Álgebra

para matemáticos

Tomo II

Álgebra lineal

A. Peña

TEORÍA, EJERCICIOS Y PERSPECTIVA

Matemática²biertA

MATEMATICAABIERTA.CL

Índice

Convenciones de lectura viii

Capítulo 1. Sistemas lineales y eliminación 1
1.1. Qué cuenta como solución 1
1.2. Consecuencias que conservan la información 2
1.3. Eliminar sin perder la vuelta 3
1.4. Por qué el procedimiento termina 4
1.5. Contradicciones, identidades y libertad 4
1.6. Más ecuaciones no siempre dan más información 5
1.7. Lo que cambia al mover los datos 7
Conservar una prueba de la contradicción 8
1.8. Una solución particular y todas sus variaciones 9
1.9. Ejercicios 10
Lectura, eliminación y parametrización 10
Parámetros y control de operaciones 10
Construcción, geometría y transferencia 10
Certificados y compatibilidad conjunta 11
1.10. Soluciones razonadas 11
Lecturas y referencias 14

Capítulo 2. Matrices como representación de sistemas 15
2.1. Qué información guarda una matriz 15
2.2. Operaciones sobre filas y equivalencia 16
2.3. Escalonar y reducir 16
2.4. La información que las operaciones conservan 18
2.5. Por qué la forma reducida es única 19
Reconocer la información común de dos tablas 19
Sistemas equivalentes y matrices equivalentes por filas 20
2.6. El rango como invariante 20
2.7. Resolver varios sistemas con una sola reducción 21
2.8. Existencia para cualquier término independiente 22
Hasta dónde conviene reducir 22
2.9. Parámetros, cuerpos y límites de la representación 23
2.10. Ejercicios 24
Representar, reducir e interpretar 24
Parámetros y control del procedimiento 25
Pruebas, ejemplos y contraejemplos 25
Síntesis y transferencia 26
Combinaciones de filas y elección del procedimiento 26
2.11. Soluciones razonadas 26
Lecturas y referencias 32

Capítulo 3. Álgebra de matrices e invertibilidad 33
3.1. Sumar tablas y encadenar cálculos 33
3.2. Las leyes que conserva el producto 34
3.3. Transpuesta y escritura por bloques 35
3.4. Las operaciones elementales como productos 36

3.5. Deshacer una matriz 36
3.6. Los criterios de invertibilidad y el caso rectangular 37
3.7. Calcular una inversa y leer sus columnas 38
3.8. Conservar la eliminación en factores triangulares 39
3.9. Cuando hace falta intercambiar filas 40
3.10. Ejercicios 41
Operaciones y orden de composición 41
Matrices elementales e inversas 41
Criterios y casos rectangulares 42
Bloques, triangulares y factorización 42
Pruebas estructurales y transferencia 43
3.11. Soluciones razonadas 43
Lecturas y referencias 48

Capítulo 4. Espacios vectoriales 49
4.1. Las leyes que permiten calcular 49
4.2. Qué podemos deducir de los axiomas 51
4.3. Columnas, matrices y productos de espacios 52
4.4. Las funciones como vectores 52
4.5. Polinomios y funciones polinómicas 53
4.6. La elección de los escalares 54
4.7. Cambiar el origen y cambiar las operaciones 55
4.8. Sistemas homogéneos y la estructura que conservan 56
4.9. Ejercicios 56
Cálculo con objetos distintos 56
Reconocimiento de axiomas y contraejemplos 57
Demostraciones desde la definición 57
Polinomios, funciones y escalares 57
Cambio de operaciones y recuperación de sistemas 58
4.10. Soluciones 58
Lecturas y referencias 61

Capítulo 5. Subespacios y generación 62
5.1. Espacios dentro de un espacio 62
5.2. Describir por condiciones 63
5.3. Intersecar condiciones y reunir conjuntos 63
5.4. El subespacio que unos vectores obligan a construir 64
5.5. Comparar descripciones y cambiar generadores 65
5.6. Pasar de ecuaciones a generadores y volver 66
5.7. La suma de subespacios 67
5.8. Traslaciones y condiciones no homogéneas 68
5.9. Ejercicios 68
Reconocer y refutar 68
Construir y comprobar pertenencia 69
Generación finita y conjuntos infinitos 69
Intersecciones, uniones y sumas 69
Traslaciones y síntesis 70
5.10. Soluciones 70
Lecturas y referencias 73

Capítulo 6. Dependencia e independencia lineal 75
6.1. Relaciones que producen el vector cero 75
6.2. Qué vector puede eliminarse 76
6.3. Unicidad de los coeficientes 77
6.4. Detectar relaciones mediante eliminación 78
6.5. El cuerpo de los coeficientes 78

6.6. Polinomios, matrices y funciones 79
6.7. Familias indexadas, incluidas las infinitas 79
6.8. Ejercicios 80
Leer una relación 80
Sistemas, parámetros y coeficientes 80
Polinomios, matrices y funciones 81
Pruebas estructurales y fronteras 81
6.9. Soluciones 82
Lecturas y referencias 85

Capítulo 7. Bases y dimensión 87
7.1. Describir cada vector de una sola manera 87
7.2. Intercambiar sin perder el espacio generado 88
7.3. Extraer, completar y contar una base 89
7.4. Subespacios y elecciones del cuerpo 90
7.5. Encontrar bases mediante eliminación 90
7.6. La dimensión de una suma 92
7.7. Completar un subespacio sin repetir direcciones 92
7.8. Lo que cambia en dimensión infinita 93
7.9. Ejercicios 93
Representar y calcular 94
Entender y reconstruir argumentos 94
Construir y distinguir 94
Integrar y transferir 95
7.10. Soluciones razonadas 95
Lecturas y referencias 100

Capítulo 8. Transformaciones lineales 101
8.1. Conservar las combinaciones 101
8.2. Construir una transformación a partir de una base 102
8.3. Datos redundantes y compatibilidad 103
8.4. Transformaciones entre objetos distintos 104
8.5. Sumar transformaciones y contar sus parámetros 104
8.6. Componer: el orden de las operaciones 105
8.7. Proyecciones algebraicas 106
8.8. Traslaciones y aplicaciones afines 106
8.9. Ejercicios 107
Reconocer y calcular 107
Probar y controlar hipótesis 108
Construir transformaciones y contraejemplos 108
Integrar y transferir 109
8.10. Soluciones razonadas 109
Lecturas y referencias 113

Capítulo 9. Núcleo, imagen y rango-nulidad 114
9.1. Qué se pierde y qué se alcanza 114
9.2. Reconocer la inyectividad mirando el cero 115
9.3. Rango y nulidad: construir las dos partes de una base 115
9.4. Existencia y unicidad bajo restricciones de dimensión 116
9.5. Todas las soluciones de una misma salida 117
9.6. La misma dimensión en filas y columnas 117
9.7. Restringir una transformación y componerla 118
9.8. Diseñar una transformación con núcleo e imagen dados 119
9.9. Ejercicios 119
Calcular y representar 119
Reconstruir y aplicar pruebas 120

Construir y contrastar 120
Integrar y transferir 121
9.10. Soluciones razonadas 121
Lecturas y referencias 125

Capítulo 10. Isomorfismos y coordenadas 126
10.1. Una correspondencia que conserva las operaciones 126
10.2. Codificar y reconstruir un vector 127
10.3. Qué información podemos trasladar 128
10.4. Convertir coordenadas sin cambiar el vector 129
10.5. Encadenar cambios y calcularlos por eliminación 130
10.6. Un polinomio descrito desde otro centro 131
10.7. Coordenadas para un subespacio y límites de una identificación 132
10.8. Ejercicios 133
Calcular y reconstruir 133
Demostrar y controlar las hipótesis 133
Construir y contrastar representaciones 134
Integrar y transferir 134
10.9. Soluciones razonadas 135
Lecturas y referencias 138

Capítulo 11. Sumas directas y espacios cociente 140
11.1. Descomponer sin ambigüedad 140
11.2. Mantener separadas las componentes: la suma externa 141
11.3. Complementos y proyecciones 142
11.4. Una clase reúne todas las entradas indistinguibles 143
11.5. Operar con clases: el problema de los representantes 144
11.6. Bases del cociente y representantes elegidos 145
11.7. Qué transformaciones pueden calcularse desde una clase 145
11.8. Reunir exactamente las entradas con la misma salida 146
11.9. Subespacios que sobreviven al paso al cociente 147
11.10. Ejercicios 147
Descomponer y calcular clases 147
Reconstruir pruebas y diagnosticar errores 147
Construir complementos y aplicaciones inducidas 148
Integrar y transferir 148
11.11. Soluciones razonadas 149
Lecturas y referencias 153

Capítulo 12. Matrices de transformaciones y cambio de base 154
12.1. Las imágenes de una base se convierten en columnas 154
12.2. Componer exige que coincidan las coordenadas intermedias 155
12.3. Cambiar dos bases: seguir la entrada y la salida 156
12.4. Un operador en dos bases: semejanza 157
12.5. El rango y los sistemas sobreviven al cambio de descripción 157
12.6. Dos bases independientes permiten una forma más simple 158
12.7. Una suma diagonal que no depende de la base 159
12.8. Descomposiciones que producen bloques 160
12.9. Ejercicios 160
12.10. Soluciones 162
Lecturas y referencias 166

Capítulo 13. Determinantes 167
13.1. Linealidad en una columna, con las otras fijas 167
13.2. Contar los intercambios sin depender del camino 168
13.3. Existencia, unicidad y fórmula de Leibniz 169

13.4. Trasponer, triangularizar y llevar la cuenta de las operaciones 170
13.5. Componer multiplica los determinantes 170
13.6. El determinante de un operador y el de dos descripciones 171
13.7. Menores, cofactores y una inversa explícita 172
13.8. Sistemas y bloques: elegir cuánto calcular 173
13.9. Área, orientación y pérdida de dimensión 173
13.10. Ejercicios 174
13.11. Soluciones 176
Lecturas y referencias 180

Capítulo 14. Valores propios y vectores propios 181
14.1. Una recta en la que el operador sólo escala 181
14.2. Encontrar primero el escalar y después el espacio 182
14.3. La matriz cambia, las direcciones del espacio permanecen 183
14.4. Los valores distintos separan componentes 183
14.5. Una raíz repetida no cuenta por sí sola las direcciones 184
14.6. Cambiar de cuerpo cambia la pregunta 186
14.7. Qué cuentan la traza y el determinante 187
14.8. Seguir una dirección propia en otras operaciones 187
14.9. Ejercicios 188
14.10. Soluciones 190
Lecturas y referencias 194

Capítulo 15. Polinomios de operadores y teorema de Cayley–Hamilton 195
15.1. Evaluar un polinomio en una transformación 195
15.2. La primera relación entre las potencias 196
15.3. Una identidad para todas las matrices 198
15.4. Calcular con restos 199
15.5. Bézout e inversas polinómicas 200
15.6. Lo que una entrada permite reconstruir 201
15.7. Ejercicios 201
15.8. Soluciones 204
Lecturas y referencias 207

Capítulo 16. Diagonalización 209
16.1. Una base en la que cada vector se transforma por separado 209
16.2. Contar las direcciones que faltan 210
16.3. Lo que debe decir el polinomio mínimo 211
16.4. Recuperar cada componente sin escoger sus coordenadas 212
16.5. Relaciones sencillas que fuerzan una base propia 213
16.6. Escoger una base que sirva para dos operadores 214
16.7. Ejercicios 216
16.8. Soluciones 218
Lecturas y referencias 222

Capítulo 17. Subespacios invariantes, triangularización y formas canónicas 223
17.1. Mantener una parte del espacio dentro de sí misma 223
17.2. Los bloques que deja una base adaptada 224
17.3. El subespacio que genera una trayectoria 225
17.4. Una sucesión de subespacios que se conservan 225
17.5. Cuándo un complemento también se conserva 226
17.6. Separar factores que no comparten divisores 227
17.7. La parte que queda cuando sólo hay una raíz 229
17.8. Separar una acción diagonalizable y una nilpotente 230
17.9. Ejercicios 231
17.10. Soluciones 233

Lecturas y referencias 237

Capítulo 18. Forma de Jordan 238
18.1. Una filtración que cuenta la duración de las trayectorias 238
18.2. Cadenas y sus primeros vectores 239
18.3. Construir una base completa de cadenas 239
18.4. La matriz de una cadena 240
18.5. Leer las longitudes desde los núcleos 240
18.6. Separar valores propios y reunir las cadenas 242
18.7. De los tamaños a una base verificable 243
18.8. Calcular con un bloque 244
18.9. Ejercicios y soluciones 245
Lecturas y referencias 250

Capítulo 19. Espacio dual y transposición 251
19.1. Aplicaciones con salida escalar 251
19.2. La base que lee coordenadas 252
19.3. Extender una regla y separar un vector 253
19.4. Las ecuaciones que anulan un subespacio 253
19.5. Transportar una medición hacia la entrada 254
19.6. Por qué aparece una matriz transpuesta 255
19.7. Núcleos, imágenes y compatibilidad 256
19.8. Los funcionales de un cociente 257
19.9. Evaluar un funcional en un vector fijo 257
19.10. Invariancia y transposición de operadores 258
19.11. Ejercicios y soluciones 259
Lecturas y referencias 264

Capítulo 20. Formas bilineales, productos internos y teoremas espectrales 265
Primera unidad. Formas y cambios simultáneos de coordenadas 265
20.1. Dos entradas y una matriz 265
20.2. Recuperar una forma desde su diagonal 266
20.3. Cuántas direcciones son positivas 267
20.4. Formas alternantes 267
20.5. El caso hermitiano 268
Segunda unidad. Geometría ortogonal y aproximación 268
20.6. Una medición positiva de longitud 268
20.7. Construir direcciones ortonormales 268
20.8. Proyectar y medir el error 269
20.9. Una factorización que registra la ortogonalización 270
20.10. Sistemas que admiten una mejor aproximación 270
20.11. Representar funcionales usando el producto interno 271
Tercera unidad. Adjuntos y teoremas espectrales 271
20.12. Trasladar el operador entre las dos entradas 271
20.13. Núcleos, imágenes y productos de adjuntos 272
20.14. Transformaciones que conservan el producto interno 272
20.15. Triangularizar conservando longitudes 272
20.16. Cuándo la base ortonormal puede ser propia 273
20.17. Positividad y raíces de operadores 274
20.18. Varios observables compatibles 274
Cuarta unidad. Valores singulares y síntesis de descomposiciones 274
20.19. Dos bases ortonormales para una matriz rectangular 274
20.20. Los cuatro subespacios y dos normas de matrices 276
20.21. Invertir las direcciones que sobreviven 276
20.22. Conservar las direcciones de mayor efecto 277
20.23. Separar estiramiento y transporte de direcciones 278

Ejercicios y soluciones 278
Primera serie. Formas 279
Segunda serie. Geometría ortogonal 280
Tercera serie. Operadores 282
Cuarta serie. Valores singulares 284
Lecturas y referencias 286

Bibliografía 287

Convenciones de lectura

Los resultados se formulan sobre el cuerpo que se declara en cada pasaje. Los ejemplos numéricos ordinarios se interpretan sobre los reales cuando el capítulo así lo establece; las cuentas en cuerpos finitos se señalan expresamente. En el capítulo 20 todos los espacios tienen dimensión finita: la primera unidad admite un cuerpo conmutativo y las tres restantes trabajan sobre los reales o los complejos.

Símbolo	Significado
$\operatorname{rg} T$, $\operatorname{rg} A$	Rango de una aplicación o de su matriz.
$\operatorname{nul} T$	Dimensión del núcleo.
$[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$	Matriz que recibe coordenadas en $\mathcal{B}$ y entrega coordenadas en $\mathcal{C}$.
$P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$	Matriz de transición de coordenadas de $\mathcal{B}$ a coordenadas de $\mathcal{C}$.
A^{T}	Transpuesta, sin conjugación.
V^*	Dual algebraico.
T'	Aplicación dual: $T'g = g \circ T$.
$A^\dagger = \overline{A}^{\mathsf{T}}$	Conjugada transpuesta de una matriz.
T^*	Adjunto respecto de los productos internos elegidos.
A^+	Pseudoinversa de Moore–Penrose.
$\langle v, w\rangle$	Producto interno lineal en la primera entrada.
$\chi_T(t)$, $m_T(t)$	Polinomio característico $\det(tI - [T])$ y polinomio mínimo mónico.

Las bases son ordenadas al escribir coordenadas, que se organizan en columnas. Si una transición P convierte coordenadas nuevas en antiguas, el cambio de matriz de un operador es $P^{-1}AP$. Para una forma bilineal se cambian simultáneamente sus dos entradas y la regla es $P^{\mathsf{T}}MP$; para una forma hermitiana es $P^\dagger HP$.

La base del espacio cero es la lista vacía; su columna de coordenadas también es vacía. Las sumas vacías valen cero y los productos vacíos, uno. El determinante de orden cero y los polinomios característico y mínimo del único operador sobre el espacio cero valen uno. La traza de ese operador vale cero.

El uso del teorema fundamental del álgebra conserva el alcance declarado en el tomo I: es un resultado externo admitido. La clasificación de Jordan exige escisión en el cuerpo elegido. La diagonalización exige además factores lineales distintos en el polinomio mínimo.

Capítulo 1

Sistemas lineales y eliminación

Un laboratorio prepara diez litros de una mezcla a partir de tres soluciones que contienen, respectivamente, un diez, un veinte y un cuarenta por ciento de cierta sustancia. La mezcla final debe contener dos litros de esa sustancia. Si x, y y z son los litros tomados de cada solución, las dos condiciones son

$$\begin{cases} x + y + z = 10, \\ x + 2y + 4z = 20. \end{cases}$$

La segunda ecuación expresa la cantidad de sustancia después de multiplicar por diez la igualdad $0{,}1x + 0{,}2y + 0{,}4z = 2$. Hemos supuesto que los volúmenes se suman; es una condición del modelo, que deberá comprobarse al aplicarlo a una mezcla real. Las incógnitas deben ser no negativas, aunque por un momento conviene separar esa restricción del problema de resolver las igualdades.

Restar la primera ecuación de la segunda da $y + 3z = 10$. Si elegimos $z = t$, quedan $y = 10 - 3t$ y $x = 2t$, por lo que todas las soluciones algebraicas tienen la forma $(2t, 10 - 3t, t)$. Cada valor de t produce una terna que satisface las dos ecuaciones, y toda terna que las satisface aparece de esa manera. Las restricciones físicas seleccionan $0 \le t \le 10/3$. Los datos permiten una familia de mezclas: para $t = 1$ obtenemos $(2, 7, 1)$, mientras que para $t = 2$ obtenemos $(4, 4, 2)$.

Una medición adicional puede decidir entre ellas. Supongamos que los costos por litro son uno, dos y tres unidades monetarias y que el presupuesto utilizado fue dieciocho. La nueva ecuación es $x + 2y + 3z = 18$. Al restarla de la ecuación de concentración obtenemos $z = 2$, que selecciona la mezcla $(4, 4, 2)$. El procedimiento ha cambiado el aspecto de las ecuaciones para hacer visible la información que contienen. Necesitamos entender cuándo ese cambio conserva todas las soluciones y cómo organizarlo cuando hay muchas incógnitas.

1.1. Qué cuenta como solución

Una **ecuación lineal** en las incógnitas $x_1, \dots, x_n$ es una igualdad $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$, donde los coeficientes a_j y el término independiente b están fijados en el dominio numérico elegido. Se permiten coeficientes cero, incluso todos ellos. Un **sistema lineal** reúne un número finito de esas ecuaciones, que han de satisfacerse simultáneamente. Para m ecuaciones escribiremos

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

El primer índice de a_{ij} indica la ecuación y el segundo la incógnita. Una solución es una **terna, pareja o, en general, n-tupla ordenada** $(u_1, \dots, u_n)$ del dominio elegido que hace verdaderas todas las igualdades al sustituir $x_j = u_j$. Mantendremos fijo el orden de las incógnitas. El conjunto de soluciones puede ser vacío; cuando no lo es, diremos que el sistema es **compatible** o **consistente**.

En el problema del laboratorio el dominio algebraico es $\mathbb{R}$ y luego imponemos desigualdades. En otros problemas importa que los valores sean racionales o complejos. Resolver $2x = 1$ sobre $\mathbb{Q}$ da $x = 1/2$; exigir además que x sea entero cambia el problema, pues esa solución deja de estar permitida. La eliminación que estudiaremos permite dividir por cualquier coeficiente no nulo, operación disponible en $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, pero no dentro de los enteros.

El marco algebraico común es un **cuerpo** $\mathbb{F}$: un conjunto con suma y producto conmutativos y asociativos, con elementos 0 y 1 distintos, inversos aditivos, inversos multiplicativos de los elementos no nulos y la ley distributiva. Esas propiedades bastan para los argumentos del capítulo. Puede

seguirse la primera lectura tomando $\mathbb{F} = \mathbb{R}$; al usar geometría o desigualdades lo indicaremos expresamente. Los ejemplos numéricos se calcularán sobre $\mathbb{R}$, salvo indicación contraria; los resultados y las demostraciones formulados sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ conservan ese alcance general. El ejercicio 27 muestra por qué, en un cuerpo finito, "tener una incógnita libre" requiere una conclusión distinta de "tener infinitas soluciones".

La palabra lineal se refiere a las incógnitas declaradas. Si t es un parámetro fijo, $tx + y = 1$ es lineal en x, y; $xy = 1$ y $x^2 + y = 1$ no tienen la forma definida. Una expresión como $x + y/x = 2$ tampoco la tiene: además de la división por una incógnita, impone una restricción de dominio que no podemos olvidar al transformarla.

Un sistema es **homogéneo** cuando todos sus términos independientes son cero. La tupla $(0, \ldots, 0)$ es entonces solución y se llama solución trivial. "Homogéneo" no significa que esa sea la única solución: la ecuación $x - y = 0$ tiene todas las parejas (t, t). Un sistema no homogéneo tiene al menos un término independiente no nulo; puede tener ninguna, una o varias soluciones.

1.2. Consecuencias que conservan la información

En la mezcla inicial reemplazamos la segunda ecuación por la diferencia entre ambas. Toda solución anterior satisface esa diferencia. Para asegurar que no aparecen soluciones nuevas hace falta recuperar también la ecuación reemplazada: basta sumar la primera a la diferencia. La posibilidad de regresar es lo que vuelve segura la transformación.

Dos sistemas en las mismas incógnitas ordenadas y sobre el mismo cuerpo son **equivalentes** si tienen el mismo conjunto de soluciones. Son operaciones elementales sobre sus ecuaciones:

1. intercambiar dos ecuaciones;
2. multiplicar una ecuación completa por un escalar no nulo;
3. reemplazar una ecuación por ella misma más un múltiplo de otra ecuación distinta, conservando las demás.

La tercera regla se escribe $E_i \leftarrow E_i + cE_j$, con $i \neq j$. La flecha describe una instrucción: ambos miembros de E_i cambian usando los valores actuales de las dos ecuaciones. No es un signo de equivalencia lógica entre fórmulas. Si se ejecutan varias instrucciones, se leerán en el orden indicado, salvo que se diga que usan simultáneamente las ecuaciones anteriores.

Proposición 1.1. Una operación elemental transforma un sistema lineal en otro equivalente. Una sucesión finita de operaciones elementales también conserva su conjunto de soluciones.

Demostración. Intercambiar ecuaciones sólo cambia el orden de condiciones que ya se exigían simultáneamente. Multiplicar una igualdad por $c \neq 0$ conserva su verdad en ambos sentidos, porque podemos multiplicar la nueva igualdad por c^{-1}.

Para la tercera operación, escribamos las ecuaciones implicadas como $L_i(x) = b_i$ y $L_j(x) = b_j$, donde L_i y L_j son sus respectivas expresiones lineales. Una tupla que satisface las ecuaciones antiguas cumple $L_i(x) + cL_j(x) = b_i + cb_j$, de modo que satisface el sistema nuevo. Recíprocamente, una solución nueva sigue satisfaciendo $L_j(x) = b_j$, porque esa ecuación se conservó. Restarla c veces de la nueva ecuación recupera $L_i(x) = b_i$. Las otras condiciones permanecen intactas. Tenemos las dos inclusiones entre conjuntos de soluciones y, por ello, su igualdad. Al repetir este razonamiento, cada sistema de una sucesión finita tiene las mismas soluciones que el anterior y que el inicial. □

Las dos restricciones de las reglas tienen una función concreta. Multiplicar $x = 1$ por cero deja $0 = 0$ y admite todos los valores de x. Reemplazar a la vez E_1 y E_2 por su suma conserva sólo una condición repetida: de $x = 1$, $y = 2$ pasaríamos a dos copias de $x + y = 3$, con muchas más soluciones. Que cada nueva ecuación sea consecuencia de las antiguas garantiza un sentido de inclusión; la recuperación de las antiguas garantiza el otro.

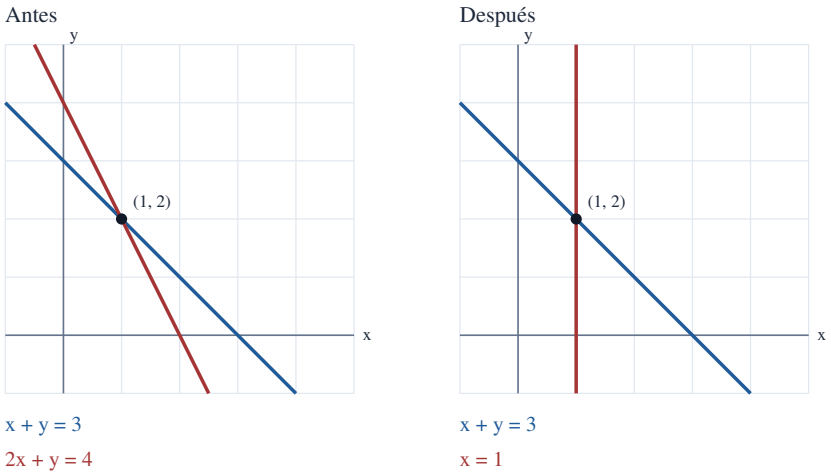


Figura 1.1. Reemplazar la segunda ecuación por la segunda menos la primera cambia una recta y conserva la intersección del sistema. Las rectas están representadas con la misma escala en ambos ejes.

1.3. Eliminar sin perder la vuelta

Consideremos un sistema en el que ninguna incógnita esté ya aislada:

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ 2x + 3y + z = 11, \\ x - y + 2z = 5. \end{cases}$$

El coeficiente de x en la primera ecuación vale uno. Lo usamos para cancelar x en las otras dos: $E_2 \leftarrow E_2 - 2E_1$ y $E_3 \leftarrow E_3 - E_1$. El sistema equivalente es

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ y - z = -1, \\ -2y + z = -1. \end{cases}$$

El coeficiente de y en la segunda ecuación permite continuar, sin tocar la primera. La instrucción $E_3 \leftarrow E_3 + 2E_2$ produce $-z = -3$. El sistema quedó escalonado:

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ y - z = -1, \\ -z = -3. \end{cases}$$

La última ecuación da $z = 3$, la segunda da $y = 2$ y la primera da $x = 1$. Este recorrido desde abajo se llama **sustitución regresiva**. Sustituir $(1, 2, 3)$ en el sistema original comprueba $6 = 6$, $11 = 11$ y $5 = 5$; la equivalencia de todos los pasos asegura además que no hemos dejado otra solución fuera.

El primer coeficiente no nulo de una ecuación, al leer las incógnitas en el orden fijado, se llama su **pivote**. Diremos que un sistema está **escalonado respecto de sus coeficientes** cuando las ecuaciones sin coeficientes no nulos están al final y la incógnita del pivote de cada ecuación restante aparece más a la derecha que la del pivote anterior. En particular, debajo de un pivote los coeficientes de su incógnita son cero. Las ecuaciones finales pueden ser identidades $0 = 0$ o contradicciones $0 = c$ con $c \neq 0$; el término independiente no cuenta como coeficiente de una incógnita.

Un pivote necesita ser distinto de cero porque lo usamos como divisor. Para eliminar un coeficiente d mediante un pivote $a \neq 0$ reemplazamos la ecuación correspondiente por ella misma menos d/a veces la ecuación del pivote. La elección del múltiplo se obtiene al exigir $d - (d/a)a = 0$.

La primera ecuación disponible puede comenzar con cero. En

$$\begin{cases} y + z = 3, \\ 2x - y + z = 1, \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

intercambiamos la primera y la tercera. Restar dos veces la nueva primera de la segunda deja $-3y + 3z = -3$; la tercera es $y + z = 3$. Podemos usar la tercera como siguiente ecuación pivote, mediante un nuevo intercambio, y eliminar y: $-3y + 3z = -3$ más tres veces $y + z = 3$ da $6z = 6$. Se obtiene $z = 1$, $y = 2$, $x = 1$. El cero inicial exigía escoger otra ecuación, no anunciaba incompatibilidad.

1.4. Por qué el procedimiento termina

El ejemplo sugiere un algoritmo que sirve también si $m \neq n$. Conservamos arriba las ecuaciones que ya tienen pivote y trabajamos sólo con las restantes. Entre estas buscamos la incógnita más a la izquierda con algún coeficiente no nulo. Si existe, intercambiamos ecuaciones para colocar arriba una con ese coeficiente y la usamos para anularlo en todas las ecuaciones que quedan debajo. Después dejamos fija la ecuación elegida y repetimos el proceso en las inferiores.

La elección de la incógnita más a la izquierda hace que todas las ecuaciones de la parte activa tengan coeficientes cero en las posiciones anteriores. Por eso sus combinaciones no vuelven a introducir incógnitas ya eliminadas. Cada paso fija una ecuación adicional y desplaza estrictamente a la derecha la posición del pivote. Habrá a lo sumo $\min(m, n)$ pasos de elección de pivote. Cada paso utiliza un número finito de operaciones elementales; el proceso termina cuando no quedan ecuaciones activas o sus coeficientes son todos cero.

Teorema 1.2 (eliminación). Todo sistema de un número finito de ecuaciones lineales en un número finito de incógnitas sobre un cuerpo puede transformarse mediante operaciones elementales en un sistema escalonado equivalente.

Demostración. El procedimiento anterior proporciona una construcción finita. El pivote elegido es no nulo; cada anulación usa la operación $E_i \leftarrow E_i - (d/a)E_j$ con ecuaciones distintas. Los intercambios y anulaciones son elementales y conservan soluciones por la proposición 1.1. Las posiciones de los pivotes avanzan estrictamente a la derecha y las ecuaciones con coeficientes nulos quedan al final, de modo que el resultado cumple la definición de sistema escalonado. □

No hemos supuesto que el número de ecuaciones sea el de incógnitas. Tampoco hemos necesitado que cada incógnita tenga un pivote. La información que falte aparecerá al reconstruir las soluciones.

1.5. Contradicciones, identidades y libertad

Un sistema escalonado puede terminar en una igualdad imposible. Por ejemplo,

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1, \\ 2x + 4y - 2z = 3 \end{cases}$$

se transforma por $E_2 \leftarrow E_2 - 2E_1$ en una primera ecuación intacta y $0 = 1$. No existe ninguna tupla que satisfaga ambas. En cambio, si el segundo término independiente fuese 2, la misma operación produciría $0 = 0$. Esa identidad no exige que ninguna incógnita sea cero; no añade una restricción.

En un sistema escalonado, las incógnitas que corresponden a pivotes se llaman **principales**. Las restantes se llaman **libres**. “Libre” significa que podemos elegir su valor arbitrariamente en el cuerpo y resolver después, desde la última ecuación, las incógnitas principales, siempre que no haya contradicción.

Consideremos

$$\begin{cases} x + 2y - z + w = 3, \\ y + z - 2w = 1. \end{cases}$$

Las principales son x, y y las libres son z, w. Elegir $z = s$ y $w = t$ da $y = 1 - s + 2t$ y luego $x = 1 + 3s - 5t$. La solución completa es

$$(x, y, z, w) = (1 + 3s - 5t,\ 1 - s + 2t,\ s,\ t), \qquad s, t \in \mathbb{F}.$$

Una parametrización completa tiene dos obligaciones: cada elección de parámetros debe producir una solución y toda solución debe quedar representada. Aquí la primera se comprueba sustituyendo en ambas ecuaciones. Para la segunda, cualquier solución tiene ciertos valores $s = z$ y $t = w$; la segunda ecuación fuerza el valor escrito de y y la primera fuerza el de x. Además, los parámetros se recuperan leyendo las dos últimas coordenadas, por lo que elecciones distintas producen soluciones distintas.

Teorema 1.3 (lectura de un sistema escalonado). Sea un sistema escalonado con n incógnitas y r pivotes.

- Si contiene una ecuación $0 = c$ con $c \neq 0$, es incompatible.
- Si no contiene contradicciones, cada elección de las $n - r$ incógnitas libres determina una única solución.

Demostración. Una contradicción no puede ser satisfecha por ninguna tupla. Supongamos que todas las ecuaciones sin coeficientes son $0 = 0$. Fijemos valores arbitrarios de las incógnitas libres. En la última ecuación con pivote sólo quedan por decidir su incógnita principal y valores ya fijados; su coeficiente no nulo permite resolverla de forma única. Al subir, las principales situadas a la derecha ya fueron determinadas y las libres ya estaban fijadas, de modo que la siguiente ecuación también determina de forma única su incógnita principal. Continuamos hasta la primera. Las ecuaciones se satisfacen por construcción y las identidades finales no añaden condiciones. El mismo recorrido muestra que ninguna otra elección de las principales podría acompañar a los valores libres fijados. □

Sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ se deduce que hay ninguna, una o infinitas soluciones: en el caso compatible, hay una si $r = n$ e infinitas si queda al menos una variable libre. Sobre un cuerpo de q elementos hay, en el caso compatible, q^{n-r} soluciones, porque cada una de las $n - r$ elecciones tiene q posibilidades y la parametrización no repite soluciones.

El número r es nuestro primer encuentro con el **rango**: cuenta los pivotes que han quedado al separar las restricciones. En este capítulo lo leemos en un escalonamiento concreto. La afirmación de que ese número no depende de las elecciones de eliminación tendrá su demostración al formalizar matrices en C02; aquí no la usamos para justificar el algoritmo ni la clasificación.

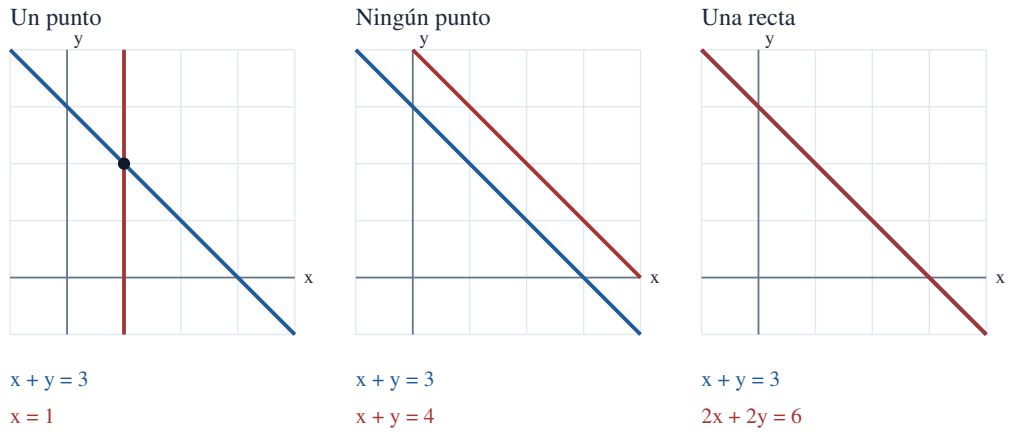


Figura 1.2. Para dos ecuaciones reales en dos incógnitas, las rectas pueden compartir un punto, ninguno o una recta entera. Una ecuación cuyos coeficientes sean ambos cero debe examinarse aparte: puede describir todo el plano o el conjunto vacío.

1.6. Más ecuaciones no siempre dan más información

Las tres ecuaciones

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ 2x - y = 0, \\ 3x = 3 \end{cases}$$

tienen la solución única $(1, 2)$. La tercera es la suma de las dos primeras y no elimina ninguna solución que ellas admitieran. Si reemplazamos su término independiente por 4, las dos primeras siguen forzando $(1, 2)$, pero la tercera exige $3 = 4$. El sistema se vuelve incompatible. Contar ecuaciones sin examinar sus relaciones no permite decidir qué ocurre.

Con más incógnitas que ecuaciones, el teorema 1.3 sí proporciona una conclusión: si un sistema es compatible y $n > m$, queda al menos una variable libre, porque puede haber a lo sumo m pivotes. Sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ tendrá infinitas soluciones. La compatibilidad es indispensable: las ecuaciones $x + y + z = 0$ y $x + y + z = 1$ tienen más incógnitas que ecuaciones y ninguna solución.

Sobre $\mathbb{R}$, una ecuación no degenerada en dos incógnitas describe una recta y una en tres describe un plano. Resolver el sistema consiste en hallar su intersección común. Dos planos no paralelos se cortan en una recta; una tercera ecuación puede seleccionar un punto, contener toda esa recta o no tocarla. La figura 1.3 muestra un caso en el que una parametrización describe la intersección sin depender de la perspectiva del dibujo.

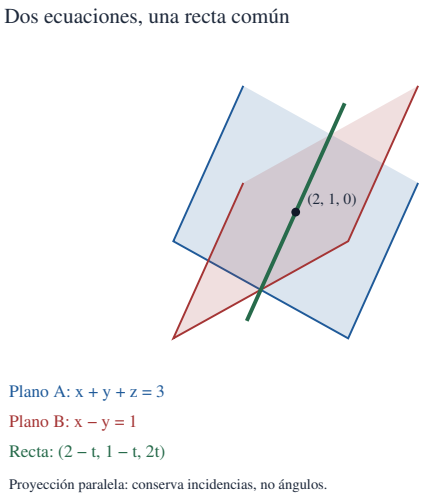


Figura 1.3. Los parches de dos planos se encuentran en la recta $(2 - t, 1 - t, 2t)$. La perspectiva conserva la incidencia, pero no los ángulos ni las longitudes espaciales; las ecuaciones verifican la intersección completa, que continúa fuera de la ventana dibujada.

La compatibilidad exige una intersección común a todas las ecuaciones. Comprobar que cada pareja de ecuaciones tiene soluciones deja todavía una posibilidad que un dibujo de dos planos no revela. Consideremos en $\mathbb{R}^3$ los planos

$$P_1 : \ x = 0, \qquad P_2 : \ y = 0, \qquad P_3 : \ x + y = 1.$$

Los dos primeros comparten la recta $(0, 0, t)$. El primero y el tercero comparten $(0, 1, t)$, mientras que el segundo y el tercero comparten $(1, 0, t)$, con $t \in \mathbb{R}$. Ninguna de esas intersecciones está vacía, pero son tres rectas distintas. Un punto que perteneciera a los tres planos tendría $x = y = 0$ por las dos primeras condiciones y $x + y = 1$ por la tercera, lo que exigiría $0 = 1$. Las soluciones de una pareja no tienen por qué servir a las demás ecuaciones.

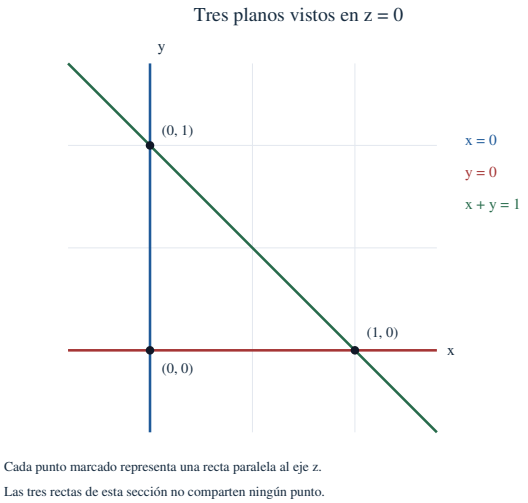


Figura 1.3a. La sección $z = 0$ permite ver las tres intersecciones por parejas. Como ninguna ecuación depende de z, cada punto señalado se prolonga en una recta paralela al eje z. Si existiera un punto común en el espacio, su proyección $(x, y, 0)$ pertenecería a las tres rectas dibujadas; las ecuaciones prueban que no existe.

En este ejemplo cada ecuación es compatible con las otras por separado, pero el tercer dato contradice lo que las dos primeras exigen conjuntamente. Restar de $x + y = 1$ las ecuaciones $x = 0$ y $y = 0$ produce directamente $0 = 1$. El cálculo identifica qué información entra en conflicto y muestra por qué revisar parejas no basta cuando el problema exige satisfacer todas las condiciones a la vez.

1.7. Lo que cambia al mover los datos

Los parámetros pueden cambiar tanto el número como la naturaleza de las soluciones. Estudiemos, sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2x + 3y + 4z = 5, \\ 3x + 4y + (a + 5)z = b. \end{cases}$$

Restar dos veces la primera de la segunda da $y + 2z = 1$. Restar de la tercera la suma de las dos ecuaciones originales da $az = b - 7$; esa última instrucción puede realizarse como dos operaciones elementales sucesivas, restando primero la primera y luego la segunda original, antes de modificar esta última. Una secuencia inequívoca es $E_3 \leftarrow E_3 - E_1$, $E_3 \leftarrow E_3 - E_2$, $E_2 \leftarrow E_2 - 2E_1$. Queda

$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ y + 2z = 1, \\ az = b - 7. \end{cases}$$

Si $a \neq 0$, la última igualdad fija $z = (b - 7)/a$, y las anteriores dan $y = 1 - 2z$ y $x = 1 + z$. Si $a = 0$ y $b \neq 7$, tenemos una contradicción. Si $a = 0$ y $b = 7$, $z = t$ queda libre y todas las soluciones son $(1 + t, 1 - 2t, t)$.

Dividir por a al comienzo habría borrado los dos casos en los que $a = 0$. Cuando el pivote depende de un parámetro, la división obliga a separar el caso donde se anula. En un problema numérico el pivote es conocido; en una familia, su posible desaparición forma parte del problema.

El escalonamiento es un procedimiento exacto. Si se trabaja con mediciones redondeadas, decidir si un coeficiente es cero o sólo muy pequeño exige otras herramientas. Podemos conservar fracciones para evitar redondeos artificiales en nuestros ejemplos; no deduciremos de esa exactitud algebraica una garantía de estabilidad numérica.

Conservar una prueba de la contradicción. En la familia anterior, los valores $a = 0$ y $b = 8$ producen un sistema incompatible. Podemos comprobarlo sin calcular ninguna incógnita: sus tres ecuaciones son

$$\begin{aligned} E_1: &\quad x + y + z = 2, \\ E_2: &\quad 2x + 3y + 4z = 5, \\ E_3: &\quad 3x + 4y + 5z = 8. \end{aligned}$$

El miembro izquierdo de E_3 es la suma de los de E_1 y E_2, mientras que los términos independientes no cumplen esa relación: $8 \neq 2 + 5$. La combinación $E_3 - E_1 - E_2$ exige $0 = 1$. Para revisar esta conclusión basta conocer las ecuaciones originales y los tres multiplicadores $-1, -1, 1$; no necesitamos reconstruir las operaciones que llevaron a descubrirlos.

Llamaremos **certificado de incompatibilidad** de un sistema a una lista de escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ que, al combinar las ecuaciones completas, produzca $0 = 1$. En términos de los coeficientes, esto significa

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} = 0 \quad \text{para cada } j = 1, \ldots, n, \qquad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i = 1.$$

La primera condición cancela todas las incógnitas; la segunda conserva un término independiente que hace imposible la igualdad. Si una combinación produce $0 = c$ con $c \neq 0$, dividir todos sus multiplicadores por c la normaliza a $0 = 1$. Esa división es válida en cualquier cuerpo.

Teorema 1.3a (certificados de incompatibilidad). Un sistema lineal finito sobre un cuerpo es incompatible si y sólo si admite un certificado de incompatibilidad.

Demostración. Supongamos primero que existe un certificado y que u fuera una solución. Cada igualdad $\sum_j a_{ij} u_j = b_i$ sería verdadera. Multiplicarlas por λ_i y sumarlas daría

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} \right) u_j = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i.$$

Las condiciones del certificado convierten el miembro izquierdo en cero y el derecho en uno. Como $0 \neq 1$ en un cuerpo, no puede existir tal solución.

Para la otra dirección, escalonemos un sistema incompatible. El teorema 1.3 asegura que aparece una ecuación $0 = c$ con $c \neq 0$: si no apareciera ninguna, la sustitución regresiva construiría una solución. Necesitamos comprobar que esa ecuación contradictoria conserva una expresión como combinación de las originales. Al comenzar, cada ecuación es una combinación de ellas: basta poner uno en su propia posición y cero en las restantes. Intercambiarlas sólo intercambia esas listas de multiplicadores; multiplicar una ecuación por un escalar multiplica su lista; sumar a una ecuación un múltiplo de otra suma ese mismo múltiplo de las dos listas. Por inducción sobre las operaciones realizadas, cada ecuación obtenida sigue siendo una combinación de las originales.

La fila que expresa $0 = c$ proporciona, por tanto, multiplicadores que cancelan todos los coeficientes y producen c en el segundo miembro. Multiplicarlos por c^{-1} da el certificado requerido. □

El argumento describe también una forma de conservar la explicación de un fallo durante la eliminación. Junto a cada ecuación podemos anotar su lista de multiplicadores respecto de las originales y actualizarla con las mismas instrucciones. Si al final aparece una contradicción, la lista que la acompaña señala exactamente qué combinación de datos resulta imposible. El descubrimiento puede haber requerido muchas operaciones, pero la verificación del certificado se reduce a comprobar las dos condiciones escritas arriba.

En la familia de §1.7, la combinación $E_3 - E_1 - E_2$ produce $az = b - 7$. Cuando $a = 0$ y $b \neq 7$, los multiplicadores $(-1, -1, 1)/(b - 7)$ forman un certificado. Para $a \neq 0$ esa combinación conserva el término az y sirve para determinar z; no certifica incompatibilidad. La misma cancelación puede descubrir una restricción útil o una contradicción según el valor de los parámetros.

El certificado conserva los multiplicadores de una consecuencia imposible; no exige que podamos recuperar de esa sola igualdad todas las ecuaciones originales. El sistema incompatible y la ecuación $0 = 1$ tienen, de hecho, el mismo conjunto vacío de soluciones. Esto no convierte la sustitución de

cualquier sistema por una combinación de sus ecuaciones en una regla que conserve soluciones: para un sistema compatible, una consecuencia aislada puede admitir soluciones nuevas, como vimos en §1.2. Para refutar la compatibilidad basta que ninguna solución pudiera evitar la contradicción exhibida.

1.8. Una solución particular y todas sus variaciones

En el sistema de dos ecuaciones del laboratorio, la parametrización también puede escribirse

$$(x, y, z) = (0, 10, 0) + t(2, -3, 1).$$

Sumamos y multiplicamos tuplas coordenada a coordenada. La primera terna es una solución particular. La terna $(2, -3, 1)$ satisface las mismas ecuaciones con términos independientes cero: sus coordenadas suman cero y $2 + 2(-3) + 4 = 0$. Al añadir una cantidad de esa terna, la cantidad total y la concentración permanecen constantes.

Proposición 1.4. Fijemos los coeficientes de un sistema y supongamos que tiene una solución particular p. Una tupla x es solución de ese sistema si y sólo si $x = p + h$, donde h satisface el sistema homogéneo con los mismos coeficientes.

Demostración. Escribamos $p = (p_1, \dots, p_n)$ y $x = (x_1, \dots, x_n)$. Si ambas tuplas satisfacen la ecuación i, restar sus igualdades da $\sum_j a_{ij}(x_j - p_j) = b_i - b_i = 0$. Esto vale para cada i, de modo que $h = x - p$ satisface el sistema homogéneo. Recíprocamente, si $\sum_j a_{ij} h_j = 0$ para cada i, entonces

$$\sum_j a_{ij}(p_j + h_j) = \sum_j a_{ij} p_j + \sum_j a_{ij} h_j = b_i.$$

Por ello $p + h$ satisface todas las ecuaciones del sistema original. $\square$

La misma distributividad muestra que la suma de dos soluciones homogéneas y cualquier múltiplo escalar de una solución homogénea vuelven a ser soluciones homogéneas. Para dos soluciones no homogéneas, en cambio, la suma satisface ecuaciones con términos independientes $2b_i$, que pueden diferir de los originales. El ejercicio 17 precisa qué combinaciones sí conservan esos datos.

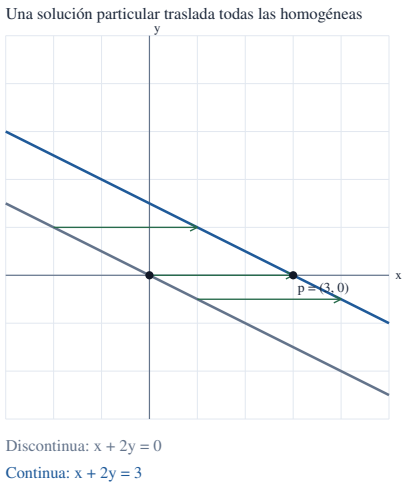


Figura 1.4. Cada solución de $x + 2y = 3$ se obtiene trasladando por $(3, 0)$ una solución de $x + 2y = 0$. Las flechas unen puntos correspondientes; el origen pertenece a la recta homogénea.

La eliminación ha permitido distinguir información contradictoria, redundante y suficiente para determinar incógnitas. Una vez elegida una solución particular, la libertad restante queda expresada por las variaciones que hacen cero todas las ecuaciones homogéneas. Esa descripción conserva el conjunto completo de soluciones, incluso cuando una lista de valores aislados ya no puede representarlo.

1.9. Ejercicios

Los primeros problemas consolidan la lectura y el cálculo; los últimos exigen construir ejemplos, justificar procedimientos y combinar ideas. Todos se resuelven con lo desarrollado en este capítulo. Trabajar sobre $\mathbb{R}$ salvo indicación contraria.

Lectura, eliminación y parametrización. **1.** Determinar cuáles de las expresiones $3x-2y=4$, $xy=4$, $tx+y=1$, $x+1/y=2$ y $0x+0y=5$ son ecuaciones lineales en x, y, considerando t fijo. Para las lineales, indicar cuáles pueden ser incompatibles.

2. Resolver $x+2y=7$, $3x-y=7$ e indicar las operaciones y la verificación en las ecuaciones originales.

3. Resolver $y+z=4$, $x+y-z=1$, $2x-y+z=2$ usando un intercambio inicial.

4. Parametrizar las soluciones de $2x-y+z=4$, $4x-2y+2z=8$ y probar que la parametrización es completa.

5. Justificar la incompatibilidad de $x-y+2z=2$, $3x-3y+6z=5$ sin buscar valores de las incógnitas.

6. Resolver $x+y+z+w=2$, $2x+3y+z+4w=5$. Identificar dos variables libres y verificar que pueden elegirse independientemente.

