es continua. Para cada $n \ge 1$, todos los errores x^n son menores que uno, pero su supremo es uno: dado $0 \le c < 1$, una entrada $x = 1-s$ con $s = (1-c)/[2(n+1)]$ satisface $x^n \ge 1 - ns > c$ por Bernoulli. Por tanto las envolventes no tienden a cero y no hay uniformidad. Este ejemplo refuta la recíproca: continuidad del destino de una familia puntual de filas continuas no fuerza convergencia uniforme.

Ejercicio 4. Valores sin barrera global

Analiza continuidad y uniformidad de $x + 1/(n+1)$ en $\mathbb{R}$.

Solución. La diferencia entre $x+1/(n+1)$ y la identidad es la constante $1/(n+1) \to 0$, así la convergencia es uniforme en toda la recta. En cada fila, $|f_n(x) - f_n(y)| = |x-y|$, y la misma identidad vale para el destino. Son por tanto Lipschitz con constante uno y uniformemente continuas. Sus valores no tienen barrera global porque aumentan sin cota al crecer la entrada. El teorema de continuidad utiliza las diferencias uniformemente pequeñas y la continuidad de una fila fija, sin requerir acotación de los valores.

Ejercicio 5. Filas continuas arbitrariamente tardías

Demuestra la versión de R1 que sólo exige filas continuas en x_0 con índices arbitrariamente grandes.

Solución. Ante $\varepsilon > 0$, el contrato uniforme entrega un corte N para error $\varepsilon/3$. La hipótesis de índices continuos arbitrariamente grandes permite tomar algún $n \geq N$ cuya fila sea continua en x_0. Fijamos esa fila y su radio para variación menor que $\varepsilon/3$. Como está en la cola, los errores de aproximación en x y x_0 también son menores que esa cantidad. La triangular de tres términos prueba continuidad de f en el centro. Se necesita sólo una fila adecuada para la tolerancia recibida, sin construir una subsucesión infinita de ellas.

28.2. Dos límites con un presupuesto común

Para intercambiar el límite del índice y el de la entrada debemos comprobar primero que existan los dos destinos finales. Si las filas ya tienen límite en el centro, el control uniforme hará de Cauchy la sucesión de esos límites. Después fijaremos una fila que aproxime a la función y cuyo límite aproxime al destino construido. **R2 — Existencia e intercambio de límites.** Sea a punto de acumulación de $X \subseteq \mathbb{R}$. Supongamos $f_n \to f$ uniformemente en X y que existen los límites relativos perforados

$$p_n = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in X}} f_n(x) \in \mathbb{R}.$$

Entonces existe $p = \lim_n p_n$, existe el límite relativo de f en a y ambos son p. El centro puede pertenecer o no a X; su valor, si existe, no interviene en estos límites perforados. Para construir p, usamos Cauchy uniforme de C27. Dada $\eta > 0$, hay N con $|f_n(x) - f_m(x)| < \eta/2$ para $m, n \geq N$ y toda entrada. Fijamos esos dos índices y pasamos $x \to a$. Álgebra del absoluto y orden de C13 dan

$|p_n - p_m| \leq \eta/2 < \eta$. Como a es punto de acumulación de X, las ventanas perforadas contienen entradas arbitrariamente cercanas y el paso al límite tiene su dominio acreditado. La desigualdad obtenida hace de Cauchy la sucesión (p_n); C10 proporciona su único límite real p. Ahora, para $\varepsilon > 0$, elegimos una fila n suficientemente grande para que $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon/3$ en todo X y $|p_n - p| < \varepsilon/3$. Con **ese índice fijo**, el límite de la fila da un radio con $|f_n(x) - p_n| < \varepsilon/3$ en la ventana perforada. Por triangular, $|f(x) - p| < \varepsilon$. Se ha probado la existencia del límite de f, además de la igualdad

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in X}} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{\substack{x \to a \\ x \in X}} f_n(x).$$

Si desde el principio ya existe $\lim_{x \to a} f(x) = p$, la prueba se abrevia pasando al límite la cota uniforme con margen $\varepsilon/2$: $|p_n - p| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$. Uniformidad sólo en una vecindad perforada fija también basta: restringimos el dominio antes de aplicar R2. Una vecindad dependiente del índice no aporta ese contrato común.

Ruta conjunta dada. Si $x_n \in X \setminus \{a\}$ y $x_n \to a$, el presupuesto

$|f_n(x_n) - p| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - p|$ da convergencia a p. El corte uniforme controla el primer término y el límite recién construido controla el segundo. No se selecciona una ruta a partir de una negación. Para $f_n(x) = x + 1/(n+1)$, $a = 0$, tenemos $p_n = 1/(n+1)$ y $p = 0$. En cambio, $r_n(x) = (n+1)x/[1 + (n+1)x]$ sobre $(0, 1]$ tiene límite puntual uno, pero cada fila tiende a cero cuando $x \downarrow 0$. Los iterados son uno y cero; la ruta $x_n = 1/(n+1)$ vale $1/2$. La falta de uniformidad explica la discrepancia, sin negar existencia de ambos iterados.

Ejercicios de la sección 28.2.

Ejercicio 6. Construir el destino de los destinos

Bajo R2, demuestra que los límites de fila p_n forman una sucesión de Cauchy.

Solución. Bajo R2, $f_n \to f$ uniformemente y cada fila tiene límite relativo perforado p_n en el centro de acumulación a. Para $\eta > 0$, Cauchy uniforme proporciona N con $|f_n(x) - f_m(x)| < \eta/2$ para todo $m, n \geq N$ y toda entrada. Fijamos esos índices y llevamos $x \to a$ dentro del dominio perforado. El álgebra de límites y la continuidad del absoluto dan destino $|p_n - p_m|$, y la preservación del orden da $|p_n - p_m| \leq \eta/2 < \eta$. El corte sirve para todos los pares tardíos,

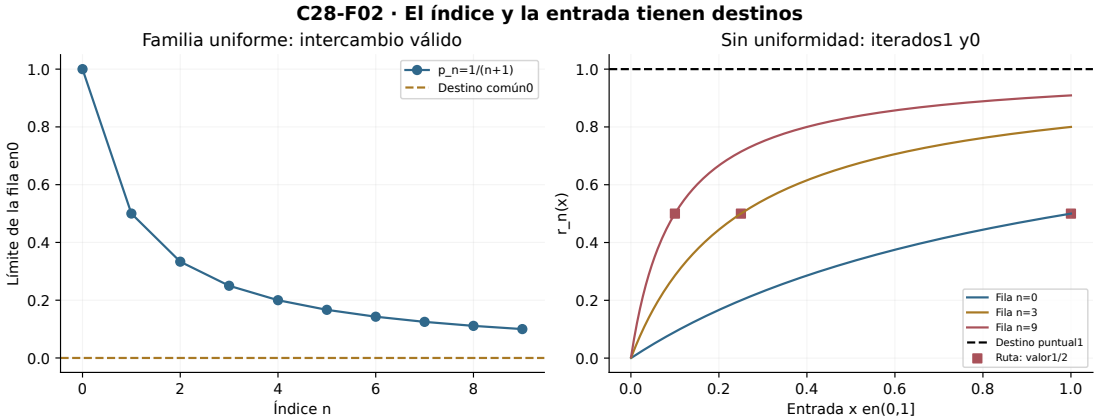


Figura 28.2. La familia uniforme x+1/(n+1) tiene límites de fila1/(n+1) en cero y destino común0. En la familia racional r_n=(n+1)x/[1+(n+1)x], el límite puntual en(0,1] es1, pero los destinos de fila en cero son0. La ruta dada1/(n+1) vale1/2. Las líneas horizontales muestran destinos calculados, no una inferencia de muestras.

así (p_n) es de Cauchy. La acumulación asegura entradas efectivas y unicidad de los límites utilizados. Completitud de C10 construye su destino real p.

Ejercicio 7. El límite que aún no existía

Completa la prueba de existencia de $\lim_{x\to a} f(x)$ en R2.

Solución. Ya se construyó $p = \lim_n p_n$. Fijada $\varepsilon > 0$, escogemos una fila n posterior al corte uniforme para error $\varepsilon/3$ y al corte numérico para $|p_n - p| < \varepsilon/3$. Con ese índice fijo, el límite local de la fila proporciona $\delta > 0$ con $|f_n(x) - p_n| < \varepsilon/3$ para toda entrada perforada a distancia menor que δ de a. La triangular da $|f(x) - p| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - p_n| + |p_n - p| < \varepsilon$. Esto prueba existencia del límite relativo de f y su igualdad con p. El valor en a, si pertenece al dominio, no interviene en el contrato perforado.

Ejercicio 8. Iterados diferentes

Calcula los dos iterados y la ruta $x_n = 1/(n+1)$ de $r_n(x) = (n+1)x/[1+(n+1)x]$ en $(0, 1]$.

Solución. Para $x > 0$ fijo, $|r_n(x) - 1| = 1/[1 + (n+1)x] \to 0$, así el límite por índice es uno y su límite posterior por $x \to 0^+$ también es uno. Para n fijo, la continuidad del cociente en cero da $\lim_{x\to 0^+} r_n(x) = 0$; el límite por índice de esos destinos es cero. En la ruta $x_n = 1/(n+1)$, el producto de escala vale uno y $r_n(x_n) = 1/2$ para toda etapa. Los dos iterados y la diagonal están definidos y difieren. No hay uniformidad hacia uno en $(0, 1]$: el error se aproxima a uno al acercar la entrada al origen en una fila fija, por lo que su supremo es uno.

Retorno visual. Véase C28-F02, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 9. Uniformidad en una ventana fija

Explica cómo R2 se aplica si sólo hay convergencia uniforme en $X \cap \{0 < |x - a| < r\}$ para un $r > 0$ fijo.

Solución. Sea $Y = X \cap \{x : 0 < |x - a| < r\}$, con $r > 0$ fijo. El centro sigue siendo punto de acumulación de Y, y cada límite de fila en a se conserva al restringir porque las entradas suficientemente próximas ya pertenecen a esa ventana. La uniformidad supuesta en Y permite aplicar R2 allí y obtener un destino p para los límites de fila y para la función restringida. Para volver a X, dado un radio válido en Y tomamos su mínimo con r. Toda entrada perforada de X dentro de ese radio pertenece a Y y cumple la misma desigualdad. Ventanas diferentes por fila no proporcionan este dominio común fijo.

Ejercicio 10. Una ruta conjunta

Prueba $f_n(x_n) \to p$ bajo R2 para cualquier ruta dada $x_n \in X \setminus \{a\}$ con $x_n \to a$.
Solución. La ruta está dada con $x_n \in X \setminus \{a\}$ y $x_n \to a$. R2 ya probó que $f(x) \to p$ en el dominio perforado. Para $\varepsilon > 0$, la uniformidad da un corte para $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$ en toda entrada. El límite relativo de f da un radio, y la convergencia de la ruta da otro corte desde el que $|f(x_n) - p| < \varepsilon/2$. El máximo de ambos cortes controla $|f_n(x_n) - p| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - p| < \varepsilon$. No se escoge una ruta por cada escala: se demuestra la afirmación para cualquier ruta admisible ya dada.

28.3. Compacidad y monotonía: el mecanismo de Dini

La continuidad del destino no bastaba para controlar las potencias en $(0, 1)$. Al añadir compacidad del dominio y monotonía de las columnas, los cortes locales podrán reunirse mediante una cubierta finita. Ése será el mecanismo del teorema de Dini. **R3 — Dini, con todas sus hipótesis.** Sea $K \subseteq \mathbb{R}$ compacto. Sean f_n continuas relativamente a K, decrecientes por columnas y convergentes puntualmente a una función continua f. Entonces $f_n \to f$ uniformemente en K. Para filas crecientes aplicamos el resultado a $-f_n$.

El orden pasa al límite numérico, así $e_n(x) = f_n(x) - f(x) \geq 0$; además $e_{n+1} \leq e_n$ y $e_n \to 0$ puntualmente. Fijamos $\varepsilon > 0$ y definimos los abiertos relativos $U_n = \{x \in K : e_n(x) < \varepsilon/2\}$. Continuidad de f_n y f hace abiertos estos conjuntos. Son crecientes y cubren K por convergencia puntual. Para conectar con la definición de cubierta de C16, podemos usar todos los pares (n, r) de bolas reales cuyo corte con K esté contenido en U_n: esa familia abierta cubre K sin escoger un radio por cada punto. Compacidad entrega una subfamilia finita. Si $K \neq \emptyset$, sus índices naturales tienen máximo N y todos sus cortes están en U_N. Por tanto $e_n(x) < \varepsilon/2 < \varepsilon$ para todo $x \in K$ y $n \geq N$. Si K es vacío, el contrato es vacuo.

La convergencia puntual hace que los abiertos U_n cubran el compacto. La continuidad garantiza que son abiertos; la compacidad reduce la cubierta a finitísimos índices y la monotonía permite dominarlos con su máximo y conservar el control en toda la cola. La prueba no proporciona una tasa geométrica ni una fórmula universal para $N(\varepsilon)$: construye un corte a partir de la cubierta correspondiente a esa tolerancia.

Para $f_n(x) = x/(n+1)$ en $[0, 1]$, las columnas decrecen a cero y la cota explícita $1/(n+1)$ confirma el teorema. Las potencias en $[0, 1]$ tienen destino discontinuo y conservan envolvente uno. En $(0, 1)$ las mismas potencias tienen destino continuo, pero el dominio no es compacto y la envolvente sigue siendo uno. Las indicadoras $s_n = \mathbf{1}_{(0,1/(n+1))}$ sobre $[0, 1]$ decrecen puntualmente a cero continuo y tienen envolvente uno: **sus filas no son continuas**. Las tiendas t_n de C26 son continuas en el compacto y tienden puntualmente a cero continuo, pero no tienen monotonía por columnas; su altura máxima uno persiste. Cada ejemplo elimina una hipótesis diferente.

Otro uso de finitud. Si una familia dada de abiertos cubre un compacto y la convergencia es uniforme en el corte del compacto con cada miembro, una subcubierta finita y C27 producen uniformidad en todo el compacto. «Uniforme cerca de cada punto» debe significar uniformidad en una vecindad fija del punto; continuidad local sola no lo dice. La cubierta se construye con todos los abiertos admisibles, sin elegir uno por punto.

Ejercicios de la sección 28.3.

Ejercicio 11. La cubierta creciente

Prueba Dini para filas continuas decrecientes hacia un límite continuo en un compacto.
Solución. Sean las filas continuas sobre un compacto K, decrecientes por columnas hacia una función continua f. El orden al límite da $e_n = f_n - f \geq 0$; los errores son continuos y decrecen puntualmente a cero. Para $\varepsilon > 0$, los abiertos relativos $U_n = \{x \in K : e_n(x) < \varepsilon/2\}$ forman una cubierta creciente de K. Compacidad proporciona una subcubierta finita $U_{n_1}, \ldots, U_{n_k}$. Tomamos $N = \max(n_1, \ldots, n_k)$. Como la cubierta es creciente, $K \subseteq U_N \subseteq U_n$

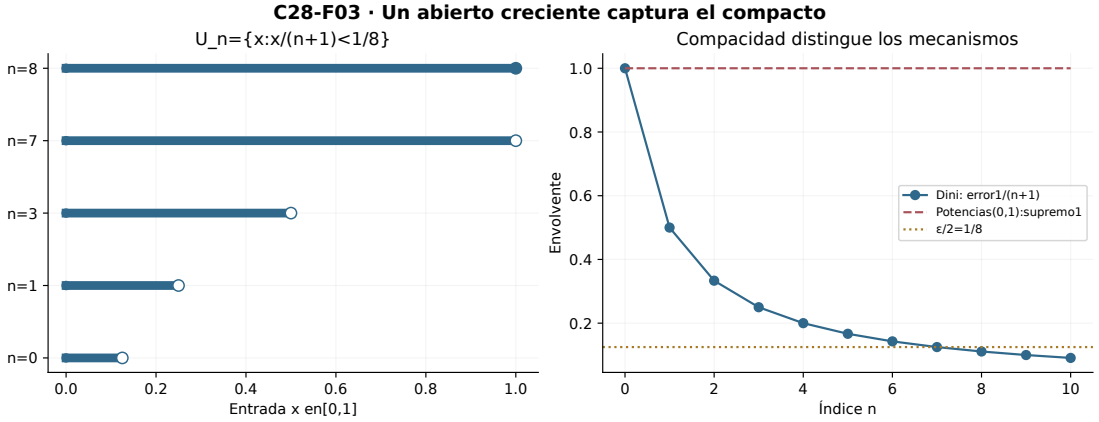


Figura 28.3. Para e_n=x/(n+1) en[0,1] y tolerancia1/4, los abiertos relativos U_n={e_n<1/8} crecen hasta cubrir todo el segmento desde n=8. En n=7 falta el extremo1. Potencias en(0,1) conservan envolvente1 pese a destino continuo: falta compacidad. Cada abierto y cada corte están definidos por la desigualdad exacta.

para todo $n \geq N$. Luego $|f_n(x) - f(x)| = e_n(x) < \varepsilon/2 < \varepsilon$ para toda entrada de esa cola. Ésta es uniformidad. Si K es vacío, el contrato es vacuo y se toma cualquier corte.

Retorno visual. Véase C28-F03, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 12. Sin compacidad

Usa potencias en $(0, 1)$ para mostrar que no puede omitirse compacidad en Dini.

Solución. En $(0, 1)$, cada potencia es continua, las columnas decrecen y el destino puntual es la función cero continua. Pero para cada $n \geq 1$ su error supremo es uno, mediante entradas arbitrariamente próximas a uno. No hay uniformidad. La cubierta creciente de error pequeño de la prueba de Dini no tiene una subcubierta finita que alcance todo el dominio: cualquier máximo de índices deja entradas próximas a uno con error grande. El dominio abierto no es compacto, mostrando que esa hipótesis sostiene un paso necesario de la prueba.

Ejercicio 13. Sin continuidad de las filas

Analiza $s_n = \mathbf{1}_{(0,1/(n+1))}$ en $[0, 1]$.

Solución. Los intervalos $(0, 1/(n + 1))$ se encogen, así $s_{n+1} \leq s_n$ por columnas. En cero la altura siempre es cero; en cualquier $x > 0$ fijo, desde $n + 1 > 1/x$ la entrada queda fuera y la cola vale cero. El límite es la función cero continua sobre el compacto $[0, 1]$. Sin embargo $x_n = 1/[2(n + 1)]$ tiene altura uno en toda etapa, así el máximo de error es uno y no hay uniformidad. Cada fila es discontinua relativamente en cero y en el otro extremo de su intervalo positivo. Falta la continuidad de las filas requerida por Dini.

Ejercicio 14. Sin monotonía

Explica qué hipótesis de Dini falta para las tiendas de C26 en $[0, 1]$.

Solución. Las tiendas de C26 son continuas sobre el compacto $[0, 1]$, tienen límite puntual cero continuo y conservan máximo uno en cada etapa. Para mostrar directamente la falta de monotonía decreciente, fijamos $x = 2/9$. En la etapa cero, con $k = 3$, la altura es cero; en la etapa seis, con $k = 9$, es uno. Esa columna aumentó. Tampoco puede ser una familia creciente: en $x = 2/3$ la primera altura es uno y la cola termina en cero. Así las columnas no tienen un mismo sentido de monotonía. Es la hipótesis de Dini que este ejemplo no satisface.

Ejercicio 15. Pegar uniformidad local

Prueba que una cubierta abierta dada de un compacto, con convergencia uniforme en cada corte, permite uniformidad global.

Solución. Sea una cubierta abierta dada de un compacto K, y supongamos uniformidad hacia la misma candidata en cada corte de la cubierta con K. Compacidad extrae finitísimos abiertos cuyos cortes todavía cubren K. Para $\varepsilon > 0$, cada corte seleccionado entrega un índice válido; tomamos el máximo de esa lista finita. Toda entrada de K pertenece a alguno y cumple el error menor que ε en cualquier etapa posterior al máximo. Así hay uniformidad global. Las piezas son fijas antes de recibir los índices. Si K es vacío, cualquier corte sirve sin seleccionar piezas.

28.4. La integral soporta un error global pequeño

Para transportar integrabilidad no basta estimar una diferencia de integrales: primero debe existir la integral del límite. Trabajaremos en un intervalo fijo $[a, b]$, con $a < b$ y longitud $\ell = b - a$. La banda uniforme permitirá comparar las brechas de Darboux antes de comparar los valores integrales. **R4 — Límite uniforme de integrables.** Si cada f_n es integrable de Riemann en $[a, b]$ y $f_n \to f$ uniformemente, entonces f es integrable y

$\lim_n \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$. Primero existe una barrera para f: el corte uniforme para error uno entrega una fila acotada f_N y $|f| \le |f_N| + 1$. Por ello las imágenes locales no vacías tienen supremo e ínfimo reales. Para cualquier función acotada u con $|f - u| \le \delta$ y cualquier partición P, comparación de cotas en cada pieza da

$$U(f, P) \le U(u, P) + \delta\ell, \qquad L(f, P) \ge L(u, P) - \delta\ell.$$

En cada pieza, una cota superior de u más δ acota todos los valores de f, y una cota inferior menos δ queda por debajo de ellos. Tomar supremo e ínfimo conserva estas comparaciones débiles. Al multiplicar por anchuras y sumar, las correcciones acumulan exactamente $\delta\ell$ a cada lado. Restando las dos sumas resulta $G(f, P) \le G(u, P) + 2\delta\ell$.

Dada $\varepsilon > 0$, escogemos una fila con error menor que $\delta = \varepsilon/[8(\ell + 1)]$ y luego una partición de esa fila con brecha menor que $\varepsilon/2$. La brecha de f resulta menor que $\varepsilon/2 + \varepsilon/4 < \varepsilon$. El criterio de Darboux de C23 prueba integrabilidad **antes** de comparar valores integrales. Ahora $f_n - f$ y su valor absoluto son integrables por C23. Para toda envolvente real $E_n = \sup_{[a,b]} |f_n - f|$ de la cola,

$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| \le \int_a^b |f_n - f| \le \ell E_n$. Como $E_n \to 0$, el límite sigue. La desigualdad es también un certificado de error para una etapa concreta; no se necesita que el máximo se alcance. Para $a = b$, las integrales son cero por convención y no se divide por una longitud nula. Orientar al revés cambia el signo de ambos valores, conservando la cota absoluta con $|b - a|$.

Para $f_n(t) = t^2 + 1/(n + 1)$ en $[0, 1]$, la integral es $1/3 + 1/(n + 1)$ y el error es exactamente $E_n = 1/(n + 1)$. La cota de longitud es óptima para errores constantes de un signo. **Puntualidad no basta.** Las tiendas normalizadas $b_n = (n + 3)t_n$ de C26 son continuas e integrables, tienden puntualmente a cero y tienen integral uno. Ambas integrales comparadas existen y difieren. Las indicadoras finitas de racionales de C25 tienden a Dirichlet, que ni siquiera es integrable: allí la comparación final no está definida. Las dos fallas son distintas.

Ejercicios de la sección 28.4.

Ejercicio 16. Existencia antes de integrar

Prueba integrabilidad del límite uniforme de funciones integrables mediante brechas de Darboux.

Solución. Sea $\ell = b - a > 0$. La uniformidad con tolerancia uno permite fijar una fila integrable f_N, acotada por algún B_N, con $|f - f_N| < 1$ en todo el segmento. Así $|f| \le B_N + 1$ y sus sumas de Darboux están definidas. Para $\varepsilon > 0$, escogemos una fila con error global a lo sumo $\delta = \varepsilon/[8(\ell + 1)]$, y una partición de esa fila con brecha menor que $\varepsilon/2$. La comparación de oscilaciones da $G(f, P) \le G(f_n, P) + 2\delta\ell < \varepsilon/2 + \varepsilon\ell/[4(\ell + 1)] < 3\varepsilon/4 < \varepsilon$. Darboux

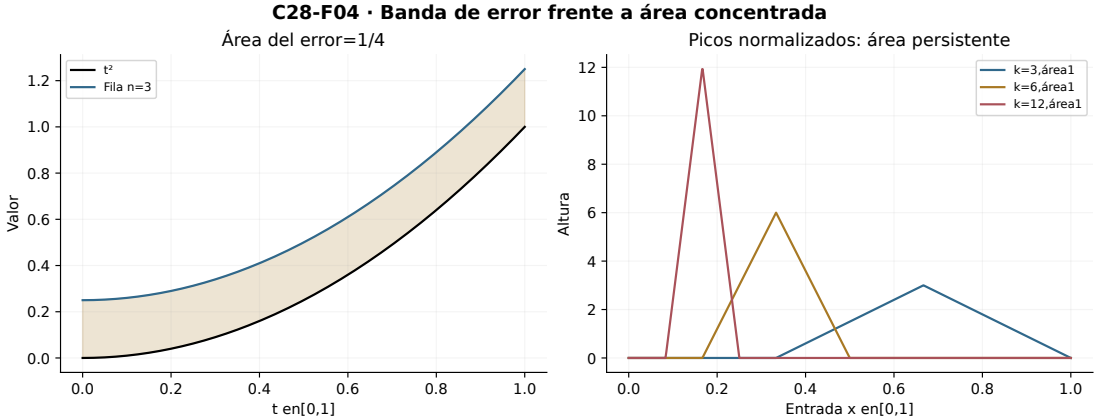


Figura 28.4. La perturbación constante1/(n+1) sobre t² en[0,1] tiene área de error igual a su envolvente. Las tiendas normalizadas de k=n+3 conservan área1 y altura k, pese a destino puntual0. Los perfiles son continuos y sus áreas se acreditan por ramas afines antes de dibujar.

prueba integrabilidad del destino antes de escribir su valor integral. Si $a = b$, la integral se trata por la convención degenerada y no se divide por ℓ.

Ejercicio 17. Error del valor integral

Obtén una cota del error de integrales en un segmento de longitud ℓ con envolvente E_n.
Solución. Una vez probada la integrabilidad de f, la diferencia $f_n - f$ y su absoluto son integrables por C23. En la cola donde existe la envolvente real E_n, cada error está acotado por ella. Linealidad, desigualdad triangular integral y orden dan $|I_n - I| = |\int_a^b (f_n - f)| \le \int_a^b |f_n - f| \le \ell E_n$. La cota es universal y no necesita un máximo alcanzado. Como la uniformidad da $E_n \to 0$ y ℓ es fija y finita, los valores integrales convergen a I. En el caso degenerado ambos valores son cero.

Ejercicio 18. La cota se alcanza

Calcula integral y error de $f_n(t) = t^2 + 1/(n+1)$ en $[0,1]$.
Solución. Las tasas $f_n(t) = t^2 + 1/(n+1)$ son continuas e integrables en $[0,1]$. Su límite uniforme es $f(t) = t^2$, porque el error es exactamente $E_n = 1/(n+1)$ en todas las entradas. La integral del cuadrado es $1/3$ y la perturbación constante integra $1/(n+1)$ por longitud uno. Así $I_n = 1/3 + 1/(n+1)$, $I = 1/3$ y $|I_n - I| = 1/(n+1) = \ell E_n$. La cota general se alcanza cuando la perturbación tiene magnitud y signo constantes.

Ejercicio 19. Destinos existentes pero distintos

Usa las tiendas normalizadas para refutar intercambio integral bajo convergencia sólo puntual.
Solución. Las tiendas t_n son continuas y tienen integral $1/(n+3)$. Para $b_n = (n+3)t_n$, la linealidad da integral uno en cada etapa. Cada entrada fija queda finalmente fuera del soporte y la columna es cero, así el límite puntual es la función cero, integrable con valor cero. Por tanto $\lim_n \int_0^1 b_n = 1$ y $\int_0^1 \lim_n b_n = 0$. Las dos operaciones existen y dan valores distintos. La uniformidad falta porque el máximo de error de las filas normalizadas es $n+3$, alcanzado en su centro móvil.

Retorno visual. Véase C28-F04, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 20. Un destino no integrable

Distingue la falla integral de los indicadores finitos de racionales de C25 de la anterior.

Solución. Los indicadores de los conjuntos finitos E_{n+1} de racionales son integrables y tienen valor cero por modificaciones finitas. En cada racional reducido, la columna pasa definitivamente a uno cuando su denominador queda incluido; en cada irracional permanece cero. El destino puntual es Dirichlet, que tiene ínfimo cero y supremo uno en toda pieza no degenerada. Su brecha fija impide integrabilidad propia. Así el límite de valores integrales existe y vale cero, pero la integral del destino no existe. Este fallo difiere del ejemplo de tiendas normalizadas, donde ambas operaciones estaban definidas y discrepaban en valor.

28.5. Acumulaciones, pesos y extremos variables

El presupuesto de R4 controla más que una integral final. Sea $c \in [a,b]$ fijo y definamos, por restricción y orientación de C23, $A_n(x) = \int_c^x f_n(t)\,dt, \qquad A(x) = \int_c^x f(t)\,dt.$

R5 — Acumulaciones uniformes. Bajo R4, para todo $x \in [a,b]$,

$|A_n(x) - A(x)| \le |x-c|E_n \le \ell E_n$. Si $x < c$, invertimos los límites de integración antes de aplicar orden; si $x = c$, ambos lados son cero. El mismo corte controla todos los destinos de acumulación. No es una familia infinita de cortes escogidos por separado. Si todas las integrandas son continuas, R1 prueba continuidad de f. C24 entrega $A_n' = f_n$ y $A' = f$ en (a,b), con derivadas relativas de un lado en los extremos cuando corresponda. Así se conservan simultáneamente acumulación y tasa. Para integrandas sólo integrables, A sigue existiendo y siendo continua por C24, pero no se identifica su derivada con f en un punto discontinuo sin hipótesis adicional.

Peso fijo. Si w es integrable y $|w| \le M$, el producto wf_n y wf es integrable por C23 y $\left|\int_a^b w(t)(f_n(t) - f(t))\,dt\right| \le M\ell E_n$. Se puede mejorar a $E_n \int_a^b |w|$. Existencia de los productos y del absoluto precede a esta estimación. No se está multiplicando las integrales de los factores. **Extremos móviles dentro de un marco fijo.** Sean $u_n, v_n, u, v \in [a,b]$, $u_n \to u$, $v_n \to v$. Si $|f| \le B$, la aditividad orientada da

$\left|\int_{u_n}^{v_n} f_n - \int_u^v f\right| \le \ell E_n + B|u_n - u| + B|v_n - v|$. Descomponemos el error en dos cambios. Primero sustituimos f_n por f sin mover los extremos, con coste a lo sumo ℓE_n. Luego, por aditividad orientada, mover cada extremo de la integral de f añade un tramo cuya integral tiene magnitud a lo sumo B veces su longitud. Obtenemos los otros dos términos de la cota, también cuando los extremos coinciden o se invierten. Todos tienden a cero dentro de un mismo marco finito.

Para $f_n(t) = t^2 + 1/(n+1)$, $c = 0$, $A_n(x) = x^3/3 + x/(n+1)$. El error de acumulación es $|x|/(n+1)$; en $[0,1]$ su envolvente es $1/(n+1)$. Si el peso es $w(t) = t$, el error integral final es $1/[2(n+1)]$. **La longitud también es una hipótesis.** Las funciones constantes $1/(n+1)$ convergen uniformemente a cero en toda la recta. Sin embargo, su integral en $[0, n+1]$ vale uno. Los intervalos crecen y no hay una longitud fija que multiplique un error tendente a cero. No se ha definido ni utilizado aquí una integral impropia: cada etapa es una integral propia finita. Uniformidad es suficiente en el marco fijo, pero no necesaria para igualdad de un par de límites integrales: las tiendas sin normalizar tienen integral $1/(n+3) \to 0$ sin converger uniformemente.

Ejercicios de la sección 28.5.

Ejercicio 21. Todas las acumulaciones

Prueba uniformidad de $A_n(x) = \int_c^x f_n$ hacia $A(x) = \int_c^x f$ bajo R4.

Solución. Bajo R4, las filas y el destino son integrables y sus restricciones permiten definir las acumuladas desde $c \in [a,b]$. Por linealidad, $A_n(x) - A(x) = \int_c^x (f_n - f)$. Si $x > c$, el orden integral da magnitud a lo sumo $(x-c)E_n$. Si $x < c$, se invierte orientación y se obtiene la misma cota con $c-x$; en igualdad, la diferencia es cero. Por tanto $|A_n(x) - A(x)| \le |x-c|E_n \le \ell E_n$ para todo destino x. Esta barrera común tiende a cero y prueba uniformidad de las acumuladas en el segmento completo.

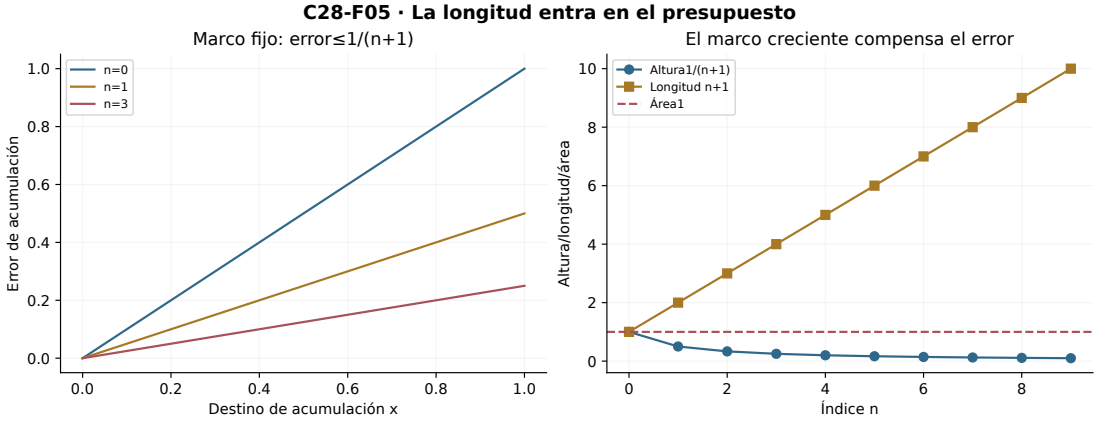


Figura 28.5. Acumuladas de t²+1/(n+1) desde0: error x/(n+1), bajo una cota común1/(n+1) en[0,1]. Para constantes1/(n+1) integradas en[0,n+1], la altura baja y la longitud crece; el área queda1. Se representan integrales propias finitas de cada etapa, sin introducir integración impropia.

Ejercicio 22. Peso integrable

Para un peso fijo integrable w, obtiene el error ponderado usando $\int |w|$.

Solución. El peso fijo w, las filas y el destino son integrables, así C23 garantiza productos, diferencias y absolutos integrables. La diferencia de valores ponderados es la integral de $w(f_n - f)$. En toda entrada de la cola, $|w(f_n - f)| \le E_n|w|$. Luego $|\int wf_n - \int wf| \le \int |w(f_n - f)| \le E_n \int_a^b |w|$. El último factor es un real finito fijo, así el error tiende a cero. Si vale cero, la cota hace el error exactamente cero. Con una barrera $|w| \le M$ también se obtiene la cota $M\ell E_n$, posiblemente menos ajustada.

Ejercicio 23. Mover los extremos

Demuestra la estimación de R5 para $u_n, v_n \to u, v$ dentro de $[a, b]$.

Solución. Los extremos u_n, v_n, u, v permanecen en $[a, b]$ y el destino integrable tiene cota $|f| \le B$. Insertamos la integral de f entre los extremos móviles. Cambiar la integranda cuesta a lo sumo $|v_n - u_n|E_n \le \ell E_n$. Para los extremos, aditividad orientada da $\int_{u_n}^{v_n} f - \int_u^v f = \int_{u_n}^{u} f + \int_v^{v_n} f$. Las magnitudes de estas dos contribuciones no superan $B|u_n - u|$ y $B|v_n - v|$. La triangular produce $|\int_{u_n}^{v_n} f_n - \int_u^v f| \le \ell E_n + B|u_n - u| + B|v_n - v|$. Los tres términos tienden a cero. La orientación cubre cualquier orden de extremos y los intervalos degenerados.

Ejercicio 24. El marco que crece

Explica por qué $f_n = 1/(n + 1)$ en $\mathbb{R}$ puede tener integral uno en $[0, n + 1]$ pese a convergencia uniforme a cero.

Solución. Sobre la recta, las funciones constantes $f_n = 1/(n+1)$ convergen uniformemente a cero con error $E_n = 1/(n+1)$. En el intervalo de la etapa $[0, n+1]$, su integral propia es altura por longitud: $\int_0^{n+1} f_n = (1/(n+1))(n+1) = 1$. La longitud creciente compensa exactamente el error pequeño. El teorema de intercambio de R4 usa un segmento fijo de longitud finita, y el de extremos móviles usa extremos convergentes dentro de ese marco. Estas hipótesis no se cumplen aquí. Cada integral del ejemplo es propia y finita; no se necesita una teoría de integrales impropias.

Retorno visual. Véase C28-F05, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 25. Continuidad de la acumulada y derivada

¿Qué cambia al acumular integrandas continuas frente a integrandas sólo integrables?

Solución. La integrabilidad basta para construir acumulaciones y hacerlas Lipschitz, por una cota absoluta de la tasa. Bajo uniformidad de las integrandas, sus acumuladas convergen uniformemente por la longitud común. Si las integrandas son además continuas, R1 hace continuo al destino y C24 identifica las derivadas de sus acumuladas con las tasas en el interior, y relativamente en los bordes. Si sólo son integrables, la recuperación de la tasa exige continuidad en el centro considerado. Un pico aislado puede cambiar la tasa sin cambiar ninguna acumulación; un salto puede producir una esquina sin derivada. La continuidad de la acumulada y la identificación de su derivada tienen por tanto hipótesis diferentes.

28.6. Derivadas uniformes y un valor de anclaje

Un error pequeño de valores no controla por sí solo los cocientes incrementales: al dividir por una distancia que tiende a cero puede amplificarse. Para derivar el límite buscaremos primero un error de incrementos que sea proporcional a esa distancia. La convergencia uniforme de las derivadas permitirá obtenerlo mediante Lagrange; un valor de anclaje fijará las constantes. **R6 — Teorema de convergencia de derivadas.** Sean $a < b$, f_n continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b). Supongamos que $g_n = f_n'$ converge uniformemente a g en (a, b) y que, para un $c \in [a, b]$, $f_n(c) \to \lambda$. Entonces existe f con $f_n \to f$ uniformemente en $[a, b]$, $f(c) = \lambda$ y $f' = g$ en (a, b). No se supone continuidad de las derivadas.

Construir los valores. C27 da Cauchy uniforme para g_n. Para m, n posteriores a un corte y $x \in [a, b]$, aplicamos C19 a $f_n - f_m$ en el segmento completo entre c y x. Su continuidad en los extremos y derivabilidad interior están acreditadas. Si la diferencia de derivadas es menor que η en todo (a, b), $|f_n(x) - f_m(x)| \le |f_n(c) - f_m(c)| + \eta|x - c|$.

El caso $x = c$ es directo. Dada $\varepsilon > 0$, pedimos al anclaje error menor que $\varepsilon/2$ y a las derivadas menor que $\varepsilon/[2(\ell + 1)]$, $\ell = b - a$. El máximo de ambos cortes prueba Cauchy uniforme de las filas. C27 construye el único f; R1 da continuidad en el cerrado y puntualidad identifica $f(c) = \lambda$. **Controlar incrementos antes de dividir.** Sean $E_n = \sup_{(a,b)} |g_n - g|$ las envolventes reales de la cola. Para $x, y \in [a, b]$, C19 aplicado a $f_m - f_n$ y la cota $E_m + E_n$ dan

$|(f_m - f_n)(y) - (f_m - f_n)(x)| \le (E_m + E_n)|y - x|$. Fijamos n, x, y y pasamos $m \to \infty$. C10/C13 conservan orden y C27 da $E_m \to 0$, por lo que $|(f - f_n)(y) - (f - f_n)(x)| \le E_n|y - x|$. El paso al límite ha producido una estimación entre incrementos de f y de una fila fija sin atribuir todavía derivada a f. El factor $|y - x|$ es lo que permitirá dividir después sin perder la cota de error.

Identificar la derivada. Fijamos $x_0 \in (a, b)$ y $\varepsilon > 0$. Elegimos una fila n con $E_n < \varepsilon/3$. Para cualquier $x \neq x_0$ admisible, la desigualdad anterior controla en E_n la diferencia de cocientes de f y f_n. La derivabilidad de esa fila fija aporta un radio para el segundo error. Finalmente,

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - g(x_0)\right| \le E_n + \left|\frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} - g_n(x_0)\right| + |g_n(x_0) - g(x_0)| < \varepsilon.$$

La tercera magnitud es a lo sumo E_n. Se ha demostrado $f'(x_0) = g(x_0)$ por definición, sin exigir una primitiva integral de una derivada discontinua. La misma cota de incrementos, con $x = c$, entrega el certificado $|f_n(x) - f(x)| \le |f_n(c) - \lambda| + |x - c|E_n$. En un intervalo abierto arbitrario el argumento se aplica a cada segmento cerrado contenido en él y que una el anclaje con la entrada. Produce un límite puntual y uniformidad en cada segmento acotado apropiado; en un intervalo no acotado no garantiza uniformidad global de valores. Para dominios desconectados, hace falta un anclaje por componente que se quiera construir; un valor no fija constantes en otra componente.