7. Resolver $x+y=4$, $2x-y=2$, $3x=6$. Repetir si la última ecuación se cambia a $3x=7$.

8. Resolver el sistema homogéneo $x+2y-z=0$, $2x+4y-2z=0$. Dar dos soluciones distintas no nulas y explicar por qué no son todas.

9. Resolver $x-y+z=0$, $y+z-w=0$ en cuatro incógnitas. Escribir cada solución como combinación de dos tuplas fijas.

10. Describir las soluciones de un sistema en tres incógnitas cuyas ecuaciones son todas $0=0$. ¿Qué ocurre si una de ellas se cambia por $0=2$?

Parámetros y control de operaciones. **11.** Para $2x+y=1$, $4x+(t+2)y=3$, clasificar todos los valores de t y dar las soluciones cuando existan.

12. Estudiar $x+y=1$, $ax+y=b$ para todos los parámetros reales a, b. Explicar cómo se ven geométricamente los casos excepcionales.

13. Una solución propuesta de $ax+y=1$, $x+y=2$ comienza con $x=(1-y)/a$ y concluye que no puede estudiarse $a=0$. Localizar la falla y resolver la familia completa.

14. Se conserva E_j y se reemplaza E_i por cE_i+dE_j, con $i\neq j$. Probar que $c\neq 0$ garantiza equivalencia para cualquier sistema. Mostrar que con $c=0$ esa garantía falla.

15. Sobre $\mathbb{R}$, reemplazar simultáneamente E_1, E_2 por E_1+E_2, E_1-E_2 conserva soluciones. Demostrarlo recuperando las ecuaciones originales. Explicar qué falla si $1+1=0$ en el cuerpo.

16. Dos tuplas p, q satisfacen el mismo sistema no homogéneo. Probar que $p-q$ satisface el homogéneo asociado. Dar un ejemplo en que $p+q$ no satisfaga el sistema original.

17. Si p, q son soluciones del mismo sistema, probar que $\lambda p+(1-\lambda)q$ es solución para todo escalar λ. Si el sistema es no homogéneo, probar que $\alpha p+\beta q$ es solución si y sólo si $\alpha+\beta=1$.

18. Probar que un sistema real con dos soluciones distintas tiene infinitas soluciones, sin volver a eliminar. Identificar dónde intervienen que las soluciones sean distintas y que el cuerpo sea infinito.

Construcción, geometría y transferencia. **19.** Construir sistemas lineales en tres incógnitas cuyos conjuntos de soluciones sean: el punto $(1,2,3)$; la recta $(1+t,2-t,3)$; el plano $x+y+z=1$; el conjunto vacío. Probar cada igualdad de conjuntos.

20. Los planos $x=0$, $y=0$ y $x+y=1$ se cortan dos a dos. Probar que no tienen un punto común a los tres y describir cada intersección por parejas.

21. Hallar todos los polinomios $p(t)=at^2+bt+c$ que satisfacen $p(0)=2$, $p(1)=3$ y $p(2)=8$. Explicar por qué el problema es lineal aunque aparezca t^2.

22. Tres flujos reales x, y, z satisfacen $x-y=2$, $y-z=1$, $x-z=3$. Determinar todos los flujos. Indicar cuáles son no negativos. Repetir el diagnóstico si la última diferencia prescrita es 4.

23. Sin resolver primero las incógnitas, hallar la condición sobre b_1, b_2, b_3 para que $x+y=b_1$, $y+z=b_2$, $x+2y+z=b_3$ sea compatible. Dar después todas las soluciones y un certificado de incompatibilidad cuando falle la condición.

24. Sea un sistema compatible y una ecuación adicional $L(x) = c$. Probar que el nuevo sistema tiene exactamente las mismas soluciones si y sólo si toda solución antigua satisface la ecuación adicional. Explicar por qué “la ecuación es verdadera para una solución” no basta.

25. Resolver sobre $\mathbb{C}$ el sistema $x + iy = 1$, $ix + y = 0$. Verificar ambas igualdades.

26. Resolver $x + y = 1$, $x - y = 0$ sobre $\mathbb{Q}$, sobre $\mathbb{R}$ y con la condición de que ambas incógnitas sean enteras. Explicar el papel de dividir por dos.

27. En $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ se suma y multiplica módulo dos. Verificar brevemente que es un cuerpo y resolver $x + y + z = 0$. Enumerar las soluciones y relacionar su número con las variables libres.

28. Dada cualquier tupla $p \in \mathbb{R}^n$, probar que el sistema de todas las ecuaciones $x_j = p_j$ tiene solución única. Construir en cambio un sistema de $n + 1$ ecuaciones y n incógnitas con esa misma solución única y otro incompatible.

29. Una combinación de las ecuaciones de un sistema produce $0 = 1$. Probar que el sistema es incompatible. Probar la recíproca para un sistema lineal finito sobre un cuerpo usando la eliminación.

30. Si un sistema homogéneo tiene n incógnitas y menos de n ecuaciones, probar que tiene una solución no trivial. ¿Cuántas soluciones hay si el cuerpo tiene q elementos y un escalonamiento tiene r pivotes?

31. Sobre $\mathbb{R}$, encontrar una condición necesaria y suficiente sobre a, b, c para que la expresión $ax + by + cz$ tenga el mismo valor en todas las mezclas algebraicas $(x, y, z) = (2t, 10 - 3t, t)$ del problema inicial. Explicar qué ocurre al pedir que ese valor sea d.

32. Un sistema ya escalonado es $x + 2y + z = 5$, $y - z = 1$. Un estudiante escribe $z = t$, $y = 1 - t$, $x = 3 + t$. Diagnosticar y reparar su parametrización. Explicar por qué verificar una sola solución no certifica una fórmula para todas.

Certificados y compatibilidad conjunta. **33.** Sobre $\mathbb{R}$, considerar las ecuaciones $E_1 : x+y = 1$, $E_2 : 2x + 2y = 3$, $E_3 : x - y = 0$ y $E_4 : 4x + 4y = 6$. Hallar todos los certificados normalizados $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ que producen $0 = 1$. ¿Es único el certificado? Explicar por qué certificados distintos pueden demostrar la misma incompatibilidad.

34. Para números reales a, b, c, estudiar los planos $x = a$, $y = b$ y $x + y = c$ en $\mathbb{R}^3$. Describir todas las intersecciones por parejas y la intersección de los tres. Cuando el sistema sea incompatible, dar un certificado normalizado; cuando sea compatible, parametrizar todas sus soluciones. Explicar por qué ninguna elección de a, b, c elimina las intersecciones por parejas.

1.10. Soluciones razonadas

1. Son lineales $3x - 2y = 4$, $tx + y = 1$ para cada t fijo y $0x + 0y = 5$. La primera admite, por ejemplo, $(4/3, 0)$; la segunda admite $(0, 1)$ para cualquier t. La última es incompatible porque su miembro izquierdo siempre vale cero. El producto xy no es una combinación con coeficientes fijos de x, y; $1/y$ tampoco y además exige $y \neq 0$. El parámetro fijo no actúa como incógnita.

2. Restar tres veces la primera ecuación de la segunda da $-7y = -14$, de donde $y = 2$. La primera exige $x = 3$. Al sustituir, $3 + 2(2) = 7$ y $3(3) - 2 = 7$. La operación fue elemental y la sustitución regresiva determinó ambas incógnitas de forma única.

3. Intercambiar las dos primeras ecuaciones deja $x + y - z = 1$ arriba. Reemplazar la tercera por ella misma menos dos veces la primera da $-3y + 3z = 0$. Conservar como segunda $y + z = 4$ y sumar tres veces esta ecuación a la tercera produce $6z = 12$. Así $z = 2$, $y = 2$ y $x = 1$. En el sistema original los miembros izquierdos valen 4, 1 y 2. Cada paso fue reversible, por lo que la solución es única.

4. La segunda menos dos veces la primera es $0 = 0$. Elegir $y = s$, $z = t$ fuerza $x = 2 + s/2 - t/2$. Toda pareja real (s, t) da una solución porque $2x - y + z = 4$ y su doble vale 8. Recíprocamente, cualquier solución tiene ciertos valores $s = y$, $t = z$, y la primera ecuación obliga al valor indicado de x. No se puede concluir $y = z = 0$ de la identidad final.

5. La segunda ecuación menos tres veces la primera produce $0 = 5 - 6 = -1$. Una solución tendría que satisfacer esa igualdad falsa. La incompatibilidad se debe a los términos independientes: los coeficientes de la segunda son exactamente el triple de los de la primera.

6. La operación $E_2 \leftarrow E_2 - 2E_1$ deja $y - z + 2w = 1$. Tomar $z = s$, $w = t$ da $y = 1 + s - 2t$ y $x = 1 - 2s + t$. No queda ninguna ecuación que restrinja s, t. Sustituyendo, la primera suma es 2 y

la segunda es $2-4s+2t+3+3s-6t+s+4t=5$. Cualquier solución recupera sus parámetros como $s=z$, $t=w$, lo que prueba exhaustividad e independencia de las elecciones.

7. La segunda menos dos veces la primera da $-3y=-6$, de donde $y=2$ y $x=2$. La tercera exige $3x=6$ y se cumple; de hecho es la suma de las dos primeras. Cambiarla por $3x=7$ exige $6=7$ en la única pareja que admiten las dos primeras. También puede certificarse restando de la tercera la suma de las primeras: queda $0=1$.

8. La segunda ecuación se elimina completamente. Si $y=s$, $z=t$, entonces $x=-2s+t$. Dos soluciones no nulas son $(-2,1,0)$ y $(1,0,1)$. Sus valores concretos no agotan la familia $(-2s+t,s,t)$; por ejemplo, variar s manteniendo $t=0$ ya da infinitas soluciones distintas. Cada solución tiene esos valores de s,t, y la ecuación fuerza la primera coordenada.

9. Fijar $z=s$, $w=t$ da $y=t-s$ y luego $x=t-2s$. Por tanto,

$$(x,y,z,w)=s(-2,-1,1,0)+t(1,1,0,1).$$

Las dos tuplas fijas satisfacen ambas ecuaciones homogéneas, por lo que todas sus combinaciones las satisfacen. La deducción regresiva muestra que toda solución aparece y que s,t se recuperan de z,w.

10. Toda terna real satisface todas las identidades: el conjunto es $\mathbb{R}^3$. Las tres incógnitas son libres. Una sola ecuación $0=2$ vuelve incompatible el sistema completo, cualquiera sea el número de identidades que la acompañen.

11. Restar dos veces la primera de la segunda da $ty=1$. Si $t=0$, no hay solución. Si $t\neq 0$, $y=1/t$ y $x=(1-1/t)/2$. Al sustituir en la segunda obtenemos $2-2/t+(t+2)/t=3$, como se exige. El primer pivote es siempre 2 y sólo el segundo puede desaparecer; no hay caso de infinitas soluciones en esta familia.

12. La segunda menos la primera da $(a-1)x=b-1$. Para $a\neq 1$, $x=(b-1)/(a-1)$ y $y=1-x$; la sustitución verifica ambas ecuaciones. Para $a=1$, las ecuaciones tienen iguales miembros izquierdos: si $b=1$ coinciden y las soluciones son $(t,1-t)$; si $b\neq 1$ son rectas paralelas distintas y no hay solución. En el primer caso general las rectas tienen un único punto común.

13. La división por a sólo era válida si $a\neq 0$; no demuestra que el problema carezca de sentido para $a=0$. Restar la segunda ecuación de la primera evita esa división: $(a-1)x=-1$. Para $a\neq 1$ se obtiene $x=1/(1-a)$ y $y=2-1/(1-a)$. Para $a=1$, las ecuaciones exigen simultáneamente $x+y=1$ y $x+y=2$, y no hay solución. El caso $a=0$ está incluido en la fórmula: $(x,y)=(1,1)$.

14. Si $c\neq 0$, podemos multiplicar primero E_i por c y después añadir dE_j. Ambas operaciones son elementales. También se recupera directamente E_i restando dE_j de la nueva ecuación y dividiendo por c. Si $c=0$, tomar $E_i : x=1$ y $E_j : y=0$ deja como nueva primera ecuación $dy=0$. Junto con $y=0$ admite cualquier x, mientras que el sistema anterior exigía $x=1$. Esto muestra que la garantía universal falla, aunque en algunos sistemas particulares pueda conservarse el conjunto.

15. Llamemos $F_1=E_1+E_2$ y $F_2=E_1-E_2$ a las nuevas igualdades completas. Las antiguas se recuperan como $E_1=(F_1+F_2)/2$ y $E_2=(F_1-F_2)/2$. Toda solución antigua satisface las nuevas y toda solución nueva satisface las recuperadas. Si $1+1=0$, no podemos dividir por dos y suma y diferencia son la misma operación. Sobre $\mathbb{F}_2$, partir de $x=0$, $y=0$ produce dos copias de $x+y=0$, que también admiten $(1,1)$. Se perdió información.

16. Para cada ecuación, restar las igualdades satisfechas por p y q da $\sum_j a_{ij}(p_j-q_j)=0$. Por eso la diferencia resuelve el homogéneo. En la ecuación no homogénea $x+y=1$, $p=(1,0)$ y $q=(0,1)$ son soluciones, pero $p+q=(1,1)$ tiene suma de coordenadas 2. La suma de soluciones conserva la homogeneidad, no en general un término independiente fijado distinto de cero.

17. Si L_i es el miembro izquierdo de la ecuación i, distributividad da $L_i(\alpha p+\beta q)=(\alpha+\beta)b_i$. Con $\alpha=\lambda$, $\beta=1-\lambda$ resulta b_i para cada i, y obtenemos una solución. Si el sistema es no homogéneo, existe un i con $b_i\neq 0$. Para que esa ecuación conserve su término independiente es necesario $(\alpha+\beta)b_i=b_i$, y dividir por b_i da $\alpha+\beta=1$. Esa condición también basta para todas las ecuaciones. En el sistema homogéneo no es necesaria, porque todos los b_i son cero.

18. Las tuplas $q+\lambda(p-q)$ son soluciones por el ejercicio 17. Si dos parámetros λ,μ dan la misma tupla, $(\lambda-\mu)(p-q)=0$ coordenada a coordenada. Como $p\neq q$, alguna coordenada de $p-q$ es no nula, y en ella podemos dividir para obtener $\lambda=\mu$. Los infinitos parámetros reales producen

soluciones distintas. Sobre un cuerpo finito la misma inyectividad vale, pero sólo suministra un número finito de valores de λ.

19. Para el punto, las ecuaciones $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ fijan las tres coordenadas. Para la recta, usar $x + y = 3$, $z = 3$: toda tupla de la forma dada las satisface y, recíprocamente, de una solución se recupera $t = x - 1$, con $y = 2 - t$. El plano se obtiene con la única ecuación $x + y + z = 1$; su conjunto es el pedido por definición. Para el vacío, usar $x = 0$, $x = 1$; ninguna tupla puede tener su primera coordenada igual a ambos números. Las construcciones no dependen de un dibujo.

20. Las dos primeras condiciones se cortan en $(0, 0, t)$. La primera y la tercera se cortan en $(0, 1, t)$; la segunda y la tercera, en $(1, 0, t)$. Cada pareja tiene una recta común. Un punto de los tres planos tendría $x = y = 0$ y por tanto $x + y = 0$, incompatible con $x + y = 1$. Las intersecciones por parejas pueden ser distintas y no aseguran una intersección global.

21. Las condiciones dan $c = 2$, $a + b + c = 3$ y $4a + 2b + c = 8$. Restando el valor de c quedan $a + b = 1$, $4a + 2b = 6$; restar dos veces la primera a la segunda da $2a = 4$. Se obtiene $a = 2$, $b = -1$, $c = 2$ y $p(t) = 2t^2 - t + 2$. Sus valores son $2, 3, 8$ y la eliminación prueba unicidad. Las incógnitas son los coeficientes a, b, c; los valores $0, 1, 2$ de t son datos fijos. Por eso las ecuaciones son lineales en las incógnitas.

22. Las dos primeras ecuaciones dan $z = t$, $y = t + 1$, $x = t + 3$. Su diferencia $x - z$ vale siempre 3, así que la tercera no añade condición. Los tres flujos son no negativos exactamente cuando $t \geq 0$: esa condición basta y es necesaria por $z = t$. Si la última diferencia fuese 4, restar la suma de las dos primeras ecuaciones de la tercera daría $0 = 1$. El balance incompatible puede detectarse antes de fijar un flujo.

23. La suma de las dos primeras ecuaciones tiene miembro izquierdo $x + 2y + z$, igual al de la tercera. Es necesario $b_3 = b_1 + b_2$. Si se cumple, elegir $y = t$ da $x = b_1 - t$ y $z = b_2 - t$; estas tuplas satisfacen también la tercera. La condición es por tanto suficiente. Si falla, $E_3 - E_1 - E_2$ produce $0 = b_3 - b_1 - b_2 \neq 0$, certificado de incompatibilidad que conserva sólo una combinación de las condiciones que cualquier solución habría de satisfacer.

24. El conjunto nuevo es la intersección del conjunto antiguo S con $\{x : L(x) = c\}$. Es igual a S si y sólo si S está contenido en ese segundo conjunto, que es la afirmación pedida. Saber que una solución satisface la ecuación adicional sólo garantiza que la intersección no es vacía. Por ejemplo, a $x + y = 1$ añadir $x = 1$ conserva $(1, 0)$ y elimina $(0, 1)$; el conjunto de soluciones ha cambiado.

25. Restar i veces la primera de la segunda da $(1 - i^2)y = -i$, es decir, $2y = -i$. Así $y = -i/2$ y $x = 1 - iy = 1/2$. Las verificaciones son $1/2 + i(-i/2) = 1$ e $i/2 - i/2 = 0$. Los dos pivotes no nulos determinan la pareja de forma única; la misma operación de eliminación funciona con escalares complejos.

26. Sumar las ecuaciones da $2x = 1$; la segunda da $y = x$. Sobre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ la solución única es $(1/2, 1/2)$. No hay solución con coordenadas enteras porque $2x = 1$ no puede cumplirse para un entero. Dividir por dos produce un escalar permitido en los dos cuerpos, pero no un entero. Resolver primero en $\mathbb{Q}$ y filtrar las soluciones enteras es válido; afirmar que todas las divisiones permanecen dentro de $\mathbb{Z}$ no lo es.

27. Las tablas módulo dos tienen 0 como neutro aditivo, cada elemento como su propio opuesto y 1 como neutro multiplicativo y único elemento no nulo, inverso de sí mismo. Asociatividad, conmutatividad y distributividad se heredan del cálculo entero al reducir módulo dos. Se cumplen los axiomas del cuerpo. De $x + y + z = 0$ obtenemos $x = y + z$, pues restar y sumar coinciden. Elegir y, z en $\{0, 1\}$ produce $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$ y $(0, 1, 1)$. Son $2^2 = 4$ soluciones: hay dos variables libres y ningún sentido en el que esa lista sea infinita.

28. Las n ecuaciones $x_j = p_j$ obligan a que cualquier solución sea p, y p las satisface. Añadir $\sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{j=1}^{n} p_j$ conserva esa única solución, porque ya es consecuencia de las igualdades coordenadas. Añadir en cambio $\sum_j x_j = \sum_j p_j + 1$ la excluye y deja el sistema vacío. La construcción muestra que $n + 1$ ecuaciones pueden ser compatibles o incompatibles; el mero conteo no decide.

29. Toda solución de las ecuaciones originales satisface cualquier combinación escalar de ellas, por distributividad y suma de igualdades. Si una combinación da $0 = 1$, ninguna solución puede existir. Para la recíproca, escalonar un sistema incompatible. Por el teorema 1.3 debe aparecer una contradicción $0 = c$, $c \neq 0$; de otro modo la sustitución regresiva construiría una solución. Cada ecuación obtenida por operaciones elementales es una combinación de las originales: esto vale al

comienzo y se conserva al sumar múltiplos, intercambiar o escalar ecuaciones. La contradicción encontrada es por ello una combinación de las originales; multiplicar sus coeficientes por c^{-1} produce $0 = 1$. El argumento certifica incompatibilidad sin recurrir a determinantes.

30. El sistema homogéneo es compatible por la solución cero. Hay a lo sumo $m < n$ pivotes, de modo que existe una variable libre. Elegir una de las libres igual a 1 y las otras igual a 0 produce, por el teorema 1.3, una solución cuya coordenada elegida es no nula. Sobre un cuerpo de q elementos hay exactamente q^{n-r} elecciones de libres, y cada una determina una solución distinta. Ese número puede ser finito aunque haya soluciones no triviales.

31. Sustituir la familia da $ax + by + cz = 10b + t(2a - 3b + c)$. La expresión es constante para todo $t \in \mathbb{R}$ si y sólo si $2a - 3b + c = 0$: la necesidad se obtiene comparando $t = 0$ con $t = 1$, y la suficiencia al anular el coeficiente. En ese caso el valor constante es $10b$. Pedir además el valor d conserva toda la familia si $d = 10b$ y la excluye por completo si $d \neq 10b$. Si $2a - 3b + c \neq 0$, la ecuación adicional selecciona un único parámetro $t = (d - 10b)/(2a - 3b + c)$. Para mezclas físicas hay que comprobar además $0 \leq t \leq 10/3$.

32. De $y - z = 1$ se deduce $y = 1 + z$, no $1 - z$. Con $z = t$ obtenemos $y = 1 + t$ y, por la primera ecuación, $x = 5 - 2(1 + t) - t = 3 - 3t$. La familia correcta es $(3 - 3t, 1 + t, t)$. Sustituirla da 5 y 1 en los dos miembros izquierdos. La propuesta errónea cumple la segunda sólo cuando $1 - 2t = 1$, es decir, $t = 0$, y en ese valor también cumple la primera. Verificar únicamente ese caso habría ocultado el error en la fórmula general.

33. Cancelar los coeficientes de x, y exige

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 + 4\lambda_4 = 0, \qquad \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 + 4\lambda_4 = 0.$$

Restar las igualdades da $2\lambda_3 = 0$ y, al trabajar sobre los reales, $\lambda_3 = 0$. Producir uno en el segundo miembro exige $\lambda_1 + 3\lambda_2 + 6\lambda_4 = 1$. La cancelación restante da $\lambda_1 = -2\lambda_2 - 4\lambda_4$; sustituirla en la condición del segundo miembro deja $\lambda_2 + 2\lambda_4 = 1$. Con $\lambda_4 = t$ obtenemos todos los certificados:

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (-2, 1 - 2t, 0, t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Para cualquier t los coeficientes de las dos incógnitas suman cero y los términos independientes suman $-2 + 3(1 - 2t) + 6t = 1$, así que cada lista certifica la contradicción. Las ecuaciones deducidas fuerzan esa forma para cualquier certificado, lo que prueba exhaustividad. No es único: $t = 0$ usa $E_2 - 2E_1$, mientras que $t = 1/2$ usa $E_4/2 - 2E_1$. La redundancia $E_4 = 2E_2$ permite escribir la misma contradicción de varias maneras sin cambiar el sistema.

34. Las intersecciones por parejas son las rectas (a, b, t), $(a, c - a, t)$ y $(c - b, b, t)$, respectivamente, para $t \in \mathbb{R}$. Cada familia satisface las dos ecuaciones correspondientes, y éstas fijan las dos primeras coordenadas como se ha indicado; no imponen ninguna condición a z. Por eso las tres intersecciones por parejas existen para todos los datos.

Una solución común a los tres planos debe tener $x = a$, $y = b$, de modo que la tercera ecuación se cumple exactamente si $c = a + b$. En ese caso las tres rectas anteriores coinciden y todas las soluciones son (a, b, t). Si $c \neq a + b$, la combinación $E_3 - E_1 - E_2$ produce $0 = c - a - b$ y, por tanto, $(-1, -1, 1)/(c - a - b)$ es un certificado normalizado. La división sólo se usa en el caso incompatible, donde el denominador no es cero.

Lecturas y referencias

Kenneth Hoffman y Ray Kunze, *Linear Algebra*, 2.ª ed., §§1.2–1.3; Steven H. Weintraub, *Linear Algebra for the Young Mathematician*, cap. 2; Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra*, 4.ª ed., §2.2; Sergei Treil, *Linear Algebra Done Wrong*, cap. 2; John M. Erdman, *Exercises and Problems in Linear Algebra*, cap. 1. Estas lecturas ofrecen perspectivas complementarias del método y de los conjuntos de soluciones.

Nathaniel Johnston, *Introduction to Linear and Matrix Algebra*, 2021, §2.1 y tema 2.A; Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel y Lawrence E. Spence, *Linear Algebra*, 5.ª ed., §§3.1,3.3–3.4. Johnston ofrece el recorrido geométrico y algorítmico; Friedberg, Insel y Spence permiten continuar hacia la descripción estructural de las soluciones, con la teoría de espacios vectoriales que se desarrollará más adelante.

Capítulo 2

Matrices como representación de sistemas

Al eliminar incógnitas pasamos buena parte del cálculo copiando las mismas letras. En el sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z + w = 3, \\ y + z - 2w = 1, \\ 2x + 5y - z = 7, \end{cases}$$

los cambios se realizan sobre los coeficientes y los términos independientes; las incógnitas conservan su orden. Podemos registrar toda esa información en una tabla:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 0 & 7 \end{array}\right].$$

La tercera fila recuerda que el coeficiente de w es cero, aunque la letra no aparezca en la ecuación. El separador distingue los coeficientes de los datos del segundo miembro. Si restamos dos veces la primera fila de la tercera, la última fila se convierte en $(0, 1, 1, -2 \,|\, 1)$; restar luego la segunda la anula. La ecuación que parecía aportar un tercer dato era consecuencia de las otras dos.

Esta escritura facilita el cálculo, pero plantea una cuestión que el cálculo solo no decide. Podemos escoger pivotes diferentes, intercambiar filas en momentos distintos y obtener tablas escalonadas de aspecto desigual. Para comparar los resultados necesitamos precisar qué parte de la tabla depende de esas elecciones y qué parte pertenece al problema original.

2.1. Qué información guarda una matriz

Una **matriz de tamaño** $m \times n$ **sobre un cuerpo** $\mathbb{F}$ es una tabla rectangular de elementos de $\mathbb{F}$, con m filas ordenadas y n columnas ordenadas. Su entrada de fila i y columna j se denota a_{ij}; escribimos $A = (a_{ij})$ o

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Las filas son las tuplas $(a_{i1}, \ldots, a_{in})$ y las columnas son listas verticales. En $m \times n$, el número de filas se escribe primero. Dos matrices son iguales si tienen el mismo tamaño y coinciden entrada a entrada. Las posiciones forman parte de la información: intercambiar dos columnas puede producir otra matriz aunque los números presentes sean los mismos.

Trabajaremos con $m, n \geq 1$. Los ejemplos numéricos se calculan sobre $\mathbb{R}$, salvo indicación contraria; las definiciones, los resultados y las demostraciones formulados sobre $\mathbb{F}$ se mantienen sobre ese cuerpo. La **matriz cero** $0_{m \times n}$ tiene todas sus entradas iguales a cero. Una matriz es **cuadrada** si $m = n$; en ese caso, las posiciones (i, i) forman su diagonal principal. La **matriz identidad** I_n tiene unos en esa diagonal y ceros en las otras entradas. La identidad será importante aquí por su forma reducida; todavía no necesitamos un producto entre matrices.

Para un sistema de m ecuaciones en n incógnitas ordenadas, su **matriz de coeficientes** es $A = (a_{ij})$. Si b es la columna de términos independientes, su **matriz ampliada** es $[A \,|\, b]$, de tamaño $m \times (n + 1)$. En ocasiones escribiremos $Ax = b$ como abreviatura del sistema; hasta definir el producto matricial, esa escritura significa las igualdades $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$ para $i = 1, \ldots, m$.

La matriz A permite estudiar todos los sistemas que comparten coeficientes, mientras que $[A \,|\, b]$ selecciona uno de ellos. En el ejemplo inicial A tiene tamaño 3×4 y la ampliada tiene tamaño

3×5. Cambiar 7 por 8 en la tercera ecuación conserva A y cambia b; como veremos, ese cambio basta para destruir la compatibilidad.

La barra no es una columna adicional ni una operación. Es una marca de interpretación: al retirar esa marca queda una matriz ordinaria de cinco columnas. Podemos reducirla como tal, pero al interpretar un sistema sólo las primeras cuatro columnas corresponden a incógnitas. Un pivote en la última columna tendrá un significado distinto.

2.2. Operaciones sobre filas y equivalencia

Sumamos tuplas y las multiplicamos por escalares coordenada a coordenada, como hicimos en C01. Eso permite trasladar las operaciones elementales de las ecuaciones a sus tablas.

Las **operaciones elementales por filas** son intercambiar dos filas; multiplicar una fila por un escalar no nulo; y reemplazar una fila por ella misma más un múltiplo de otra fila distinta. Se aplican a la fila completa. Escribiremos, por ejemplo, $F_3 \leftarrow F_3 - 2F_1$.

Dos matrices del mismo tamaño son **equivalentes por filas**, y escribimos $A \sim B$, si una se obtiene de la otra mediante una sucesión finita de operaciones elementales. Se permite la sucesión vacía, que deja la matriz intacta.

Cada operación tiene una inversa elemental: un intercambio se deshace intercambiando otra vez; multiplicar por $c \neq 0$ se deshace multiplicando por c^{-1}; y sumar cF_j se deshace sumando $-cF_j$, porque la fila j se conservó. De aquí resulta que la equivalencia por filas es reflexiva, simétrica y transitiva. La última propiedad se verifica concatenando sucesiones de operaciones.

Proposición 2.1. Si $[A \,|\, b] \sim [C \,|\, d]$, los sistemas correspondientes en las mismas incógnitas tienen exactamente las mismas soluciones.

Demostración. Cada operación sobre una fila de la ampliada ejecuta la misma operación sobre ambos miembros de una ecuación. Por la proposición 1.1, conserva su conjunto de soluciones, y lo mismo ocurre con la sucesión finita completa. □

La condición “fila completa” evita un error importante. Si restamos una ecuación de otra, también se restan sus términos independientes. En el sistema $x + y = 2$, $x - y = 0$, la segunda menos la primera es $-2y = -2$. Escribir $-2y = 0$ por operar sólo con A cambia el problema.

Una matriz de coeficientes puede reducirse sola, pero cualquier columna b que la acompañe debe recibir después exactamente las mismas operaciones. La afirmación $A \sim C$ no dice que $Ax = b$ y $Cx = b$ tengan las mismas soluciones con el mismo b. Lo que se conserva es el sistema cuando se transportan juntos coeficientes y datos.

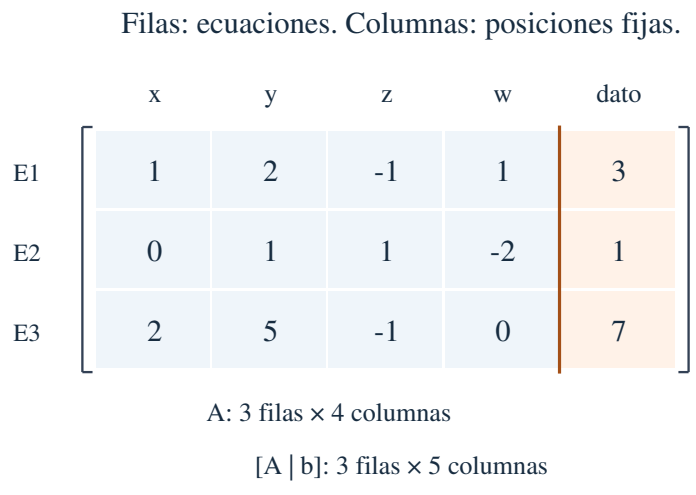


Figura 2.1. Cada fila representa una ecuación completa. El coeficiente cero de la cuarta incógnita se conserva como una entrada explícita.

2.3. Escalonar y reducir

Una matriz está en **forma escalonada por filas** si sus filas cero están debajo de las filas no nulas y el primer elemento no nulo de cada fila no nula está estrictamente a la derecha del primer

elemento no nulo de la anterior. Esos primeros elementos son los **pivotes**; sus posiciones y columnas se llaman posiciones y columnas pivote.

La condición implica que debajo de un pivote hay ceros. No exige que el pivote valga uno ni que haya ceros encima. Una matriz cero ya está escalonada y no tiene pivotes.

La eliminación de C01, aplicada a las filas, transforma cualquier matriz en una escalonada equivalente. Se elige un coeficiente no nulo de la columna activa más a la izquierda, se coloca arriba mediante un intercambio si hace falta y se anulan las entradas inferiores. Los ceros de las columnas anteriores se conservan, y el proceso termina después de elegir a lo sumo $\min(m, n)$ pivotes.

Una matriz está en **forma escalonada reducida por filas** si está escalonada, cada pivote vale uno y ese uno es la única entrada no nula de su columna. Usaremos la abreviatura **forma reducida**.

Por ejemplo,

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

son equivalentes por filas. La primera está escalonada; la segunda, reducida. Para pasar de U a R, dividimos la segunda fila por tres, restamos cuatro veces esa fila de la primera y dividimos la primera por dos. Los pivotes permanecen en las columnas primera y segunda.

Una matriz reducida puede tener entradas distintas de cero y uno. Los ceros adicionales se exigen en las columnas pivote; las otras columnas conservan números que describen la relación con las incógnitas libres. Tampoco tienen que estar todos los pivotes sobre la diagonal principal: en

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

las columnas pivote son la segunda y la cuarta.

Teorema 2.2 (existencia de la forma reducida). Toda matriz sobre un cuerpo es equivalente por filas a una matriz escalonada reducida.

Demostración. Primero la escalonamos. Dividimos cada fila no nula por su pivote para convertirlo en uno. Empezamos por el pivote situado más abajo y anulamos las entradas que hay encima, sumando múltiplos de su fila a las superiores. Continuamos hacia arriba.

La fila usada en cada paso tiene ceros a la izquierda de su pivote; por eso no cambia los pivotes anteriores. Al tratar pivotes de abajo arriba, las columnas pivote posteriores ya están limpias. La fila que estamos usando tiene cero en ellas, pues esas columnas fueron limpiadas también en esa fila; por tanto, no deshace el trabajo anterior. Tras un número finito de operaciones, cada columna pivote contiene sólo su uno y la matriz sigue escalonada. □

Este procedimiento se conoce como **eliminación de Gauss–Jordan**. Si sólo queremos resolver un sistema, escalonarlo y sustituir regresivamente puede resultar más económico. La forma reducida exige operaciones adicionales a cambio de dejar explícitas, sin sustituciones pendientes, las relaciones entre las incógnitas.

Para la ampliada inicial, las operaciones $F_3 \leftarrow F_3 - 2F_1$, $F_3 \leftarrow F_3 - F_2$ y $F_1 \leftarrow F_1 - 2F_2$ dan

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Leemos $x = 1 + 3z - 5w$, $y = 1 - z + 2w$. Las incógnitas z, w son libres; si las llamamos s, t, recuperamos $(1 + 3s - 5t, 1 - s + 2t, s, t)$. La tercera fila expresa la identidad $0 = 0$.

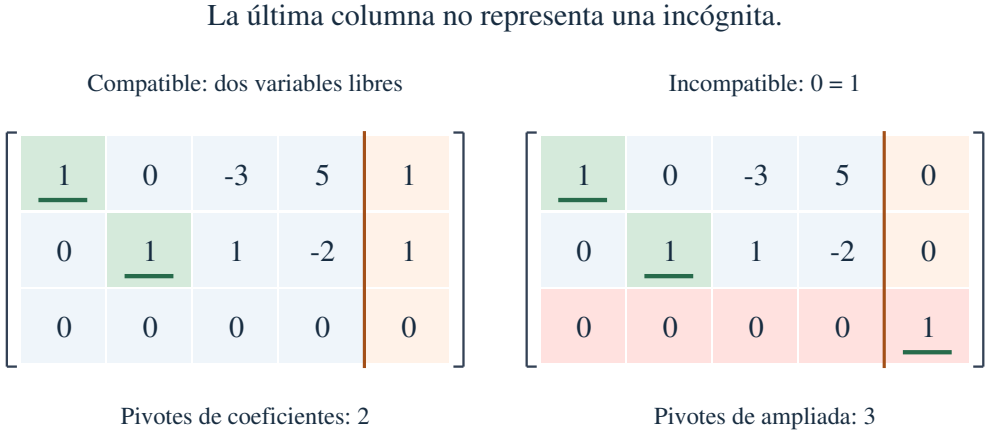


Figura 2.2. Una columna sin pivote entre las incógnitas deja una variable libre. Un pivote en la columna de términos independientes representa una contradicción, no una incógnita adicional que pueda resolverse.

2.4. La información que las operaciones conservan

Para demostrar que la forma reducida es única necesitamos algo más que observar varios ejemplos. Las operaciones pueden alterar cada fila de la matriz; sin embargo, conservan todas las tuplas que pueden construirse combinando sus filas.

Si las filas de A son $f_1, \dots, f_m$, llamaremos **conjunto de combinaciones de sus filas** al conjunto

$$\mathcal{C}(A) = \{c_1 f_1 + \cdots + c_m f_m : c_1, \dots, c_m \in \mathbb{F}\}.$$

La definición sólo usa suma de tuplas y producto por escalares; no presupone una teoría de espacios vectoriales. Incluye la tupla cero, escogiendo todos los coeficientes cero. Si todas las filas son cero, ésa es la única combinación.

Lema 2.3. Si $A \sim B$, entonces $\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(B)$.

Demostración. Después de una operación elemental, cada fila nueva es una combinación de las antiguas. Al sustituir esas expresiones en cualquier combinación de las nuevas filas y distribuir, obtenemos una combinación de las antiguas. Esto prueba una inclusión de conjuntos. La operación inversa expresa también cada fila antigua mediante las nuevas, por lo que prueba la inclusión contraria. La igualdad se conserva a lo largo de la sucesión de operaciones. □

El conjunto $\mathcal{C}(A)$ contiene muchas tuplas; una forma escalonada permite reconocer dónde puede comenzar una combinación no nula. Supongamos que sus filas no nulas son $r_1, \dots, r_k$, con pivotes en $p_1 < \cdots < p_k$. Si una combinación tiene algún coeficiente no nulo, tomemos el primero de ellos, c_i. Las filas posteriores son cero en todas las posiciones anteriores a sus pivotes, y sus pivotes quedan después de p_i. En la posición p_i la combinación vale $c_i r_{i,p_i} \neq 0$, y antes de ella vale cero. No puede haber una cancelación allí: las filas posteriores todavía no han comenzado.

Lema 2.4. En una matriz escalonada, las posiciones posibles de la primera entrada no nula de una tupla de $\mathcal{C}(A)$ son exactamente sus columnas pivote. Además, una combinación de sus filas no nulas es cero sólo si todos sus coeficientes son cero.

Demostración. El argumento anterior muestra que toda combinación con algún coeficiente no nulo comienza en la columna pivote de la primera fila cuyo coeficiente no es cero. Recíprocamente, cada fila no nula es una combinación y comienza en su propio pivote. La misma observación impide que una combinación con algún coeficiente no nulo sea cero. □

Es la forma escalonada la que permite identificar la primera contribución que no puede cancelarse. En una matriz arbitraria dos filas pueden comenzar en la misma columna y cancelar sus primeras entradas; por eso el lema necesita su hipótesis.

2.5. Por qué la forma reducida es única

Teorema 2.5 (unicidad). Si R y S son matrices escalonadas reducidas, del mismo tamaño, equivalentes por filas, entonces $R = S$. En consecuencia, toda matriz tiene una única forma escalonada reducida equivalente por filas.

Demostración. Por el lema 2.3, $\mathcal{C}(R) = \mathcal{C}(S)$. El lema 2.4 identifica las columnas pivote de cada una como las posiciones posibles donde empieza una combinación no nula. Esas posiciones dependen sólo del conjunto común de combinaciones, por lo que R y S tienen los mismos pivotes $p_1 < \cdots < p_k$ y el mismo número de filas no nulas.

Sean r_i, s_i sus filas no nulas correspondientes. En las columnas pivote, ambas tienen un uno en p_i y cero en las otras, por la condición reducida. La diferencia $r_i - s_i$ tiene, por tanto, cero en todas las columnas pivote. Además pertenece a $\mathcal{C}(R)$: r_i es una combinación de las filas de R y s_i, al pertenecer a $\mathcal{C}(S) = \mathcal{C}(R)$, también lo es; restar sus expresiones sigue dando una combinación de las filas de R.

Si esa diferencia fuese no nula, el lema 2.4 diría que su primera entrada no nula está en alguna columna pivote. Eso contradice que todas esas entradas sean cero. Luego $r_i = s_i$ para cada i. Las filas restantes de ambas matrices son cero y también coinciden. Por ello $R = S$. La existencia del teorema 2.2 completa la conclusión para cualquier matriz. □

La prueba distingue dos cuestiones. Las posiciones de los pivotes quedan fijadas por el conjunto de combinaciones; la condición reducida fija además las entradas de cada fila. Dos matrices pueden tener iguales posiciones pivote y seguir siendo distintas si cambian los números de las columnas restantes. La unicidad controla también esos números.

Denotaremos la forma reducida de A por $\operatorname{rref}(A)$. El nombre abrevia la expresión inglesa *reduced row echelon form*; lo usaremos como notación de una matriz determinada, con independencia de qué algoritmo la produzca.

Corolario 2.6. Para matrices del mismo tamaño, $A \sim B$ si y sólo si $\operatorname{rref}(A) = \operatorname{rref}(B)$.

Demostración. Si son equivalentes, sus formas reducidas son equivalentes y coinciden por unicidad. Si sus formas reducidas coinciden, reducimos A a esa matriz común y deshacemos las operaciones que reducen B; la concatenación transforma A en B. □

La forma reducida ofrece así un representante único de cada clase de equivalencia por filas. La existencia de un representante canónico no hace única la ruta de cálculo: distintas sucesiones pueden tener el mismo punto de llegada.

Reconocer la información común de dos tablas. Las combinaciones de filas entraron en la prueba de unicidad para reconocer qué podía sobrevivir a las operaciones. Podemos completar esa relación: conocer todas las combinaciones permite decidir también si dos matrices del mismo tamaño se pueden transformar una en otra.

Proposición 2.6a. Para matrices A, B del mismo tamaño y sobre el mismo cuerpo, las siguientes condiciones son equivalentes: $A \sim B$; $\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(B)$; y $\operatorname{rref}(A) = \operatorname{rref}(B)$.

Demostración. El lema 2.3 prueba que $A \sim B$ implica igualdad de los conjuntos de combinaciones. El corolario 2.6 ya relaciona la equivalencia por filas con la igualdad de formas reducidas. Falta justificar que la igualdad $\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(B)$ basta para recuperar esa forma común.

Sean $R = \operatorname{rref}(A)$ y $S = \operatorname{rref}(B)$. Las operaciones de reducción conservan las combinaciones, así que $\mathcal{C}(R) = \mathcal{C}(S)$. Por el lema 2.4, las primeras posiciones no nulas que pueden tener las tuplas de ese conjunto son exactamente las columnas pivote de R y de S; ambas matrices tienen, por ello, las mismas columnas pivote y el mismo número de filas no nulas. En cada una de esas columnas sus filas correspondientes r_i, s_i coinciden: tienen uno en el pivote de la fila y cero en los otros pivotes.

La diferencia $r_i - s_i$ pertenece al conjunto común de combinaciones y es cero en todas las columnas pivote. Si fuese no nula, el lema 2.4 obligaría a que comenzara en una de esas columnas, lo cual es imposible. Luego $r_i = s_i$. Las filas restantes son cero en ambas matrices y ocupan las mismas posiciones porque los tamaños coinciden. Así $R = S$, y el corolario 2.6 da $A \sim B$. □

La condición de tamaño no puede omitirse: una fila adicional que sea combinación de las anteriores no cambia el conjunto $\mathcal{C}$, pero ninguna operación elemental crea o elimina filas. La proposición compara matrices que tienen el mismo número de lugares disponibles para escribir esa información.

Para aplicar el resultado no siempre hace falta reducir. Si conocemos una expresión de cada fila de B como combinación de las de A, obtenemos $\mathcal{C}(B) \subseteq \mathcal{C}(A)$; si también podemos expresar cada fila de A mediante las de B, la inclusión inversa prueba equivalencia. Una sola inclusión no alcanza. Por ejemplo, las filas de $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ son combinaciones de las de I_2, pero la tupla $(0, 1)$ pertenece a $\mathcal{C}(I_2)$ y no al conjunto de combinaciones de la otra matriz. El ejercicio 37 aplica las dos inclusiones a matrices que, aunque parecen distintas, sí son equivalentes.

Sistemas equivalentes y matrices equivalentes por filas. Al trabajar con una ampliada aparecen dos relaciones que conviene distinguir. Dos sistemas son equivalentes cuando tienen el mismo conjunto de soluciones. Dos matrices del mismo tamaño son equivalentes por filas cuando una sucesión de operaciones elementales transforma una en otra. La proposición 2.1 asegura que la segunda relación produce la primera al interpretar matrices ampliadas en las mismas incógnitas; recuperar la segunda a partir de la primera exige más información.

Consideremos las ampliadas reales

$$R = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \qquad S = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

La primera exige $x = 0$ y $0 = 1$; la segunda exige $y = 0$ y $0 = 1$. Ambos sistemas son incompatibles, de modo que sus conjuntos de soluciones coinciden: los dos son vacíos. Sin embargo, las matrices están reducidas y son distintas. Si fueran equivalentes por filas, el teorema 2.5 las obligaría a coincidir.

La proposición 2.6a permite localizar también la diferencia que las operaciones conservan. Las combinaciones de las filas de R son las tuplas $(u, 0, v)$, mientras que las de S son $(0, u, v)$, con $u, v \in \mathbb{R}$. La tupla $(1, 0, 0)$ pertenece al primer conjunto y no al segundo. Mirar sólo las soluciones vacías ha borrado esa distinción: conocemos que las exigencias no pueden cumplirse juntas, pero ya no sabemos qué combinaciones de coeficientes y datos estaban escritas.

Por eso, encontrar la misma respuesta «incompatible» para dos sistemas no demuestra equivalencia por filas de sus ampliadas. Tampoco basta conocer sus rangos, que en este ejemplo son dos para ambas ampliadas. Para comparar matrices mediante operaciones debemos comprobar la información más precisa de sus combinaciones de filas o de sus formas reducidas. El conjunto de soluciones responde a la pregunta por las incógnitas; la equivalencia por filas controla además cómo se relacionan las filas que representan el problema.

2.6. El rango como invariante

El **rango** de una matriz A, denotado $\operatorname{rg}(A)$, es el número de pivotes de su forma reducida. Para una matriz $m \times n$ se cumple $0 \leq \operatorname{rg}(A) \leq \min(m, n)$.

Podemos calcularlo sin completar Gauss–Jordan. Al reducir una matriz ya escalonada, los pivotes se normalizan y se limpian las entradas superiores, pero sus posiciones no cambian. Por tanto, el número de pivotes de cualquier escalonada equivalente a A coincide con el de su forma reducida única. Ésta es la justificación pendiente de C01: las elecciones de eliminación pueden cambiar los valores de los pivotes, pero no cuántos hay ni sus columnas, con el orden de columnas fijado.

La equivalencia por filas conserva el rango. Su recíproca es falsa: las matrices $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ tienen rango uno y ya están reducidas, pero no son iguales; el corolario 2.6 impide que sean equivalentes.

El rango cero caracteriza a la matriz cero. En efecto, una forma reducida sin pivotes es cero, y una sucesión de operaciones elementales aplicada a una matriz cero sigue dejándola cero, también al invertir la sucesión. El rango cuenta una propiedad de las restricciones y no el número de entradas no nulas: una tabla llena de unos puede tener rango uno.

Teorema 2.7 (criterio de compatibilidad por rangos). El sistema con matriz de coeficientes A y columna b es compatible si y sólo si $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}([A \mid b])$. Si es compatible, tiene una única solución si y sólo si $\operatorname{rg}(A) = n$, donde n es el número de incógnitas.

Demostración. Reduzcamos la matriz ampliada completa. Al retirar su última columna, la tabla restante sigue estando reducida: si había un pivote en la última columna, su fila tenía ceros

en todas las anteriores y se vuelve cero; las otras filas conservan sus pivotes y su orden. Además, las operaciones realizadas sobre los coeficientes fueron operaciones elementales sobre A. Esa tabla es, por ello, $\operatorname{rref}(A)$.

Si la última columna no contiene un pivote, ambas matrices tienen el mismo número de pivotes. No hay fila de la forma $(0,\dots,0\,|\,c)$ con $c\neq 0$, y el teorema 1.3 construye soluciones. Si contiene un pivote, aparece una fila $(0,\dots,0\,|\,1)$ y el sistema es incompatible; en ese caso la ampliada tiene un pivote más. Esto prueba la equivalencia de compatibilidad y igualdad de rangos.

En el caso compatible hay $n-\operatorname{rg}(A)$ incógnitas libres. Ninguna queda libre exactamente cuando el rango es n; entonces las principales se determinan de forma única. Si queda alguna libre, sus distintos valores proporcionan soluciones distintas, porque un cuerpo tiene al menos los elementos 0 y 1. $\square$

En particular, añadir una columna puede aumentar el rango en cero o en uno, y el aumento en la columna b detecta incompatibilidad. Sobre un cuerpo de q elementos, un sistema compatible tiene $q^{n-\operatorname{rg}(A)}$ soluciones; sobre un cuerpo infinito tendrá infinitas si no es único.

Si el sistema inicial termina en 8 en lugar de 7, la misma eliminación deja una fila $(0,0,0,0\,|\,1)$. El rango de A sigue siendo dos y el de la ampliada es tres. Las dos primeras ecuaciones admiten la familia ya conocida; la tercera la excluye entera.

2.7. Resolver varios sistemas con una sola reducción

Cuando cambian los datos pero no los coeficientes, repetir la eliminación desde cero desaprovecha información. Para la matriz inicial podemos dejar simbólicos los términos independientes:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & b_2 \\ 2 & 5 & -1 & 0 & b_3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 5 & b_1-2b_2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3-2b_1-b_2 \end{array}\right].$$

Para producir esta tabla se redujo A y se transportó la columna b con las mismas operaciones. La tabla completa sólo es una forma reducida de la ampliada cuando la última entrada es cero; si no lo es, aún habría que normalizar ese pivote final y limpiar su columna. Para resolver el sistema no hace falta ese trabajo adicional: la condición de compatibilidad es $b_3 = 2b_1 + b_2$.

Cuando se cumple, tomar $z = s$, $w = t$ produce

$$(x, y, z, w) = (b_1 - 2b_2 + 3s - 5t,\ b_2 - s + 2t,\ s,\ t).$$

La misma cadena de operaciones sirve para varias columnas concretas. En $[A\,|\,b\,|\,c]$ cada columna a la derecha de A es un término independiente de un sistema diferente, no una nueva incógnita del mismo sistema. Por ejemplo, para $b=(3,1,7)$ y $c=(3,1,8)$ obtenemos

$$\left[\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 0 & -3 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

La primera columna de datos es compatible; la segunda, incompatible. La fila inferior se lee por separado: exige $0=0$ para el sistema con b y $0=1$ para el sistema con c. El rango de la matriz con las dos columnas añadidas informa sobre ambas juntas, pero no reemplaza la inspección de cada sistema.

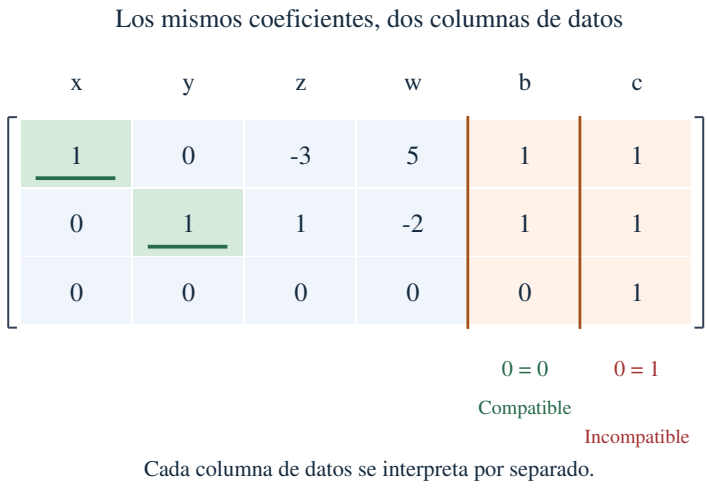


Figura 2.3. Un cálculo común permite estudiar distintos datos. Las columnas b y c son dos problemas separados: la contradicción de uno no vuelve incompatible al otro.

2.8. Existencia para cualquier término independiente

El rango de A también permite distinguir dos afirmaciones: tener a lo sumo una solución para cada dato y tener al menos una solución para cada dato. Una matriz rectangular puede cumplir una sin cumplir la otra.

Teorema 2.8. Para una matriz $m \times n$ sobre un cuerpo:

1. todos sus sistemas compatibles tienen solución única si y sólo si $\operatorname{rg}(A) = n$;
2. el sistema $Ax = b$ es compatible para toda columna $b \in \mathbb{F}^m$ si y sólo si $\operatorname{rg}(A) = m$;
3. para toda columna b hay una única solución si y sólo si $m = n = \operatorname{rg}(A)$.

Demostración. Si el rango es n, el teorema 2.7 da unicidad en cada sistema compatible. Si es menor, el sistema homogéneo es compatible y tiene alguna incógnita libre, por lo que sus soluciones no son únicas. Esto prueba la primera afirmación.

Para la segunda, fijemos una sucesión que reduzca A y apliquémosla también a b. Si el rango es m, no queda ninguna fila cero de coeficientes; cualquier columna transformada acompaña entonces un sistema compatible, porque no puede aparecer una contradicción de coeficientes nulos.

Si el rango es menor que m, la última fila de $\operatorname{rref}(A)$ es cero. Elijamos en el sistema reducido una columna d cuya última entrada sea uno y las otras cero. Ese sistema es incompatible. Para encontrar un dato original que lo produzca, aplicamos a d las operaciones inversas, en orden inverso, de la sucesión fijada; obtenemos una columna b. Al reducir $[A \,|\, b]$ mediante la sucesión original, reaparece exactamente $[\operatorname{rref}(A) \,|\, d]$, y por ello el sistema original también es incompatible. Queda demostrada la necesidad.

Tener exactamente una solución para todo dato reúne las dos primeras propiedades; exige rango n y rango m, y por tanto $m = n = \operatorname{rg}(A)$. Esa condición también basta. $\square$

Por ejemplo, $x + z = b_1$, $y + z = b_2$ siempre admite soluciones y deja libre z. En cambio, $x = b_1$, $y = b_2$, $x + y = b_3$ admite a lo sumo una pareja, pero sólo existe si $b_3 = b_1 + b_2$. La primera matriz tiene rango igual al número de filas; la segunda, al número de columnas.

Hasta dónde conviene reducir. Las operaciones necesarias dependen de qué queremos averiguar. Consideremos la familia real de ampliadas

$$M_h = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 6 \\ 4 & 11 & -1 & 15 \\ 2 & 7 & 1 & h \end{array}\right].$$

Las instrucciones $F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1$, $F_3 \leftarrow F_3 - F_1$ y luego $F_3 \leftarrow F_3 - F_2$, siempre con las filas actuales, producen

$$U_h = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & h-9 \end{array}\right].$$

Si únicamente queremos decidir compatibilidad, el cálculo ya terminó: para $h \neq 9$ la última fila exige $0 = h - 9$ y refuta cualquier solución; para $h = 9$ las dos filas restantes permiten resolver las principales después de elegir la libre. Normalizar todos los pivotes y limpiar sus columnas no cambiaría ninguna de esas conclusiones. También conocemos el rango de coeficientes, que es dos para todo h, y el de la ampliada, que vale dos cuando $h = 9$ y tres en los demás casos.

Para describir las soluciones en el caso compatible podemos seguir desde esta misma tabla. La segunda ecuación dice $y + z = 1$ después de dividir por tres. Elegir $z = t$ da $y = 1 - t$; la primera ecuación exige entonces $2x + 4(1 - t) - 2t = 6$, de donde $x = 1 + 3t$. Todas las soluciones son

$$(x, y, z) = (1 + 3t, 1 - t, t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Cada terna de esa forma satisface el sistema escalonado y, por equivalencia, el original. Recíprocamente, cualquier solución tiene algún valor $t = z$ que determina las otras dos coordenadas. La sustitución regresiva proporciona así una descripción completa sin haber reducido la ampliada hasta el final.

Si queremos comparar M_9 con otra matriz mediante sus formas reducidas, conviene hacer visibles las relaciones que todavía están mezcladas en la primera fila. Dividimos la segunda por tres, restamos cuatro veces esa fila de la primera y dividimos la primera por dos. Obtenemos

$$\operatorname{rref}(M_9) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

La parametrización se lee directamente, y esta matriz ofrece además un objeto único con el que comparar la reducción de otra ampliada del mismo tamaño. La tabla escalonada era suficiente para resolver; la forma reducida permite aplicar inmediatamente el criterio del corolario 2.6.

Para $h \neq 9$ también existe una forma reducida única, aunque ya sepamos que no hay soluciones. Normalizar la última fila de U_h y limpiar su columna, junto con la reducción de los coeficientes, da

$$\operatorname{rref}(M_h) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad (h \neq 9).$$

En esta familia todas las ampliadas incompatibles son equivalentes por filas, porque tienen exactamente esa forma reducida. La conclusión proviene de la reducción común y no sólo de que sus sistemas sean incompatibles; las matrices R, S de §2.5 mostraban que la incompatibilidad por sí sola no basta.

La elección del punto de parada exige conservar la razón de lo que ya se sabe. Una contradicción decide que el sistema es imposible; una tabla escalonada sin contradicciones permite elegir parámetros y resolver; una forma reducida fija un representante para comparar matrices. Continuar el cálculo es útil cuando proporciona la información que la pregunta todavía necesita.

2.9. Parámetros, cuerpos y límites de la representación

Para la familia real

$$A_t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & t \end{bmatrix},$$

la operación $F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1$ produce la segunda fila $(0, 0, t - 2)$. Si $t = 2$, el rango es uno y la forma reducida tiene primera fila $(1, 2, 1)$. Si $t \neq 2$, normalizamos el pivote de la tercera columna y lo eliminamos de la primera: la forma reducida tiene filas $(1, 2, 0)$ y $(0, 0, 1)$, y rango dos. La fórmula de esta última reducción requiere dividir por $t - 2$; no puede evaluarse después en $t = 2$ como si siguiera siendo válida.

El cuerpo también importa. La matriz con entradas enteras $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ tiene rango dos sobre $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$, porque al restar filas aparece un pivote -2. Si interpretamos sus entradas módulo dos, $-1 = 1$ y ambas filas coinciden: su rango sobre $\mathbb{F}_2$ es uno. Se trata de interpretar los enteros en cuerpos con distinta aritmética.

Cuando un cuerpo está contenido en otro, la situación es distinta. Una matriz racional puede reducirse utilizando únicamente escalares racionales. La forma reducida obtenida sigue siendo reducida sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, y las operaciones siguen siendo válidas; por unicidad es la misma forma reducida. Su rango no cambia. Una columna de datos racionales compatible sobre $\mathbb{C}$ ya era compatible sobre $\mathbb{Q}$: basta escoger cero para las incógnitas libres en la forma reducida. Las soluciones complejas adicionales, cuando las hay, proceden de permitir parámetros complejos.

Las filas de una ampliada pueden cambiarse para conservar soluciones; las columnas de incógnitas no tienen ese papel. Intercambiar las columnas de x y y en la ecuación $x+2y=5$ produce $2x+y=5$, cuyo conjunto de parejas ordenadas es diferente. Si intercambiamos también los nombres de las coordenadas podemos relacionar ambos problemas, pero debemos declarar esa correspondencia. Dejar fijos los nombres y mover los coeficientes altera la representación del sistema.

La forma reducida permite comparar tablas mediante una sucesión controlada de operaciones. Su unicidad fija los pivotes y las relaciones restantes; el rango retiene cuántas restricciones sobreviven. La tabla ampliada añade la información necesaria para decidir si los datos respetan esas restricciones y, cuando lo hacen, para leer todas las soluciones.

2.10. Ejercicios

Salvo indicación contraria, trabajar sobre $\mathbb{R}$. Al calcular una forma reducida, registrar operaciones suficientes para reconstruir el procedimiento. Al resolver sistemas, justificar también que se obtuvieron todas las soluciones.

Representar, reducir e interpretar. 1. Sea $A = \begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 4 & 3 & 5\end{bmatrix}$. Indicar tamaño, entradas a_{13}, a_{22}, segunda fila y tercera columna. Explicar por qué no puede ser igual a una matriz 3×2 con los mismos seis números.

2. Escribir la matriz de coeficientes y la ampliada de $y - 2z = 3$, $2x + z = 1$, $x - y = 0$, en el orden x, y, z. Reconstruir las ecuaciones desde la ampliada e indicar sus tamaños.

3. Clasificar como no escalonada, escalonada no reducida o reducida: $P = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ y $V = \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

4. Calcular forma reducida y rango de $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\end{bmatrix}$. Resolver el sistema homogéneo correspondiente.

5. Reducir $\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$. Indicar columnas pivote y describir las soluciones homogéneas.

6. Reducir $\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 2 & 5 & 1 & 4\end{bmatrix}$. Explicar la relación entre la tercera fila y las anteriores y parametrizar el sistema homogéneo.

7. Reducir $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 2 & 5\end{array}\right]$. Comparar los rangos de coeficientes y ampliada y resolver el problema de compatibilidad.

8. Resolver la ampliada $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 5 & 5\end{array}\right]$. Dar su forma reducida.

9. Resolver $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2\end{array}\right]$. Explicar por qué la primera incógnita es libre aunque esté a la izquierda de todos los pivotes.

10. Reducir $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 10 \end{array}\right]$. Indicar qué expresa cada fila de la forma reducida y decidir si una fila cero elimina la contradicción de otra.

11. Resolver sobre $\mathbb{Q}$ la ampliada $\left[\begin{array}{cc|c} 1/2 & 1/3 & 1 \\ 1 & -1/3 & 0 \end{array}\right]$, usando fracciones exactas.

12. Hallar la forma reducida de $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ sobre $\mathbb{Q}$ y al interpretar sus entradas en $\mathbb{F}_2$. Comparar rangos y soluciones homogéneas.

Parámetros y control del procedimiento. 13. Para $A_t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & t \end{bmatrix}$, determinar forma reducida, rango y columnas pivote para todos los valores reales de t.

14. Para la ampliada $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & b_1 \\ 2 & 4 & t & b_2 \end{array}\right]$, clasificar compatibilidad y dar todas las soluciones para cada caso.

15. Reducir la matriz del ejercicio 4 por dos rutas: una anulando primero la segunda fila y otra intercambiando primero las filas. Explicar qué parte del resultado debe coincidir y qué parte del trabajo puede diferir.

16. Una matriz se transforma, en este orden, por $F_2 \leftarrow F_2 - 3F_1$, intercambio de F_1, F_2, y $F_2 \leftarrow F_2/2$. Escribir la sucesión que deshace el cambio. ¿Puede ejecutarse esta descripción en característica dos?

17. Demostrar con detalle que la equivalencia por filas es una relación de equivalencia sobre las matrices de un tamaño fijo.

18. Para $f_1 = (1, 2, 0)$, $f_2 = (0, 1, 1)$ y $g_1 = f_1 - 2f_2$, $g_2 = f_2$, expresar una combinación arbitraria de los g_i mediante los f_i, y viceversa. Usarlo para verificar el lema 2.3 en este caso.

19. Si las filas no nulas de una escalonada tienen pivotes en las columnas $2, 4, 5$, ¿dónde puede comenzar una combinación no nula? Demostrar que todos esos comienzos son posibles. Dar dos filas no escalonadas cuya diferencia empiece después de los comienzos de ambas.

20. Demostrar que reducir una matriz ya escalonada no cambia sus columnas pivote. Explicar por qué esto permite calcular el rango deteniéndose antes de limpiar las entradas superiores.

Pruebas, ejemplos y contraejemplos. 21. Describir todas las matrices reducidas 2×2 sobre un cuerpo. Si el cuerpo tiene q elementos, ¿cuántas hay?

22. Construir dos matrices reducidas 2×3 con iguales columnas pivote y rango que no sean equivalentes por filas. Justificar la respuesta.

23. Interpretar como ampliadas las matrices $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Probar que sus sistemas tienen el mismo conjunto de soluciones, pero las ampliadas no son equivalentes por filas. ¿Contradice esto la proposición 2.1?

24. Intercambiar las columnas de coeficientes en $[1 \;\; 2 \,|\, 5]$. Exhibir una pareja que resuelva el sistema anterior y no el nuevo. Describir la correspondencia entre sus soluciones si se intercambian también las coordenadas.

25. En $x + y = 2$, $x - y = 0$, se aplica $F_2 \leftarrow F_2 - F_1$ sólo a los coeficientes y se conserva por error el término independiente cero. Resolver el sistema erróneo y el correcto, y localizar la información perdida.

26. Probar que una matriz no nula no puede ser equivalente por filas a la matriz cero. Demostrar que añadir al final una fila cero no cambia el número de pivotes, aunque la matriz resultante tenga otro tamaño.

27. Para $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, estudiar existencia y unicidad para todos los términos independientes. Explicar la diferencia entre rango máximo por filas y por columnas.

28. Reducir conjuntamente los dos sistemas con coeficientes $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ y términos independientes $(1, 2)$ y $(0, 1)$. Dar las dos soluciones y comprobarlas.

Síntesis y transferencia. 29. Para $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, dar una condición necesaria y suficiente sobre b_1, b_2, b_3 para que $Ax = b$ sea compatible. Parametrizar todas las soluciones y justificar la necesidad y suficiencia.

30. Aplicar la reducción anterior simultáneamente a $b = (3, 1, 7)$ y $c = (3, 1, 8)$. Explicar por qué una contradicción en la columna de c no invalida las soluciones del sistema con b.

31. Sea $\mathbb{K}$ un subcuerpo de $\mathbb{F}$. Probar que una matriz con entradas en $\mathbb{K}$ tiene la misma forma reducida y rango al considerarla sobre $\mathbb{F}$. Si sus datos b también están en $\mathbb{K}$, probar que la compatibilidad sobre $\mathbb{F}$ implica compatibilidad sobre $\mathbb{K}$. Explicar por qué los conjuntos de soluciones pueden ser distintos.

32. Hallar todos los polinomios reales $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ con $p(0) = 1$, $p(1) = 2$ y $p(-1) = 0$. Construir y reducir su ampliada, e interpretar el parámetro libre.

33. Usando el razonamiento del teorema 2.7, probar que añadir una columna a una matriz aumenta su rango a lo sumo en uno y nunca lo disminuye. Deducir que añadir k columnas aumenta el rango a lo sumo en k.

34. Contar las matrices reducidas 2×3 de rango uno sobre un cuerpo de q elementos. Separar los casos según la columna pivote y explicar por qué no hay duplicaciones.

35. Un sistema tiene ampliada reducida $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. Se añade $ax+by+cz = d$. Determinar cuándo conserva todas las soluciones, cuándo selecciona exactamente una y cuándo deja el conjunto vacío.

36. Se afirma que la forma reducida real de $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ es $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Encontrar el error y refutar el resultado mediante una solución homogénea. Explicar qué sucede con la misma afirmación al interpretar las entradas módulo dos.

Combinaciones de filas y elección del procedimiento. 37. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Probar que son equivalentes por filas expresando cada fila de una matriz como combinación de las de la otra, sin comenzar por un escalonamiento. Calcular después su forma reducida común. Explicar qué parte de la justificación faltaría si sólo se hubieran expresado las filas de B mediante las de A.

38. Para datos reales a, b, c, estudiar

$$N = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & a \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 3 & 0 & 3 & c \end{array}\right].$$

Detener primero la eliminación en cuanto permita decidir compatibilidad y rangos. Cuando existan soluciones, obtenerlas por sustitución regresiva. Calcular finalmente la forma reducida completa en cada caso y explicar qué información adicional permite usar para comparar N con otras matrices del mismo tamaño.

2.11. Soluciones razonadas

1. El tamaño es 2×3, $a_{13} = -1$, $a_{22} = 3$, la segunda fila es $(4, 3, 5)$ y la tercera columna es $(-1, 5)$ escrita verticalmente. La igualdad de matrices exige el mismo conjunto de posiciones; una tabla 3×2 organiza las entradas en posiciones distintas. Coincidir en la lista de números no basta para igualdad.

2. En el orden fijado,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad [A \,|\, b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Los tamaños son 3×3 y 3×4. Multiplicar cada entrada de una fila, salvo la última, por la incógnita de su columna y sumarlas reconstruye $0x + y - 2z = 3$, $2x + 0y + z = 1$ y $x - y + 0z = 0$. Los ceros sostienen la posición de las incógnitas que no se escriben en las ecuaciones abreviadas.

3. P es escalonada y no reducida: su segundo pivote vale tres y hay un dos encima. Q es reducida, con pivote en la segunda columna; el dos de la tercera columna no infringe ninguna condición. U no es escalonada porque una fila cero precede a una no nula. V es reducida con pivotes en columnas primera y tercera; el dos está en una columna no pivote.

4. Restar dos veces la primera fila de la segunda produce

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ya está reducida y su rango es uno. El homogéneo es $x + 2y + 3z = 0$: con $y = s$, $z = t$, todas las soluciones son $(-2s - 3t, s, t)$. La ecuación determina x de forma única para cada elección de las libres, y toda solución recupera sus parámetros como $s = y, t = z$.

5. Intercambiar las dos primeras filas da $(1, 0, -1)$ arriba y $(0, 1, 2)$ debajo. La tercera menos las dos primeras se anula, porque $(1, 1, 1) = (1, 0, -1) + (0, 1, 2)$. La forma reducida es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Los pivotes están en columnas primera y segunda, y el rango es dos. El homogéneo exige $x = z$, $y = -2z$; sus soluciones son $(t, -2t, t)$, con $t \in \mathbb{R}$.

6. La tercera fila es dos veces la primera más la segunda. Las instrucciones $F_3 \leftarrow F_3 - 2F_1$ y $F_3 \leftarrow F_3 - F_2$ la anulan. Después $F_1 \leftarrow F_1 - 2F_2$ da

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tiene rango dos. Las incógnitas tercera y cuarta pueden elegirse s, t, y las otras quedan $x_1 = 2s + 3t$, $x_2 = -s - 2t$. Sustituir produce cero en las tres ecuaciones; la tercera no añade ninguna condición por la combinación de filas señalada.

7. $F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1$ produce $(0, 0, 0 \,|\, 1)$. Limpiar la entrada dos que queda arriba de ese pivote mediante $F_1 \leftarrow F_1 - 2F_2$ da

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

El rango de coeficientes es uno y el de la ampliada es dos. La última fila representa $0 = 1$, así que no existe solución. El cero que aparece en el término independiente de la primera fila tras la reducción completa no borra esa contradicción.

8. La tercera fila es dos veces la primera menos la segunda, también en el término independiente: $2(3) - 1 = 5$. Se anula con esas operaciones y las otras ya están reducidas. Resulta

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Con $z = t$ se obtiene $(x, y, z) = (3 - 2t, 1 + t, t)$. Las dos primeras ecuaciones se cumplen por construcción y la tercera es su combinación, lo que prueba suficiencia; cualquier solución debe tener esa forma por las dos primeras.

9. La operación $F_1 \leftarrow F_1 - 2F_2$ produce

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right].$$

Las columnas pivote son segunda y tercera. Con $x_1 = s$, $x_4 = t$, quedan $x_2 = 7t$ y $x_3 = 2 - 3t$. Toda solución es $(s, 7t, 2 - 3t, t)$; la primera coordenada no aparece en ninguna ecuación porque su columna es cero. La libertad no depende de estar a la derecha de todos los pivotes.

10. Restar $2F_1$ de F_2 y $3F_1$ de F_3 da una fila cero y una fila $(0, 0 \mid 1)$. Intercambiarlas coloca la contradicción arriba de la fila cero. Restar tres veces la fila contradictoria de la primera limpia su término independiente. La forma reducida es

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Las filas representan $x + 2y = 0$, $0 = 1$ y $0 = 0$. El sistema exige las tres a la vez; una identidad no vuelve verdadera una contradicción. Los rangos son uno y dos y no hay solución.

11. Multiplicar la primera fila por dos produce $(1, 2/3 \mid 2)$. Restarla de la segunda da $(0, -1 \mid -2)$. Multiplicar esta fila por -1 y restar $2/3$ de ella a la primera produce $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$. La solución es $(2/3, 2)$, racional. Sus miembros izquierdos valen $1/3 + 2/3 = 1$ y $2/3 - 2/3 = 0$. Los dos pivotes dejan ninguna variable libre.

12. Sobre $\mathbb{Q}$, restar la primera fila de la segunda da $(0, -2)$; dividirla por -2 y limpiar arriba lleva a I_2, rango dos y sólo solución homogénea cero. Sobre $\mathbb{F}_2$, las filas originales son ambas $(1, 1)$; restarlas deja cero y la forma reducida es $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Su rango es uno y el homogéneo tiene $(0, 0)$ y $(1, 1)$. La división por -2 no está disponible en ese cuerpo porque ese elemento es cero.

13. Tras $F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1$, la segunda fila es $(0, 0, t - 2)$. Si $t = 2$, la forma reducida es $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y el rango uno, con pivote en columna primera. Si $t \neq 2$, dividir la segunda por $t - 2$ y restarla de la primera da $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, rango dos y pivotes en primera y tercera. Los casos cubren todos los parámetros y sólo se divide bajo la hipótesis apropiada.

14. La segunda fila menos dos veces la primera es $(0, 0, t - 2 \mid b_2 - 2b_1)$. Para $t \neq 2$, queda $z = (b_2 - 2b_1)/(t - 2)$; tomando $y = s$, la primera da $x = b_1 - 2s - z$. El sistema es compatible para todo b_1, b_2 y tiene una variable libre. Si $t = 2$, es compatible exactamente cuando $b_2 = 2b_1$; en ese caso $y = s, z = u$ son libres y $x = b_1 - 2s - u$. Si $t = 2$ y $b_2 \neq 2b_1$, la última fila es una contradicción. La primera ecuación y la diferencia de ecuaciones son equivalentes al sistema original, por lo que las familias son completas.

15. La primera ruta usa $F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1$ y llega directamente a $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. En la segunda intercambiamos filas, dividimos la primera por dos y restamos esa primera de la segunda; llegamos a la misma tabla. Difieren las operaciones y los pivotes intermedios, que en la segunda ruta empiezan por dos. La forma reducida y las columnas pivote finales deben coincidir por el teorema 2.5.

16. Se deshace primero el último paso: multiplicar F_2 por dos. Luego se intercambian F_1, F_2 y finalmente se ejecuta $F_2 \leftarrow F_2 + 3F_1$. Cada instrucción utiliza las filas actuales y revierte la anterior en orden inverso. En característica dos la operación original $F_2/2$ no está definida; por eso la descripción completa no constituye allí una sucesión válida de operaciones elementales.

17. Para reflexividad basta la sucesión vacía. Si una sucesión lleva A a B, invertir cada operación y ejecutarlas en orden inverso lleva B a A, lo que prueba simetría. Si una sucesión lleva A a B y otra lleva B a C, ejecutarlas consecutivamente lleva A a C y sigue siendo finita; esto prueba transitividad. El tamaño no cambia en ninguna operación, de modo que todo sucede en el conjunto de matrices fijado.

18. Para escalares u, v,

$$ug_1 + vg_2 = u(f_1 - 2f_2) + vf_2 = uf_1 + (v - 2u)f_2.$$

En sentido inverso, $f_1 = g_1 + 2g_2$ y $f_2 = g_2$, por lo que $af_1 + bf_2 = ag_1 + (2a + b)g_2$. Las dos identidades muestran que cada combinación de una pareja es combinación de la otra, sin afirmar que deban coincidir los coeficientes usados.

19. Los únicos comienzos posibles son las columnas $2, 4, 5$: la primera fila que tenga coeficiente no nulo en una combinación aporta una entrada no cancelable en su pivote. Cada comienzo se realiza tomando sólo la fila correspondiente con coeficiente uno. Sin escalonamiento, $f = (1, 0)$ y $g = (1, 1)$ comienzan ambas en columna primera, pero $g - f = (0, 1)$ comienza en la segunda. La coincidencia de comienzos permite la cancelación que el lema excluye.

20. Normalizar una fila por un escalar no nulo conserva dónde empieza. Limpiar encima de un pivote usa una fila que es cero antes de él; por tanto, no modifica el pivote anterior de una fila superior. Al proceder desde abajo, tampoco altera las columnas pivote posteriores ya limpias, pues la fila auxiliar tiene cero en ellas. Ninguna fila no nula se anula: conserva su pivote. La reducción mantiene todas las posiciones y su cantidad; por unicidad esa cantidad ya es el rango, sin necesidad de hacer las limpiezas superiores para contarlo.

21. En rango cero sólo está $0_{2\times 2}$. En rango dos los pivotes deben ocupar columnas primera y segunda y ambas deben estar limpias, de modo que sólo está I_2. En rango uno la fila no nula ocupa el primer lugar. Si su pivote está en la primera columna, la matriz es $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ con a arbitrario; si está en la segunda, es $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. No hay otros casos. Sobre un cuerpo de q elementos hay $1+1+q+1 = q+3$ matrices, sin duplicación porque los rangos o la columna pivote distinguen los grupos.

22. Sirven $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ambas son reducidas, tienen rango dos y pivotes en primera y tercera columnas. Son distintas en la entrada $(1, 2)$; si fueran equivalentes, la unicidad las haría iguales. Conocer rango y columnas pivote no determina los coeficientes de las otras columnas.

23. La primera ampliada exige $x = 0$ y $0 = 1$; la segunda, $y = 0$ y $0 = 1$. Los dos conjuntos de soluciones son vacíos. Sus matrices ya están reducidas y son distintas, por lo que no son equivalentes por filas. La proposición 2.1 sólo afirma que equivalencia por filas implica igualdad de soluciones; el ejemplo muestra que la implicación recíproca no vale en general.

24. La ampliada nueva es $[2 \;\; 1 \,|\, 5]$. La pareja $(5, 0)$ satisface $x + 2y = 5$, pero no $2x + y = 5$. Si (u, v) satisface la primera, la pareja (v, u) satisface la segunda porque $2v + u = 5$; intercambiar otra vez recupera la pareja inicial. Se tiene una correspondencia biyectiva que cambia coordenadas, no igualdad de conjuntos con coordenadas fijas.

25. El sistema erróneo es $x + y = 2$, $-2y = 0$, que da $(2, 0)$. El correcto es $x + y = 2$, $-2y = -2$, que da $(1, 1)$. En las ecuaciones originales, la pareja errónea tiene $x - y = 2$ en vez de cero. Al restar la primera ecuación se debía restar también su término independiente dos; conservar el cero destruyó la reversibilidad de la transformación de ecuaciones.

26. Toda operación elemental deja cero a la matriz cero. Si una matriz A pudiera transformarse en cero, la sucesión inversa partiría de cero y tendría que llegar también a cero; así $A = 0$. Para añadir una fila cero, ejecutar sobre las filas antiguas una reducción de A y dejar la nueva intacta da su forma reducida con una fila cero adicional. El número de pivotes se conserva. No llamamos equivalentes por filas a las matrices de tamaños distintos; comparamos sólo sus rangos.

27. La matriz A ya está reducida y tiene dos pivotes, uno por fila. Para cualquier (b_1, b_2), las soluciones son $(b_1 - t, b_2 - t, t)$; existen siempre y no son únicas. Para B, restar las dos primeras filas de la tercera produce una fila cero en coeficientes. Sus sistemas son $x = b_1, y = b_2, x + y = b_3$, compatibles exactamente si $b_3 = b_1 + b_2$ y entonces con única solución (b_1, b_2). Tiene un pivote por columna y no por fila. El primer requisito garantiza unicidad cuando existe; el segundo, existencia para cualquier dato, como precisa el teorema 2.8.

28. Empezamos con $\left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \end{array}\right]$. La operación $F_2 \leftarrow F_2 - 3F_1$ produce $(0, -1 \,|\, -1 \,|\, 1)$. Multiplicar esa fila por -1 y restar dos veces la nueva segunda a la primera da

$$\left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Las soluciones son $(-1,1)$ y $(2,-1)$. Para la primera, $-1+2=1$ y $-3+5=2$; para la segunda, $2-2=0$ y $6-5=1$. Los pivotes en ambas columnas de coeficientes prueban unicidad en los dos sistemas.

29. Restar $2F_1$ y luego F_2 de F_3 deja como última entrada $b_3-2b_1-b_2$, con coeficientes cero. Es necesario que se anule. Si $b_3=2b_1+b_2$, limpiar la segunda columna de la primera fila deja $x-3z+5w=b_1-2b_2$, $y+z-2w=b_2$. Elegir $z=s, w=t$ produce la familia de §2.7, que satisface esas dos ecuaciones y la identidad final. Esto prueba suficiencia. Cualquier solución determina s,t mediante sus últimas coordenadas y debe tener las dos primeras indicadas, lo que prueba exhaustividad.

30. Las operaciones del ejercicio anterior aplicadas a ambas columnas producen las filas $(1,0,-3,5\,|\,1\,|\,1)$, $(0,1,1,-2\,|\,1\,|\,1)$ y $(0,0,0,0\,|\,0\,|\,1)$. Con b las soluciones son $(1+3s-5t, 1-s+2t, s, t)$. Con c no hay solución por $0=1$. Cada columna de datos describe un sistema distinto y recibe las mismas operaciones; exigir la contradicción de la última columna al sistema de la primera mezclaría dos problemas.

31. Reducir sobre $\mathbb{K}$ sólo usa sumas, productos e inversos no nulos de ese cuerpo. Todos ellos siguen perteneciendo a $\mathbb{K}$ y son válidos en $\mathbb{F}$; un elemento no nulo de un subcuerpo sigue siendo no nulo en el cuerpo mayor. La tabla obtenida cumple las mismas condiciones de forma reducida sobre ambos cuerpos. Por unicidad es la forma reducida en los dos y su rango coincide. Aplicando el argumento también a la ampliada, los rangos de coeficientes y ampliada coinciden sobre $\mathbb{K}$ si coinciden sobre $\mathbb{F}$, lo que prueba compatibilidad. También puede elegirse cero para las libres y obtener una solución en $\mathbb{K}$. Los conjuntos pueden diferir: $x+y=0$ admite sólo parejas racionales al trabajar sobre $\mathbb{Q}$, y también parejas como $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ sobre $\mathbb{R}$.

32. En el orden a_0,a_1,a_2,a_3 la ampliada es

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Restar la primera fila de las otras dos deja $(0,1,1,1\,|\,1)$ y $(0,-1,1,-1\,|\,-1)$. Sumarlas produce $(0,0,2,0\,|\,0)$ en la tercera; dividir por dos y limpiar la tercera columna de la segunda da

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Con $a_3=u$, resulta $a_0=1, a_1=1-u, a_2=0$. Todos los polinomios son $p(t)=1+(1-u)t+ut^3$. El término variable $u(t^3-t)$ se anula en $0,1,-1$, por lo que las tres mediciones no lo distinguen. Sustituir verifica los datos y las ecuaciones reducidas prueban que no falta ningún polinomio de la forma pedida.

33. Reducir $[A\,|\,c]$ completamente y retirar la última columna deja una forma reducida equivalente a A, como se demostró en el teorema 2.7. Los pivotes de las primeras columnas son por tanto los de $\operatorname{rref}(A)$; la última columna tiene cero o un pivote adicional. Así el nuevo rango es $\operatorname{rg}(A)$ o $\operatorname{rg}(A)+1$. Al añadir k columnas de una en una, cada paso aumenta en cero o uno; por inducción el aumento total está entre cero y k. No hace falta que las columnas añadidas se interpreten como datos de un único sistema.

34. En rango uno la única fila no nula es la primera. Si el pivote ocupa columna primera, la fila es $(1,a,b)$ y hay q^2 elecciones. Si ocupa columna segunda es $(0,1,b)$ y hay q. Si ocupa columna tercera es $(0,0,1)$ y hay una. La segunda fila es cero en todos los casos. Se obtiene q^2+q+1. Las columnas pivote distinguen los casos y las entradas distinguen las matrices dentro de cada uno; la unicidad de la forma reducida impide identificar entre sí dos matrices distintas de la lista mediante equivalencia por filas.

35. El sistema antiguo tiene soluciones $(3-2t, 1+t, t)$. En la ecuación añadida, su miembro izquierdo es $3a+b+t(-2a+b+c)$. Si $k=-2a+b+c\neq 0$, la nueva condición fija $t=(d-3a-b)/k$ y selecciona exactamente una solución. Si $k=0$ y $d=3a+b$, toda la familia se conserva. Si $k=0$ y $d\neq 3a+b$, ninguna solución queda. Los casos son exhaustivos. La nueva ecuación puede aportar

una restricción efectiva, una condición ya satisfecha por todas o una condición incompatible con todas.

36. La instrucción correcta $F_1 \leftarrow F_1 - F_2$ da $(1, 0, -1)$ en vez de $(1, 0, 1)$. Por tanto, la forma reducida real es $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. La tupla $(1, -1, 1)$ satisface las dos ecuaciones homogéneas originales; en la primera ecuación de la tabla propuesta da $1 + 1 = 2 \neq 0$. Esa tabla no conserva las soluciones y no puede ser equivalente por filas. Módulo dos, $-1 = 1$: el paso de eliminación da precisamente la tabla propuesta, que entonces sí es correcta. La comprobación de un signo depende del cuerpo en el que se interpreta.

37. Llamemos f_1, f_2, f_3 a las filas de A y g_1, g_2, g_3 a las de B. Se comprueba que

$$g_1 = 2f_1 - 3f_2, \qquad g_2 = f_1 - f_2, \qquad g_3 = 0.$$

Estas identidades prueban $\mathcal{C}(B) \subseteq \mathcal{C}(A)$. Para recuperar las filas de A, resolvemos esas dos relaciones:

$$f_1 = 3g_2 - g_1, \qquad f_2 = 2g_2 - g_1, \qquad f_3 = f_1 + f_2 = 5g_2 - 2g_1.$$

Obtenemos también $\mathcal{C}(A) \subseteq \mathcal{C}(B)$ y, por la proposición 2.6a, $A \sim B$. Una sola inclusión permitiría todavía que B hubiera perdido combinaciones presentes en A; las expresiones inversas descartan esa posibilidad.

En A, restar de la tercera fila la suma de las dos primeras la anula; restar dos veces la segunda de la primera deja $(1, 0, 3)$. La forma reducida es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ya que las matrices son equivalentes, ésa es también la forma reducida de B. Como comprobación directa, en B podemos intercambiar las dos primeras filas, restar dos veces la primera de la segunda, multiplicar la segunda por -1 y restarla de la primera. Se obtiene la misma matriz.

38. Ejecutamos $F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1$, $F_3 \leftarrow F_3 - 3F_1$ y después $F_3 \leftarrow F_3 - F_2$. Resulta

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & a \\ 0 & 3 & -3 & b - 2a \\ 0 & 0 & 0 & c - a - b \end{array}\right].$$

El rango de coeficientes es dos. Si $c \neq a + b$, la última fila es contradictoria, el sistema es incompatible y la ampliada tiene rango tres; para ese diagnóstico ya podemos detenernos. Si $c = a + b$, la última fila es cero, ambos rangos valen dos y podemos elegir $z = t$. La segunda ecuación da $y = t + (b - 2a)/3$ y la primera da $x = (a + b)/3 - t$. La familia completa es

$$\left(\frac{a+b}{3} - t,\ t + \frac{b-2a}{3},\ t\right), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

La sustitución satisface las dos primeras ecuaciones y la tercera es su suma cuando $c = a + b$. Cualquier solución recupera el parámetro como $t = z$ y queda forzada a tener esa forma. Al normalizar el segundo pivote y limpiar encima, en el caso compatible obtenemos

$$\operatorname{rref}(N) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & (a+b)/3 \\ 0 & 1 & -1 & (b-2a)/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

En el caso incompatible, normalizamos además el pivote de la última columna y limpiamos las entradas superiores de esa columna. Queda

$$\operatorname{rref}(N) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad (c \neq a + b).$$

Las formas reducidas permiten aplicar el corolario 2.6 para comparar con cualquier otra matriz 3×4. En particular, todas las ampliadas incompatibles de esta familia son equivalentes por filas, aunque esa afirmación no se sigue únicamente de compartir el conjunto vacío de soluciones.

Lecturas y referencias

Kenneth Hoffman y Ray Kunze, *Linear Algebra*, 2.ª ed., §§1.3–1.4; Sergei Treil, *Linear Algebra Done Wrong*, cap. 2, §§2–3; Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra*, 4.ª ed., §§3.2–3.4. El enfoque mediante combinaciones de filas permite justificar la unicidad sin anticipar la teoría de dimensión.

Nathaniel Johnston, *Introduction to Linear and Matrix Algebra*, 2021, §§2.1,2.4.3 y apéndice B.2; Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel y Lawrence E. Spence, *Linear Algebra*, 5.ª ed., §§3.1–3.4. El apéndice de Johnston ofrece otra demostración de la unicidad de la forma reducida; el tratamiento del rango en ambos libros permite enlazar después el número de pivotes con la dimensión de la imagen.

Capítulo 3

Álgebra de matrices e invertibilidad

Dos instrumentos reciben las mismas mediciones x, y, pero las procesan en distinto orden. Uno duplica la primera medición y después suma la segunda a la primera; entrega $(2x + y, y)$. El otro suma primero y duplica después; entrega $(2x + 2y, y)$. Con el dato $(1, 1)$ obtenemos $(3, 1)$ y $(4, 1)$. Las operaciones utilizadas son las mismas, pero cambiar su orden altera el resultado.

Podemos registrar las dos reglas mediante las matrices

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La regla de D envía una columna (x, y) a $(2x, y)$; la de S, a $(x + y, y)$. En C02 escribíamos $Ax = b$ como abreviatura de un sistema. Esa misma lectura por filas permite ahora describir cálculos sucesivos: aplicar una matriz produce una columna que puede servir de entrada a otra. Buscamos una operación entre matrices que registre el cálculo completo y permita, cuando sea posible, deshacerlo.

El cuerpo de escalares será $\mathbb{F}$; los ejemplos numéricos y las figuras se calculan sobre $\mathbb{R}$, salvo indicación contraria. Los resultados formulados sobre $\mathbb{F}$ valen sobre cualquier cuerpo. Mantendremos explícitos los tamaños porque indican qué datos puede recibir y entregar cada operación.

3.1. Sumar tablas y encadenar cálculos

Denotaremos por $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ el conjunto de matrices $m \times n$ sobre $\mathbb{F}$, con $m, n \geq 1$. Para matrices del mismo tamaño definimos la suma y el producto por un escalar entrada a entrada:

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \qquad (cA)_{ij} = ca_{ij}.$$

La resta es $A - B = A + (-1)B$. Las leyes de suma, asociatividad, conmutatividad, cero y opuesto se verifican en cada posición mediante las leyes del cuerpo. Por ejemplo, $((A + B) + C)_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})$. La igualdad de todas las entradas prueba la igualdad de matrices. Del mismo modo, $c(A+B) = cA+cB$, $(c+d)A = cA+dA$, $(cd)A = c(dA)$ y $1A = A$: en la primera identidad, por ejemplo, cada entrada cumple $c(a_{ij} + b_{ij}) = ca_{ij} + cb_{ij}$. No sumamos matrices de tamaños distintos: las posiciones que deberían emparejarse no coinciden.

Para encontrar el producto que registra cálculos sucesivos, tomemos una columna x con p entradas. Una matriz B de tamaño $n \times p$ produce las cantidades $y_k = \sum_{j=1}^{p} b_{kj}x_j$. Una matriz A de tamaño $m \times n$ puede recibir esa columna y, y su salida de posición i será

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}y_k = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \sum_{j=1}^{p} b_{kj}x_j = \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \right) x_j.$$

Los nuevos coeficientes son las sumas que aparecen entre paréntesis. La fórmula deja de ser una regla arbitraria de filas y columnas: cada término cuenta una contribución que pasa por la posición intermedia k.

Si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y $B \in M_{n\times p}(\mathbb{F})$, su **producto** es la matriz $AB \in M_{m\times p}(\mathbb{F})$ dada por

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

El número de columnas de A debe coincidir con el de filas de B. El orden de aplicación a una columna es primero B y después A, de modo que $(AB)x = A(Bx)$. Se trata por ahora de reglas sobre columnas; su interpretación como transformaciones lineales entre espacios vectoriales se desarrollará después.

Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & -2\end{bmatrix}.$$

La entrada $(1,2)$ es $1\cdot 0 + 2\cdot 1 + (-1)(-1) = 3$. El producto tiene dos filas y dos columnas. El producto en el otro orden también existe, pero tiene tamaño 3×3; no podría ser igual al anterior.

Si $a_1,\dots,a_n$ son las columnas de A, la entrada i de Ax es $\sum_j a_{ij}x_j$, por lo que

$$Ax = x_1a_1 + \cdots + x_na_n.$$

Si las columnas de B son $b_1,\dots,b_p$, la fórmula del producto muestra que las de AB son $Ab_1,\dots,Ab_p$. Así, multiplicar por una matriz de varias columnas ejecuta el mismo cálculo para varios datos. Mirando las filas, la fila i de AB es la combinación de las filas de B cuyos coeficientes son las entradas de la fila i de A.

3.2. Las leyes que conserva el producto

Proposición 3.1. Siempre que los tamaños permitan las operaciones, el producto matricial es asociativo y distributivo:

$$(AB)C = A(BC), \qquad A(B+C) = AB + AC, \qquad (A+B)C = AC + BC.$$

Para un escalar c, además $c(AB) = (cA)B = A(cB)$. Si A es $m\times n$, entonces $I_mA = A = AI_n$ y los productos de A con matrices cero compatibles son cero.

Demostración. Para la asociatividad, sean A de tamaño $m\times n$, B de tamaño $n\times p$ y C de tamaño $p\times q$. Ambos productos tienen tamaño $m\times q$. Sus entradas se comparan distribuyendo las sumas finitas:

$$\begin{aligned}((AB)C)_{ij} &= \sum_{\ell=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{k\ell}\right)c_{\ell j}\\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(\sum_{\ell=1}^{p} b_{k\ell}c_{\ell j}\right) = (A(BC))_{ij}.\end{aligned}$$

Cambiar el orden de sumación es válido porque sólo estamos reagrupando una cantidad finita de términos; no se ha intercambiado el orden de las matrices. Para la primera distributividad, la entrada de $A(B+C)$ es $\sum_k a_{ik}(b_{kj}+c_{kj}) = \sum_k a_{ik}b_{kj} + \sum_k a_{ik}c_{kj}$. Para la segunda se distribuye $\sum_k (a_{ik}+b_{ik})c_{kj}$ de la misma manera. En ambos casos obtenemos las entradas de la suma anunciada.

Un escalar puede extraerse de cada sumando, lo que prueba las dos identidades con c. La entrada (i,j) de I_mA es $\sum_k \delta_{ik}a_{kj} = a_{ij}$, donde δ_{ik} vale uno si $i=k$ y cero en otro caso. Para AI_n, la suma $\sum_k a_{ik}\delta_{kj}$ también vale a_{ij}. Si uno de los factores es cero, cada sumando del producto es cero. □

En el problema inicial,

$$SD = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \qquad DS = \begin{bmatrix}2 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

La primera matriz registra duplicar y luego sumar; la segunda, sumar y luego duplicar. El producto **no es conmutativo**. Incluso con matrices cuadradas del mismo tamaño, la igualdad $AB = BA$ es una propiedad que hay que comprobar. Cuando se cumple diremos que A y B conmutan.

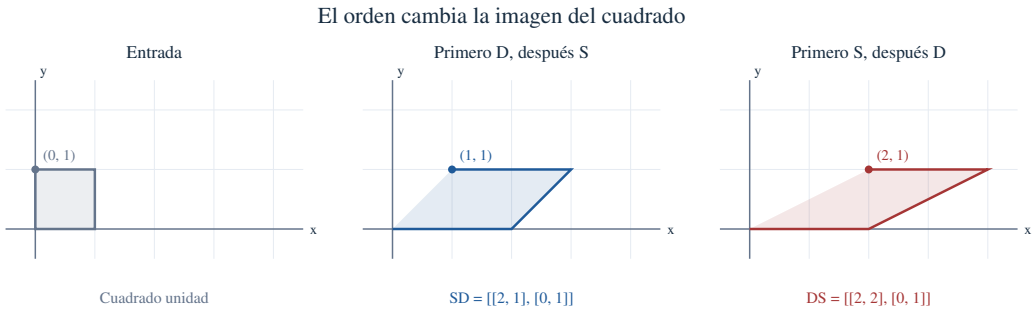


Figura 3.1. Las imágenes del cuadrado unidad por SD y DS tienen vértices distintos. La diferencia se debe al orden de los dos cálculos, con escalas iguales en los ejes de cada panel.

Tampoco se conserva la regla de que un producto cero obliga a anular un factor. La matriz

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

es no nula y satisface $N^2 = 0$. Aplicada a (x, y) entrega $(y, 0)$; aplicada por segunda vez entrega $(0, 0)$. Por eso tampoco podemos cancelar un factor matricial no nulo como si fuera un escalar no nulo: $NN = N0$ y, sin embargo, $N \neq 0$.

Para una matriz cuadrada definimos $A^0 = I_n$ y $A^{r+1} = A^r A$. La asociatividad asegura que $A^{r+s} = A^r A^s$ para enteros no negativos: se demuestra por inducción en s, comenzando por la identidad. Otra inducción da $(A^r)^s = A^{rs}$. Al desarrollar $(A+B)^2$ obtenemos $A^2 + AB + BA + B^2$; sólo si A, B conmutan podemos reunir los términos centrales en $2AB$.

3.3. Transpuesta y escritura por bloques

La **transpuesta** de $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ es la matriz $A^{\mathsf{T}} \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$ con $(A^{\mathsf{T}})_{ij} = a_{ji}$. Intercambia filas y columnas sin cambiar las entradas. Sobre $\mathbb{C}$ tampoco conjuga los números: transponer y conjugar son operaciones distintas.

Proposición 3.2. Se cumple $(A^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} = A$, $(A+B)^{\mathsf{T}} = A^{\mathsf{T}} + B^{\mathsf{T}}$, $(cA)^{\mathsf{T}} = cA^{\mathsf{T}}$ y

$$(AB)^{\mathsf{T}} = B^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}}.$$

Demostración. Las tres primeras igualdades se obtienen leyendo en posición (i, j) las entradas a_{ij}, $a_{ji} + b_{ji}$ y ca_{ji}. Para la última, ambos miembros tienen tamaño $p \times m$ si A es $m \times n$ y B es $n \times p$. Su entrada (i, j) es, respectivamente,

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki} \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{n} (B^{\mathsf{T}})_{ik} (A^{\mathsf{T}})_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk}.$$

Coinciden porque los escalares del cuerpo conmutan. □

Podemos dividir una matriz en rectángulos menores para conservar a la vista una organización del problema. En una escritura como

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

cada símbolo representa una matriz, llamada **bloque**. Si las alturas de las dos franjas son r, s y las anchuras son u, v, los tamaños de los bloques son $r \times u$, $r \times v$, $s \times u$ y $s \times v$. Esas condiciones son necesarias incluso para que la tabla completa exista.

Proposición 3.3. Si las particiones interiores coinciden, el producto por bloques obedece la misma regla de filas y columnas:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{bmatrix}.$$

Demostración. En cada entrada del producto ordinario, dividimos la suma sobre el índice intermedio en los dos intervalos que determina la partición. Para una entrada del bloque superior

izquierdo, la primera suma es la entrada correspondiente de AE y la segunda, la de BG. El mismo razonamiento en las otras franjas produce los otros tres bloques. La coincidencia de las particiones garantiza que todos los productos y sumas tienen los tamaños necesarios. □

El orden de los factores sigue siendo obligatorio. Por ejemplo, si B es $r \times s$,

$$\begin{bmatrix} I_r & B \\ 0 & I_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & -B \\ 0 & I_s \end{bmatrix} = I_{r+s},$$

y el producto en el otro orden también es la identidad. Los bloques cero tienen aquí los tamaños que impone la tabla. Esta cancelación será un primer ejemplo de cómo deshacer una operación completa conservando el orden de sus partes.

3.4. Las operaciones elementales como productos

Una **matriz elemental** de tamaño $m \times m$ es la que se obtiene aplicando una operación elemental por filas a I_m.

Proposición 3.4. Si E se obtiene de I_m mediante una operación elemental, EA ejecuta esa misma operación sobre cualquier matriz A de m filas. Si $E_1, \ldots, E_k$ corresponden a operaciones ejecutadas en ese orden, su efecto conjunto es $E_k \cdots E_1 A$.

Demostración. La fila i de un producto es la combinación de filas del factor derecho indicada por la fila i del izquierdo. Al intercambiar filas r, s de I_m, la fila r del producto selecciona la fila s de A, la fila s selecciona la fila r y las demás seleccionan su propia fila. Si multiplicamos la fila r de I_m por $c \neq 0$, el producto selecciona c veces la fila r de A y deja las restantes intactas.

Para $F_r \leftarrow F_r + cF_s$, con $r \neq s$, la fila r de E tiene uno en la posición r, c en la posición s y ceros en las demás. Selecciona exactamente $f_r + cf_s$; cada otra fila sigue seleccionando su propia fila de A. Esto prueba los tres casos. Al aplicar primero E_1, después E_2 y así sucesivamente, la asociatividad da $E_k \cdots E_1 A$. □

En particular, la instrucción $F_2 \leftarrow F_2 - 3F_1$ en tres filas está representada por

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La entrada -3 está en la posición $(2,1)$: la fila que cambia se escribe primero, la que se utiliza después. Multiplicar por la derecha tiene otra interpretación. Si Q se obtiene de I_n mediante una operación sobre sus columnas, AQ realiza esa operación sobre las columnas de A, como se comprueba leyendo cada columna del producto. En particular, el mismo E del ejemplo, usado a la derecha de una matriz de tres columnas, reemplaza su primera columna por la primera menos tres veces la segunda. No ejecuta una operación sobre la segunda fila.