Ejercicios de la sección 28.6.

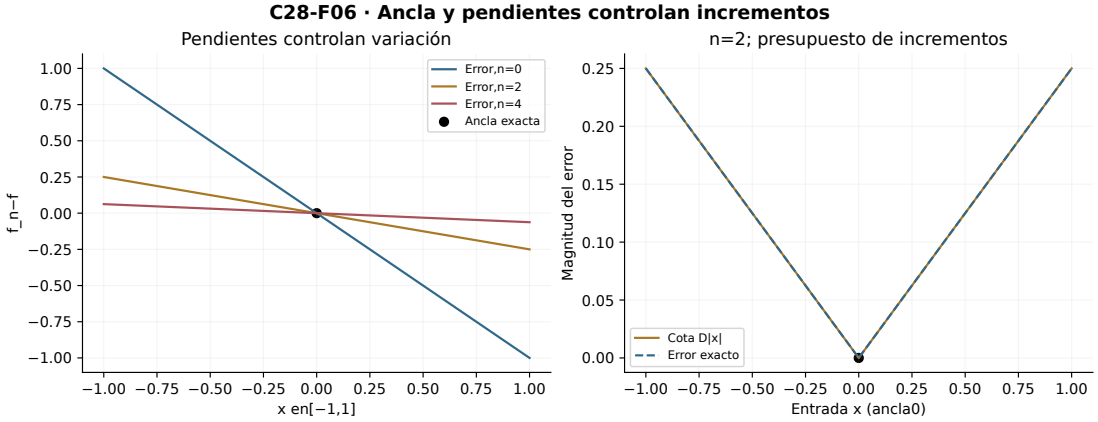


Figura 28.6. Con f_n=x²+(1−2^(−n))x y ancla0, el error de valores es−2^(−n)x y la envolvente de derivadas es2^(−n). La cota de incrementos del error es D_n|y−x|; desde el anclaje queda |error(x)|≤D_n|x|. La división por distancia se hace sólo después de obtener esta cota.

Ejercicio 26. La ancla y todos los valores

Prueba Cauchy uniforme de las filas bajo R6.

Solución. Sea $\ell = b - a$, con filas continuas en el cerrado y derivables dentro como en R6. La convergencia de $f_n(c)$ hace de Cauchy esa sucesión de anclaje. La uniformidad de $g_n = f_n'$ hace de Cauchy uniforme a las derivadas. Para $\varepsilon > 0$, reunimos un corte con $|f_n(c) - f_m(c)| < \varepsilon/2$ y otro con $|g_n - g_m| < \varepsilon/[2(\ell+1)]$ en el interior. Lagrange aplicado a $f_n - f_m$ entre c y cualquier x da $|f_n(x) - f_m(x)| \le |f_n(c) - f_m(c)| + \varepsilon|x-c|/[2(\ell+1)] < \varepsilon/2 + \varepsilon\ell/[2(\ell+1)] < \varepsilon$. El mismo corte sirve para todos los pares tardíos y todas las entradas. C27 construye el límite uniforme de valores.

Ejercicio 27. El error de incrementos

Demuestra $|(f - f_n)(y) - (f - f_n)(x)| \le E_n|y - x|$ sin suponer derivabilidad previa de f.

Solución. En la cola, las envolventes de derivadas dan $|g_m - g_n| \le |g_m - g| + |g - g_n| \le E_m + E_n$ en todo (a, b). Lagrange aplicado a $f_m - f_n$ entre $x, y \in [a, b]$ produce $|(f_m - f_n)(y) - (f_m - f_n)(x)| \le (E_m + E_n)|y - x|$. Fijamos n, x, y y llevamos $m \to \infty$. Las dos columnas de valores convergen a $f(y), f(x)$ y $E_m \to 0$, así el orden conserva $|(f - f_n)(y) - (f - f_n)(x)| \le E_n|y - x|$. Para $x = y$ es inmediato. No se ha usado derivabilidad de f; ésta se probará a partir de la estimación ya obtenida.

Ejercicio 28. Tres errores de cocientes

Completa la identificación $f' = g$ de R6 a partir de la cota de incrementos.

Solución. Fijamos $x_0 \in (a, b)$ y $\varepsilon > 0$. Elegimos una fila n con $E_n < \varepsilon/3$. Para $x \neq x_0$, dividir la cota de incrementos por $|x - x_0| > 0$ limita la magnitud de la diferencia de los cocientes de f y f_n por E_n. La derivabilidad de esa fila fija proporciona un radio en el que su cociente difiere de $g_n(x_0)$ en menos que $\varepsilon/3$. Reducimos el radio para permanecer en el interior. Finalmente, $|g_n(x_0) - g(x_0)| \le E_n$. La triangular entre el cociente de f, el de la fila, su derivada y $g(x_0)$ da error menor que ε. Esto es la definición de $f'(x_0) = g(x_0)$ y completa la prueba sin asumir de antemano esa derivada.

Ejercicio 29. Certificado de valores desde derivadas

Obtén una cota de aproximación de valores usando la ancla y E_n en R6.

Solución. Tomamos c como una de las entradas en la cota de incrementos del ejercicio anterior. Como la convergencia de la columna de anclaje identifica $f(c) = \lambda$, queda $|(f - f_n)(x) - (\lambda - f_n(c))| \le E_n|x - c|$. Por triangular, $|f_n(x) - f(x)| \le |f_n(c) - \lambda| + |x - c|E_n$. Reemplazar la distancia por ℓ da una cota uniforme de valores. El primer término mide la

constante inicial y el segundo la discrepancia de variaciones. Ambos tienden a cero; si el anclaje es exacto, sólo permanece el segundo.

Ejercicio 30. Derivadas sin continuidad

Explica por qué R6 no necesita continuidad de g_n ni de g.

Solución. Lagrange exige continuidad de las funciones comparadas en el segmento y derivabilidad en su interior, pero no continuidad de sus derivadas. R6 aplica esa herramienta a diferencias de filas y usa una cota uniforme de las diferencias de derivadas. La identificación final del destino se obtiene mediante cocientes de una fila fija y la cota proporcional de incrementos. No se integra g ni se presupone que sea una tasa continua o integrable. Si las derivadas tienen extensiones continuas y convergen uniformemente, el teorema de continuidad añade esa regularidad al destino como una conclusión adicional.

28.7. Lo que la convergencia de valores no controla

Los ejemplos siguientes separan las premisas del teorema de derivadas. La uniformidad de valores puede dejar un límite no derivable; incluso cuando éste sea derivable, el límite puntual de las derivadas puede ser distinto. También puede fallar la construcción de los valores si falta el anclaje.

R7 — Tres pruebas de frontera. Sea $k = n + 1$ y

$q_n(x) = \sqrt{x^2 + k^{-2}}$ $(x \in \mathbb{R})$. Las herramientas de raíces y cadena de C10/C18 dan $q_n' = x/\sqrt{x^2 + k^{-2}}$. Puesto que $|x| \le q_n(x) \le |x| + 1/k$, se tiene $\sup_{\mathbb{R}} |q_n - |x|| = 1/k$, alcanzado en cero. La segunda desigualdad sigue al cuadrar dos cantidades no negativas. El límite $|x|$ es continuo y no derivable en cero: los cocientes laterales son menos uno y uno. Cada fila sí es derivable allí, con derivada cero. Las derivadas convergen puntualmente a la función signo, con valor cero en el origen, que es discontinua. R1 refuta su convergencia uniforme, pues las derivadas de las filas son continuas.

Ahora recuperamos $h_n(x) = \frac{x}{1+kx^2}$, $h_n'(x) = \frac{1-kx^2}{(1+kx^2)^2}$. C27 da convergencia uniforme de valores a cero con envolvente $1/(2\sqrt{k})$. En cero las derivadas valen uno; para $x \neq 0$ tienden a cero. Para comprobarlo basta dividir numerador y denominador por k^2x^4, que es no nulo, o acotar con $1/(kx^2) + 1/(k^2x^4)$. El límite puntual de derivadas es la indicadora de cero, distinta de la derivada cero del límite de valores. La igualdad deseada falla en un punto donde **ambos** destinos de derivadas existen. No es sólo una falta de existencia.

El anclaje no es decorativo. Las funciones constantes $f_n = n$ tienen derivadas idénticamente cero y no convergen en ningún punto. Las constantes $(-1)^n$ tampoco convergen, aunque sus derivadas sí. En $[0, 1] \cup [2, 3]$ podemos fijar todas las filas en cero en la primera componente y en n en la segunda; una ancla en la primera no controla la segunda. No hay segmento del dominio atravesando el hueco al que aplicar C19.

Un control local no es global. Para $f_n(x) = x/(n + 1)$ en $\mathbb{R}$, las derivadas convergen uniformemente a cero y $f_n(0) = 0$. Los valores convergen uniformemente en cada segmento acotado, pero no en toda la recta: en $x = n+1$ el error es uno. El factor $|x-c|$ de R6 no tiene barrera global. Los errores h_n tienden a cero uniformemente, pero sus derivadas conservan valor uno en cero. Derivar no es, por tanto, una operación continua respecto de la sola norma de valores. La integración en el marco fijo sí tiene la estimación de R4. Para cada operación ha sido necesario identificar el presupuesto de error que su prueba utiliza.

Ejercicios de la sección 28.7.

Ejercicio 31. Una esquina como límite uniforme

Prueba convergencia uniforme de $q_n(x) = \sqrt{x^2 + (n + 1)^{-2}}$ a $|x|$ en $\mathbb{R}$ y describe su derivabilidad.

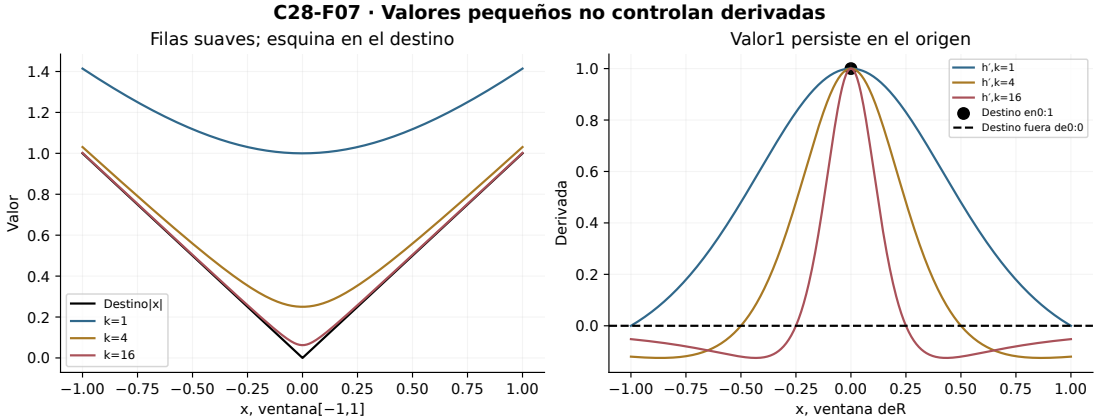


Figura 28.7. Raíces suavizadas sqrt(x²+1/k²) convergen uniformemente a|x|, que tiene esquina en0. Para h_n=x/(1+kx²), las derivadas son(1−kx²)/(1+kx²)² y conservan valor1 en0; su destino puntual vale0 fuera de0. Se muestra la ventana[−1,1] de reglas definidas sobre todaR. No se concluye uniformidad de derivadas.

Solución. Con $k = n + 1 > 0$, la raíz de $x^2 + k^{-2}$ es al menos $|x|$. Por otra parte, $(|x| + 1/k)^2 = x^2 + 2|x|/k + k^{-2} \geq x^2 + k^{-2}$ y ambos lados comparados son no negativos. Así $0 \leq q_n(x) - |x| \leq 1/k$ para toda entrada, con igualdad en cero. La envolvente exacta es $1/(n + 1) \to 0$, probando uniformidad en toda la recta. Cada fila es derivable, porque la raíz se aplica a argumentos positivos, y $q_n'(x) = x/\sqrt{x^2 + k^{-2}}$. El destino $|x|$ tiene cocientes menos uno a la izquierda de cero y uno a la derecha, así no es derivable allí. Uniformidad de valores no conserva esa propiedad.

Ejercicio 32. Los dos destinos de derivadas existen

Para $h_n = x/(1 + (n + 1)x^2)$, compara $\lim_n h_n'$ con la derivada de $\lim_n h_n$.

Solución. La envolvente de valores de h_n es $1/(2\sqrt{n + 1}) \to 0$, así su límite es la función cero uniformemente. Con $k = n + 1$, la regla del cociente da $h_n'(x) = (1 - kx^2)/(1 + kx^2)^2$. En cero vale uno para toda etapa; si $x \neq 0$, su magnitud está acotada por $1/(1 + kx^2) \to 0$. Por tanto las derivadas tienen límite puntual $\mathbf{1}_{\{0\}}$. La derivada de la función límite es cero en todo centro y difiere de esa indicadora en el origen. Las derivadas, continuas, no convergen uniformemente a su destino discontinuo por R1. El ejemplo conserva la existencia de ambas operaciones y muestra que sus valores no coinciden.

Retorno visual. Véase C28-F06, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 33. Sin anclaje

Construye dos familias con derivadas uniformemente cero y sin convergencia de valores.

Solución. Sobre un intervalo no vacío, las filas constantes $f_n(x) = n$ tienen derivadas cero en cada punto interior. Esa familia de derivadas es uniformemente constante cero, pero los valores crecen sin cota en cualquier anclaje y no convergen a un real. Otra familia es $f_n(x) = (-1)^n$, también con derivadas cero, cuyos valores alternan entre uno y menos uno sin límite. Ambos casos muestran que el control de derivadas deja libres las constantes aditivas. Ninguno cumple la convergencia del dato de anclaje exigida por R6.

Ejercicio 34. Sólo uniformidad en segmentos

Analiza R6 para $f_n = x/(n + 1)$ en toda la recta con anclaje cero.

Solución. En toda la recta, $f_n'(x) = 1/(n+1)$ converge uniformemente a cero y $f_n(0) = 0$ fija exactamente el anclaje. En cada segmento $[-M, M]$, el error de valores hacia cero tiene envolvente $M/(n+1) \to 0$. Así se obtiene uniformidad en marcos acotados. Globalmente, cada fila $x/(n+1)$ tiene errores no acotados; además la entrada $x = n+1$ mantiene error uno en todas las etapas. El factor $|x-c|$ del certificado de R6 carece de barrera en la recta. El resultado sobre un segmento fijo no promete uniformidad global allí.

Ejercicio 35. Una ancla por componente

Construye un ejemplo en $[0,1] \cup [2,3]$ donde la ancla en la primera pieza no controle la segunda.

Solución. En $X = [0,1] \cup [2,3]$, definimos $f_n = 0$ en la primera componente y $f_n = n$ en la segunda. Son continuas relativamente al dominio y derivables con derivada cero en los interiores de ambas piezas. Las derivadas convergen uniformemente a cero y el anclaje $f_n(0) = 0$ es exacto. Sin embargo cualquier columna de la segunda componente diverge. El segmento que une una entrada de cada pieza atraviesa $(1,2)$, donde las funciones no están dadas, así no puede aplicarse Lagrange para transportar el dato inicial. Se necesita una ancla que fije la constante de cada componente.

28.8. Certificar varias operaciones a la vez

En un ejemplo polinómico podemos calcular a la vez los errores de valores, derivadas y acumulaciones. Esto permitirá comparar las cotas generales con los errores exactos y comprobar qué exige una tolerancia estricta en la frontera de un corte.

R8 — Un paquete explícito. En $[-1,1]$, sean

$$f_n(x) = x^2 + (1-2^{-n})x, \quad f(x) = x^2 + x, \quad g_n(x) = 2x + 1 - 2^{-n}, \quad g(x) = 2x + 1.$$

Todas las filas son polinomios, $f_n(0) = 0$, y las diferencias de derivadas tienen envolvente $D_n = 2^{-n}$. R6 construye e identifica el límite con derivada g; la cota de anclaje da $|f_n(x) - f(x)| \le |x| D_n$. La igualdad directa muestra $E_n = D_n$, alcanzada en los extremos. R1 conserva continuidad y R4 permite integrar. En todo el intervalo final $[-1,1]$, el error integral firmado es cero porque la diferencia es impar; la cota general $2E_n$ sigue siendo válida, aunque no sea exacta en ese caso.

Con anclaje de acumulación en cero, C24 da

$$A_n(x) = x^3/3 + (1-2^{-n})x^2/2, \qquad A(x) = x^3/3 + x^2/2.$$

Por ello $\sup|A_n - A| = D_n/2$. Se conocen simultáneamente valores, pendientes, acumulaciones y sus tasas. Un certificado para error de derivadas menor que ε exige $2^{-n} < \varepsilon$, con desigualdad estricta: si $\varepsilon = 1/8$, desde $n = 4$ sirve, pero $n = 3$ está en la frontera. No se deduce una identidad de integrales de una gráfica. **Norma con dos capas.** Para funciones u continuas en $[a,b]$ con derivada interior que admita extensión continua al cerrado, llamamos $C^1([a,b])$ a esta clase y definimos

$\|u\|_{C^1} = \sup_{[a,b]} |u| + \sup_{[a,b]} |u'|$. Los extremos de u' son los valores de la extensión continua; coinciden con derivadas de un lado por C19 y paso al límite. Sus imágenes son acotadas por C16. Las propiedades de norma siguen aplicando las de C27 a las dos capas; identidad usa ya la capa de valores. Si $u_n \to u$ en esta norma, convergen uniformemente valores y derivadas. A la inversa, si una sucesión de C^1 tiene derivadas uniformes en el cerrado y valores convergentes en un anclaje, R1 hace continuo al límite de derivadas, R6 construye u y prueba convergencia en ambas capas. El límite de derivadas en los bordes es su extensión continua; la misma cota de incrementos identifica las derivadas laterales.

Un número finito de derivadas. Para $r \ge 1$ fijo, supongamos filas C^r en un mismo segmento, convergencia uniforme de sus derivadas de orden r y convergencia de los valores de órdenes $0, \dots, r-1$ en un anclaje común. Aplicamos R6 primero a las filas de orden $r-1$, después a las de orden $r-2$ y así un número finito de veces. Se construyen límites uniformes

para todos los órdenes y se identifica cada derivada con el siguiente. No se usa una serie infinita ni Taylor para justificar esta inducción finita. Para $r = 0$ sólo queda convergencia uniforme de valores.

Las pruebas utilizan tres controles distintos: una fila fija dentro de la banda para conservar continuidad; brechas de Darboux y longitud finita para integrar; incrementos proporcionales a la distancia y un anclaje para derivar. En cada caso, la existencia del destino se establece antes de identificar las operaciones en el límite. Estos argumentos se han aplicado a familias de funciones. Cuando las filas sean sumas parciales de una serie, habrá que demostrar las hipótesis sobre esa familia antes de integrar o derivar término a término; aún no se han usado el criterio M ni los radios de convergencia.

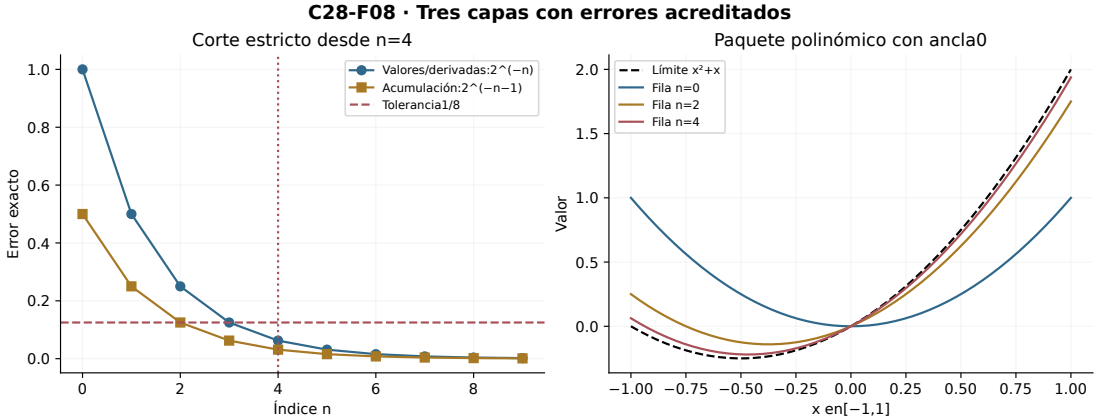


Figura 28.8. En el paquete polinómico dyádico sobre[−1,1], los errores exactos de valores y derivadas son2^(−n); el de acumulación es2^(−n)/2. Con tolerancia estricta1/8 para derivadas, n=3 es frontera y n=4 es el primer índice válido. Las curvas polinómicas y las envolventes provienen de fórmulas probadas.

Ejercicios de la sección 28.8.

Ejercicio 36. El paquete polinómico

Calcula envolventes de valores y derivadas de $f_n = x^2 + (1 - 2^{-n})x$ frente a $f = x^2 + x$ en $[-1, 1]$.

Solución. La diferencia del paquete es $f_n(x) - f(x) = -2^{-n}x$. En $[-1, 1]$ su magnitud máxima es 2^{-n}, alcanzada en ambos extremos. Las derivadas son $g_n(x) = 2x + 1 - 2^{-n}$ y $g(x) = 2x + 1$; su diferencia es la constante -2^{-n} y tiene la misma envolvente. Todas las funciones son polinomios y el anclaje en cero es exactamente cero. R6 permite identificar la derivada del destino bajo ese control. Para la norma de dos capas, $\|f_n - f\|_{C^1} = 2^{-n} + 2^{-n} = 2^{1-n}$, que tiende a cero.

Ejercicio 37. El error de acumulación

Obtén las acumuladas del ejemplo anterior con anclaje cero y su envolvente exacta.

Solución. Con anclaje de acumulación en cero, las primitivas polinómicas y Newton–Leibniz dan $A_n(x) = x^3/3 + (1 - 2^{-n})x^2/2$ y $A(x) = x^3/3 + x^2/2$. La fórmula también vale para $x < 0$ por orientación. Su diferencia es $-2^{-n}x^2/2$, con envolvente exacta $2^{-n}/2$ en $[-1, 1]$, alcanzada en los extremos. En cambio, el error integral de las tasas sobre todo el segmento es $\int_{-1}^{1} -2^{-n}x\,dx = 0$. La cancelación firmada de ese tramo completo no implica igualdad de cada acumulación desde cero.

Retorno visual. Véase C28-F07, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 38. Frontera estricta dyádica

Encuentra el corte mínimo para error de derivadas estrictamente menor que $1/8$ en el ejemplo polinómico.

Solución. El error exacto de derivadas es $D_n = 2^{-n}$. Para $n = 3$ se tiene $D_3 = 1/8$, en la frontera y fuera del requisito estricto. Para $n = 4$, $D_4 = 1/16 < 1/8$, y cualquier índice posterior tiene error todavía menor. Si el corte fuera menor que cuatro, su cola incluiría la etapa tres, que falla. Por tanto el corte mínimo para controlar toda la cola con error estrictamente menor que $1/8$ es $N = 4$.

Retorno visual. Véase C28-F08, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 39. Norma de dos capas

Verifica que $\|u\|_{C^1} = \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty$ es una norma en la clase definida en R8.

Solución. La clase de R8 contiene funciones continuas en un segmento no degenerado cuya derivada interior admite extensión continua al cerrado. Esa extensión es única porque el interior es denso, y las extensiones de sumas y múltiplos son las correspondientes operaciones de las extensiones. Compacidad acota ambas capas y hace reales sus normas supremas. Su suma es no negativa. Si vale cero, la norma de valores ya obliga a que u sea la función nula; la recíproca es inmediata. La linealidad de derivadas y la homogeneidad suprema dan $\|\alpha u\|_{C^1} = |\alpha|\|u\|_{C^1}$. Aplicar la triangular por separado a valores y derivadas y sumar da $\|u+v\|_{C^1} \le \|u\|_{C^1} + \|v\|_{C^1}$. Quedan verificadas las propiedades de norma sin suponer máximos alcanzados.

Ejercicio 40. Inducción finita de órdenes

Justifica convergencia de todas las derivadas hasta orden r bajo las hipótesis de R8.

Solución. Supongamos $r \ge 1$, filas C^r en el mismo segmento, convergencia uniforme de sus capas de orden r y convergencia en un anclaje común de las capas de órdenes cero hasta $r-1$. Aplicamos R6 a las funciones de orden $r-1$, cuya derivada es la capa superior y cuyo dato inicial converge. Obtenemos un destino uniforme de ese orden y la identificación de su derivada con el destino de orden r. Repetimos para el orden $r-2$ usando la capa recién construida como derivada uniforme, y continuamos hasta los valores. Son sólo r pasos. R1 conserva continuidad de los destinos extendidos al cerrado, y las cotas de incrementos identifican las derivadas relativas de borde. Se obtiene convergencia uniforme de todas las capas con sus relaciones de derivación. Para $r = 0$ queda únicamente la convergencia uniforme de valores; no se utiliza Taylor ni una operación infinita para justificar el descenso.

Capítulo 29

Series de funciones y series de potencias

La identidad geométrica finita ya dio aproximantes con error controlado. Para convertir sus límites en una teoría de series de funciones, estudiaremos la sucesión de sumas parciales y exigiremos a sus colas el control de C27. C11 aportará las comparaciones numéricas y C28 permitirá transportar operaciones. En las series de potencias, un punto de convergencia abrirá una región interior protegida; los extremos necesitarán pruebas propias.

29.1. Una serie es una sucesión de sumas parciales

Una suma infinita todavía no es una función. Partimos de funciones $u_j : X \to \mathbb{R}$, $j = 0, 1, ...,$ y construimos los objetos finitos $S_n(x) = \sum_{j=0}^{n} u_j(x)$. Todos tienen dominio X. El dominio de convergencia D contiene exactamente las entradas donde la sucesión real $S_n(x)$ tiene límite finito. Sólo allí definimos $S(x) = \lim_n S_n(x)$. Por ejemplo, los polinomios geométricos están definidos en toda la recta, pero su serie sólo converge en $(-1, 1)$: fuera, sus términos no tienden a cero; en -1, los totales alternan entre dos valores.

La serie converge uniformemente en $Y \subset D$ cuando $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N\ \forall x \in Y$: $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$. El corte no puede depender de la entrada. C27 aplica a S_n y da el criterio de Cauchy uniforme: para cada $\varepsilon > 0$ existe N tal que, para todos $m > n \geq N$ y $x \in Y$, $\left|\sum_{j=n+1}^{m} u_j(x)\right| < \varepsilon$. La equivalencia incluye existencia: cada columna es Cauchy real, C10 construye su destino, y pasar m al límite en una cota con margen $\varepsilon/2$ da un corte común para aproximarlo. No se presupone S para aplicar el criterio.

El resto $R_n = S - S_n$ corresponde a términos desde $n + 1$. Si tenemos una envolvente $|R_n(x)| \leq E_n \to 0$, basta escoger N con toda su cola por debajo de la tolerancia. Cuando existe el supremo real de los errores, éste es la menor envolvente; no necesitamos que todos los prefijos estén acotados para formular Cauchy. Una cantidad finita de funciones iniciales no altera la convergencia uniforme de la serie: se cancela al comparar sumas parciales después del mismo prefijo, aunque esas funciones iniciales no estén acotadas en Y.

El término individual es una alarma, no un criterio suficiente. Si $S_n \to S$ uniformemente, para $j \geq N + 1$, $|u_j(x)| = |S_j(x) - S_{j-1}(x)| \leq |R_j(x)| + |R_{j-1}(x)|$. Así $u_j \to 0$ uniformemente. La recíproca falla ya para funciones constantes $u_j(x) = 1/(j + 1)$: los términos desaparecen y la serie armónica diverge.

Una ventana interior. Para $|x| \leq r < 1$, la identidad finita geométrica y su límite dan

$$S_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \qquad S(x) = \frac{1}{1 - x}, \qquad |R_n(x)| \leq \frac{r^{n+1}}{1 - r}.$$

En todo $(-1, 1)$ falta uniformidad: cada resto $x^{n+1}/(1 - x)$ es no acotado cuando x se aproxima a 1 desde dentro. Convergencia en cada ventana cerrada interior no significa convergencia uniforme en todo el dominio abierto.

Ejercicios de la sección 29.1.

Ejercicio 1. La geométrica en dos dominios

Para $u_j(x) = x^j$, encuentre dominio, suma y una envolvente en $[-r, r]$, $0 < r < 1$. Decida uniformidad en $(-1, 1)$.

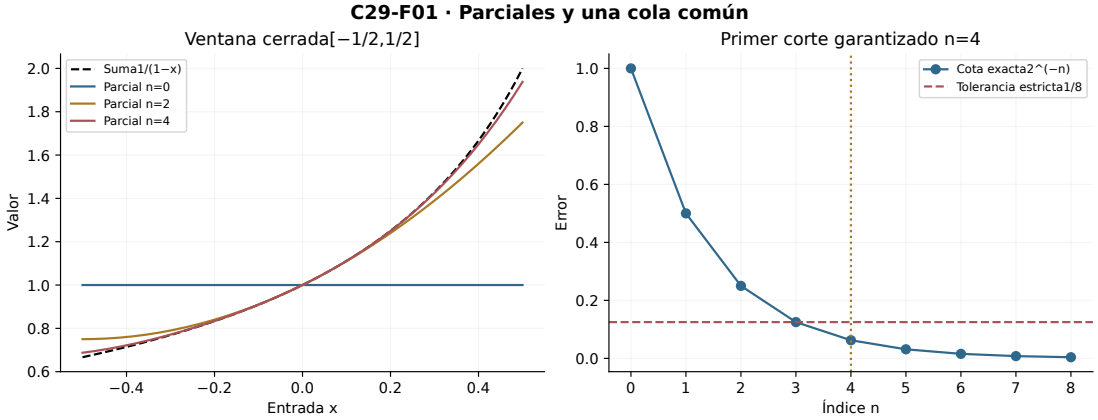


Figura 29.1. En la ventana de radio1/2, los parciales geométricos convergen a1/(1−x). El resto está acotado por2^(−n), con igualdad en el extremo positivo. El corte estricto para tolerancia1/8 empieza en n4; la frontera n3 no lo acredita.

Solución. Para $x \neq 1$, multiplicar el parcial por $1-x$ y cancelar términos da $S_n(x) = (1-x^{n+1})/(1-x)$. Si $|x|<1$, $x^{n+1}\to 0$ y la suma es $S(x)=1/(1-x)$. Para $|x|\geq 1$, los términos x^j no tienden a cero, incluidos $x=\pm 1$; por tanto $D=(-1,1)$. La resta exacta es $R_n(x)=x^{n+1}/(1-x)$. En $[-r,r]$, $0<r<1$, $|R_n(x)|\leq r^{n+1}/(1-r)\to 0$. La igualdad se alcanza en $x=r$, de modo que ésta es también la envolvente exacta. Un corte con $r^{n+1}<(1-r)\varepsilon$ sirve para toda la ventana.

En todo $(-1,1)$, para cada n el resto crece sin límite al acercarse a 1 por la izquierda. La convergencia es puntual allí, pero no uniforme. **Retorno visual.** Véase C29-F01, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 2. Un término necesario

Pruebe que la convergencia uniforme de una serie implica que sus términos tienden uniformemente a cero. Refute la recíproca.

Solución. Suponga $S_n\to S$ uniformemente. Dado $\varepsilon>0$, elija N para que $|S_k(x)-S(x)|<\varepsilon/2$ para todo $k\geq N$ y toda entrada. Para $j\geq N+1$, $u_j=S_j-S_{j-1}$, luego $|u_j(x)|<\varepsilon$. Así los términos tienden uniformemente a cero. El recíproco falla incluso para funciones constantes: en un conjunto no vacío, tome $u_j(x)=1/(j+1)$. Su supremo de magnitud tiende a cero, pero la serie de valores es armónica en cada entrada y diverge. La condición sobre términos aislados no controla bloques de muchos términos.

Ejercicio 3. Cortes dependientes de la entrada

Diagnostique: «para todo x existe un corte geométrico, así que hay un corte para todo $(-1,1)$». Exhiba entradas que impiden un corte dado.

Solución. La convergencia puntual permite elegir un corte distinto para cada x: $\forall x\ \forall\varepsilon>0\ \exists N(x,\varepsilon)$. La uniforme pide $\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\ \forall x$. Ningún intercambio de esos cuantificadores se deduce de la primera afirmación. En la geométrica sobre $(-1,1)$, tome $x_n=1-1/[2(n+1)]$. Es una entrada admisible para cada corte n. La desigualdad de Bernoulli da $x_n^{n+1}\geq 1-(n+1)/[2(n+1)]=1/2$. Por ello $R_n(x_n)=x_n^{n+1}/(1-x_n)\geq n+1$.

Por ejemplo, la tolerancia $1/2$ queda incumplida en una entrada x_n para todo corte. Cada entrada fija converge, pero los infractores pueden desplazarse hacia la frontera a medida que cambia el corte.

Ejercicio 4. Prefijo no acotado

En $\mathbb{R}$ tome $u_0(x)=x^2$ y $u_j(x)=2^{-j}$ para $j\geq 1$. Pruebe uniformidad y explique por qué no puede haber mayorante global finito para u_0.

Solución. Para $n \geq 0$, $\sum_{j=1}^{n} 2^{-j} = 1 - 2^{-n}$, también con suma vacía cuando $n = 0$. Así $S_n(x) = x^2 + 1 - 2^{-n}$ y $S(x) = x^2 + 1$ en toda $\mathbb{R}$. El resto es la constante 2^{-n}, por lo que la convergencia es uniforme en toda la recta. No existe un mayorante finito M_0 para $|u_0(x)| = x^2$ en $\mathbb{R}$. Esto impide aplicar el criterio M a la serie completa en esa ventana, aunque la uniformidad ya esté demostrada. En diferencias de parciales posteriores a cero el término x^2 se cancela; sólo importa la cola sumable.

Ejercicio 5. Cauchy sin suma conocida

Suponga $|\sum_{j=n+1}^{m} u_j(x)| \leq \eta_n$ para todos $m > n$ y $x \in X$, con $\eta_n \to 0$. Construya la suma y un certificado.

Solución. Fije una entrada x. Para $m > n$, la hipótesis da $|S_m(x) - S_n(x)| \leq \eta_n$, y $\eta_n \to 0$. Para cada tolerancia hay un corte que controla todos los pares de índices posteriores; invertirlos no cambia la magnitud de la diferencia. Por completitud, existe $S(x) = \lim_m S_m(x)$ en cada entrada de X. Mantenga fijos n y x y haga $m \to \infty$. Se obtiene $|S(x) - S_n(x)| \leq \eta_n$. Como la misma sucesión de barreras sirve para todas las entradas, basta elegir N con $\eta_n < \varepsilon$ para $n \geq N$. Queda construida la suma y acreditada su convergencia uniforme, sin presuponerla al estimar los bloques.

29.2. El criterio M y lo que no afirma

Para aplicar Cauchy uniforme sin conocer todavía la suma, necesitamos controlar todos los bloques tardíos con un corte independiente de la entrada. Podemos conseguirlo acotando las magnitudes de los términos por una serie numérica convergente: su cola proporcionará el presupuesto común. **Criterio M de Weierstrass.** Supongamos $M_j \geq 0$, $|u_j(x)| \leq M_j$ para todo j y $x \in X$, y que la serie numérica $\sum_{j=0}^{\infty} M_j$ converge a A. Entonces $\sum u_j$ converge uniformemente en X. También converge uniformemente la serie de magnitudes $\sum |u_j|$, y en cada entrada la primera serie converge absolutamente.

Prueba desde bloques finitos. C11 entrega un corte para todas las colas finitas de la serie positiva. Después de él,

$$|S_m(x) - S_n(x)| \leq \sum_{j=n+1}^{m} |u_j(x)| \leq \sum_{j=n+1}^{m} M_j < \varepsilon/2.$$

No depende de x. Cauchy uniforme construye S; la misma comparación aplicada a las sumas de magnitudes construye su destino uniformemente. Fijando n, x y pasando m al límite, obtenemos

$$|R_n(x)| \leq T_n, \qquad T_n = A - \sum_{j=0}^{n} M_j = \sum_{j=n+1}^{\infty} M_j.$$

Asimismo $|S(x)| \leq A$. El paso al límite conserva $\leq$, no una desigualdad estricta sin margen. $T_n \to 0$ es un certificado disponible antes de evaluar S.

Para $|u_j(x)| \leq C\rho^j$, $0 < \rho < 1$, resulta $T_n = C\rho^{n+1}/(1-\rho)$. Por ejemplo $u_j(x) = x^j$ en $[-1/2, 1/2]$ tiene $E_n \leq 2^{-n}$: para exigir error estrictamente menor que $1/8$ basta $n \geq 4$. $n = 3$ es frontera; la desigualdad débil del certificado no lo admite. **Tres propiedades distintas.** El criterio M asegura convergencia absoluta en cada entrada y convergencia uniforme tanto de la serie como de sus magnitudes. La existencia de mayorantes comunes sumables es, sin embargo, una exigencia adicional. En $X = \{0, 1, 2, ...\}$, sea $u_j(x) = 1/(j+1)$ para $x = j$ y cero en las otras entradas. En cada entrada sólo aparece un término no nulo. Después del parcial n, el mayor resto posible es $1/(n+2)$, alcanzado en $x = n+1$, también para la serie de magnitudes. Ambas convergen uniformemente, pero todo mayorante común debe satisfacer $M_j \geq 1/(j+1)$ y su serie diverge por comparación con la armónica. Así M es suficiente y no necesario para uniformidad.

La otra separación aparece en la geométrica sobre $(-1, 1)$: en cada entrada converge absolutamente, pero no uniformemente. Y la serie constante $(-1)^j/(j+1)$ converge

uniformemente por el criterio alternado de C11, sin converger absolutamente. El dominio y las cancelaciones son parte del diagnóstico. Si la comparación M sólo vale desde un índice fijo, se aplica al tramo final. El prefijo se suma aparte. No se concluye entonces $|S| \le A$ sin incluir una cota para ese prefijo; éste puede ser no acotado.

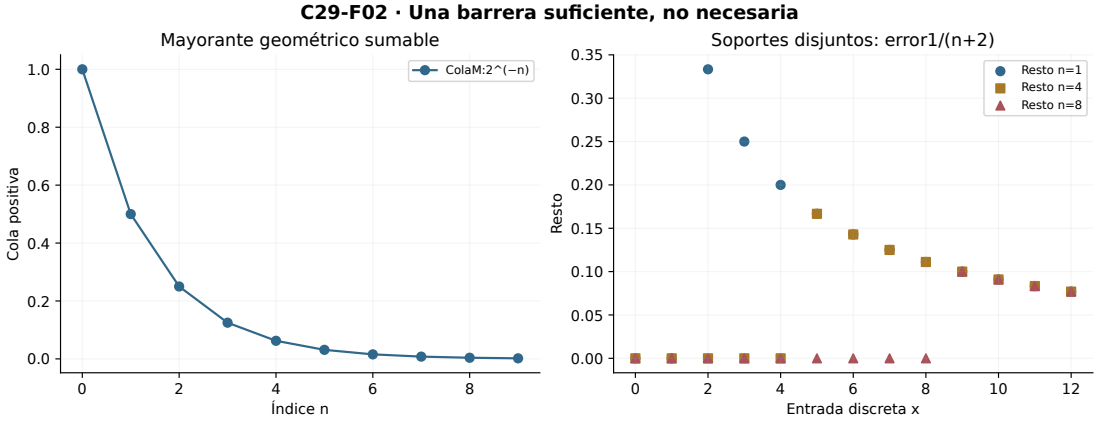


Figura 29.2. Los mayorantes geométricos2^(−j) tienen cola sumable2^(−n). En el dominio discreto de entradas enteras, los términos1/(j+1) se apoyan en una sola entrada cada uno: su serie y sus magnitudes tienen error1/(n+2), aunque las normas individuales formen una armónica divergente. La fórmula de la cola completa, no los primeros puntos, prueba uniformidad.

Ejercicios de la sección 29.2.

Ejercicio 6. Mayorante dyádico

Si $|u_j(x)| \le 3\,2^{-j}$, dé cota de suma y cola y el primer índice garantizado para error estrictamente menor que $3/8$.

Solución. Los mayorantes suman $\sum_{j=0}^{\infty} 3\,2^{-j} = 6$, y su cola después del grado n es $T_n = \sum_{j=n+1}^{\infty} 3\,2^{-j} = 3\,2^{-n}$. El criterio M construye una suma uniforme, con $|S(x)| \le 6$, y da $|S - S_n| \le 3\,2^{-n}$ en toda la ventana. Para garantizar error estrictamente menor que $3/8$, se necesita $2^{-n} < 1/8$. El primer corte acreditado es $n = 4$, con cota $3/16$; en $n = 3$ sólo se garantiza $\le 3/8$. Es el primer corte que garantiza esta información: la serie positiva de términos constantes $u_j = 3\,2^{-j}$ alcanza la cota y muestra por qué el corte tres no puede garantizar la desigualdad estricta.