La matriz que registra toda una reducción puede calcularse sin multiplicar separadamente sus factores. Transportamos I_m junto a A:

$$[A \,|\, I_m] \longrightarrow [R \,|\, P].$$

Si ambas franjas recibieron las mismas operaciones, $P = E_k \cdots E_1$ y $PA = R$. Las filas de P son las listas de multiplicadores que expresan las filas de R mediante las originales. Así se recupera en una sola tabla el seguimiento de certificados de C01. Cuando una fila de R es cero pero la fila correspondiente de Pb vale uno, esa fila de P es un certificado de incompatibilidad para $Ax = b$.

3.5. Deshacer una matriz

Una matriz cuadrada $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ es **invertible** si existe B del mismo tamaño con $AB = BA = I_n$. Esa matriz es su **inversa** y se denota A^{-1}. Una matriz cuadrada que no es invertible se llama **singular**.

La inversa, si existe, es única. Si B, C fueran dos inversas, entonces $B = B(AC) = (BA)C = C$. La prueba utiliza el orden de los factores, la asociatividad y las dos identidades de inversa; no cancela una matriz cuya invertibilidad aún no se conozca.

Para S del comienzo, la inversa es $\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$: después de obtener $(x+y, y)$ podemos restar la segunda coordenada de la primera y recuperar (x, y). La matriz $J = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, en cambio, envía todos los pares (x, y) a $(x, 0)$. Ha perdido la segunda coordenada. Si tuviera inversa, $J(1,0) = J(1,1)$ permitiría recuperar simultáneamente dos entradas distintas desde la misma salida, lo cual es imposible.

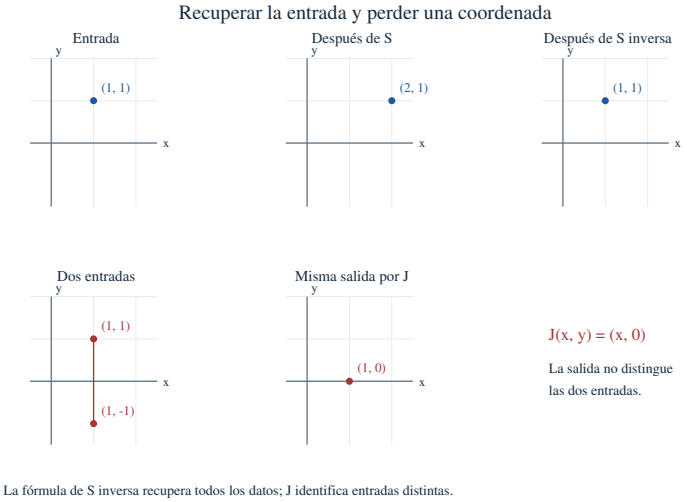


Figura 3.2. Deshacer la cizalla recupera el dato completo. Para J, las entradas $(1,-1)$ y $(1,1)$ comparten la salida $(1,0)$, de modo que ninguna regla inversa puede recuperar ambas.

Proposición 3.5. Si A, B son invertibles del mismo tamaño y $c \neq 0$, entonces

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \qquad (A^{-1})^{-1} = A, \qquad (cA)^{-1} = c^{-1}A^{-1}, \qquad (A^{\mathsf{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathsf{T}}.$$

Demostración. Multiplicamos AB por la candidata en ambos órdenes:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = I, \qquad (B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = I.$$

Para la segunda identidad, las igualdades que definen la inversa son simétricas en A, A^{-1}. Para la tercera, $(cA)(c^{-1}A^{-1}) = I$ y $(c^{-1}A^{-1})(cA) = I$ por las leyes con escalares. Finalmente, transponer $A^{-1}A = I$ y $AA^{-1} = I$ da $A^{\mathsf{T}}(A^{-1})^{\mathsf{T}} = I$ y $(A^{-1})^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}} = I$. En cada caso, unicidad identifica la inversa. $\square$

Una matriz elemental es invertible: la operación elemental inversa produce una matriz E' con $E'E = EE' = I$, por la proposición 3.4 aplicada a I_m. Para el intercambio se repite el intercambio; para el escalado por c se usa c^{-1}; para sumar c veces otra fila se suma $-c$ veces esa fila. La inversa también es elemental.

Para una matriz invertible definimos $A^{-r} = (A^{-1})^r$, $r \geq 1$. Las potencias de una misma matriz siguen cumpliendo $A^{r+s} = A^r A^s$ para enteros cualesquiera: la asociatividad permite reunir factores y cancelar cada pareja AA^{-1} o $A^{-1}A$. Esto no da permiso para reunir potencias de matrices diferentes sin comprobar que conmutan.

3.6. Los criterios de invertibilidad y el caso rectangular

Teorema 3.6. Para $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ son equivalentes:

1. A es invertible;
2. $\operatorname{rg}(A) = n$;
3. $\operatorname{rref}(A) = I_n$;
4. $Ax = 0$ tiene sólo la solución cero;
5. para todo $b \in \mathbb{F}^n$, el sistema $Ax = b$ tiene solución;
6. para todo $b \in \mathbb{F}^n$, el sistema $Ax = b$ tiene exactamente una solución;
7. A es producto de matrices elementales, admitiendo el producto vacío I_n.

Demostración. Si A es invertible, la columna $A^{-1}b$ satisface $Ax = b$ y cualquier solución cumple $x = A^{-1}Ax = A^{-1}b$. Esto da la condición 6. El teorema 2.8 y la lectura del homogéneo en C02 prueban que las condiciones 2,4,5,6 son equivalentes, porque el número de filas y el de columnas son ambos n.

Una matriz reducida $n \times n$ con n pivotes debe tener uno en cada fila y columna, con el orden impuesto por el escalonamiento. Es I_n. Recíprocamente, esa forma reducida tiene rango n, así que 2 y 3 son equivalentes.

Si se cumple 3, una reducción proporciona $E_k \cdots E_1 A = I_n$. El producto $P = E_k \cdots E_1$ es invertible porque cada factor lo es y la proposición 3.5 permite invertir sucesivamente productos. Multiplicar por P^{-1} da $A = P^{-1}$, que es invertible y, además, producto de matrices elementales inversas. Esto prueba 1 y 7 desde 3. Finalmente, 7 implica 1 porque un producto de matrices elementales es invertible. Todas las condiciones quedan conectadas. □

No intervino ningún determinante. La equivalencia entre existencia y unicidad para todos los datos procede del hecho de tener el mismo número finito de filas y columnas.

Corolario 3.7. Para matrices cuadradas A, B del mismo tamaño, basta una de las igualdades $BA = I_n$ o $AB = I_n$ para concluir que ambas son inversas.

Demostración. Si $BA = I_n$ y $Ax = 0$, entonces $x = BAx = 0$. El teorema 3.6 hace invertible a A; multiplicar $BA = I_n$ por A^{-1} a la derecha da $B = A^{-1}$. Si $AB = I_n$, aplicamos el razonamiento anterior a B, que tiene a A como inversa por la izquierda. □

Las identidades laterales también tienen sentido para matrices rectangulares, pero pueden separar propiedades distintas. Para A de tamaño $m \times n$, una **inversa por la izquierda** es una matriz L de tamaño $n \times m$ con $LA = I_n$, y una **inversa por la derecha** es una matriz R del mismo tamaño con $AR = I_m$.

Teorema 3.8. Una matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ admite inversa por la izquierda si y sólo si tiene rango n, y admite inversa por la derecha si y sólo si tiene rango m.

Demostración. Si $LA = I_n$, toda solución de $Ax = 0$ satisface $x = LAx = 0$; por C02, el rango es n. Para la vuelta, reduzcamos A por filas y escribamos $EA = \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}$, forma que debe tener una reducida de rango n. Aquí $m \geq n$ y E es una matriz invertible de tamaño m. La matriz $Q = [I_n \ 0]$, de tamaño $n \times m$, selecciona las primeras n filas; si $m = n$, se omiten los bloques cero y $Q = I_n$. Entonces $QEA = I_n$, de modo que QE es una inversa por la izquierda.

Si $AR = I_m$, para cada b la columna Rb resuelve $Ax = b$ y, por el teorema 2.8, el rango es m. Recíprocamente, si el rango es m, resolvemos $Ar_j = e_j$ para cada una de las m columnas de I_m. Al reunir las soluciones en $R = [r_1 \ \cdots \ r_m]$, la lectura por columnas da $AR = I_m$. □

Por ejemplo, $A = [1 \ 0]$ y $R = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ satisfacen $AR = I_1$, pero $RA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq I_2$. La regla R escoge una entrada para cada salida de A; no recupera todas las entradas posibles que se habían enviado a esa salida. El caso rectangular impide transferir el corolario 3.7 sin su hipótesis de tamaño cuadrado.

3.7. Calcular una inversa y leer sus columnas

Proposición 3.9. Si una sucesión de operaciones por filas transforma $[A \,|\, I_n]$ en $[I_n \,|\, B]$, entonces $B = A^{-1}$. Tal sucesión existe si y sólo si A es invertible.

Demostración. La matriz que registra la sucesión multiplica a ambos bloques por la izquierda. El bloque derecho final es esa matriz B y el izquierdo es BA, así que $BA = I_n$. El corolario 3.7 da $B = A^{-1}$. Si A es invertible, el teorema 3.6 garantiza una reducción de A a I_n, y podemos transportar el bloque derecho con las mismas operaciones. □

Para $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, la reducción es

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right].$$

Se ejecutan $F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1$ y $F_1 \leftarrow F_1 - 2F_2$. Por tanto, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. La multiplicación directa en ambos órdenes da I_2. Para datos (b_1, b_2), la solución única es $(5b_1 - 2b_2, -2b_1 + b_2)$.

Cada columna de A^{-1} es la solución de un problema concreto: $Ax = e_j$. Calcular la inversa reúne esos n problemas en una sola reducción. Si sólo se necesita resolver un sistema, podemos transportar su única columna b y sustituir regresivamente; no es necesario calcular todas las columnas de la inversa.

Si al reducir el bloque de coeficientes no llegamos a I_n, el teorema 3.6 certifica que no hay inversa. No debemos interpretar sin más el bloque derecho obtenido como A^{-1}. Las operaciones pueden seguir siendo reversibles sobre las filas aunque la regla $x \mapsto Ax$ haya perdido información sobre las columnas de entrada.

3.8. Conservar la eliminación en factores triangulares

Una matriz cuadrada es **triangular superior** si $a_{ij} = 0$ para $i > j$ y **triangular inferior** si $a_{ij} = 0$ para $i < j$. Diremos que tiene **diagonal de unos** si $a_{ii} = 1$ para todo i.

Proposición 3.10. Una matriz triangular es invertible si y sólo si todos sus elementos diagonales son no nulos. Su inversa tiene la misma orientación triangular. El producto de dos matrices triangulares de la misma orientación sigue siendo triangular y su diagonal es el producto entrada a entrada de las diagonales.

Demostración. Para una triangular superior con diagonal no nula, la sustitución regresiva resuelve $Tx = b$ de forma única para todo b; el teorema 3.6 da invertibilidad. Si aparece un cero diagonal, sea k la primera posición donde ocurre. En el homogéneo fijamos $x_k = 1$ y $x_j = 0$ para $j > k$. Las filas desde k hacia abajo ya se satisfacen. Las anteriores tienen pivotes diagonales no nulos, y por sustitución regresiva determinan $x_{k-1}, \dots, x_1$. Se obtiene una solución no nula, por lo que T es singular. Para una triangular inferior se aplica el resultado a su transpuesta, usando la proposición 3.5.

La columna j de la inversa superior resuelve $Tx = e_j$. Desde la última fila hasta la fila $j+1$, el segundo miembro es cero y la sustitución obliga a $x_i = 0$ para $i > j$. Es precisamente la condición de triangularidad superior de T^{-1}. Para la inferior se razona desde arriba o se transpone.

Si L, M son inferiores, una contribución no nula a $(LM)_{ij}$ exige $j \le k \le i$. Para $i < j$ no hay tal k, y para $i = j$ sólo contribuye $k = i$; quedan triangularidad y la fórmula diagonal. Para matrices superiores el intervalo se invierte y el argumento es igual. □

En particular, la inversa de una triangular inferior con diagonal de unos vuelve a tener diagonal de unos. La forma triangular permite deshacer la matriz respetando un orden conocido de incógnitas.

Una **factorización LU** escribe $A = LU$, con L triangular inferior con diagonal de unos y U triangular superior. La eliminación hacia delante puede construirla mientras guarda sus propios multiplicadores.

Teorema 3.11. Supongamos que una matriz cuadrada se reduce a una triangular superior U utilizando sólo las instrucciones $F_i \leftarrow F_i - \ell_{ij} F_j$ con $i > j$, en orden de columnas $j = 1, \dots, n-1$, sin intercambios ni escalados. Entonces $A = LU$, donde L tiene diagonal de unos y las entradas inferiores ℓ_{ij} utilizadas, tomando cero si no hizo falta esa anulación.

Demostración. La fila pivote j ya es su fila final u_j cuando se usa para modificar filas inferiores: ninguna instrucción posterior la cambia. La fila i de A pierde sucesivamente $\ell_{i1}u_1, \dots, \ell_{i,i-1}u_{i-1}$ y queda convertida en u_i. Por ello su fila original satisface $a_i = u_i + \sum_{j<i} \ell_{ij} u_j$. Estas son exactamente las filas del producto LU, por la lectura de un producto como combinaciones de filas. □

Por ejemplo,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{U}.$$

Los multiplicadores son $\ell_{21} = 2$, $\ell_{31} = 1$ y $\ell_{32} = 1$. Se obtienen al restar dos veces la primera fila de la segunda, una vez la primera de la tercera y, después, la segunda actual de la tercera. En L se registran los números que se restaron, con su signo en la expresión $F_i - \ell_{ij} F_j$; no se copian cambiados de signo los coeficientes de esa instrucción.

Para resolver $Ax = b$, primero resolvemos $Ly = b$ hacia delante y después $Ux = y$ hacia atrás. Con $b = (4, 10, 9)$, la primera etapa da $y = (4, 2, 3)$ y la segunda $x = (1, -1, 3)$. Con otro dato se

reutilizan los mismos factores: para $b = (1, 3, 1)$ se obtiene $y = (1, 1, -1)$ y $x = (0, 2, -1)$. Las dos etapas son equivalentes a $LUx = b$ porque L es invertible; cada sustitución tiene una solución única en este ejemplo.

3.9. Cuando hace falta intercambiar filas

La matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ es invertible y no admite una factorización LU de la clase anterior. Si $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \ell & 1 \end{bmatrix}$ y $U = \begin{bmatrix} u & v \\ 0 & w \end{bmatrix}$, la entrada $(1,1)$ del producto fuerza $u = 0$, y la entrada $(2,1)$ sería entonces $\ell u = 0$, cuando debería ser uno. La eliminación necesita un intercambio antes de poder usar la primera columna.

Una **matriz de permutación** es una matriz obtenida al reordenar las filas de I_n. Contiene exactamente un uno en cada fila y columna y ceros en las demás. Multiplicar por ella a la izquierda reordena las filas del otro factor. Su transpuesta deshace la reordenación: en el producto $P^{\mathsf{T}}P$ las entradas comparan columnas distintas de I_n y dan cero, salvo al comparar cada columna consigo misma, que da uno. También $PP^{\mathsf{T}} = I_n$, por lo que $P^{-1} = P^{\mathsf{T}}$.

Para conservar esa reordenación escribiremos $PA = LU$. Ésta es nuestra convención: se permutan primero las filas de A, y L tiene diagonal de unos. Equivale a $A = P^{\mathsf{T}}LU$; la matriz que aparece delante de L en esa segunda escritura es la permutación inversa.

Teorema 3.12. Para toda matriz cuadrada invertible A sobre un cuerpo existen una matriz de permutación P, una triangular inferior L con diagonal de unos y una triangular superior invertible U tales que $PA = LU$.

Demostración. Procedemos por inducción en el tamaño. Para $n = 1$, tomamos $P = L = [1]$ y $U = A$, cuya entrada es no nula. Supongamos establecido el resultado para tamaño $n - 1$. La primera columna de una matriz invertible no puede ser cero, porque en ese caso $Ae_1 = 0$. Un intercambio, si hace falta, sitúa una entrada no nula a en la primera posición. Denotando ese intercambio por P_1, escribimos por bloques

$$P_1 A = \begin{bmatrix} a & r \\ c & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c/a & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & r \\ 0 & D - (c/a)r \end{bmatrix}.$$

Aquí r es una fila, c una columna y D una matriz de tamaño $n - 1$. La fórmula se verifica multiplicando los bloques. Sea $H = D - (c/a)r$. Si $Hy = 0$, la columna que tiene primera entrada $-ry/a$ y bloque restante y resuelve el homogéneo de P_1A. Como P_1A es invertible, esa columna es cero y, en particular, $y = 0$. El teorema 3.6 asegura que H es invertible.

La hipótesis inductiva proporciona $P_2H = L_2U_2$. Multiplicando la tabla anterior por la permutación de bloques $\operatorname{diag}(1, P_2)$ obtenemos la identidad

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} P_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ P_2 c/a & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & r \\ 0 & U_2 \end{bmatrix}.$$

El factor izquierdo que multiplica a A es una permutación P; el primer factor derecho es inferior con diagonal de unos y el segundo es superior con diagonal no nula. La proposición 3.10 hace invertible a este último. Esto construye los tres factores y cierra la inducción. □

La expresión P_2c/a explica un detalle del cálculo: los intercambios que ocurren después de una etapa también deben reordenar los multiplicadores que esa etapa ya había guardado. Consideremos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Restar $2F_1$ de F_2 y $3F_1$ de F_3 deja las filas inferiores $(0,0,1)$ y $(0,1,1)$. Debemos intercambiarlas para continuar con pivote en la segunda columna. Los multiplicadores $2, 3$ de la primera etapa cambian de orden junto con esas filas. Resulta

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad PA = LU.$$

Los multiplicadores cambian de fila con sus datos

PA				L				U		
1	1	0		1	0	0		1	1	0
3	4	1	=	3	1	0	×	0	1	1
2	2	1		2	0	1		0	0	1

Intercambio de filas 2 y 3: los multiplicadores 2, 3 pasan a 3, 2.

Las filas de L indican las combinaciones de filas de U que reconstruyen PA.

Figura 3.3. La primera columna inferior de L guarda $3, 2$ después del intercambio. Mantener el orden anterior $2, 3$ produciría un producto distinto de PA.

Una vez calculados los factores de una matriz invertible, el sistema $Ax = b$ se resuelve mediante $Ly = Pb$ y $Ux = y$. La columna de datos debe recibir la misma permutación que los coeficientes. Este procedimiento reutiliza la eliminación para datos sucesivos; no necesita formar la inversa completa ni promete por sí solo controlar los errores de redondeo de una implementación numérica.

3.10. Ejercicios

Trabajar sobre $\mathbb{R}$ salvo indicación contraria. Comprobar los tamaños antes de operar y justificar las afirmaciones sobre existencia, unicidad e invertibilidad sin determinantes.

Operaciones y orden de composición. 1. Para $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, calcular $2A - B$ y $A + B$. Resolver $X + B = 2A$ y explicar por qué la solución es única.

2. Sean A de tamaño 2×3, B de tamaño 3×4 y C de tamaño 4×2. Indicar cuáles de AB, BA, BC, CB, ABC, CAB existen y sus tamaños.

3. Para las matrices rectangulares de §3.1, calcular el producto en el orden inverso. Verificar la entrada $(3, 2)$ mediante la regla de composición.

4. Para S, D del comienzo, calcular SDx y DSx con $x = (u, v)$. Determinar exactamente qué entradas dan la misma salida en ambos órdenes.

5. Calcular N^r para todo entero $r \geq 1$, donde $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Construir dos matrices no nulas distintas B, C con $NB = NC$.

6. Para $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, probar directamente que Ae_j es su columna j. Deducir que si $Ax = Bx$ para todas las columnas $x \in \mathbb{F}^n$, entonces $A = B$.

7. Calcular las dos transpuestas de $A = \begin{bmatrix} 1 & i & 2 \\ 0 & -i & 1 \end{bmatrix}$ y verificar $(A^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} = A$. ¿Se ha cambiado i por $-i$ al transponer?

8. Para S, D, calcular $(SD)^{\mathsf{T}}$ y $S^{\mathsf{T}}D^{\mathsf{T}}$. Localizar el error en la afirmación $(AB)^{\mathsf{T}} = A^{\mathsf{T}}B^{\mathsf{T}}$.

9. Si A es 2×2 y B es 2×3, decidir si las escrituras $\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & I_3 \end{bmatrix}$ son particiones rectangulares por bloques con cortes comunes de filas y columnas. Dar los tamaños necesarios del bloque cero en la segunda.

10. Si B es $r \times s$, calcular $\begin{bmatrix} I_r & B \\ 0 & I_s \end{bmatrix}^k$ para enteros $k \geq 0$. Probar la fórmula por inducción.

Matrices elementales e inversas. 11. Escribir las matrices elementales de tamaño tres para $F_1 \leftrightarrow F_3$, $F_2 \leftarrow -2F_2$ y $F_3 \leftarrow F_3 + 4F_1$. Dar sus inversas y verificar una de ellas por producto.

12. Sea $E = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Calcular EA, AE e interpretar las dos operaciones.

13. La matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ se reduce como en §3.7. Escribir E_1, E_2, comprobar $E_2E_1 = A^{-1}$ y expresar A como producto de matrices elementales.

14. Calcular por operaciones sobre $[A \,|\, I]$ la inversa de $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Resolver con ella $Ax = (3, 2)$.

15. Mostrar que $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ es singular mediante una columna no nula x con $Ax = 0$. Explicar por qué ninguna elección del bloque derecho al reducir puede crear una inversa.

16. Si A, B son invertibles, resolver $AXB = C$ para X y verificar la solución. Indicar los tamaños cuando A es $m \times m$, B es $n \times n$ y C es $m \times n$.

17. Para S, D, comparar $(SD)^{-1}$ con $S^{-1}D^{-1}$. Comprobar cuál de las dos expresiones $S^{-1}D^{-1}$ y $D^{-1}S^{-1}$ deshace SD.

18. Sean A, B, C matrices de tamaños compatibles. Probar que $AB = AC$ permite concluir $B = C$ si A es cuadrada e invertible. Dar un contraejemplo con A no nula y singular. Formular también la cancelación por la derecha.

19. Para $A_t = \begin{bmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{bmatrix}$, determinar los valores reales de t para los que existe inversa y calcularla. Tratar por separado los valores excepcionales usando el homogéneo.

20. Si $N^k = 0$ para alguna matriz cuadrada N y algún entero $k \geq 1$, probar que $I - N$ es invertible y dar su inversa como suma finita. No suponer que una serie infinita converge.

Criterios y casos rectangulares. 21. Para $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, hallar todas las matrices R con $AR = I_2$. Probar que ninguna satisface además $RA = I_3$.

22. Para $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, hallar todas las matrices L con $LB = I_2$. Explicar por qué $BL = I_3$ es imposible.

23. Si una matriz rectangular tiene inversa por ambos lados, probar que necesariamente es cuadrada y que las dos inversas coinciden. Usar los criterios de rango de este capítulo.

24. Para matrices cuadradas A, B, probar que si AB es invertible, también lo son A y B. Producir un ejemplo rectangular donde AB sea una identidad y BA no lo sea.

25. Probar que matrices del mismo tamaño A, B son equivalentes por filas si y sólo si $B = PA$ para alguna matriz cuadrada invertible P. Relacionar el resultado con la proposición 2.6a.

26. Reducir $[A \,|\, I_3]$ hasta que su bloque izquierdo esté reducido para $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Leer en el bloque derecho un certificado para los sistemas incompatibles $Ax = b$ y obtener la condición sobre b.

27. Probar que una matriz cuadrada con entradas en un subcuerpo $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{F}$ es invertible sobre $\mathbb{F}$ si y sólo si lo es sobre $\mathbb{K}$, y que su inversa tiene entradas en $\mathbb{K}$.

28. Interpretar $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ sobre $\mathbb{Q}$ y sobre $\mathbb{F}_2$. Determinar la invertibilidad en cada caso y explicar por qué esto no contradice el ejercicio 27.

Bloques, triangulares y factorización. 29. Hallar la inversa de $T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ por sustitución. Verificar que T^{-1} es superior, y comprobar que tomar los opuestos de todas las entradas sobre la diagonal no da la inversa correcta.

30. Si A, D son cuadradas e invertibles y B tiene el tamaño apropiado, hallar y verificar la inversa de $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}$. Mantener el orden de cada producto.

31. Calcular una factorización LU con diagonal de unos en L para $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 8 & 6 \end{bmatrix}$. Registrar los multiplicadores y comprobar el producto.

32. Usar los factores del ejercicio 31 para resolver $Ax = (2, 5, 9)$ y $Ax = (4, 9, 14)$ sin calcular la inversa.

33. Encontrar P, L, U con $PA = LU$ para $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Resolver $Ax = (4, 7)$ y mostrar dónde se permuta el dato.

34. En el último ejemplo de §3.9, sustituir por error la primera columna inferior de L por $(2, 3)$ en lugar de $(3, 2)$. Calcular el producto obtenido y explicar qué información se dejó de permutar.

35. Probar que un producto de matrices de permutación vuelve a ser una matriz de permutación. Para $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, calcular P^{-1} y decidir si $P = P^{-1}$.

36. ¿Toda matriz triangular superior es escalonada? Dar un contraejemplo 2×2 y explicar por qué, pese a ello, admite una factorización LU con diagonal de unos en L.

Pruebas estructurales y transferencia. 37. Para $H_t = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ sobre un cuerpo, probar $H_s H_t = H_{s+t}$ y $H_t^{-1} = H_{-t}$. Determinar H_1^p sobre $\mathbb{F}_p$, el cuerpo de residuos módulo el primo p.

38. Un sistema cuadrado satisface $Ax = b$ y se modifica a $A(x + u) = b + Au$. Probar que las soluciones del nuevo problema son exactamente las del anterior. Explicar por qué no hace falta que A sea invertible y por qué «cancelar A» no sería una justificación general válida.

39. Dos matrices cuadradas invertibles A, B conmutan. Probar que $A^{-1}B = BA^{-1}$ y que $(AB)^r = A^r B^r$ para enteros $r \geq 0$. Identificar en la inducción el paso que necesita conmutatividad.

40. Sea A invertible y P una permutación fija. Probar que si $PA = L_1U_1 = L_2U_2$, con L_1, L_2 inferiores con diagonal de unos y U_1, U_2 superiores, entonces $L_1 = L_2$ y $U_1 = U_2$. Explicar por qué fijar la diagonal de L evita una ambigüedad que existiría sin esa normalización.

3.11. Soluciones razonadas

1. La suma entrada a entrada da $2A - B = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ y $A + B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$. De $X + B = 2A$ restamos B en cada posición y obtenemos $X = 2A - B$. Esa tabla satisface la igualdad y cada entrada de cualquier solución debe ser la indicada, lo que prueba unicidad.

2. Existen AB de tamaño 2×4, BC de tamaño 3×2, ABC de tamaño 2×2 y CAB de tamaño 4×4. No existen BA ni CB, porque sus tamaños interiores son $4, 2$ y $2, 3$, respectivamente. En ABC y CAB, ambas asociaciones del producto correspondiente existen y coinciden por asociatividad.

3. En el orden inverso se obtiene

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

La segunda columna de la matriz derecha es $(2, 1)$; al aplicarle la regla de la tercera fila $(0, -1)$ del factor izquierdo obtenemos -1. Es la entrada $(3, 2)$ del producto y muestra la contribución que llega a esa posición al encadenar los cálculos.

4. $SD(u, v) = (2u+v, v)$ y $DS(u, v) = (2u+2v, v)$. Las salidas coinciden si y sólo si $v = 0$, porque la diferencia de las primeras coordenadas es v. Los cálculos coinciden en todo el eje horizontal sin que por ello las matrices sean iguales: para igualdad matricial deberían coincidir en todas las entradas posibles.

5. $N^1 = N$ y $N^2 = 0$ por producto directo. Para $r \geq 2$, la asociatividad da $N^r = N^2 N^{r-2} = 0$. Tomemos $B = I_2$ y $C = I_2 + N$: son distintas y no nulas, pero $NC = N + N^2 = N = NB$. El factor no nulo N no puede cancelarse.

6. La entrada i de Ae_j es $\sum_k a_{ik}(e_j)_k = a_{ij}$, porque el único coeficiente no nulo de e_j es el de posición j, igual a uno. Si $Ax = Bx$ para todo x, podemos elegir sucesivamente $e_1, \ldots, e_n$; las

columnas correspondientes de A y B coinciden. Por tanto coinciden todas sus entradas. En realidad basta comprobar esas n columnas de entrada particulares.

7. $A^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i & -i \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ y su transpuesta vuelve a ser A. Cada número cambió de posición, no de valor; la entrada i sigue siendo i. La conjugación compleja no forma parte de la definición de transpuesta.

8. $(SD)^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, mientras que $S^{\mathsf{T}}D^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. La entrada inferior izquierda difiere. La identidad correcta invierte el orden: $D^{\mathsf{T}}S^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Transponer un producto intercambia el papel de las filas y columnas y, con él, el orden de los factores.

9. La primera no es una partición rectangular con cortes comunes: la franja superior tiene cinco columnas y la inferior también cinco, pero el corte vertical se sitúa después de dos columnas arriba y después de tres abajo. Si se concatenaran las entradas de ambas franjas podría construirse una matriz ordinaria 4×5; lo que falla es su organización en los cuatro bloques indicados para operar como una tabla 2×2 de bloques. La segunda sí es una partición por bloques de una matriz 5×5, con bloque cero 3×2.

10. La fórmula es $\begin{bmatrix} I_r & kB \\ 0 & I_s \end{bmatrix}$, interpretando k como la suma de k unidades del cuerpo. Para $k = 0$ es la identidad. Si vale para k, multiplicar por la matriz original produce bloque superior derecho $B + kB = (k+1)B$ y deja los demás bloques. La inducción prueba el resultado. Los tamaños de cada suma son $r \times s$.

11. Las matrices pedidas son

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sus inversas se obtienen, respectivamente, repitiendo la primera matriz, cambiando -2 por $-1/2$ en la segunda y 4 por -4 en la tercera. El producto de las dos últimas matrices de suma, con entradas 4 y -4, tiene entrada $(3,1)$ igual a $4 - 4 = 0$ y las demás entradas de I_3. En el otro orden ocurre lo mismo. Cada inversa deshace exactamente su operación.

12. $EA = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$: se resta dos veces la segunda fila de la primera. En cambio, $AE = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$: se resta dos veces la primera columna de la segunda. Los índices de la entrada no diagonal de E tienen interpretaciones distintas al seleccionar filas por la izquierda o columnas por la derecha.

13. $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ y $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Su producto en el orden de aplicación es $E_2E_1 = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = A^{-1}$. Al deshacer la reducción, $A = E_1^{-1}E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. El producto recupera las cuatro entradas de A.

14. En $[A \mid I_2]$ intercambiamos filas, restamos dos veces la nueva primera de la segunda, multiplicamos la segunda por -1 y la restamos de la primera. Las franjas pasan por

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right].$$

Así $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Aplicarla a $(3,2)$ da $(1,1)$; sustituir en Ax produce $(3,2)$ y el criterio de invertibilidad prueba unicidad.

15. $x = (-2, 1)$ es no nula y $Ax = (0,0)$. Si existiera A^{-1}, tendríamos $x = A^{-1}Ax = 0$, contradicción. Una reducción por filas conserva las soluciones homogéneas y, por tanto, no puede llevar el bloque izquierdo a I_2. Cambiar o interpretar de otra manera el bloque derecho no repara esa imposibilidad del coeficiente.

16. Multiplicar por A^{-1} a la izquierda y por B^{-1} a la derecha fuerza $X = A^{-1}CB^{-1}$, de tamaño $m \times n$. Recíprocamente, $A(A^{-1}CB^{-1})B = (AA^{-1})C(B^{-1}B) = C$. La misma deducción muestra

que cualquier solución coincide con ésta. No podemos poner ambas inversas en un solo lado sin cambiar el producto.

17. $S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Por tanto,

$$D^{-1}S^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad S^{-1}D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La primera multiplicada por SD en cualquier orden da la identidad. La segunda no: $(SD)(S^{-1}D^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Para deshacer una composición se deshace primero la última operación aplicada.

18. De $AB = AC$ obtenemos $A^{-1}AB = A^{-1}AC$, es decir, $B = C$. Para un contraejemplo tomamos $A = N$, $B = I_2$ y $C = I_2 + N$, como en el ejercicio 5. Por la derecha, si $BA = CA$ y A es invertible, multiplicamos a la derecha por A^{-1} y obtenemos $B = C$. La posición de la inversa se elige para reunir los dos factores que deben cancelarse.

19. Restar t veces la primera fila de la segunda deja pivote $1 - t^2$. Si $t \neq \pm 1$, normalizarlo y limpiar encima da

$$A_t^{-1} = \frac{1}{1-t^2} \begin{bmatrix} 1 & -t \\ -t & 1 \end{bmatrix}.$$

El producto en ambos órdenes tiene diagonal 1 y entradas no diagonales cero. Si $t = 1$, la columna $(1, -1)$ resuelve el homogéneo; si $t = -1$, lo hace $(1, 1)$. Son columnas no nulas y certifican singularidad. La fórmula sólo se usa bajo la condición que permite dividir.

20. Sea $B = I + N + \cdots + N^{k-1}$. Por distributividad y las leyes de potencias, $(I - N)B = I - N^k = I$. Al multiplicar en el otro orden aparece la misma cancelación, porque todas las potencias son de la misma matriz: $B(I - N) = I - N^k = I$. Luego $B = (I - N)^{-1}$. Para $k = 1$, la hipótesis dice $N = 0$ y la suma contiene sólo I; el argumento incluye ese caso.

21. La primera columna de R debe resolver $Ax = e_1$ y tiene forma $(1 - s, -s, s)$; la segunda resuelve $Ax = e_2$ y tiene forma $(-t, 1 - t, t)$. Por tanto, todas las inversas por la derecha son

$$R = \begin{bmatrix} 1-s & -t \\ -s & 1-t \\ s & t \end{bmatrix}, \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

La multiplicación da $AR = I_2$ para cualquier elección y las ecuaciones de cada columna prueban exhaustividad. Pero $A(-1, -1, 1) = 0$. Si además $RA = I_3$, multiplicar por esa columna daría $(-1, -1, 1) = 0$. Ninguna de las matrices de la familia cumple esa segunda igualdad.

22. Una fila (u, v, w) multiplicada por B da $(u + w, v + w)$. Para obtener las dos filas de I_2, todas las soluciones son

$$L = \begin{bmatrix} 1-s & -s & s \\ -t & 1-t & t \end{bmatrix}, \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

Cada producto LB es I_2 por esas igualdades y no hay otras posibilidades. Para que $BL = I_3$ existiría inversa por la derecha de B y su rango debería ser tres, imposible para una matriz de dos columnas. También basta observar que toda salida Bx satisface tercera coordenada igual a la suma de las dos primeras, condición que no cumple $(0, 0, 1)$.

23. La inversa izquierda exige rango n y la derecha rango m para una matriz $m \times n$; luego $m = n$. Ya en el caso cuadrado, si $LA = I$ y $AR = I$, entonces $L = L(AR) = (LA)R = R$. Ambas identidades se convierten en las de una sola inversa. El rango y la asociatividad cumplen funciones distintas: uno fuerza el tamaño y la otra la igualdad de las candidatas.

24. Sea $C = (AB)^{-1}$. La igualdad $ABC = I$ da una inversa por la derecha BC de A; la igualdad $CAB = I$ da una inversa por la izquierda CA de B. Como son cuadradas, el corolario 3.7 hace invertibles ambas. Para el contraste rectangular, $A = [1\ 0]$ y $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $AB = I_1$ y $BA \neq I_2$. La prueba cuadrada no puede aplicarse a esos tamaños.

25. Si $A \sim B$, la proposición 3.4 da $B = E_k \cdots E_1 A$; el producto de elementales es invertible. Recíprocamente, toda matriz cuadrada invertible P es producto de elementales por el teorema

3.6. Si $B = PA$, ese producto describe una sucesión de operaciones que transforma A en B. La proposición 2.6a muestra que la misma relación equivale a $\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(B)$; los coeficientes de P expresan combinaciones reversibles de filas, no sólo una inclusión.

26. Restar las dos primeras filas de la tercera lleva a

$$[A \,|\, I_3] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

El bloque izquierdo ya está reducido. La tercera fila del bloque derecho indica los multiplicadores $(-1, -1, 1)$, de modo que $Ax = b$ es compatible exactamente si $b_3 - b_1 - b_2 = 0$. Cuando esa diferencia es no nula, dividir los multiplicadores por ella produce un certificado normalizado. La tabla completa no se ha presentado como RREF: reducir sólo A y transportar I_3 basta para conservar el registro de operaciones.

27. Si la inversa existe sobre $\mathbb{K}$, sus dos identidades siguen siendo válidas sobre $\mathbb{F}$. Para la vuelta, C02 prueba que el rango no cambia al extender el cuerpo. La invertibilidad sobre $\mathbb{F}$ implica rango completo, por lo que A tiene también rango completo sobre $\mathbb{K}$. La reducción de $[A \,|\, I]$ usando sólo operaciones en $\mathbb{K}$ construye una inversa con entradas en ese subcuerpo. Por unicidad, coincide con la inversa calculada sobre $\mathbb{F}$.

28. Sobre $\mathbb{Q}$, se verifica $A^2 = 2I_2$, así que $A^{-1} = A/2$. Sobre $\mathbb{F}_2$, las dos filas son $(1, 1)$ y la columna $(1, 1)$ es una solución homogénea no nula, por lo que la matriz es singular. Aquí se han interpretado los enteros en cuerpos de distinta característica. $\mathbb{Q}$ no es un subcuerpo de $\mathbb{F}_2$, así que no se trata de la extensión de cuerpos del ejercicio 27.

29. Para resolver $Tx = b$, la última fila da $x_3 = b_3$; la segunda, $x_2 = b_2 - 4b_3$; la primera, $x_1 = b_1 - 2b_2 + 5b_3$. Por tanto,

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Multiplicar por T en los dos órdenes da I_3. Si se hubiera colocado -3 en vez de 5 en la entrada $(1, 3)$, el producto en esa posición sería $-3 - 8 + 3 = -8$, no cero. La inversa recoge la interacción entre las entradas de las dos etapas, además de cambiar signos.

30. La candidata es

$$\begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix}.$$

Al multiplicar por la matriz original a la izquierda, el bloque superior derecho es $-AA^{-1}BD^{-1} + BD^{-1} = 0$, y los diagonales son identidades. En el otro orden, el bloque superior derecho es $A^{-1}B - A^{-1}BD^{-1}D = 0$; los restantes bloques vuelven a formar la identidad. Esto verifica ambos productos sin permutar factores. Si A es $r \times r$ y D es $s \times s$, todos los bloques superiores derechos son $r \times s$.

31. Restamos $2F_1$ de F_2 y $3F_1$ de F_3. Las nuevas filas inferiores son $(0, 1, 1)$ y $(0, 2, 3)$. Restar dos veces la segunda de la tercera deja $(0, 0, 1)$. Los factores son

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La segunda fila de LU es $2u_1 + u_2 = (2, 5, 3)$ y la tercera $3u_1 + 2u_2 + u_3 = (3, 8, 6)$; la primera es u_1. Se recupera A entrada a entrada.

32. Para $b = (2, 5, 9)$, resolver $Ly = b$ da $y_1 = 2$, $y_2 = 1$, $y_3 = 9 - 3(2) - 2(1) = 1$. Resolver $Ux = y$ da $x_3 = 1$, $x_2 = 0$, $x_1 = 1$. Para $b = (4, 9, 14)$, la primera etapa da $y = (4, 1, 0)$ y la segunda $x = (2, 1, 0)$. Los productos originales verifican $A(1, 0, 1) = (2, 5, 9)$ y $A(2, 1, 0) = (4, 9, 14)$. Los pivotes no nulos aseguran unicidad en las dos sustituciones.

33. Se intercambian las filas al comienzo:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad PA = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Podemos tomar $L = I_2$ y $U = PA$. El dato se transforma en $Pb = (7, 4)$, de modo que las ecuaciones triangulares son $x + 3y = 7$ y $2y = 4$. Dan $y = 2$, $x = 1$. En el sistema original $A(1, 2) = (4, 7)$. Usar $(4, 7)$ sin permutarlo habría resuelto otro problema.

34. El factor erróneo sería $\widetilde{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, y

$$\widetilde{L}U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \neq PA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Después de intercambiar las filas activas, la segunda procede de la tercera original y necesita multiplicador tres; la tercera procede de la segunda y necesita dos. Se permutaron las filas en el cálculo de U, pero no sus registros anteriores. La igualdad de factores permite detectar ese desacuerdo.

35. Cada matriz de permutación reordena las entradas de una columna sin repetirlas ni perderlas. Componer dos reordenaciones vuelve a tener esa propiedad; aplicado a las columnas de I_n, esto prueba que su producto es una matriz de permutación. Para la matriz dada, $P(x, y, z) = (y, z, x)$, por lo que $P^{-1}(x, y, z) = (z, x, y)$ y

$$P^{-1} = P^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es distinta de P. Un intercambio se deshace repitiéndolo, pero una permutación general no tiene por qué ser su propia inversa.

36. La matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ es superior, pero no escalonada porque una fila cero aparece encima de una no nula. Aun así, $A = I_2 A$ es una factorización LU con diagonal de unos en L. Ser triangular no exige que los pivotes avancen entre filas no nulas ni que las filas cero queden al final. Este ejemplo singular no contradice el criterio de diagonal no nula para invertibilidad.

37. El producto directo da $H_s H_t = \begin{bmatrix} 1 & s+t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = H_{s+t}$. Tomar $s = -t$ produce la identidad en ambos órdenes, así que $H_t^{-1} = H_{-t}$. Por inducción, $H_1^r = H_r$, interpretando el entero en el cuerpo. En $\mathbb{F}_p$, la suma de p unidades es cero, de modo que $H_1^p = H_0 = I_2$. Esta igualdad no exige invertir el escalar p.

38. Por distributividad, $A(x + u) = Ax + Au$. La ecuación modificada es, por tanto, $Ax + Au = b + Au$; restar la columna Au en ambos miembros da exactamente $Ax = b$. La vuelta se obtiene sumándola. Se canceló una suma de columnas, no un factor matricial. El argumento vale también para matrices singulares, donde cancelar A no estaría justificado. El conjunto de valores de la incógnita x permanece idéntico.

39. Multiplicar $AB = BA$ a la izquierda y a la derecha por A^{-1} da $BA^{-1} = A^{-1}B$. Para las potencias, la fórmula vale en $r = 0$. Si vale en r, entonces $(AB)^{r+1} = A^r B^r AB$. Como A conmuta con B, también conmuta con B^r, por repetir $BA = AB$ a través de sus factores. Así $A^r B^r AB = A^{r+1} B^{r+1}$. Ese desplazamiento de A a través de B^r es el paso que fallaría sin la hipótesis. La inducción prueba la igualdad para todo $r \geq 0$.

40. Las matrices L_1, L_2 son invertibles por su diagonal de unos. Como PA también es invertible, $U_i = L_i^{-1} PA$ es invertible. De $L_1 U_1 = L_2 U_2$ deducimos

$$L_1^{-1} L_2 = U_1 U_2^{-1}.$$

El miembro izquierdo es inferior con diagonal de unos y el derecho es superior. Su igualdad obliga a que la matriz común sea diagonal; sus entradas diagonales son uno por el lado izquierdo, de modo que es I. Resultan $L_1 = L_2$ y después $U_1 = U_2$. Sin fijar la diagonal, una matriz diagonal invertible D permite reemplazar L, U por $LD, D^{-1}U$, que siguen siendo triangulares y tienen el

mismo producto. La normalización elimina esa libertad para una permutación fija; no afirma que la elección de P sea única.

Lecturas y referencias

Kenneth Hoffman y Ray Kunze, *Linear Algebra*, 2.ª ed., §§1.5–1.6, ofrecen una construcción sobre cuerpos de productos, elementales e invertibilidad. Nathaniel Johnston, *Introduction to Linear and Matrix Algebra*, 2021, §§1.3,2.2 y tema 2.D, enlaza cálculos, geometría y factorizaciones. Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel y Lawrence E. Spence, *Linear Algebra*, 5.ª ed., §§2.3–2.4,3.1–3.2, permite contrastar la interpretación estructural; sus argumentos con espacios y dimensión se retomarán cuando esas herramientas estén disponibles. Las convenciones para la permutación pueden variar: en este capítulo siempre se usa $PA = LU$.

Capítulo 4

Espacios vectoriales

Buscamos un polinomio de grado a lo sumo dos que tome los valores 1, 2 y 5 en 0, 1 y 2, respectivamente. Si escribimos $p(t) = a + bt + ct^2$, esas condiciones se convierten en

$$a = 1, \qquad a + b + c = 2, \qquad a + 2b + 4c = 5.$$

La eliminación da $a = 1$, $b = 0$ y $c = 1$: el polinomio buscado es $1 + t^2$. Hemos resuelto un problema sobre polinomios mediante un sistema sobre sus coeficientes. La relación va más allá de esa cuenta. Si sumamos dos polinomios, se suman sus listas de coeficientes; si multiplicamos un polinomio por un número, ese número multiplica cada coeficiente. Por eso una expresión como $2p - 3q$ puede calcularse con polinomios o con columnas y produce resultados compatibles.

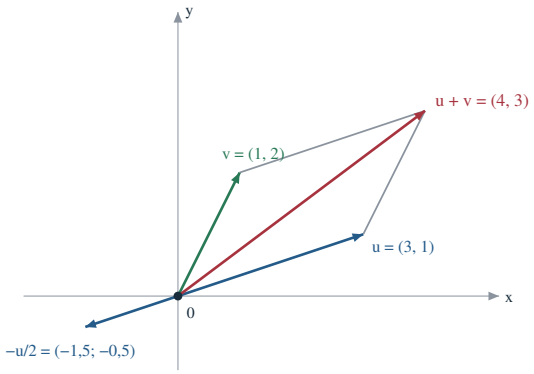
Las matrices del capítulo anterior permiten la misma clase de operaciones, aunque sus elementos no sean polinomios. También podemos sumar funciones y multiplicarlas por números: en cada argumento, sumamos o multiplicamos sus valores. Hay una estructura común que permite reunir objetos tan distintos y explicar de una sola vez las reglas que gobiernan esos cálculos. Para reconocerla necesitamos precisar las operaciones admitidas y las leyes que conservan.

4.1. Las leyes que permiten calcular

En $\mathbb{R}^2$ sumamos pares y multiplicamos por reales mediante las reglas $(x, y) + (r, s) = (x + r, y + s)$ y $a(x, y) = (ax, ay)$. La suma admite reordenamiento y agrupación; cada par tiene un opuesto, y multiplicar por un escalar se distribuye sobre una suma. Esas propiedades se demuestran aplicando las leyes de los números a cada componente, y por ello siguen siendo reconocibles en objetos que no dibujamos como flechas.

La figura siguiente representa esas operaciones en un caso concreto. El segmento que se traslada para completar el paralelogramo conserva su desplazamiento. El punto final de la suma queda determinado por las dos sumas de componentes; el dibujo permite ver la misma operación que ya sabemos calcular.

Suma por componentes; producto por un escalar negativo



La suma:

(3 + 1, 1 + 2) = (4, 3)

El múltiplo −u/2:

sentido opuesto

mitad de la longitud

Geometría en R² con escala igual en ambos ejes; la definición general no exige longitud.

El cuerpo de escalares se denotará por $\mathbb{F}$. Recordemos qué información utilizaremos de él: la suma y el producto de escalares son conmutativos y asociativos, el producto se distribuye sobre la suma, existen neutros $0_{\mathbb{F}}$ para la suma y $1_{\mathbb{F}}$ para el producto, distintos entre sí, cada escalar tiene opuesto y cada escalar no nulo tiene inverso multiplicativo. Los ejemplos principales son $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$; también usaremos $\mathbb{F}_2$, el cuerpo de residuos módulo dos. En este último $1 + 1 = 0$, por lo que una cuenta válida sobre los reales puede cambiar si contiene una división por dos.

Definición 4.1 (espacio vectorial). Un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ consta de un conjunto V, una operación de suma $V \times V \to V$, escrita $(u, v) \mapsto u + v$, y una multiplicación por escalares $\mathbb{F} \times V \to V$, escrita $(a, v) \mapsto av$, que satisfacen las siguientes leyes para todos $u, v, w \in V$ y todos $a, b \in \mathbb{F}$:

1. $u + v = v + u$.
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$.
3. Existe $0_V \in V$ tal que $v + 0_V = v$ para todo $v \in V$.
4. Para cada $v \in V$ existe $w \in V$ tal que $v + w = 0_V$.
5. $1_{\mathbb{F}} v = v$.
6. $a(bv) = (ab)v$.
7. $a(u + v) = au + av$.
8. $(a + b)v = av + bv$.

Los elementos de V se llaman **vectores** y los de $\mathbb{F}$, **escalares**. La expresión «espacio vectorial» incluye la elección del cuerpo y de las dos operaciones.

Las funciones que figuran antes de los axiomas ya exigen que las operaciones estén definidas para todas las entradas indicadas y que sus resultados pertenezcan a V. Esta exigencia se denomina **cierre**. Algunos textos la cuentan como dos axiomas adicionales. El contenido es el mismo: antes de preguntar si una suma es asociativa tenemos que poder efectuarla dentro del conjunto.

La tercera ley exige un solo elemento que funcione para todos los vectores. La cuarta permite que el opuesto dependa de v. Ambas contienen afirmaciones de existencia; las restantes son identidades universales. Esta diferencia explica por qué el conjunto vacío no puede ser un espacio vectorial: no contiene el elemento cuya existencia exige la tercera ley.

Hay dos distributividades porque hay dos clases de suma. En $a(u + v)$ se suman vectores; en $(a + b)v$ se suman escalares. Del mismo modo, $a(bv) = (ab)v$ expresa compatibilidad entre el producto del cuerpo y su acción sobre los vectores. La definición no introduce un producto uv de dos vectores. Las matrices cuadradas admiten un producto adicional, estudiado en C03, pero la estructura vectorial de sus sumas y múltiplos existe sin usarlo.

Cuando el contexto lo permita escribiremos 0 tanto para $0_{\mathbb{F}}$ como para 0_V. Mantendremos los subíndices mientras la distinción ayude a comprender una prueba: un cero es un escalar que multiplica; el otro es un vector que se suma.

4.2. Qué podemos deducir de los axiomas

La definición exige que exista un cero y que cada vector tenga un opuesto, pero todavía no afirma su unicidad. Necesitamos esa unicidad para que los símbolos 0_V y $-v$ designen elementos determinados. La prueba puede realizarse mediante sumas y agrupaciones, sin conocer de qué están hechos los vectores.

Proposición 4.1 (unicidad y cancelación). El vector cero es único, cada vector tiene un único opuesto y la suma admite cancelación: si $u + w = v + w$, entonces $u = v$.

Demostración. Si e y f son elementos neutros para la suma, entonces $e = e + f = f$: la primera igualdad usa que f es neutro y la segunda, que e lo es, junto con la conmutatividad. Para probar cancelación, tomemos un opuesto z de w, cuya existencia garantiza el cuarto axioma. Sumarlo a ambos miembros da

$$(u + w) + z = (v + w) + z, \qquad u + (w + z) = v + (w + z), \qquad u = v.$$

Si x e y son dos opuestos de w, tenemos $w + x = w + y = 0_V$; la cancelación, con reordenamiento de sumandos, da $x = y$. Podemos por tanto escribir $-w$ sin depender de una elección. □

Definimos $u - v = u + (-v)$. El signo menos representa la operación que acabamos de justificar. En un espacio de funciones producirá la función opuesta; en uno de matrices, la matriz opuesta. La notación puede ser uniforme porque la propiedad que la determina es única.

Proposición 4.2 (ceros y signos). Para todo $v \in V$ y $a \in \mathbb{F}$,

$$0_{\mathbb{F}} v = 0_V, \qquad a 0_V = 0_V, \qquad (-1_{\mathbb{F}})v = -v, \qquad (-a)v = -(av) = a(-v).$$

Demostración. La primera distributividad pertinente es la que separa una suma de escalares:

$$0_{\mathbb{F}} v = (0_{\mathbb{F}} + 0_{\mathbb{F}})v = 0_{\mathbb{F}} v + 0_{\mathbb{F}} v.$$

El miembro izquierdo también es $0_{\mathbb{F}} v + 0_V$. Cancelar $0_{\mathbb{F}} v$ permite concluir que $0_{\mathbb{F}} v = 0_V$. Para la segunda identidad usamos la otra distributividad: $a 0_V = a(0_V + 0_V) = a 0_V + a 0_V$; la misma cancelación da $a 0_V = 0_V$.

Para identificar el opuesto de v buscamos un vector que, sumado a él, produzca el cero. Las leyes de escalares proporcionan exactamente ese vector:

$$v + (-1_{\mathbb{F}})v = (1_{\mathbb{F}} + (-1_{\mathbb{F}}))v = 0_{\mathbb{F}} v = 0_V.$$

La unicidad del opuesto demuestra $(-1_{\mathbb{F}})v = -v$. Finalmente, $av + (-a)v = (a - a)v = 0_V$, de modo que $(-a)v = -(av)$; además $a(-v) = a((-1_{\mathbb{F}})v) = (-a)v$ por compatibilidad del producto escalar. □

Estas demostraciones aclaran por qué no hizo falta incluir $0v = 0$ entre los axiomas. También muestran dónde intervienen las dos distributividades. Reconocer esa dependencia será útil al examinar operaciones que se parecen a las ordinarias pero incumplen alguna ley.

Proposición 4.3 (anulación y cancelación escalar). Si $av = 0_V$, entonces $a = 0_{\mathbb{F}}$ o $v = 0_V$. En consecuencia, si $a \neq 0_{\mathbb{F}}$ y $au = av$, entonces $u = v$; si $v \neq 0_V$ y $av = bv$, entonces $a = b$.

Demostración. Si $a \neq 0_{\mathbb{F}}$, podemos aplicar su inverso:

$$v = 1_{\mathbb{F}} v = (a^{-1}a)v = a^{-1}(av) = a^{-1} 0_V = 0_V.$$

Si $au = av$, las distributividades y la proposición anterior dan $a(u - v) = 0_V$; al ser a no nulo resulta $u - v = 0_V$, y sumar v da $u = v$. Si $av = bv$, obtenemos $(a - b)v = 0_V$; como $v \neq 0_V$, debe ser $a - b = 0_{\mathbb{F}}$. □

Aquí se cancela un escalar no nulo mediante su inverso en el cuerpo. No hemos definido inversos de vectores ni dividido por ellos. En particular, la igualdad $av = bv$ con $v = 0_V$ no proporciona ninguna información sobre a y b.

La asociatividad permite escribir sumas finitas sin decidir dónde poner los paréntesis, y la conmutatividad permite reordenarlas. Por inducción a partir de las dos distributividades,

$$a\left(\sum_{j=1}^{r} v_j\right) = \sum_{j=1}^{r} a v_j, \qquad \left(\sum_{j=1}^{r} a_j\right) v = \sum_{j=1}^{r} a_j v.$$

Para $r = 0$ adoptamos la suma vacía 0_V o $0_{\mathbb{F}}$, según corresponda; las identidades siguen siendo válidas por la proposición 4.2. Una **combinación lineal finita** es una expresión $a_1v_1 + \cdots + a_rv_r$. Hemos usado combinaciones de filas desde C01; el nombre describe la misma operación en cualquier espacio vectorial. Una sucesión infinita de vectores, por sí sola, no tiene una suma definida por estos axiomas.

4.3. Columnas, matrices y productos de espacios

Para $n \geq 1$, el conjunto $\mathbb{F}^n$ de las listas $(x_1, \ldots, x_n)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ con operaciones componente a componente. Los resultados permanecen en $\mathbb{F}^n$ porque cada suma y cada producto de escalares pertenece a $\mathbb{F}$. En la posición j, la conmutatividad y la asociatividad de la suma son las del cuerpo; el neutro es $(0, \ldots, 0)$ y el opuesto de $(x_1, \ldots, x_n)$ es $(-x_1, \ldots, -x_n)$. Las otras cuatro leyes se verifican en esa posición mediante

$$1x_j = x_j, \quad a(bx_j) = (ab)x_j, \quad a(x_j + y_j) = ax_j + ay_j, \quad (a + b)x_j = ax_j + bx_j.$$

Como dos listas son iguales cuando coinciden todas sus componentes, estas identidades prueban los axiomas para las listas completas. Escribirlas como columnas conserva las convenciones de C02–C03; escribir una tupla en una línea no cambia sus operaciones. Para $n = 0$, $\mathbb{F}^0$ contiene una sola tupla, la vacía, que es su vector cero. También admitiremos matrices con cero filas o cero columnas: sus productos se calculan con las mismas reglas y las sumas sobre índices vacíos valen cero. La identidad I_0 es la matriz vacía de orden cero. Estas convenciones permiten representar aplicaciones desde el espacio nulo o hacia él.

En $M_{m,n}(\mathbb{F})$, con tamaños $m, n \geq 1$ fijos, se procede por entradas: $(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$ y $(aA)_{ij} = aA_{ij}$. El cierre depende de que todas las matrices tengan el mismo tamaño. El neutro es la matriz nula y el opuesto cambia el signo de cada entrada. Las ocho leyes quedan verificadas por las mismas identidades del cuerpo para cada (i, j). El producto AB no interviene; incluso cuando $m \neq n$, $M_{m,n}(\mathbb{F})$ es un espacio vectorial.

Si U y W son espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo, podemos llevar simultáneamente un dato de cada uno. En el producto cartesiano $U \times W$ definimos

$$(u, w) + (u', w') = (u + u', w + w'), \qquad a(u, w) = (au, aw).$$

Proposición 4.4 (producto de dos espacios). Estas operaciones hacen de $U \times W$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$, con cero $(0_U, 0_W)$ y opuesto $(-u, -w)$.

Demostración. Las operaciones son internas porque cada componente permanece en su espacio. La conmutatividad y asociatividad se comprueban en cada componente usando las de U y W. El par indicado se suma sin cambiar ninguna componente, y sumar el opuesto indicado produce ese par cero. Asimismo, $1(u, w) = (u, w)$ y

$$a(b(u, w)) = (a(bu), a(bw)) = ((ab)u, (ab)w) = (ab)(u, w).$$

Las dos distributividades se verifican distribuyendo en ambas componentes; por ejemplo, $a((u, w) + (u', w')) = (au + au', aw + aw') = a(u, w) + a(u', w')$. Para una suma de escalares se obtiene del mismo modo $(a + b)(u, w) = (au + bu, aw + bw) = a(u, w) + b(u, w)$. Quedan probados todos los axiomas. □

Por ejemplo, un par formado por una matriz y un polinomio puede ser un vector cuando ambos objetos admiten escalares del mismo cuerpo. No necesitamos convertirlos en un único objeto geométrico.

Existe también un espacio con un solo elemento. Si $V = \{\omega\}$ y definimos $\omega + \omega = \omega$ y $a\omega = \omega$ para todo $a \in \mathbb{F}$, todas las expresiones de los axiomas valen ω. Su cero es ω. Se llama **espacio cero**; en la notación usual se escribe $\{0\}$. La lista vacía es otra realización de este caso: $\mathbb{F}^0$ contiene una única lista, no es el conjunto vacío.

4.4. Las funciones como vectores

Sea X un conjunto fijo y denotemos por $\mathbb{F}^X$ el conjunto de todas las funciones $f : X \to \mathbb{F}$. Una función tiene muchos valores, posiblemente infinitos, pero la regla para sumar dos funciones no requiere sumar infinitos números. Define un solo valor a la vez:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (af)(x) = af(x) \quad \text{para cada } x \in X.$$

Proposición 4.5 (espacio de funciones). Con estas operaciones $\mathbb{F}^X$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$. Su cero es la función de valor constantemente nulo y el opuesto de f está dado por $(-f)(x) = -f(x)$.

Demostración. Las reglas asignan a cada $x \in X$ un valor de $\mathbb{F}$, por lo que producen funciones del mismo dominio y codominio. Para verificar una igualdad de funciones debemos comprobarla en cada argumento. Así,

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x),$$
$$((f+g)+h)(x) = (f(x)+g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x)+h(x)) = (f+(g+h))(x).$$

La función nula cumple $(f+0)(x) = f(x)$, y la función indicada como opuesto cumple $(f + (-f))(x) = 0$. Para las leyes que involucran escalares, las evaluaciones dan

$$(1f)(x) = f(x),$$
$$(a(bf))(x) = a(bf(x)) = (ab)f(x) = ((ab)f)(x),$$
$$(a(f+g))(x) = a(f(x)+g(x)) = af(x) + ag(x) = (af+ag)(x),$$
$$((a+b)f)(x) = (a+b)f(x) = af(x) + bf(x) = ((af)+(bf))(x).$$

Todas las igualdades valen para cada $x \in X$ y por ello son igualdades entre funciones. Si $X = \varnothing$, existe exactamente una función de X a $\mathbb{F}$, la función vacía. Las operaciones sólo pueden devolver esa función, de modo que se obtiene el espacio cero. □

Cuando $X = \{1, \ldots, n\}$, registrar una función equivale a registrar la lista de sus n valores. Para una matriz, el conjunto de argumentos puede ser el de pares de índices (i, j). Estas descripciones explican por qué las pruebas por componentes y por entradas se parecían tanto: ambas verificaban una igualdad de funciones en todos sus argumentos.

En cambio, una función de dominio infinito no suele quedar determinada por una lista finita de muestras. Si $f(t) = t$ y $g(t) = t + t(t-1)$ en $\mathbb{R}$, ambas coinciden en 0 y 1, pero $f(2) = 2$ y $g(2) = 4$. Son vectores distintos de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Para identificar funciones necesitamos conocer una regla que garantice igualdad en todo el dominio.

Una sucesión $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ es una función de $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ a $\mathbb{F}$. Las sucesiones forman, por tanto, otro espacio vectorial con operaciones término a término. Por ejemplo, la suma de $(1, 1, 1, \ldots)$ y $(0, 1, 2, \ldots)$ es $(1, 2, 3, \ldots)$. Se están efectuando infinitas operaciones separadas, una en cada posición, sin tomar el límite de ninguna suma. Las sucesiones que tienen sólo un número finito de términos no nulos también forman un espacio: la suma sólo puede ser no nula en la unión de los dos conjuntos finitos de posiciones, el múltiplo escalar no crea posiciones nuevas, el cero tiene todas sus entradas nulas y los opuestos conservan esas posiciones. Las identidades ya verificadas término a término siguen siendo válidas para esas sucesiones.

4.5. Polinomios y funciones polinómicas

En la apertura trabajamos con polinomios de grado a lo sumo dos. Denotaremos ese conjunto por $\mathbb{F}[t]_{\leq 2}$; de manera general $\mathbb{F}[t]_{\leq n}$ consiste en los polinomios de grado a lo sumo n, incluido el polinomio cero. Usaremos $\mathbb{F}[t]$ para todos los polinomios con coeficientes en $\mathbb{F}$.

Un polinomio formal se especifica por sus coeficientes, de los cuales sólo finitos son no nulos. Podemos escribir $p = a_0 + a_1 t + \cdots + a_r t^r$ y añadir coeficientes nulos al final sin cambiarlo. Dos polinomios son iguales si coinciden sus coeficientes de cada potencia. La letra t sirve para registrar la posición de cada coeficiente; al evaluar después en un escalar obtendremos un valor del cuerpo.

Proposición 4.6 (espacios de polinomios). Con la suma de coeficientes y la multiplicación de todos los coeficientes por un escalar, $\mathbb{F}[t]$ y $\mathbb{F}[t]_{\leq n}$, para $n \geq 0$, son espacios vectoriales sobre $\mathbb{F}$.

Demostración. Cada polinomio se representa por su sucesión de coeficientes, prolongada con ceros. Sumar dos de esas sucesiones o multiplicar una por un escalar produce otra con sólo finitos términos no nulos, como se acaba de comprobar. Esto prueba el cierre en $\mathbb{F}[t]$. Las leyes de conmutatividad, asociatividad, las dos distributividades, la compatibilidad escalar y la acción del

uno son las correspondientes leyes del cuerpo en cada coeficiente. El cero tiene todos los coeficientes nulos y el opuesto cambia todos sus signos.

Si ambos polinomios tienen coeficientes nulos en posiciones superiores a n, su suma y sus múltiplos siguen teniendo esos coeficientes nulos. El cero y los opuestos también permanecen en $\mathbb{F}[t]_{\leq n}$. Por tanto las mismas verificaciones prueban los ocho axiomas para ese conjunto. □

El grado exacto no se conserva bajo suma. Sobre $\mathbb{R}$, $t^2 + (1 - t^2) = 1$; además, multiplicar cualquier polinomio por cero produce el polinomio cero. Por eso «grado a lo sumo n» da un espacio y «grado exactamente n» no lo da. No necesitamos asignar un grado numérico al polinomio cero: en la notación $\mathbb{F}[t]_{\leq n}$ su inclusión se declara expresamente.

Por ejemplo, en $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$, si $p = 1 + 2t - t^2$ y $q = -2 + t + 3t^2$, entonces $2p - q = 4 + 3t - 5t^2$. La lista $(4, 3, -5)$ registra el mismo cálculo. El paso entre listas y polinomios funciona porque conocemos qué significa cada posición; la lista no sustituye la regla de evaluación ni el significado del objeto que representa.

Cada $p \in \mathbb{F}[t]$ determina una función $\widehat{p} : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ por evaluación. La sustitución respeta sumas y múltiplos: $\widehat{p+q}(x) = \widehat{p}(x) + \widehat{q}(x)$ y $\widehat{ap}(x) = a\widehat{p}(x)$. Sin embargo, dos polinomios distintos pueden dar la misma función. En $\mathbb{F}_2$, el polinomio $t^2 - t$ no es cero: su coeficiente de t^2 es 1. Su función vale cero en los dos argumentos del cuerpo, pues $0^2 - 0 = 0$ y $1^2 - 1 = 0$.

Dos polinomios distintos; una misma función en $\mathbb{F}_2$

Coeficientes de $(1, t, t^2)$

$p = 0$ $\quad (0, 0, 0)$

$q = t^2 - t = t^2 + t$ $\quad (0, 1, 1)$

En $\mathbb{F}_2$: $1 + 1 = 0$ y $-1 = 1$.

Evaluación en todos los argumentos

x	p(x)	q(x)
0	0	0
1	0	0

Funciones iguales en todo $\mathbb{F}_2$

Comparar coeficientes y comparar valores son dos pruebas de igualdad diferentes.

La distinción afecta al significado de una igualdad. Para polinomios formales se comparan coeficientes; para funciones se comparan todos los valores. Sobre un cuerpo infinito ambas comparaciones coinciden para polinomios: si las funciones de p y q son iguales, $p - q$ tiene todos los elementos del cuerpo como raíces; un polinomio no nulo de grado d tiene a lo sumo d raíces y por eso debe ser el polinomio cero. El límite de raíces se obtiene del teorema del factor: si c es una raíz, escribimos $p(t) = (t - c)q(t)$. Para otra raíz $d \neq c$, la igualdad $0 = (d - c)q(d)$ obliga a $q(d) = 0$, porque $d - c$ es un escalar no nulo. El grado de q es uno menos que el de p, y la inducción limita a ese grado el número de raíces restantes. Para grado cero, un polinomio constante no nulo no tiene raíces. El argumento usa la división por un polinomio mónico, válida sobre cualquier cuerpo. Así recuperamos la identificación habitual sobre $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, conservando una definición que también funciona en cuerpos finitos.

4.6. La elección de los escalares

El conjunto $\mathbb{C}$ admite dos estructuras que ya podemos reconocer. Sobre $\mathbb{C}$, los vectores son números complejos y un escalar complejo actúa mediante el producto ordinario. Sobre $\mathbb{R}$, los vectores siguen siendo los mismos números complejos, pero sólo permitimos escalares reales. Las leyes se satisfacen en ambos casos porque son restricciones de las leyes del cuerpo complejo.

La diferencia aparece en una pregunta elemental. Con un escalar complejo podemos obtener i a partir de 1: basta multiplicar por i. Con un escalar real eso es imposible. Para construir un complejo cualquiera mediante escalares reales usamos dos objetos, 1 e i, y la expresión $z = x \cdot 1 + y \cdot i$, con $x, y \in \mathbb{R}$, es única por la definición de parte real e imaginaria. Con escalares complejos basta escribir

$z = z \cdot 1$. Más adelante, las nociones de base y dimensión permitirán expresar con precisión esta diferencia; aquí ya podemos ver qué elección la origina.

Proposición 4.7 (restricción de escalares). Sea $\mathbb{K}$ un subcuerpo de $\mathbb{F}$, es decir, un subconjunto que es cuerpo con las mismas operaciones y el mismo uno. Todo espacio vectorial V sobre $\mathbb{F}$ es también un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ si se mantiene la suma y se permiten sólo los escalares de $\mathbb{K}$.

Demostración. La suma, el cero y los opuestos no cambian; por tanto se conservan las primeras cuatro leyes. Si $a \in \mathbb{K}$ y $v \in V$, el vector av está definido porque a también pertenece a $\mathbb{F}$. Las cuatro identidades escalares ya valían para todos los escalares de $\mathbb{F}$, así que valen para los de $\mathbb{K}$. El uno actúa como identidad porque es el mismo elemento en los dos cuerpos. □

La restricción permite pasar de $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}$ y de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Q}$. No autoriza el paso contrario conservando sin más el conjunto y el producto ordinario. Por ejemplo, $\mathbb{R}$ no es un espacio sobre $\mathbb{C}$ con ese producto: multiplicar $1 \in \mathbb{R}$ por i sale de $\mathbb{R}$. El fallo ocurre antes de verificar las identidades, en la definición de la operación.

El cuerpo también determina qué divisiones son posibles. En cualquier espacio sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, la ecuación $2v = w$ tiene solución única $v = \frac{1}{2}w$. Sobre $\mathbb{F}_2$, la expresión $2v = (1+1)v$ es siempre 0_V. Por tanto tiene todos los vectores como soluciones si $w = 0_V$ y ninguna si $w \neq 0_V$. La cancelación escalar de la proposición 4.3 sigue siendo válida: en el segundo caso el escalar que parecía ser dos es precisamente cero.

4.7. Cambiar el origen y cambiar las operaciones

La recta $x + y = 1$ en $\mathbb{R}^2$ no contiene el cero ordinario. Además, si $u = (1, 0)$ y $v = (0, 1)$, ambos pertenecen a la recta y $u + v = (1, 1)$ no pertenece. Con las operaciones heredadas del plano no es un espacio vectorial.

Podemos, sin embargo, elegir un punto p de esa recta y trabajar con desplazamientos desde él. Para no atribuir a la suma ordinaria propiedades que no tiene en la recta, escribimos operaciones nuevas:

$$u \oplus v = u + v - p, \qquad a \odot u = p + a(u - p).$$

Si u y v satisfacen $x + y = 1$, la suma de las componentes de $u \oplus v$ es $1 + 1 - 1 = 1$. En $a \odot u$ es $1 + a(1 - 1) = 1$. Las operaciones permanecen en la recta; el punto p tendrá el papel de cero.

Proposición 4.8 (operaciones con un origen elegido). Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ y sea $p \in V$ fijo. En el mismo conjunto V, las operaciones $u \oplus v = u + v - p$ y $a \odot u = p + a(u - p)$ definen un espacio vectorial. Su cero es p y el opuesto de u para $\oplus$ es $2p - u$, donde $2p = p + p$.

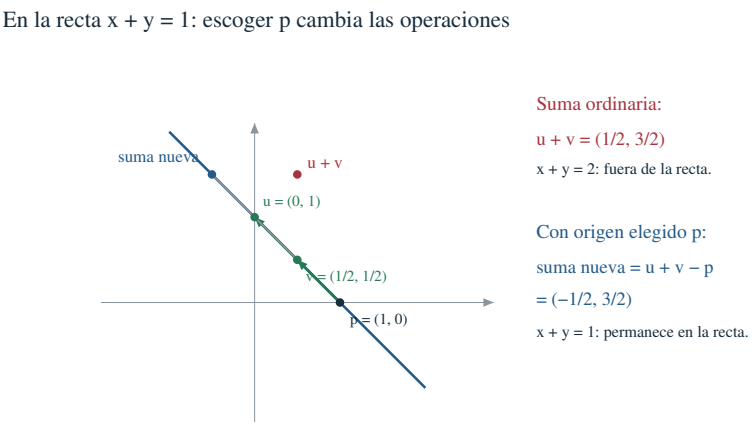
Demostración. La operación $\phi(u) = u - p$ es una biyección del conjunto V consigo mismo: su inversa suma p. Por cálculo directo,

$$\phi(u \oplus v) = \phi(u) + \phi(v), \qquad \phi(a \odot u) = a\phi(u).$$

Podemos comprobar cada ley después de aplicar ϕ, porque su inyectividad permite recuperar la igualdad original. Por ejemplo, las imágenes de $(u \oplus v) \oplus w$ y $u \oplus (v \oplus w)$ son $(\phi(u) + \phi(v)) + \phi(w)$ y $\phi(u) + (\phi(v) + \phi(w))$, que coinciden. Lo mismo prueba la conmutatividad. Como $\phi(p) = 0_V$, tenemos $u \oplus p = u$; y $\phi(2p - u) = -(u - p)$ prueba la fórmula del opuesto.

Las imágenes de $1 \odot u$ y u coinciden. Las de $a \odot (b \odot u)$ y $(ab) \odot u$ son $a(b\phi(u))$ y $(ab)\phi(u)$. Las de $a \odot (u \oplus v)$ y $(a \odot u) \oplus (a \odot v)$ son $a(\phi(u) + \phi(v))$ y $a\phi(u) + a\phi(v)$. Por último, las de $(a + b) \odot u$ y $(a \odot u) \oplus (b \odot u)$ son $(a + b)\phi(u)$ y $a\phi(u) + b\phi(u)$. Las leyes originales de V dan las igualdades requeridas; el cierre es inmediato de las fórmulas. □

Para la recta anterior, el mismo argumento usa $\phi(u) = u - p$ como biyección hacia la recta $x + y = 0$. Esta última sí conserva suma y múltiplos ordinarios: la suma de componentes permanece nula, contiene el cero y los opuestos, y las identidades se verifican componente a componente. Por ello las operaciones nuevas hacen de $x + y = 1$ un espacio con cero elegido p. Si cambiamos p, cambian las operaciones.



La fórmula permite detectar cambios incompletos. Si en $\mathbb{R}$ definimos $u \oplus v = u + v - 2$, su neutro será 2. Mantener el producto escalar ordinario falla: $0 \cdot u = 0$ no coincide con ese neutro. Para obtener un espacio, el producto compatible es $a \odot u = 2 + a(u - 2)$. Por ejemplo, $3 \odot 5 = 11$, mientras que $3 \cdot 5 = 15$. El conjunto de números no ha cambiado; sí ha cambiado qué significan sus operaciones vectoriales.

4.8. Sistemas homogéneos y la estructura que conservan

La distinción entre un origen obligado y uno elegido ya estaba presente en los sistemas. Sea $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$. Consideremos el conjunto $H = \{x \in \mathbb{F}^n : Ax = 0\}$. El cero pertenece a H, y las identidades de C03 dan

$$A(x + y) = Ax + Ay = 0, \qquad A(ax) = a(Ax) = 0 \quad (x, y \in H,\ a \in \mathbb{F}).$$

También $A(-x) = -Ax = 0$. La suma y los múltiplos permanecen en H; el cero y los opuestos son los de $\mathbb{F}^n$. Las identidades asociativas, conmutativas, distributivas y de compatibilidad escalar ya valen para todas las columnas y por tanto para las que pertenecen a H. Así hemos verificado que las soluciones homogéneas forman un espacio vectorial con sus operaciones ordinarias.

Para el sistema $x + 2y - z = 0$, por ejemplo, las soluciones son $(s - 2t, t, s)$ con $s, t \in \mathbb{F}$. Sumar dos soluciones suma los parámetros y multiplicar por un escalar multiplica ambos parámetros. La parametrización de C01 conserva, por tanto, las operaciones que acabamos de abstraer.

Si $Ax = b$ y $b \neq 0$, el vector cero no es solución. Cuando existe una solución p, todas las demás son exactamente los vectores $p + h$ con $h \in H$: si $Ax = b = Ap$, entonces $A(x - p) = 0$; y si $Ah = 0$, entonces $A(p + h) = b$. La elección de p permite operar con desplazamientos como en la recta precedente, pero no convierte la suma ordinaria de soluciones en una operación interna. Para $x + 2y - z = 1$, sumar dos soluciones da una columna cuyo miembro izquierdo vale 2, y $2 \neq 1$ en cualquier cuerpo.

Los espacios que aparecen dentro de otro espacio conservando sus operaciones merecen un estudio propio. Las soluciones homogéneas, los polinomios de grado acotado y las sucesiones con sólo finitos términos no nulos nos ofrecen ya ejemplos concretos. La cuestión siguiente será reconocer esas estructuras internas sin repetir las ocho verificaciones y determinar qué vectores basta combinar para obtener todos sus elementos.

4.9. Ejercicios

Cálculo con objetos distintos. **1.** En $\mathbb{R}^3$, sean $u = (2, -1, 3)$ y $v = (-1, 4, 0)$. Calcule $3u - 2v$ y encuentre el vector w que satisface $2w + v = u$.

2. Para $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, calcule $2A - B$. Explique por qué no hace falta que AB esté definido.

3. En $\mathbb{Q}[t]_{\le 3}$ sean $p = 2 - t + 3t^3$ y $q = 1 + 2t^2 - t^3$. Calcule $p - 2q$, $p(2) - 2q(2)$ y compruebe la compatibilidad con la evaluación.

4. Sea $X = \{a, b, c\}$. Las funciones $f, g : X \to \mathbb{R}$ tienen listas de valores $(1, -2, 3)$ y $(4, 0, -1)$ en ese orden. Halle todos los valores de $2f + g$ y la función h que cumple $f + 3h = g$.

5. Sean $a_n = n + 1$ y $b_n = (-1)^n$ para $n \in \mathbb{N}_0$. Escriba los cinco primeros términos de $a - 2b$ y explique qué significa la igualdad entre dos sucesiones.

6. Trabaje en $\mathbb{F}_2^3$. Para $u = (1, 0, 1)$ y $v = (1, 1, 0)$, calcule $u + v$, $-u$ y $u + u$. Resuelva $x + u = v$.

Reconocimiento de axiomas y contraejemplos. 7. Determine si cada conjunto es un espacio real con las operaciones ordinarias: los pares con ambas componentes estrictamente positivas; los pares que cumplen $x + y = 0$; los pares que cumplen $xy = 0$. Justifique las respuestas mediante axiomas o fallos concretos.

8. ¿Forman las matrices reales invertibles de tamaño 2×2 un espacio real con las operaciones de C03? Compare con el conjunto de todas las matrices de ese tamaño.

9. Explique por qué los polinomios reales de grado exactamente tres no forman un espacio. Dé dos polinomios de ese grado cuya suma tenga grado uno.

10. En $\mathbb{R}^2$ se propone $u \boxplus v = (u_1 + v_1, u_2 - v_2)$, con producto escalar ordinario. Exhiba fallos de conmutatividad y asociatividad.[1]

11. En $\mathbb{R}^2$ conserve la suma ordinaria y defina $a \star (x, y) = (ax, y)$. Determine si se cumplen $1 \star v = v$, $a \star (b \star v) = (ab) \star v$ y las dos distributividades.

12. En $\mathbb{R}$ conserve la suma ordinaria y defina $a \star x = a^2 x$. Indique qué leyes escalares se conservan y cuál falla.

13. Justifique que las funciones pares $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, caracterizadas por $f(-t) = f(t)$, forman un espacio real con operaciones punto a punto. ¿Ocurre lo mismo con las funciones estrictamente positivas en cada argumento?

14. Compare las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumplen $f(0) = 0$ con las que cumplen $f(0) = 1$. Determine cuál conjunto es un espacio con operaciones ordinarias y explique la diferencia.

Demostraciones desde la definición. 15. Pruebe que $-(-v) = v$ y que $-(u + v) = (-u) + (-v)$ en cualquier espacio vectorial.

16. Para $a \neq 0$ pruebe que la ecuación $ax + u = v$ tiene solución única y escríbala. Describa todas las posibilidades cuando $a = 0$.

17. Pruebe por inducción que $a(v_1 + \cdots + v_r) = av_1 + \cdots + av_r$ para todo $r \ge 0$, incluyendo el caso de suma vacía.

18. En la definición 4.1 conserve todas las condiciones salvo la existencia de opuestos y añada la condición $0_{\mathbb{F}} v = 0_V$. Pruebe que se recupera la existencia de opuestos.[2]

19. Sea V un conjunto con suma que satisface las primeras cuatro leyes y una acción escalar que satisface compatibilidad y ambas distributividades. Si se omite $1v = v$, ¿las condiciones restantes la implican? Construya un contraejemplo con $V = \mathbb{R}$.

20. Demuestre que si un espacio sobre un cuerpo satisface $v + v = v$ para todo v, entonces es el espacio cero. Distinga esa condición de $v + v = 0$ para todo v.

Polinomios, funciones y escalares. 21. Halle un polinomio no nulo de grado dos sobre $\mathbb{R}$ que valga cero en 0 y 1. Pruebe que no puede valer cero en todo $\mathbb{R}$.

22. En $\mathbb{F}_3[t]$, donde los coeficientes se calculan módulo tres, compare los polinomios t^3 y t y sus funciones sobre $\mathbb{F}_3$. Explique qué igualdad es válida y cuál no.

23. Halle todos los polinomios de grado a lo sumo dos sobre $\mathbb{F}_2$ cuya función sobre $\mathbb{F}_2$ es nula.

24. Dado un conjunto finito de reales distintos $x_1, \ldots, x_r$, construya dos funciones polinómicas distintas que coincidan en todos ellos. Incluya $r = 0$.

25. Exprese $3 - 2i$ como $a \cdot 1 + b \cdot i$ con $a, b \in \mathbb{R}$ y pruebe la unicidad. Si se admiten coeficientes complejos, encuentre dos pares distintos (a, b) que den ese mismo número.

26. Determine cuáles estructuras son espacios con el producto ordinario por escalares: $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$; $\mathbb{Q}$ sobre $\mathbb{R}$; $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{R}$; $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{C}$. Justifique también los casos negativos.

---

[1] La operación de este ejercicio procede del ejemplo 6 de §1.2 de Friedberg–Insel–Spence; se pide localizar y justificar sus fallos.

[2] Variante del ejercicio 5 de §1B de Axler: sustitución del axioma de opuestos por la acción del escalar cero.

27. Resuelva $3x + u = v$ en un espacio arbitrario sobre $\mathbb{F}_3$. Compare con un espacio sobre $\mathbb{Q}$.

28. En un espacio sobre $\mathbb{F}_2$, pruebe que cada vector es su propio opuesto. Muestre que en un espacio real esta propiedad fuerza que el espacio sea el espacio cero.

Cambio de operaciones y recuperación de sistemas. 29. En $\mathbb{R}^2$ elija $p = (1, -2)$ y use las operaciones de la proposición 4.8. Para $u = (3, 1)$ y $v = (0, 4)$, calcule $u \oplus v$, $(-1) \odot u$ y $2 \odot v$. Verifique que $u \oplus ((-1) \odot u) = p$.

30. En $\mathbb{R}$, defina $u \oplus v = u + v + c$ y $a \odot u = au + d(a)$, donde $c \in \mathbb{R}$ es fijo y $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está por determinar. Halle todas las funciones d para las que se obtiene un espacio real.

31. Sea $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$ y elija $p = (1, 0)$. Calcule la suma nueva de $u = (0, 1)$ y $v = (2, -1)$, su suma ordinaria, y $3 \odot u$. Pruebe que las dos primeras operaciones tienen comportamientos diferentes respecto de pertenecer a L.

32. Para un espacio V sobre $\mathbb{F}$ y un conjunto X, defina operaciones punto a punto en el conjunto V^X de las funciones $X \to V$. Demuestre que es un espacio vectorial, incluyendo $X = \varnothing$.[3]

33. Resuelva sobre $\mathbb{R}$ el sistema homogéneo $x + y + z = 0$, $y - z = 0$. Pruebe directamente que la suma y los múltiplos de las soluciones siguen siendo soluciones.

34. Resuelva $x + y + z = 2$, $y - z = 0$ sobre $\mathbb{R}$. Elija una solución p y escriba todas las soluciones como $p + h$, con h solución del sistema del ejercicio anterior. Determine el cero y las operaciones nuevas en ese conjunto.

35. Dadas matrices A, B de tamaños que permiten Ax y Bx para la misma columna $x \in \mathbb{F}^n$, pruebe que las soluciones simultáneas de $Ax = 0$ y $Bx = 0$ forman un espacio vectorial. Reescriba ambas condiciones como un solo sistema.

36. En el conjunto S de sucesiones de soporte finito sobre $\mathbb{F}$, pruebe que ninguna lista finita $s^{(1)}, \ldots, s^{(r)}$ permite expresar todas las sucesiones de S como combinaciones lineales de esa lista. No use resultados sobre dimensión.

4.10. Soluciones

1. Por componentes, $3u = (6, -3, 9)$ y $2v = (-2, 8, 0)$, así que $3u - 2v = (8, -11, 9)$. La ecuación para w da $2w = u - v = (3, -5, 3)$ y por tanto $w = (3/2, -5/2, 3/2)$. Al multiplicar por dos y sumar v recuperamos $(2, -1, 3)$. La división por dos es válida porque el cuerpo es $\mathbb{R}$.

2. La cuenta por entradas da $2A - B = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 5 & 3 & 6 \end{bmatrix}$. Sumar matrices y multiplicarlas por escalares sólo requiere que tengan el mismo tamaño; el producto matricial tiene otro requisito. Aquí AB no está definido, pues tres columnas de A no coinciden con dos filas de B. Esa ausencia no afecta al cálculo vectorial pedido.

3. Se obtiene $p - 2q = -t - 4t^2 + 5t^3$. Los valores son $p(2) = 24$ y $q(2) = 1$, de donde $p(2) - 2q(2) = 22$. Evaluando el resultado simbólico se obtiene $-2 - 16 + 40 = 22$. La coincidencia se explica por la distributividad al sustituir $t = 2$, no por una nueva regla de interpolación.

4. Las listas de valores de $2f$ y $2f + g$ son $(2, -4, 6)$ y $(6, -4, 5)$. De $3h = g - f$ resulta la lista $(1, 2/3, -4/3)$ para h. Como X contiene exactamente los tres argumentos indicados, dar esa lista determina toda la función, y sustituir en cada argumento verifica la ecuación.

5. Para $n = 0, \ldots, 4$ los términos de a son $1, 2, 3, 4, 5$ y los de b son $1, -1, 1, -1, 1$. La diferencia tiene primeros términos $-1, 4, 1, 6, 3$. Dos sucesiones son iguales si sus términos coinciden para cada $n \in \mathbb{N}_0$. Coincidir en los primeros cinco, o en cualquier cantidad finita de términos, no basta para sucesiones arbitrarias.

6. Toda cuenta se reduce módulo dos. Tenemos $u + v = (0, 1, 1)$, $u + u = (0, 0, 0)$ y por tanto $-u = u$. Al sumar u a $x + u = v$ obtenemos $x = v + u = (0, 1, 1)$. La verificación es $(0, 1, 1) + (1, 0, 1) = (1, 1, 0) = v$.

7. Los pares estrictamente positivos no contienen el cero ni permanecen en el conjunto al multiplicar por cero. Los pares con suma nula sí forman un espacio: son $(t, -t)$; al sumar se suman los parámetros y al multiplicar se multiplica el parámetro. Contienen $(0, 0)$ y el opuesto de $(t, -t)$ es $(-t, t)$. Las ocho identidades son las de las componentes reales. Para $xy = 0$, los vectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$ pertenecen, pero su suma $(1, 1)$ no pertenece. Falla el cierre aditivo.

[3] Generalización clásica recogida en el ejercicio 7 de §1B de Axler; aquí se incluye también el dominio vacío.

8. La matriz cero no es invertible y multiplicar cualquier matriz invertible por el escalar cero sale del conjunto. También I y $-I$ son invertibles y su suma no lo es. Por cualquiera de esos fallos el conjunto no es un espacio. El conjunto de todas las matrices 2×2 sí lo es: suma, múltiplos, cero y opuestos permanecen en él y las identidades se verifican por entradas.

9. El cero no tiene grado tres y multiplicar por el escalar cero produce ese polinomio excluido. Además, $p = t^3 + 2t$ y $q = -t^3 - t$ tienen grado tres, pero $p + q = t$ tiene grado uno. La cancelación de los términos principales explica el fallo del cierre aditivo.

10. Tomemos $u = (0, 1)$ y $v = (0, 2)$. Entonces $u \boxplus v = (0, -1)$ y $v \boxplus u = (0, 1)$. Para la asociatividad podemos elegir los tres vectores iguales a $e = (0, 1)$: $(e \boxplus e) \boxplus e = (0, 0) \boxplus e = (0, -1)$, mientras que $e \boxplus (e \boxplus e) = e \boxplus (0, 0) = (0, 1)$. Ambos fallos son independientes de cómo se defina la multiplicación escalar.

11. Se cumple $1 \star (x, y) = (x, y)$. También $a \star (b \star (x, y)) = (abx, y) = (ab) \star (x, y)$. Para una suma de vectores, $a \star ((x, y) + (r, s)) = (a(x + r), y + s)$ coincide con $(ax, y) + (ar, s)$. En cambio, $((a + b) \star (x, y)) = ((a + b)x, y)$ y $(a \star (x, y)) + (b \star (x, y)) = ((a + b)x, 2y)$ difieren si $y \neq 0$. Por ejemplo, con $a = b = 0$ y $(x, y) = (0, 1)$ dan $(0, 1)$ y $(0, 2)$. Falla la distributividad respecto de la suma de escalares.

12. La acción es interna, $1 \star x = x$ y $a \star (b \star x) = a^2 b^2 x = (ab)^2 x = (ab) \star x$. Se distribuye sobre la suma de vectores porque $a^2(x + y) = a^2 x + a^2 y$. Para la suma de escalares, con $a = b = x = 1$, $(a + b) \star x = 4$ y $a \star x + b \star x = 2$. Por tanto las condiciones que se conservan no bastan para definir un espacio real.

13. Si f y g son pares, $(f + g)(-t) = f(-t) + g(-t) = f(t) + g(t) = (f + g)(t)$. Asimismo, $(af)(-t) = af(-t) = af(t)$ para todo real a. La función nula es par y $-f$ es par. Las identidades vectoriales son las igualdades punto a punto de funciones reales, de modo que se cumplen todos los axiomas. Para funciones estrictamente positivas, la función cero está excluida y multiplicar por cero no permanece en el conjunto; no forman un espacio con esas operaciones.

14. Si $f(0) = g(0) = 0$, entonces $(f + g)(0) = 0$ y $(af)(0) = 0$. La función nula y los opuestos cumplen la condición, y todas las identidades se heredan de las operaciones punto a punto. Se obtiene un espacio real. Si se exige $f(0) = 1$, la función nula no pertenece; además sumar dos de esas funciones produce valor dos en cero. La condición con valor nulo se conserva bajo combinaciones, mientras que el valor prescrito uno cambia con ellas.

15. Como $(-v) + v = 0$, el vector v es un opuesto de $-v$; por unicidad, $-(-v) = v$. Para la segunda igualdad, asociatividad y conmutatividad permiten escribir $(u + v) + ((-u) + (-v)) = (u + (-u)) + (v + (-v)) = 0$. Por unicidad del opuesto de $u + v$, resulta $-(u + v) = (-u) + (-v)$. No se ha usado un producto entre vectores.

16. Sumar $-u$ da $ax = v - u$, y aplicar a^{-1} fuerza $x = a^{-1}(v - u)$. Esa expresión existe y verifica $ax + u = v$, pues $aa^{-1} = 1$. Si hubiera dos soluciones, ambas tendrían esa expresión; también puede usarse cancelación escalar. Para $a = 0$, la ecuación se reduce a $u = v$: si se cumple, todos los vectores son soluciones; si no, no hay ninguna.

17. Para $r = 0$, ambos miembros son 0_V, ya que $a0_V = 0_V$. Si la identidad vale para r, la distributividad aplicada a $(v_1 + \cdots + v_r) + v_{r+1}$ da $a(v_1 + \cdots + v_{r+1}) = a(v_1 + \cdots + v_r) + av_{r+1}$. La hipótesis inductiva transforma el primer término en $av_1 + \cdots + av_r$, completando el paso a $r + 1$. La asociatividad justifica omitir los paréntesis de las sumas.

18. Los elementos -1 y $0_{\mathbb{F}}$ ya existen en el cuerpo, aunque todavía no se supongan opuestos vectoriales. Para cada v, la ley del uno y la distributividad escalar dan $v + (-1)v = (1 + (-1))v = 0_{\mathbb{F}}v = 0_V$. Por tanto $(-1)v$ es un opuesto de v, cuya existencia era precisamente la condición omitida. No se necesita cancelación para este argumento, pues esa propiedad podría depender de lo que estamos probando.

19. En $\mathbb{R}$ con suma ordinaria defina $a \star x = 0$ para todos $a, x \in \mathbb{R}$. Las cuatro leyes aditivas se cumplen. También $a \star (b \star x) = 0 = (ab) \star x$. Ambas distributividades tienen cero en sus dos miembros, así que se cumplen. Sin embargo, $1 \star 1 = 0 \neq 1$. La ley del uno no es consecuencia de las demás condiciones indicadas.

20. De $v + v = v = 0_V + v$, cancelar v da $v = 0_V$ para todo v. El espacio contiene sólo el cero. En cambio, en $\mathbb{F}_2^2$ se tiene $v + v = (1 + 1)v = 0_V$ para todo v y hay cuatro vectores. La igualdad con cero no permite la cancelación que utilizamos en la primera condición.

21. Sirve $p = t(t-1) = t^2 - t$. Sus valores en cero y uno son nulos, pero $p(2) = 2 \neq 0$, por lo que su función no es la función nula. El ejemplo muestra que dos muestras no identifican un polinomio cuadrático frente al polinomio cero.

22. Los coeficientes de t^3 y t difieren, así que son polinomios formales distintos. Evaluando en $0, 1, 2$ se obtienen respectivamente $0, 1, 2$ para ambos, pues $2^3 = 8 = 2$ módulo tres. Por tanto sus funciones en $\mathbb{F}_3$ son iguales. Decir que el polinomio $t^3 - t$ es cero confundiría igualdad de valores con igualdad de coeficientes.

23. Escriba $p = a + bt + ct^2$. La evaluación en cero exige $a = 0$, y en uno exige $a + b + c = 0$, por lo que $b = c$. Los únicos valores posibles de ese coeficiente son cero y uno. Resultan exactamente $p = 0$ y $p = t + t^2$. Ambos se anulan en los dos argumentos y son polinomios distintos; en característica dos, $t + t^2 = t^2 - t$.

24. Tome la función cero y la función del polinomio $q(t) = \prod_{j=1}^{r}(t - x_j)$. En cada x_j uno de los factores es cero. En un real distinto de los finitos x_j, todos los factores son no nulos, por lo que q no vale cero; las funciones son distintas. Si $r = 0$, el producto vacío es uno, y las funciones cero y uno satisfacen vacíamente todas las condiciones de coincidencia exigidas.

25. Con coeficientes reales, comparar partes real e imaginaria da $a = 3$ y $b = -2$. Esa comparación también demuestra que no hay otro par real. Con coeficientes complejos, sirven $(a, b) = (3 - 2i, 0)$ y $(a, b) = (3 - 3i, 1)$: en el segundo caso $(3 - 3i) + i = 3 - 2i$. La unicidad dependía de la restricción a escalares reales.

26. $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{R}$ son espacios por restricción de escalares: los productos permanecen en el conjunto y las identidades valen en el cuerpo mayor. $\mathbb{Q}$ sobre $\mathbb{R}$ falla porque $\sqrt{2} \cdot 1 \notin \mathbb{Q}$. $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{C}$ falla porque $i(1, 0) = (i, 0)$ no es un par real. Esos dos casos negativos usan explícitamente el producto ordinario, como pide el enunciado.

27. En $\mathbb{F}_3$ el escalar $3 = 1 + 1 + 1$ es cero, así que $3x + u = u$ para cualquier vector x. Si $u = v$, todos los vectores resuelven la ecuación; si $u \neq v$, ninguno. Sobre $\mathbb{Q}$, el escalar tres es no nulo e invertible, y la solución única es $x = \frac{1}{3}(v - u)$. Dividir por tres sin especificar el cuerpo habría eliminado la diferencia esencial.

28. En $\mathbb{F}_2$, $v + v = (1 + 1)v = 0v = 0_V$, así que el propio v es su opuesto. Sobre $\mathbb{R}$, si cada vector es su opuesto, entonces $2v = 0_V$ para cada v. Como el escalar dos es no nulo, la proposición 4.3 da $v = 0_V$. El espacio debe ser el espacio cero.

29. Las fórmulas dan $u \oplus v = (3, 5) - (1, -2) = (2, 7)$; el opuesto nuevo es $(-1) \odot u = 2p - u = (-1, -5)$; y $2 \odot v = p + 2(v - p) = (1, -2) + 2(-1, 6) = (-1, 10)$. La verificación del opuesto produce $(3, 1) + (-1, -5) - (1, -2) = (1, -2) = p$. El resultado correcto es el nuevo cero, aunque su par ordinario no sea $(0, 0)$.

30. De $u \oplus e = u$ se obtiene $e = -c$. En cualquier espacio, $a \odot e = e$, por lo que $-ac + d(a) = -c$ y necesariamente $d(a) = (a - 1)c$ para todo real a. Esta condición también es suficiente: elija $p = -c$ en la proposición 4.8. Entonces $u + v - p = u + v + c$ y $p + a(u - p) = -c + a(u + c) = au + (a - 1)c$, exactamente las operaciones propuestas. No quedan otras funciones d posibles.

31. La suma ordinaria es $(2, 0)$, cuya suma de componentes vale dos y que por tanto no pertenece a L. La suma nueva es $(2, 0) - (1, 0) = (1, 0) = p$, que sí pertenece. Por otra parte, $3 \odot u = p + 3(u - p) = (1, 0) + 3(-1, 1) = (-2, 3)$, también en L. En general, las sumas de componentes de $u + v - p$ y de $p + a(u - p)$ valen uno para $u, v, p \in L$; esa cuenta verifica el cierre de las nuevas operaciones.

32. Defina $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ y $(af)(x) = af(x)$, usando en la derecha las operaciones de V. Son funciones $X \to V$ por cierre en V. Al evaluar en cada x, conmutatividad y asociatividad son las de V; el cero es $x \mapsto 0_V$ y el opuesto es $x \mapsto -f(x)$. Las cuatro leyes escalares se comprueban evaluando: $1f(x) = f(x)$, $a(bf(x)) = (ab)f(x)$, $a(f(x) + g(x)) = af(x) + ag(x)$ y $(a + b)f(x) = af(x) + bf(x)$. La igualdad de funciones da todos los axiomas. Para $X = \varnothing$ hay una sola función, y toda operación devuelve esa función: es el espacio cero.

33. De $y = z$ y $x + y + z = 0$ resulta $(x, y, z) = (-2t, t, t)$ con $t \in \mathbb{R}$. La suma de las soluciones con parámetros t, s es $(-2(t + s), t + s, t + s)$ y el múltiplo por a es $(-2at, at, at)$. Ambos tienen la forma requerida. El parámetro cero proporciona el vector cero y el parámetro $-t$ proporciona el opuesto; las demás identidades son las de $\mathbb{R}^3$.

34. Las soluciones son $(2-2t, t, t)$. Elija $p=(2,0,0)$; entonces cada una es $p+(-2t,t,t)$, y estos últimos desplazamientos son exactamente los del ejercicio 33. Para $u=p+h$ y $v=p+k$, defina $u\oplus v = u+v-p = p+(h+k)$ y $a\odot u = p+a(u-p) = p+ah$. Las cuentas del ejercicio anterior aseguran el cierre, y la correspondencia biyectiva $p+h\mapsto h$ lleva las operaciones a las ordinarias del espacio homogéneo. Todas las leyes se recuperan como en la prueba de la proposición 4.8. El cero es p y el opuesto nuevo de u es $2p-u$.

35. El vector cero satisface ambas ecuaciones. Si x, y son soluciones simultáneas, $A(x+y) = Ax+Ay = 0$ y $B(x+y) = Bx+By = 0$; si $a\in\mathbb{F}$, $A(ax) = aAx = 0$ y $B(ax) = aBx = 0$. Los opuestos también cumplen ambas condiciones, y las identidades para las operaciones son las de $\mathbb{F}^n$. Se obtiene un espacio vectorial. El sistema único es $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} x = 0$, con tantas filas como las filas de A y B juntas. No se requiere que tengan igual número de filas; sí el mismo número de columnas.