Ejercicio 7. La serie de magnitudes

Pruebe directamente que las hipótesis M hacen uniforme $\sum |u_j|$ y acotan su destino por $\sum M_j$.

Solución. Sean $|u_j(x)| \le M_j$ y $\sum M_j = M_* < \infty$. Los parciales de magnitudes $A_n(x) = \sum_{j=0}^{n} |u_j(x)|$ son crecientes y están acotados por M_*. En cada entrada tienen un límite $A(x)$. Para $m > n$, $0 \le A_m(x) - A_n(x) \le \sum_{j=n+1}^{m} M_j$. Al pasar $m \to \infty$ queda $0 \le A(x) - A_n(x) \le T_n$, donde $T_n = \sum_{j>n} M_j \to 0$ independientemente de x. Por tanto la serie de magnitudes converge uniformemente y $A(x) \le M_*$ en toda la ventana. La serie original converge absolutamente y su resto también está dominado por T_n.

Ejercicio 8. Uniformidad sin criterio M

Use $u_j(x) = \mathbf{1}_{\{j\}}(x)/(j+1)$ en $X = \mathbb{N}_0$ para refutar que el criterio M sea necesario incluso para uniformidad de las magnitudes.

Solución. En la entrada $x = k \in \mathbb{N}_0$, sólo el término $u_k(k) = 1/(k+1)$ es distinto de cero. La suma, tanto de valores como de magnitudes, es $S(k) = 1/(k+1)$. Si $k \le n$ el resto es cero; si $k > n$ vale $1/(k+1)$. Luego $\sup_k |S(k) - S_n(k)| = 1/(n+2)$, alcanzado en $k = n+1$. Esto prueba convergencia uniforme absoluta directamente. Por otra parte, evaluar un supuesto mayorante en $x = j$ obliga a $M_j \ge 1/(j+1)$. Su serie no puede converger, por comparación con la armónica. La uniformidad procede aquí de que las entradas activan términos distintos, aunque las máximas magnitudes individuales no sean sumables.

Retorno visual. Véase C29-F02, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 9. Cancelación uniforme

Considere $u_j(x) = (-1)^j/(j+1)$ en cualquier conjunto no vacío X. Decida uniformidad, absoluta y posibilidad de M.

Solución. Todos los términos son constantes respecto de x. La serie alternada $\sum_{j\ge0}(-1)^j/(j+1)$ converge porque sus magnitudes decrecen a cero. Su estimación de resto da $|S - S_n| \le 1/(n+2)$; al ser independiente de la entrada, acredita convergencia uniforme en cualquier conjunto no vacío. La serie de magnitudes es armónica y diverge en cada entrada. Además, cualquier mayorante debe cumplir $M_j \ge 1/(j+1)$, por lo que no puede ser sumable. Se obtiene uniformidad condicional gracias a la alternancia, que el criterio M no registra.

Ejercicio 10. Cambio de parámetro

En $Y = [0,1]$ sea $u_j(x) = x^j/3^j$. Encuentre una suma explícita y compare el resto exacto con M.

Solución. La razón $x/3$ está entre cero y $1/3$ en $[0,1]$. La identidad geométrica da $S(x) = 1/(1-x/3)$ y $R_n(x) = (x/3)^{n+1}/(1-x/3)$. En ese intervalo, $R_n(x) \le (1/3)^{n+1}/(1-1/3) = 3^{-n}/2$, con igualdad en $x = 1$. El criterio M usa $M_j = 3^{-j}$. Su cola es precisamente $3^{-n}/2$, de modo que coincide con la envolvente exacta y prueba convergencia absoluta y uniforme. La coincidencia se explica porque en $x = 1$ todos los términos alcanzan simultáneamente su mayorante y tienen signo positivo.

29.3. Operaciones sobre sumas infinitas

Cada operación se realiza primero sobre S_n, donde sólo intervienen sumas finitas. Para identificar después el resultado con una operación sobre S, comprobaremos las hipótesis de C28 sobre esa sucesión de parciales. La justificación del límite será distinta para continuidad, integración y derivación. **Continuidad.** Si cada u_j es continua en X y la serie converge uniformemente allí, cada S_n es continua y C28 hace continua a S en el dominio relativo. En un dominio abierto basta uniformidad en una vecindad de cada punto. No se necesita una única banda para todo el abierto. El criterio M con términos continuos proporciona una condición suficiente inmediatamente reutilizable.

Integral propia en un marco fijo. Sean u_j integrables en $[a,b]$ y $S_n \to S$ uniformemente allí. C28 demuestra primero que S es integrable y luego

$$\int_a^b S(x)\,dx = \lim_n \sum_{j=0}^{n} \int_a^b u_j(x)\,dx = \sum_{j=0}^{\infty} \int_a^b u_j(x)\,dx.$$

La serie de integrales converge porque sus sumas parciales convergen al destino exhibido. Si $|R_n| \le E_n$, $\left|\int_a^b S - \sum_{j=0}^{n} \int_a^b u_j\right| \le (b-a)E_n$. Para acumuladas desde $c \in [a,b]$, el error es a lo sumo $|x-c|E_n$. Se conserva la orientación al integrar hacia la izquierda. No se extiende este presupuesto a longitudes que crecen con n.

Derivación con ancla. Sean u_j continuas en $[a,b]$, derivables en (a,b), con $a < b$. Supongamos que $\sum u_j'$ converge uniformemente en (a,b) a g y que la serie numérica $\sum u_j(c)$ converge a λ en algún $c \in [a,b]$. Las sumas parciales tienen derivadas $S_n' = \sum_{j=0}^{n} u_j'$ y

valores $S_n(c) \to \lambda$. C28 produce $S_n \to S$ uniformemente en $[a,b]$ y $S' = g$ en (a,b). En particular $\left(\sum_{j=0}^{\infty} u_j\right)' = \sum_{j=0}^{\infty} u_j'$. Si $|g - S_n'| \le D_n$, su certificado es $|S(x) - S_n(x)| \le |\lambda - S_n(c)| + |x-c|D_n$. El ancla paga las constantes que las derivadas no ven. La prueba de C28 usa valor medio e incrementos, sin suponer continuidad de todas las derivadas ni integrar derivadas posiblemente discontinuas. Para series en toda la recta, se aplica en marcos acotados que contienen cada punto y el ancla; resulta uniformidad local.

La sola uniformidad de valores no permite derivar. Sea $h_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/(n+1)^2}$ en $[-1,1]$. Definamos $u_0 = h_0$ y, para $j \ge 1$, $u_j = h_j - h_{j-1}$. Entonces $S_n = h_n$ telescópicamente y $S_n \to |x|$ uniformemente, con error máximo $1/(n+1)$. Cada término es suave, pero el destino no es derivable en 0. Allí todas las derivadas parciales valen 0; su límite no puede ser la derivada inexistente del destino. La regularidad infinita de las filas no reemplaza el control de la serie derivada.

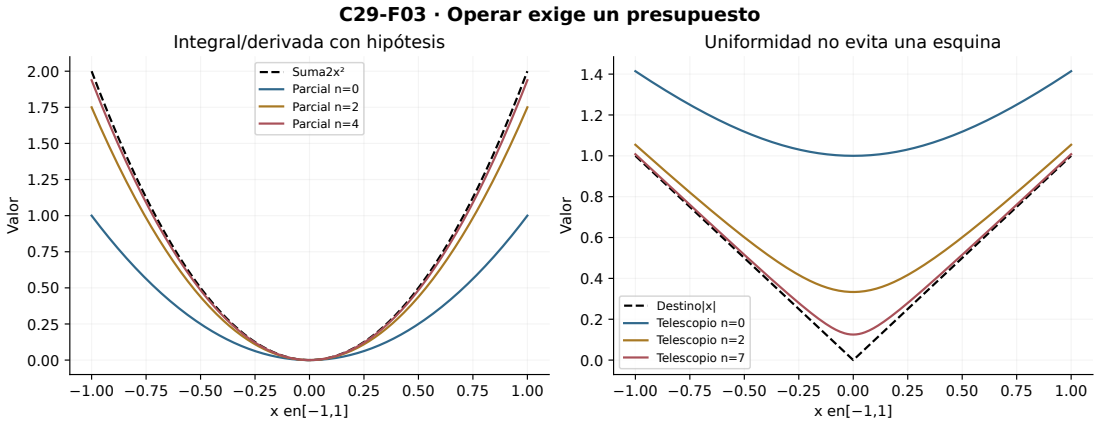


Figura 29.3. La serie2^(−j)x² tiene suma2x² y parciales(2−2^(−n))x², con integrales y errores acreditados. En cambio el telescopio de raíces suavizadas converge uniformemente a|x|; sus parciales son suaves pero el destino tiene una esquina en cero. La uniformidad de valores no autoriza derivación.

Ejercicios de la sección 29.3.

Ejercicio 11. Integrales y orientación

Si una serie integrable en $[-2,3]$ tiene $|R_n| \le 2^{-n}$, acote error de su integral completa y de las acumuladas desde 1.

Solución. Los parciales son Riemann integrables como sumas finitas de términos integrables. La cota uniforme $|S - S_n| \le 2^{-n}$, que tiende a cero, permite aplicar el teorema de límites uniformes integrables: la suma S también es integrable en $[-2,3]$. La longitud del intervalo es cinco, por lo que $|\int_{-2}^{3} S - \sum_{j=0}^{n} \int_{-2}^{3} u_j| \le 5\,2^{-n}$. Para la acumulada desde uno, $|\int_1^x S - \sum_{j=0}^{n} \int_1^x u_j| \le |x-1|2^{-n} \le 3\,2^{-n}$. Esto da uniformidad de las acumuladas en todo el intervalo, incluida la orientación negativa cuando $x < 1$.

Ejercicio 12. Serie derivada con ancla

Formule y pruebe el teorema derivativo de §29.3 usando sólo el teorema de sucesiones de C28.

Solución. Sean u_j continuas en $[a,b]$, derivables en (a,b), con $a < b$. Suponga que $\sum_j u_j'$ converge uniformemente en (a,b) a G y que $\sum_j u_j(c)$ converge para alguna ancla $c \in [a,b]$. Entonces $\sum_j u_j$ converge uniformemente en $[a,b]$ a una función S derivable en (a,b), con $S' = G$. Escriba $S_n = \sum_{j=0}^{n} u_j$. Si cada u_j es derivable, la regla de suma finita da $S_n' =$

$\sum_{j=0}^{n} u_j'$. La hipótesis sobre la serie derivada dice exactamente que $S_n' \to G$ uniformemente. La hipótesis del ancla dice que $S_n(c)$ converge.

Se cumplen así las hipótesis del teorema de C28 para sucesiones de funciones derivables. Éste construye el límite S de los parciales, acredita su derivabilidad en el interior y da $S' = G = \sum_j u_j'$. En un intervalo acotado, el valor medio también proporciona la convergencia uniforme de S_n: la diferencia de dos parciales queda controlada por su diferencia en c y la longitud por el error de pendientes.

La prueba no requiere continuidad de las derivadas. El ancla y la uniformidad de sus parciales son las condiciones que deben verificarse antes de usar la fórmula.

Ejercicio 13. Telescopio suave con esquina

Para $h_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/(n+1)^2}$ forme la serie telescópica de §29.3. Pruebe uniformidad y la falla de derivación en cero.

Solución. Defina $u_0 = h_0$ y $u_j = h_j - h_{j-1}$ para $j \geq 1$. Todos los términos son derivables en $\mathbb{R}$, pues el radicando de cada h_n es estrictamente positivo. La suma finita telescópica es $S_n = h_n$. Para $a = 1/(n+1)$, las desigualdades $|x| \leq \sqrt{x^2 + a^2} \leq |x| + a$ dan $0 \leq S_n(x) - |x| \leq 1/(n+1)$. La cota se alcanza en cero y prueba convergencia uniforme, incluso en toda la recta, a $S(x) = |x|$. Sus cocientes incrementales en cero valen 1 por la derecha y -1 por la izquierda; la suma no es derivable allí.

La serie derivada tiene parciales $h_n'(x) = x/\sqrt{x^2 + (n+1)^{-2}}$. Su límite puntual vale -1 para $x < 0$, cero para $x = 0$ y 1 para $x > 0$. No puede ser límite uniforme de esas funciones continuas en un intervalo que contenga cero en su interior, pues sería continuo. Falta precisamente la hipótesis derivativa. **Retorno visual.** Véase C29-F03, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 14. Constantes invisibles

Dé una serie cuya serie de derivadas converja uniformemente, pero cuya serie de valores diverja. Identifique la hipótesis perdida.

Solución. Tome $u_j(x) = 1$ para todos los índices en $[0, 1]$. Cada derivada es cero y los parciales de la serie derivada son cero: convergen uniformemente. Sin embargo, $S_n(x) = n + 1$ en toda entrada, por lo que la serie de valores diverge. En cualquier ancla c, $S_n(c)$ tampoco converge. El ejemplo prueba que controlar todas las pendientes deja sin controlar las constantes de los parciales; se necesita la convergencia en una ancla para aplicar el teorema.

Ejercicio 15. Serie polinómica integrada

En $[-1, 1]$ tome $u_j(x) = 2^{-j}x^2$. Calcule suma, derivada, integral desde cero y sus errores uniformes.

Solución. La suma de coeficientes es $\sum_{j\geq 0} 2^{-j} = 2$. Así $S_n(x) = (2 - 2^{-n})x^2$ y $S(x) = 2x^2$. En $[-1, 1]$, los términos están dominados por 2^{-j}, y el resto exacto es $2^{-n}x^2$, con envolvente 2^{-n}. Los términos derivados $2^{1-j}x$ tienen mayorantes sumables 2^{1-j}; además, $S_n(0) = 0$. El teorema derivativo da $S' = 4x$, mientras $S_n' = (4 - 2^{1-n})x$. El resto de derivadas es $2^{1-n}x$, con envolvente 2^{1-n}.

Integrar desde cero da $\int_0^x S(t)\,dt = 2x^3/3$ y $\int_0^x S_n(t)\,dt = (2 - 2^{-n})x^3/3$. El resto acumulado es $2^{-n}x^3/3$, cuya envolvente es $2^{-n}/3$. Las tres envolventes se alcanzan en los extremos; el signo de x^3 conserva la orientación cuando $x < 0$.

29.4. Un punto de convergencia abre una región interior

Una serie de potencias de centro c tiene la forma $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x-c)^j$, $\qquad a_j, c \in \mathbb{R}$. El término de orden cero es a_0 también en el centro: interpretamos el monomio constante como 1. La suma en c es a_0, no necesariamente cero. Cada parcial es un polinomio definido en toda la recta; su límite puede tener un dominio menor.

Lema interior. Si la serie converge en $t \neq c$, sus términos tienden a cero y existe M con $|a_j(t-c)^j| \leq M$ para todos j. Para $0 < r < |t-c|$ y $|x-c| \leq r$, $|a_j(x-c)^j| \leq M\rho^j$, $\rho = \frac{r}{|t-c|} < 1$. El criterio M da convergencia absoluta en cada entrada y uniforme, incluso de las magnitudes, en todo el segmento. Además $|R_n(x)| \leq M\rho^{n+1}/(1-\rho)$. Se emplea sólo convergencia en t, que podría ser condicional. El segmento de radio cero es una única entrada y se trata directamente.

Construcción del radio. Sea $H = \{|t-c| : \text{la serie converge en } t\}$. Contiene 0. Si H es acotado, definimos $R = \sup H \geq 0$; si es no acotado, escribimos $R = \infty$. No afirmamos que el supremo pertenezca a H. Si $0 < r < R$, la propiedad del supremo, o la no acotación de H cuando $R = \infty$, proporciona una distancia convergente mayor que r. Tomamos una entrada t que la realice y aplicamos el lema interior: la serie converge absolutamente y uniformemente en $[c-r, c+r]$. Cada entrada con $|x-c| < R$ pertenece a uno de esos segmentos, salvo el centro, donde la suma ya es a_0. Una entrada de distancia mayor que un R finito no puede ser convergente, pues añadiría a H un número que supera su cota superior. Para $R = 0$ sólo queda el centro; para $R = \infty$ obtenemos toda la recta y uniformidad en cada segmento acotado.

Cuando $0 < R < \infty$, el dominio es $(c-R, c+R)$ más ninguno, uno o ambos extremos, según las dos series numéricas obtenidas por sustitución. La convergencia en un extremo fuerza el interior, pero no la convergencia en el extremo opuesto. Todo compacto del intervalo abierto está dentro de un segmento cerrado interior: la función continua $|x-c|$ alcanza allí un máximo menor que R. Por restricción, la uniformidad también vale sobre ese compacto.

Qué no promete el radio. La geométrica tiene $R = 1$ y converge uniformemente en cada $[-r, r]$, $r < 1$, pero no en todo $(-1, 1)$. Las cotas empeoran al aumentar r hacia 1. «Localmente uniforme» recuerda ese margen disponible alrededor de cada punto; no significa un corte común hasta la frontera.

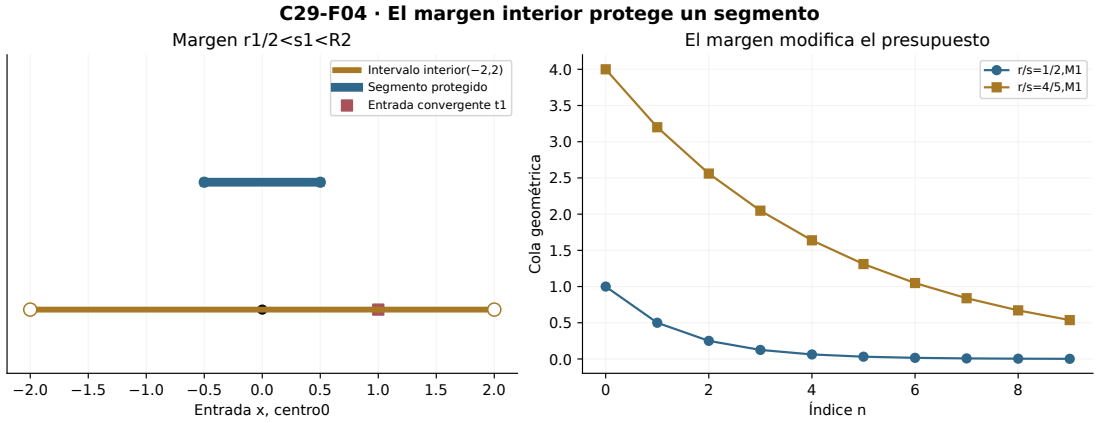


Figura 29.4. Un punto convergente a distancia s protege cada segmento de radio r<s mediante la razónr/s. Para la geométrica escalada de términos(x/2)^j se ilustran centro0, punto convergente t1 y radio interior r1/2. Su radio total es2 y los extremos±2 son abiertos. El presupuesto M1 es válido en t1; no se infiere convergencia en±2 desde el margen interior.

Ejercicios de la sección 29.4.

Ejercicio 16. Convergencia en una entrada

Una serie de centro 2 converge en $t = -1$ y satisface $|a_j(-3)^j| \leq 5$. Dé una ventana protegida y cota de cola sobre $[0, 4]$.

Solución. El centro es $c = 2$ y el punto convergente $t = -1$ está a distancia tres. En $[0, 4]$ se tiene $|x - 2| \leq 2$. De la hipótesis $|a_j(-3)^j| \leq 5$ se obtiene $|a_j(x-2)^j| \leq 5(2/3)^j$ en toda esa ventana. El criterio M acredita convergencia absoluta y uniforme. La cola queda controlada por $\sum_{j>n} 5(2/3)^j = 15(2/3)^{n+1}$. Para una tolerancia ε, basta escoger n con esa expresión menor que ε.

El mismo razonamiento protege cualquier ventana de radio estrictamente menor que tres. No decide el punto $x = 5$, a distancia tres del centro: la acotación de términos en -1 no acredita convergencia en el extremo opuesto. **Retorno visual.** Véase C29-F04, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 17. Supremo sin pertenencia

Reconstruya el radio a partir de H y pruebe interior y exterior. Evite afirmar convergencia en la distancia R.

Solución. Sea H el conjunto de distancias al centro de las entradas convergentes. Contiene cero. Si es acotado, tome $R = \sup H$; si es no acotado, tome $R = \infty$. Para una distancia $r < R$, la propiedad del supremo, o la no acotación, permite encontrar $d \in H$ con $r < d$. La convergencia en una entrada a distancia d da una cota de términos Md^{-j} para los coeficientes. En $|x - c| \leq r$, el mayorante $M(r/d)^j$ acredita convergencia absoluta y uniforme.

Si R es finito, una entrada convergente a distancia mayor que R añadiría a H un elemento mayor que su supremo, imposible. Nada de esto exige $R \in H$. Para $0 < R < \infty$, los dos puntos a distancia exactamente R conservan su propio problema de convergencia.

Ejercicio 18. El término constante

Diagnostique «una serie de potencias da cero en su centro». Dé un ejemplo y trate $R = 0$.

Solución. En el centro, cada parcial vale a_0, porque el monomio de grado cero es la función constante y los restantes se anulan. Esto garantiza convergencia en c aun cuando no haya ninguna otra entrada convergente. Por ejemplo, tome $F(x) = 7 + \sum_{j\geq 1} j!(x-c)^j$ como expresión de serie. Si $d = |x - c| > 0$, los términos de magnitud $j!d^j$ tienen cociente $(j+1)d$, que eventualmente supera dos. Desde un término positivo crecen al menos geométricamente y no tienden a cero. La serie diverge fuera del centro; tiene radio cero y su única suma definida es $F(c) = 7$.

Ejercicio 19. Compactos interiores

Pruebe que una serie de radio $R > 0$ converge uniformemente en todo compacto $K \subset (c - R, c + R)$.

Solución. Sea K compacto contenido en $(c - R, c + R)$. Si no es vacío, la función continua $|x - c|$ alcanza en él un máximo $r < R$. Elija una distancia s con $r < s < R$; por la propiedad del radio hay una entrada convergente a distancia mayor que s y, por tanto, una cota $|a_j|s^j \leq M$. Para $x \in K$, $|a_j(x-c)^j| \leq M(r/s)^j$. Si $r > 0$, este mayorante es geométrico de razón menor que uno, con cola $M(r/s)^{n+1}/(1 - r/s)$. Si $r = 0$, K sólo contiene el centro y todos los restos son cero. Así hay convergencia absoluta y uniforme en K. El caso vacío es inmediato. No se obtiene por ello uniformidad en todo el intervalo abierto ni en su frontera.

Ejercicio 20. Radios iguales no dan cortes iguales

Compare la geométrica y $\sum x^j/(j+1)^2$, ambas de radio 1, en todo $[-1, 1]$ y en $(-1, 1)$.

Solución. Para $\sum_{j\geq 0} x^j$, el radio es uno, el dominio es $(-1, 1)$ y el resto $x^{n+1}/(1-x)$ impide uniformidad en todo ese intervalo. En $x = \pm 1$ los términos no desaparecen, por lo que no hay suma que extender por convergencia de la serie. Para $\sum_{j\geq 0} x^j/(j+1)^2$, el cociente de coeficientes tiende a uno y también $R = 1$. En $[-1, 1]$, los términos están dominados por $1/(j+1)^2$. Esta serie numérica converge por $1/(j+1)^2 \leq 1/j - 1/(j+1)$ para $j \geq 1$, y el criterio M da convergencia absoluta y uniforme en el intervalo cerrado.

De hecho, su cola común es $\leq \sum_{j=n+1}^{\infty}[1/j - 1/(j+1)] = 1/(n+1)$. Fuera de $[-1,1]$ los términos no tienden a cero, por cociente de magnitudes mayor que uno. El radio compartido no determina el comportamiento en el borde ni la uniformidad en la ventana máxima.

29.5. Calcular el radio y examinar los extremos

El radio se ha construido a partir del conjunto de entradas convergentes. Podemos buscar fórmulas para calcularlo mediante comparaciones geométricas, pero su existencia no depende de que algún cociente o alguna sucesión de raíces tenga límite. Cuando esos métodos no decidan, permanece la construcción por supremo. **Comparación geométrica por cocientes.** Para una serie numérica con términos no nulos desde cierto índice, si $|b_{j+1}|/|b_j| \to L < 1$, elijamos $L < q < 1$. Eventualmente $|b_{j+1}| \leq q|b_j|$; inducción finita da $|b_{N+k}| \leq |b_N|q^k$. C11 prueba convergencia absoluta por comparación. Si el límite es $L > 1$, elijamos $1 < q < L$. Eventualmente las magnitudes crecen al menos como $|b_N|q^k$, así que los términos no tienden a cero y la serie diverge. El mismo argumento funciona si el cociente tiende a infinito. El caso $L = 1$ queda sin decidir.

Para coeficientes eventualmente no nulos, si $|a_{j+1}/a_j| \to L$, el cociente de los términos en una entrada distinta del centro tiende a $L|x-c|$. Por ello $R = 1/L$ si $0 < L < \infty$, $R = \infty$ si $L = 0$ y $R = 0$ si $L = \infty$. Las escrituras $1/0$ y $1/\infty$ sólo son convenciones de estos casos, no divisiones reales. Si hay infinitos ceros, no se usa una división no definida.

Comparación por raíces. Si $|b_j|^{1/j} \to L < 1$, una barrera eventual $q < 1$ da $|b_j| \leq q^j$. Si $L > 1$, una barrera inferior $q > 1$ impide que los términos desaparezcan. Para $j \geq 1$, $|a_j(x-c)^j|^{1/j} = |a_j|^{1/j}|x-c|$. Si las raíces de los coeficientes tienen límite L finito o infinito, resultan las mismas fórmulas de radio y los mismos casos extremos. Aquí no se introduce una fórmula con limsup sin construir esa herramienta.

Cuatro fronteras con el mismo radio. Centremos en cero. El coeficiente inicial de las dos series con denominador j se fija como cero.

Serie	R	En -1	En 1
$\sum_{j=0}^{\infty} x^j$	1	Diverge	Diverge
$\sum_{j=1}^{\infty} x^j/j$	1	Condicional	Diverge
$\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j x^j/j$	1	Diverge	Condicional
$\sum_{j=0}^{\infty} x^j/(j+1)^2$	1	Absoluta	Absoluta

Los cocientes de coeficientes tienden a 1, pero no resuelven los extremos. Allí C11 distingue términos que no desaparecen, armónica y alternada. Para la última, desde $j = 1$, $\frac{1}{(j+1)^2} \leq \frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}$, así que una comparación telescópica prueba convergencia absoluta en ambos extremos, sin invocar un criterio no construido. De hecho el mismo mayorante M prueba uniformidad en todo $[-1,1]$ para esa última serie.

Una serie con sólo finitos coeficientes no nulos tiene $R = \infty$. Para $a_j = j!$, los cocientes de términos son $(j+1)|x| \to \infty$ si $x \neq 0$, luego $R = 0$. Para $a_j = 1/j!$, los cocientes tienden a cero en cada entrada y $R = \infty$. Finalmente $\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}$ tiene ceros en todos los coeficientes impares: se reconoce como geométrica de razón x^2, de radio 1, sin forzar un cociente entre coeficientes consecutivos.

Ejercicios de la sección 29.5.

Ejercicio 21. Cocientes acreditados

Pruebe el criterio de cociente cuando el límite es menor que 1 y cuando es mayor que 1, indicando el tratamiento de un prefijo.

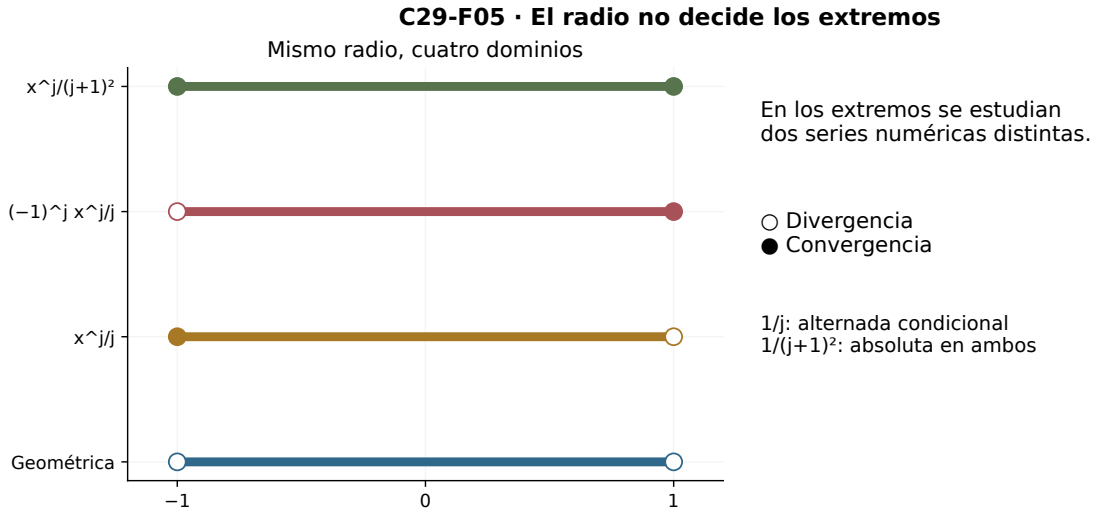


Figura 29.5. Cuatro series de radio1 realizan las cuatro combinaciones de extremos: geométrica ninguno; x^j/j sólo−1; $(-1)^{j}$x^j/j sólo1; x^j/(j+1)² ambos. Círculos abiertos y cerrados codifican divergencia y convergencia además del color. Los tipos condicional y absoluto se indican por texto.

Solución. Para una serie de términos eventualmente no nulos, suponga $|b_{j+1}|/|b_j| \to L$. Si $L < 1$, elija $L < q < 1$ y J tal que los cocientes posteriores sean $\le q$. Inducción da $|b_{J+k}| \le |b_J| q^k$. La cola converge absolutamente y el prefijo finito no modifica la convergencia. Si $L > 1$, elija $1 < q < L$ y un corte con cocientes $\ge q$. Se obtiene $|b_{J+k}| \ge |b_J| q^k$, y $|b_J| > 0$: los términos no desaparecen. Lo mismo vale para límite infinito escogiendo un $q > 1$ fijo.

Con $L = 1$ no se obtiene ninguna de esas barreras. Las series $\sum 1/(j+1)^2$ y $\sum 1/(j+1)$ muestran ambas posibilidades. La hipótesis de términos eventualmente no nulos es la que hace lícitas las divisiones.

Ejercicio 22. Trasladar y escalar

Encuentre radio y dominio de $\sum_{j=1}^{\infty} ((x-2)/3)^j/j$.

Solución. Ponga $z = (x-2)/3$. La serie es $\sum_{j\ge1} z^j/j$. Como serie de potencias en $x-2$, sus coeficientes son $a_0 = 0$ y $a_j = 1/(j3^j)$; sus cocientes tienden a $1/3$, por lo que el radio es tres. Para $|x-2| < 3$ hay convergencia absoluta. En $x = -1$, $z = -1$ y queda una alternada de magnitudes $1/j$ decrecientes a cero: converge condicionalmente. En $x = 5$, $z = 1$ y queda la armónica, divergente. Fuera de esas distancias, los términos no tienden a cero. El dominio completo es $[-1, 5)$.

Ejercicio 23. Ceros en los coeficientes

Encuentre el radio de $\sum_{k=0}^{\infty} (x-1)^{2k}$ y explique por qué no sirve el cociente consecutivo de sus coeficientes.

Solución. La serie $\sum_{k\ge0} (x-1)^{2k}$ es geométrica de razón $(x-1)^2$. Converge exactamente cuando $|x-1| < 1$, con suma $1/[1-(x-1)^2]$. En $x = 0$ o $x = 2$ los términos valen uno; fuera del intervalo su magnitud crece. Por tanto el centro es uno, el radio es uno y el dominio es $(0, 2)$. Como serie con todos los grados, tiene coeficientes $a_{2k} = 1$ y $a_{2k+1} = 0$. Hay denominadores nulos arbitrariamente lejos en los cocientes consecutivos, por lo que ese criterio no puede aplicarse. La identificación geométrica usa los grados efectivamente presentes y resuelve la convergencia sin esas divisiones.

Ejercicio 24. Raíz sin cociente

Para $a_j = 2^j$ si j es par y $a_j = 2^j/(j+1)$ si es impar, calcule R. Justifique el límite de raíces usado.

Solución. En índices pares, $|a_j|^{1/j} = 2$; en los impares vale $2/(j+1)^{1/j}$. Para probar $(j+1)^{1/j} \to 1$, fije $q > 1$. El cociente de $(j+1)/q^j$ tiende a $1/q < 1$, de modo que esa sucesión termina dominada por una geométrica y tiende a cero. Eventualmente $j + 1 < q^j$, luego $1 \le (j+1)^{1/j} < q$. Como vale para cualquier $q > 1$, el límite es uno.

Las raíces de los coeficientes tienden así a dos y el radio es $1/2$. Los cocientes consecutivos, aunque están definidos, alternan: para j par, $a_{j+1}/a_j = 2/(j+2) \to 0$; para j impar, $a_{j+1}/a_j = 2(j+1) \to \infty$. No tienen límite, por lo que el método consecutivo no determina el radio en este caso.

Ejercicio 25. Todos los extremos

Construya series de radio 2 y centro -3 con cada uno de los cuatro posibles dominios de extremos.

Solución. Use $z = (x+3)/2$, que envía $x = -5$ a $z = -1$ y $x = -1$ a $z = 1$. Cuatro series sirven:

- $\sum_{j\ge0} z^j$: no converge en ninguno de los extremos, pues allí los términos no desaparecen; dominio $(-5,-1)$.
- $\sum_{j\ge1} z^j/j$: alternada convergente en -5 y armónica divergente en -1; dominio $[-5,-1)$.
- $\sum_{j\ge1} (-1)^j z^j/j$: armónica en -5 y alternada en -1; dominio $(-5,-1]$.
- $\sum_{j\ge0} z^j/(j+1)^2$: converge absolutamente en ambos extremos por comparación telescópica; dominio $[-5,-1]$.

En todas, el cociente de magnitudes de los coeficientes en potencias de $x+3$ tiende a $1/2$. Así tienen centro -3 y radio dos. Los puntos interiores convergen absolutamente y los exteriores divergen; las evaluaciones anteriores resuelven las cuatro elecciones de frontera. **Retorno visual.** Véase C29-F05, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

29.6. Derivar e integrar dentro del radio

Sea $F(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (x-c)^j$ con $R > 0$. Fijemos $0 < r < s < R$. La convergencia en $c+s$ entrega $|a_j| s^j \le M$. En $|x-c| \le r$, para $j \ge 1$, $|j a_j (x-c)^{j-1}| \le \frac{M}{s}\, j\rho^{j-1}$, $\qquad \rho = r/s < 1$. La serie numérica $\sum_{j=1}^{\infty} j\rho^{j-1}$ converge: el cociente de sus términos tiende a $\rho < 1$, por §29.5. Más precisamente, la identidad finita obtenida al derivar el polinomio geométrico es $\sum_{j=1}^{n} j\rho^{j-1} = \frac{1-(n+1)\rho^n + n\rho^{n+1}}{(1-\rho)^2}$. Los términos $n\rho^n$ tienden a cero por la misma comparación de cocientes. Pasando al límite, la suma es $1/(1-\rho)^2$ y la cola desde $n+1$ es $\sum_{j=n+1}^{\infty} j\rho^{j-1} = \frac{\rho^n[(n+1)-n\rho]}{(1-\rho)^2}$. No se ha derivado una suma infinita para justificar este mayorante: sólo una identidad polinómica finita.

El mayorante sumable y el criterio M hacen uniforme la serie derivada en el segmento elegido. En el anclaje c, cada parcial original vale exactamente a_0, por lo que se cumple también la convergencia numérica requerida en §29.3. El teorema de derivadas produce la suma y demuestra, en el interior del segmento, $F'(x) = \sum_{j=1}^{\infty} j a_j (x-c)^{j-1}$. Para cualquier entrada con $|x-c| < R$ podemos elegir r, s que la contengan estrictamente y satisfagan $0 < r < s < R$. La fórmula vale así en todo el intervalo abierto, con cotas locales que conservan un margen positivo respecto de la frontera.

El radio de la derivada coincide. Acabamos de probar que la serie derivada converge absolutamente en cada distancia menor que R, luego su radio es al menos R. Recíprocamente, si la derivada converge en una entrada t de distancia positiva, en cualquier distancia $d < |t-c|$ converge absolutamente por el lema interior aplicado a esa nueva serie. Allí, $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j| d^j \le d \sum_{j=1}^{\infty} j|a_j| d^{j-1} < \infty$. Así $R \ge d$ para todo $d < |t-c|$. Ninguna distancia convergente de la derivada puede exceder R. Esto cubre radios infinitos y series polinómicas sin restar infinitos.

Integral término a término. La uniformidad en cada segmento cerrado interior y §29.3 dan $\int_c^x F(t)\,dt = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{j+1}(x-c)^{j+1}$, $|x-c| < R$. La orientación está incluida. La serie integrada tiene el mismo radio. Primero converge absolutamente en el interior por comparación. Si converge en una distancia $d > 0$, sus términos están acotados: $|a_j|d^{j+1}/(j+1) \le B$. En cada $0 < r < d$ recuperamos $|a_j|r^j \le \frac{B}{d}(j+1)(r/d)^j$, un mayorante sumable. Por tanto el radio original es al menos cualquier $r < d$, y no puede haber distancias convergentes de la integrada por encima de R.

Órdenes finitos. Iterar la igualdad de radios y el teorema derivativo produce, para cada entero fijo $k \ge 0$, $F^{(k)}(x) = \sum_{j=k}^{\infty} \frac{j!}{(j-k)!} a_j (x-c)^{j-k}$. Cada orden tiene uniformidad en segmentos interiores. El orden k se fija antes del corte; no se promete control uniforme de todos los órdenes simultáneamente. Ninguna de estas pruebas autoriza derivar la serie en $c \pm R$.

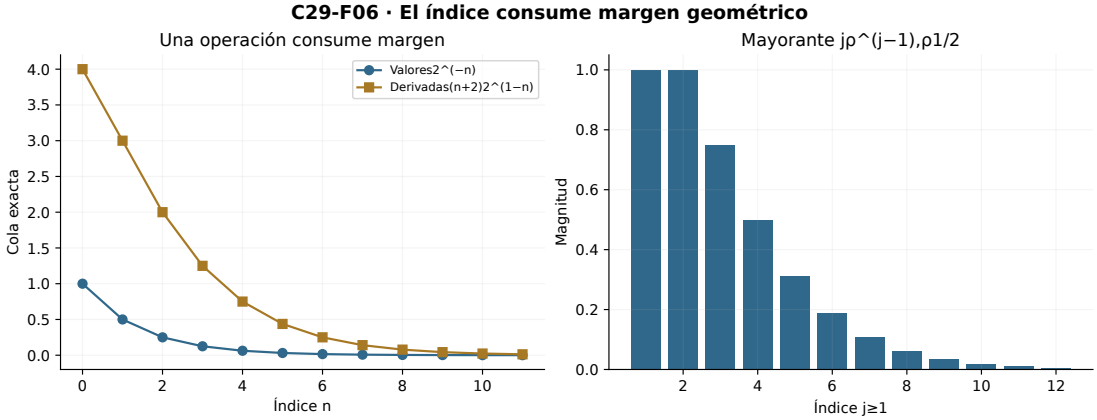


Figura 29.6. La cola de valores geométricos en radio1/2 es2^(−n). La cola de derivadas es(n+2)2^(1−n). Ambas se calculan por identidades finitas; el factor de índice demora el corte, aunque el radio siga siendo1. El segundo panel muestra las primeras magnitudesj(1/2)^(j−1) del mayorante derivativo.

Ejercicios de la sección 29.6.

Ejercicio 26. La cola derivada

Deduzca $\sum_{j>n} j\rho^{j-1}$, $0 < \rho < 1$, sin derivar una serie infinita.

Solución. Para $0 < \rho < 1$, derive sólo la identidad polinómica finita $\sum_{j=0}^{n} \rho^j = (1-\rho^{n+1})/(1-\rho)$. La regla del cociente da $\sum_{j=1}^{n} j\rho^{j-1} = [1-(n+1)\rho^n + n\rho^{n+1}]/(1-\rho)^2$. La sucesión $n\rho^n$ tiende a cero: desde $n \ge 1$ sus cocientes son $\rho(n+1)/n \to \rho < 1$, y una barrera geométrica lo demuestra. Lo mismo vale para $(n+1)\rho^n$. Por tanto los parciales numéricos convergen a $1/(1-\rho)^2$.

Restar el parcial al total da la cola exacta $\sum_{j>n} j\rho^{j-1} = \rho^n[(n+1)-n\rho]/(1-\rho)^2$, también para $n = 0$. La sumabilidad del mayorante derivativo queda establecida mediante polinomios y límites numéricos, antes de cualquier derivación de una serie infinita. **Retorno visual.** Véase C29-F06, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 27. Presupuesto derivativo concreto

Si $|a_j| \le 3\,2^{-j}$, acote en $[-1,1]$ el resto de la serie derivada y evalúe la cota en $n = 4$.