36. Cada sucesión de la lista tiene sólo finitas posiciones no nulas. La unión J de esas posiciones para las r sucesiones es finita. Toda combinación $a_1 s^{(1)} + \cdots + a_r s^{(r)}$ vale cero fuera de J, pues cada sumando vale cero allí. Existe un índice $k\in\mathbb{N}_0$ que no está en J; la sucesión que vale uno en k y cero en todos los otros índices pertenece a S y no puede ser tal combinación. Si la lista es vacía, J también lo es y el mismo argumento funciona: su única combinación es el cero. La demostración localiza una posición inaccesible a la lista sin necesitar una teoría del tamaño de las bases.

Lecturas y referencias

Nathaniel Johnston, *Advanced Linear and Matrix Algebra*, Springer, 2021, §1.1, hasta el inicio de §1.1.1: ejemplos, axiomas y dependencia del cuerpo. Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel y Lawrence E. Spence, *Linear Algebra*, 5.ª edición, Pearson, 2019, §1.2: espacios de listas, matrices, funciones y polinomios, y consecuencias de los axiomas. Kenneth Hoffman y Ray Kunze, *Linear Algebra*, 2.ª edición, Prentice-Hall, 1971, §2.1: estructura vectorial sobre un cuerpo y restricción de escalares. Sheldon Axler, *Linear Algebra Done Right*, 4.ª edición, Springer, 2024, §1B: definición y primeras propiedades.

Capítulo 5

Subespacios y generación

Dos datos a, b se combinan para producir la columna $(a, a+b, b)$. Podemos describir todos los resultados posibles dejando variar los dos datos, pero también podemos reconocerlos mediante una condición: si la salida es (x, y, z), necesariamente $y = x + z$. La condición es suficiente, pues cualquier columna que la cumpla se obtiene eligiendo $a = x$ y $b = z$. Tenemos así dos descripciones del mismo conjunto,

$$W = \{(a, a+b, b) : a, b \in \mathbb{F}\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{F}^3 : y = x + z\}.$$

La primera descripción explica cómo construir sus elementos; la segunda permite comprobar si una columna pertenece. Si sumamos dos salidas, sumamos sus datos de entrada; si multiplicamos una salida por un escalar, multiplicamos ambos datos por él. En los dos casos obtenemos otra salida posible. En C04 verificamos esta propiedad en distintos espacios repitiendo parte de sus axiomas. La estructura del espacio ambiente permite abreviar esas verificaciones y, después, construir sistemáticamente todos los vectores que ciertas condiciones o ciertos datos nos obligan a admitir.

Durante el capítulo, V será un espacio vectorial sobre un cuerpo conmutativo $\mathbb{F}$. Las representaciones geométricas se harán sobre $\mathbb{R}$; los enunciados sobre $\mathbb{F}$ no presuponen orden, infinitud ni característica cero.

5.1. Espacios dentro de un espacio

Definición 5.1 (subespacio). Un subconjunto $U \subseteq V$ es un **subespacio vectorial** de V si las operaciones de V, restringidas a U, hacen de U un espacio vectorial sobre el mismo cuerpo $\mathbb{F}$.

La restricción conserva el significado de sumar y de multiplicar por un escalar. Esto distingue un subespacio de un subconjunto al que se han dado operaciones nuevas. La recta $x + y = 1$ de C04 podía convertirse en un espacio al elegir un origen y cambiar sus operaciones; con la suma y los múltiplos ordinarios del plano seguía sin ser un subespacio.

Las leyes universales, como asociatividad o distributividad, ya valen para todos los vectores de V, y por ello para los de U. Lo que debemos comprobar es que las operaciones permanezcan en U y que los elementos cuya existencia exigen los axiomas se encuentren allí.

Teorema 5.1 (criterio de subespacio). Un subconjunto $U \subseteq V$ es un subespacio si y sólo si contiene 0_V, es cerrado bajo suma y es cerrado bajo multiplicación por cada escalar de $\mathbb{F}$.

Demostración. Supongamos primero que U es un subespacio y llamemos e a su cero. Para cualquier $u \in U$, la igualdad $u + e = u = u + 0_V$ se cumple en V, así que la cancelación de C04 da $e = 0_V$. Por tanto $0_V \in U$. Los cierres son necesarios porque la suma y la multiplicación escalar deben ser operaciones internas de U.

Recíprocamente, los cierres permiten restringir ambas operaciones. El vector 0_V pertenece a U y sigue siendo neutro. Si $u \in U$, el cierre escalar proporciona $(-1)u = -u \in U$, y ese vector es su opuesto también dentro de U. Conmutatividad, asociatividad, acción del uno, compatibilidad y las dos distributividades se conservan porque cada igualdad es la misma que en V. Se satisfacen así los ocho axiomas de C04. □

Puede sustituirse la condición $0_V \in U$ por $U \neq \varnothing$ si se mantienen los dos cierres: elegido $u \in U$, multiplicar por cero obliga a incluir 0_V. La no vaciedad no debe desaparecer, pues el conjunto vacío satisface vacíamente las afirmaciones de cierre y carece de cero.

Corolario 5.1 (criterio mediante combinaciones). Un subconjunto no vacío U es un subespacio de V si y sólo si $au + bv \in U$ para todos $u, v \in U$ y $a, b \in \mathbb{F}$.

Demostración. Un subespacio conserva sumas y múltiplos y, por tanto, esas combinaciones. En la otra dirección, escoger $a = b = 0$ proporciona el cero; escoger $a = b = 1$ proporciona el cierre aditivo; escoger $b = 0$ proporciona el cierre escalar. El teorema 5.1 se aplica. □

Los conjuntos $\{0_V\}$ y V son siempre subespacios. Para un ejemplo menos extremo, las matrices superiores triangulares de tamaño $n \times n$ forman un subespacio de $M_{n,n}(\mathbb{F})$: en cada entrada debajo de la diagonal, $aA + bB$ tiene valor $a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$. La matriz cero está incluida. El argumento comprueba una condición sobre entradas y evita repetir las leyes del producto escalar.

Contener cero no basta. Las matrices singulares 2×2 contienen la matriz cero y conservan múltiplos, pero $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ son singulares y su suma es la identidad. Tampoco basta conservar sumas: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ conserva la suma y contiene cero, pero $\frac{1}{2} \cdot 1$ no es entero. El cuerpo de escalares participa en el criterio.

5.2. Describir por condiciones

Una condición homogénea explica con frecuencia el cierre. Para el conjunto de la apertura, si $u = (x, y, z)$ y $u' = (x', y', z')$ cumplen $y = x+z$ y $y' = x'+z'$, entonces $ay+by' = (ax+bx')+(az+bz')$. La combinación $au + bu'$ vuelve a satisfacer la condición y el cero la satisface.

Más generalmente, sea $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$. El conjunto de soluciones de $Ax = 0$ es un subespacio de $\mathbb{F}^n$, pues contiene cero y $A(au + bv) = aAu + bAv = 0$ para dos soluciones u, v. Este cálculo, demostrado en C03 y utilizado en C04, es ahora una aplicación del criterio. No hace falta resolver el sistema para saber que su conjunto de soluciones tiene estructura vectorial.

Una condición sobre funciones se trata del mismo modo, evaluando donde corresponda. En el espacio $\mathbb{F}^X$, si $x_0 \in X$ está fijado, las funciones que cumplen $f(x_0) = 0$ forman un subespacio: $(af + bg)(x_0) = af(x_0) + bg(x_0) = 0$. Si $x_0, x_1 \in X$, la condición $f(x_0) = f(x_1)$ también se conserva, porque la igualdad de valores se conserva al formar la misma combinación en ambos lados. No estamos suponiendo continuidad ni ninguna representación gráfica de las funciones.

En $\mathbb{F}[t]_{\leq 3}$, los polinomios cuyo coeficiente de t es cero forman un subespacio: cada uno tiene la forma $a + bt^2 + ct^3$. La condición se refiere a coeficientes formales, con el significado fijado en C04. Por contraste, los polinomios de grado exactamente tres, incluso añadiendo el cero, pueden perder su grado al sumarse; por ejemplo, $(t^3 + t) + (-t^3) = t$.

La homogeneidad debe verificarse en la condición concreta. El conjunto $xy = 0$ de $\mathbb{R}^2$ contiene cero y conserva múltiplos, pero sumar $(1, 0)$ y $(0, 1)$ sale de él. Una ecuación con miembro derecho cero puede ser no lineal y fallar el cierre.

5.3. Intersecar condiciones y reunir conjuntos

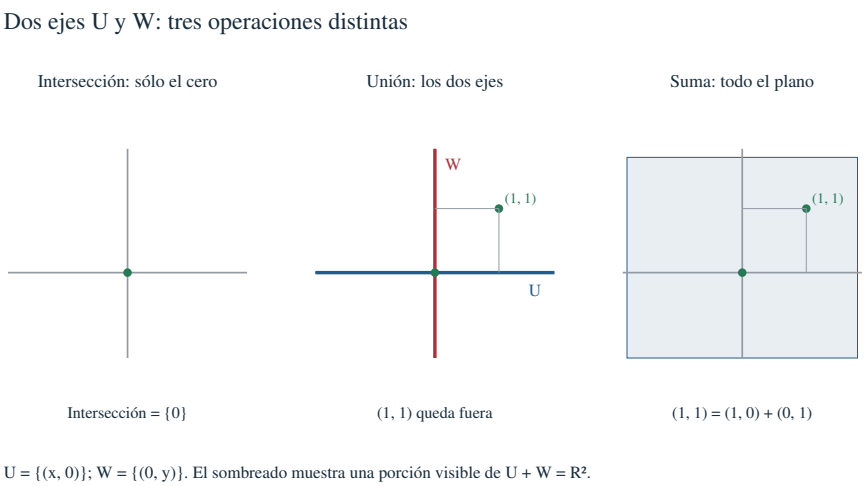
Si imponemos dos condiciones simultáneamente, tomamos la intersección de sus conjuntos de soluciones. Las mismas operaciones que conservan cada condición conservan las dos.

Proposición 5.1 (intersecciones de subespacios). La intersección de cualquier familia $(U_i)_{i \in I}$ de subespacios de V es un subespacio. Cuando $I = \varnothing$, la intersección se entiende relativa a V y vale V.

Demostración. Para una familia no vacía, cada U_i contiene 0_V, de modo que el cero pertenece a la intersección. Si u, v pertenecen a ella, pertenecen a cada U_i. Por su cierre, $au + bv$ también pertenece a cada U_i, y por tanto a la intersección. El corolario 5.1 prueba que es un subespacio. Para $I = \varnothing$, la condición «pertenecer a todos los U_i» no impone ninguna restricción a los elementos de V; la intersección es V, que ya es un subespacio. □

Por ejemplo, en $\mathbb{R}^3$ las condiciones $y = x + z$ y $x = z$ definen dos planos por el origen. Su intersección está formada por $(t, 2t, t)$: sustituir $x = z = t$ determina y. Todos sus elementos cumplen ambas condiciones, y cualquier vector que cumpla ambas aparece así.

La unión responde a otra pregunta: basta cumplir una condición o la otra. En el plano, los dos ejes son subespacios, pero su unión no contiene $(1, 1)$, aunque contenga sus sumandos $(1, 0)$ y $(0, 1)$. Para conservar ambas direcciones y las operaciones tendremos que añadir más vectores que los que aparecen en la unión.



El defecto puede describirse exactamente para dos subespacios.

Proposición 5.2 (unión de dos subespacios). La unión $U \cup W$ de dos subespacios es un subespacio si y sólo si $U \subseteq W$ o $W \subseteq U$.

Demostración. Si uno está contenido en el otro, la unión es el mayor y ya es un subespacio. Supongamos que ninguno contiene al otro. Existen entonces $u \in U \setminus W$ y $w \in W \setminus U$. Si $u + w$ perteneciera a U, restar u dentro de U daría $w \in U$, contradicción. Si perteneciera a W, restar w daría $u \in W$, también contradicción. Por tanto $u + w$ no pertenece a la unión, aunque ambos sumandos sí pertenezcan. Falla el cierre aditivo. □

La afirmación se refiere a dos subespacios. Una familia de más subespacios puede comportarse de otra manera, especialmente sobre un cuerpo finito; los ejercicios permitirán comprobar esa frontera.

5.4. El subespacio que unos vectores obligan a construir

Volvamos a la salida $(a, a + b, b)$. Puede escribirse como $a(1, 1, 0) + b(0, 1, 1)$. Dos vectores fijos bastan para producir todos los resultados, usando sólo suma y multiplicación escalar. Cualquier subespacio que contenga esos dos vectores debe contener, por sus cierres, todas esas combinaciones.

Definición 5.2 (subespacio generado). Para un subconjunto $S \subseteq V$, escribimos $\operatorname{span}_{\mathbb{F}}(S)$ para el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de elementos de S:

$$\operatorname{span}_{\mathbb{F}}(S) = \left\{ \sum_{j=1}^{r} a_j s_j : r \in \mathbb{N}_0,\ a_j \in \mathbb{F},\ s_j \in S \right\}.$$

La suma con $r = 0$ es 0_V. Si el cuerpo está claro, escribimos $\operatorname{span}(S)$. Decimos que S **genera** U si $\operatorname{span}(S) = U$. Para una lista finita abreviamos $\operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_r\}$ como $\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_r)$.

Esta definición incluye $S = \varnothing$: su única combinación es la suma vacía y $\operatorname{span}(\varnothing) = \{0_V\}$. Si S es infinito, cada combinación sigue utilizando sólo finitos elementos. La definición no autoriza una suma infinita ni una operación de límite.

Teorema 5.2 (carácter mínimo de la generación). $\operatorname{span}(S)$ es el menor subespacio de V que contiene a S: es un subespacio, contiene a S y está contenido en todo subespacio que contenga a S. Equivalentemente,

$$\operatorname{span}(S) = \bigcap_{\substack{U \text{ subespacio de } V \\ S \subseteq U}} U.$$

Demostración. La suma vacía garantiza que el conjunto de combinaciones no sea vacío. Si $x = \sum_{j=1}^{r} a_j s_j$ y $y = \sum_{k=1}^{q} b_k t_k$, entonces, para escalares c, d,

$$cx + dy = \sum_{j=1}^{r} (c a_j) s_j + \sum_{k=1}^{q} (d b_k) t_k.$$

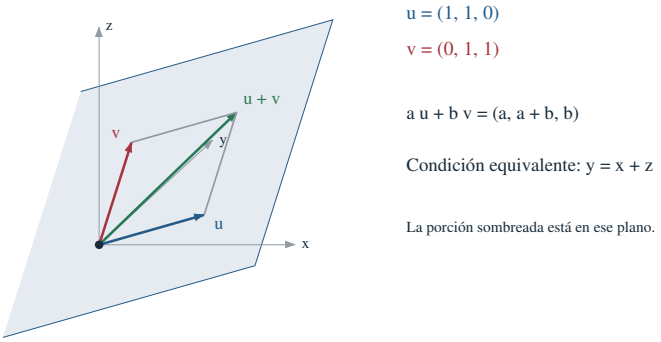
La expresión utiliza a lo sumo $r + q$ elementos de S y es otra combinación finita. Por el criterio de subespacio, $\operatorname{span}(S)$ es un subespacio. Cada $s \in S$ pertenece porque $s = 1s$.

Si U contiene a S y es un subespacio, contiene cada múltiplo $a_j s_j$ y toda suma finita de ellos, incluido el cero. Por tanto contiene $\operatorname{span}(S)$. La familia de la intersección no es vacía, pues incluye a V. Cada uno de sus miembros contiene $\operatorname{span}(S)$, y entre sus miembros está el propio $\operatorname{span}(S)$; estas dos inclusiones prueban la igualdad. □

«Menor» significa contenido en cualquier otro subespacio con la propiedad. La afirmación compara inclusiones: toda solución posible de la exigencia de cierre debe admitir las combinaciones que acabamos de construir.

En el ejemplo de la apertura, $W = \operatorname{span}((1,1,0),(0,1,1))$. Si buscamos si $(2,1,-1)$ pertenece, basta resolver $a = 2$, $a+b = 1$, $b = -1$, y los datos son compatibles. La columna es $2(1,1,0)-(0,1,1)$. En cambio, $(2,0,-1)$ no pertenece: sus componentes incumplen $y = x + z$ y los tres requisitos para a, b serían incompatibles.

El mismo conjunto: producir columnas o comprobar una ecuación



Proyección oblicua de R³: representa incidencias y sumas; no codifica longitudes ni ángulos.

La definición es igualmente concreta en otros espacios. Los polinomios $1, t, \ldots, t^n$ generan $\mathbb{F}[t]_{\le n}$ porque escribir un polinomio por sus coeficientes es escribir esa combinación. Todos los monomios $1, t, t^2, \ldots$ generan $\mathbb{F}[t]$, con una combinación finita distinta para cada polinomio. Las matrices E_{ij}, definidas por tener un uno en la entrada (i, j) y cero en las restantes, generan $M_{m,n}(\mathbb{F})$: cada matriz satisface $A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} E_{ij}$.

En el espacio de sucesiones, las sucesiones e_k que valen uno en la posición k y cero en las demás generan exactamente las sucesiones de soporte finito. Cada combinación finita sólo puede ser no nula en las posiciones usadas, y cualquier sucesión de soporte finito se expresa sumando sus valores por los e_k correspondientes. La sucesión constante uno no pertenece a ese generado, porque nunca deja de ser no nula.

5.5. Comparar descripciones y cambiar generadores

Para demostrar que dos conjuntos generan lo mismo no hace falta comparar una por una todas sus combinaciones. Basta comprobar que los datos de cada uno pueden construirse a partir del otro.

Proposición 5.3 (inclusión y sustitución de generadores). Para $S, T \subseteq V$ se cumplen:

1. Si $S \subseteq T$, entonces $\operatorname{span}(S) \subseteq \operatorname{span}(T)$.
2. $\operatorname{span}(\operatorname{span}(S)) = \operatorname{span}(S)$.
3. $\operatorname{span}(S) \subseteq \operatorname{span}(T)$ si y sólo si $S \subseteq \operatorname{span}(T)$.

Por tanto los generados son iguales si y sólo si cada elemento de S pertenece al generado de T y cada elemento de T pertenece al generado de S.

Demostración. Para la primera afirmación, una combinación de elementos de S también es una combinación de elementos de T. Para la segunda, $\operatorname{span}(S)$ ya es un subespacio: toda combinación de sus elementos permanece en él, y cada uno de sus elementos es una combinación de longitud uno.

Si hay inclusión de los generados, $S \subseteq \operatorname{span}(S)$ da la inclusión requerida para S. Recíprocamente, si $S \subseteq \operatorname{span}(T)$, este último es un subespacio que contiene a S, por lo que el carácter mínimo obliga a contener $\operatorname{span}(S)$. Aplicar el resultado en ambas direcciones prueba la conclusión sobre igualdad. □

Si $w = u - v$, añadir w a la lista u, v no modifica el generado: cualquier combinación de u, v, w puede reescribirse como $au + bv + cw = (a + c)u + (b - c)v$. La nueva lista permite representar los mismos vectores de más maneras. Por ejemplo, $u = 1u + 0v + 0w = 0u + 1v + 1w$. La generación asegura que una representación existe; por sí sola no asegura que sea única.

Las operaciones reversibles sobre una lista también conservan su generado. Sustituir v_j por $v_j + cv_i$, con $i \neq j$, conserva todos los vectores anteriores porque recuperamos v_j restando cv_i; en la otra dirección, el vector nuevo era una combinación de los anteriores. Permutar la lista o multiplicar uno de sus miembros por un escalar no nulo tiene la misma propiedad. Son las operaciones que ya conocemos en las filas de una matriz, reinterpretadas como cambios de una lista de vectores.

Hay que respetar qué lista se está cambiando. Las operaciones por filas conservan el subespacio generado por las filas, consideradas vectores de $\mathbb{F}^n$. No conservan necesariamente el generado por las columnas como subconjunto del espacio de salida. Por ejemplo, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ se reduce por una operación de filas a $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Las columnas de A generan la recta de $(1, 1)$; las de R, la de $(1, 0)$. En cambio, aplicar operaciones de columnas a una matriz sí cambia reversiblemente la lista de sus columnas y conserva su generado.

5.6. Pasar de ecuaciones a generadores y volver

Para construir generadores de las soluciones de un sistema homogéneo podemos usar la parametrización de C01–C02. En $\mathbb{F}^4$, consideremos

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0, \qquad x_2 + x_4 = 0.$$

Tomando $x_3 = s$ y $x_4 = t$, obtenemos $x_2 = -t$ y $x_1 = s + t$. Por tanto el conjunto de soluciones es

$$H = \{(s + t, -t, s, t) : s, t \in \mathbb{F}\} = \operatorname{span}((1, 0, 1, 0), (1, -1, 0, 1)).$$

La igualdad contiene dos comprobaciones: todo vector de la forma indicada satisface las ecuaciones y toda solución queda determinada por sus valores de x_3, x_4 en esa forma. Al separar los coeficientes de cada parámetro se obtienen generadores. Si no hay variables libres, la única solución es cero y sirve la lista vacía.

En la dirección contraria, supongamos que los generadores son las columnas de una matriz G. Pertenecer a su generado significa que existe una columna de coeficientes c que satisface $Gc = x$. Si reducimos G por filas y registramos las mismas operaciones mediante una matriz invertible P, como en C03, obtenemos el sistema equivalente $(PG)c = Px$. Cada fila cero de PG obliga a que la correspondiente entrada de Px sea cero. Son condiciones homogéneas sobre x.

Esas condiciones también son suficientes: en una forma escalonada, las filas no nulas tienen pivotes, y una vez satisfechas las filas cero podemos fijar las variables libres de c y resolver las pivotales por sustitución hacia atrás. Por eso las condiciones de las filas cero describen exactamente el generado de las columnas originales de G. Si no hay filas cero, no hay condiciones adicionales y cualquier x del tamaño indicado es admisible.

Para los generadores $(1, 1, 0)$ y $(0, 1, 1)$, el sistema es $c_1 = x$, $c_1 + c_2 = y$, $c_2 = z$. Restar la primera ecuación de la segunda y después restar la tercera produce la condición $0 = y - x - z$. Recuperamos la ecuación del plano inicial sin introducir determinantes ni una teoría de dimensión.

Los polinomios se tratan comparando coeficientes. Si $p = 1 + t$ y $q = t + t^2$ sobre $\mathbb{R}$, la pertenencia de $r = a + bt + ct^2$ a $\operatorname{span}(p, q)$ exige

$$r = \alpha p + \beta q = \alpha + (\alpha + \beta)t + \beta t^2.$$

Se obtiene $\alpha = a$, $\beta = c$ y la condición $b = a + c$. El generado es un conjunto de polinomios, aunque el cálculo pueda organizarse mediante sus columnas de coeficientes. Sobre un cuerpo finito

seguimos comparando coeficientes formales, sin reemplazar esa condición por coincidencia de valores en todos los escalares.

5.7. La suma de subespacios

Los dos ejes del plano no conservaban la suma al tomar su unión. Si exigimos un subespacio que contenga ambos, estamos obligados a incluir todas las sumas de un vector de cada eje, y con ellas obtenemos el plano entero.

Definición 5.3 (suma de subespacios). Para subespacios $U, W \subseteq V$, su **suma** es $U + W = \{u + w : u \in U,\ w \in W\}$. Para una lista finita $U_1, \dots, U_r$ se define de igual modo el conjunto de todas las sumas $u_1 + \cdots + u_r$ con $u_j \in U_j$. La suma de una lista vacía de subespacios es $\{0_V\}$.

Proposición 5.4 (suma y generación). $U + W$ es el menor subespacio que contiene a U y a W. En particular,

$$U + W = \operatorname{span}(U \cup W), \qquad \operatorname{span}(S) + \operatorname{span}(T) = \operatorname{span}(S \cup T).$$

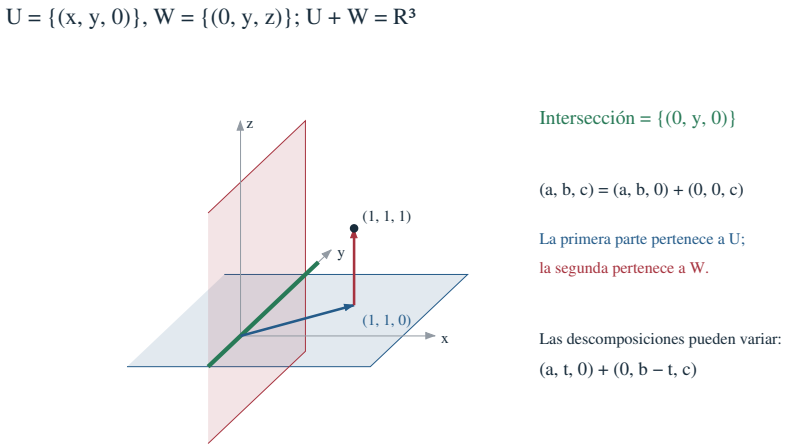
Demostración. El cero pertenece a $U + W$ como $0 + 0$. Si $x = u_1 + w_1$ y $y = u_2 + w_2$, entonces $ax + by = (au_1 + bu_2) + (aw_1 + bw_2)$, con el primer paréntesis en U y el segundo en W. Es, por tanto, un subespacio. Contiene a U porque $u = u + 0$, y a W porque $w = 0 + w$. Cualquier subespacio que contenga a ambos debe contener cada $u + w$, lo que demuestra el carácter mínimo y la primera igualdad.

Para la segunda, $\operatorname{span}(S \cup T)$ contiene a S y a T, y por minimalidad contiene sus dos generados y su suma. A la inversa, esa suma es un subespacio que contiene a $S \cup T$, de modo que contiene su generado. Las dos inclusiones dan la igualdad. $\square$

Por la asociatividad y conmutatividad de la suma vectorial, $U + W = W + U$ y $(U + W) + Z = U + (W + Z)$. Además $U + U = U$ y $U + \{0_V\} = U$. Por ejemplo, $U + U \subseteq U$ por cierre, mientras que $u = u + 0$ da la inclusión contraria. No se suman tamaños ni se cuentan elementos en estas identidades.

La suma admite una descripción simple cuando hay generadores: se reúnen las listas. La intersección puede requerir resolver un sistema nuevo. Si U está generado por las columnas de G y W por las de K, un vector de la intersección tiene dos representaciones que deben coincidir: $Ga = Kb$. Resolver $[G \ -K] \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0$ y sustituir los parámetros en Ga produce generadores de $U \cap W$. Los parámetros pertenecen a las representaciones; los generadores resultantes deben ser vectores del espacio ambiente.

Para ver la diferencia, en $\mathbb{R}^3$ sean $U = \{(x, y, 0)\}$ y $W = \{(0, y, z)\}$. La intersección consta de $(0, y, 0)$ y la suma es todo $\mathbb{R}^3$, pues $(x, y, z) = (x, y, 0) + (0, 0, z)$. Una descomposición en suma no tiene por qué ser única: $(0, 1, 0) = (0, 1, 0) + (0, 0, 0) = (0, 0, 0) + (0, 1, 0)$. La coincidencia de las dos partes en la intersección permite esa ambigüedad.



Porciones de planos en proyección oblicua. La recta verde es la intersección en R³.

Para una familia infinita $(U_i)_{i\in I}$, definimos su suma como $\operatorname{span}(\bigcup_{i\in I} U_i)$. Cada vector es una suma finita de elementos de algunos de los subespacios, aunque la familia completa sea infinita. Agrupar términos del mismo subespacio no cambia esa finitud. La expresión no prescribe sumar un vector de cada miembro de una familia infinita.

5.8. Traslaciones y condiciones no homogéneas

Definición 5.4 (subespacio afín). Un subconjunto de V de la forma $p+U=\{p+u : u\in U\}$, donde U es un subespacio y $p\in V$, se llama **subespacio afín**. El conjunto U se llama su espacio de direcciones. Esta definición exige que el conjunto sea no vacío.

El adjetivo distingue la traslación de la estructura lineal con origen fijo. En $\mathbb{R}^2$, la recta $x+y=1$ es $(1,0)+\operatorname{span}((-1,1))$. No es un subespacio lineal con las operaciones ordinarias. Los desplazamientos entre dos de sus puntos sí pertenecen siempre a la recta de ecuación $x+y=0$.

Proposición 5.5 (direcciones y origen). Si $L=p+U$, entonces el conjunto de diferencias $\{x-y : x,y\in L\}$ es exactamente U. En consecuencia, U está determinado por L. Además L es un subespacio lineal si y sólo si $0_V\in L$, y en ese caso $L=U$.

Demostración. Para $x=p+u$ e $y=p+v$, la diferencia es $u-v\in U$. A la inversa, cada $u\in U$ se obtiene como $(p+u)-p$, con ambos puntos en L. Esto prueba la igualdad y determina U a partir del conjunto L.

Si $0_V\in p+U$, existe $u\in U$ con $p+u=0_V$, así que $p=-u\in U$. Entonces $p+U=U$: una inclusión usa cierre de suma y la otra la escritura $w=p+(w-p)$. Por tanto es un subespacio lineal. Si L es un subespacio lineal, contiene cero por el teorema 5.1. □

Cuando $Ax=b$ es consistente y p es una solución, C04 probó que su conjunto de soluciones es $p+H$, donde H es el subespacio de soluciones de $Ax=0$. Si $b\neq 0$, no contiene cero y es afín pero no lineal; si el sistema es inconsistente, el conjunto vacío no es afín según la definición adoptada. La elección de otra solución q como punto inicial no cambia las direcciones, porque $p-q\in H$.

Las descripciones obtenidas hasta aquí permiten construir y reconocer subespacios, reunir condiciones y combinar generadores. Queda una dificultad que los cálculos ya hacen visible: una lista puede producir los mismos vectores que otra más corta y una columna puede admitir muchas expresiones. Decidir cuándo una representación es única exige estudiar las relaciones entre los generadores.

5.9. Ejercicios

Reconocer y refutar. 1. Determine cuáles subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios: $x-2y+z=0$; $x-2y+z=1$; $x\geq 0$; $x^2+y^2=0$; $xy=0$. Justifique cada respuesta.

2. Explique por qué $\varnothing$, $\{0_V\}$ y V tienen comportamientos distintos en el criterio de subespacio. ¿Puede un subconjunto de V tener un cero distinto del de V conservando sus operaciones?

3. Pruebe que un subconjunto no vacío de $\mathbb{F}_2^n$ cerrado bajo suma es un subespacio. Dé un contraejemplo a la afirmación correspondiente para subconjuntos de $\mathbb{R}$.

4. Pruebe que las matrices simétricas son un subespacio de $M_{n,n}(\mathbb{F})$. Determine la intersección con el subespacio de matrices superiores triangulares.

5. Para matrices 2×2, compare el conjunto de las singulares con el de las invertibles respecto de cero, cierre aditivo y cierre escalar. Trabaje sobre cualquier cuerpo.

6. Describa mediante generadores los polinomios de $\mathbb{F}[t]_{\le 4}$ cuyo coeficiente de t^2 es cero y pruebe que forman un subespacio.

7. En $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, compare las condiciones $f(0) = f(1)$ y $f(0) + f(1) = 1$. Determine cuál define un subespacio y justifique.

8. Sea U un subespacio y $p \in V$. Pruebe directamente que $p + U = U$ si $p \in U$ y que $p + U$ no contiene cero si $p \notin U$.

Construir y comprobar pertenencia. 9. Para $u = (1, 1, 0)$, $v = (0, 1, 1)$ y $w = u - v$, calcule $2u - 3v + 4w$ y dé todos sus coeficientes respecto de la lista u, v, w sobre $\mathbb{R}$.

10. Halle una condición sobre (x, y, z) equivalente a pertenecer a $\operatorname{span}((1, 2, 0), (0, 1, 1))$. Decida la pertenencia de $(2, 3, -1)$ y $(2, 2, -1)$.

11. Obtenga generadores de las soluciones de $x + y + z = 0$, $x - z = 0$ sobre $\mathbb{F}$. Compruebe las dos inclusiones entre el generado y el conjunto de soluciones.

12. En $\mathbb{R}[t]_{\le 2}$, sean $p = 1 + t$ y $q = t + t^2$. Determine si $2 + 3t + t^2$ y $1 + t^2$ pertenecen a $\operatorname{span}(p, q)$.

13. Dé tres matrices que generen todas las matrices simétricas 2×2 sobre $\mathbb{F}$ y escriba la expresión de una matriz genérica en términos de ellas.

14. Construya generadores de $x_1 + x_2 - x_3 = 0$, $x_2 + x_4 = 0$ y, a partir de esos generadores, recupere las dos ecuaciones.

15. Determine si $(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)$ generan todo el espacio de ternas sobre $\mathbb{R}$ y sobre $\mathbb{F}_2$. En el segundo caso describa exactamente su generado.

16. Pruebe que $\operatorname{span}(u + v, u - v) = \operatorname{span}(u, v)$ si el escalar 2 no es cero. Muestre mediante un ejemplo en $\mathbb{F}_2^2$ que esa hipótesis importa.

Generación finita y conjuntos infinitos. 17. Calcule $\operatorname{span}(\varnothing)$ y $\operatorname{span}(\{0_V\})$. Pruebe que $\operatorname{span}(S) = S$ si y sólo si S es un subespacio.

18. Pruebe que si $v \in \operatorname{span}(S)$ existe un subconjunto finito $S_0 \subseteq S$ tal que $v \in \operatorname{span}(S_0)$. Incluya $v = 0$ y $S = \varnothing$.

19. Pruebe que ninguna lista finita de polinomios genera $\mathbb{F}[t]$, sin utilizar dimensión.

20. Para cada $k \in \mathbb{Z}$, sea $\delta_k : \mathbb{Z} \to \mathbb{F}$ la función que vale uno en k y cero fuera de k. Describa su generado conjunto y pruebe que la función constante uno no pertenece.

Intersecciones, uniones y sumas. 21. Halle generadores de la intersección de $y = x + z$ y $x = z$ en $\mathbb{R}^3$. Explique por qué resolver ambas condiciones es suficiente.

22. Sean $U = \operatorname{span}((1, 1, 0))$ y $W = \operatorname{span}((0, 1, 1))$. Describa mediante ecuaciones $U + W$, $U \cap W$ y $U \cup W$; indique cuáles son subespacios.

23. Para los planos $U = \{(x, y, 0)\}$ y $W = \{(0, y, z)\}$ de $\mathbb{R}^3$, dé todas las descomposiciones de (a, b, c) como $u + w$ con $u \in U$ y $w \in W$.

24. En $\mathbb{R}^3$ sean $S = \{e_1, e_2\}$ y $T = \{e_1 + e_2, e_3\}$, donde e_j son las columnas usuales. Compare $\operatorname{span}(S \cap T)$ con $\operatorname{span}(S) \cap \operatorname{span}(T)$.

25. Pruebe en general que $\operatorname{span}(S \cap T) \subseteq \operatorname{span}(S) \cap \operatorname{span}(T)$ y explique por qué no se puede sustituir automáticamente la inclusión por igualdad.

26. Pruebe que si S genera U y T genera W, su unión genera $U + W$. Aplique el resultado a dos subespacios de matrices sin convertir las matrices en columnas.

27. Sean U, W subespacios con $U \neq W$. Determine si $U \cup W$ puede ser un subespacio y construya ejemplos que muestren por qué $U \neq W$ no decide por sí solo la respuesta.

28. Muestre que $\mathbb{F}_2^2$ es la unión de tres subespacios propios, ninguno contenido en otro. Compare con la proposición 5.2.

29. Sea $(U_i)_{i \in I}$ una familia no vacía de subespacios tal que, dados dos, uno está contenido en el otro. Pruebe que $\bigcup_i U_i$ es un subespacio.

30. Pruebe que la suma de una familia de subespacios es el conjunto de todas las sumas finitas de elementos de miembros de la familia, según la definición de §5.7. Incluya la familia vacía.

31. Pruebe $U + (W \cap Z) \subseteq (U + W) \cap (U + Z)$. Halle subespacios de $\mathbb{R}^2$ para los que la inclusión sea estricta.

32. Si $U \subseteq Z$, pruebe $(U + W) \cap Z = U + (W \cap Z)$, justificando cada inclusión.

33. En $\mathbb{F}[t]$, calcule la unión y la intersección de los subespacios $\mathbb{F}[t]_{\leq n}$ para todos $n \geq 0$. Explique por qué la unión sí es un subespacio en este caso.

34. En el espacio de sucesiones $(a_0, a_1, \ldots)$, sea U_m el conjunto de las que cumplen $a_0 = \cdots = a_{m-1} = 0$, con U_0 igual a todo el espacio. Calcule $\bigcap_{m\geq 0} U_m$ y pruebe que ninguna intersección finita de los U_m da ese resultado.

Traslaciones y síntesis. 35. Halle la intersección de las rectas reales $x + y = 1$ y $x - y = 0$. Determine si es un subespacio lineal y si es un subespacio afín.

36. Si $(p + U) \cap (q + W)$ es no vacío y contiene a a, pruebe que la intersección es $a + (U \cap W)$. Explique qué cambia si la intersección es vacía.

37. Halle el menor subespacio afín de $\mathbb{R}^3$ que contiene a $p = (1, 0, 0)$, $q = (1, 1, 0)$ y $r = (1, 0, 1)$. Demuestre su minimalidad mediante diferencias de puntos.

38. Sean $U = \operatorname{span}((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1))$ y $W = \operatorname{span}((1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$ en $\mathbb{R}^4$. Halle generadores de $U \cap W$ resolviendo la igualdad de representaciones y una ecuación que describa $U + W$.

39. Para matrices A, B del mismo tamaño, pruebe que toda solución común de $Ax = 0$ y $Bx = 0$ satisface $(A + B)x = 0$. ¿Vale la recíproca? Dé un ejemplo real concreto.

40. Pruebe que ninguna unión finita de rectas por el origen agota $\mathbb{R}^2$. Puede examinar los puntos $(1, t)$ para $t \in \mathbb{R}$. Explique por qué el ejercicio 28 no contradice esta afirmación.

5.10. Soluciones

1. La primera condición es homogénea y lineal: el cero la satisface y cualquier combinación de dos soluciones vuelve a satisfacerla por distributividad. La condición con miembro derecho uno excluye el cero. Para $x \geq 0$, el vector $(1, 0, 0)$ pertenece pero su opuesto no. Sobre los reales, $x^2 + y^2 = 0$ obliga a $x = y = 0$, de modo que el conjunto es $\{(0, 0, z)\}$, un subespacio. Para $xy = 0$, $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$ pertenecen, pero su suma no; falla el cierre aditivo. La conclusión sobre cuadrados utiliza que el cuerpo es real.

2. El vacío satisface los cierres vacíamente, pero no contiene cero y no es un subespacio. $\{0_V\}$ contiene cero y cualquier suma o múltiplo sigue siendo cero; sí lo es. V es un subespacio de sí mismo por sus axiomas. Si un subconjunto no vacío conserva las operaciones y tiene neutro e, para u en él se cumple $u + e = u = u + 0_V$ en V. Cancelar da $e = 0_V$. Un cero distinto requeriría cambiar el significado de alguna operación.

3. Elija u en el subconjunto. En $\mathbb{F}_2^n$, $u + u = 0$, por lo que el cierre aditivo incluye al cero. Los únicos escalares son cero y uno, y sus productos son 0 y el propio vector; también hay cierre escalar. El criterio se aplica. En $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ es no vacío y cerrado bajo suma, pero $\frac{1}{2} \cdot 1 \notin \mathbb{Z}$; no es un subespacio real. La propiedad aditiva no sustituye al cierre respecto de un cuerpo con más escalares.

4. La matriz cero es simétrica. Si $A^{\mathsf{T}} = A$ y $B^{\mathsf{T}} = B$, entonces $(aA+bB)^{\mathsf{T}} = aA^{\mathsf{T}}+bB^{\mathsf{T}} = aA+bB$ por las identidades de C03. El criterio prueba que las simétricas son un subespacio. Si una matriz es además superior triangular, cada entrada por debajo de la diagonal es cero y la entrada simétrica por encima también es cero. Por tanto es diagonal. Recíprocamente toda matriz diagonal es simétrica y superior triangular; la intersección es exactamente el subespacio diagonal, sobre cualquier cuerpo.

5. Las singulares contienen cero. Un múltiplo por cero es cero; para $a \neq 0$, si aA fuese invertible, $A = a^{-1}(aA)$ sería invertible, contradicción. Por ello conservan múltiplos. No conservan suma: las dos matrices diagonales con diagonales $(1, 0)$ y $(0, 1)$ son singulares y suman I. Las invertibles no contienen cero ni conservan todos los múltiplos, pues $0I = 0$. Tampoco conservan sumas: I y $-I$ son invertibles y suman cero. En característica dos, $-I = I$, y el mismo ejemplo sigue funcionando.

6. Cada polinomio del conjunto es $a_0+a_1t+a_3t^3+a_4t^4$, de modo que pertenece a $\operatorname{span}(1, t, t^3, t^4)$. Cada combinación de esos cuatro polinomios tiene coeficiente de t^2 nulo, lo que demuestra la inclusión contraria. El conjunto es ese generado y por el teorema 5.2 es un subespacio. También puede verificarse directamente que el coeficiente exigido sigue siendo cero al combinar dos elementos.

7. La función cero cumple $f(0) = f(1)$. Para dos funciones que cumplen esa igualdad, $(af + bg)(0) = af(0) + bg(0) = af(1) + bg(1) = (af + bg)(1)$. El criterio da un subespacio. La segunda

condición no admite a la función cero, cuya suma de valores es cero, y por eso no define un subespacio. Por ejemplo, la función constante $1/2$ sí la cumple, pero su múltiplo por cero no.

8. Si $p \in U$, cada $p + u$ pertenece a U. Para la otra inclusión, cualquier $v \in U$ se escribe como $p + (v - p)$ y $v - p \in U$. Si $p \notin U$ y $0 = p + u$ para algún $u \in U$, tendríamos $p = -u \in U$, contradicción. La presencia del origen detecta exactamente cuándo la traslación coincide con el subespacio original.

9. Como $w = u - v$, la combinación es $6u - 7v = (6, -1, -7)$. Para hallar todos los coeficientes escribimos $\alpha u + \beta v + \gamma w = (\alpha + \gamma)u + (\beta - \gamma)v$. Comparar la primera y la tercera componente con el resultado obliga a $\alpha + \gamma = 6$ y $\beta - \gamma = -7$; la componente central queda automáticamente igual a -1. Por tanto todos los coeficientes son $(\alpha, \beta, \gamma) = (6 - s, -7 + s, s)$ con $s \in \mathbb{R}$. Sustituirlos verifica la expresión y explica la falta de unicidad.

10. Una combinación es $a(1, 2, 0) + b(0, 1, 1) = (a, 2a + b, b)$, por lo que debe cumplirse $y = 2x + z$. Si esa condición se cumple, escoger $a = x$ y $b = z$ recupera la terna, de modo que también es suficiente. $(2, 3, -1)$ pertenece y vale $2(1, 2, 0) - (0, 1, 1)$. $(2, 2, -1)$ no pertenece, porque $2 \neq 4 - 1$.

11. De $x = z = t$ y $x + y + z = 0$ se obtiene $y = -2t$, con la interpretación de dos en el cuerpo. Toda solución es $t(1, -2, 1)$, lo que da una inclusión en el generado de ese vector. Recíprocamente, cada múltiplo indicado satisface $t - 2t + t = 0$ y $t - t = 0$, de modo que el generado sólo contiene soluciones. En característica dos el vector generador es $(1, 0, 1)$ y el argumento sigue siendo válido.

12. La condición de pertenencia para $a + bt + ct^2$ es $b = a + c$. Para $2 + 3t + t^2$ se cumple $3 = 2 + 1$ y la representación es $2p + q$. Para $1 + t^2$, los coeficientes constante y cuadrático obligarían a usar $\alpha = \beta = 1$, pero entonces el coeficiente de t sería dos y no cero. Por tanto no pertenece al generado real.

13. Sirven $E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Una matriz simétrica genérica es $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = aE_{11} + cE_{22} + bF$. A la inversa, cada combinación tiene esa forma y es simétrica. No se divide por dos, por lo que la descripción también es válida en característica dos.

14. Tomando $x_3 = s$, $x_4 = t$ obtenemos $(s + t, -t, s, t)$, y por tanto los generadores $(1, 0, 1, 0)$ y $(1, -1, 0, 1)$. A partir de una combinación, sus componentes satisfacen $x_1 = s + t = x_3 - x_2$ y $x_2 = -t = -x_4$; esto recupera las ecuaciones. Si ambas relaciones se cumplen, los valores $s = x_3$ y $t = x_4$ reconstruyen la combinación, de modo que no se han añadido condiciones ni perdido soluciones.

15. Una combinación con coeficientes a, b, c es $(a + c, b + c, a + b)$. Sobre $\mathbb{R}$, para una terna (x, y, z) podemos elegir $a = (x - y + z)/2$, $b = (-x + y + z)/2$ y $c = (x + y - z)/2$; sustituir da las tres componentes requeridas. Generan todo $\mathbb{R}^3$. Sobre $\mathbb{F}_2$, la suma de las tres componentes de cualquier combinación es cero. Recíprocamente, si $x + y + z = 0$, entonces $z = x + y$ y $(x, y, z) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1)$. El generado es exactamente ese conjunto de cuatro vectores y no todo $\mathbb{F}_2^3$. La tercera columna es la suma de las dos primeras.

16. Cada vector $u + v$ y $u - v$ pertenece al generado de u, v, así que hay una inclusión. Si $2 \neq 0$, tiene inverso en el cuerpo y $u = \frac{1}{2}((u + v) + (u - v))$, $v = \frac{1}{2}((u + v) - (u - v))$. La proposición 5.3 da la otra inclusión. En $\mathbb{F}_2^2$, tome $u = (1, 0)$ y $v = (0, 1)$. Entonces $u + v = u - v = (1, 1)$; esos vectores sólo generan $\{(0, 0), (1, 1)\}$, mientras que u, v generan las cuatro columnas.

17. El generado del vacío contiene únicamente la suma vacía: $\{0_V\}$. Cualquier combinación de ceros es cero, por lo que $\operatorname{span}(\{0_V\}) = \{0_V\}$ también. Si $\operatorname{span}(S) = S$, el teorema 5.2 implica que S es un subespacio. Si S es un subespacio, contiene todas sus combinaciones y cada elemento suyo es una combinación de longitud uno; por tanto coincide con su generado. Esto excluye el vacío como posible punto fijo.

18. Por definición, una representación de v usa una lista finita $s_1, \ldots, s_r$ de elementos de S. El conjunto $S_0 = \{s_1, \ldots, s_r\}$ es finito y la misma expresión demuestra $v \in \operatorname{span}(S_0)$. Para $v = 0$ podemos tomar $r = 0$ y $S_0 = \varnothing$, incluso cuando S también es vacío. No necesitamos seleccionar representantes para todos los vectores simultáneamente.

19. Una lista finita de polinomios tiene todos sus coeficientes nulos por encima de alguna posición $N \geq 0$; si la lista es vacía, sirve cualquier N. Cada combinación conserva esa propiedad, porque suma ceros en cada posición superior a N. El polinomio t^{N+1} no puede ser una combinación de

esa lista. Por ello ningún conjunto finito genera todos los polinomios, aunque la familia infinita de monomios sí los genere.

20. Una combinación finita de funciones δ_k sólo puede ser no nula en los finitísimos enteros usados en la combinación. A la inversa, si f sólo es no nula en el conjunto finito J, entonces $f = \sum_{k\in J} f(k)\delta_k$, como se comprueba en cada entero. El generado es exactamente el conjunto de funciones de soporte finito. La función constante uno es no nula en todos los enteros, un conjunto infinito, y queda fuera.

21. De $x = z = t$ y $y = x+z$ resulta $(x, y, z) = (t, 2t, t)$. Por tanto la intersección es $\operatorname{span}((1, 2, 1))$. Cada múltiplo satisface ambas condiciones y toda solución simultánea tiene esa forma. La intersección significa precisamente cumplir las dos condiciones, así que no hay una tercera condición oculta que verificar.

22. $U+W$ está formado por $(a, a+b, b)$, por lo que su ecuación es $y = x+z$. Para la intersección, $(a, a, 0) = (0, b, b)$ obliga a $a = b = 0$, y $U \cap W = \{0\}$. La unión consta de las ternas que cumplen $z = 0,\ y = x$ o bien $x = 0,\ y = z$. La suma y la intersección son subespacios por las proposiciones correspondientes. La unión no lo es: contiene $(1, 1, 0)$ y $(0, 1, 1)$, pero no su suma $(1, 2, 1)$.

23. Si $(a, b, c) = (x, y, 0) + (0, s, z)$, la primera y tercera componente fuerzan $x = a$ y $z = c$, mientras que $y + s = b$. Por tanto todas las descomposiciones son $(a, b, c) = (a, t, 0) + (0, b - t, c)$, con $t \in \mathbb{R}$. Todos esos pares son admisibles y cada descomposición tiene esa forma. El parámetro libre mueve un vector de la intersección de una parte a la otra.

24. Los conjuntos S y T no comparten ningún vector, así que $\operatorname{span}(S \cap T) = \{0\}$. El generado de S es $\{(x, y, 0)\}$ y el de T es $\{(a, a, b)\}$. En su intersección debe ser $b = 0$, y queda $\{(a, a, 0)\} = \operatorname{span}(e_1 + e_2)$, que no es cero. Intersecar las listas originales no registra las combinaciones que ambas listas pueden producir.

25. Como $S \cap T \subseteq S$ y $S \cap T \subseteq T$, la monotonía de la generación da inclusión en cada generado. Por tanto su generado está incluido en la intersección de ambos. Los conjuntos del ejercicio 24 muestran que la inclusión puede ser estricta: ningún dato coincide literalmente, pero ciertos vectores producidos por combinación sí coinciden.

26. Por la proposición 5.4, $\operatorname{span}(S \cup T) = \operatorname{span}(S) + \operatorname{span}(T) = U + W$. También puede agruparse cada combinación de la unión en los términos procedentes de S y los procedentes de T. Como ejemplo matricial, las matrices diagonales 2×2 están generadas por E_{11}, E_{22} y las estrictamente superiores triangulares por E_{12}. Su suma está generada por las tres matrices y consta exactamente de $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$, pues cada una se escribe $aE_{11} + bE_{12} + cE_{22}$.

27. La unión es un subespacio exactamente cuando uno de los dos está contenido en el otro, aunque sean distintos. En $\mathbb{R}^2$, tome $U = \{0\}$ y W igual al eje horizontal: son distintos y su unión es W, un subespacio. Si U y W son los dos ejes, también son distintos, pero la unión no conserva la suma. La desigualdad no informa por sí sola sobre las inclusiones.

28. Los conjuntos $L_1 = \{(0, 0), (1, 0)\}$, $L_2 = \{(0, 0), (0, 1)\}$ y $L_3 = \{(0, 0), (1, 1)\}$ son los generados de sus respectivos vectores no nulos. Son subespacios propios y ninguno está contenido en otro porque sus únicos vectores no nulos son distintos. Su unión contiene las cuatro columnas de $\mathbb{F}_2^2$. La proposición 5.2 trata una unión de dos; aquí la suma que falta en la unión de los dos primeros aparece en el tercero.

29. La familia es no vacía y cada miembro contiene cero, de modo que la unión contiene cero. Dados u, v en la unión, existen miembros U_i, U_j que los contienen. Por la hipótesis de comparación, uno de esos miembros contiene a ambos. Allí también pertenece $au + bv$ para cualesquiera escalares. Por tanto la combinación pertenece a la unión y el criterio prueba que ésta es un subespacio. La comparación de dos miembros evita que los sumandos queden separados en conjuntos incompatibles.

30. Una suma finita $u_1 + \cdots + u_r$, con cada u_j en algún miembro de la familia, es una combinación de elementos de su unión y pertenece al generado que define la suma. Recíprocamente, en una combinación finita $\sum_{j=1}^{r} a_j v_j$ de elementos de la unión, cada producto $a_j v_j$ pertenece al mismo subespacio que v_j, por cierre escalar. Por tanto la combinación es una suma finita del tipo indicado. Si la familia es vacía, su unión es vacía y su generado es $\{0\}$, correspondiente a la suma de cero términos.

31. Si $x = u + w$ con $u \in U$ y $w \in W \cap Z$, esa misma expresión lo coloca tanto en $U + W$ como en $U + Z$. Esto prueba la inclusión. Para ver que puede ser estricta, tome U como el eje horizontal, W

como el vertical y $Z = \operatorname{span}((1,1))$ en $\mathbb{R}^2$. Entonces $W \cap Z = \{0\}$, de modo que el miembro izquierdo es U. Pero $U + W = \mathbb{R}^2$ y $U + Z = \mathbb{R}^2$; para la segunda igualdad, $(x, y) = (x - y, 0) + y(1, 1)$. El miembro derecho es todo el plano.

32. Si $x = u + w$ con $u \in U$ y $w \in W \cap Z$, pertenece a $U + W$; además ambos sumandos pertenecen a Z porque $U \subseteq Z$, de modo que $x \in Z$. Esto da una inclusión. Si $x \in (U + W) \cap Z$, escriba $x = u + w$ con $u \in U$, $w \in W$. Como $x, u \in Z$, se tiene $w = x - u \in Z$. Por tanto $w \in W \cap Z$ y $x \in U + (W \cap Z)$. La hipótesis de inclusión es la que permite mantener la resta en Z.

33. Cada polinomio tiene sólo finitos coeficientes no nulos, por lo que pertenece a algún $\mathbb{F}[t]_{\leq n}$. La unión es todo $\mathbb{F}[t]$. La intersección está contenida en el miembro $n = 0$, que consiste en las constantes; todas las constantes pertenecen a los demás miembros, de modo que la intersección es $\mathbb{F}[t]_{\leq 0}$. La unión es un subespacio porque la familia es creciente, y por ello cumple la comparación del ejercicio 29.

34. Cada U_m es un subespacio: las entradas prescritas siguen siendo cero bajo combinaciones. Si una sucesión pertenece a todos, su entrada de índice k es cero por pertenecer a U_{k+1}. La intersección es sólo la sucesión cero. Para una familia finita no vacía de índices, sea M el mayor. Como $U_{m+1} \subseteq U_m$, su intersección es U_M, que contiene la sucesión no nula e_M. Si la familia de índices es vacía, su intersección es el espacio ambiente, también distinto de cero. Ninguna intersección finita coincide con la de todos los miembros.

35. De $x = y$ y $x + y = 1$ resulta el único punto $(1/2, 1/2)$. El conjunto no contiene el cero del plano y no es un subespacio lineal. Sí es afín: es $(1/2, 1/2) + \{0\}$. El cuerpo real permite dividir por dos; el enunciado no autoriza trasladar la respuesta sin cambios a característica dos.

36. Como $a \in p + U$, existe $u_0 \in U$ con $a = p + u_0$ y se tiene $p + U = a + U$, pues trasladar por u_0 dentro de U no cambia el conjunto. Del mismo modo, $q + W = a + W$. Un vector x pertenece a los dos exactamente cuando $x - a \in U$ y $x - a \in W$, es decir, cuando $x - a \in U \cap W$. Esto equivale a $x \in a + (U \cap W)$. Si la intersección es vacía, no puede elegirse a y, con la definición de este capítulo, el resultado vacío no es un subespacio afín.

37. Las diferencias son $q - p = (0, 1, 0)$ y $r - p = (0, 0, 1)$. El conjunto $L = p + \operatorname{span}(q - p, r - p) = \{(1, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$ es afín y contiene los tres puntos. Si M es otro subespacio afín que los contiene y su espacio de direcciones es D, la proposición 5.5 implica $q - p, r - p \in D$. Por cierre, D contiene su generado. Como $p \in M$, también $M = p + D$; por tanto contiene a L. Esto demuestra que L es el menor, no sólo uno que sirve.

38. Las representaciones son (a, b, a, b) para U y (c, c, d, d) para W. Igualarlas fuerza $a = b = c = d$. La intersección es por tanto $\operatorname{span}((1, 1, 1, 1))$. Para la suma, una columna genérica es $(a + c, b + c, a + d, b + d)$ y satisface $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$. A la inversa, si esa igualdad se cumple, elija $a = x_3$, $b = x_4$, $d = 0$ y $c = x_1 - x_3$. La segunda componente queda $x_4 + x_1 - x_3 = x_2$ y las otras coinciden directamente. La condición es suficiente y describe exactamente la suma.

39. Si $Ax = Bx = 0$, la distributividad da $(A + B)x = Ax + Bx = 0$. La recíproca falla: sobre $\mathbb{R}$, tome $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}$. Su suma es la fila cero, y cualquier columna de dos entradas es solución de $(A + B)x = 0$. Las soluciones comunes de los dos sistemas, en cambio, exigen primera entrada nula. La columna $(1, 0)$ muestra la diferencia.

40. Una recta por el origen contiene a lo sumo un punto de la forma $(1, t)$. En efecto, dos de esos puntos en la misma recta serían proporcionales; comparar su primera componente obliga a que el factor sea uno, y entonces sus segundas componentes son iguales. Una unión de r rectas puede contener a lo sumo r puntos de esa forma. Como hay infinitos reales t, existe uno fuera de la unión. En $\mathbb{F}_2$ sólo hay dos posibilidades para t, y el argumento de infinitud no se aplica; los tres subespacios del ejercicio 28 pueden cubrir todo el espacio finito.

Lecturas y referencias

Nathaniel Johnston, *Advanced Linear and Matrix Algebra*, Springer, 2021, §§1.1.1–1.1.2: criterio de subespacio, combinaciones finitas y generación. Kenneth Hoffman y Ray Kunze, *Linear Algebra*, 2.ª edición, Prentice-Hall, 1971, §2.2: intersecciones, generación como intersección y descripciones por ecuaciones y generadores. Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel y Lawrence E. Spence, *Linear Algebra*, 5.ª edición, Pearson, 2019, §§1.3–1.4: ejemplos de subespacios, operaciones con conjuntos de vectores y pertenencia mediante sistemas. Sheldon Axler, *Linear Algebra Done Right*, 4.ª edición,

Springer, 2024, §1C, hasta el resultado 1.40: suma de subespacios como el menor subespacio que contiene a los sumandos.

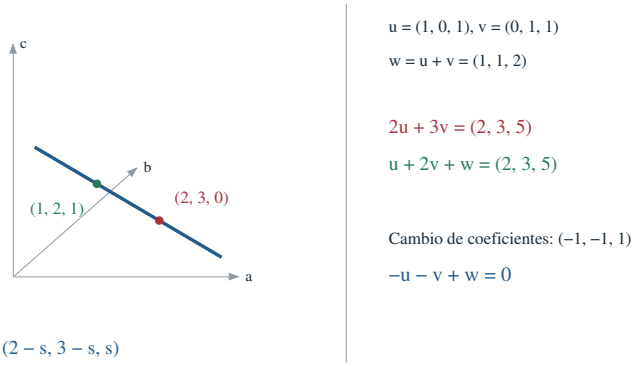
Capítulo 6

Dependencia e independencia lineal

Tres controles producen las salidas $u = (1, 0, 1)$, $v = (0, 1, 1)$ y $w = (1, 1, 2)$. Si damos a los controles intensidades a, b, c, la salida combinada es $au + bv + cw$. Podemos obtener $(2, 3, 5)$ con intensidades $(2, 3, 0)$ o con $(1, 2, 1)$. La razón es visible en las propias salidas: $w = u + v$. Aumentar en uno el tercer control y disminuir en uno los dos primeros deja la salida intacta.

La misma observación puede escribirse como $-u - v + w = 0$. Esta igualdad registra un cambio de intensidades que no produce ningún cambio de salida. Conocer todas las igualdades de ese tipo nos permitirá reconocer qué controles sobran y cuándo una salida determina las intensidades de manera única.

La ambigüedad está en los coeficientes: una relación no cambia la salida



La recta del espacio de coeficientes se muestra en proyección oblicua; no representa tres salidas.

Trabajaremos en un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Los ejemplos numéricos son reales salvo indicación contraria. Una relación puede involucrar columnas, matrices, polinomios o funciones; su significado depende de las operaciones del espacio y del cuerpo de coeficientes.

6.1. Relaciones que producen el vector cero

Definición 6.1 (relación, dependencia e independencia de una lista). Para una lista finita $v_1, \dots, v_r$ de vectores, una **relación lineal** es una igualdad $a_1 v_1 + \cdots + a_r v_r = 0_V$ con $a_j \in \mathbb{F}$. La relación es **trivial** si todos los coeficientes son cero. La lista es **linealmente independiente** si toda relación es trivial, y **linealmente dependiente** si existe una relación no trivial.

La independencia afirma una implicación para todos los coeficientes:

$$\sum_{j=1}^{r} a_j v_j = 0_V \quad \Longrightarrow \quad a_1 = \cdots = a_r = 0_{\mathbb{F}}.$$

Para refutar esa implicación necesitamos una relación en la que no todos los coeficientes sean cero. No se exige que todos sean no nulos: basta uno. En la lista $u, v, 0_V$, con u, v independientes, la igualdad $0u + 0v + 1 \cdot 0_V = 0_V$ ya demuestra dependencia.

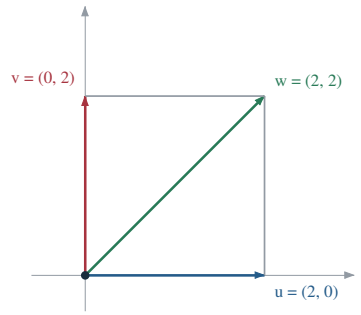
La lista vacía es independiente: sólo admite la tupla vacía de coeficientes y su suma es cero. Una lista con un único vector v es independiente exactamente cuando $v \neq 0_V$, porque la anulación escalar de C04 transforma $av = 0_V$, con $a \neq 0$, en $v = 0_V$.

Importa conservar las posiciones de la lista. La lista u, u es dependiente por $1u + (-1)u = 0_V$, incluso si $u \neq 0_V$. El conjunto $\{u\}$, que ya no conserva la repetición, es independiente si $u \neq 0_V$.

Más adelante usaremos familias indexadas para mantener esta distinción sin depender de una numeración finita. Cuando se hable de independencia de un conjunto finito, sus elementos se consideran una vez cada uno.

Para dos vectores no nulos, dependencia equivale a que uno sea múltiplo del otro. Si $au + bv = 0$ es no trivial y $b \neq 0$, entonces $v = -b^{-1}au$; si $b = 0$, la igualdad obligaría a $a = 0$ porque $u \neq 0$, contradicción. La implicación contraria resulta pasando un múltiplo al otro lado. Para tres vectores, la ausencia de pares proporcionales no garantiza independencia: en $\mathbb{R}^2$, $(1,0), (0,1), (1,1)$ no son proporcionales por parejas, pero el tercero es la suma de los dos primeros.

Cada pareja es independiente; la relación necesita los tres vectores



Ninguna pareja es proporcional.

La terna satisface:

u + v − w = 0

Tres posiciones, una relación de coeficientes (1, 1, −1).

Dibujo en R² con igual escala en ambos ejes. La independencia por parejas no basta para la terna.

6.2. Qué vector puede eliminarse

En una igualdad $a_1v_1 + \cdots + a_rv_r = 0$, un coeficiente no nulo permite despejar su vector. El paso decisivo consiste en escoger una posición donde exista un inverso escalar.

Teorema 6.1 (dependencia y eliminación). Una lista finita es dependiente si y sólo si alguno de sus vectores pertenece al generado de los restantes. Si una relación tiene coeficiente $a_k \neq 0$, entonces

$$v_k = -\sum_{j \neq k} a_k^{-1} a_j v_j,$$

y quitar la posición k no cambia el subespacio generado. Además, en toda lista dependiente existe una posición k cuyo vector pertenece al generado de los anteriores $v_1, \ldots, v_{k-1}$.

Demostración. Una relación no trivial tiene algún coeficiente no nulo. Despejarlo da la fórmula y expresa el vector como combinación de los otros. Cualquier combinación de la lista completa puede entonces reescribirse sustituyendo esa fórmula, sin usar v_k. Por tanto el generado completo está contenido en el de la lista abreviada. La inclusión contraria se sigue de que la lista abreviada sólo contiene vectores de la original.

Recíprocamente, si $v_k = \sum_{j \neq k} b_j v_j$, trasladar todo a un lado produce una relación cuyo coeficiente en la posición k es uno. Es no trivial porque $1_{\mathbb{F}} \neq 0_{\mathbb{F}}$. Si la lista tiene un solo vector y éste es cero, el generado de los restantes es el generado vacío $\{0_V\}$, de modo que el argumento incluye ese caso.

Para la última afirmación, partimos de una relación no trivial y elegimos el mayor índice k con coeficiente no nulo. Esta elección elimina todos los términos posteriores; al despejar v_k sólo aparecen los anteriores. Si $k = 1$, la relación dice $a_1v_1 = 0$ y por tanto $v_1 = 0$, que pertenece al generado de la lista anterior vacía. $\square$

La conclusión no permite eliminar cualquier vector de una lista dependiente. En $u, v, 0$ con u, v independientes, la relación exhibida sólo tiene coeficiente no nulo en la posición del cero. Eliminar u o v reduce el generado. Tampoco un coeficiente cero en una relación prueba por sí solo que ese vector sea indispensable: podría aparecer con coeficiente no nulo en otra relación.

En el ejemplo inicial, todas las relaciones se obtienen comparando componentes:

$$au + bv + cw = (a + c, b + c, a + b + 2c) = 0.$$

Las dos primeras ecuaciones dan $a = -c$ y $b = -c$; la tercera se satisface entonces automáticamente. Las relaciones son exactamente $c(-1, -1, 1)$ en el espacio de coeficientes. Cualquiera de los tres vectores puede quitarse sin cambiar el generado, porque en esa relación los tres coeficientes son no nulos sobre cualquier cuerpo.

Proposición 6.1 (herencia). Quitar posiciones de una lista independiente conserva la independencia. Añadir posiciones a una lista dependiente conserva la dependencia.

Demostración. Una relación en la lista abreviada se completa con ceros en las posiciones eliminadas. Si la lista completa es independiente, todos los coeficientes de esa relación deben ser cero. Para la segunda afirmación, una relación no trivial de la lista anterior sigue siendo no trivial al añadir coeficientes cero en las posiciones nuevas. □

Proposición 6.2 (añadir un vector). Si $v_1, \dots, v_r$ es independiente, la lista $v_1, \dots, v_r, w$ es independiente si y sólo si $w \notin \operatorname{span}(v_1, \dots, v_r)$.

Demostración. Si w pertenece al generado, una representación suya produce una relación con coeficiente uno en su posición, y la lista ampliada es dependiente. Si w no pertenece, consideremos una relación $\sum_{j=1}^{r} a_j v_j + bw = 0$. Un b no nulo permitiría despejar w como combinación de los v_j, contradicción. Luego $b = 0$, y la independencia previa obliga a $a_1 = \cdots = a_r = 0$. Para $r = 0$, la condición es $w \notin \{0_V\}$, de acuerdo con el caso de un solo vector. □

Esto permite leer una lista en orden: será independiente exactamente cuando cada vector quede fuera del generado por los anteriores. Si aparece un primer vector que no aporta esa novedad, el prefijo que termina allí es dependiente, y la lista completa también. El teorema 6.1 explica por qué siempre encontraremos una posición de ese tipo si hay dependencia; no necesitamos ensayar por separado todos los posibles vectores que podríamos despejar.

6.3. Unicidad de los coeficientes

La misma relación que permite quitar un vector explica todas las ambigüedades de representación.

Teorema 6.2 (independencia y representación única). Una lista $v_1, \dots, v_r$ es independiente si y sólo si cada vector de su generado tiene una única representación $x = \sum_{j=1}^{r} a_j v_j$ mediante esa lista.

Demostración. La pertenencia al generado garantiza existencia de al menos una representación. Si la lista es independiente y dos tuplas a, b representan el mismo x, restar sus expresiones da $\sum_{j=1}^{r} (a_j - b_j) v_j = 0$. Por independencia, $a_j - b_j = 0$ para todo j, y las tuplas coinciden.

Recíprocamente, si todos los vectores del generado tienen representación única, esto ocurre en particular para 0_V. Como los coeficientes todos nulos ya lo representan, cualquier relación debe tener precisamente esos coeficientes; la lista es independiente. Para la lista vacía, el generado sólo contiene cero y éste tiene la única representación vacía. □

La unicidad sólo se afirma para los vectores del generado. Las columnas $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$ son independientes, pero ninguna combinación suya produce $(0, 0, 1)$. La generación controla la existencia; la independencia controla la unicidad una vez que existe una expresión.

Definición 6.2 (espacio de relaciones). Para una lista finita $\mathcal{L} = (v_1, \dots, v_r)$, su **espacio de relaciones** es

$$\mathcal{R}(\mathcal{L}) = \left\{ (a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{F}^r : \sum_{j=1}^{r} a_j v_j = 0_V \right\}.$$

Es un subespacio de $\mathbb{F}^r$: contiene la tupla nula, y si a, b son relaciones, las distributividades dan $\sum_j (ca_j + db_j) v_j = c \sum_j a_j v_j + d \sum_j b_j v_j = 0_V$. La lista es independiente exactamente cuando ese subespacio es $\{0\}$.

Si c es una tupla que representa a x, las tuplas que lo representan son exactamente $c + \mathcal{R}(\mathcal{L})$. En efecto, otra tupla d produce el mismo vector si y sólo si $d - c$ es una relación. Es la traslación de un conjunto de soluciones homogéneas que conocimos en C04–C05, aplicada ahora al espacio de coeficientes.

Para la salida inicial $(2, 3, 5)$, podemos tomar $c = (2, 3, 0)$ y obtenemos todas las representaciones $(2 - s, 3 - s, s)$ con $s \in \mathbb{F}$. Si la lista es dependiente, sumar a una representación múltiplos de una relación no nula produce representaciones distintas: $c + s\alpha = c + t\alpha$ implicaría $(s - t)\alpha = 0$, y algún coeficiente no nulo de α obliga a $s = t$. Sobre un cuerpo infinito esto proporciona infinitas

representaciones; sobre un cuerpo finito proporciona tantas como escalares, sin convertir finitud en infinitud.

6.4. Detectar relaciones mediante eliminación

Si los vectores son columnas $v_j \in \mathbb{F}^n$, formamos la matriz $A = [v_1 \ \cdots \ v_r]$. Una relación de la lista es exactamente una solución de $Aa = 0$. Los capítulos iniciales proporcionan un procedimiento completo para encontrar esas soluciones y decidir si existen soluciones no nulas.

Proposición 6.3 (criterio por pivotes). Las columnas de una matriz $A \in M_{n,r}(\mathbb{F})$ son independientes si y sólo si su forma escalonada tiene un pivote en cada columna, equivalentemente, si su rango por pivotes es r.

Demostración. Las operaciones elementales no cambian las soluciones de $Aa = 0$. Si todas las variables son pivotales, la sustitución hacia atrás da como única solución la tupla cero. Si alguna variable es libre, podemos darle valor uno y dar valor cero a las otras variables libres; C01–C02 determinan valores de las pivotales que completan una solución. Esa tupla no es nula porque conserva una entrada libre igual a uno. Esto equivale exactamente a la definición de independencia de las columnas. Si $r = 0$, no hay variables y la única solución es la tupla vacía; el criterio sigue siendo válido. □

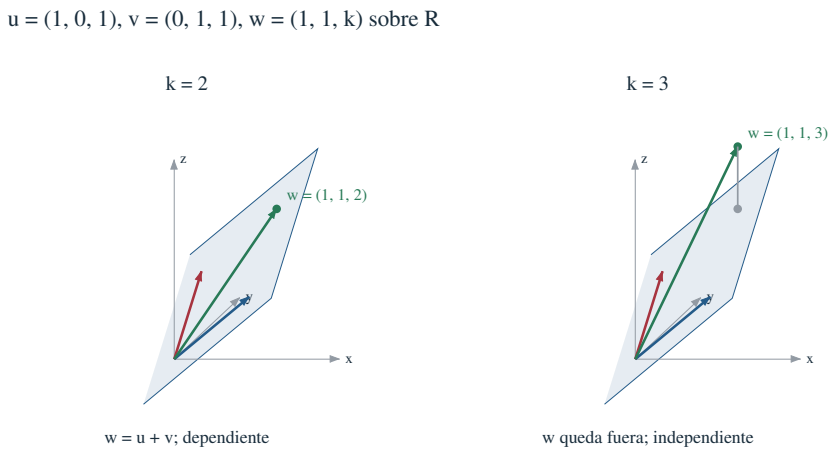
Corolario 6.1. Toda lista de más de n vectores de $\mathbb{F}^n$ es dependiente.

Demostración. Una matriz con n filas tiene a lo sumo n pivotes. Si tiene más de n columnas, alguna no puede ser pivotal; la proposición 6.3 proporciona una relación no trivial. □

La cota cuenta posiciones posibles de pivotes en el algoritmo ya fundamentado de eliminación. Tener a lo sumo n columnas no asegura independencia: todavía puede faltar algún pivote.

Por ejemplo, para las columnas $(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, k)$, con $k \in \mathbb{F}$, una relación exige $a + c = 0$, $b + c = 0$, $a + b + kc = 0$. Sustituir las dos primeras da $(k - 2)c = 0$. Si $k \neq 2$, sólo hay la relación trivial. Si $k = 2$, las relaciones son $c(-1, -1, 1)$. La escritura $k - 2$ significa $k - (1_{\mathbb{F}} + 1_{\mathbb{F}})$; en característica dos el valor excepcional es $k = 0$.

Las operaciones por filas conservan cada tupla de coeficientes que expresa una relación: si $R = PA$ con P invertible, entonces $Ra = 0$ equivale a $Aa = 0$. Las operaciones por columnas cambian los coeficientes: si $B = AE$ con E invertible, una tupla b es relación de B exactamente cuando Eb es relación de A. Como $b \mapsto Eb$ lleva cero a cero y ningún vector no nulo a cero, preservan la independencia de la lista completa, aunque cambien qué tupla expresa cada relación.



6.5. El cuerpo de los coeficientes

La lista $1, i$ de números complejos es independiente cuando los coeficientes deben ser reales: $a + bi = 0$, con $a, b \in \mathbb{R}$, obliga a que ambas partes sean cero. Con coeficientes complejos, en cambio, $(-i) \cdot 1 + 1 \cdot i = 0$ es una relación no trivial. Los objetos no han cambiado; sí han cambiado los coeficientes permitidos.

Si restringimos los escalares de un espacio de un cuerpo $\mathbb{F}$ a un subcuerpo $\mathbb{K}$, una familia independiente sobre $\mathbb{F}$ sigue siendo independiente sobre $\mathbb{K}$: cada relación con coeficientes en $\mathbb{K}$ ya era una relación admitida sobre $\mathbb{F}$. El ejemplo $1, i$ muestra que la implicación inversa puede fallar.

Hay una situación distinta en la que la independencia sí se conserva al pasar de reales a complejos.

Proposición 6.4 (columnas reales y coeficientes complejos). Una lista de columnas de $\mathbb{R}^n$ es independiente sobre $\mathbb{R}$ si y sólo si, considerada como lista de columnas de $\mathbb{C}^n$, es independiente sobre $\mathbb{C}$.

Demostración. Una relación real no trivial también es una relación compleja no trivial; por tanto la independencia compleja implica la real. Supongamos que la lista es independiente sobre $\mathbb{R}$ y que $\sum_j (a_j + ib_j)v_j = 0$, con $a_j, b_j \in \mathbb{R}$. Como las entradas de cada v_j son reales, comparar partes reales e imaginarias en cada componente da $\sum_j a_j v_j = 0$ y $\sum_j b_j v_j = 0$. La independencia real obliga a que todos los a_j, b_j sean cero. La relación compleja era trivial. □

La hipótesis de entradas reales es lo que permite separar las dos ecuaciones de esa manera. No se aplica a la lista compleja $1, i$ del ejemplo anterior.

Sobre cuerpos finitos también debemos examinar qué escalares se anulan. En la clasificación con parámetro de §6.4, el valor dos puede ser cero; en un despeje donde aparezca tres, el mismo problema surge en $\mathbb{F}_3$. Las pruebas por relaciones siguen siendo válidas, pero sólo se invierten los coeficientes que son no nulos en el cuerpo declarado.

6.6. Polinomios, matrices y funciones

Para probar independencia de polinomios formales, una relación es una igualdad de coeficientes. Por ejemplo, si $a \cdot 1 + b(1 + t) + c(1 + t + t^2) = 0$, el coeficiente de t^2 da $c = 0$, el de t da $b + c = 0$ y el constante da $a + b + c = 0$. Se obtiene $a = b = c = 0$ sin derivadas ni divisiones por enteros. El argumento funciona sobre cualquier cuerpo.

Más generalmente, una lista de polinomios no nulos con grados distintos es independiente. En una relación no trivial, entre los polinomios cuyo coeficiente es no nulo escojamos el de mayor grado. Sólo él aporta al coeficiente de esa potencia; su coeficiente principal y su coeficiente en la relación son ambos no nulos, por lo que su producto tampoco es cero. La suma no puede ser el polinomio cero, contradicción.

Las matrices E_{ij} de C05 son independientes por la misma razón localizada: en una relación $\sum_{i,j} a_{ij} E_{ij} = 0$, la entrada (i, j) es exactamente a_{ij}. Todas esas entradas deben ser cero. Comparar entradas puede ser más claro que apilar la matriz en una columna, aunque ambas maneras conducen al mismo sistema.

En un espacio de funciones, la igualdad exige comprobar todos los argumentos, pero podemos usar algunos valores para descartar relaciones.

Proposición 6.5 (certificado por evaluación). Sean $f_1, \ldots, f_r : X \to \mathbb{F}$ y $x_1, \ldots, x_m \in X$. Si las columnas de la matriz $E = (f_j(x_i))_{i,j}$ son independientes, entonces las funciones $f_1, \ldots, f_r$ son independientes.

Demostración. Si $\sum_j a_j f_j = 0$ como función, al evaluar en cada x_i obtenemos $\sum_j a_j f_j(x_i) = 0$. Estas ecuaciones forman $Ea = 0$. La independencia de sus columnas obliga a $a = 0$, de modo que toda relación de funciones es trivial. □

La suficiencia no autoriza la recíproca para una selección fija de puntos. Las funciones reales $1, t, t^2$ son independientes, pues una igualdad polinómica válida en todo $\mathbb{R}$ tiene todos sus coeficientes nulos por C04. Si las evaluamos sólo en 0 y 1, las dos últimas dan la misma columna $(0, 1)$ y los valores muestreados son dependientes. Perder información al tomar muestras puede crear relaciones que no son identidades de funciones.

En $\mathbb{F}_2$, las funciones t y t^2 en todo el cuerpo sí son iguales. Los polinomios formales t y t^2 siguen siendo independientes por sus coeficientes, pero sus funciones sobre ese dominio no lo son. Hay que declarar tanto el objeto como el cuerpo antes de interpretar una relación.

6.7. Familias indexadas, incluidas las infinitas

Una sucesión $v_1, v_2, \ldots$ puede contener infinitos vectores, pero las operaciones de un espacio vectorial sólo han definido sumas finitas. La independencia lineal de una familia debe conservar esa restricción.

Definición 6.3 (independencia de una familia indexada). Para una familia $(v_i)_{i\in I}$, una relación es una familia de escalares $(a_i)_{i\in I}$ de **soporte finito**, es decir, con sólo finitos a_i no nulos, tal que $\sum_{i\in I} a_i v_i = 0_V$. La suma se efectúa únicamente sobre ese soporte finito. La familia de vectores es independiente si toda relación tiene $a_i = 0$ para cada i, y dependiente en caso contrario.

Los índices distintos pueden designar vectores iguales: si $v_i = v_j$ para $i \neq j$, los coeficientes uno y menos uno en esas dos posiciones producen una relación no trivial. Para un conjunto S, la familia correspondiente es $(s)_{s\in S}$ y no repite elementos. Con $I = \varnothing$ sólo existe la familia vacía de coeficientes; sigue siendo independiente.

Proposición 6.6 (criterio finito). Una familia indexada es independiente si y sólo si todas sus subfamilias finitas son independientes.

Demostración. Una relación no trivial de una subfamilia finita se extiende con ceros a todos los índices y demuestra dependencia de la familia completa. A la inversa, si la familia completa es dependiente, una relación no trivial tiene soporte finito; la subfamilia en ese soporte ya es dependiente. Ambas implicaciones prueban la equivalencia. □

La familia $1, t, t^2, \ldots$ de polinomios formales es independiente: cada relación utiliza finitos monomios y comparar sus coeficientes da cero en cada posición. Las sucesiones e_k que tienen uno en la posición k y cero en las demás también forman una familia independiente, porque evaluar una relación en la posición k recupera su coeficiente. Aunque sean independientes, sólo generan las sucesiones de soporte finito, como vimos en C05; la sucesión constante uno queda fuera.

La equivalencia del teorema 6.2 se extiende a estas familias interpretando cada representación como una familia de coeficientes de soporte finito. Restar dos de ellas sigue dando soporte finito, contenido en la unión de dos conjuntos finitos, y el mismo argumento identifica unicidad con ausencia de relaciones. No se afirma nada sobre series infinitas o convergencia.

En una lista finita, independencia significa también que ninguna posición puede quitarse sin reducir el generado: si una posición pudiera quitarse, su vector sería combinación de los restantes y aparecería una relación no trivial; si la lista es dependiente, el teorema 6.1 proporciona una posición eliminable. Reunir generación e independencia permitirá describir un espacio por datos suficientes y sin ambigüedad. Para hacerlo de manera sistemática tendremos que comparar listas y justificar hasta dónde pueden ampliarse o abreviarse.

6.8. Ejercicios

Leer una relación. 1. Para $u \neq 0_V$, clasifique las listas vacía, (0_V), (u), (u, u) y $(u, 2u)$ sobre un cuerpo cualquiera. Exhiba una relación no trivial en cada caso dependiente.

2. Sean u, v independientes y $w = 2u - 3v$. Halle todas las relaciones de (u, v, w) sobre $\mathbb{F}$. Indique qué posiciones pueden despejarse a partir de una relación no trivial cuando los escalares dos y tres son no nulos.

3. En $\mathbb{R}^2$, pruebe que cada pareja de la lista $(1, 0), (0, 1), (1, 1)$ es independiente y que la lista completa es dependiente. Explique por qué «ninguno es múltiplo de otro» no decide el caso de tres vectores.

4. Si u, v son independientes, halle todas las relaciones de $(u, v, 0_V)$. Determine cuáles posiciones pueden quitarse conservando el generado.

5. Compare la lista (e_1, e_2, e_1) con el conjunto $\{e_1, e_2\}$ en $\mathbb{F}^2$. Halle todas las relaciones de la lista y explique qué información se pierde al pasar al conjunto.

6. Demuestre por prolongación de coeficientes con ceros que cualquier subfamilia de una familia indexada independiente es independiente.

Sistemas, parámetros y coeficientes. 7. Clasifique $(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, k)$ para todo $k \in \mathbb{R}$. Para el valor dependiente dé todas las relaciones y dos representaciones de $(2, 3, 5)$.

8. En $\mathbb{R}^4$, sean $u = (1, 0, 1, 0)$ y $v = (0, 1, 0, 1)$. Compare las listas $(u, v, (1, 1, 1, 1))$ y $(u, v, (0, 0, 1, 0))$ mediante sus sistemas de relaciones.

9. Reconsidere el ejercicio 2 sobre $\mathbb{F}_2$ y sobre $\mathbb{F}_3$. Determine todas las relaciones y cuáles de los tres vectores pueden eliminarse sin cambiar el generado.

10. En $\mathbb{F}_2^2$, halle todas las relaciones de $(e_1, e_2, e_1 + e_2)$ y todos los coeficientes que representan a e_1.

11. Si u, v son independientes y $w = u + v$, halle todas las representaciones de $u + 2v$ mediante (u, v, w).

12. Pruebe que si una lista es dependiente, todo vector de su generado tiene al menos dos representaciones. Si el cuerpo tiene q elementos, pruebe que tiene al menos q; si es infinito, que tiene infinitas.

13. Para $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ sobre $\mathbb{R}$, encuentre todas las relaciones de las columnas y todas las soluciones de $Ac = (4, -1)$.

14. Pruebe que las columnas de $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ son independientes. Determine si $(1, 1, 0)$ pertenece a su generado.

15. Dé una relación no trivial de $(e_1, e_2, e_3, (1, 1, 1))$ en $\mathbb{F}^3$. Justifique mediante pivotes por qué cualquier lista de cuatro columnas en ese ambiente es dependiente.

16. Si $R = PA$ con P invertible, pruebe que las tuplas de relación de las columnas de A y R son las mismas. Explique por qué esto no implica que los dos generados sean el mismo subconjunto.

17. Si $B = AE$ con E invertible, determine la correspondencia entre sus espacios de relaciones y pruebe que las columnas de A son independientes si y sólo si las de B lo son.

Polinomios, matrices y funciones. 18. En $\mathbb{F}[t]$, halle todas las relaciones entre $p = 1 + t$, $q = t + t^2$ y $r = 1 + 2t + t^2$. Determine qué polinomios pueden eliminarse de la lista.

19. Pruebe que cualquier familia de polinomios no nulos cuyos grados son distintos es independiente. Incluya familias infinitas.

20. Pruebe que 1, $1 + t$, $1 + t + t^2$ y $1 + t + t^2 + t^3$ son independientes sobre cualquier cuerpo. Exprese $a + bt + ct^2 + dt^3$ mediante esa lista.

21. Compare la lista de polinomios formales $(1, t, t^2)$ sobre $\mathbb{F}_2$ con la lista de sus funciones en $\mathbb{F}_2$. Halle todas las relaciones en ambos casos.

22. Pruebe que las seis matrices E_{ij} de $M_{2,3}(\mathbb{F})$ son independientes. ¿Qué ocurre si se añade $E_{11} + E_{12}$? Escriba una relación y determine si se puede eliminar una de las matrices originales.

23. Clasifique la lista I, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ sobre cuerpos donde dos es no nulo y sobre $\mathbb{F}_2$.

24. Pruebe que las funciones reales 1, $|t|$ y t son independientes usando sólo evaluaciones en $0, 1, -1$.

25. Para las funciones reales $1, t, t^2$, halle todas las relaciones entre sus listas de valores en $0, 1$. Explique por qué esas relaciones no prueban dependencia de las funciones. Añada una evaluación que certifique la independencia.

26. Sea $\delta_k : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{F}$ la función que vale uno en k y cero en las otras posiciones. Pruebe independencia de $(\delta_k)_{k \geq 0}$ y determine si genera la función constante uno.

27. Pruebe que las sucesiones $(1)_{n \geq 0}$, $(2^n)_{n \geq 0}$ y $(3^n)_{n \geq 0}$ son independientes sobre $\mathbb{R}$ mediante las posiciones $n = 0, 1, 2$.

28. Explique con cuantificadores por qué la independencia de $1, t, t^2, \ldots$ en $\mathbb{F}[t]$ no exige estudiar series $\sum_{n \geq 0} a_n t^n$ con infinitos coeficientes no nulos.

Pruebas estructurales y fronteras. 29. Sea $(v_i)_{i \in I}$ una familia independiente y sea w un vector al que se da un índice nuevo. Pruebe que la familia ampliada es independiente si y sólo si w no pertenece al generado de la familia anterior.

30. En $\mathbb{F}^3$, considere la lista $e_1, e_2, e_1 + e_2, e_3$. Halle el primer prefijo dependiente y determine si quitar la tercera o la cuarta posición conserva el generado.

31. Sea $v_1, \ldots, v_r$ independiente y reemplace v_k por $w = \sum_{j=1}^{r} a_j v_j$. Pruebe que la nueva lista es independiente si y sólo si $a_k \neq 0$.

32. Pruebe directamente, desde la última fila hacia la primera, que las columnas de una matriz superior triangular con diagonal no nula son independientes.

33. Reproduzca la prueba de independencia real/compleja para columnas reales, indicando dónde se usa que las entradas son reales.

34. Halle las relaciones de la lista $(1, i)$ considerando $\mathbb{C}$ como espacio sobre $\mathbb{R}$ y como espacio sobre $\mathbb{C}$.

35. Si $v_1, \dots, v_r$ es independiente y $c_1, \dots, c_r$ son escalares no nulos, pruebe independencia de $c_1v_1, \dots, c_rv_r$. Describa qué ocurre si alguno de los c_j es cero.

36. Dé ejemplos en $\mathbb{R}^2$ donde trasladar todos los vectores de una lista por un mismo vector convierta una lista independiente en dependiente y una dependiente en independiente.

37. Sean dos familias independientes con conjuntos de índices disjuntos. Pruebe que la familia reunida es independiente si y sólo si los subespacios generados por ambas tienen intersección $\{0\}$.

38. Sea una lista dependiente cuyas sublistas propias son todas independientes. Pruebe que cada relación no trivial tiene todos sus coeficientes no nulos y que puede eliminarse cualquier posición sin cambiar el generado.

39. Muestre que un coeficiente cero en una relación no decide si su posición puede quitarse. Use una relación de (e_1, e_2, e_1, e_2) que tenga coeficiente cero en la segunda posición y compare con $(e_1, e_2, 0)$.

40. Para $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, halle todas las relaciones de $(1, t, (t-\lambda)^2, (t-\mu)^2)$. Clasifique también $(1, (t-\lambda)^2, (t-\mu)^2)$, indicando los casos de característica dos.

6.9. Soluciones

1. La lista vacía y (u) son independientes: en el segundo caso $au = 0$ obliga a $a = 0$ porque $u \neq 0$. (0_V) es dependiente por $1 \cdot 0_V = 0_V$. (u, u) admite la relación de coeficientes $(1, -1)$, y $(u, 2u)$ la de coeficientes $(2, -1)$. Ambas son no triviales en cualquier cuerpo, pues $-1 \neq 0$, incluso cuando el escalar dos es cero y el segundo vector de la última lista es el vector cero.

2. La combinación $au + bv + cw$ es $(a + 2c)u + (b - 3c)v$. Como u, v son independientes, se anula exactamente cuando $a = -2c$ y $b = 3c$. Todas las relaciones son $s(-2, 3, 1)$, con $s \in \mathbb{F}$. Si dos y tres son no nulos y $s \neq 0$, los tres coeficientes son no nulos, por lo que cualquiera de las posiciones puede despejarse y eliminarse. En particular $w = 2u - 3v$, $u = (w + 3v)/2$ y $v = (2u - w)/3$; las divisiones necesitan las hipótesis indicadas.

3. Una relación entre $(1, 0)$ y $(0, 1)$ tiene componentes (a, b) y sólo se anula con ambos coeficientes cero. Para $(1, 0), (1, 1)$, la segunda componente de $(a + b, b)$ obliga a $b = 0$ y después $a = 0$. Para $(0, 1), (1, 1)$ se razona con la primera componente de $(b, a + b)$. La terna completa admite la relación de coeficientes $(1, 1, -1)$. Las relaciones entre tres vectores pueden involucrar los tres a la vez sin que exista una entre sólo dos.

4. La igualdad $au + bv + c0_V = 0$ equivale a $au + bv = 0$, de modo que $a = b = 0$ y c es arbitrario. Sólo las relaciones con $c \neq 0$ son no triviales. Quitar el cero conserva el generado. Quitar u lo cambiaría, porque exigiría $u \in \operatorname{span}(v)$, contradiciendo la independencia; el mismo argumento impide quitar v. Es una lista dependiente en la que no todos los miembros son redundantes.

5. La combinación $ae_1 + be_2 + ce_1$ tiene componentes $(a + c, b)$; todas las relaciones son $(s, 0, -s)$. La lista es dependiente, mientras que el conjunto de sus valores distintos $\{e_1, e_2\}$ es independiente por comparación de componentes. El paso al conjunto elimina una posición y la posibilidad de asignar coeficientes distintos a las dos apariciones de e_1.

6. Sea $J \subseteq I$ y suponga que una relación en $(v_j)_{j \in J}$ tiene soporte finito. Defina coeficientes en todo I manteniendo los de J y poniendo cero fuera de J. El soporte no crece y la misma suma sigue siendo cero. La independencia de la familia completa obliga a que todos esos coeficientes sean cero, incluidos los de J. Por tanto la subfamilia es independiente. El argumento también incluye $J = \varnothing$.

7. Las ecuaciones de una relación son $a + c = 0$, $b + c = 0$, $a + b + kc = 0$. Al sustituir $a = b = -c$ queda $(k - 2)c = 0$. Si $k \neq 2$, la relación es trivial y la lista es independiente. Si $k = 2$, todas las relaciones son $s(-1, -1, 1)$. Para ese valor, $(2, 3, 5) = 2u + 3v = 1u + 2v + 1w$, donde u, v, w son las columnas de la lista; las dos tuplas difieren por $(-1, -1, 1)$.

8. En la primera lista, el tercer vector es $u + v$. Comparar primera y segunda componentes de una relación da $a + c = b + c = 0$, y las otras componentes no añaden condiciones. Las relaciones son $s(-1, -1, 1)$. En la segunda lista la combinación tiene componentes $(a, b, a + c, b)$; si es cero, las dos primeras dan $a = b = 0$ y la tercera da $c = 0$. Es independiente. Contar cuatro entradas y tres columnas no distingue las dos listas; importa si aparece una variable libre en el sistema homogéneo.

9. Sobre $\mathbb{F}_2$, $w = 2u - 3v = v$ y las relaciones del ejercicio 2 son $(0, s, s)$, con $s \in \mathbb{F}_2$. Se puede quitar v o w, pero no u, que no pertenece al generado de v. Sobre $\mathbb{F}_3$, $w = 2u$ y las relaciones son $(s, 0, s)$, pues $-2 = 1$ y $3 = 0$. Se puede quitar u o w, pero no v. Los coeficientes que se anulan

señalan aquí posiciones que no aparecen en ninguna relación no trivial, porque ya hemos encontrado todas.

10. Una relación tiene componentes $(a+c, b+c) = 0$. En $\mathbb{F}_2$ se obtiene $a = b = c$, y las relaciones son $(0,0,0)$ y $(1,1,1)$. Para representar a e_1, las ecuaciones son $a + c = 1$, $b + c = 0$. Con $c = 0$ obtenemos $(1,0,0)$; con $c = 1$, $(0,1,1)$. Ésas son todas las posibilidades de los coeficientes.

11. La igualdad $au + bv + cw = u + 2v$ equivale a $(a+c)u + (b+c)v = u + 2v$. La independencia de u, v obliga a $a + c = 1$ y $b + c = 2$. Todas las tuplas son $(1 - s, 2 - s, s)$, con $s \in \mathbb{F}$. Sustituirlas da el vector pedido; compararlas con una tupla cualquiera que lo represente demuestra que no faltan casos.

12. Sea α una relación no nula y c una representación del vector dado. Para cada $s \in \mathbb{F}$, la tupla $c + s\alpha$ representa el mismo vector. Si $c + s\alpha = c + t\alpha$, alguna posición con $\alpha_k \neq 0$ da $(s - t)\alpha_k = 0$, de donde $s = t$. Así se obtienen tuplas distintas para escalares distintos. Todo cuerpo tiene al menos dos elementos, lo que prueba la primera afirmación; los otros casos siguen contando esos escalares. No se afirma que ésas sean todas las representaciones cuando el espacio de relaciones tiene otras direcciones.

13. Para el sistema homogéneo las ecuaciones son $c_1 + c_3 = 0$ y $c_2 + c_3 = 0$, de modo que las relaciones son $s(-1,-1,1)$. Para el dato $(4,-1)$ obtenemos $c_1 + c_3 = 4$ y $c_2 + c_3 = -1$. La solución general es $(4 - s, -1 - s, s)$ con $s \in \mathbb{R}$. Puede verse como la representación particular $(4,-1,0)$ más una relación; la sustitución verifica ambas ecuaciones.

14. Una relación de las dos columnas exige $a + 2b = 0$, $b = 0$ y $a = 0$; sólo existe la trivial. Para representar $(1,1,0)$, las dos últimas filas obligan a $b = 1$ y $a = 0$, mientras que la primera exigiría $a + 2b = 1$, lo cual daría $2 = 1$. No pertenece al generado real. La lista es independiente aunque no represente todas las columnas del ambiente.

15. La relación es $e_1 + e_2 + e_3 - (1,1,1) = 0$, con coeficientes $(1,1,1,-1)$ no todos nulos en ningún cuerpo. Para cualquier lista de cuatro columnas de $\mathbb{F}^3$, una matriz de tres filas admite a lo sumo tres pivotes. Hay al menos una variable libre en el sistema homogéneo de cuatro coeficientes, y darle valor uno produce una relación no trivial.

16. Si $Aa = 0$, entonces $Ra = PAa = 0$. Si $Ra = 0$, multiplicar por P^{-1} da $Aa = 0$. Las mismas tuplas son relaciones. Eso no dice que cada columna de A tenga las mismas entradas que su columna correspondiente en R: el producto por P cambia los vectores. Por ejemplo, las columnas de $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ generan la recta de $(1,1)$ y las de $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ generan la de $(1,0)$, aunque ambas matrices tienen exactamente las relaciones $(0,s)$.

17. Se cumple $Bb = 0$ si y sólo si $A(Eb) = 0$, de modo que $\mathcal{R}(B) = E^{-1}\mathcal{R}(A)$, donde el miembro derecho indica todas las tuplas $E^{-1}a$ con $a \in \mathcal{R}(A)$. La correspondencia $b \mapsto Eb$ es biyectiva y conserva la distinción entre cero y no cero. Así un espacio de relaciones es sólo cero exactamente cuando lo es el otro, que es el criterio de independencia de las columnas.

18. Se tiene $r = p + q$. Además p, q son independientes: en $ap + bq = 0$, el coeficiente constante da $a = 0$ y el cuadrático da $b = 0$. Por tanto una relación $ap + bq + cr = 0$ equivale a $a + c = b + c = 0$, y todas son $s(-1,-1,1)$. En una no trivial los tres coeficientes son no nulos, incluso en característica dos. Se puede eliminar cualquiera de los tres, usando $r = p + q$, $p = r - q$ o $q = r - p$.

19. Considere una relación de soporte finito y suponga que algún coeficiente es no nulo. Entre los polinomios con coeficiente no nulo hay uno de mayor grado. Por la hipótesis de grados distintos, ningún otro aporta a la potencia principal de ese polinomio. Su contribución es un producto de dos escalares no nulos, que no puede ser cero en un cuerpo. Esto contradice que la suma sea el polinomio cero. Toda relación es trivial. El argumento se aplica a cada relación finita de una familia infinita y por ello prueba también ese caso.

20. Si una combinación de la lista con coeficientes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ es cero, el coeficiente de t^3 da $\delta = 0$; el de t^2 da $\gamma + \delta = 0$; el de t da $\beta + \gamma + \delta = 0$ y el constante da $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$. Resultan todos nulos. Para el polinomio dado, los mismos pasos dan los coeficientes $(a - b, b - c, c - d, d)$. Sumarlos por la lista recupera respectivamente los coeficientes a, b, c, d; no se ha dividido por ningún entero.

21. Para polinomios formales, $a + bt + ct^2 = 0$ obliga a $a = b = c = 0$ por igualdad de coeficientes. Para funciones en $\mathbb{F}_2$, evaluar en cero da $a = 0$ y evaluar en uno da $a + b + c = 0$, de donde $b = c$.

Las relaciones de funciones son $(0, s, s)$, con $s \in \mathbb{F}_2$. La no trivial expresa que las funciones de t y t^2 coinciden en los dos argumentos.

22. En una relación de las seis matrices, la entrada (i, j) es el coeficiente de E_{ij}, de modo que todos deben ser cero. Si se añade $F = E_{11} + E_{12}$, aparece la relación $E_{11} + E_{12} - F = 0$. Puede quitarse E_{11} porque $E_{11} = F - E_{12}$, o E_{12} porque $E_{12} = F - E_{11}$. Las demás matrices originales tienen una entrada uno en una posición donde todos los restantes miembros de la lista tienen cero; por tanto no pueden eliminarse conservando el generado.

23. Una combinación con coeficientes a, b, c es $\begin{bmatrix} a+b & c \\ c & a-b \end{bmatrix}$. Si es cero, $c = 0$, $a + b = 0$ y $a - b = 0$. Cuando dos es no nulo, sumar las dos últimas ecuaciones da $2a = 0$, luego $a = b = 0$ y la lista es independiente. En $\mathbb{F}_2$ ambas ecuaciones diagonales coinciden y las relaciones son $(s, s, 0)$. Las dos primeras matrices son entonces iguales.

24. Si $a + b|t| + ct = 0$ para todo real t, evaluar en cero da $a = 0$. Evaluar en uno y menos uno da $b + c = 0$ y $b - c = 0$. Sumarlas da $2b = 0$, por lo que $b = 0$ y después $c = 0$. Toda relación es trivial. El argumento sólo utiliza los valores indicados y las operaciones reales.

25. Las relaciones de los valores en cero y uno cumplen $a = 0$ y $a + b + c = 0$. Son $(0, s, -s)$ con $s \in \mathbb{R}$. Una de ellas con $s \neq 0$ corresponde a la función $s(t - t^2)$, que se anula en las dos muestras pero no en todo el dominio: en $t = -1$ vale $-2s \neq 0$. Añadir esa evaluación obliga a $s = 0$; la matriz de tres evaluaciones sólo admite la relación trivial y certifica la independencia de las funciones.

26. En una relación de soporte finito $\sum_k a_k \delta_k = 0$, evaluar en el índice j da $a_j = 0$ para cada posición usada; los otros coeficientes ya son cero. Por tanto la familia es independiente. Cualquier combinación finita de los δ_k sólo es no nula en finitas posiciones, mientras que la función constante uno lo es en todas. No la genera.

27. Una relación de sucesiones proporciona, para $n = 0, 1, 2$, las ecuaciones $a + b + c = 0$, $a + 2b + 3c = 0$ y $a + 4b + 9c = 0$. Restar ecuaciones consecutivas da $b + 2c = 0$ y $2b + 6c = 0$. Restar dos veces la primera de estas últimas a la segunda da $2c = 0$, de modo que $c = 0$, $b = 0$ y $a = 0$. Al ser reales los coeficientes, dividir por dos es válido. No se ha sumado una serie de términos de las sucesiones.