Solución. En $[-1,1]$, $|ja_j x^{j-1}| \le 3j2^{-j}$ para $j \ge 1$. Esta serie de mayorantes converge por la fórmula de la cola ponderada con $\rho = 1/2$. Además, los parciales originales valen a_0 en cero. El teorema derivativo permite identificar F' con la serie de derivadas. Después del grado n, su resto satisface $|F'(x) - S_n'(x)| \le 3\sum_{j>n} j2^{-j} = (3/2)\sum_{j>n} j(1/2)^{j-1} = 3(n+2)2^{-n}$. Para $n = 4$, la barrera es $18/16 = 9/8$. La cola de valores, en cambio, está dominada por $3\,2^{-n}$ y da $3/16$ en ese corte.

El factor de índice explica el mayor presupuesto necesario para las derivadas. La hipótesis $|a_j| \le 3\,2^{-j}$ garantiza un radio al menos dos; no obliga a que sea exactamente dos, pues los coeficientes pueden ser mucho menores o incluso terminar.

Ejercicio 28. Una frontera no derivable por la serie

Para $F(x) = \sum_{j\ge1} x^j/j$, explique por qué la convergencia en -1 no autoriza la fórmula de serie derivada allí.

Solución. La serie $F(x) = \sum_{j\ge1} x^j/j$ tiene radio uno. En $x = -1$ converge condicionalmente por alternancia. En $|x| < 1$, el teorema derivativo da $F'(x) = \sum_{j\ge1} x^{j-1} = 1/(1-x)$. Si se sustituye $x = -1$ en la serie derivada, sus términos son $(-1)^{j-1}$ y no tienden a cero. La serie diverge, por lo que no representa una derivada en esa frontera. La convergencia de los valores en el extremo no extiende el teorema derivativo hasta él. Una eventual extensión derivable de la función interior requeriría otro argumento y no convertiría esta serie divergente en una representación válida.

Ejercicio 29. Integral y radio

Pruebe que dividir los coeficientes por $j+1$ e incrementar el grado no aumenta el radio de una serie de radio positivo.

Solución. La serie integrada desde el centro es $G(x) = \sum_{j\ge0} a_j(x-c)^{j+1}/(j+1)$. En cada ventana interior del radio original $R > 0$, la convergencia uniforme permite integrar y da $G(x) = \int_c^x F(t)\,dt$. Por ello su radio R_G es al menos R. Suponga que la integrada converge a una distancia $d > 0$. Sus términos son acotados, así que existe B con $|a_j|d^{j+1}/(j+1) \le B$. Para $0 < r < d$, resulta $|a_j|r^j \le (B/d)(j+1)(r/d)^j$. La serie de la derecha converge, pues el cociente de sus términos tiende a $r/d < 1$. La original converge absolutamente en cada distancia menor que d.

Si $R_G > R$ con R finito, escoja una distancia convergente $d > R$ para la integrada y luego $R < r < d$. La conclusión anterior contradice el radio original. Si $R = \infty$, la desigualdad inicial ya fuerza $R_G = \infty$. Por tanto $R_G = R$; la integración sí puede cambiar la convergencia en los extremos.

Ejercicio 30. Orden finito y ancla

Obtenga $F^{(3)}$ y a_3 para una serie de centro c y radio positivo. Precise la región válida.

Solución. En cualquier ventana estrictamente interior al radio, aplique tres veces el teorema derivativo. En cada paso la nueva serie conserva el radio, y los factores polinómicos en el índice se absorben reservando un margen geométrico. Se obtiene $F^{(3)}(x) = \sum_{j\ge3} j(j-1)(j-2)a_j(x-c)^{j-3}$ para $|x-c| < R$. Al evaluar en c, se anulan los grados positivos y sólo queda $j = 3$: $F^{(3)}(c) = 6a_3$, luego $a_3 = F^{(3)}(c)/6$. El orden tres está fijado antes de elegir cortes. La fórmula se acredita en el interior, sin una afirmación adicional sobre los extremos.

29.7. Coeficientes, funciones y certificados

Las fórmulas anteriores permiten identificar sumas y recuperar sus coeficientes. En los ejemplos siguientes distinguiremos la definición de una función por su serie de las propiedades que después podremos demostrar mediante derivación y estimaciones de cola. **Geométrica y su derivada.** En $|x| < 1$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{j=0}^{\infty} x^j$, $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{j=1}^{\infty} jx^{j-1}$. La primera identidad procede del resto finito; la segunda emplea §29.6 y la regla derivativa de C18. Integrar la

primera desde cero define la función $L(x) = \int_0^x (1-t)^{-1}\,dt$ en $(-1,1)$ y entrega $L(x) = \sum_{j=1}^{\infty} x^j/j$. No hace falta identificar L con un logaritmo construido por otra vía, ni evaluar esta identidad directamente en un extremo.

La exponencial construida por la serie. Definimos $E(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$. Su radio infinito, ya probado, permite derivar en cada segmento: $E' = E$ al reindexar $j-1$ y $E(0) = 1$. De aquí se obtienen propiedades sin asumirlas. Por producto y cadena, la derivada de $E(x)E(-x)$ es cero; valor medio hace constante el producto en cada segmento, y su valor en cero es 1. Así $E(x)$ nunca es cero. Su continuidad, el valor positivo en cero y el teorema del valor intermedio hacen $E(x) > 0$ para toda entrada.

Para demostrar la regla de suma de argumentos, fijemos a y consideremos $E(a+t)E(-t)$. Producto, cadena y $E' = E$ hacen cero su derivada. Lagrange la hace constante en cada segmento y su valor en cero es $E(a)$. Multiplicamos entonces por $E(t)$ y usamos $E(t)E(-t) = 1$ para obtener $E(a+t) = E(a)E(t)$. El mismo mecanismo da unicidad: si $y' = y$ y $y(0) = 1$ en un intervalo que contiene cero, la derivada de $y(t)E(-t)$ es cero, su valor es uno y resulta $y = E$. La prueba resuelve esta ecuación concreta mediante una función auxiliar; no presupone un teorema general de ecuaciones diferenciales.

Un certificado factorial en una ventana. Para $|x| \le r$, tomemos n con $q = r/(n+2) < 1$. Desde el primer término omitido los cocientes de magnitudes son a lo sumo q, y entonces $\left|E(x) - \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!}\right| \le \frac{r^{n+1}}{(n+1)!}\frac{1}{1-r/(n+2)}$. En $[-1,1]$ y $n = 4$, esta cota es $1/100$, por debajo de la tolerancia estricta $1/50$. Una prueba numérica en algunos puntos no reemplaza esta garantía para todas las entradas.

Los coeficientes están determinados por la función. La fórmula de orden k en el centro deja sólo el término $j = k$: $F^{(k)}(c) = k!a_k$. Si dos series del mismo centro representan la misma función en una vecindad de c, con radios positivos, sus derivadas de cada orden coinciden allí y todos sus coeficientes son iguales. Esto no afirma que cualquier función infinitamente derivable sea representable por una serie. Hemos probado una propiedad de funciones que ya tienen representación convergente, no su existencia para funciones arbitrarias.

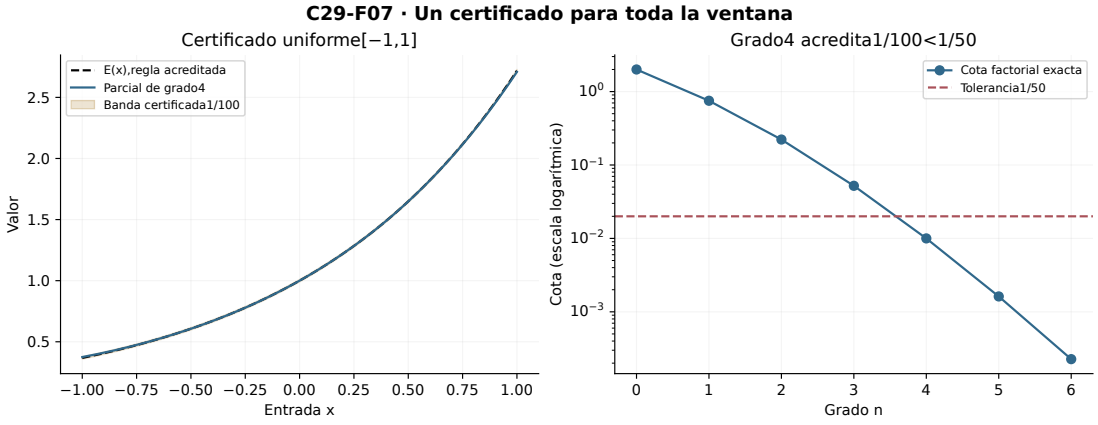


Figura 29.7. Para la exponencial definida por su serie, en[−1,1] el parcial de grado4 tiene cota uniforme1/100, menor que1/50. Los coeficientes factoriales y las cotas se calculan con fracciones exactas. Las curvas sólo ilustran reglas ya acreditadas; no se infiere el certificado por muestreo.

Ejercicios de la sección 29.7.

Ejercicio 31. Certificado factorial

Calcule la cota factorial para E en $[-1,1]$ con $n = 4$ y compruebe tolerancia estricta $1/50$.

Solución. Sea $P_4(x) = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + x^4/24$. En $|x| \le 1$, el primer término de $E - P_4$ tiene magnitud a lo sumo $1/5! = 1/120$. Desde ese término, el cociente de mayorantes es $1/(j+1) \le 1/6$. Por comparación geométrica, $|E(x) - P_4(x)| \le (1/120)\sum_{k\ge 0}(1/6)^k = 1/100 < 1/50$. La cota es común a toda la ventana y prueba la tolerancia estricta mediante aritmética exacta. No se necesita evaluar numéricamente E ni escoger cortes distintos según x.

Retorno visual. Véase C29-F07, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 32. Ecuación y positividad

Pruebe $E' = E$, $E(x)E(-x) = 1$ y $E(x) > 0$ usando las operaciones ya acreditadas.

Solución. Para $E(x) = \sum_{j\ge 0} x^j/j!$, el cociente de magnitudes es $|x|/(j+1) \to 0$ en cada entrada. Su radio es infinito, por lo que puede derivarse término a término en una ventana finita alrededor de cualquier punto. Así $E'(x) = \sum_{j\ge 1} x^{j-1}/(j-1)! = E(x)$ y $E(0) = 1$. Defina $P(x) = E(x)E(-x)$. Producto y cadena dan $P' = E(x)E(-x) - E(x)E(-x) = 0$. Por el valor medio, P es constante; al evaluar en cero se obtiene $P = 1$.

En particular E no se anula. Su continuidad y el valor positivo $E(0) = 1$ excluyen valores negativos: cualquier segmento que uniera cero con una entrada negativa de E contendría un cero por el valor intermedio. Por tanto $E(x) > 0$ en toda la recta.

Ejercicio 33. Unicidad de coeficientes

Dos series del mismo centro representan la misma función cerca del centro y tienen radios positivos. Pruebe que sus coeficientes coinciden.

Solución. Sean F y G las sumas de dos series de potencias de centro c y radios positivos. En un intervalo abierto alrededor de c ambas existen y coinciden. Las series pueden derivarse cualquier número finito de veces en un intervalo más pequeño, y la igualdad de funciones implica igualdad de esas derivadas allí. Para cada $k \ge 0$, evaluar en el centro da $k!a_k = F^{(k)}(c) = G^{(k)}(c) = k!b_k$. Como $k! \neq 0$, $a_k = b_k$. Esto acredita unicidad de los coeficientes de una representación existente. No afirma que cualquier función infinitamente derivable admita tal representación: esa existencia exige controlar la convergencia y el resto de su serie.

Ejercicio 34. Integral geométrica

Defina $L(x) = \int_0^x (1-t)^{-1}\,dt$ en $(-1, 1)$. Encuentre su serie y su derivada sin nombrar un logaritmo.

Solución. Para $|x| < 1$, el segmento que une cero con x cabe en $[-r, r]$ con $r < 1$. La geométrica $\sum_{k\ge 0} t^k = 1/(1-t)$ converge uniformemente en esa ventana. Integrar sus parciales y pasar al límite da $L(x) = \int_0^x dt/(1-t) = \sum_{k\ge 0} x^{k+1}/(k+1) = \sum_{j\ge 1} x^j/j$. La integranda es continua en el intervalo interior, de modo que el teorema fundamental da $L'(x) = 1/(1-x)$ y $L(0) = 0$. La derivación de la serie, ya acreditada por su radio uno, produce la misma geométrica. Todo vale también para $x < 0$ con integrales orientadas; la identificación no necesita nombrar una función logarítmica ni presupone una fórmula en la frontera.

Ejercicio 35. Ley de adición y unicidad concreta

Pruebe la ley de adición de E y la unicidad de $y' = y$, $y(0) = 1$, en un intervalo que contiene cero.

Solución. Fije $a \in \mathbb{R}$ y considere $Q(t) = E(a+t)E(-t)$. Como $E' = E$, se tiene $Q' = 0$; por el valor medio, $Q(t) = Q(0) = E(a)$. Multiplique por $E(t)$ y use $E(-t)E(t) = 1$: resulta $E(a+t) = E(a)E(t)$. Esto demuestra la ley de adición en toda la recta. Sea y una solución derivable de $y' = y$, $y(0) = 1$ en un intervalo que contiene cero. La derivada de $y(t)E(-t)$ es $y'(t)E(-t) - y(t)E(-t) = 0$. Su valor es, por tanto, la constante uno. Multiplicar por $E(t)$ da $y(t) = E(t)$ en todo ese intervalo. La serie factorial proporciona la existencia y este argumento acredita la unicidad.

29.8. Productos y el puente hacia análisis complejo

Para sumar series basta sumar parciales con el mismo corte y reunir sus errores. En un producto, cada término de un parcial se multiplica por todos los del otro: aparece un cuadrado de pares de índices. Agrupar por grado total produce un triángulo diferente. La convergencia absoluta permitirá controlar exactamente los pares que faltan entre ambas regiones. **Producto de Cauchy de series numéricas absolutamente convergentes.** Sean $\sum \alpha_j = A$ y $\sum \beta_j = B$, con totales de magnitudes $A_*, B_* < \infty$. Definamos $\gamma_n = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \beta_{n-j}$, una suma finita. Los totales de magnitudes de γ están acotados por $A_* B_*$: cada triángulo $j + k \leq N$ está dentro del cuadrado $0 \leq j, k \leq N$, y la triangular finita controla el primero por el producto de dos sumas positivas. C11 construye convergencia absoluta de $\sum \gamma_n$.

Para identificar su suma, sea $h = \lfloor N/2 \rfloor$ y comparemos el triángulo $j + k \leq N$ con un cuadrado $0 \leq j, k \leq m$, $m \geq N$. Cada par del cuadrado fuera del triángulo tiene $j > h$ o $k > h$. Por consiguiente

$$\left| \Big(\sum_{j=0}^{m} \alpha_j \Big) \Big(\sum_{k=0}^{m} \beta_k \Big) - \sum_{n=0}^{N} \gamma_n \right| \leq B_* T_\alpha(h) + A_* T_\beta(h),$$

donde $T_\alpha(h) = \sum_{j>h} |\alpha_j|$ y análogamente para β. Fijando N y pasando m al límite, el producto finito tiende a AB. Después $N \to \infty$ hace desaparecer las dos colas. Hemos probado $\sum \gamma_n = AB$ sin reordenar una suma doble infinita no justificada. Si uno de los totales de magnitudes es cero, los correspondientes términos son todos cero y la afirmación también vale.

Producto de potencias. Para dos series del mismo centro c, con radios $R_A, R_B > 0$, definimos los coeficientes finitos $d_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$. En cada $|x-c| < \min(R_A, R_B)$, las series numéricas son absolutamente convergentes. El resultado anterior demuestra $F(x)G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x-c)^n$. El radio del producto es al menos el mínimo; puede ser mayor. Por ejemplo $(\sum_{n\geq 0} x^n)(1-x) = 1$ en $(-1, 1)$: el producto tiene sólo su coeficiente constante no nulo y radio infinito. La identidad demostrada en el dominio común no declara convergente la serie geométrica fuera de él.

Para obtener uniformidad en una ventana, los totales de magnitudes deben tener barreras comunes A_*, B_* y las colas de ambas series de magnitudes deben desaparecer uniformemente allí. La misma estimación con dos colas controla entonces el producto de Cauchy en todas las entradas. Las series de potencias cumplen esas condiciones en cada segmento interior por el criterio M. En una entrada basta convergencia absoluta para identificar el producto; el control común permite hacerlo uniformemente en la región.

Puente hacia ACM. El mecanismo interior depende de una magnitud: $|a_j (x-c)^j| \leq M(r/s)^j$, y no del orden de x. En análisis complejo, la distancia $|z-c|$ describe discos en lugar de segmentos; la triangular y las magnitudes volverán a proteger sumas y productos. Aquí esa observación es una ruta curricular: no se afirma todavía diferenciabilidad compleja, continuación analítica, integración en curvas ni comportamiento en toda la circunferencia frontera. Se reconstruirán allí las definiciones y las pruebas pertinentes. El aprendizaje transferible es concreto: fijar una región interior, reservar un margen y controlar su cola completa.

La geometría interior de las potencias procede de comparar magnitudes y reservar un margen antes de la frontera. El producto de Cauchy utiliza también magnitudes para controlar los pares de índices omitidos. Estos mecanismos podrán reutilizarse con otras nociones de distancia, siempre que se construyan sus dominios y se acrediten las operaciones correspondientes.

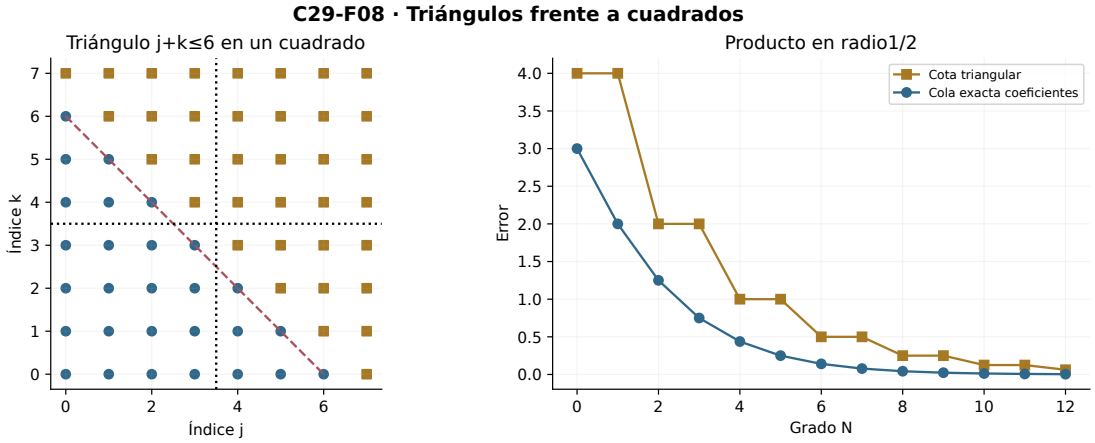


Figura 29.8. El parcial de producto de Cauchy reúne pares j+k≤N, mientras el producto de parciales reúne un cuadrado. Todo par excluido del triángulo tiene algún índice mayor que floor(N/2), lo que produce la cota de dos colas. Para dos geométricas en radio1/2 se comparan la cota triangular4 · 2^(−floor(N/2)) y la cola exacta(N+3)2^(−N).

Ejercicios de la sección 29.8.

Ejercicio 36. Triángulo de coeficientes

Encuentre los coeficientes del producto de dos geométricas centradas en cero e identifique la función resultante dentro de radio 1.

Solución. Cada geométrica tiene coeficientes uno. El coeficiente de grado n del producto de Cauchy es $\gamma_n = \sum_{j=0}^{n} 1 = n+1$. Para $|x| < 1$, ambos factores convergen absolutamente; el teorema de producto da $\sum_{n\geq 0}(n+1)x^n = [\sum_{j\geq 0} x^j]^2 = 1/(1-x)^2$. El cociente de magnitudes de los coeficientes es $(n+2)/(n+1) \to 1$, así que el radio es uno. En $x = \pm 1$, los términos tienen magnitud $n+1$ y no desaparecen. Fuera del radio también diverge; su dominio es $(-1, 1)$. La identidad funcional se ha demostrado allí, donde los factores originales tienen suma.

Retorno visual. Véase C29-F08, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 37. Colas del producto

Pruebe la cota triangular del producto numérico y explique el orden de sus dos límites.

Solución. Sean $\sum \alpha_j = A$, $\sum \beta_j = B$ dos series absolutamente convergentes, y escriba $A_* = \sum |\alpha_j|$, $B_* = \sum |\beta_j|$. El parcial de Cauchy $C_N = \sum_{n=0}^{N} \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \beta_{n-j}$ suma el triángulo $j + k \leq N$. Fije N, ponga $h = \lfloor N/2 \rfloor$ y elija $m \geq N$. El cuadrado del producto de parciales contiene el triángulo. Cualquier par omitido tiene $j > h$ o $k > h$, pues $j, k \leq h$ implicaría $j + k \leq 2h \leq N$. Por la desigualdad triangular y sumas finitas de cantidades positivas, $|A_m B_m - C_N| \leq B_* T_\alpha(h) + A_* T_\beta(h)$, donde $T_\alpha(h) = \sum_{j>h} |\alpha_j|$ y análogamente para β.

Con N fijo, haga $m \to \infty$: $A_m B_m \to AB$ y queda la misma cota para $|AB - C_N|$. Después $N \to \infty$ elimina ambas colas. Esto prueba la igualdad sin cambiar el orden de una suma doble infinita sin justificación. Además, los parciales de $\sum |\gamma_n|$ están acotados por $A_* B_*$, de modo que el producto de Cauchy también converge absolutamente.

Ejercicio 38. El radio del producto puede crecer

Use la geométrica y $1 - x$ para refutar que el radio del producto sea siempre exactamente el mínimo de los radios.

Solución. La geométrica tiene coeficientes $a_j = 1$ y radio uno. El polinomio $1 - x$ tiene coeficientes $b_0 = 1$, $b_1 = -1$ y $b_j = 0$ para $j \geq 2$, por lo que su radio es infinito. El producto de Cauchy da $\gamma_0 = 1$ y, para $n \geq 1$, $\gamma_n = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 = 1 - 1 = 0$. La serie resultante es la constante uno y tiene radio infinito, estrictamente mayor que el mínimo de los radios originales.

En $|x| < 1$, el teorema identifica su suma con $(1 - x) \sum x^j = 1$. Fuera de ese intervalo, la nueva serie sigue convergiendo, pero la geométrica original no tiene suma. La ampliación del radio corresponde a la serie de coeficientes cancelados.

Ejercicio 39. Uniformidad del producto funcional

Si dos series de magnitudes son uniformes en Y con totales acotados por A_*, B_*, demuestre uniformidad de su producto de Cauchy.

Solución. Suponga que en una ventana Y las series de magnitudes tienen sumas acotadas por A_* y B_* y convergen uniformemente. Sus colas admiten barreras $e_\alpha(h) = \sup_{x \in Y} \sum_{j>h} |\alpha_j(x)| \to 0$ y $e_\beta(h) \to 0$. Para cada entrada se aplica la estimación del producto de Cauchy con $h = \lfloor N/2 \rfloor$. Como los totales y las barreras son comunes, $|A(x)B(x) - C_N(x)| \leq B_* e_\alpha(h) + A_* e_\beta(h)$ en toda la ventana. Escoger un corte que haga esta expresión menor que la tolerancia acredita convergencia uniforme al producto.

También hay uniformidad absoluta del producto: la suma de magnitudes de coeficientes omitidos está acotada por las mismas dos franjas, y el total es $\leq A_* B_*$. Si la hipótesis se da mediante mayorantes numéricos sumables, sus totales y sus colas proporcionan directamente estas constantes y barreras. La acotación de los totales es parte de lo que se usa en la estimación.

Ejercicio 40. Un certificado reutilizable y su alcance

Para el cuadrado de la geométrica en $[-1/2, 1/2]$, obtenga una cota de cola de producto por triángulos y compárela con la cola exacta de coeficientes. Indique qué parte anticipa ACM.

Solución. En $|x| \leq 1/2$, cada geométrica tiene suma de magnitudes ≤ 2 y cola tras h dominada por $\sum_{j>h} 2^{-j} = 2^{-h}$. Con $h = \lfloor N/2 \rfloor$, la barrera triangular del producto es $2\,2^{-h} + 2\,2^{-h} = 4\,2^{-\lfloor N/2 \rfloor}$, que tiende a cero y acredita uniformidad. Los coeficientes del producto son $n + 1$. Su cola exacta de magnitudes en $x = 1/2$ es $\sum_{n>N} (n+1) 2^{-n} = (N+3) 2^{-N}$, obtenida sumando las colas geométrica y ponderada. Para cualquier $|x| \leq 1/2$ la magnitud del resto está acotada por esa expresión, y la igualdad se alcanza en $x = 1/2$ porque todos los términos son positivos. Es, por tanto, una envolvente exacta, más ajustada que la cobertura general por dos franjas.

Para un centro complejo, sustituir $|x|$ por $|z|$ protege igualmente el disco $|z| \leq 1/2$ mediante estas cotas de magnitudes. Es una conexión con el futuro estudio de series complejas; aquí sólo se anticipa la geometría del control de colas.

Capítulo 30

Espacios métricos

La distancia de Hamming compara palabras y la distancia suprema compara funciones. Sus puntos son objetos diferentes, pero ambas permiten hablar de proximidad y de errores pequeños. Reconstruiremos con una métrica las pruebas de ventanas, convergencia, Cauchy y continuidad desarrolladas en la recta en C1, C4, C6, C10 y C14. Mantendremos el destino dentro del espacio declarado y haremos explícita la selección de testigos cuando una recíproca secuencial la requiera.

30.1. Conservar la distancia, soltar las coordenadas

En la recta, algunas pruebas sólo utilizan que la distancia es positiva entre puntos distintos y satisface la desigualdad triangular. Podemos conservarlas aunque los puntos sean palabras, funciones o configuraciones que no se suman ni se ordenan. El dato común será una distancia real entre cada par.

Una **métrica** en un conjunto X es una función $d : X \times X \to [0, \infty)$ que, para todos $x, y, z \in X$, cumple

$$d(x, y) = 0 \iff x = y, \qquad d(x, y) = d(y, x), \qquad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

El par (X, d) es un espacio métrico. Las distancias son números reales finitos; los puntos no necesitan sumar, restar ni compararse por un orden. El espacio vacío satisface los axiomas de modo vacuo, pero no tiene sucesiones ni centros. Declararemos no vacío el dominio cuando necesitemos un punto de referencia.

La métrica usual $d(x, y) = |x - y|$ en $\mathbb{R}$ cumple los axiomas por C1. La restricción a cualquier subconjunto conserva las tres propiedades. Así $\mathbb{Q}$ y $(0, 1)$ tienen métricas usuales sin heredar por ello todas las propiedades globales de $\mathbb{R}$. **La métrica discreta** en cualquier conjunto es $d_D(x, y) = 0$ si $x = y$, y 1 en otro caso. Positividad y simetría son inmediatas. Si los extremos son distintos, cualquier punto intermedio coincide con uno de ellos o es distinto de ambos; la suma de las dos distancias es respectivamente 1 o 2, y domina a 1. Si los extremos coinciden, la triangular tiene lado izquierdo cero. La prueba cubre todos los triples, no sólo una muestra finita.

Palabras binarias. Para $X = \{0, 1\}^m$, con $m \geq 1$ fijo, la distancia de Hamming cuenta coordenadas diferentes. Si $x_i \neq z_i$, no pueden cumplirse a la vez $x_i = y_i$ y $y_i = z_i$. Por tanto $\mathbf{1}_{\{x_i \neq z_i\}} \leq \mathbf{1}_{\{x_i \neq y_i\}} + \mathbf{1}_{\{y_i \neq z_i\}}$. Sumar las m desigualdades prueba la triangular; las otras propiedades son directas. La proximidad mide coincidencia de símbolos, sin necesidad de una recta que ordene las palabras.

Diagnosticar propuestas. La función $|x - y|^2$ falla como métrica en $\mathbb{R}$: para $0, 1, 2$, la distancia directa propuesta es 4, mayor que el desvío $1 + 1$. La positividad y la simetría no garantizan la triangular. Otra propuesta, $p((a, b), (c, e)) = |a - c|$ en $\mathbb{R}^2$, sí satisface triangular y simetría, pero no separa puntos con primera coordenada igual. Es una pseudométrica. Esa falta impediría deducir igualdad de dos destinos a partir de una distancia cero.

La primera herramienta universal. De la triangular, primero en un sentido y luego en el otro, $|d(x, a) - d(y, a)| \leq d(x, y)$. Aquí sí restamos números: los valores reales de la distancia, no los puntos x, y. Esta desigualdad triangular inversa permitirá cambiar centros, abrir ventanas y demostrar continuidad sin coordenadas.

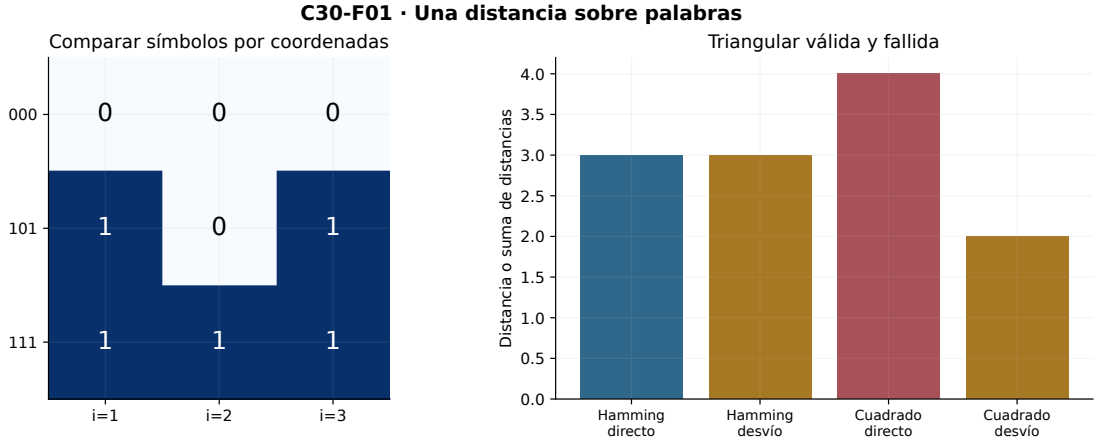


Figura 30.1. Las palabras000,101 y111 tienen distancias de Hamming2,1 y3. Cada columna contribuye según desacuerdo de símbolos; el triángulo directo3 coincide con el desvío2+1. La propuesta cuadrática real falla en0,1,2: directo4 y desvío1+1. El primer mecanismo se prueba para todas las coordenadas; el segundo es un contraejemplo completo.

Ejercicios de la sección 30.1.

Ejercicio 1. Tres distancias de Hamming

En palabras binarias de longitud tres, calcule las distancias entre $x = 000$, $y = 101$ y $z = 111$, y compruebe las tres triangulares de este triple.

Solución. Entre 000 y 101 cambian la primera y la tercera coordenada, así que $d_H(x, y) = 2$. Entre 101 y 111 sólo cambia la segunda, y $d_H(y, z) = 1$. Entre 000 y 111 cambian las tres, dando $d_H(x, z) = 3$. Las tres triangulares del triple son $3 \leq 2 + 1$, $2 \leq 3 + 1$ y $1 \leq 2 + 3$. La primera es igualdad: los dos pasos distribuyen los tres desacuerdos sin añadir otros. Esto comprueba el triple solicitado. Para acreditar la propiedad en todas las palabras, se usa por coordenada $\mathbf{1}_{\{x_i \neq z_i\}} \leq \mathbf{1}_{\{x_i \neq y_i\}} + \mathbf{1}_{\{y_i \neq z_i\}}$ y se suman las desigualdades.

Retorno visual. Véase C30-F01, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 2. Separación de una pseudométrica

Pruebe que $p((a, b), (c, e)) = |a - c|$ cumple simetría y triangular, y refute que sea métrica. Exhiba una sucesión con dos destinos diferentes para sus distancias.

Solución. Para $x = (a, b)$, $y = (c, e)$ y $z = (u, v)$, la simetría es $|a - c| = |c - a|$, y la triangular real da $p(x, z) = |a - u| \leq |a - c| + |c - u| = p(x, y) + p(y, z)$. Los valores son no negativos y la diagonal vale cero. Falla la separación: $p((0, 0), (0, 1)) = 0$, aunque esos puntos sean distintos. Para la sucesión constante $x_n = (0, 0)$, tanto $p(x_n, (0, 0))$ como $p(x_n, (0, 1))$ valen cero en todo índice. Satisface la condición de convergencia formulada con p para ambos destinos.

La función es una pseudométrica. La prueba de unicidad que usa triangular sólo puede concluir distancia cero entre los destinos; la separación es necesaria para convertir esa conclusión en igualdad de puntos.

Ejercicio 3. La distancia al cuadrado

Identifique exactamente el axioma que falla para $s(x, y) = |x - y|^2$ en $\mathbb{R}$. Compare con $2|x - y|$.

Solución. La función $s(x, y) = |x - y|^2$ es no negativa, simétrica y vale cero exactamente cuando $x = y$. El axioma que falla es la triangular: con puntos $0, 1, 2$, $s(0, 2) = 4$, mientras $s(0, 1) + s(1, 2) = 2$. Este único triple refuta la afirmación universal. Para $e(x, y) = 2|x - y|$, todas las propiedades de la distancia usual se conservan al multiplicarlas por dos. En

particular, $2|x-z| \le 2|x-y|+2|y-z|$. El factor positivo conserva también separación. Por tanto e sí es métrica: el contraejemplo anterior afecta al cuadrado, no al escalamiento por una constante positiva.

Ejercicio 4. Un triple finito completo

En $X = \{a, b, c\}$ fije distancias simétricas $d(a, b) = 2$, $d(b, c) = 3$, $d(a, c) = t > 0$ y diagonal cero. Determine exactamente los valores de t que dan métrica.

Solución. No negatividad, separación y simetría están aseguradas por la diagonal cero y las distancias positivas declaradas. Queda comprobar todas las triangulares. Cuando algún punto del triple se repite, la desigualdad tiene lado izquierdo cero o se reduce a una igualdad. Para triples de tres puntos distintos, simetría reduce los casos a $t \le 2+3$, $2 \le 3+t$ y $3 \le 2+t$. La primera exige $t \le 5$; la tercera, $t \ge 1$; la segunda vale para todo $t > 0$.

Así los valores exactos son $1 \le t \le 5$. Los extremos están incluidos porque la triangular permite igualdad. Si $t < 1$ falla la ruta de longitud 3 por los otros dos lados; si $t > 5$ falla la ruta directa de longitud t. Se han cubierto todos los triples del conjunto finito.

Ejercicio 5. Triangular inversa a dos centros

Demuestre $|d(x, y) - d(a, b)| \le d(x, a) + d(y, b)$ y señale qué objetos se restan.

Solución. Aplique triangular dos veces para pasar por a y b: $d(x, y) \le d(x, a) + d(a, b) + d(b, y)$. Restar $d(a, b)$ y usar simetría da $d(x, y) - d(a, b) \le d(x, a) + d(y, b)$. En la ruta inversa, $d(a, b) \le d(a, x) + d(x, y) + d(y, b)$, luego $d(a, b) - d(x, y) \le d(x, a) + d(y, b)$. Ambas diferencias opuestas quedan bajo la misma cota; por ello $|d(x, y) - d(a, b)| \le d(x, a) + d(y, b)$.

Los objetos restados son valores reales finitos de la métrica. Ninguna operación de resta entre puntos de X interviene en la prueba.

30.2. Bolas y el margen de una ventana

Para $a \in X$ y $r > 0$, definimos la bola abierta y la bola cerrada métrica

$$B_d(a, r) = \{x \in X : d(x, a) < r\}, \qquad C_d(a, r) = \{x \in X : d(x, a) \le r\}.$$

La segunda notación evita confundirla con la clausura de la primera, que no siempre coincide con ella. El centro pertenece a ambas; aumentar el radio amplía cada bola por monotonía de la desigualdad.

Una entrada interior conserva margen. Si $y \in B_d(a, r)$, la cantidad $\eta = r - d(a, y)$ es positiva. Para $z \in B_d(y, \eta)$, $d(a, z) \le d(a, y) + d(y, z) < d(a, y) + \eta = r$. Por tanto $B_d(y, \eta) \subset B_d(a, r)$. La forma concreta de la bola puede cambiar; el margen nace siempre de la triangular. Más generalmente, $B_d(y, s) \subset B_d(a, r)$ cuando $d(a, y) + s \le r$ y $s > 0$, porque la pertenencia a la primera bola aporta una desigualdad estricta. La inclusión puede darse sin esa condición suficiente, por ejemplo en espacios discretos.

Un conjunto $V \subset X$ es una vecindad de a si contiene alguna bola abierta centrada en a. La vecindad puede incluir otros puntos o componentes: lo que necesitamos para un argumento local es conservar una ventana positiva completa alrededor del centro.

Dos geometrías sin una norma presupuesta. Para pares $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, definimos

$$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|, \qquad d_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}.$$

Positividad y separación se leen coordenada a coordenada; simetría procede del valor absoluto. Para d_1, sumamos las dos triangulares reales. Para d_∞, cada diferencia de coordenadas es a lo sumo $d_\infty(x, z) + d_\infty(z, y)$; el máximo conserva esa cota. Las bolas unitarias en el origen son respectivamente un rombo abierto y un cuadrado abierto. No se deduce una métrica de una figura: las desigualdades ya la probaron.

En la métrica discreta, $B_D(a, r) = \{a\}$ cuando $0 < r \le 1$, y $B_D(a, r) = X$ cuando $r > 1$. En el radio exactamente 1, todos los otros puntos están excluidos. En cambio $C_D(a, 1) = X$. No hay una interpolación entre radios que produzca una región gradual de puntos. **Una**

bola cerrada es cerrada. Anticipando la definición por complemento que formalizaremos enseguida, si $x \notin C_d(a,r)$, el radio $s = (d(x,a) - r)/2 > 0$ cumple, para $d(x,y) < s$, $d(y,a) \geq d(x,a) - d(x,y) > d(x,a) - s > r$. Así la ventana alrededor de x queda en el complemento. Esto prueba cierre de $C_d(a,r)$, pero no igualdad con la clausura de $B_d(a,r)$. En un espacio discreto de al menos dos puntos, la bola abierta de radio 1 es el singleton $\{a\}$, ya cerrado, mientras la bola cerrada de ese radio es todo X.

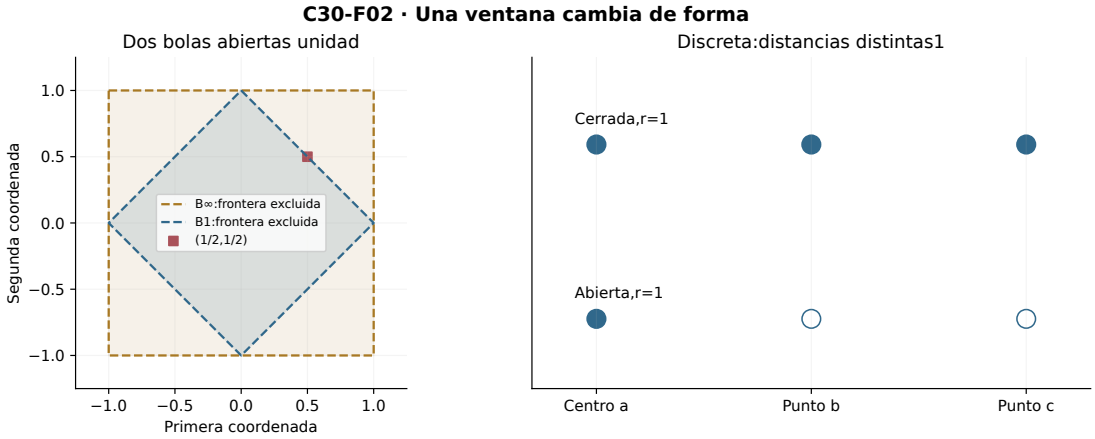


Figura 30.2. Las bolas unidad de d1 y d∞ en el origen son rombo y cuadrado, con fronteras excluidas. La entrada(1/2,1/2) pertenece al cuadrado y queda en la frontera del rombo. En la discreta, la bola abierta de radio1 sólo contiene el centro y la cerrada de radio1 contiene todos los puntos del conjunto ilustrado. Abierto/cerrado se codifica con formas además de color.

Ejercicios de la sección 30.2.

Ejercicio 6. Bolas con dos formas

Describa las bolas abiertas de radio 2 centradas en $(1,-1)$ para d_1 y d_∞. Decida pertenencia de $(2,0)$ y $(3,-1)$.

Solución. Con centro $a = (1,-1)$, la bola para d_1 es $\{(x_1,x_2) : |x_1 - 1| + |x_2 + 1| < 2\}$. Es un rombo abierto con vértices de frontera $(-1,-1)$, $(3,-1)$, $(1,-3)$ y $(1,1)$. Para d_∞, la condición es $|x_1 - 1| < 2$ y $|x_2 + 1| < 2$, es decir $(-1,3) \times (-3,1)$. Es un cuadrado abierto. En $(2,0)$, las diferencias de coordenadas tienen magnitud uno y uno: $d_1 = 2$, que excluye el punto de su bola abierta, y $d_\infty = 1$, que lo incluye. En $(3,-1)$, las magnitudes son dos y cero, de modo que ambas distancias son dos; el punto queda excluido de ambas bolas abiertas. Sí pertenece a las dos bolas cerradas del mismo radio.

Retorno visual. Véase C30-F02, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 7. El radio de margen

Si $d(a,y) = 3/5$ y $r = 1$, pruebe $B(y,2/5) \subset B(a,1)$. ¿Puede incluirse el borde de la bola pequeña sin más información?

Solución. Si $z \in B(y,2/5)$, la triangular da $d(a,z) \leq d(a,y) + d(y,z) < 3/5 + 2/5 = 1$. Ésta es precisamente la pertenencia a $B(a,1)$, por lo que la inclusión está acreditada. En el borde de la bola pequeña sólo se sabe $d(y,z) = 2/5$, y la estimación da $d(a,z) \leq 1$. La igualdad puede ocurrir: en la recta usual, tome $a = 0$, $y = 3/5$ y $z = 1$. Cumple la condición de borde y queda fuera de la bola grande abierta. Por ello no se puede incluir todo el borde sin información adicional.

Ejercicio 8. Clausura de una bola discreta

En un espacio discreto con al menos dos puntos, compare $B_D(a,1)$, $C_D(a,1)$ y $\operatorname{cl} B_D(a,1)$.
Solución. En la métrica discreta, todo punto distinto de a está a distancia uno. Por la desigualdad estricta, $B_D(a,1) = \{a\}$; por la desigualdad no estricta, $C_D(a,1) = X$. Para cada $x \neq a$, $B_D(x,1/2) = \{x\}$ evita a a. El complemento del singleton es abierto, y el singleton es cerrado. Así $\operatorname{cl}_X B_D(a,1) = \{a\}$. Como hay al menos dos puntos, esta clausura es estrictamente menor que $C_D(a,1)$. La operación de clausura y la definición de bola cerrada no coinciden en general.

Ejercicio 9. Dos ventanas separadas

Si $D = d(a,b) > 0$, pruebe que $B(a, D/3)$ y $B(b, D/3)$ son disjuntas. Generalice a radios positivos cuya suma es a lo sumo D.
Solución. Si z perteneciera a ambas bolas de radio $D/3$, la triangular daría $D = d(a,b) \leq d(a,z) + d(z,b) < 2D/3$, imposible para $D > 0$. Por tanto son disjuntas. Más generalmente, si $r, s > 0$ y $r + s \leq D$, una entrada común a $B(a,r)$ y $B(b,s)$ daría $D \leq d(a,z) + d(z,b) < r + s \leq D$. La contradicción persiste en el caso $r + s = D$ porque las pertenencias a bolas abiertas son estrictas. La prueba no necesita un punto medio ni una estructura lineal.

Ejercicio 10. Una bola cerrada es cerrada

Reconstruya la prueba del cierre de $C_d(a,r)$ y explique por qué no demuestra que sea la clausura de $B_d(a,r)$.
Solución. Sea $x \notin C_d(a,r)$, de modo que $d(x,a) > r$. Elija $s = [d(x,a) - r]/2 > 0$. Si $d(x,y) < s$, la triangular inversa da $d(y,a) \geq d(x,a) - d(x,y) > d(x,a) - s = [d(x,a) + r]/2 > r$. Así $B_d(x,s)$ está en el complemento de la bola cerrada. El complemento es abierto y $C_d(a,r)$ es cerrado. Puesto que contiene a $B_d(a,r)$, contiene también su clausura. Este argumento acredita $\operatorname{cl}_X B_d(a,r) \subseteq C_d(a,r)$.

La inclusión opuesta no se ha probado y puede fallar: en la métrica discreta, con al menos dos puntos y radio uno, la clausura de la bola abierta es $\{a\}$ y la bola cerrada es todo X.

30.3. Abiertos, cerrados y ambiente relativo

Un conjunto $U \subset X$ es **abierto** si cada $x \in U$ tiene un radio $r > 0$ con $B_d(x,r) \subset U$. Es **cerrado** si $X \setminus U$ es abierto. Por esta definición, $\emptyset$ y X son abiertos y cerrados. Una bola abierta es abierta por el margen de §30.2. **Reunir regiones.** La unión arbitraria de abiertos es abierta: una entrada de la unión pertenece a alguno de sus miembros y usa el radio de ese miembro. La intersección de una cantidad finita de abiertos es abierta: para un punto común, tomamos el mínimo positivo de sus radios. La intersección vacía es X. Una intersección infinita puede perder todo radio: en la recta, $\bigcap_{n \geq 0} (-1/(n+1), 1/(n+1)) = \{0\}$. Los complementos dan intersecciones arbitrarias y uniones finitas de cerrados.

Interior y clausura. El interior $\operatorname{int}_X A$ contiene puntos de A con una bola completa dentro de A. Es abierto por el lema del margen y es el mayor abierto contenido en A. La clausura $\operatorname{cl}_X A$ contiene puntos $x \in X$ tales que cada bola centrada en x encuentra a A: $x \in \operatorname{cl}_X A \iff \forall r > 0 : \; B_d(x,r) \cap A \neq \emptyset$. Contiene A. Su complemento es abierto: si una bola $B_d(x,r)$ evita A, cualquier y de esa bola tiene una bola alrededor de sí contenida en ella, y por ello también queda fuera de la clausura. Así la clausura es cerrada. Si F es cerrado y contiene A, un punto fuera de F tiene una bola que evita F, luego evita A; no pertenece a la clausura. Esto prueba que la clausura es el menor cerrado que contiene A. En particular A es cerrado si y sólo si $A = \operatorname{cl}_X A$.

La frontera es $\partial_X A = \operatorname{cl}_X A \cap \operatorname{cl}_X (X \setminus A)$. Sus puntos encuentran ambos conjuntos en cualquier ventana. Puesto que $x \notin \operatorname{cl}_X (X \setminus A)$ equivale a tener una bola dentro de A, también $\partial_X A = \operatorname{cl}_X A \setminus \operatorname{int}_X A$. Es cerrada por intersección de cerrados. No depende de que exista una orientación izquierda/derecha.

Cambiar el ambiente. Un subconjunto $Y \subset X$ lleva la métrica restringida. Sus bolas son exactamente $B_Y(y,r) = Y \cap B_X(y,r)$. Para $A \subset Y$,

$$A \text{ abierto en } Y \iff A = Y \cap U \text{ para algún abierto } U \subset X.$$

La ida construye U como la unión de todas las bolas de X con centro en A y cuya intersección con Y quede en A. Cada centro tiene al menos una, sin elegir un radio simultáneamente para cada punto. La vuelta usa una bola interior de U en cada punto. Complementar dentro de Y da la representación de cerrados relativos como $Y \cap F$. Además, la fórmula de bolas demuestra directamente $\mathrm{cl}_Y A = Y \cap \mathrm{cl}_X A$. Interior y frontera requieren también el complemento correcto: no se obtienen en general intersectando los correspondientes objetos de X con Y.

Para ver el efecto del ambiente, tomemos $Y = [0,1]$ y $A = [0,1/2)$ con distancia usual. Dentro de Y, una bola relativa pequeña alrededor de cero queda en A, así que ese punto es interior. De hecho A es abierto en Y, su clausura es $[0,1/2]$ y su frontera sólo $\{1/2\}$. En toda la recta, las ventanas de cero contienen negativos ajenos a A: el interior pasa a ser $(0,1/2)$ y la frontera $\{0,1/2\}$.

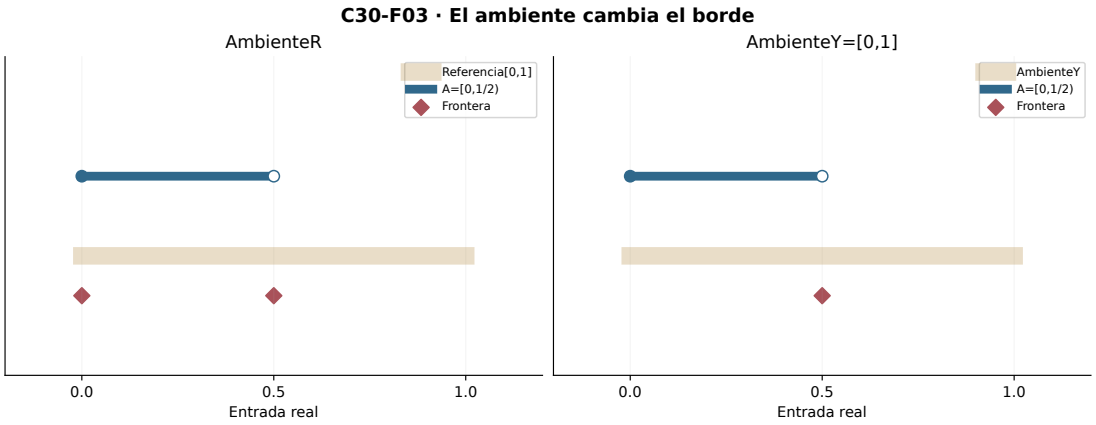


Figura 30.3. Para A=[0,1/2), el ambienteR da frontera{0,1/2}, mientras Y=[0,1] da frontera{1/2}. El punto0 pertenece aA en ambos, pero enY es interior relativo. Las bandas distinguen conjunto, ambiente y marcadores de frontera; no se obtiene frontera relativa sólo intersectando la absoluta.

Ejercicios de la sección 30.3.

Ejercicio 11. Un borde que depende del ambiente

Para $A = [0,1/2)$ calcule interior, clausura y frontera en $\mathbb{R}$ y en $Y = [0,1]$.

Solución. En $\mathbb{R}$, cada punto de $(0,1/2)$ tiene una bola pequeña dentro de A. Cero no la tiene porque sus bolas contienen negativos, y $1/2$ no pertenece a A. Por ello $\mathrm{int}_{\mathbb{R}} A = (0,1/2)$. Cada bola de los extremos cero y $1/2$ encuentra a A, y los puntos fuera de $[0,1/2]$ tienen una bola que lo evita. Así la clausura es $[0,1/2]$ y la frontera es $\{0,1/2\}$.

En $Y = [0,1]$, el conjunto $A = Y \cap (-1,1/2)$ es abierto relativo, luego $\mathrm{int}_Y A = A$. En particular, $B_Y(0,1/2) = [0,1/2)$ cabe en A. La clausura relativa es $Y \cap [0,1/2] = [0,1/2]$, y su diferencia con el interior deja la frontera $\{1/2\}$. Cero pierde su condición de frontera porque ya no hay entradas negativas en el ambiente.

Retorno visual. Véase C30-F03, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 12. Uniones e intersecciones

Pruebe unión arbitraria e intersección finita de abiertos. Refute la extensión a intersecciones infinitas con un ejemplo exacto.

Solución. Sea $U = \bigcup_i U_i$ una unión de abiertos. Si $x \in U$, existe un miembro U_i que lo contiene y un radio $r > 0$ con $B(x, r) \subseteq U_i \subseteq U$. Así U es abierto; la unión vacía también lo es. Para una intersección de $k \geq 1$ abiertos y un punto común x, cada miembro da un radio $r_i > 0$. El mínimo $r = \min_i r_i$ es positivo y su bola está dentro de todos los miembros. La intersección de familia vacía es X, también abierto. Sólo se combinan aquí finitísimos radios.

En la recta, $\bigcap_{n\geq 0}(-1/(n+1), 1/(n+1)) = \{0\}$. Cero pertenece a todos; para $x \neq 0$, arquimedianidad proporciona n con $1/(n+1) < |x|$, excluyéndolo de ese miembro. Ninguna bola real positiva de cero cabe en $\{0\}$, así que esta intersección infinita no es abierta.

Ejercicio 13. Todo abierto y todo cerrado

Demuestre que en un espacio discreto todos los subconjuntos son abiertos y cerrados. Calcule su frontera.

Solución. Para cualquier $A \subseteq X$ y $a \in A$, la bola discreta $B_D(a, 1/2) = \{a\}$ está incluida en A. Luego A es abierto. El mismo razonamiento aplicado a $X \setminus A$ prueba que el complemento es abierto y A es cerrado. En consecuencia, $\operatorname{int}_X A = A$ y $\operatorname{cl}_X A = A$. Su frontera, la diferencia entre clausura e interior, es vacía. También se ve directamente: en cada punto la bola singleton encuentra sólo uno de A y su complemento, nunca ambos. El argumento incluye el conjunto vacío y el espacio completo.

Ejercicio 14. Clausura por ventanas

Pruebe que $\operatorname{cl}_X A$ es cerrada y el menor cerrado que contiene a A, directamente por bolas.

Solución. Todo punto de A pertenece a $\operatorname{cl}_X A$, porque cada bola suya contiene al propio punto. Si x está fuera de la clausura, existe $r > 0$ con $B(x, r) \cap A = \emptyset$. Para $y \in B(x, r)$, el margen $r - d(x, y) > 0$ proporciona una bola de y contenida en $B(x, r)$; también evita a A. Por tanto y está fuera de la clausura. Toda la bola $B(x, r)$ queda en su complemento, que es abierto; la clausura es cerrada.

Sea ahora F cualquier cerrado que contiene a A. Cada $x \notin F$ tiene una bola dentro de $X \setminus F$, y esa bola evita a A. Por ello no pertenece a $\operatorname{cl}_X A$. Se sigue $\operatorname{cl}_X A \subseteq F$, acreditando que es el menor cerrado que contiene a A directamente por bolas.

Ejercicio 15. Intersecar la clausura, no el interior

Pruebe $\operatorname{cl}_Y A = Y \cap \operatorname{cl}_X A$ para $A \subset Y \subset X$. Refute la fórmula análoga para interiores.

Solución. Para $y \in Y$ y todo $r > 0$, $B_Y(y, r) \cap A = [Y \cap B_X(y, r)] \cap A = B_X(y, r) \cap A$, pues $A \subseteq Y$. Ambas intersecciones son no vacías simultáneamente. Por la definición de clausura, $y \in \operatorname{cl}_Y A$ equivale a $y \in \operatorname{cl}_X A$ con $y \in Y$, luego $\operatorname{cl}_Y A = Y \cap \operatorname{cl}_X A$.

Para refutar la fórmula de interiores, tome $A = Y = [0, 1]$ dentro de $X = \mathbb{R}$. El interior de A en Y es todo Y, pero $Y \cap \operatorname{int}_X A = (0, 1)$. En los extremos, las bolas relativas omiten los puntos exteriores que impiden el interior absoluto.

30.4. Convergencia con un destino en el espacio

Una sucesión en X es una función $x : \mathbb{N}_0 \to X$. Converge a $a \in X$ si $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N :\quad d(x_n, a) < \varepsilon$. El destino debe pertenecer al espacio declarado. La condición equivale a captura eventual por cada vecindad de a: una vecindad contiene una bola, y cada bola es una vecindad. No se requiere que los puntos tengan coordenadas o puedan restarse.

Unicidad sin orden. Si hubiera dos destinos $a \neq b$, su separación $D = d(a, b) > 0$ permitiría pedir a ambas convergencias tolerancia $D/3$. Después del máximo de sus cortes, un mismo término cumpliría $D \leq d(a, x_n) + d(x_n, b) < 2D/3$, contradicción. Sólo se usaron separación, triangular y sincronización de cortes. Ninguna completitud interviene. Una sucesión convergente es acotada: existe una bola de radio finito que contiene todos sus valores. La captura con tolerancia 1 acota la cola respecto del destino; las distancias del prefijo finito tienen un máximo. Aumentar ese máximo y 1 en una unidad proporciona una bola abierta que contiene todo. Si no hay prefijo, basta radio 2. Cambiar el centro a $b \in X$

aumenta la cota a lo sumo en $d(a,b)$; la acotación no depende de una referencia privilegiada. La sucesión tiene valores, por lo que aquí X es necesariamente no vacío.

Transportar lo eventual. Cambiar finitos términos no altera un destino. Si n_k es estrictamente creciente en $\mathbb{N}_0$, la inducción da $n_k \geq k$; por ello la subsucesión conserva cualquier corte de convergencia. Si $x_n \to a$ y $d(x_n, y_n) \to 0$, entonces $y_n \to a$ por $d(y_n, a) \leq d(y_n, x_n) + d(x_n, a)$. Cada error se hace menor que $\varepsilon/2$ y se toma el máximo de cortes. Aun sin operaciones en X, existe una regla de perturbación pequeña. La triangular inversa también da $d(x_n, b) \to d(a, b)$ para cada b fijo. Más generalmente, si $y_n \to b$, dos aplicaciones de triangular prueban $|d(x_n, y_n) - d(a, b)| \leq d(x_n, a) + d(y_n, b) \to 0$. Los límites del último renglón son reales, ya acreditados por C6.

Cierre y selección de testigos. Si una sucesión con valores en A converge a $a \in X$, cada bola de a contiene términos tardíos, así que $a \in \mathrm{cl}_X A$. En particular un conjunto cerrado retiene todos esos destinos. La vuelta requiere reunir testigos: si $a \in \mathrm{cl}_X A$, los conjuntos $A \cap B(a, 1/(n+1))$ son no vacíos. Si se dispone de una selección a_n en cada uno, su distancia a a es menor que $1/(n+1)$ y converge. La existencia general de esa selección se garantiza bajo **elección numerable para subconjuntos de** X, que denotaremos $\mathrm{CC}(X)$; también basta una selección explícitamente dada. No se esconde esta interfaz lógica en la frase «escojamos una sucesión».

Con $\mathrm{CC}(X)$, o con los testigos explícitos requeridos, obtenemos el criterio secuencial de cerrado. La dirección desde cerrado retiene todos los límites y no usa elección. Para la vuelta, si A no fuera cerrado habría un punto de su clausura fuera de él; la selección anterior produciría una sucesión de A convergente a ese punto y refutaría la retención. Cuando los testigos pertenecen a un conjunto enumerado, elegir el primer índice admisible puede proporcionar la regla sin elección arbitraria.

En la métrica discreta, converger a a equivale a ser eventualmente igual a a, porque la tolerancia $1/2$ excluye cualquier otro punto. En la usual sobre $\mathbb{R}$, $1/(n+1) \to 0$ sin ser eventualmente cero. La misma sintaxis de captura adquiere contenido diferente al cambiar la métrica.

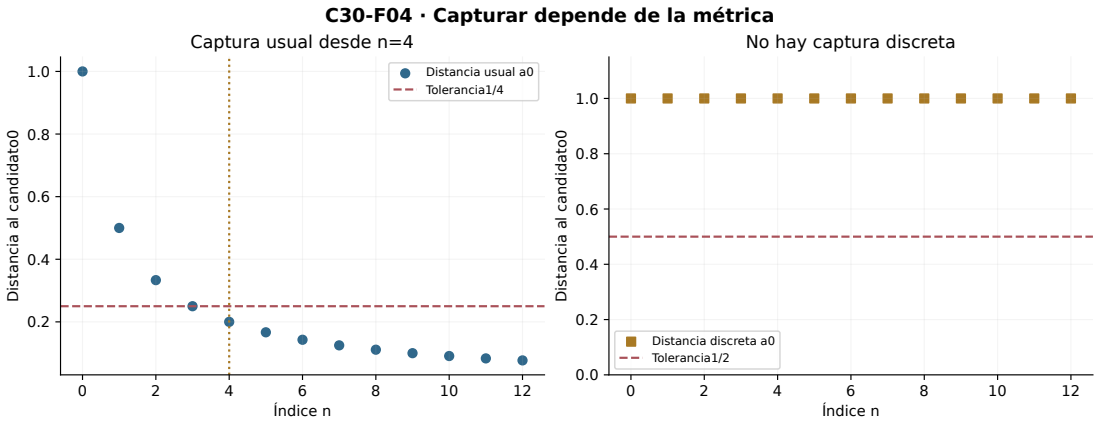


Figura 30.4. Los recíprocos1/(n+1) convergen a0 en la métrica usual y tienen error1/(n+1), con corte estricto n4 para tolerancia1/4. Los mismos valores tienen distancia discreta1 a0 en todos los índices y no convergen a ningún destino discreto, pues sus términos son todos distintos. Los puntos representan índices enteros, sin interpolar una sucesión.

Ejercicios de la sección 30.4.

Ejercicio 16. Mismos términos, distinta captura

Estudie $x_n = 1/(n+1)$ en la recta con métrica usual y con métrica discreta. Considere cualquier posible destino discreto.

Solución. En la usual, $d(x_n, 0) = 1/(n+1) \to 0$. Dada una tolerancia positiva, arquimedianidad permite elegir N con $1/(N+1) < \varepsilon$, y todos los posteriores cumplen la misma desigualdad. Así $x_n \to 0$. En la discreta, converger a cualquier $a \in \mathbb{R}$ exigiría, con tolerancia $1/2$, $d_D(x_n, a) = 0$ para toda una cola. Esto obliga a $x_n = a$ desde algún índice. Los valores $1/(n+1)$ son todos distintos, por lo que ninguna cola es constante. No converge a cero ni a ningún otro destino discreto. Cambiar la métrica ha cambiado las bolas que la sucesión debe ocupar.

Retorno visual. Véase C30-F04, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 17. Un destino único

Pruebe unicidad de límites métricos sin usar coordenadas, orden de puntos ni completitud.
Solución. Suponga que x_n converge a a y a b. Si fueran distintos, separación daría $D = d(a, b) > 0$. Para tolerancia $D/3$, cada convergencia proporciona un corte; tome el máximo de los dos. En cualquier índice posterior, $d(a, x_n) < D/3$ y $d(x_n, b) < D/3$. Por triangular, $D \le d(a, x_n) + d(x_n, b) < 2D/3$, contradicción. Por tanto $a = b$.

El orden se usa sólo para comparar números reales de distancia. No se han usado coordenadas, un orden entre puntos ni la existencia de límites para sucesiones arbitrarias; la completitud no interviene.

Ejercicio 18. Dos referencias acotan el mismo conjunto

Si $A \subset X$ cumple $d(x, a) \le R$ para todo $x \in A$, dé una cota respecto de otro centro b y un radio abierto que contenga A.
Solución. Para $x \in A$, la triangular da $d(x, b) \le d(x, a) + d(a, b) \le R + d(a, b)$. La distancia fija entre los centros es finita, por lo que ésta es una cota común respecto de b. Para obtener inclusión en una bola abierta, aumente la cota: $A \subseteq B_d(b, R + d(a, b) + 1)$, tomando $R \ge 0$ como cota de distancias. La unidad añadida garantiza radio positivo y desigualdad estricta aun cuando se alcance la cota anterior. Si A es vacío, cualquier bola de centro b lo contiene. La elección de los centros declarados ya asegura que X no es vacío.

Ejercicio 19. Un criterio secuencial con su interfaz

Formule la relación entre clausura y límites de sucesiones de A. Separe la dirección incondicional de la que necesita testigos.
Solución. La dirección incondicional es: si existe una sucesión $a_n \in A$ con $a_n \to a \in X$, entonces $a \in \mathrm{cl}_X A$. Para cada radio $r > 0$, la convergencia coloca un término tardío en $B(a, r)$; ese término pertenece a A y acredita la intersección no vacía. Para la vuelta, si $a \in \mathrm{cl}_X A$, cada conjunto $W_n = A \cap B(a, 1/(n+1))$ es no vacío. Bajo $\mathrm{CC}(X)$ se elige $a_n \in W_n$ simultáneamente, o se utiliza una selección suministrada. Entonces $d(a_n, a) < 1/(n+1) \to 0$, por lo que $a_n \to a$.

La propiedad de clausura da un testigo para cada radio; la interfaz de elección o la selección explícita permite reunirlos en una sucesión. Sin esa interfaz sólo se afirma la primera dirección de manera general.

Ejercicio 20. Perturbación y dos distancias

Si $x_n \to a$ y $y_n \to b$, pruebe $d(x_n, y_n) \to d(a, b)$ y deduzca la regla cuando $d(x_n, y_n) \to 0$.
Solución. La desigualdad de dos centros da $|d(x_n, y_n) - d(a, b)| \le d(x_n, a) + d(y_n, b)$. Para una tolerancia $\varepsilon > 0$, pida $\varepsilon/2$ a ambas convergencias y tome el máximo de sus cortes. Toda la cola tiene error menor que ε, de modo que $d(x_n, y_n) \to d(a, b)$ como sucesión real. Si además $d(x_n, y_n) \to 0$, la unicidad del límite real da $d(a, b) = 0$; separación implica $a = b$. Si todavía no se ha supuesto convergencia de y_n, basta saber $x_n \to a$ y $d(x_n, y_n) \to 0$: triangular da $d(y_n, a) \le d(y_n, x_n) + d(x_n, a) \to 0$, construyendo su convergencia al mismo destino.

30.5. Cauchy compara toda la cola

La condición de **Cauchy** compara dos índices tardíos sin nombrar destino: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall p, q \geq N :\quad d(x_p, x_q) < \varepsilon$. El corte precede a ambos índices. Conocer sólo $d(x_{n+1}, x_n) \to 0$ no basta. La negación fija una tolerancia $\varepsilon_0 > 0$ antes del corte adversario y exige, para todo N, algún par $p, q \geq N$ con $d(x_p, x_q) \geq \varepsilon_0$.

Convergente implica Cauchy. Para cada $\varepsilon > 0$, la convergencia da una cola situada a distancia menor que $\varepsilon/2$ de su destino a. Dos términos de ella pueden unirse pasando por a y la triangular hace su distancia menor que ε. La prueba usa el destino recibido y no necesita construirlo mediante completitud. **Cauchy implica acotada.** Con tolerancia 1 fijamos una cola y su término x_{N_0}. Todo término posterior está a distancia menor que 1 de esa referencia. Las distancias de los finitísimos términos anteriores tienen máximo; un radio que exceda ese máximo y 1 contiene la sucesión. De nuevo la prueba no usa completitud. La recíproca falla: una alternancia entre dos puntos distintos es acotada y conserva separación positiva después de todo corte.

Una subsucesión puede revelar el destino. Si x es de Cauchy y una subsucesión $x_{n_k} \to a \in X$, entonces toda x converge a a. Recibido ε, tomamos el corte de Cauchy para $\varepsilon/2$. Elegimos un término de la subsucesión posterior a ese corte y a su propio corte de convergencia, lo que es posible porque $n_k \geq k$. Fijado ese término como referencia, para todo n posterior al corte de Cauchy, $d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, a) < \varepsilon$. Se usa una elección finita de un índice natural, no se supone que exista siempre una subsucesión convergente.

Cauchy no garantiza destino en un espacio arbitrario. En $X = (0, 1)$ con distancia usual, $x_n = 1/(n + 2)$ es de Cauchy: para $p, q \geq N$ sus valores están en $(0, 1/(N + 2)]$, y su separación es a lo sumo $1/(N+2)$. Vista en $\mathbb{R}$, converge a cero. Si convergiera a $a \in (0, 1)$, las mismas distancias acreditarían esa convergencia en $\mathbb{R}$, y unicidad forzaría $a = 0$, imposible. C10 construía destinos reales mediante completitud; aquí no hemos añadido esa propiedad a todo conjunto con distancia.

En la métrica discreta, la tolerancia $1/2$ del contrato de Cauchy obliga a que todos los términos tardíos coincidan con x_N. La cola es constante y su valor pertenece al espacio, por lo que sí hay destino. La comparación con $(0, 1)$ muestra que disponer de una métrica y estabilizar distancias no resuelve por sí solo la existencia del límite. **Un presupuesto de saltos que sí controla bloques.** Si $d(x_{n+1}, x_n) \leq C\rho^n$, con $C \geq 0$ y $0 < \rho < 1$, la triangular iterada finitamente da, para $p > q$, $d(x_p, x_q) \leq \sum_{j=q}^{p-1} C\rho^j \leq \frac{C\rho^q}{1-\rho}$. La identidad geométrica finita y $\rho^q \to 0$ hacen Cauchy a x. Sin una propiedad adicional del espacio no se declara un destino. Si ya existe a con $x_p \to a$, pasar p al límite en la distancia prueba el certificado $d(x_q, a) \leq C\rho^q/(1 - \rho)$. Estabilización, existencia y error quedan como pasos distintos.

Ejercicios de la sección 30.5.

Ejercicio 21. Cauchy sin cero admisible

Pruebe que $x_n = 1/(n+2)$ es de Cauchy en $(0, 1)$ y no converge a ningún elemento de ese espacio.

Solución. Todos los términos pertenecen a $(0, 1)$. Para $m, n \geq N$, están en $(0, 1/(N + 2)]$, luego $|x_m - x_n| \leq 1/(N+2)$. Escoger N con esa barrera menor que ε controla todos los pares de la cola y prueba Cauchy. Los mismos términos convergen a cero en $\mathbb{R}$. Si convergieran a algún $a \in (0, 1)$ con la métrica restringida, la igualdad de distancias acreditaría también convergencia real a a. Unicidad obligaría a $a = 0$, que está fuera del espacio. Por tanto no tienen ningún destino en $(0, 1)$; la condición Cauchy queda satisfecha sin asegurar que el límite externo sea admisible.

Retorno visual. Véase C30-F05, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

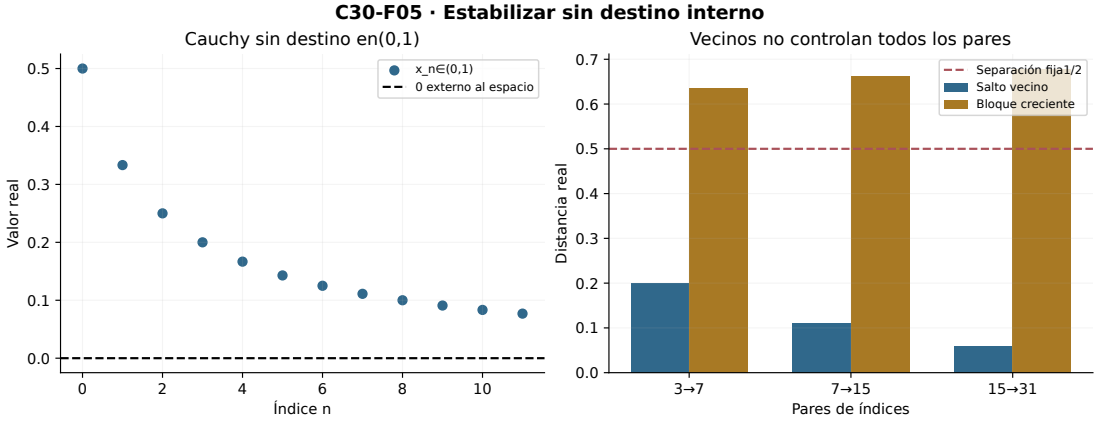


Figura 30.5. En(0,1), los términos1/(n+2) son Cauchy con cota de pares1/(N+2), pero el candidato externo0 queda fuera del espacio. En sumas armónicas finitas, los saltos vecinos desaparecen y los pares de bloques de longitud creciente siguen separados al menos por1/2. Las diferencias exactas acreditan la negación de Cauchy.

Ejercicio 22. Cauchy y captura constante

Caracterice todas las sucesiones de Cauchy de una métrica discreta y sus límites.

Solución. Si una sucesión es Cauchy en la discreta, tome tolerancia $1/2$. Existe N con $d_D(x_m, x_n) < 1/2$ para todos $m, n \geq N$. Las únicas distancias posibles son cero y uno, por lo que todas esas distancias son cero. Fijar $m = N$ da $x_n = x_N$ para toda la cola.

Recíprocamente, una cola constante tiene distancia cero entre todos sus pares posteriores y cumple Cauchy para cualquier tolerancia. Converge al valor constante x_N, que pertenece al espacio, pues su error es cero desde ese corte. La separación y unicidad excluyen otro destino. Así las sucesiones de Cauchy discretas son exactamente las eventualmente constantes.

Ejercicio 23. Vecinos pequeños no bastan

Para $h_n = \sum_{j=1}^{n+1} 1/j$ en $\mathbb{R}$, pruebe saltos vecinos nulos y refute Cauchy mediante pares dados después de cualquier corte.

Solución. El salto vecino es $h_{n+1} - h_n = 1/(n+2) \to 0$. Para negar Cauchy hay que exhibir una tolerancia fija y pares tardíos separados por ella. Dado cualquier corte $N \geq 0$, ponga $m = N+1$ y tome los índices $p = m-1 = N$, $q = 2m-1$. Ambos son posteriores al corte. Sus valores difieren en $h_q - h_p = \sum_{j=m+1}^{2m} 1/j$. Hay m términos y cada uno es al menos $1/(2m)$, luego la diferencia es $\geq 1/2$.

La tolerancia $\varepsilon_0 = 1/2$ falla después de todo corte, con esos pares dados explícitamente. Aunque cada salto se haga pequeño, los bloques de longitud creciente mantienen una separación fija. No se ha necesitado seleccionar infractores mediante elección.

Ejercicio 24. Subsucesión y cola completa

Pruebe que una sucesión de Cauchy con una subsucesión convergente en X converge al mismo destino. Identifique el índice fijado como referencia.

Solución. Suponga que x_n es Cauchy y que una subsucesión x_{n_k} converge a $a \in X$. Dado $\varepsilon > 0$, elija N de Cauchy para $\varepsilon/2$, y K de la subsucesión para la misma tolerancia. Escoja un índice $k \geq \max\{N, K\}$. Como los índices de la subsucesión son estrictamente crecientes, $n_k \geq k \geq N$, y $d(x_{n_k}, a) < \varepsilon/2$. Mantenga fijo este término como referencia. Para todo $n \geq N$, la triangular da $d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, a) < \varepsilon$.

Así converge la sucesión completa a a. La existencia de una subsucesión convergente pertenece a las hipótesis: no se ha deducido que toda Cauchy disponga de ella en un espacio arbitrario.

Ejercicio 25. Saltos geométricos y tres obligaciones

Si $d(x_{n+1}, x_n) \le 3\,2^{-n}$, acredite Cauchy y una cota de error si el destino ya existe. Indique qué corte certifica error estrictamente menor que $3/8$.

Solución. Para $p > q$, la triangular iterada compara los extremos por todos los saltos intermedios: $d(x_p, x_q) \le \sum_{j=q}^{p-1} 3\,2^{-j} = 6\,2^{-q}(1 - 2^{-(p-q)}) \le 6\,2^{-q}$. El primer salto es el de índice q, lo que determina el factor seis. Para ambos índices $\ge N$, intercambiarlos si hace falta deja una distancia $\le 6\,2^{-N}$. Esta barrera tiende a cero y prueba Cauchy. En un espacio arbitrario no basta para afirmar existencia de un destino.

Si ya se sabe $x_p \to a \in X$, la triangular inversa da $|d(x_q, x_p) - d(x_q, a)| \le d(x_p, a) \to 0$. Con q fijo se puede pasar al límite en la cota y obtener $d(x_q, a) \le 6\,2^{-q}$. Para tolerancia estricta $3/8$, se pide $6\,2^{-q} < 3/8$, equivalente a $q > 4$. El primer corte certificado es cinco; en cuatro la barrera sólo da $\le 3/8$. La sucesión real $x_q = 6\,2^{-q}$ alcanza el error al destino cero y muestra que cuatro no garantiza la desigualdad estricta.

30.6. Continuidad entre espacios métricos

Sean espacios métricos (X, d_X) y (Y, d_Y) y una función $f : X \to Y$. Es continua en $a \in X$ si

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X : \quad d_X(x, a) < \delta \implies d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Se incluye el centro. El radio de entrada puede depender de a y de la tolerancia. En un punto aislado la continuidad de cualquier función es automática: una bola que sólo contiene el centro cumple todas las exigencias.

Continuidad transporta sucesiones dadas. Dada $x_n \to a$ y una tolerancia de salida, pedimos a la continuidad un radio δ de entrada. Después pedimos a la sucesión un corte que la mantenga en esa bola. Las imágenes de toda la cola quedan en la bola de salida y convergen a $f(a)$. La sucesión ya está dada en la hipótesis; esta dirección no necesita seleccionar testigos.

Para la vuelta, la falla de continuidad en a fija $\varepsilon_0 > 0$ y, para cada $\delta > 0$, una entrada con $d_X(x, a) < \delta$ y $d_Y(f(x), f(a)) \ge \varepsilon_0$. Los conjuntos de infractores con $\delta = 1/(n+1)$ son no vacíos. Bajo $\mathrm{CC}(X)$, o si esos testigos se suministran, forman una sucesión que converge a a y cuyas imágenes no convergen a $f(a)$. Así el criterio secuencial es una equivalencia con esa interfaz explícita; la implicación directa es incondicional.

La caracterización por abiertos no necesita esa selección. f es continua en todos sus puntos si y sólo si $f^{-1}[V]$ es abierto en X para todo abierto $V \subset Y$. Si f es continua y a está en la preimagen, una bola de salida alrededor de $f(a)$ cabe en V; su radio entra como tolerancia y produce una bola de entrada contenida en la preimagen. Ésta es abierta por definición. Recíprocamente, para a, ε, la bola abierta $B_Y(f(a), \varepsilon)$ tiene preimagen abierta que contiene a. Alguna bola alrededor de a cabe en ella y da exactamente el radio requerido. Complementar y usar $f^{-1}[Y \setminus F] = X \setminus f^{-1}[F]$ acredita el criterio equivalente por cerrados.

Componer y restringir. Para $f : X \to Y$ continua en a y $g : Y \to Z$ continua en $f(a)$, una tolerancia de Z da primero un radio η en Y; usar η como tolerancia de f da el radio de X. La cadena de implicaciones prueba continuidad de $g \circ f$. Restringir el dominio conserva la prueba porque sus bolas son intersecciones. Un cambio a un subespacio de salida que contiene el recorrido tampoco cambia las distancias de salida; debe declararse el codominio correcto.

Funciones que siempre tenemos. Para $b \in X$, $x \mapsto d_X(x, b)$ es continua hacia $\mathbb{R}$: la triangular inversa da error a lo sumo $d_X(x, a)$, así que sirve $\delta = \varepsilon$. Los singletons son cerrados: alrededor de $x \neq b$ la bola de radio $d_X(x, b)/2$ evita a b. Los conjuntos de nivel de una función continua real son cerrados por preimagen de singletons, y las regiones definidas por desigualdades estrictas son abiertas por preimagen de intervalos abiertos.

La caracterización usa preimágenes abiertas. No asegura que las imágenes sean abiertas: una constante $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ envía el abierto completo a un singleton. Tampoco una biyección continua garantiza continuidad de su inversa. La identidad desde $\mathbb{R}$ discreta hacia $\mathbb{R}$ usual

es continua porque cada entrada es aislada en el dominio. En la dirección inversa, ninguna bola usual en cero contiene sólo ese punto, como exigiría una bola discreta de radio 1/2. La regla de valores es la misma; las métricas de entrada y salida cambian la obligación.

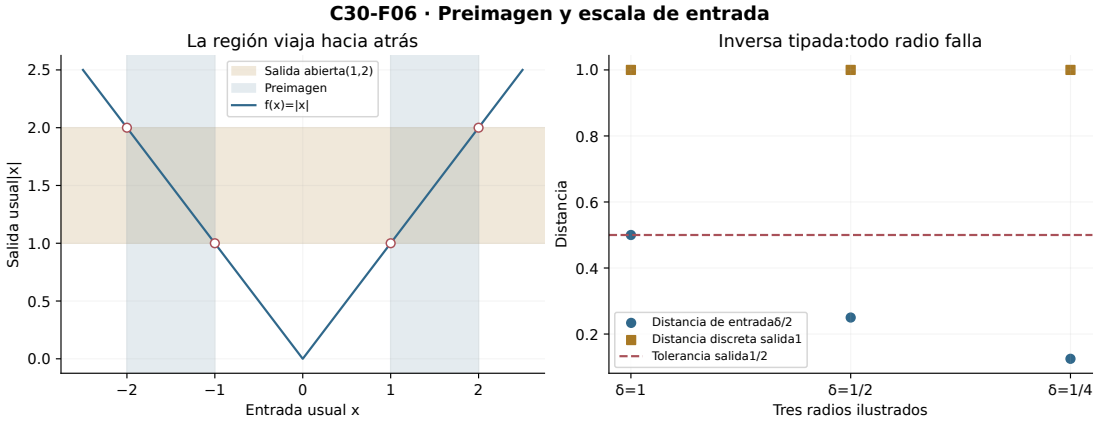


Figura 30.6. La función valor absoluto lleva hacia atrás la banda abierta de salida(1,2) a las dos ventanas$(-2,-1)$ y(1,2). Para la identidad de la usual hacia la discreta, cualquier radioδ falla con una entrada$\delta/2$ distinta de0: la distancia discreta de salida sigue siendo1. Las tres radios ilustrados no sustituyen la regla válida para todoδ>0.

Ejercicios de la sección 30.6.

Ejercicio 26. Preimagen de una banda

Para $f(x) = |x|$ en la recta usual, calcule $f^{-1}[(1,2)]$ y pruebe continuidad usando una desigualdad métrica.

Solución. La condición $1 < |x| < 2$ se cumple exactamente en $(-2,-1) \cup (1,2)$. Por ello $f^{-1}[(1,2)]$ es esa unión de dos intervalos abiertos. La triangular inversa real da $||x| - |a|| \leq |x-a|$ para cualquier centro a. Con $\delta = \varepsilon$, toda entrada a distancia menor que δ tiene error de salida menor que ε. Así f es continua en toda la recta, e incluso 1-Lipschitz. Su falta de inyectividad no afecta a este control ni al criterio por preimágenes.

Retorno visual. Véase C30-F06, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 27. La equivalencia por abiertos

Pruebe continuidad global equivalente a preimágenes abiertas, con espacios métricos distintos y sin construir sucesiones.

Solución. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos, y $f : X \to Y$. Suponga primero que f es continua. Si $V \subseteq Y$ es abierto y $a \in f^{-1}[V]$, existe $\varepsilon > 0$ con $B_Y(f(a), \varepsilon) \subseteq V$. Continuidad en a proporciona $\delta > 0$ que envía $B_X(a, \delta)$ dentro de esa bola. Luego la preimagen es abierta en X.

Recíprocamente, suponga que toda preimagen de un abierto de Y es abierta en X. Para $a \in X$ y $\varepsilon > 0$, la preimagen de $B_Y(f(a), \varepsilon)$ es abierta y contiene a a. Existe $\delta > 0$ con $B_X(a, \delta)$ incluida en ella. Esto significa exactamente que $d_X(x, a) < \delta$ implica $d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$, acreditando continuidad en cada centro. Las bolas de entrada y salida usan sus métricas respectivas. La prueba trabaja punto a punto con radios; no construye sucesiones ni utiliza elección numerable. El dominio vacío satisface ambas condiciones de modo vacuo.

Ejercicio 28. Identidad con inversa fallida

Pruebe que la identidad de $\mathbb{R}$ discreto hacia $\mathbb{R}$ usual es una biyección continua y que su inversa falla en cero.

Solución. La identidad $i : (\mathbb{R}, d_D) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ es biyectiva por su regla de valores. Para cualquier centro a y tolerancia de salida $\varepsilon > 0$, el radio discreto $\delta = 1/2$ admite únicamente $x = a$. Su error de salida es cero, luego i es continua. Para la inversa j en cero, fije tolerancia discreta $1/2$. Dado cualquier radio usual $\delta > 0$, tome $x = \delta/2$. Está a distancia usual menor que δ de cero y es distinto de cero, por lo que $d_D(j(x), j(0)) = 1$. Ningún radio cumple la tolerancia. La biyección continua tiene, por tanto, una inversa discontinua.

Ejercicio 29. Un fracaso secuencial condicionado

Si f no es continua en a, construya una sucesión infractora bajo $\mathrm{CC}(X)$ y explique el papel de ese supuesto.

Solución. Negar continuidad en a da $\varepsilon_0 > 0$ tal que para cada $\delta > 0$ existe $x \in X$ con $d_X(x, a) < \delta$ y $d_Y(f(x), f(a)) \geq \varepsilon_0$. Para $n \geq 0$, forme $W_n = \{x \in X : d_X(x, a) < 1/(n + 1),\ d_Y(f(x), f(a)) \geq \varepsilon_0\}$. Cada W_n es no vacío. Bajo $\mathrm{CC}(X)$, se selecciona simultáneamente $x_n \in W_n$. Entonces $d_X(x_n, a) < 1/(n + 1) \to 0$, pero las imágenes quedan a distancia al menos ε_0 de $f(a)$ en todos los índices. Así $x_n \to a$ y $f(x_n)$ no converge al valor central.

La elección se usa exclusivamente para reunir los testigos de la familia W_n en una sucesión. Si esos testigos ya están dados explícitamente, basta utilizarlos. La sucesión infractora niega convergencia al valor central; podría tener otro destino en el codominio.

Ejercicio 30. Transportar el dominio de un nivel

Para $b \in X$ pruebe continuidad de $F(x) = d(x, b)$ y determine si $\{x : d(x, b) = r\}$ es cerrado y $\{x : d(x, b) < r\}$ es abierto.

Solución. Con $F(x) = d(x, b)$, la triangular inversa da $|F(x) - F(a)| \leq d(x, a)$ para todos los puntos. Por tanto $\delta = \varepsilon$ acredita continuidad en cualquier centro, y también continuidad uniforme. Para cualquier $r \in \mathbb{R}$, el nivel $\{x : d(x, b) = r\}$ es $F^{-1}[\{r\}]$. El singleton real es cerrado y la preimagen por una función continua es cerrada, como se obtiene aplicando el criterio de abiertos al complemento. La región $\{x : d(x, b) < r\} = F^{-1}[(-\infty, r)]$ es abierta.

Estas conclusiones incluyen niveles vacíos y la región vacía cuando $r \leq 0$. No se exige que exista algún punto a distancia exactamente r ni que la distancia recorra todos los valores de un intervalo.

30.7. Una escala común y espacios de funciones

La continuidad uniforme exige un radio común para todos los pares de entradas:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in X : \quad d_X(x, y) < \delta \implies d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

No se fija un centro antes de pedir el radio. Una función es L-Lipschitz, con $L \geq 0$, si $d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X(x, y)$ para todo par. Si $L > 0$, $\delta = \varepsilon/L$ acredita continuidad uniforme; si $L = 0$, todas las imágenes coinciden y sirve cualquier radio positivo. Para dominio vacío, las condiciones son vacuas y no hace falta nombrar una imagen común.

Cauchy se transporta bajo una escala común. La continuidad uniforme transforma una tolerancia de salida en un único radio δ que sirve para todos los pares de entradas. El contrato de Cauchy sitúa después todos los pares tardíos a distancia menor que ese radio. Sus imágenes quedan a distancia menor que la tolerancia y son de Cauchy en Y. Ninguna parte de esta prueba requiere que ya exista un destino en X o en Y.

La continuidad punto a punto no basta para ese transporte. En $(0, 1)$, $f(x) = 1/x$ es continua: en un centro $a > 0$, si $|x - a| < a/2$, entonces $x > a/2$ y $|1/x - 1/a| \leq 2|x - a|/a^2$, lo que permite un radio dependiente de a. Pero para $x_n = 1/(n + 2)$ e $y_n = 1/(n + 3)$, la distancia de entrada es $1/((n + 2)(n + 3)) \to 0$ y la de salida es exactamente 1. Estos pares niegan uniformidad, con tolerancia fija $1/2$. Además la sucesión Cauchy x_n tiene imágenes $n + 2$, que no son de Cauchy. La falla ocurre hacia un punto que no pertenece al dominio, de modo que no contradice continuidad en ningún centro suyo.

Distancia a un conjunto. Si $A \subset X$ es no vacío, definimos $\operatorname{dist}(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$. El conjunto de distancias es no vacío y acotado inferiormente por cero, por lo que el ínfimo

real de C3 existe y es finito. Para $\eta > 0$ hay $a \in A$ con $d(y, a) < \operatorname{dist}(y, A) + \eta$. La triangular da $\operatorname{dist}(x, A) \leq d(x, y) + \operatorname{dist}(y, A) + \eta$. Si la desigualdad sin η fallara, elegir η menor que su diferencia positiva daría contradicción. Intercambiar x, y demuestra $|\operatorname{dist}(x, A) - \operatorname{dist}(y, A)| \leq d(x, y)$. Es una función 1-Lipschitz. Además $\operatorname{dist}(x, A) = 0$ si y sólo si $x \in \operatorname{cl}_X A$: cada bola encuentra una distancia menor que su radio, y recíprocamente un ínfimo cero permite obtener esa distancia. No es necesario que el ínfimo se alcance; distancia cero a un conjunto no significa pertenencia si el conjunto no es cerrado. Para $A = \emptyset$ no se define aquí una distancia real finita mediante ese ínfimo.

Los puntos también pueden ser funciones. Para un conjunto no vacío T, sea $\mathcal{B}(T)$ el conjunto de funciones reales acotadas sobre T. Definimos $D_\infty(f, g) = \sup_{t \in T} |f(t) - g(t)|$. Las cotas de f, g aseguran finitud; el conjunto de magnitudes no vacío tiene supremo por C3. Si el supremo es cero, todas las magnitudes son cero y $f = g$. Simetría es directa. La triangular puntual queda dominada por $D_\infty(f, h) + D_\infty(h, g)$; tomar supremo prueba la triangular métrica. C27 ya había desarrollado esta distancia, y ahora reconocemos su lugar entre las métricas generales.

Convergencia en esta métrica equivale a convergencia uniforme hacia una función acotada: una distancia de supremo menor que ε controla todas las entradas; en sentido inverso, control puntual estricto con tolerancia $\varepsilon/2$ deja supremo a lo sumo $\varepsilon/2 < \varepsilon$. Se conserva el margen entre desigualdad estricta y supremo. Por ejemplo en $T = [0, 1]$, $f_n(t) = t/(n+1)$ tiene distancia exacta $1/(n+1)$ a cero. La convergencia puntual sola de t^{n+1} al destino discontinuo que vale uno en 1 y cero antes tiene distancia de supremo 1 en cada índice. No hay convergencia métrica aunque cada evaluación converja.

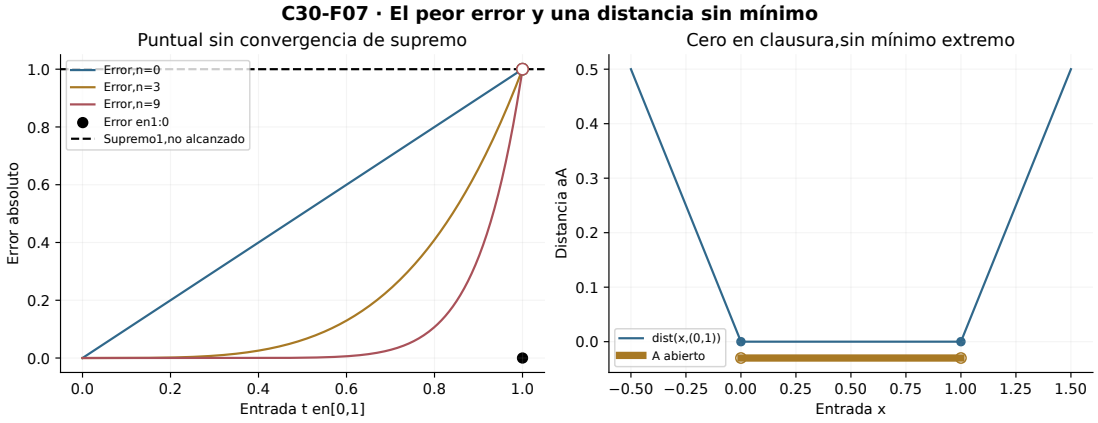


Figura 30.7. Los errores de t^(n+1) frente al destino puntual valen t^(n+1) para t<1 y0 en1; su supremo es1 sin alcanzarse. Las curvas no contienen una falsa unión entre el límite izquierdo y el valor extremo. La distancia real aA=(0,1) vale0 en[0,1], aunque el ínfimo no se alcance en los extremos; fuera es la separación al extremo más cercano.

Ejercicios de la sección 30.7.

Ejercicio 31. Un radio Lipschitz

Para una función L-Lipschitz entre métricas, dé radios de continuidad uniforme y pruebe que transporta sucesiones de Cauchy. Separe $L = 0$.

Solución. Suponga $d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X(x, y)$ para todo par. Si $L > 0$, el radio común $\delta = \varepsilon/L$ da error de salida menor que ε cuando la distancia de entrada es menor que δ. Para una sucesión Cauchy x_n, elija su corte correspondiente a δ. Todo par posterior cumple $d_X(x_m, x_n) < \delta$ y por ello $d_Y(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon$. Así la sucesión de imágenes es Cauchy sin necesitar un destino en ninguno de los espacios.

Si $L = 0$, todas las distancias de imágenes son cero; por separación, en un dominio no vacío la función es constante. Cualquier radio positivo sirve, y las imágenes de cualquier sucesión son constantes y Cauchy. Si el dominio es vacío, las condiciones universales son vacuas y no hay sucesiones que transportar.

Ejercicio 32. Distancia cero sin pertenencia

Para $A = (0, 1)$ dentro de $\mathbb{R}$, calcule $\operatorname{dist}(x, A)$ en toda la recta y decida dónde vale cero y dónde se alcanza el ínfimo.

Solución. Para $x < 0$ y $a \in (0, 1)$, $|x - a| = a - x > -x$. Hacer $a \to 0^+$ aproxima ese valor a $-x$, luego el ínfimo es $-x$ y no se alcanza. Para $x > 1$, $|x - a| = x - a > x - 1$; al hacer $a \to 1^-$, el ínfimo es $x - 1$, tampoco alcanzado. Si $0 < x < 1$, tomar $a = x$ da distancia cero, el mínimo. En $x = 0$ o $x = 1$, las distancias positivas a entradas que se acercan al extremo tienden a cero; su ínfimo es cero pero no hay punto del intervalo que lo alcance.

Así $\operatorname{dist}(x, A) = -x$ para $x < 0$, cero para $0 \le x \le 1$, y $x - 1$ para $x > 1$. El conjunto de ceros es $[0, 1] = \operatorname{cl} A$. El ínfimo se alcanza exactamente cuando $x \in (0, 1)$, lo que distingue distancia cero, pertenencia a la clausura y existencia de un punto minimizante.

Ejercicio 33. Continuidad que destruye Cauchy

Pruebe continuidad de $1/x$ en $(0, 1)$, niegue su uniformidad con pares explícitos y muestre una Cauchy cuya imagen no lo es.

Solución. En un centro $a \in (0, 1)$, si $|x - a| < a/2$ entonces $x > a/2$ y $|1/x - 1/a| = |x - a|/(ax) \le 2|x - a|/a^2$. Para $\varepsilon > 0$ sirve $\delta = \min\{a/2, \varepsilon a^2/2\}$, que acredita continuidad en a. Para negar uniformidad, use $x_n = 1/(n + 2)$, $y_n = 1/(n + 3)$. Su separación es $1/[(n + 2)(n + 3)] \to 0$, mientras la separación de imágenes es uno. Con tolerancia de salida $1/2$, cualquier radio queda incumplido por alguno de esos pares.

La sucesión x_n es Cauchy en $(0, 1)$: los términos posteriores a N están entre cero y $1/(N + 2)$. Sus imágenes son $n+2$, cuyos vecinos tienen distancia uno y niegan Cauchy con tolerancia $1/2$. El centro problemático cero está fuera del dominio; el ejemplo respeta continuidad en todos sus puntos.

Ejercicio 34. Un supremo que no se alcanza

En $T = [0, 1]$ tome $f_n(t) = t^{n+1}$ y su destino puntual $f(t) = 0$ para $t < 1$, $f(1) = 1$. Calcule $D_\infty(f_n, f)$ y compare con $g_n(t) = t/(n + 1)$.

Solución. Para $t < 1$, $f_n(t) \to 0$, y en $t = 1$ todos los valores son uno; ésas son las evaluaciones del destino puntual f. Su error es t^{n+1} en $[0, 1)$ y cero en uno. Es menor que uno en todas las entradas. Sin embargo, para n fijo y $t \to 1^-$, $t^{n+1} \to 1$. Por ello uno es la menor cota superior y $D_\infty(f_n, f) = 1$ en cada índice. El supremo no se alcanza, y las distancias no tienden a cero: no hay convergencia uniforme a f.

Para $g_n(t) = t/(n + 1)$, el destino es cero y $D_\infty(g_n, 0) = 1/(n + 1)$, alcanzado en $t = 1$. Éste sí tiende a cero. La primera familia muestra por qué errores individualmente estrictos no permiten concluir que su supremo sea estricto. **Retorno visual.** Véase C30-F07, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 35. Una distancia de funciones bien definida

Pruebe los axiomas de D_∞ en $\mathcal{B}(T)$ con T no vacío y la equivalencia con convergencia uniforme. Indique dónde se usa completitud real.

Solución. Sean $f, g \in \mathcal{B}(T)$, con $T \neq \emptyset$. Si sus magnitudes están acotadas por M_f, M_g, entonces $0 \le |f(t) - g(t)| \le M_f + M_g$. El conjunto de errores es no vacío y acotado; la completitud real por supremos construye el número finito $D_\infty(f, g)$. Si $f = g$, el supremo es cero. Si el supremo es cero, cada error es cero, luego $f(t) = g(t)$ para todo t y $f = g$. La simetría procede del valor absoluto. Para $h \in \mathcal{B}(T)$, la triangular puntual da $|f(t) - g(t)| \le D_\infty(f, h) + D_\infty(h, g)$ en toda entrada; tomar supremo acredita la triangular de D_∞.

Si $D_\infty(f_n, f) \to 0$, una distancia menor que ε controla todos los errores y da uniformidad. Recíprocamente, uniformidad con tolerancia $\varepsilon/2$ deja $D_\infty(f_n, f) \le \varepsilon/2 < \varepsilon$ en toda la cola. El destino pertenece aquí a $\mathcal{B}(T)$; si sólo se sabe que es límite uniforme de funciones acotadas, un parcial con error menor que uno prueba su acotación. La completitud real se usa para formar los supremos, sin haber probado todavía completitud del espacio de funciones.

30.8. Cambiar la métrica y auditar lo que permanece

Para comparar dos métricas sobre el mismo conjunto distinguiremos el control global por constantes del que sólo conserva ventanas locales. El primero transportará también Cauchy y acotación; tener los mismos abiertos, por sí solo, dejará esas propiedades sin decidir.

Comparación cuantitativa. Si $c, C > 0$ y $c\,d(x,y) \le e(x,y) \le C\,d(x,y)$ para todos los pares, las identidades en ambos sentidos son Lipschitz. Las inclusiones de bolas $B_d(a, r/C) \subset B_e(a, r)$, $\quad B_e(a, cr) \subset B_d(a, r)$ prueban que ambas métricas definen los mismos abiertos. Las mismas desigualdades convierten tolerancias y demuestran que tienen las mismas convergencias, los mismos destinos y las mismas sucesiones de Cauchy. También convierten cotas de conjuntos. Para d_1, d_∞ en $\mathbb{R}^2$, $d_\infty \le d_1 \le 2d_\infty$. Las bolas son diferentes, pero las capturas eventuales y los conjuntos abiertos coinciden. Una sucesión converge para ellas si y sólo si sus dos coordenadas convergen en $\mathbb{R}$, pues cada error de coordenada está bajo el máximo, y el máximo de dos cortes controla ambas. El mismo razonamiento con pares prueba la equivalencia coordenada a coordenada de Cauchy.

Una métrica acotada que conserva controles pequeños. Para cualquier métrica d, sea $e(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$. Separación y simetría se conservan. Para números no negativos u, v, $\min\{1, u+v\} \le \min\{1,u\} + \min\{1,v\}$; si alguno es al menos uno, el lado derecho es al menos uno; si ambos son menores, el lado derecho es $u+v$. Combinarlo con la triangular prueba que e es métrica. Para $0 < r \le 1$, sus bolas abiertas coinciden con las de d. Por tanto definen los mismos abiertos. Para controlar convergencia o Cauchy en d, pedir en e tolerancia $\min\{\varepsilon/2, 1/2\}$ fuerza una distancia menor que uno, donde $e = d$, y menor que ε. La dirección inversa usa $e \le d$. Sin embargo todo el espacio es acotado en e, mientras puede no serlo en d. La comparación local no impone una cota global por un múltiplo fijo de e.

Los mismos abiertos no bastan para Cauchy. Definamos

$$\phi(x) = \frac{x}{1+|x|}, \qquad e_\phi(x,y) = |\phi(x) - \phi(y)| \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

La función ϕ es una biyección de $\mathbb{R}$ a $(-1,1)$, con inversa $\psi(t) = t/(1-|t|)$. En cada semirrecta la regla es estrictamente creciente; las imágenes negativa y positiva están separadas por cero. Como $|\phi(x)| = |x|/(1+|x|)$, tenemos $1 - |\phi(x)| = 1/(1+|x|)$ y $\psi(\phi(x)) = x$. Para $|t| < 1$, $|\psi(t)| = |t|/(1-|t|)$ y $1 + |\psi(t)| = 1/(1-|t|)$, luego $\phi(\psi(t)) = t$. Estas identidades prueban inyectividad y sobreyectividad sin una elección de preimágenes. Ambas funciones son continuas por las reglas de valor absoluto, suma y cociente de C14; los denominadores son positivos en sus respectivos dominios. La separación de e_ϕ procede de inyectividad, y simetría/triangular de la métrica usual en las imágenes.

Las mismas funciones continuas e inversas prueban que e_ϕ y la distancia usual tienen los mismos abiertos: una bola e_ϕ es la preimagen por ϕ de una ventana relativa de $(-1,1)$, abierta en la distancia usual; a la inversa, la imagen por ϕ de un abierto usual es la preimagen por ψ de ese abierto y es abierta relativa, de donde cada punto recibe una bola e_ϕ interior. Con esas bolas se convierten capturas y radios locales. Las convergencias a destinos reales y las funciones continuas son las mismas.

Pero $x_n = n$ es de Cauchy en e_ϕ: sus imágenes $n/(n+1)$ tienen toda la cola entre $N/(N+1)$ y 1, así que las distancias son a lo sumo $1/(N+1)$. No es de Cauchy usual, porque los vecinos distan uno. No converge a ningún real en e_ϕ, pues las imágenes convergen a 1, que queda fuera de $(-1,1)$. Una coincidencia de ventanas locales no garantiza un radio uniforme global para la identidad inversa. La sucesión también demuestra que misma topología no significa mismos conjuntos acotados.

Las pruebas de unicidad, perturbación y continuidad por preimágenes han podido reconstruirse con la triangular y la separación, sin operaciones entre puntos. La existencia de destinos de Cauchy sigue siendo una propiedad adicional del espacio. Las recíprocas secuenciales conservan, además, la hipótesis CC(X) o la disponibilidad explícita de testigos. Estas distinciones permitirán estudiar completitud, compacidad y conexidad con sus obligaciones propias.

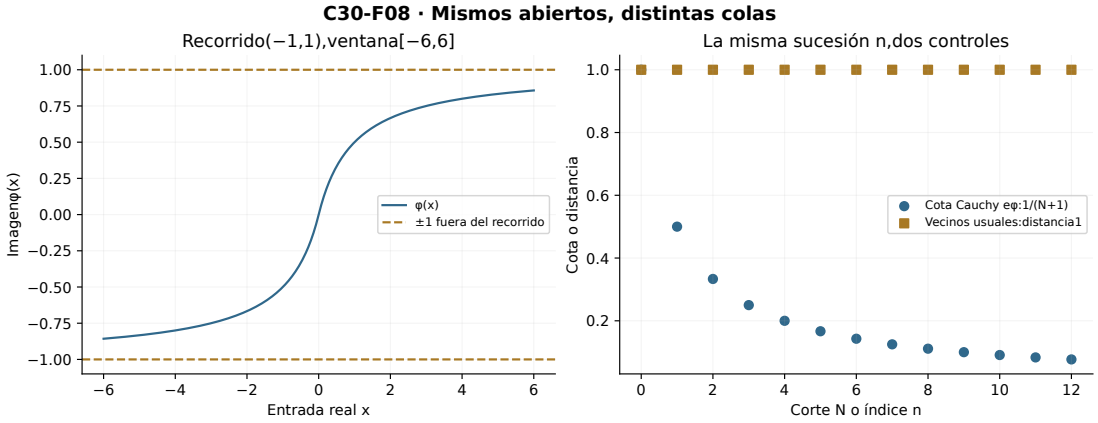


Figura 30.8. La transformaciónϕ(x)=x/(1+|x|) envíaR biyectivamente a(−1,1), con inversa continua. Por ella la métricaeϕ tiene los mismos abiertos que la usual. La sucesiónn tiene cota de cola1/(N+1) en eϕ y separación de vecinos1 en la usual. Sus imágenes tienden al punto externo1, por lo que no tiene destino real en eϕ. La ventana gráfica[−6,6] no representa todo el recorrido deϕ.

Ejercicios de la sección 30.8.

Ejercicio 36. Un par y dos métricas

Para $x = (1, 2)$ e $y = (4, -2)$, calcule d_1, d_∞ y pruebe las desigualdades generales entre ambas métricas.

Solución. Para $x = (1, 2)$, $y = (4, -2)$, las magnitudes de las diferencias de coordenadas son tres y cuatro. Por ello $d_1(x, y) = 7$ y $d_\infty(x, y) = 4$, cumpliendo $4 \le 7 \le 8$. En general, con $u = |x_1 - y_1|$ y $v = |x_2 - y_2|$, el máximo es menor o igual que $u + v$, y ambos sumandos son menores o iguales que el máximo. Luego $\max\{u, v\} \le u + v \le 2\max\{u, v\}$, que prueba $d_\infty \le d_1 \le 2d_\infty$ para todos los pares.

La identidad de d_∞ a d_1 es 2-Lipschitz y la inversa es 1-Lipschitz. Esas cotas convierten radios de bolas y tolerancias de convergencia y Cauchy en los dos sentidos.

Ejercicio 37. Recortar una métrica

Pruebe que $e = \min\{1, d\}$ es métrica y que conserva convergencia y Cauchy, aunque puede cambiar acotación.

Solución. La función $e(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$ es no negativa, separa puntos y es simétrica. Para $u, v \ge 0$, $\min\{1, u + v\} \le \min\{1, u\} + \min\{1, v\}$: si alguno es al menos uno, el lado derecho domina uno; si ambos son menores que uno, el lado derecho es $u + v$. Monotonía del mínimo y triangular de d dan $e(x, z) \le e(x, y) + e(y, z)$.

Como $e \le d$, un corte que controle distancias en d controla las de e. Para el sentido inverso, dada $\varepsilon > 0$, pida en e la tolerancia $\eta = \min\{\varepsilon/2, 1/2\}$. Una distancia $e(x, y) < \eta$ fuerza $d(x, y) < 1$, donde $e = d$, y además $d(x, y) < \varepsilon$. Aplicar este control a distancias al destino o a todos los pares de una cola conserva, respectivamente, convergencia y Cauchy.

La acotación puede cambiar: en e todas las distancias son ≤ 1, y un espacio no vacío entero cabe en una bola de radio dos. La recta con distancia usual no es acotada. El acuerdo en controles pequeños no produce una comparación global de las distancias grandes.

Ejercicio 38. Una métrica con los mismos abiertos

Pruebe que $e_\phi(x,y) = |\phi(x) - \phi(y)|$, $\phi(x) = x/(1+|x|)$, es métrica y tiene los mismos abiertos que la usual.

Solución. Para todo $x \in \mathbb{R}$, $|\phi(x)| = |x|/(1+|x|) < 1$. Defina $\psi(t) = t/(1-|t|)$ en $(-1,1)$. Se tiene $1-|\phi(x)| = 1/(1+|x|)$ y, por tanto, $\psi(\phi(x)) = x$. Para $|t| < 1$, $1+|\psi(t)| = 1/(1-|t|)$, y de igual modo $\phi(\psi(t)) = t$. Así ϕ es una biyección con inversa ψ. La separación de e_ϕ procede de la inyectividad de ϕ; no negatividad, simetría y triangular son las propiedades del valor absoluto entre las imágenes. Luego e_ϕ es métrica. Ambas funciones ϕ y ψ son continuas con las métricas usuales por las reglas reales de valor absoluto y cociente, cuyos denominadores son positivos en sus dominios.

Cada bola $B_{e_\phi}(a,r)$ es $\phi^{-1}[B_{(-1,1)}(\phi(a),r)]$, abierta usual por continuidad. Una unión de tales bolas prueba que todo abierto de e_ϕ es usual. Para la otra dirección, si U es abierto usual, $\phi[U] = \psi^{-1}[U]$ es abierto relativo en $(-1,1)$. En cada $a \in U$ hay una bola relativa de $\phi(a)$ dentro de esa imagen; su preimagen es una bola de e_ϕ dentro de U. Así tienen exactamente los mismos abiertos, mediante radios locales.

Ejercicio 39. Misma topología, otra Cauchy

Para $x_n = n$ compare Cauchy, convergencia y acotación en la usual y en e_ϕ.

Solución. En la usual, $|x_{n+1} - x_n| = 1$. La tolerancia $1/2$ queda incumplida por vecinos posteriores a cualquier corte, de modo que $x_n = n$ no es Cauchy. Tampoco converge, pues toda convergente es Cauchy; además no es acotada, por arquimedianidad. En e_ϕ, las imágenes son $n/(n+1) = 1 - 1/(n+1)$. Para $m, n \geq N$, su separación es $\leq 1/(N+1)$, lo que prueba Cauchy. Como todas las imágenes pertenecen a $(-1,1)$, todas las distancias e_ϕ son menores que dos; una bola de radio dos alrededor de cualquier centro contiene la sucesión, que sí es acotada.

Si convergiera a algún real a en e_ϕ, por definición las imágenes convergerían usualmente a $\phi(a)$. También convergen a uno por la fórmula explícita, y unicidad obligaría $\phi(a) = 1$, fuera del recorrido. No existe destino en ese espacio. La misma topología conserva convergencia a sus puntos, pero no necesariamente Cauchy ni acotación. **Retorno visual.** Véase C30-F08, después del argumento completo: la figura permite reconocer el mecanismo y no sustituye la prueba.

Ejercicio 40. Auditar la identidad inversa

Muestre explícitamente que la identidad desde $(\mathbb{R}, e_\phi)$ hacia la usual es continua pero no uniformemente continua. Compare con la identidad entre d_1 y d_∞.

Solución. La identidad $i : (\mathbb{R}, e_\phi) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ es continua, pues ambos espacios tienen los mismos abiertos y las preimágenes por identidad coinciden con ellos. También puede darse un radio local: para $a \in \mathbb{R}$, continuidad de ψ en $\phi(a)$ convierte una tolerancia usual en un radio de imágenes, y $e_\phi(x,a) < \delta$ sitúa a $\phi(x)$ en ese radio, dando $|x-a| < \varepsilon$.

Para negar uniformidad, tome los pares $n, n+1$. Su distancia de entrada es $e_\phi(n, n+1) = 1/[(n+1)(n+2)] \to 0$, pero su distancia de salida usual es uno. Con tolerancia $1/2$, cualquier radio común falla para algún par posterior. La continuidad de la inversa ψ es local y no proporciona ese radio común cerca de la frontera del intervalo de imágenes.

Entre d_∞ y d_1 en el plano, las desigualdades globales dan identidades 2-Lipschitz y 1-Lipschitz. Sirven, respectivamente, los radios uniformes $\varepsilon/2$ y ε, y ambas identidades transportan Cauchy. Las cotas comunes de ese ejemplo acreditan una propiedad adicional al acuerdo de abiertos.

Capítulo 31

Completitud, compacidad y conexidad en espacios métricos

La sucesión de recíprocos puede ser de Cauchy en un intervalo abierto y tener su único destino fuera de él. Una métrica hace posible formular esa pérdida, pero no la resuelve. La completitud exigirá conservar los destinos; las redes finitas controlarán cuántos lugares distintos quedan a cada escala; las coberturas definirán compacidad y las separaciones, conexidad. Las pruebas distinguirán cuándo usan una sucesión dada y cuándo necesitan seleccionar puntos nuevos, y los resultados de dimensión finita conservarán sus métricas expresas.

31.1. Dar destino a todas las sucesiones de Cauchy

En $(0,1)$, los términos $x_n = 1/(n+2)$ se acercan entre sí tanto como queramos, pero su único posible límite real es cero y queda fuera del espacio. Queremos distinguir los espacios en los que esto puede ocurrir de aquellos que contienen un destino para toda cola de Cauchy. Un espacio métrico (X,d) es **completo** si toda sucesión de Cauchy $x : \mathbb{N} \to X$ converge a un punto de X. No se exige que toda sucesión converja; en $\mathbb{R}$, la sucesión n no es Cauchy. El espacio vacío es completo de modo vacuo. Un espacio discreto también es completo: la condición de Cauchy para $\varepsilon = 1/2$ obliga a una cola constante, cuyo valor es el destino. Esto no implica que el espacio sea finito.

La recta usual es completa por C10. Para $\mathbb{R}^m$, con $m \geq 1$ finito y $d_\infty(x,y) = \max_i |x_i - y_i|$, una sucesión de Cauchy hace Cauchy cada coordenada. C10 produce sus m límites a_i. Para una tolerancia dada tomamos el máximo de los m cortes, y entonces $d_\infty(x_n, a) < \varepsilon$. Sólo se combinan finitamente muchos destinos y cortes. Las constantes $d_\infty \leq d_1 \leq m d_\infty$ dan el mismo resultado para d_1 por C30.

Dónde puede cerrarse un subespacio. Si $Y \subset X$ es cerrado y X completo, una sucesión Cauchy de Y lo es en X, tiene límite $a \in X$ y, por el criterio directo de cerrado de C30, $a \in Y$. Por tanto Y es completo. Para el converso no necesitamos que X sea completo, pero sí producir testigos: si Y es completo y $a \in \mathrm{cl}_X Y$, elegimos $y_n \in Y \cap B(a, 1/(n+1))$. Esta elección usa elección numerable para subconjuntos de Y, o una familia ya suministrada. La sucesión converge a a en X, es Cauchy y tiene límite $b \in Y$; la unicidad en X fuerza $a = b$. Así Y es cerrado bajo esa hipótesis de selección.

Convención fundacional de este capítulo. Las pruebas con una sucesión ya dada, las iteraciones de una función dada y las pruebas directas por coberturas no incorporan elección infinita implícita. Para las equivalencias generales que construyen sucesiones o eligen redes a todas las escalas, trabajamos explícitamente en el marco clásico con elección: fijamos selectores para las familias no vacías que aparecen. Esto incluye elección dependiente cuando la siguiente selección depende de las anteriores. No se deduce esta convención de la completitud de $\mathbb{R}$. Señalaremos cada uso; se pueden leer los resultados correspondientes como condicionales a los selectores descritos. C8 ya declaraba esta base para conjuntos reales; aquí se amplía expresamente a los espacios generales empleados.

Un espacio de funciones completo. Sea $T \neq \emptyset$ y $\mathcal{B}(T)$ el conjunto de funciones reales acotadas con $D_\infty(f,g) = \sup_{t \in T} |f(t) - g(t)|$, métrica construida en C30. Si (f_n) es Cauchy en esta métrica, cada columna $(f_n(t))$ es Cauchy real y tiene un único límite $f(t)$. La unicidad define la función f sin escoger entre varios destinos. Dado $\varepsilon > 0$, fijamos N de

Cauchy para $\varepsilon/2$. Para $n, k \geq N$, $|f_n(t) - f_k(t)| < \varepsilon/2$ para todo t. Al pasar k al límite queda $|f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon/2$, y entonces $D_\infty(f_n, f) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$.

Antes de usar esa métrica debemos acreditar $f \in \mathcal{B}(T)$. Para $\varepsilon = 1$, el argumento anterior da un índice N con $|f(t) - f_N(t)| \leq 1/2$ para todo t. Si $|f_N(t)| \leq M$, resulta $|f(t)| \leq M + 1/2$. La función límite es acotada y la convergencia en supremo está justificada. Sobre un espacio métrico T, las funciones acotadas continuas forman un subespacio completo: el límite uniforme es continuo por la prueba de tres errores de C28, que se reconstruye con bolas en el dominio y valor absoluto en el codominio. Concretamente, elegimos una función a distancia menor que $\varepsilon/3$ del límite y usamos su continuidad para el error central. No se exige compacidad de T.

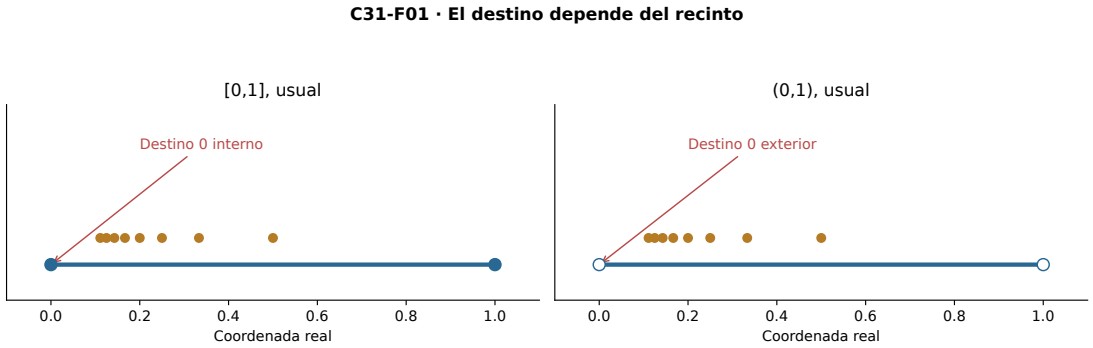


Figura 31.1. La misma cola recíproca tiene destino cero en [0,1] y carece de destino interno en (0,1). El recinto se declara antes de identificar su límite. Los primeros ocho términos son una muestra; la cota de Cauchy y la unicidad prueban el resultado para toda la cola.

Ejercicios de la sección 31.1.

Ejercicio 1

Prueba que un espacio métrico finito es completo, sin suponer que su métrica sea discreta.

Solución. Si X es vacío, no tiene sucesiones y la condición de completitud es vacua. Si tiene un solo punto, toda sucesión es constante y converge a él. Si tiene al menos dos puntos, las distancias entre puntos distintos forman un conjunto finito no vacío de reales positivos. Su mínimo η es positivo. Para una sucesión Cauchy, tome el corte correspondiente a $\eta/2$. Todos los pares de la cola tienen distancia menor que $\eta/2$, mientras dos puntos distintos tendrían distancia al menos η.

Así todos los términos tardíos coinciden con el término del corte. Esa cola constante converge a un punto de X, acreditando completitud. La métrica no necesita ser discreta: basta la separación mínima que permite la finitud. **Volver a la figura.** C31-F01: confronta el mecanismo de esta solución con las hipótesis y fronteras indicadas en su pie.

Ejercicio 2

Decide si $(0, 1]$ con distancia usual es completo, y acredita todos los pasos del contraejemplo.

Solución. La sucesión $x_n = 1/(n+1)$ pertenece a $(0, 1]$ para todo $n \geq 0$. Para $p, q \geq N$, ambos valores están en $(0, 1/(N+1)]$, luego $|x_p - x_q| \leq 1/(N+1)$. Escoger N con esa barrera menor que la tolerancia acredita Cauchy en el subespacio. En $\mathbb{R}$, los términos convergen a cero. Si existiera un límite $a \in (0, 1]$, la igualdad entre distancias del subespacio y de la recta acreditaría también límite real a. Unicidad obligaría a $a = 0$, que no es admisible. Hay una Cauchy sin límite interno y el espacio no es completo.

Ejercicio 3

Sea X completo y $a \in X$. Prueba que la bola cerrada $C(a, r)$, $r \geq 0$, es completa.
Solución. La bola $C(a, r) = \{x \in X : d(x, a) \leq r\}$ es cerrada. En efecto, si $d(x, a) > r$, el radio $s = [d(x, a) - r]/2 > 0$ cumple, para $d(x, y) < s$, $d(y, a) \geq d(x, a) - d(x, y) > d(x, a) - s > r$. Su complemento es abierto. Una Cauchy de $C(a, r)$ es Cauchy en X y tiene por completitud un límite $b \in X$. También puede verificarse directamente que queda en la bola: $|d(x_n, a) - d(b, a)| \leq d(x_n, b) \to 0$ y todos los primeros valores son $\leq r$, luego $d(b, a) \leq r$. La sucesión converge internamente a b.

Para $r = 0$, separación hace $C(a, 0) = \{a\}$, completo por ser singleton. La prueba usa cerradura de la bola, sin identificarla con la clausura de la bola abierta.

Ejercicio 4

Sea $T \neq \emptyset$ y (f_n) Cauchy en $\mathcal{B}(T)$. Explica por qué no es legítimo escribir primero $D_\infty(f_n, f)$ sin acreditar que f es acotada, y completa la prueba.
Solución. Para cada $t \in T$, $|f_n(t) - f_m(t)| \leq D_\infty(f_n, f_m)$, por lo que la columna es Cauchy real. Completitud y unicidad definen $f(t) = \lim_n f_n(t)$. No se escoge entre varios destinos. Un corte Cauchy N para $1/2$ da $|f_N(t) - f_m(t)| < 1/2$ para $m \geq N$. Pasar $m \to \infty$ con t fijo produce $|f_N(t) - f(t)| \leq 1/2$ en toda entrada. Como f_N está acotada por algún M, $|f(t)| \leq M + 1/2$. Ahora $f \in \mathcal{B}(T)$ y la distancia de supremo a ella está definida en el espacio de funciones.

Para $\varepsilon > 0$, tome otro corte Cauchy para $\varepsilon/2$. Para n, m posteriores, pase m al límite columna por columna: $|f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon/2$ para todo t. Su supremo es $\leq \varepsilon/2 < \varepsilon$. Así $f_n \to f$ en D_∞. Escribir esa distancia antes de acreditar acotación habría usado una expresión fuera de la métrica declarada.

Ejercicio 5

Sea Y un subespacio completo de X. Demuestra que es cerrado declarando exactamente la selección requerida.
Solución. Si Y es vacío, ya es cerrado. Para $a \in \operatorname{cl}_X Y$, cada $W_n = Y \cap B_X(a, 1/(n+1))$ es no vacío. Declare elección numerable para esta familia de subconjuntos de Y, o una familia suministrada de testigos $y_n \in W_n$. La cota $d(y_n, a) < 1/(n+1)$ acredita $y_n \to a$ en X. Toda convergente es Cauchy; las distancias restringidas coinciden, luego es Cauchy en Y. Por completitud de Y, converge a algún $b \in Y$. Visto en X, ese segundo límite sigue siendo b.

Unicidad en X implica $a = b \in Y$. Por tanto Y contiene su clausura y es cerrado. No se requiere que X sea completo; la selección de los testigos es la obligación adicional explícita que permite construir la sucesión.

31.2. Encerrar un destino y construirlo por iteración

La completitud puede reconocerse mirando recintos que se estrechan. Sea (X, d) completo y sea $F_0 \supset F_1 \supset \cdots$ una familia de conjuntos cerrados no vacíos, de diámetro finito, con $\operatorname{diam} F_n \to 0$. El diámetro es $\sup\{d(x, y) : x, y \in F_n\}$. Para construir una sucesión fijamos testigos $x_n \in F_n$; éste es un uso de elección numerable, salvo que los testigos formen parte de los datos.

Si $p, q \geq N$, ambos testigos están en F_N, de modo que $d(x_p, x_q) \leq \operatorname{diam} F_N$. La sucesión es Cauchy y tiene un límite a por completitud. Para cada N, su cola está en el cerrado F_N y por ello también $a \in F_N$. Si dos puntos a, b pertenecieran a todos los recintos, su distancia sería a lo sumo $\operatorname{diam} F_N$ para todo N; al tender esos diámetros a cero resulta $a = b$. Hay un único punto común. Sin encogimiento puede fallar la unicidad, como en $F_n = [0, 1]$. Sin

completitud puede fallar la existencia: en $X = (0,1)$, los conjuntos $F_n = (0, 1/(n+2)]$ son cerrados relativos no vacíos, anidados, de diámetro $1/(n+2)$ y con intersección vacía.[1]

Una función puede suministrar sus propios testigos. Sea $X \neq \emptyset$ completo y $T : X \to X$ una **contracción**: existe $q \in [0,1)$ con $d(Tx, Ty) \leq q\,d(x,y)$ para todos los pares. Partimos de un x_0 dado y definimos $x_{n+1} = Tx_n$. Esta recursión es determinada; no se elige de nuevo en cada paso. Escribamos $C = d(x_1, x_0)$. Por inducción $d(x_{n+1}, x_n) \leq Cq^n$. Para $p > n$, sumar el bloque finito da $d(x_p, x_n) \leq C\sum_{j=n}^{p-1} q^j \leq \frac{Cq^n}{1-q}$. Con la convención $q^0 = 1$, esto incluye $q = 0$: desde x_1 la sucesión es constante. Para $0 < q < 1$, las potencias tienden a cero y la cola es Cauchy. En ambos casos la completitud da un destino $a \in X$.

La desigualdad de contracción implica continuidad: para $q > 0$ sirve $\delta = \varepsilon/q$, y para $q = 0$ las imágenes tienen distancia cero. Por tanto $Tx_n \to Ta$. Pero $Tx_n = x_{n+1} \to a$, luego $Ta = a$. Si $Tb = b$, entonces $d(a,b) \leq q\,d(a,b)$, y $(1-q)d(a,b) \leq 0$ obliga a $a = b$. Hemos probado existencia y unicidad de un punto fijo. Al pasar p al límite en el bloque anterior obtenemos el certificado $d(x_n, a) \leq \frac{Cq^n}{1-q}$. También $d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n+1}) + q\,d(x_n, a)$, por lo que el error es a lo sumo $d(x_n, x_{n+1})/(1-q)$: se certifica con el salto observado.

En $X = [0,1]$, $T(x) = (x+1)/2$ es una contracción de razón $1/2$. Desde $x_0 = 0$, $x_n = 1 - 2^{-n}$ y el destino es 1. La cota anterior es exactamente 2^{-n}. Para error estrictamente menor que $1/16$ necesitamos $n \geq 5$; $n = 4$ cae en la frontera. En $(0,1)$ la misma función sigue llevando el espacio a sí mismo y sigue contrayendo, pero su punto fijo 1 está fuera. La hipótesis de completitud no es un adorno. Tampoco basta $d(Tx, Ty) < d(x,y)$ para cada par distinto: en $[1, \infty)$, $T(x) = x + 1/x$ cumple

$$|T(y) - T(x)| = (y - x)\left(1 - \frac{1}{xy}\right) < y - x \quad (1 \leq x < y),$$

pero no tiene punto fijo. Los cocientes se acercan a 1 y no hay una razón común menor que 1.

C31-F02 · La iteración y su certificado estricto

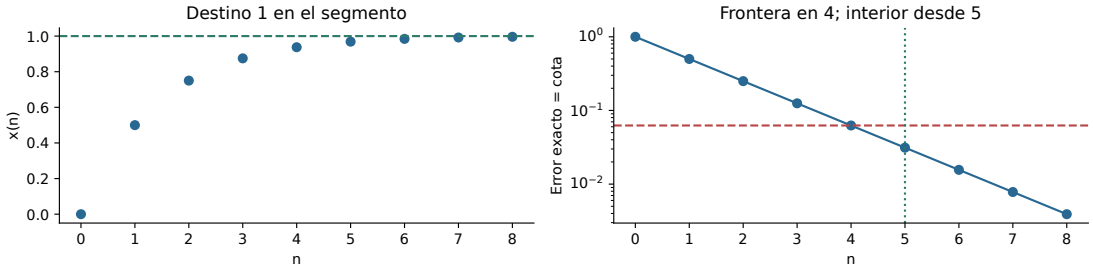


Figura 31.2. La iteración x(n+1)=(x(n)+1)/2 desde cero produce x(n)=1−2^(−n). El destino 1 pertenece al segmento y queda fuera del intervalo abierto. El error exacto coincide con la cota geométrica; para error estrictamente menor que 1/16 el primer corte es 5, no 4.

Ejercicios de la sección 31.2.

Ejercicio 6

En $\mathbb{R}$ considera $F_n = [1 - 2^{-n}, 1 + 2^{-n}]$, $n \geq 0$. Encuentra la intersección y acredita el teorema de recintos.

[1] En el testigo fuente aparece $(0, 1/(n+1)]$ para $n \geq 0$ dentro de $(0,1)$. Su término inicial contiene el punto 1, ajeno a ese espacio. La edición revisada desplaza el denominador a $n+2$ y el diámetro a $1/(n+2)$; así todos los recintos son subespacios del ambiente declarado. El original se conserva íntegro en la trazabilidad.

Solución. Cada F_n es un intervalo cerrado no vacío, y contiene a uno. Como $2^{-(n+1)} \le 2^{-n}$, $F_{n+1} \subseteq F_n$. Su diámetro es la distancia entre extremos, $2 \cdot 2^{-n} = 2^{1-n}$, que tiende a cero. La recta es completa y los testigos pueden darse como $x_n = 1$ en todos los recintos, por lo que aquí no se necesita seleccionar una familia arbitraria. Se cumplen las hipótesis del teorema de recintos.

La intersección es exactamente $\{1\}$. Ya se sabe que contiene a uno; si a estuviera en todos los intervalos, $|a - 1| \le 2^{-n}$ para todo n. Una distancia positiva quedaría por encima de alguna de esas barreras, imposible. Así $a = 1$, acreditando también la unicidad directamente. **Volver a la figura.** C31-F02: confronta el mecanismo de esta solución con las hipótesis y fronteras indicadas en su pie.

Ejercicio 7

Con $T(x) = (x + 1)/2$ en $[0, 1]$ y $x_0 = 0$, calcula la iteración y el primer corte para error estrictamente menor que $1/16$.

Solución. La aplicación $T(x) = (x + 1)/2$ lleva $[0, 1]$ a sí mismo y cumple $|T(x) - T(y)| = |x-y|/2$. El intervalo es cerrado en la recta completa, de modo que el teorema de contracción garantiza un único punto fijo; resolver $a = (a+1)/2$ da $a = 1$. Desde $x_0 = 0$, inducción prueba $x_n = 1 - 2^{-n}$. La fórmula vale en cero, y sustituirla en T da $(2 - 2^{-n})/2 = 1 - 2^{-(n+1)}$ para el siguiente paso.

El error exacto es $|x_n - 1| = 2^{-n}$. Para que sea estrictamente menor que $1/16$, se necesita $n > 4$. El primer corte es cinco, y todos los posteriores tienen error $\le 1/32 < 1/16$. En cuatro el error es exactamente la tolerancia.

Ejercicio 8

Para una contracción de razón $q \in [0, 1)$, prueba la cota a posteriori $d(x_n, a) \le d(x_n, x_{n+1})/(1 - q)$.

Solución. Sea a el punto fijo ya acreditado, $Ta = a$. Para cualquier iterado, triangular y contracción dan $d(x_n, a) \le d(x_n, Tx_n) + d(Tx_n, Ta) \le d(x_n, x_{n+1}) + q\, d(x_n, a)$. Restar el segundo término real de ambos lados y dividir por $1-q > 0$ da $d(x_n, a) \le d(x_n, x_{n+1})/(1-q)$. El certificado usa el salto observado en el paso actual, por lo que puede emplearse sin conocer una fórmula explícita para el límite.

También vale con $q = 0$: el error inicial queda bajo el primer salto y los posteriores son cero. La estimación presupone un punto fijo; para asegurar su existencia mediante el teorema se requiere un espacio completo no vacío y una contracción que lo lleve a sí mismo.

Ejercicio 9

Muestra que la misma contracción $T(x) = (x + 1)/2$ en $(0, 1)$ no tiene punto fijo, aunque lleve el espacio a sí mismo.

Solución. Si $0 < x < 1$, entonces $1/2 < T(x) < 1$, de modo que T es una autoaplicación de $(0, 1)$. Para todo par, $|T(x) - T(y)| = |x - y|/2$: sigue siendo una contracción de razón $1/2$. La ecuación de punto fijo $x = (x+1)/2$ sólo tiene la solución uno, fuera del dominio. No hay punto fijo interno. El espacio no es completo: por ejemplo $1/(n + 2)$ es Cauchy y su único límite real es cero, también exterior.

La propia iteración desde un $x_0 \in (0, 1)$ da $x_n = 1 - (1 - x_0)2^{-n}$ y se acerca a uno sin alcanzarlo. Se cumplen autoaplicación y contracción, pero falta la completitud que convertiría esa cola en un destino dentro del espacio.

Ejercicio 10

Verifica que $T(x) = x+1/x$ en $[1, \infty)$ reduce estrictamente las distancias de pares distintos y carece de punto fijo.

Solución. Para $x \geq 1$, $T(x) = x + 1/x \geq 1$, por lo que es una autoaplicación de $[1, \infty)$. Si $1 \leq x < y$, entonces $xy > 1$ y $T(y) - T(x) = (y - x) + (1/y - 1/x) = (y - x)(1 - 1/(xy))$. El factor está estrictamente entre cero y uno, de modo que $|T(y) - T(x)| < |y - x|$. La ecuación $T(x) = x$ exigiría $1/x = 0$, imposible. El dominio es cerrado en la recta y completo, así que la pérdida no proviene aquí de completitud.

Para $x = n$, $y = n + 1$, las razones entre distancia de imágenes y distancia de entradas son $1 - 1/[n(n+1)] \to 1$. Dado cualquier $q < 1$, alguna razón es mayor que q. No existe una razón uniforme de contracción, aunque cada par distinto reduzca estrictamente su distancia.

31.3. Cubrir con pocas bolas a cada escala

En un espacio discreto infinito, una sola bola de radio dos contiene todos los puntos, pues sus distancias no superan uno. Sin embargo, cada bola de radio $1/2$ contiene sólo su centro y ninguna cantidad finita cubre el espacio. Para describir esa diferencia necesitamos exigir redes finitas a cada escala, además de una cota global. Un espacio X es **totalmente acotado** si para cada $\varepsilon > 0$ existen finitos centros $a_1, \ldots, a_r \in X$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^{r} B(a_i, \varepsilon)$. Llamamos a esos centros una red finita de radio ε. Para $X = \emptyset$ se admite $r = 0$. La definición exige todas las escalas; una cobertura para un único radio sólo acredita una información parcial.

Si $X \neq \emptyset$ es totalmente acotado, una red de radio 1 y un centro fijo a dan $d(x, a) < 1 + \max_i d(a_i, a)$ para cualquier x: primero elegimos una bola que contenga ese punto. Esa selección individual es finita y no construye una familia infinita. Así la acotación total implica acotación. La discreta infinita prueba que el converso falla.

Los subespacios heredan redes, con ajuste del radio. Si $A \subset X$ y X es totalmente acotado, tomamos una red de radio $\varepsilon/2$ en X. Para cada bola que corte A elegimos un punto b_i de esa intersección; son sólo finitas elecciones. Si $x \in A$ está en esa bola, $d(x, b_i) < \varepsilon$. Los b_i son centros de una red de A. No podemos dejar centros exteriores al subespacio sin explicar esta conversión. La clausura también es totalmente acotada: una red de A de radio $\varepsilon/2$, junto con un punto de A a distancia menor que $\varepsilon/2$ del punto de clausura considerado, da una cobertura de $\operatorname{cl} A$ de radio ε. El caso $A = \emptyset$ es separado.

Las coordenadas finitas admiten mallas. Todo subconjunto acotado de $(\mathbb{R}^m, d_\infty)$ es totalmente acotado. Encerramos el conjunto en $[-M, M]^m$, elegimos un paso $h < \varepsilon$ y dividimos cada intervalo en finitos tramos de longitud a lo sumo h. Hay finitas celdas. De cada celda que corte el conjunto tomamos un representante; dos puntos de esa celda tienen distancia máximo a lo sumo $h < \varepsilon$. Los representantes forman una red. Se usa finitud, no una extracción simultánea de infinitos centros. Por comparación de métricas sirve para d_1, ajustando el paso a $h < \varepsilon/m$.

Los propios puntos de un conjunto finito forman una red para cualquier radio positivo. El intervalo $(0, 1)$ también admite redes finitas por la construcción de mallas, pero pierde el destino de los recíprocos. La discreta infinita conserva todos los destinos de Cauchy, aunque no admite redes finitas pequeñas. La falta de destinos y el exceso de puntos separados son obstáculos independientes. **La obstrucción separada.** Si existe $\eta > 0$ y una sucesión con $d(x_n, x_k) \geq \eta$ para índices distintos, ninguna bola de radio $\eta/2$ puede contener dos términos. La triangular daría una distancia estrictamente menor que η. Una red finita es imposible. El argumento vale también para cualquier conjunto infinito de puntos separados, sin enumerarlo previamente: cada bola contiene a lo sumo un punto y una unión finita sólo contiene finitos puntos del conjunto.

Ejercicios de la sección 31.3.

Ejercicio 11

Construye para $(0, 1)$ una red de radio $\varepsilon > 0$ con centros interiores.

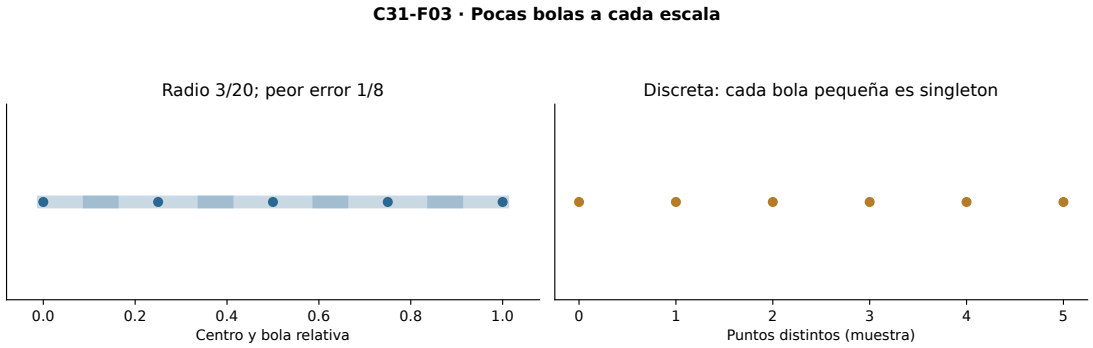


Figura 31.3. Cinco centros 0,1/4,1/2,3/4,1 cubren [0,1] con bolas relativas de radio 3/20: el peor error es 1/8, menor que el radio. En la discreta infinita cada bola de radio 1/2 sólo contiene un punto. Los seis puntos dibujados representan el patrón, no un espacio finito completo.

Solución. Dado $\varepsilon > 0$, elija $m \geq 1$ con $1/(2m) < \varepsilon$. Los puntos $a_j = (j + 1/2)/m$, $j = 0, \dots, m-1$, son finitísimos y todos pertenecen a $(0, 1)$. Cada $x \in (0, 1)$ está en alguna de las celdas $[j/m, (j+1)/m]$. Su distancia al punto medio es $\leq 1/(2m) < \varepsilon$, incluso en una frontera de celda. Por tanto las bolas abiertas $B_{(0,1)}(a_j, \varepsilon)$ cubren el intervalo. Los centros son internos y la desigualdad estricta se obtiene escogiendo la malla con margen.

Volver a la figura. C31-F03: confronta el mecanismo de esta solución con las hipótesis y fronteras indicadas en su pie.

Ejercicio 12

Prueba que en un espacio discreto la acotación total equivale a finitud.

Solución. Si un espacio discreto es finito, sus propios puntos forman una red para cualquier radio positivo: cada punto pertenece a la bola centrada en él. El vacío se cubre con la red vacía. Si es totalmente acotado, aplique la definición con radio 1/2. Cada bola es un singleton; una red finita cubre el espacio por finitísimos singletons. El espacio debe ser finito. Así en la discreta, acotación total equivale exactamente a finitud, aunque la acotación de todas las distancias se cumpla también para espacios infinitos.

Ejercicio 13

Sea $A \subset X$ y X totalmente acotado. Justifica una red para A con centros en A.

Solución. Si A es vacío, use la red vacía. Para $A \neq \emptyset$ y $\varepsilon > 0$, tome una red finita ambiental de radio $\varepsilon/2$, con centros $a_i \in X$. Retenga sólo los índices de bolas que cortan A, y en cada una de esas finitísimas intersecciones tome $b_i \in A \cap B_X(a_i, \varepsilon/2)$. Para $x \in A$, alguna bola original lo cubre; su índice fue retenido. Entonces $d(x, b_i) \leq d(x, a_i) + d(a_i, b_i) < \varepsilon$.

Las bolas relativas de centro b_i y radio ε cubren A. La selección es finita y los centros ya pertenecen al subespacio, como pide su definición de acotación total.

Ejercicio 14

En $[-1, 1]^2$ con d_∞, construye una red de radio 1/3 usando una malla explícita.

Solución. Divida cada coordenada de $[-1, 1]$ en cuatro intervalos cerrados de longitud 1/2. Sus puntos medios son $-3/4, -1/4, 1/4, 3/4$. Tome como centros los dieciséis pares formados con esos cuatro valores. Cada punto del cuadrado pertenece a alguna celda producto, y cada coordenada dista a lo sumo 1/4 del punto medio correspondiente. Por ello su distancia d_∞ al centro de esa celda es $\leq 1/4 < 1/3$. Las dieciséis bolas abiertas de radio 1/3 cubren el cuadrado. Las fronteras de celdas y del cuadrado están cubiertas gracias al margen entre 1/4 y 1/3.

Ejercicio 15

Prueba que una sucesión con $d(x_n, x_m) \geq \eta > 0$ para índices distintos impide acotación total.

Solución. Dos términos distintos no pueden estar en una misma bola abierta de radio $\eta/2$: triangular daría distancia menor que η, contradiciendo la separación $\geq \eta$. Si hubiese una red con r centros a esa escala, cada bola contendría a lo sumo un término, y la unión cubriría a lo sumo r términos. Los primeros $r+1$ son todos distintos y darían contradicción. Así el espacio no es totalmente acotado. Usar radio $\eta/2$ conserva la desigualdad estricta necesaria; un radio η no proporciona la misma exclusión de dos términos.

31.4. Compacidad: reducir cualquier cobertura

En C16, la compacidad de la recta se formuló mediante coberturas. La definición se transporta sin coordenadas: $K \subset X$ es **compacto** si de toda familia de abiertos de X que cubra K se puede extraer una subfamilia finita que aún lo cubra. Equivalentemente usamos abiertos relativos de K, porque cada uno es intersección con un abierto de X y toda cobertura ambiental induce una relativa. La propiedad pertenece al subespacio; no exige que el ambiente entero sea compacto. El vacío y los conjuntos finitos son compactos: basta cero abiertos, o un abierto por cada punto de una lista finita.

El primer efecto cuantitativo. Las bolas $B(k, \varepsilon)$, con $k \in K$, cubren K para cada $\varepsilon > 0$. La compacidad deja finitos centros de esa misma familia. Por tanto todo compacto métrico es totalmente acotado y, si no vacío, acotado. No se ha escogido una red para todos los radios a la vez; para cada radio se aplica la propiedad.

Un compacto métrico es cerrado. Para $a \notin K$ y cada $k \in K$, consideramos $U_k = B(k, d(a,k)/3)$. Una subcobertura finita tiene centros $k_1, \dots, k_r$. Si $K \neq \emptyset$, $\delta = \min_i d(a, k_i)/3 > 0$. Ningún $z \in B(a, \delta)$ puede estar en un U_{k_i}: eso daría

$$d(a, k_i) \leq d(a, z) + d(z, k_i) < \delta + d(a, k_i)/3 \leq 2d(a, k_i)/3.$$

Así $B(a, \delta)$ evita K. Si K es vacío, el complemento ya es todo el ambiente. El complemento es abierto y K es cerrado. La separación métrica aporta la positividad que esta prueba necesita.

La forma dual: intersecciones finitas. En un compacto K, una familia de cerrados relativos con la **propiedad de intersección finita** —cada subfamilia finita tiene intersección no vacía— tiene intersección total no vacía. Si la intersección total fuese vacía, los complementos serían una cobertura abierta; una subcobertura finita contradiría aquella propiedad. El converso se obtiene tomando complementos de una cobertura sin subcobertura finita. Para $K = \emptyset$ no puede existir una familia con esa propiedad si se incluye la subfamilia vacía, cuya intersección es K; esta convención elimina una excepción artificial.

Compacidad da completitud sin construir testigos nuevos. Sea (x_n) Cauchy en K compacto. Los cerrados relativos $F_N = \mathrm{cl}_K\{x_n : n \geq N\}$ son no vacíos y anidados, por lo que tienen punto común a. Para $\varepsilon > 0$ fijamos N tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$ para $n, m \geq N$. Para cada $n \geq N$, todos los términos de la cola N están en la bola cerrada $C(x_n, \varepsilon/2)$. Esa bola es cerrada por C30; contiene F_N y por tanto a. Luego $d(x_n, a) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$. La sucesión converge dentro de K. Se usó una sucesión ya dada y la propiedad de coberturas, sin seleccionar una sucesión adicional.

Un cerrado relativo de un compacto es compacto: una cobertura de F se completa con $K \setminus F$, y una subcobertura finita de K deja finitos abiertos para F. Una unión finita de compactos también es compacta, al unir sus subcoberturas finitas. Una unión infinita puede fallar: los singletons $\{n\}$ son compactos, pero $\mathbb{N}$ en la recta es no acotado y no compacto. En la discreta infinita, la cobertura por singletons no admite reducción finita, aunque el espacio sea completo y acotado.

Ejercicios de la sección 31.4.

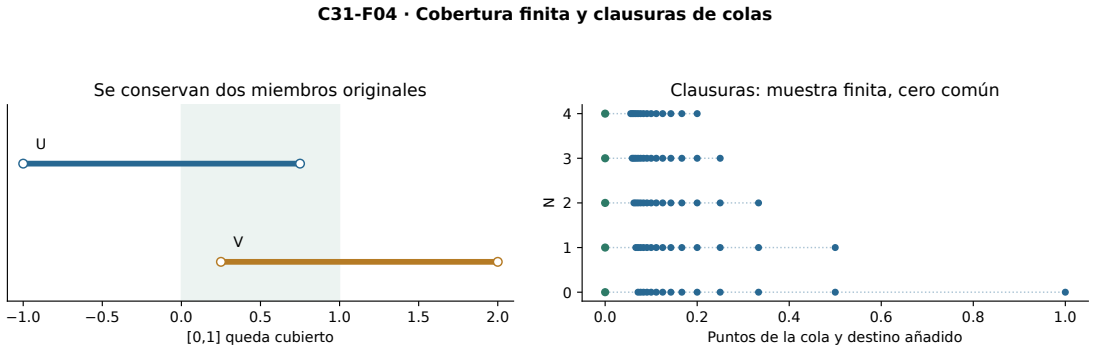


Figura 31.4. Las coberturas se reducen reteniendo miembros originales. Las dos ventanas (−1,3/4) y (1/4,2) cubren [0,1]. Para los recintos de colas de 1/(n+1), la clausura dentro de [0,1] contiene cero y tiene diámetro 1/(N+1); la anidación y la compacidad suministran el destino interno.

Ejercicio 16

Prueba que una unión finita de compactos en un espacio métrico es compacta.

Solución. Sean $K_1, \dots, K_m$ compactos y $K = \bigcup_{i=1}^{m} K_i$. Una cobertura abierta de K induce una cobertura abierta relativa de cada pieza. Para cada una de las finitísimas piezas, compacidad entrega una subfamilia finita de miembros de la cobertura original. La unión de esas listas finitas es finita y cubre todas las piezas, por tanto cubre K. Se ha construido una subcobertura finita de la cobertura recibida. Sólo se han realizado finitísimas elecciones de listas. Para $m = 0$, la unión es vacía y cualquier cobertura se reduce a la subfamilia vacía.

Volver a la figura. C31-F04: confronta el mecanismo de esta solución con las hipótesis y fronteras indicadas en su pie.

Ejercicio 17

En la discreta sobre $\mathbb{N}$, exhibe una cobertura abierta que refute compacidad.

Solución. La familia $U_n = \{n\} = B_D(n, 1/2)$ consta de abiertos discretos y cubre $\mathbb{N}$. Una subfamilia finita tiene como unión sólo los naturales usados como índices. Si la lista es no vacía, un natural mayor que todos sus índices queda sin cubrir; si es vacía, no cubre ningún natural. Por tanto esta cobertura abierta no tiene subcobertura finita y el espacio no es compacto. Es una refutación directa por la definición, compatible con que la discreta sea completa y acotada.

Ejercicio 18

Deduce la propiedad de intersección finita de la compacidad usando complementos.

Solución. Sea K compacto y $(F_i)_{i\in I}$ una familia de cerrados relativos con la propiedad de intersección finita. Si $\bigcap_i F_i$ fuese vacía, los abiertos relativos $K \setminus F_i$ cubrirían K por De Morgan. Compacidad daría una lista finita de índices $J \subseteq I$ que aún cubre. De nuevo por De Morgan, $\bigcap_{j\in J} F_j = \emptyset$, contradiciendo la propiedad de intersección finita. Así la intersección total es no vacía.

La convención incluye la subfamilia vacía, cuya intersección es K. Si K fuera vacío, ninguna familia satisfaría esa premisa. Si la familia misma es vacía y satisface la premisa, se tiene $K \neq \emptyset$ y su intersección total es precisamente K, como requiere la conclusión.

Ejercicio 19

Prueba directamente que un compacto métrico es completo usando clausuras de colas.

Solución. Sea (x_n) una Cauchy ya dada en el compacto K. Defina $F_N = \mathrm{cl}_K\{x_n : n \geq N\}$. Cada conjunto es cerrado relativo, contiene a x_N y es no vacío; además están anidados. Toda intersección finita contiene al de mayor índice, luego tiene la propiedad de intersección finita. Compacidad proporciona $a \in \bigcap_N F_N$. Dado $\varepsilon > 0$, elija un corte Cauchy N para $\varepsilon/2$. Para

cada $n \geq N$, toda la cola de índice N está en la bola cerrada relativa $C_K(x_n, \varepsilon/2)$. Ésta es cerrada, por lo que contiene también la clausura F_N.

En particular, $d(x_n, a) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. La sucesión converge internamente a a y K es completo. Se usa la sucesión recibida y un punto de una intersección común; no se fabrica una nueva sucesión de testigos.

Ejercicio 20

Sea $K \neq \emptyset$ compacto y $a \notin K$. Prueba que $\inf_{k \in K} d(a,k) > 0$ sin suponer un mínimo alcanzado.

Solución. Como $a \notin K$, para cada $k \in K$ la distancia $d(a,k)$ es positiva. Las bolas $B(k, d(a,k)/3)$ forman una cobertura abierta de K. Retenga una subcobertura finita con centros $k_1, \ldots, k_r$, y ponga $\delta = \min_i d(a,k_i)/3 > 0$. La lista no es vacía porque K no lo es. Si algún $z \in B(a,\delta)$ perteneciera a una bola retenida, triangular daría $d(a,k_i) < \delta + d(a,k_i)/3 \leq 2d(a,k_i)/3$, imposible. Por tanto $B(a,\delta) \cap K = \emptyset$ y $d(a,k) \geq \delta$ para todos los puntos de K.

El conjunto de distancias es no vacío, acotado inferiormente por cero y contiene valores finitos, de modo que tiene ínfimo real. La cota común da $\inf_{k \in K} d(a,k) \geq \delta > 0$. No se ha supuesto que exista un punto minimizante.

31.5. La equivalencia métrica y sus elecciones

La compacidad ya ha proporcionado completitud y redes finitas sin construir sucesiones nuevas. Para obtener la dirección inversa escogeremos redes a diferentes escalas y extraeremos recorridos. Conservaremos en estas construcciones la convención clásica de selección declarada en §31.1, distinguiéndola de los mínimos naturales que determinan índices de una sucesión ya dada.

Un espacio es **secuencialmente compacto** si toda sucesión en él tiene una subsucesión convergente con límite interno. El vacío satisface esta condición de modo vacuo. En un espacio totalmente acotado, fijamos una red finita para cada radio 2^{-j}, $j = 1, 2, \ldots$; elegir la lista de redes usa elección numerable de tales listas. Sea (x_n) una sucesión. Entre las bolas de la primera red, alguna captura infinitos índices. Escogemos la primera de una enumeración finita con esa propiedad, y conservamos sus índices. A cada nivel hacemos lo mismo dentro del conjunto infinito anterior, obteniendo conjuntos de índices $I_1 \supset I_2 \supset \cdots$, cada uno contenido en una bola de radio 2^{-j}. El desempate finito se hace por menor posición de la lista, no por escoger un punto del espacio.

De los conjuntos de índices anidados extraemos una subsucesión mediante mínimos: $n_1 = \min I_1$ y $n_{j+1} = \min\{n \in I_{j+1} : n > n_j\}$. El segundo conjunto es no vacío porque I_{j+1} es infinito y un conjunto infinito de naturales no está acotado. Para $p, q \geq j$, ambos puntos x_{n_p}, x_{n_q} están en la bola del nivel j, así que su distancia es menor que 2^{1-j}. La subsucesión es de Cauchy. Si el espacio es completo, obtiene un destino interno y hemos probado compacidad secuencial. Las redes a todas las escalas usaron selección; una vez dadas, la extracción de índices quedó determinada por mínimos.

La secuencia impide una escala rebelde. Si un espacio secuencialmente compacto no fuese totalmente acotado, existiría $\varepsilon > 0$ para el que ninguna colección finita de bolas cubriera. Elegimos $x_0 \in X$ y, recursivamente, $x_{n+1} \notin \bigcup_{i=0}^{n} B(x_i, \varepsilon)$. El complemento es no vacío. Un selector fijo de subconjuntos no vacíos de X determina esta recursión; es elección dependiente explícita. Los puntos quedan a distancia al menos ε entre sí. Ninguna subsucesión es Cauchy, contradiciendo la convergencia de una subsucesión. Así el espacio es totalmente acotado. También es completo: una sucesión de Cauchy posee una subsucesión convergente y C30 transporta ese destino a toda la sucesión.

De una cobertura a un radio común. Sea X secuencialmente compacto y $\mathcal{U}$ una cobertura abierta. Existe $\lambda > 0$ tal que para todo $x \in X$ alguna $U \in \mathcal{U}$ contiene $B(x, \lambda)$. Si no, para cada n elegimos x_n cuya bola de radio $1/(n+1)$ no esté contenida en ningún miembro. Aquí se usa elección numerable para los puntos infractores. Una subsucesión converge a a.

Elegimos un U de la cobertura que contenga a y un $r > 0$ con $B(a, r) \subset U$. Para un índice de la subsucesión suficientemente grande, tanto $d(x_{n_j}, a) < r/2$ como $1/(n_j + 1) < r/2$. La triangular implica $B(x_{n_j}, 1/(n_j + 1)) \subset B(a, r) \subset U$, contradicción. Esta propiedad es una forma de **lema del número de Lebesgue**.

Como el espacio es totalmente acotado, una red finita de radio $\lambda/2$ cubre X. Para cada uno de sus finitos centros a_i, escogemos U_i que contenga $B(a_i, \lambda)$; son elecciones finitas. Los U_i cubren X. Por tanto secuencialmente compacto implica compacto. Juntando las pruebas, bajo la convención de selección indicada,

$$X \text{ compacto} \iff X \text{ completo y totalmente acotado} \iff X \text{ secuencialmente compacto.}$$

La diferencia con la recta queda localizada: allí acotación y acotación total coinciden por las mallas finitas. En un espacio métrico general no coinciden. Reemplazar «totalmente acotado» por «acotado» haría falsa la equivalencia. La extracción tampoco convierte cualquier sucesión original en convergente: en $[0, 1]$, una sucesión alternante entre 0 y 1 tiene selecciones convergentes y carece de límite global.

C31-F05 · Tres condiciones; gastos de selección visibles

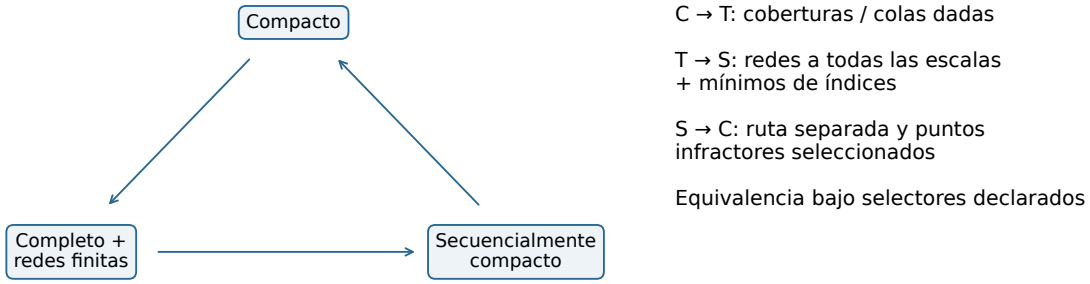


Figura 31.5. El mapa de prueba señala las direcciones entre compacto, completo más totalmente acotado y secuencialmente compacto. La dirección de coberturas a completitud y redes es directa. Las otras construcciones indican redes elegidas por niveles, selección dependiente o puntos infractores. Todas las equivalencias se leen bajo la convención de selección explícita del capítulo.

Ejercicios de la sección 31.5.

Ejercicio 21

Explica por qué una extracción en redes de radios 2^{-j} produce una subsucesión de Cauchy y qué selecciones emplea.

Solución. Fije para cada $j \geq 1$ una red finita de radio 2^{-j}, con una lista ordenada de sus centros. Reunir esas redes para todas las escalas usa elección numerable de listas, o redes dadas. Sea (x_n) la sucesión de la que se quiere extraer. La primera red tiene alguna bola que contiene términos de infinitos índices: una unión finita de conjuntos finitos de índices no podría cubrir $\mathbb{N}$. Tome la primera bola de la lista con esa propiedad y conserve su conjunto infinito I_1. En cada nivel posterior, haga lo mismo con los índices de I_{j-1}, obteniendo $I_j \subseteq I_{j-1}$ infinito dentro de una bola de radio 2^{-j}.

Defina $n_1 = \min I_1$ y $n_{j+1} = \min\{n \in I_{j+1} : n > n_j\}$. Existen porque los conjuntos infinitos de naturales no están acotados. Para $p, q \geq j$, los términos x_{n_p}, x_{n_q} están en la misma bola del nivel j, luego su distancia es menor que $2^{1-j} \to 0$. La extracción es Cauchy. Las redes requieren selección; la primera bola de una lista y los índices mínimos quedan determinados por los datos. Completitud, si se tiene, proporciona después un destino interno.

Volver a la figura. C31-F05: confronta el mecanismo de esta solución con las hipótesis y fronteras indicadas en su pie.

Ejercicio 22

Supón que ninguna red finita de radio ε cubre X. Construye una sucesión separada, declarando la regla de selección.

Solución. La hipótesis implica que X es no vacío y, para cada lista finita de centros, $X \setminus \bigcup_i B(x_i, \varepsilon)$ es no vacío. Declare elección dependiente para elegir sucesivamente en esos complementos, o suministre un selector s que asigne un punto a cada conjunto no vacío empleado. Con el selector dado, tome $x_0 = s(X)$ y $x_{n+1} = s(X \setminus \bigcup_{i=0}^{n} B(x_i, \varepsilon))$. La no vacuidad de cada complemento justifica la recursión. Al quedar fuera de las bolas anteriores, $d(x_{n+1}, x_i) \geq \varepsilon$ para $i \leq n$; simetría da esa separación para cualquier par de índices distintos.

La sucesión es separada y ninguna subsucesión puede ser Cauchy. El paso de una familia de candidatos no vacíos a una ruta sucesiva utiliza la regla de selección declarada. La completitud no suministra esos candidatos ni esa regla.

Ejercicio 23

Prueba que un espacio secuencialmente compacto es completo sin fabricar otra sucesión.

Solución. Sea (x_n) una Cauchy del espacio secuencialmente compacto. La definición proporciona una subsucesión x_{n_j} que converge a algún $a \in X$. Se utiliza esta extracción de la sucesión recibida. Para $\varepsilon > 0$, tome un corte Cauchy N para $\varepsilon/2$ y un término fijo de la subsucesión que esté después de N y a distancia menor que $\varepsilon/2$ de a. Para todo $n \geq N$, $d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, a) < \varepsilon$.

Así converge la sucesión completa a a, y el espacio es completo. No se construye una sucesión adicional de puntos arbitrarios: la hipótesis de compacidad secuencial se aplica a la Cauchy dada.

Ejercicio 24

Para la cobertura de $[0,1]$ por $U = (-1, 3/4)$ y $V = (1/4, 2)$, verifica un número de Lebesgue en forma de bolas relativas.

Solución. Sirve $\lambda = 1/4$. Las bolas se toman en el subespacio $[0,1]$, es decir $B_{[0,1]}(x, \lambda) = \{y \in [0,1] : |y - x| < \lambda\}$. Si $x \leq 1/2$, todo y en esa bola cumple $y < x + 1/4 \leq 3/4$ y $y \geq 0 > -1$. Luego la bola está en $U = (-1, 3/4)$. Si $x > 1/2$, todo y cumple $y > x - 1/4 > 1/4$ y $y \leq 1 < 2$, luego está en $V = (1/4, 2)$.

Cada bola del radio común queda en uno de los miembros de la cobertura. En $x = 1/2$ la desigualdad estricta $y < 3/4$ resuelve la frontera del primer caso. Éste es un número de Lebesgue válido en la forma declarada, sin afirmar que sea máximo.

Ejercicio 25

En un compacto, ¿toda sucesión converge? Da una refutación y dos subsucesiones.

Solución. El intervalo $[0,1]$ es compacto. En él, defina $x_n = 0$ para índices pares y $x_n = 1$ para impares. La subsucesión x_{2j} es constante y converge a cero; x_{2j+1} es constante y converge a uno. Si la sucesión completa tuviera límite, toda subsucesión tendría ese mismo límite. Las dos anteriores forzarían simultáneamente cero y uno, contradiciendo unicidad. Por tanto la sucesión no converge. La compacidad secuencial garantiza alguna subsucesión convergente de cada sucesión, sin imponer convergencia de la totalidad.

31.6. Transportar compacidad por continuidad

Para transportar compacidad mediante una función continua $f : K \to Y$, partimos de una cobertura abierta de $f(K)$. Sus preimágenes son abiertas relativas y cubren K. La compacidad de éste deja una subcobertura finita y los mismos miembros originales cubren la imagen. El argumento no necesita escoger una preimagen de cada punto ni exige inyectividad o sobreyectividad sobre todo Y.

Para $f : K \to \mathbb{R}$ continua y $K \neq \emptyset$ compacto, $f(K)$ es no vacío, compacto, cerrado y acotado. Su supremo s existe por C3. Toda bola real de radio $\varepsilon > 0$ alrededor de s corta $f(K)$, porque $s - \varepsilon$ no es cota superior. Así $s \in \operatorname{cl} f(K) = f(K)$. Hay un $a \in K$ con $f(a) = s$. El ínfimo se trata del mismo modo. La selección de un punto que alcanza cada extremo es una existencia aislada, no una familia infinita. Se recupera el teorema de extremos de C16 para una función real sobre cualquier compacto métrico. Para codominio métrico arbitrario podemos concluir imagen compacta y acotada, pero «máximo» requiere orden adicional.

Continuidad uniforme desde coberturas. Sea $f : K \to Y$ continua y $\varepsilon > 0$. Para cada $a \in K$ existe un radio $r > 0$ tal que $d(x, a) < r$ implica $\rho(f(x), f(a)) < \varepsilon/2$. Para evitar elegir un radio simultáneamente para cada punto, consideramos la familia de **todos** los pares admisibles (a, r). Las bolas $B(a, r/2)$ de esa familia cubren K. La compacidad deja finitos pares (a_i, r_i), y $\delta = \min_i r_i/2 > 0$ si K no es vacío. Si $x, y \in K$ y $d(x, y) < \delta$, una de las bolas reducidas contiene x. Entonces $d(y, a_i) \leq d(y, x) + d(x, a_i) < \delta + r_i/2 \leq r_i$. Ambas imágenes están a distancia menor que $\varepsilon/2$ de $f(a_i)$, luego $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$. La prueba es directa y no usa elección infinita. En el dominio vacío la afirmación es vacua. Así toda función continua desde un compacto métrico es uniformemente continua.

Si f es una biyección continua de un compacto K a un espacio métrico Y, su inversa es continua. Para un cerrado $F \subset K$, F es compacto, $f(F)$ es compacto y por tanto cerrado en Y. Es precisamente la preimagen de F por f^{-1}; el criterio por cerrados de C30 prueba la continuidad. La compacidad corrige el fallo de la biyección continua de la discreta a la recta usual estudiado en C30.

Heine–Borel en dimensión finita, con la métrica declarada. Un subconjunto $K \subset (\mathbb{R}^m, d_\infty)$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado. El sentido directo ya está demostrado. En el otro, la recta completa por coordenadas hace completo $\mathbb{R}^m$; cerrado hace completo el subespacio; acotado produce mallas finitas de §31.3; §31.5 da compacidad, bajo su convención de selección. Para d_1 las constantes de comparación conservan todas estas propiedades. No se importa una norma euclídea sin definirla.

La continuidad uniforme procede aquí de compacidad, no de completitud y acotación por separado. En §31.8 construiremos un dominio que sí es completo y acotado, la recta con métrica truncada, sobre el que $x \mapsto x^2$ sigue siendo continua y falla la uniformidad. La ausencia de redes finitas pequeñas explicará por qué no podemos aplicar el argumento de la cubierta finita.

C31-F06 · La continuidad y la reducción finita

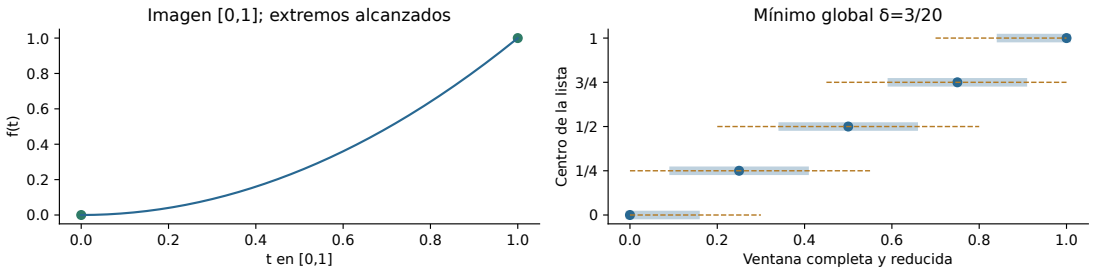


Figura 31.6. Para f(t)=t² en [0,1], la imagen es [0,1] y contiene ambos extremos. Las bolas relativas de centros 0,1/4,1/2,3/4,1 y radio reducido 3/20 cubren el dominio. Los radios completos 3/10 controlan error de imagen menor que 3/5; con tolerancia 6/5, el mínimo de radios reducidos ofrece un control global de entrada.

Ejercicios de la sección 31.6.

Ejercicio 26

Sea $f : K \to Y$ continua y K compacto. Prueba compacidad de $f(K)$ conservando los índices de una cobertura.

Solución. Sea $(U_i)_{i\in I}$ una cobertura abierta ambiental de $f(K)$. Las preimágenes $f^{-1}[U_i]$ son abiertas relativas en K por continuidad. Cubren K, pues cada valor $f(x)$ está en algún U_i. Compacidad proporciona un conjunto finito de índices $J \subseteq I$ que aún cubre K por esas preimágenes. Si $y \in f(K)$, existe $x \in K$ con $f(x) = y$; algún $j \in J$ tiene $x \in f^{-1}[U_j]$, luego $y \in U_j$. Así los mismos índices cubren la imagen.

La conclusión también vale para coberturas abiertas relativas de la imagen, por su equivalencia con coberturas ambientales. No se necesita inyectividad ni seleccionar una inversa para todas las fibras. Si K es vacío, la imagen es vacía y la subfamilia vacía basta. **Volver a la figura.** C31-F06: confronta el mecanismo de esta solución con las hipótesis y fronteras indicadas en su pie.

Ejercicio 27

Una función continua $f : K \to \mathbb{R}$ sobre un compacto no vacío alcanza supremo. Prueba el paso de supremo a valor alcanzado.

Solución. La imagen $A = f(K)$ es no vacía y compacta; en la recta, es cerrada y acotada. Por la propiedad de supremo real, existe $s = \sup A$. Para cualquier $\varepsilon > 0$, $s - \varepsilon$ no es cota superior de A: si lo fuera, contradiciría la menor cota s. Hay por tanto $v \in A$ con $s-\varepsilon < v \le s$, y $|v - s| < \varepsilon$. Cada bola de s encuentra a A, luego $s \in \mathrm{cl}_{\mathbb{R}} A$.

Como A es cerrado, $s \in A$. Por la definición de imagen, existe $a \in K$ con $f(a) = s$. El paso de cota superior a valor alcanzado usa adherencia y cerradura; no requiere una sucesión elegida de valores casi máximos.

Ejercicio 28

Reconstruye la continuidad uniforme de una continua sobre un compacto sin elegir una función de radios sobre todos los puntos.

Solución. Para K vacío la condición uniforme es vacua. Si no lo es, fije $\varepsilon > 0$ y considere todos los pares (a, r), $a \in K$, $r > 0$, que satisfacen $d(x, a) < r \Rightarrow \rho(f(x), f(a)) < \varepsilon/2$ para todo $x \in K$. Continuidad asegura al menos un par admisible en cada centro, sin escoger una función global de radios. Las bolas relativas $B_K(a, r/2)$ de todos esos pares cubren K. Retenga una subcobertura finita de pares (a_i, r_i) y defina $\delta = \min_i r_i/2 > 0$.

Si $d(x, y) < \delta$, alguna bola reducida contiene a x. Para su índice i, $d(x, a_i) < r_i/2 < r_i$ y $d(y, a_i) \le d(y, x) + d(x, a_i) < \delta + r_i/2 \le r_i$. Ambas imágenes quedan a distancia menor que $\varepsilon/2$ de $f(a_i)$; triangular da $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$. El radio es común a todos los pares, y la prueba sólo retiene finitísimos radios de la familia completa.

Ejercicio 29

Sea $f : K \to Y$ una biyección continua, K compacto y Y métrico. Prueba continuidad de su inversa.

Solución. La biyección acredita una función inversa $g : Y \to K$. Sea F cerrado relativo de K. Como K es compacto, F es compacto: una cobertura de F se completa con $K \setminus F$ y se reduce finitamente en K. Por continuidad, $f(F)$ es compacto, y todo compacto de un espacio métrico es cerrado. Además $g^{-1}[F] = f(F)$, porque g es la inversa de la biyección. Así todas las preimágenes por g de cerrados de K son cerradas en Y.

El criterio por cerrados, equivalente al de abiertos mediante complementos, da continuidad de g. La compacidad del dominio aporta la cerradura de las imágenes que una biyección continua general no garantiza.

Ejercicio 30

Clasifica $K = \{(x, y) : \max(|x|, |y|) \le 1\}$ en $\mathbb{R}^2$ con d_∞: completitud, compacidad y conexidad por caminos.

Solución. El conjunto es el cuadrado $K = [-1, 1]^2$. El espacio $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ es completo: una Cauchy hace Cauchy cada coordenada real, sus dos límites forman un punto del plano y el máximo de los dos cortes acredita convergencia en d_∞. El cuadrado es la bola cerrada de radio uno del origen, luego es completo como subespacio cerrado. Tiene redes finitas a toda escala mediante una partición suficientemente fina de ambas coordenadas en celdas con puntos medios internos. La máxima distancia al centro de una celda es menor que el radio solicitado. Así es totalmente acotado y, junto con completitud, compacto bajo la selección declarada en §31.5.

Para $a, b \in K$, defina $\gamma(t) = (1 - t)a + tb$, $0 \le t \le 1$. Cada coordenada cumple $|\gamma_i(t)| \le (1 - t)|a_i| + t|b_i| \le 1$, de modo que el camino permanece en K. Además $d_\infty(\gamma(t), \gamma(s)) = |t - s| d_\infty(a, b)$, que acredita continuidad, incluidos los pares iguales. Por tanto es conexo por caminos y conexo.

31.7. Conexidad: impedir una separación

Completitud se ocupa de colas; compacidad, de coberturas. La tercera pregunta es si el espacio puede dividirse en dos regiones abiertas que no se toquen. Una **separación** de X es una pareja de abiertos relativos no vacíos U, V con $X = U \cup V$ y $U \cap V = \emptyset$. El espacio es **conexo** si no admite una separación. El vacío y los singletons son conexos. Un espacio discreto con al menos dos puntos no lo es: un singleton y su complemento dan una separación.

La definición equivale a no tener subconjuntos abiertos y cerrados a la vez salvo $\emptyset$ y X. En una separación cada abierto es complemento del otro y por tanto cerrado. Recíprocamente, un conjunto abierto y cerrado propio y no vacío forma una separación con su complemento. Hay una segunda lectura útil: X es conexo si y sólo si toda función continua a $\{0, 1\}$ con métrica discreta es constante. Una función no constante produce por preimagen la separación de los dos singletons. Una separación produce la función que vale 0 en una parte y 1 en la otra; las cuatro posibles preimágenes de abiertos del codominio son abiertas. Es un certificado binario de desconexión.

Una imagen continua conserva conexidad. Si $f(X)$ tuviera una separación relativa, las preimágenes de sus dos partes serían abiertas disjuntas que cubren X. Ambas serían no vacías porque cada parte contiene algún valor de la función. Esto separaría X y contradice la conexidad. La prueba usa preimágenes y no necesita construir sucesiones ni seleccionar infinitos puntos; tampoco exige que la imagen de un abierto sea abierta.

En la recta usual, conexo significa intervalo. Si A es conexo y contiene $a < b$, pero no contiene algún $c \in (a, b)$, entonces $A \cap (-\infty, c)$ y $A \cap (c, \infty)$ son una separación. Por tanto contiene todos los puntos intermedios. Para probar el converso, sea I un intervalo y supongamos una separación U, V. Tomamos $u \in U$, $v \in V$; intercambiando nombres si hace falta, $u < v$. El segmento $[u, v]$ pertenece a I. El conjunto $S = U \cap [u, v]$ es no vacío y acotado, de modo que tiene supremo $s \in [u, v]$.

Como V es abierto relativo y contiene v, una ventana a la izquierda de v evita U, así que $s < v$. Si $s \in U$, una ventana relativa en s permite un punto de $U \cap [u, v]$ estrictamente mayor que s, contradiciendo que es cota. Si $s \in V$, entonces $s \neq u$ y una ventana a la izquierda de s en I evita U. Pero por el supremo hay puntos de S mayores que $s - \eta$ para todo $\eta > 0$; eligiendo η menor que aquella ventana y que $s - u$ obtenemos contradicción. Como $s \in I = U \cup V$, no queda alternativa. El intervalo es conexo. El orden y el supremo se usan aquí sobre la recta; no se declaran disponibles en cualquier espacio.

La clausura de un conexo A es conexa. Si su clausura se separara en U, V, la restricción a A obliga a que A esté íntegramente en una parte, digamos U. Un punto de la otra parte V, abierta relativa y no vacía, tiene una bola ambiental cuya intersección con la clausura está en V; por adherencia esa bola corta A, contradicción. Si A es vacío, su clausura también lo es. Asimismo una unión de conjuntos conexos que comparten un punto es conexa: en una supuesta separación, cada conjunto debe estar en una sola parte, y el punto común obliga a que todos estén en la misma.

Un **camino** de a a b es una función continua $\gamma : [0,1] \to X$ con extremos a, b. Un espacio es conexo por caminos si cada par puede unirse así; en el vacío la condición es vacua. Todo espacio conexo por caminos es conexo: una separación y un punto en cada parte producirían por el camino una separación del intervalo mediante preimágenes. El converso no se afirma sin prueba. En $\mathbb{R}^m$ las operaciones coordenadas permiten caminos lineales $\gamma(t) = (1-t)a + tb$ dentro de cualquier conjunto convexo; la estimación $d_\infty(\gamma(t), \gamma(s)) = |t-s| d_\infty(a,b)$ acredita continuidad. Una imagen real continua de un conexo toma todos los valores intermedios entre dos de sus valores, pues su imagen es un intervalo. Ésta es la forma métrica del mecanismo de C15.

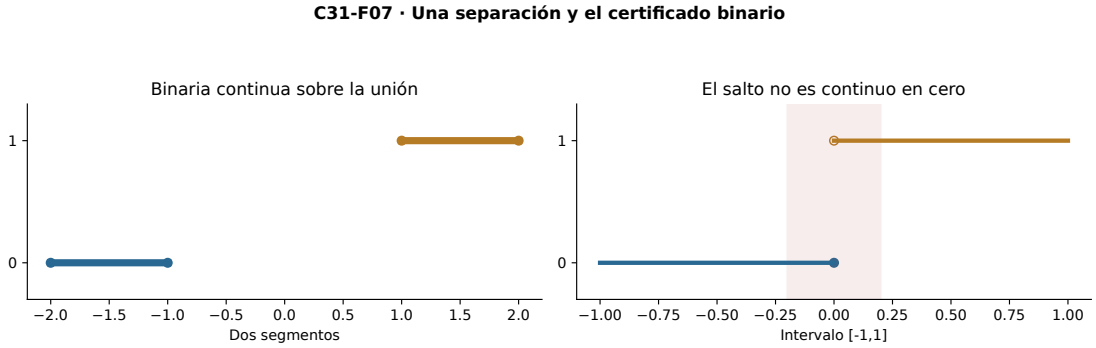


Figura 31.7. Dos segmentos separados admiten una función continua binaria que vale cero a la izquierda y uno a la derecha. Sobre el intervalo completo, el mismo salto no es continuo: una ventana alrededor de cero ve ambos valores. Conexidad se diagnostica con abiertos relativos o preimágenes, sin confundirla con compacidad de los dos segmentos.

Ejercicios de la sección 31.7.

Ejercicio 31

Prueba que conexidad equivale a que los únicos subconjuntos abiertos y cerrados sean el vacío y el espacio.

Solución. Si X tiene una separación U, V, ambas partes son abiertas, no vacías y complementarias. Por ello U también es cerrado y es un subconjunto propio no vacío abierto y cerrado. Esto contradice que los únicos conjuntos con ambas propiedades sean $\emptyset$ y X.

Recíprocamente, si existe un subconjunto A propio y no vacío abierto y cerrado, su complemento es abierto y no vacío. Ambos son disjuntos y cubren X, dando una separación. Así ausencia de tales subconjuntos equivale a conexidad. El vacío y el singleton también satisfacen la caracterización, pues no tienen un subconjunto propio no vacío. **Volver a la figura.** C31-F07: confronta el mecanismo de esta solución con las hipótesis y fronteras indicadas en su pie.

Ejercicio 32

En $A = [-2,-1] \cup [1,2]$ usual, acredita compacidad y una separación relativa.

Solución. Los segmentos $[-2,-1]$ y $[1,2]$ son compactos en la recta, por Heine–Borel. Su unión finita A es compacta. Las partes $U = A \cap (-\infty, 0) = [-2,-1]$ y $V = A \cap (0,\infty) = [1,2]$ son abiertas relativas en A, aunque no sean abiertas en toda la recta. Son no vacías, disjuntas y cubren A; constituyen una separación. Por ello A no es conexo. La compacidad no impide que un conjunto tenga dos regiones separadas.

Ejercicio 33

Sea X conexo y $f : X \to \{0,1\}$ continua con codominio discreto. Prueba que f es constante.

Solución. Los singletons $\{0\}$ y $\{1\}$ son abiertos en el codominio discreto. Si f tomara ambos valores, sus preimágenes serían abiertas por continuidad, no vacías, disjuntas y cubrirían X. Eso sería una separación del dominio conexo. Así la función toma a lo sumo un valor. Si X es no vacío, tomar un punto a da $f(x) = f(a)$ en todo el dominio: es constante. Si X es vacío, no puede tomar dos valores diferentes; la misma afirmación se cumple vacuamente.

Ejercicio 34

Prueba que la imagen real de una función continua sobre un conexo contiene todos los valores entre dos de sus valores.

Solución. Sea $A = f(X)$ la imagen real del conexo por una función continua. Es conexa: una separación relativa de A daría, por preimágenes, abiertos no vacíos disjuntos que cubren X. Suponga que $u < v$ pertenecen a A y que $c \in (u, v)$ no pertenece. Entonces $A \cap (-\infty, c)$ y $A \cap (c, \infty)$ son abiertos relativos, disjuntos y cubren A. Son no vacíos porque contienen a u y a v. Contradicen su conexidad.

Por tanto $c \in A$ y existe un punto del dominio con valor c. El argumento usa el orden en la imagen real; no necesita que el dominio sea un intervalo ni que la función sea monótona.

Ejercicio 35

Prueba que una unión de conjuntos conexos con un punto común es conexa.

Solución. Sea $A = \bigcup_i A_i$, con todos los A_i conexos y un punto común p. Si hubiera una separación relativa U, V de A, cada A_i tendría sus intersecciones con ambas partes abiertas relativas, disjuntas y con unión A_i. Por conexidad, no podrían ser ambas no vacías, luego cada A_i quedaría en una única parte. El punto común pertenece a una de ellas, digamos U, y pertenece a todos los A_i. Obliga a que todos queden en U, dejando V vacía, contradicción.

Así la unión es conexa. Si la familia es vacía, su unión es el vacío y también es conexa, tratado directamente sin necesitar un punto común.

31.8. Comparar lo que sobrevive y cerrar la ruta

Podemos comparar las propiedades globales en espacios conocidos, manteniendo indicada la métrica. La completitud pide destinos para colas de Cauchy; la acotación total pide redes a cualquier escala; la compacidad pide subcoberturas finitas y la conexidad impide separaciones. Los ejemplos siguientes muestran que ninguna de esas obligaciones debe sustituirse por otra sin una prueba.

Espacio con métrica indicada	Completo	Totalmente acotado	Compacto	Conexo
$[0,1]$, usual	Sí	Sí	Sí	Sí
$(0,1)$, usual	No	Sí	No	Sí
$\mathbb{R}$, usual	Sí	No	No	Sí
$\{0,1\}$, usual	Sí	Sí	Sí	No
$\mathbb{N}$, discreta	Sí	No	No	No

El segmento $[0,1]$ es cerrado y acotado en la recta, además de intervalo. El abierto $(0,1)$ conserva las redes finitas y la conexidad, pero pierde el destino de los recíprocos. La recta es completa y conexa, aunque contiene los enteros separados y no es totalmente acotada. Dos puntos forman un compacto finito que se puede separar. En la discreta infinita, toda Cauchy es eventualmente constante, pero cada bola pequeña sólo cubre un punto. Esta última fila es además acotada y refuta que esa propiedad baste para compacidad.

Acotar la regla de medir no acota la complejidad. En $\mathbb{R}$ pongamos $d'(x,y) = \min\{|x-y|, 1\}$. C30 probó que es una métrica con los mismos abiertos, convergencias y sucesiones de Cauchy que la usual. Por tanto es completa y conexa. Todo el espacio está acotado, pues $d' \leq 1$. Sin embargo los enteros distintos tienen distancia 1, no hay red finita

de radio $1/2$ y el espacio no es compacto. La función $f(x) = x^2$ es continua porque la topología del dominio es la usual, pero no uniformemente continua: para $x_n = n$, $y_n = n + 1/n$, $n \geq 1$, $d'(x_n, y_n) = 1/n \to 0$ mientras $|f(y_n) - f(x_n)| = 2 + 1/n^2 \geq 2$. Una tolerancia de salida 1 refuta cualquier radio de entrada global. Se acredita así el contraejemplo anunciado en §31.6, con dominio realmente completo y acotado.

La topología no recuerda todas las Cauchy. C30 construyó $e(x, y) = |\phi(x) - \phi(y)|$ en $\mathbb{R}$, donde $\phi(x) = x/(1 + |x|)$ es una biyección continua con inversa continua hacia $(-1, 1)$. Este espacio tiene los mismos abiertos que la recta usual, por lo que es conexo y no compacto: ambas propiedades se expresan con abiertos. Es totalmente acotado porque es isométrico a un intervalo acotado. Para construir una red, tomamos una red de $(-1, 1)$ y transportamos sus finitos centros mediante la inversa. Pero no es completo: $\phi(n) = n/(n+1)$ es Cauchy real con destino 1 exterior a $(-1, 1)$. Si n convergiera en e a $a \in \mathbb{R}$, sus imágenes convergerían a $\phi(a) < 1$, contradiciendo la unicidad real.

Las comparaciones por constantes positivas de C30 conservan abiertos, Cauchy, acotación total y completitud. Para una comparación $cd \leq e \leq Cd$, una red d de radio ε/C es una red e de radio ε, y se razona al revés con c. Un **homeomorfismo**, biyección continua con inversa continua, conserva compacidad y conexidad por las pruebas de imágenes, pero no tiene por qué conservar completitud o acotación total. Una biyección uniformemente continua con inversa uniformemente continua sí conserva esas dos: transporta Cauchy; si la imagen tiene un destino, la inversa lo devuelve; y para redes transforma una tolerancia de salida en un radio común de entrada. No basta continuidad punto a punto para esta última conversión.

Sobre un compacto, un homeomorfismo métrico y su inversa son uniformemente continuos por §31.6. Fuera de él, las comparaciones anteriores separan las propiedades que sólo recuerdan los abiertos de las que necesitan un control común de distancias. Las pruebas permiten reconocer qué procedía del orden de la recta y qué puede reutilizarse en coordenadas finitas, espacios de funciones o regiones del análisis complejo. Las teorías posteriores de medida e integración tendrán que construir los controles de longitud que amplíen los usados aquí; esas extensiones no se deducen de la sola abstracción métrica.

C31-F08 · Las propiedades globales no coinciden

Espacio	Completo	Redes	Compacto	Conexo
[0,1] usual	Sí	Sí	Sí	Sí
(0,1) usual	No	Sí	No	Sí
ℝ truncada	Sí	No	No	Sí
ℕ discreta	Sí	No	No	No

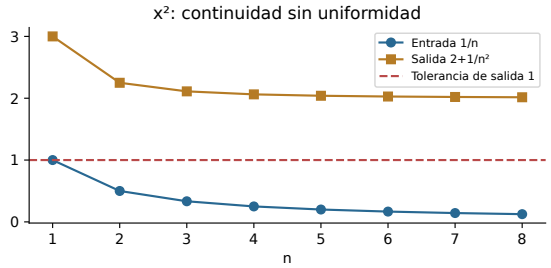


Figura 31.8. La métrica truncada en la recta conserva Cauchy y completitud, pero hace acotado un espacio todavía no compacto. Los pares n y n+1/n tienen entrada 1/n que tiende a cero y salida cuadrática 2+1/n² al menos 2. La tabla compara cuatro modelos y mantiene separadas completitud, redes finitas, compacidad y conexidad.

Ejercicios de la sección 31.8.

Ejercicio 36

Clasifica $(\mathbb{R}, d_*)$, $d_*(x, y) = \min(|x - y|, 1)$: acotación, completitud, compacidad y conexidad.

Solución. Como $d_* \leq 1$, toda la recta está en la bola de radio dos centrada en cero; el espacio es acotado. Para tolerancias menores que uno, $d_* < \eta$ fuerza $|x - y| < \eta$ y ambas distancias coinciden. C30 acredita así las mismas Cauchy y convergencias que en la usual. Completitud real da completitud de d_*. Entre dos enteros distintos, $d_* = 1$. Una bola abierta de radio $1/2$ contiene a lo sumo un entero, y ninguna red finita cubre la recta. No es totalmente acotada y no puede ser compacta.

Para radios abiertos ≤ 1, las bolas coinciden con las usuales, por lo que la topología es la misma. La recta es un intervalo conexo y permanece conexa. Se obtiene un espacio completo, acotado y conexo que no es compacto. **Volver a la figura.** C31-F08: confronta el mecanismo de esta solución con las hipótesis y fronteras indicadas en su pie.

Ejercicio 37

Con esa métrica truncada en el dominio, refuta continuidad uniforme de $f(x) = x^2$ hacia la recta usual.

Solución. La función $x \mapsto x^2$ es continua para la usual, y también lo es desde la métrica truncada, que tiene los mismos abiertos. Puede verse con un radio local menor que uno, donde la distancia de entrada coincide con la usual. Para $n \geq 1$, tome $x_n = n$ y $y_n = n+1/n$. Su distancia truncada es $1/n \to 0$, mientras $|y_n^2 - x_n^2| = 2 + 1/n^2 \geq 2$. Fije tolerancia de salida uno. Para cualquier $\delta > 0$, hay n con $1/n < \delta$, y ese par incumple la tolerancia.

Por tanto no es uniformemente continua, aunque el dominio truncado sea completo y acotado. Esas dos propiedades no reemplazan compacidad en el teorema de continuidad uniforme.

Ejercicio 38

Clasifica la métrica $e(x, y) = |\phi(x) - \phi(y)|$ en $\mathbb{R}$, $\phi(x) = x/(1+|x|)$, sin confundir topología y completitud.

Solución. La biyección $\phi : \mathbb{R} \to (-1, 1)$, $\phi(x) = x/(1 + |x|)$, tiene inversa $\psi(t) = t/(1 - |t|)$. Por definición $e(x, y) = |\phi(x) - \phi(y)|$, de modo que es una isometría hacia ese intervalo usual. El intervalo es totalmente acotado: sus particiones finitas proporcionan centros internos a cualquier escala. Aplicar ψ a esos centros transporta redes al espacio $(\mathbb{R}, e)$. También es acotado, porque todas sus distancias son menores que dos.

La sucesión n es Cauchy: sus imágenes $n/(n+1)$ tienen separaciones de cola $\leq 1/(N+1)$. Si tuviera un destino real a para e, sus imágenes convergerían usualmente a $\phi(a)$, y la fórmula las hace converger a uno. Unicidad exigiría $\phi(a) = 1$, fuera del recorrido. No es completo ni compacto. La topología coincide con la usual, por la continuidad de ϕ y ψ, y es conexo. La isometría transporta las propiedades del intervalo abierto; éste tampoco es completo.

Ejercicio 39

Supón $cd \leq e \leq Cd$ con $c, C > 0$. Prueba preservación de acotación total y completitud.

Solución. Suponga $c\, d(x, y) \leq e(x, y) \leq C\, d(x, y)$ para todos los pares, con $c, C > 0$. Una red d de radio ε/C cubre también en e con radio ε, usando los mismos centros. Una red e de radio $c\varepsilon$ cubre en d con radio ε. Así acotación total se conserva en ambos sentidos. Si d es completa y (x_n) es Cauchy en e, el control de pares $d \leq e/c$ la hace Cauchy en d. Existe un destino a en el espacio. La cota $e \leq Cd$ transporta su convergencia a e, acreditando completitud de ésta.

Para la vuelta, $e \leq Cd$ convierte una Cauchy d en Cauchy e; completitud de e da un destino y $d \leq e/c$ transporta convergencia. Estas son cotas globales, con tolerancias comunes; no basta saber que las bolas generan los mismos abiertos.

Ejercicio 40

¿Qué propiedades conserva necesariamente un homeomorfismo entre espacios métricos? Justifica compacidad y conexidad y refuta completitud.

Solución. Un homeomorfismo es una biyección continua con inversa continua. La imagen continua de un compacto es compacta; aplicar esta propiedad a la función y a su inversa conserva compacidad en ambos sentidos. El mismo argumento con imágenes de conexos conserva conexidad. Para refutar preservación de completitud, use $\phi(x) = x/(1 + |x|)$ entre la recta usual y $(-1, 1)$ usual. Su inversa $t/(1-|t|)$ es continua, así que es un homeomorfismo. La recta es completa, mientras $t_n = 1-1/(n+2)$ es Cauchy en el intervalo y su único límite real es uno, exterior. El intervalo no es completo.

Completitud depende de los controles de Cauchy que un homeomorfismo general no transporta. Si ambas direcciones fueran uniformemente continuas, una Cauchy podría transportarse al espacio completo y su destino volver por continuidad, dando una hipótesis adicional suficiente. El acuerdo topológico por sí solo no la proporciona.

Epílogo. Después de la recta

Al comienzo de este libro preguntábamos qué sostiene las herramientas que aprendimos a usar en cálculo. Una sucesión parecía dirigirse a un punto; una curva parecía no poder atravesar una altura sin tocarla; una acumulación parecía acercarse a una cantidad definida. El prefacio proponía detenernos en esas promesas: lo que allí asumimos, aquí lo demostramos. Para cumplir esa tarea hubo que retroceder hasta los números racionales, construir los reales y reconocer dentro de cada prueba el momento en que la recta completa entregaba un destino, un supremo o un punto intermedio.

Ahora podemos mirar de nuevo aquellas imágenes. La aproximación de una sucesión no garantiza por sí sola que su destino esté en el espacio. La continuidad de una función no proporciona automáticamente un mismo radio para todas las entradas. La convergencia de cada valor no autoriza a intercambiar un límite con una derivada o una integral. Aprendimos a formular la pregunta que falta, a identificar las hipótesis que la responden y a medir el error que todavía queda. Ese trabajo cambia nuestra relación con las fórmulas: además de utilizarlas, podemos explicar qué las hace válidas y dónde termina su alcance.

La última parte del recorrido nos permitió soltar las coordenadas. Las bolas, la triangular, las ventanas y las colas siguen teniendo sentido cuando los puntos son palabras, funciones o configuraciones. Otras herramientas necesitan algo más: el orden permite hablar de supremos y valores intermedios; las operaciones permiten construir cocientes; las coordenadas finitas hacen posibles ciertas mallas. Distinguir esas contribuciones abre varias rutas. En cada una reaparecerá una parte de lo aprendido, acompañada de preguntas que este libro deja preparadas, pero que la nueva teoría deberá resolver.

Varias variables: controlar todos los modos de acercarse

En la recta podemos aproximarnos a un punto desde sus dos lados. En el plano hay muchas direcciones y muchos recorridos posibles. La definición métrica de límite ya nos ofrece una regla que no necesita enumerarlos: una bola de entrada debe controlar a la vez todos los puntos suficientemente cercanos. Las comparaciones entre las métricas suma y máximo enseñan a pasar de las coordenadas al control común; la completitud por coordenadas y las redes finitas explican por qué ciertos argumentos de dimensión finita conservan su estructura.

Conviene llevar a esa ruta una prevención concreta. Definamos $f(0,0) = 0$ y, para $(x,y) \neq (0,0)$, $f(x,y) = xy/(x^2+y^2)$. Sobre cualquiera de los ejes el valor es cero. Sobre la diagonal, en cambio, $f(t,t) = 1/2$ para $t \neq 0$. Los puntos $(1/n, 0)$ y $(1/n, 1/n)$, con $n \geq 1$, se acercan al origen en la métrica máximo, pero sus imágenes permanecen respectivamente en 0 y $1/2$. Si hubiera un límite en el origen, ambas rutas tendrían que transportar sus valores a ese mismo límite; la unicidad real lo impide. Comprobar sólo los ejes no controla una vecindad completa.

La diferenciabilidad en varias variables deberá profundizar esa misma exigencia. Una colección de datos obtenidos por separado no reemplaza sin prueba a un modelo que funcione para todos los incrementos pequeños. La nueva teoría precisará el modelo lineal, el tamaño del incremento y el error relativo. De nuestros capítulos sobre diferenciación y Taylor conservará la pregunta esencial: ¿cuánto queda después de retirar la aproximación elegida y cómo depende de la escala? De la geometría métrica conservará la obligación de que el control sea común a toda la ventana.

Análisis complejo: cambiar la geometría del incremento

Cuando el número de entrada puede desplazarse en el plano complejo, vuelven las ventanas y las múltiples direcciones. La distancia ayudará a formular continuidad y convergencia; las operaciones del nuevo sistema numérico permitirán formular cocientes y series. Pero la derivada tendrá que responder a una exigencia propia: la aproximación mediante el cociente deberá ser compatible con todos los modos de hacer pequeño el incremento complejo. No bastará trasladar una prueba real sustituyendo una letra por otra.

Las series de potencias ofrecen un puente especialmente claro. Aprendimos a fijar primero una región interior, construir una barrera sumable y controlar la cola uniformemente antes de intercambiar operaciones. Ese orden de trabajo puede orientar una construcción compleja, siempre que se vuelvan a acreditar las estimaciones y los tipos correspondientes. El radio organiza una región de control; su frontera exige un estudio separado. La identidad formal de una expresión no concede por sí sola convergencia, derivación ni integración en toda región donde podamos escribirla.

También conviene recordar una diferencia de fondo. En la recta, la conexidad y el orden permitieron demostrar el valor intermedio. El plano complejo no trae ese mismo orden. La conexidad sigue planteando una pregunta sobre separaciones, pero su interpretación no debe convertirse automáticamente en una afirmación sobre valores «entre» otros dos. La teoría compleja tendrá que demostrar sus propios resultados de representación y de rigidez. Nuestro trabajo con series prepara sus mecanismos de control; no anticipa como probada esa teoría posterior.

Topología: conservar las ventanas y examinar lo que pierden

En los espacios métricos vimos que muchas afirmaciones pueden escribirse sólo con abiertos. La continuidad se reconoce por preimágenes; la compacidad, por la reducción de coberturas; la conexidad, por la imposibilidad de una separación. Las pruebas correspondientes ya dejaron ver qué función cumplen esas familias de conjuntos. La topología general tomará los abiertos como punto de partida y deberá establecer cuáles de los argumentos sobreviven en ese marco más amplio.

El último capítulo ofrece una guía para no pedir a los abiertos información que no contienen. La métrica usual de la recta y la métrica transportada mediante $\phi(x) = x/(1+|x|)$ producen los mismos abiertos, pero no las mismas sucesiones de Cauchy. La primera es completa; la segunda pierde el destino de la sucesión de enteros. Un homeomorfismo conserva compacidad y conexidad, como probamos por imágenes continuas, y aun así puede no conservar completitud. Una regla uniforme de aproximación exige información adicional a la continuidad punto por punto.

Por eso, al ampliar el marco, habrá que preguntar de nuevo qué representan las sucesiones, qué familias de ventanas se permiten y qué hipótesis de separación necesita cada prueba. Un criterio establecido en espacios métricos no puede darse por vigente en cualquier estructura de abiertos. Lo más útil que llevamos a esa investigación es una forma de leer las demostraciones: localizar cuándo aparece una distancia, cuándo basta una preimagen y cuándo la existencia de una sucesión nueva requiere seleccionar testigos. La abstracción progresa al reconocer esas dependencias con precisión.

Medida e integración: revisar cómo se controla la acumulación

Para construir la integral de Riemann y Darboux partimos intervalos, refinamos particiones y comparamos acumulaciones inferiores y superiores. La integrabilidad se decidió mediante un control del desacuerdo que podía hacerse tan pequeño como quisiéramos. El teorema fundamental vinculó esa construcción con la derivación bajo sus hipótesis. Después examinamos las fronteras de Riemann y las condiciones necesarias para intercambiar límites con operaciones.

Ese recorrido prepara una pregunta posterior: ¿qué ocurriría si pudiéramos medir conjuntos de entradas más generales que los intervalos de una partición? La teoría de medida deberá construir esa noción de tamaño y justificar sus propiedades antes de utilizarla. La integración de Lebesgue deberá definir otra forma de acumular y demostrar tanto su relación con la integral ya construida como sus propios teoremas de paso al límite. No basta rebautizar una suma conocida ni afirmar que toda convergencia queda automáticamente autorizada.

El control uniforme de funciones que hemos aprendido seguirá siendo una referencia importante, pero no tendrá por qué ser la única forma de organizar el problema. La nueva teoría podrá preguntar dónde se concentra el error, cuánto pesan las regiones donde es grande y qué barreras permiten controlar la acumulación. Cada respuesta exigirá hipótesis y pruebas nuevas. La experiencia de este libro aconseja comenzar por ellas: distinguir el límite de las funciones del límite de sus integrales, definir el dominio y la noción de integrabilidad, y construir una estimación que permita pasar de una afirmación a la otra.

Espacios normados y análisis funcional: tratar una función como un punto

En los capítulos de convergencia uniforme, una función completa pasó a ocupar el lugar de un punto. La distancia de supremo comparó dos funciones mediante una tolerancia válida para todas sus entradas. Más tarde probamos que el espacio de funciones reales acotadas, con esa métrica, es completo: cada columna de una sucesión Cauchy entrega un límite real único, y el control común asegura que esas columnas formen una función acotada y que la convergencia ocurra en la métrica elegida. También vimos que la continuidad del límite se conserva bajo convergencia uniforme.

La elección de la distancia es parte del problema. Convergencia puntual y convergencia uniforme hacen preguntas diferentes; mirar cada evaluación no equivale a controlar toda la función. Del mismo modo, una teoría posterior podrá introducir otros modos de medir funciones, pero tendrá que demostrar qué destinos existen, qué información conserva la convergencia y qué operaciones resultan continuas. No todas esas conclusiones se heredan del caso de supremo.

Los espacios normados añadirán una estructura algebraica a la geometría: será necesario definir la norma y acreditar su relación con suma y multiplicación por escalares. El análisis funcional podrá entonces estudiar aplicaciones que actúan sobre esos espacios. La contracción que construimos en C31 ofrece un primer patrón completo: iterar una función dada, dominar los saltos por una cola geométrica, obtener un destino mediante completitud y comprobar que ese destino es un punto fijo. La cota del error permite decidir cuándo detener una aproximación con una tolerancia prescrita. La extensión a problemas concretos exigirá verificar que la aplicación realmente lleva el espacio a sí mismo y que dispone de una razón común menor que uno.

Aquí aparece, además, una lección que la recta podía ocultar. Completo y acotado no significa compacto en un espacio métrico general. Para la equivalencia que probamos hicieron falta redes finitas a todas las escalas, junto con las hipótesis de selección declaradas. Antes de utilizar un argumento de extracción o de extremos en un espacio de funciones, habrá que demostrar su compacidad o suministrar la propiedad precisa que el argumento necesita. Un dibujo que encierre todos los puntos en una región grande todavía no proporciona esas redes pequeñas.

Volver a las preguntas con mejores herramientas

Estas rutas no requieren olvidar el trabajo sobre la recta. Invitan a reutilizarlo con cuidado. El siguiente mapa distingue el mecanismo disponible de la tarea que queda abierta en cada dirección.

Ruta	Mecanismo que llevamos	Tarea de la teoría posterior
Varias variables	Bolas, cortes comunes, mallas y error de aproximación	Construir diferenciabilidad total, integración y geometría del nuevo dominio
Análisis complejo	Distancia, barreras y colas de series de potencias	Construir el cálculo complejo y demostrar sus resultados propios
Topología general	Preimágenes, coberturas y separaciones	Precisar qué hipótesis sustituyen a la estructura métrica
Medida e integración	Refinamientos, barreras y distinción entre límites	Construir medida, integrabilidad y nuevas reglas de paso al límite
Espacios normados y análisis funcional	Métrica de funciones, completitud y error de iteración	Acreditar las normas, los destinos y las operaciones de cada espacio

El mapa no es una lista de teoremas que podamos importar. Es una manera de preparar las preguntas. Cada nueva ruta deberá decidir qué objetos admite, cómo se aproxima a ellos y qué garantiza la existencia de los destinos que busca. También deberá distinguir una construcción determinada de una selección de testigos, una información local de un control común y un ejemplo sugerente de una prueba general.

Podemos cerrar el libro volviendo a las cuatro acciones del prefacio: ver, formular, demostrar y volver a ver. Al principio una ventana ayudaba a imaginar la proximidad. Ahora podemos reconocer en ella una elección de radio, el orden de unos cuantificadores y la parte de una demostración que protege una conclusión. Una barrera deja de ser sólo una línea dibujada: puede construir un supremo, dominar una cola o certificar el error de una iteración. Y un contraejemplo deja de ser una anomalía: señala con exactitud qué información faltaba.

Después de la recta, habrá nuevos objetos y otras formas de mirar. La tarea que permanece es aprender a preguntar qué hace posible cada paso. Cuando podemos responder, el argumento ya no descansa en la familiaridad de la fórmula o en la apariencia de la figura. Podemos reconstruirlo, poner a prueba sus hipótesis y reconocer el momento en que hace falta una idea nueva.