28. La definición pide que para cada familia de coeficientes (a_n) de soporte finito, la igualdad $\sum_n a_n t^n = 0$ implique $a_n = 0$ para todo n. Cada suma así tiene un mayor índice no nulo si la familia no es cero, y es un polinomio formal. Comparar coeficientes descarta la relación no trivial. Las familias con infinitos coeficientes no nulos no forman parte de los cuantificadores de esta definición; interpretarlas como series requeriría otra estructura.

29. Si w está en el generado, su representación usa finitos miembros de la familia anterior y produce una relación de soporte finito con coeficiente uno en el índice nuevo. La familia ampliada es dependiente. Si w no está en el generado y hay una relación finita $\sum_i a_i v_i + bw = 0$, un $b \neq 0$ permitiría despejar w, contradicción. Luego $b = 0$ y la independencia anterior da $a_i = 0$ en cada índice. El argumento incluye la familia anterior vacía.

30. e_1 es no nulo y (e_1, e_2) es independiente por comparación de componentes. El prefijo de longitud tres es dependiente porque $e_1 + e_2 - (e_1 + e_2) = 0$ usa coeficientes $(1, 1, -1)$ en sus tres posiciones. Ése es el primero. Quitar la tercera conserva el generado, pues ese vector es suma de los dos primeros. Quitar la cuarta no lo conserva: los tres restantes tienen tercera componente cero y no producen e_3.

31. En una relación de la lista nueva, llame b_k al coeficiente de w y b_j a los otros. Sustituir w da una relación de la lista anterior cuyo coeficiente en la posición k es $b_k a_k$ y cuyos otros coeficientes son $b_j + b_k a_j$. Si $a_k \neq 0$, la independencia anterior fuerza primero $b_k = 0$ y luego todos los $b_j = 0$. Si $a_k = 0$, el nuevo vector ya es combinación de los miembros que permanecen, de modo que el teorema 6.1 hace dependiente la lista nueva. Ésta incluye el caso $w = 0$.

32. Para una matriz triangular T de tamaño n, una relación de columnas es $Tc = 0$. Su última fila da $T_{nn} c_n = 0$, y como $T_{nn} \neq 0$, resulta $c_n = 0$. La fila anterior da entonces $T_{n-1,n-1} c_{n-1} = 0$, y se obtiene $c_{n-1} = 0$. Continuando hacia arriba se anulan todos los coeficientes. Las entradas por encima de la diagonal no obstruyen el razonamiento porque multiplican coeficientes ya anulados.

33. Una relación real es también compleja, así que la independencia compleja impide relaciones reales no triviales. Para la otra dirección, escriba cada coeficiente complejo como $a_j + ib_j$ con partes

reales. Si las columnas v_j son reales, las partes real e imaginaria de la relación son respectivamente $\sum_j a_j v_j = 0$ y $\sum_j b_j v_j = 0$. La independencia real anula todos los coeficientes. La condición sobre entradas reales permite extraer esas dos partes sin mezclar coordenadas imaginarias propias de los vectores.

34. Con coeficientes reales, $a + bi = 0$ obliga a $a = b = 0$, por lo que la única relación es $(0, 0)$. Con coeficientes complejos, la misma igualdad se resuelve como $a = -ib$, y todas las relaciones son $(-is, s)$ con $s \in \mathbb{C}$. Para $s = 1$ se obtiene una relación no trivial. Es un cambio del cuerpo sobre el mismo conjunto de vectores, distinto del caso de columnas con entradas reales en la proposición 6.4.

35. Una relación $\sum_j a_j(c_j v_j) = 0$ es una relación de la lista anterior con coeficientes $a_j c_j$. La independencia da $a_j c_j = 0$ y, al ser cada c_j no nulo, $a_j = 0$. Si algún $c_j = 0$, la posición correspondiente contiene el vector cero y la lista nueva es dependiente mediante el coeficiente uno en esa posición y ceros en las demás. Para una lista vacía no existe una posición de ese tipo y su independencia se conserva.

36. La lista $(1, 0), (0, 1)$ es independiente. Al sumar $p = (-1, 0)$ a sus dos miembros se obtiene $(0, 0), (-1, 1)$, dependiente porque contiene cero. Para la otra dirección, $(1, 0), (2, 0)$ es dependiente; sumar $q = (0, 1)$ produce $(1, 1), (2, 1)$. Una relación de estos últimos exige $a + 2b = 0$ y $a + b = 0$, de donde $b = 0$ y $a = 0$. Trasladar todos los vectores conserva diferencias entre puntos, pero puede cambiar las relaciones lineales referidas al origen.

37. Suponga que la intersección de los generados es cero. En una relación finita de la familia reunida, agrupe los términos de la primera familia en x y los de la segunda en y. Como $x + y = 0$, tenemos $x = -y$ en la intersección; por tanto ambos son cero. La independencia de cada familia anula todos sus coeficientes, y la reunida es independiente.

Si la intersección contiene un vector $z \neq 0$, éste tiene una representación finita en cada familia. Restarlas produce una relación en la familia reunida. Los índices son disjuntos, y al menos un coeficiente de la representación de z es no nulo porque $z \neq 0$; la relación reunida es no trivial. La familia es dependiente. Las familias vacías también quedan cubiertas: su generado es cero y no introducen términos.

38. Si una relación no trivial tuviera coeficiente cero en alguna posición, los coeficientes de las posiciones restantes darían una relación todavía no trivial en una sublista propia. Esto contradice la hipótesis. Por tanto todos sus coeficientes son no nulos; el teorema 6.1 permite despejar y eliminar cualquiera de sus posiciones. Para la lista de longitud uno que contiene cero, la única sublista propia es vacía y la misma conclusión se cumple.

39. La lista (e_1, e_2, e_1, e_2) admite la relación $(1, 0, -1, 0)$, cuyo segundo coeficiente es cero. Sin embargo, su segunda posición puede quitarse: e_2 sigue apareciendo en la cuarta posición, y la relación $(0, 1, 0, -1)$ muestra cómo despejarla. En $(e_1, e_2, 0)$, la relación $(0, 0, 1)$ también tiene segundo coeficiente cero, pero quitar e_2 deja sólo múltiplos de e_1 y no conserva el generado. Una relación seleccionada no contiene necesariamente toda la información sobre las posiciones eliminables.

40. En una relación con coeficientes a, b, c, d, comparar el término cuadrático da $c + d = 0$, luego $d = -c$. Comparar el término lineal da $b - 2\lambda c - 2\mu d = 0$, por lo que $b = 2(\lambda - \mu)c$. El término constante da $a + \lambda^2 c + \mu^2 d = 0$, de donde $a = (\mu^2 - \lambda^2)c$. Todas las relaciones son

$$s(\mu^2 - \lambda^2,\ 2(\lambda - \mu),\ 1,\ -1), \qquad s \in \mathbb{F}.$$

La lista de cuatro siempre es dependiente, pues las dos últimas entradas de la tupla indicada son no nulas. Para la lista sin t, sus relaciones corresponden a las anteriores con $b = 0$. Si $2(\lambda - \mu) \neq 0$, esto obliga a $s = 0$ y la terna es independiente. Si $2(\lambda - \mu) = 0$, todas las tuplas $s(\mu^2 - \lambda^2, 1, -1)$ son relaciones de la terna y ésta es dependiente. En característica dos ocurre para cualquier λ, μ; en característica distinta de dos ocurre exactamente cuando $\lambda = \mu$.

Lecturas y referencias

Nathaniel Johnston, *Advanced Linear and Matrix Algebra*, Springer, 2021, §1.1.2: relaciones, ejemplos matriciales y polinómicos, y familias infinitas. Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel y Lawrence E. Spence, *Linear Algebra*, 5.ª edición, Pearson, 2019, §1.5: dependencia, eliminación de redundancia y ampliación de conjuntos independientes. Kenneth Hoffman y Ray Kunze, *Linear*

Algebra, 2.ª edición, Prentice-Hall, 1971, comienzo de §2.3: definición de dependencia y criterio mediante subconjuntos finitos. Sheldon Axler, *Linear Algebra Done Right*, 4.ª edición, Springer, 2024, §2A, resultados 2.15–2.21: independencia de listas, unicidad de representación y lema de dependencia.

Los ejercicios 19 y 32 retoman resultados clásicos recogidos en los ejercicios 18 y 17 de §1.5 de Friedberg–Insel–Spence. El ejercicio 37 desarrolla el resultado de su ejercicio 21 con familias de índices disjuntos, para conservar posibles repeticiones de valores y tratar también familias infinitas mediante soportes finitos.

Capítulo 7

Bases y dimensión

En el plano podemos llegar al punto $(3, 1)$ avanzando tres unidades en la dirección $(1, 0)$ y una en la dirección $(0, 1)$. También podemos llegar mediante dos desplazamientos en la dirección $u = (1, 1)$ y uno en la dirección $v = (1, -1)$, pues $2u + v = (3, 1)$. Los números que describen el desplazamiento dependen de las direcciones elegidas; el vector obtenido es el mismo. En ambos casos, además, cualquier punto del plano admite una descripción y los coeficientes quedan determinados por ese punto.

La situación cambia si añadimos una tercera dirección $w = u + v$. Seguimos alcanzando todo el plano, pero las instrucciones dejan de ser únicas: podemos sustituir un desplazamiento en la dirección w por uno en la dirección u y otro en la dirección v. En cambio, si conservamos únicamente u, recuperamos la unicidad de los coeficientes a costa de perder todos los puntos que no están en su recta. Para describir un espacio con coeficientes únicos necesitamos reunir las dos propiedades estudiadas en C05 y C06: generar todos sus vectores y hacerlo con una familia independiente.

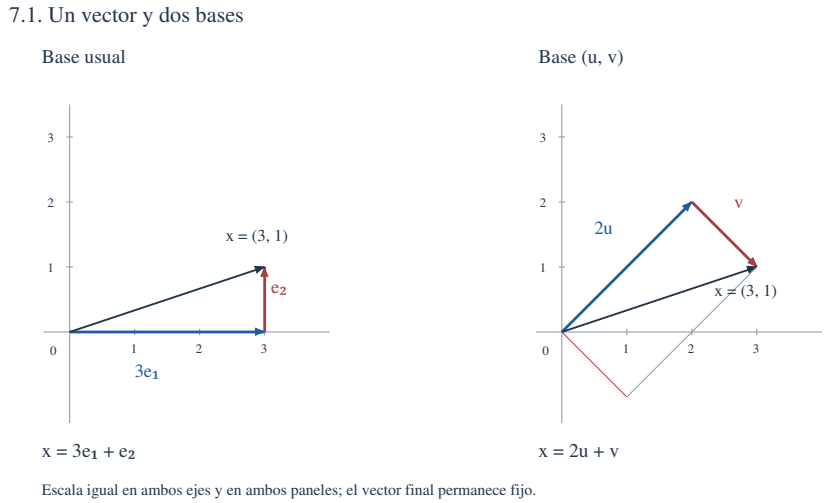


Figura 7.1. Las líneas auxiliares muestran las dos descomposiciones de un mismo vector real. Ambos ejes del dibujo tienen igual escala; las direcciones de una base no necesitan ser perpendiculares.

Trabajaremos sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y con las nociones de combinación lineal, generación e independencia de los capítulos anteriores. Los ejemplos numéricos son reales salvo indicación contraria. La dimensión que construiremos corresponde siempre al cuerpo de escalares declarado.

7.1. Describir cada vector de una sola manera

Definición 7.1 (base). Una lista finita $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ de vectores de V es una **base de** V si genera V y es linealmente independiente. También hablaremos del conjunto que forman sus vectores; cuando escribamos coordenadas, fijaremos explícitamente su orden.

La generación asegura que, dado $x \in V$, existen escalares $a_1, \dots, a_n$ con $x = \sum_j a_j b_j$. La independencia asegura su unicidad: si otra lista de coeficientes c_j produce x, al restar las representaciones obtenemos $\sum_j (a_j - c_j) b_j = 0$, y entonces $a_j = c_j$ para cada j. El recíproco también vale. Si cada vector tiene una representación única, existe una representación para todos ellos, por lo que la lista genera; al aplicar la unicidad al cero, cuya representación con todos los coeficientes nulos ya conocemos, obtenemos la independencia. Así, una base equivale a un sistema de representación finita con existencia y unicidad para cada vector del espacio.

La base usual de $\mathbb{F}^n$ es $(e_1, \dots, e_n)$: todo $x = (x_1, \dots, x_n)$ satisface $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$, y la comparación de las entradas prueba que esa expresión es única. El mismo argumento proporciona bases para objetos que no son flechas. En $M_{m\times n}(\mathbb{F})$, las matrices E_{ij} con un único 1 en la posición (i, j) forman una base, porque $A = \sum_{i,j} a_{ij}E_{ij}$. En el espacio de polinomios formales $\mathbb{F}[t]_{\le d}$, que también escribiremos $P_d(\mathbb{F})$, la lista $(1, t, \dots, t^d)$ es una base por la unicidad de los coeficientes del polinomio. Esta afirmación sigue siendo válida sobre cuerpos finitos: estamos comparando polinomios formales, sin identificarlos con las funciones que inducen.

El espacio $\{0\}$ admite la lista vacía como base. Su única combinación lineal es la suma vacía, que vale cero, y no hay una relación con coeficientes no nulos. La lista (0) genera ese espacio, pero es dependiente. Conservar la diferencia entre ambas listas nos permitirá tratar los casos de dimensión cero sin excepciones artificiales.

En la base $\mathcal{B} = (u, v)$ de la apertura, la ecuación $au + bv = (x, y)$ se traduce en $a + b = x$, $a - b = y$. Sobre $\mathbb{R}$ tiene la solución única $a = (x + y)/2$, $b = (x - y)/2$, de modo que podemos llamar **coordenadas de** (x, y) **en** $\mathcal{B}$ a la columna formada por esos dos números. El orden importa: intercambiar u y v intercambia los coeficientes. No hay aquí una segunda clase de vectores geométricos; estamos registrando instrucciones para reconstruirlos. El estudio sistemático de estas correspondencias y de sus cambios ocupará C10 y C12.

Las dos propiedades de una base no pueden intercambiarse. Una lista independiente puede dejar fuera vectores del espacio y una lista generadora puede contener redundancias. Para relacionarlas necesitamos saber qué ocurre cuando introducimos una dirección nueva entre generadores ya disponibles.

7.2. Intercambiar sin perder el espacio generado

Supongamos que $v = a_1g_1 + \cdots + a_ng_n$ y que $a_k \neq 0$. Podemos despejar g_k:

$$g_k = a_k^{-1}v - \sum_{j\neq k} a_k^{-1}a_jg_j.$$

Al reemplazar g_k por v, los generadores restantes siguen permitiendo recuperar g_k y, con él, todas las combinaciones anteriores. A la vez, el vector nuevo ya pertenecía al espacio generado original. Por ambas inclusiones, el espacio generado permanece igual. La condición $a_k \neq 0$ es la que permite la recuperación: en la base (e_1, e_2), el vector $v = e_2$ puede reemplazar a e_2, pero reemplazar a e_1 deja la lista (e_2, e_2) y pierde una dirección.

Teorema 7.1 (intercambio finito). Sean $(g_1, \dots, g_n)$ una lista generadora de V y $(u_1, \dots, u_m)$ una lista independiente de vectores de V. Entonces $m \le n$ y es posible sustituir m de los generadores por $u_1, \dots, u_m$ de modo que la lista resultante siga generando V.

Demostración. Introduciremos los u_j uno por uno y, en cada paso, retiraremos un generador original. Al principio la lista generadora contiene solamente los g_j. Supongamos que hemos incorporado $u_1, \dots, u_{k-1}$ y que conservamos $n - k + 1$ de los generadores originales, que llamaremos $h_1, \dots, h_{n-k+1}$. Como esta lista mixta genera V, tenemos una expresión

$$u_k = \sum_{i=1}^{k-1} c_iu_i + \sum_{j=1}^{n-k+1} d_jh_j.$$

Algún d_j debe ser distinto de cero. Si todos fueran nulos, u_k sería combinación de sus predecesores, en contradicción con la independencia de $(u_1, \dots, u_m)$. El despeje anterior permite reemplazar el correspondiente h_j por u_k y conservar la generación. La razón para retirar un generador original, en lugar de uno de los u_i ya introducidos, es precisamente mantener los avances de los pasos anteriores.

Si $m > n$, después de introducir los primeros n vectores independientes habríamos obtenido una lista generadora $(u_1, \dots, u_n)$. El siguiente vector u_{n+1} sería combinación de ellos, contradicción. Esto prueba $m \le n$; como en cada uno de los m pasos se puede realizar el reemplazo, prueba también la segunda conclusión. Si $n = 0$, la generación dice $V = \{0\}$ y ninguna lista independiente puede ser no vacía, de modo que la misma conclusión vale. $\square$

El intercambio permite comparar dos listas cuyas funciones son diferentes. No exige que los generadores iniciales sean independientes ni que los vectores que introducimos generen todo el espacio. En particular, una lista independiente de cinco vectores no puede vivir en un espacio

generado por cuatro, aunque sus vectores sean matrices o funciones y no dispongamos de una imagen geométrica.

También aclara el alcance de la palabra «sustituir». En $\mathbb{R}^3$, si partimos de (e_1, e_2, e_3) e introducimos $u_1 = e_1 + e_2$, podemos retirar e_1. Si después introducimos $u_2 = e_2 + e_3$, podemos retirar e_2 y obtener (u_1, u_2, e_3). Pero una elección posterior siempre debe examinarse en la lista que quedó después del intercambio previo: las expresiones respecto de la lista original no describen por sí solas todos los pasos de la construcción.

7.3. Extraer, completar y contar una base

Teorema 7.2 (extracción y extensión finitas). Si V admite una lista generadora finita, entonces:

1. de cualquier lista generadora finita de V se puede extraer una base;
2. toda lista independiente de V se puede completar hasta una base añadiendo vectores de una lista generadora finita prefijada.

Demostración. Para la primera afirmación, recorremos los generadores en su orden. Conservamos un vector cuando no pertenece al espacio generado por los que hemos conservado antes; en caso contrario, lo descartamos. La lista conservada es independiente: al añadir un vector que no pertenece al espacio generado anterior, cualquier relación con coeficiente nuevo no nulo permitiría despejarlo y contradecir esa elección; si el coeficiente nuevo es cero, la independencia anterior anula los restantes. Cada vector descartado era combinación de vectores conservados previamente y seguirá siéndolo al final. Por tanto, la lista final genera todos los generadores originales y con ellos V.

Para la segunda afirmación, empezamos con la lista independiente dada y recorremos una lista generadora finita de V. Añadimos cada generador que no esté en el espacio generado por los vectores reunidos hasta ese momento. El argumento anterior mantiene la independencia. Una vez terminada la lista generadora, todos sus vectores pertenecen al espacio generado final, por lo que éste es V. El proceso termina porque sólo examinamos un número finito de candidatos. □

Una lista independiente de V no puede ser infinita si V tiene n generadores: de ella podríamos tomar $n + 1$ vectores y contradecir el teorema de intercambio. Así, la afirmación de extensión anterior cubre también un conjunto independiente dado sin suponer inicialmente que es finito. La construcción requiere sólo un número finito de elecciones; no invoca un teorema de existencia de bases para espacios arbitrarios.

Teorema 7.3 (invariancia de la longitud). Si V admite una lista generadora finita, todas sus bases tienen la misma longitud finita.

Demostración. El teorema 7.2 proporciona al menos una base finita $\mathcal{B}$ de longitud n. Cualquier otra base es independiente, de modo que el argumento del párrafo anterior obliga a que sea finita; llamemos m a su longitud. Al comparar su independencia con la generación por $\mathcal{B}$, el teorema 7.1 da $m \le n$. Al comparar la independencia de $\mathcal{B}$ con la generación por la otra base, obtenemos $n \le m$. Las dos desigualdades dan $m = n$. □

Definición 7.2 (dimensión finita). Un espacio es **de dimensión finita** si admite una lista generadora finita. Su **dimensión sobre** $\mathbb{F}$, denotada por $\dim_{\mathbb{F}} V$ o $\dim V$ cuando el cuerpo es inequívoco, es la longitud común de sus bases. Si no admite una lista generadora finita, decimos que es de dimensión infinita.

La definición se apoya en dos hechos distintos: existe una base y su longitud no depende de cómo la construimos. Por las bases de §7.1, obtenemos $\dim\{0\} = 0$, $\dim \mathbb{F}^n = n$, $\dim M_{m\times n}(\mathbb{F}) = mn$ y $\dim P_d(\mathbb{F}) = d+1$. Recíprocamente, dimensión cero implica que la lista vacía genera todo el espacio, de modo que éste es $\{0\}$.

Proposición 7.4 (criterios por tamaño). Si $\dim V = n$, una lista independiente tiene a lo sumo n vectores y una lista generadora finita tiene al menos n. Una lista de exactamente n vectores es base si es independiente o si genera V.

Demostración. La primera cota se obtiene comparando con una base generadora de longitud n; la segunda, comparando una base independiente con la lista generadora considerada. Si una lista independiente ya tiene n vectores, su extensión a una base no puede añadir ninguno, pues todas las bases tienen longitud n. Si una lista generadora tiene n vectores, la extracción de una base no puede eliminar ninguno por la misma razón. □

Podemos expresar esta relación mediante otras dos caracterizaciones. Una lista independiente es **maximal por inclusión** cuando no se le puede añadir ningún vector manteniendo la independencia; si no generara V, podríamos añadir un vector exterior a su espacio generado, de modo que una lista independiente maximal es una base. Una lista generadora es **minimal por inclusión** cuando retirar cualquiera de sus vectores destruye la generación; si fuera dependiente, C06 permitiría despejar y retirar un vector redundante. También es, por tanto, una base. Estas palabras se refieren a la posibilidad de añadir o retirar vectores, y no a un orden de importancia de las direcciones.

7.4. Subespacios y elecciones del cuerpo

Teorema 7.5 (dimensión de un subespacio). Si $W \subseteq V$ es un subespacio y $\dim V = n < \infty$, entonces W tiene una base finita, $\dim W \leq n$ y toda base de W se extiende a una de V. Además, $\dim W = n$ si y sólo si $W = V$.

Demostración. Todavía no sabemos que W tenga generadores finitos, por lo que no podemos aplicar directamente la extracción. Empezamos con la lista vacía y, mientras los vectores elegidos no generen W, añadimos un vector de W exterior a su espacio generado. La lista permanece independiente. Este proceso debe detenerse a más tardar al reunir n vectores: en otro caso podríamos elegir $n+1$ vectores independientes de V. Al detenerse, la lista es una base de W y su longitud no supera n. El teorema 7.2 permite extenderla a una base de V. Si su longitud es n, la extensión no añade vectores y la base de W ya genera V, por lo que $W = V$. El sentido contrario es inmediato. □

La inclusión estricta de subespacios de un espacio finito implica, por tanto, una disminución estricta de dimensión. Sobre $\mathbb{R}$, los subespacios de $\mathbb{R}^3$ sólo pueden tener dimensión $0, 1, 2$ o 3: el cero, las rectas por el origen, los planos por el origen y el espacio completo. La clasificación se deduce de las bases; un dibujo de un plano concreto no prueba la clasificación de todos ellos.

El cuerpo forma parte del dato. Cada complejo se escribe de manera única como $a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$, de modo que $(1, i)$ es una base real de $\mathbb{C}$. Sobre $\mathbb{C}$, en cambio, (1) ya es una base. Así, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ y $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$. Más generalmente, si $(v_1, \ldots, v_n)$ es una base compleja de un espacio V, entonces

$$(v_1, iv_1, \ldots, v_n, iv_n)$$

es una base real. Para probar la generación, escribimos cada coeficiente complejo como $a_j + ib_j$ y distribuimos. Para probar la independencia real, una relación $\sum_j (a_j v_j + b_j i v_j) = 0$ se reagrupa como $\sum_j (a_j + ib_j) v_j = 0$; la independencia compleja anula cada número $a_j + ib_j$ y, por ello, todos los a_j, b_j. En consecuencia, $\dim_{\mathbb{R}} V = 2 \dim_{\mathbb{C}} V$ cuando la dimensión compleja es finita.

La dimensión tampoco cuenta los elementos del espacio. La recta real tiene dimensión uno e infinitos elementos; $\mathbb{F}_2^3$ tiene dimensión tres y ocho elementos. Si un cuerpo finito tiene q elementos y una base de V tiene longitud n, cada una de las q^n listas de coeficientes produce un vector y la unicidad impide repeticiones, por lo que $|V| = q^n$. Esta fórmula cuenta vectores una vez conocida una base; no identifica dimensión con cardinalidad.

7.5. Encontrar bases mediante eliminación

Para construir una base de un subespacio generado por vectores concretos podemos ejecutar la extracción de §7.3. Si los vectores están dados como columnas, la eliminación permite tomar las decisiones sin resolver desde el principio un sistema nuevo por cada candidato.

Proposición 7.6 (columnas originales de pivote). Sea A una matriz cuyas columnas generan $W \subseteq \mathbb{F}^m$, y sea R su forma escalonada reducida. Las columnas de A que ocupan las posiciones de pivote de R forman una base de W.

Demostración. Las operaciones de fila son reversibles y respetan todas las relaciones entre columnas: para cualquier columna de coeficientes c, se tiene $Ac = 0$ si y sólo si $Rc = 0$. Esto puede verse aplicando cada operación al vector Ac o escribiendo $R = EA$ con E invertible, como en C03.

Las columnas de pivote de R son independientes, pues tienen un 1 en su fila de pivote y ceros en las otras filas de pivote. Cada columna restante de R es combinación de ellas: sus entradas en las filas de pivote son los coeficientes y las filas sin pivote son cero. La equivalencia de relaciones transporta tanto la independencia como esas combinaciones a las columnas correspondientes de A.

Por tanto, las columnas originales seleccionadas son independientes y generan todas las columnas originales, es decir, generan W. □

La palabra «originales» evita una confusión concreta. Las operaciones de fila conservan relaciones entre las columnas, pero cambian en general los propios vectores y el subespacio que generan dentro de $\mathbb{F}^m$. Por ejemplo, $(1,1)^{\mathsf{T}}$ se reduce a $(1,0)^{\mathsf{T}}$: ambas matrices tienen un pivote, pero sus columnas generan rectas distintas. El índice de columna permite escoger una base de la recta original; copiar la columna reducida produciría otra recta.

Consideremos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La tercera fila es la suma de las dos primeras, por lo que basta restarlas de ella. Las posiciones de pivote son 1 y 2: una base del espacio generado es $u = (1,0,1)$, $v = (0,1,1)$. Las otras columnas son $u+v$ y $2u-v$, respectivamente. Además, todos esos vectores satisfacen $z = x+y$, y cada vector de ese plano es $xu + yv$; hemos descrito el mismo subespacio por generadores y por una ecuación.

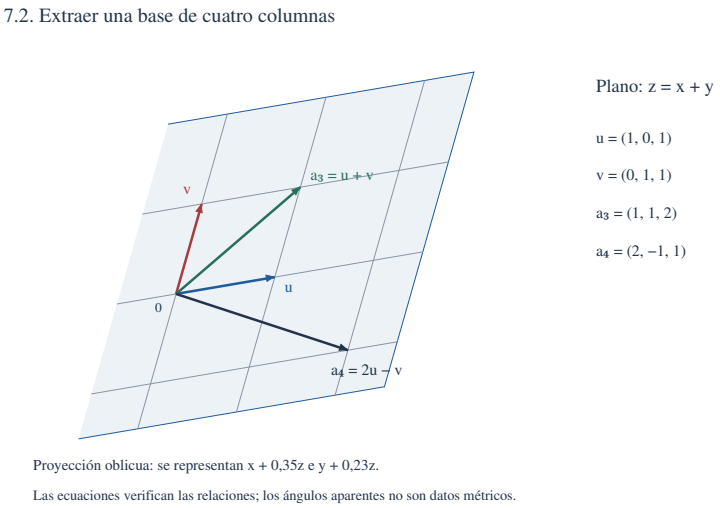


Figura 7.2. El plano se representa mediante una proyección oblicua; las ecuaciones, y no los ángulos aparentes del dibujo, certifican las relaciones entre las columnas.

Cuando el subespacio viene dado por ecuaciones, la parametrización de C01 y C02 proporciona otro camino. El sistema $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_2 + x_4 = 0$ permite elegir $x_2 = s$, $x_3 = t$ y escribir todas sus soluciones como

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = s(-1,1,0,-1) + t(-1,0,1,0).$$

Estos vectores generan el espacio solución porque hemos descrito todas las soluciones. Son independientes porque la segunda y la tercera entrada de una combinación nula obligan a que sus coeficientes sean cero. Por tanto, constituyen una base y ese espacio tiene dimensión dos. El argumento se generaliza: los vectores asociados a los parámetros libres de una forma reducida tienen un 1 en su propia posición libre y ceros en las otras, lo que prueba su independencia. En un homogéneo con n incógnitas y r pivotes obtenemos así dimensión $n-r$, incluso si no hay parámetros libres, cuando la base es vacía. La relación general entre dimensiones de una transformación y sus soluciones se establecerá en C09.

En un sistema no homogéneo consistente, las soluciones son $p + W$, con W el espacio solución homogéneo. Si $p \notin W$, ese conjunto no es un espacio vectorial con las operaciones heredadas y no tiene una base vectorial. Sus parámetros siguen describiendo direcciones pertenecientes a W. Separar el punto de partida de las direcciones evita aplicar la definición de base a un conjunto que ni siquiera contiene el cero.

7.6. La dimensión de una suma

Si dos subespacios tienen dimensiones p y q, reunir sus bases proporciona $p+q$ generadores de su suma. Pero puede haber direcciones compartidas. La fórmula precisa se descubre tomando primero una base de la intersección, para que los dos espacios reconozcan sus coincidencias mediante los mismos vectores.

Teorema 7.7 (fórmula de Grassmann). Para subespacios U, W de dimensión finita de un mismo espacio,

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

Demostración. La suma es de dimensión finita porque la unión de bases finitas de U y W la genera. La intersección, como subespacio de U, también tiene una base finita $(z_1, \ldots, z_k)$. Extendámosla por separado hasta bases

$$(z_1, \ldots, z_k, u_1, \ldots, u_a) \quad \text{de } U, \qquad (z_1, \ldots, z_k, w_1, \ldots, w_b) \quad \text{de } W.$$

La lista conjunta $(z_1, \ldots, z_k, u_1, \ldots, u_a, w_1, \ldots, w_b)$ genera $U+W$: cualquier sumando de U y cualquier sumando de W se expresan con ella. Falta comprobar la independencia; contar los vectores antes de ese paso sería dar por resuelto el problema.

Supongamos que una combinación de la lista conjunta es cero. Al pasar el bloque de los w_j al otro lado, vemos que $\sum_j \gamma_j w_j$ pertenece a U y, por su propia expresión, pertenece también a W. Por tanto es combinación de los z_i, digamos $\sum_j \gamma_j w_j = \sum_i \delta_i z_i$. La independencia de la base de W obliga a que todos los γ_j y δ_i sean cero. La relación inicial queda reducida a una combinación nula de los z_i y los u_i, y la base de U anula sus coeficientes. Hemos probado la independencia conjunta.

La base construida tiene $k+a+b$ vectores, mientras que $\dim U = k+a$, $\dim W = k+b$ y $\dim(U \cap W) = k$. Sustituir estos números da la fórmula. El argumento admite bases vacías y por ello incluye intersecciones o subespacios nulos. □

En $\mathbb{R}^3$, tomemos $U = \{(x, y, 0)\}$ y $W = \{(x, 0, z)\}$. Ambos son planos de dimensión dos y comparten la recta generada por e_1. Una base de la intersección es (e_1); al añadir e_2 obtenemos una base de U y al añadir e_3 una base de W. La lista conjunta (e_1, e_2, e_3) es base de la suma, que tiene dimensión $2+2-1=3$. Para obtener una base de la suma hemos contado una sola vez la dirección compartida.

La fórmula da además una información de existencia. Si $U, W \subseteq V$ y $\dim V = n$, entonces $\dim(U+W) \leq n$ y, por tanto, $\dim(U \cap W) \geq \dim U + \dim W - n$. Dos subespacios de dimensiones 4 y 3 en un espacio de dimensión 5 deben compartir al menos dos direcciones independientes. Esta conclusión no requiere conocer sus ecuaciones.

7.7. Completar un subespacio sin repetir direcciones

Definición 7.3 (complemento algebraico). Un subespacio C es un **complemento** de W en V si $V = W + C$ y $W \cap C = \{0\}$.

Las dos condiciones tienen tareas diferentes. La suma dice que todo $x \in V$ admite una descomposición $x = w + c$; la intersección nula garantiza que esa descomposición es única. En efecto, de $w + c = w' + c'$ se deduce $w - w' = c' - c \in W \cap C$, y por ello ambos miembros son cero. Recíprocamente, si todas las descomposiciones son únicas y $z \in W \cap C$, las expresiones $z = z + 0 = 0 + z$ fuerzan $z = 0$.

Teorema 7.8 (existencia de complementos finitos). Todo subespacio W de un espacio V de dimensión finita tiene un complemento C. Para cualquier complemento, $\dim C = \dim V - \dim W$.

Demostración. Escribamos $n = \dim V$. Tomemos una base $(w_1, \ldots, w_k)$ de W y extendámosla a una base $(w_1, \ldots, w_k, c_1, \ldots, c_{n-k})$ de V. Definimos $C = \operatorname{span}(c_1, \ldots, c_{n-k})$. La base completa muestra que $W + C = V$. Si un vector pertenece a la intersección, una expresión suya mediante los w_i y otra mediante los c_j proporcionan, al restarlas, una relación en la base completa. Todos los coeficientes son cero, luego el vector es cero. La lista de los c_j es independiente y genera C, por lo que $\dim C = n - k$. Para un complemento cualquiera, Grassmann da la misma igualdad porque la dimensión de la intersección es cero. □

El complemento depende de una elección. Para el eje horizontal $W = \operatorname{span}(1, 0)$ en $\mathbb{R}^2$, cada recta $C_a = \operatorname{span}(a, 1)$ es un complemento. La descomposición correspondiente es

$$(x, y) = (x - ay, 0) + y(a, 1).$$

Si cambiamos a, cambian los sumandos aunque el vector (x, y) permanezca fijo. Sólo para $a = 0$ aparece la descomposición según los ejes usuales; la definición algebraica no selecciona esa elección ni exige perpendicularidad. Para $W = \{0\}$ el único complemento es V, y para $W = V$ el único es $\{0\}$. Las sumas directas y sus aplicaciones se desarrollarán en C11 sobre esta misma unicidad.

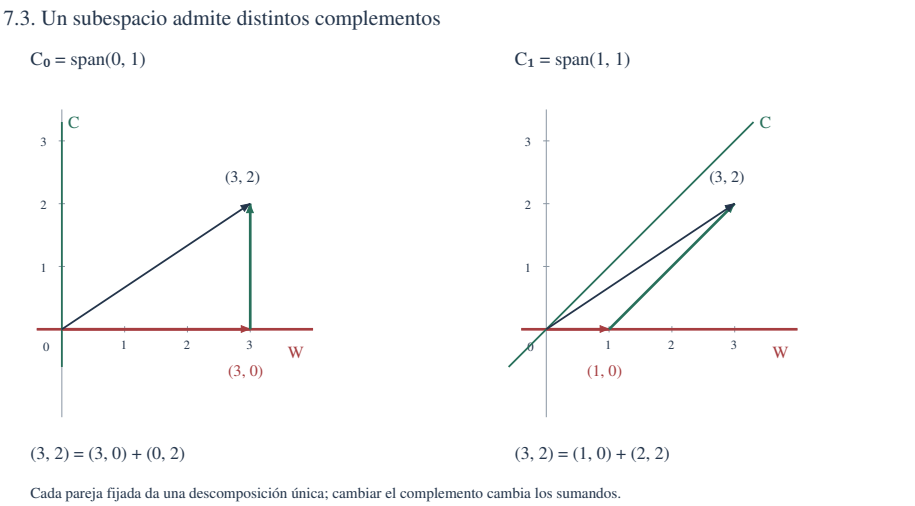


Figura 7.3. En el primer complemento, $(3, 2) = (3, 0) + (0, 2)$; en el segundo, $(3, 2) = (1, 0) + (2, 2)$. La unicidad se refiere a cada pareja de subespacios fijada.

7.8. Lo que cambia en dimensión infinita

En $\mathbb{F}[t]$ la familia $(1, t, t^2, \ldots)$ es independiente: cada relación involucra sólo un número finito de potencias y la igualdad del polinomio a cero anula todos sus coeficientes. Genera porque cada polinomio tiene grado finito. Es, por tanto, una base algebraica infinita. Sin embargo, no existe una lista generadora finita: si una lista de polinomios no nulos tiene grados acotados por d, todas sus combinaciones tienen grado a lo sumo d y no pueden producir t^{d+1}; si la lista sólo contiene ceros, ni siquiera produce 1.

Para una familia infinita, llamamos **base algebraica** a una familia independiente que genera el espacio mediante combinaciones finitas. Así, la palabra «base» conserva aquí el requisito de que cada vector sea combinación **finita** de sus elementos. La expresión $1 + t + t^2 + \cdots$ no es un polinomio ni una combinación lineal algebraica. En el espacio $\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ de todas las sucesiones, los vectores e_j con un único 1 son independientes, pero sus combinaciones finitas sólo dan sucesiones de soporte finito. La sucesión constante $(1, 1, \ldots)$ queda fuera, de modo que esa familia no es una base de todo $\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$; sí lo es del subespacio de soporte finito.

También falla una consecuencia finita que podría parecer puramente lógica. El subespacio $t\mathbb{F}[t]$ está contenido estrictamente en $\mathbb{F}[t]$, pues no contiene 1, y admite la base $(t, t^2, t^3, \ldots)$, de la misma cardinalidad numerable que la base anterior. La prueba de que una inclusión de igual dimensión implica igualdad usaba que una base finita no puede crecer conservando su longitud. Ese paso no se transporta al conteo de familias infinitas. No necesitamos aquí la existencia de bases de espacios arbitrarios ni un tratamiento de dimensiones cardinales; los ejemplos explícitos bastan para localizar el papel de la finitud en los resultados demostrados.

7.9. Ejercicios

Los ejercicios se ordenan desde el cálculo de bases hasta la construcción y transferencia de argumentos. En todos se pide justificar la respuesta; los espacios son reales salvo que se indique otro cuerpo.

Representar y calcular. 1. En $\mathbb{R}^2$, pruebe que $\mathcal{B} = ((1,2),(1,-1))$ es una base y calcule las coordenadas de $(4,5)$ y de un vector general (x,y).

2. Pruebe que $(1, t-2, (t-2)^2)$ es una base de $P_2(\mathbb{R})$ y exprese $3t^2 - 5t + 7$ en ella.

3. Encuentre una base y la dimensión del espacio de matrices reales 2×2 simétricas. Exprese una matriz general con la base obtenida.

4. Extraiga una base de la lista $(1,0,1),(0,1,1),(1,1,2),(2,-1,1)$ siguiendo el orden dado. Extraiga otra recorriendo la lista en orden inverso.

5. Encuentre una base del subespacio de $\mathbb{R}^4$ dado por $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_2 + x_4 = 0$. Extiéndala a una base de $\mathbb{R}^4$.

6. Sean $U = \{(x,y,z) : x + y + z = 0\}$ y $W = \{(x,y,z) : x - y = 0\}$. Determine bases de $U, W, U \cap W, U + W$ y verifique Grassmann.

7. Determine para qué valores reales de a la lista $(1,0,1),(0,1,1),(1,1,a)$ es una base de $\mathbb{R}^3$. En el caso excepcional, dé una base de su espacio generado.

8. En $\mathbb{F}_2^3$, examine la lista $(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)$. Obtenga una base de su espacio generado y enumere sus elementos. Compare con el mismo enunciado sobre $\mathbb{R}$.

9. Halle una base real y una compleja de $\mathbb{C}^2$. Explique por qué $(1,i)$, considerado como un solo vector de $\mathbb{C}^2$, no constituye por sí solo una base compleja.

10. Sea $W = \operatorname{span}((1,1,0),(0,1,1)) \subseteq \mathbb{R}^3$. Encuentre un complemento generado por un vector usual e_j y otro generado por un vector que no sea ninguno de los e_j.

Entender y reconstruir argumentos. 11. Pruebe que toda base de $\mathbb{F}^n$ tiene n vectores sin usar determinantes. Indique en qué momento interviene el teorema de intercambio.

12. Demuestre directamente que una lista es base si y sólo si cada vector admite una única representación como combinación de esa lista. Incluya el espacio nulo.

13. Pruebe las caracterizaciones de base como lista independiente maximal y como lista generadora minimal en un espacio de dimensión finita.

14. Si $\dim V = n$, pruebe que toda cadena estricta $W_0 \subsetneq W_1 \subsetneq \cdots \subsetneq W_r$ de subespacios tiene $r \le n$. Construya una de longitud n en $\mathbb{F}^n$.

15. Si $U, W \subseteq V$ y $\dim V = n$, demuestre las cotas $\max(\dim U, \dim W) \le \dim(U+W) \le \min(n, \dim U + \dim W)$. Precise cuándo se alcanza la cota $\dim U + \dim W$.

16. Pruebe que $\dim(U \cap W) \ge \dim U + \dim W - n$ en un ambiente de dimensión n. Construya subespacios de dimensiones 3 y 4 en $\mathbb{R}^5$ que alcancen la igualdad.

17. En la prueba de Grassmann, explique por qué extender por separado una base de $U \cap W$ evita dependencias en la lista conjunta. Escriba el argumento para el caso $U \cap W = \{0\}$.

18. Sea $\mathbb{F}_q$ un cuerpo de q elementos y V un espacio de dimensión n. Pruebe que $|V| = q^n$. ¿Cuántos vectores quedan fuera de un subespacio de dimensión k?

19. Sea $(b_1, \dots, b_n)$ una base y $v = \sum_i a_i b_i$. Pruebe que reemplazar b_k por v da una base si y sólo si $a_k \neq 0$.

20. Un estudiante reduce la columna $(2,2)^{\mathsf{T}}$ a $(1,0)^{\mathsf{T}}$ y concluye que $(1,0)$ es base del espacio generado por la columna original. Localice el error y formule la regla correcta.

Construir y distinguir. 21. Dé una lista independiente que no genere $\mathbb{R}^3$ y una lista generadora que no sea independiente. Explique por qué comprobar sólo una de las dos propiedades exige conocer también el tamaño adecuado.

22. Construya tres rectas distintas de $\mathbb{R}^2$ cuya intersección por parejas sea $\{0\}$, pero cuya suma tenga dimensión dos. Explique por qué Grassmann no da una fórmula de inclusión–exclusión de tres subespacios por simple imitación de los conjuntos.

23. Encuentre un subespacio propio de $\mathbb{R}[t]$ con una base numerable y compare su base con la de $\mathbb{R}[t]$. Identifique la hipótesis que falta para deducir igualdad de subespacios.

24. Explique por qué las sucesiones usuales e_j no generan $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Identifique exactamente el subespacio que sí generan.

25. Para $W = \operatorname{span}(1,0)$, describa todos los complementos de W en $\mathbb{R}^2$ y determine la descomposición de (x,y) asociada a cada uno.

26. En $\mathbb{R}^4$, sean $U = \operatorname{span}(e_1, e_2, e_3)$ y $W = \operatorname{span}(e_2, e_3, e_4)$. Construya bases adaptadas a su intersección y una base de la suma sin duplicar vectores comunes.

27. En $\mathbb{R}^4$, fije $U=\operatorname{span}(e_1,e_2)$. Para cada $k\in\{0,1,2\}$ construya un subespacio W de dimensión dos con $\dim(U\cap W)=k$. Calcule la dimensión de la suma.

28. En $P_3(\mathbb{R})$, encuentre una base de $W=\{p: p(0)=p(1)=0\}$ y un complemento de W. Muestre directamente la descomposición de un polinomio general.

29. Sea $\mathcal{T}$ el espacio de matrices 3×3 triangulares superiores y $\mathcal{D}$ el de matrices diagonales. Determine sus dimensiones y un complemento de $\mathcal{D}$ en $\mathcal{T}$.

30. Sobre $\mathbb{F}_2$, compare el espacio de polinomios formales $P_2(\mathbb{F}_2)$ con el espacio de todas las funciones $\mathbb{F}_2\to\mathbb{F}_2$. Dé sus dimensiones y explique qué ocurre con t^2+t al pasar de polinomio a función.

Integrar y transferir. 31. Si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son bases de un espacio finito y $b\in\mathcal{B}\setminus\mathcal{C}$, pruebe que existe $c\in\mathcal{C}\setminus\mathcal{B}$ para el cual $(\mathcal{B}\setminus\{b\})\cup\{c\}$ es base.

32. Sean $W\subseteq V$ y $\dim V=n$. Suponga que W tiene dimensión $n-1$. Pruebe que todo vector $v\notin W$ genera un complemento de W. Clasifique los subespacios situados entre W y V.

33. Sean $U,W\subseteq V$ subespacios de un espacio finito. Pruebe que existen subespacios A,B tales que $U=(U\cap W)+A$, $W=(U\cap W)+B$ y todo vector de $U+W$ se escribe de manera única como $z+a+b$, con $z\in U\cap W$, $a\in A$, $b\in B$.

34. Sea V de dimensión n sobre $\mathbb{F}_q$. Cuente sus bases ordenadas, eligiendo los vectores sucesivamente. Incluya $n=0$ y calcule el número para $\mathbb{F}_2^3$.

35. ¿Para qué cuerpos $\mathbb{F}$ la lista $(1,t+1,(t+1)^2)$ es base de $P_2(\mathbb{F})$? Compare con $(1,t^2+1,t^2-1)$, tratando explícitamente la característica dos.

36. Sean $a_0,\dots,a_d$ escalares distintos de $\mathbb{F}$. Para $0\le j\le d$, defina $L_j(t)=\prod_{k\neq j}(t-a_k)/(a_j-a_k)$. Pruebe que $(L_0,\dots,L_d)$ es base de $P_d(\mathbb{F})$ y obtenga los coeficientes de un polinomio en esa base sin usar determinantes.

37. Sea S el espacio de sucesiones reales $(x_j)_{j\ge 0}$ con $x_{j+2}=x_{j+1}+2x_j$. Construya una base a partir de los datos iniciales (x_0,x_1), pruebe su dimensión y exprese en ella la sucesión de datos iniciales $(3,-1)$.

38. En $\mathbb{R}^5$, sean $U=\{x: x_1+x_2+x_3=0\}$ y $W=\{x: x_3+x_4+x_5=0\}$. Determine bases y dimensiones de $U\cap W$ y $U+W$; compruebe que los dos subespacios originales tienen dimensión cuatro.

39. Sean $U\subseteq V$, ambos de dimensión finita, y C un complemento de U. Para un subespacio W que contiene a U, demuestre que $W=U+(W\cap C)$ y que la descomposición es única. Deduzca una identidad de dimensiones.

40. Un argumento afirma: «Sean bases independientes de U y de W. Su unión genera $U+W$; como cada base es independiente, la unión también lo es y $\dim(U+W)=\dim U+\dim W$». Dé un contraejemplo con bases disjuntas como conjuntos y repare el argumento indicando la hipótesis exacta que permite mantener su conclusión.

7.10. Soluciones razonadas

1. Escribir $a(1,2)+b(1,-1)=(x,y)$ conduce a $a+b=x$, $2a-b=y$. Sumando las ecuaciones obtenemos $3a=x+y$ y después $3b=2x-y$. Así, para cualquier (x,y) existe exactamente una representación, con $a=(x+y)/3$, $b=(2x-y)/3$, lo que prueba que la lista es base. Para $(4,5)$ los coeficientes son $(3,1)$; la comprobación $3(1,2)+(1,-1)=(4,5)$ verifica el cálculo y el orden de las coordenadas.

2. Al desarrollar $a+b(t-2)+c(t-2)^2$ obtenemos $ct^2+(b-4c)t+(a-2b+4c)$. Si ese polinomio es cero, el coeficiente de t^2 da $c=0$, el de t da $b=0$ y el constante da $a=0$. La lista es independiente y tiene tres vectores en un espacio de dimensión tres, luego es base. Para el polinomio pedido, $c=3$, $b-12=-5$ da $b=7$ y $a-14+12=7$ da $a=9$. La representación es $9+7(t-2)+3(t-2)^2$.

3. Toda matriz simétrica tiene la forma $\begin{pmatrix} a & b\\ b & c\end{pmatrix}$ y se expresa como $aE_{11}+b(E_{12}+E_{21})+cE_{22}$. Los tres coeficientes son únicos al examinar las entradas $(1,1),(1,2),(2,2)$; por ello, $(E_{11},E_{12}+E_{21},E_{22})$ es base y la dimensión es tres. Las cuatro entradas de la matriz no son cuatro parámetros independientes, porque las dos situadas fuera de la diagonal deben coincidir.

4. Llamemos u,v,w,z a los vectores en el orden dado. Los dos primeros son independientes por sus entradas primera y segunda; $w=u+v$ y $z=2u-v$, de modo que el recorrido directo conserva

(u, v). En orden inverso empezamos por z, w. De $az + bw = 0$ obtenemos $2a + b = 0$ y $-a + b = 0$, luego $3a = 0$ y $a = b = 0$. Son independientes y, puesto que $u = (z + w)/3$, $v = (2w - z)/3$, generan también a los otros dos. El recorrido inverso conserva (z, w). Los resultados pueden variar con el orden, pero ambas bases tienen longitud dos.

5. Con $x_2 = s$, $x_3 = t$, las ecuaciones dan $x_1 = -s - t$, $x_4 = -s$. La parametrización proporciona la base $b_1 = (-1, 1, 0, -1)$, $b_2 = (-1, 0, 1, 0)$: genera todas las soluciones y sus entradas segunda y tercera prueban la independencia. Para extenderla probamos con e_1, e_4. Una relación $ab_1 + bb_2 + ce_1 + de_4 = 0$ da $a = 0$ en la segunda entrada, $b = 0$ en la tercera y después $c = d = 0$. Los cuatro vectores son independientes en $\mathbb{R}^4$, luego forman la base buscada.

6. En U podemos escribir $(x, y, z) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1)$, y las primeras dos entradas prueban que estos generadores son independientes. En W, la ecuación da $(x, y, z) = x(1, 1, 0) + z(0, 0, 1)$, también de manera única. Para pertenecer a ambos se requiere $y = x$, $z = -2x$, por lo que $U \cap W = \text{span}(1, 1, -2)$ tiene dimensión uno. Grassmann da dimensión tres para la suma, que entonces es $\mathbb{R}^3$ y tiene base usual. Se verifica $3 = 2 + 2 - 1$.

7. En una relación con coeficientes r, s, t, las dos primeras entradas dan $r = s = -t$. La tercera queda $(a - 2)t = 0$. Si $a \neq 2$, todos los coeficientes se anulan: hay tres vectores independientes en dimensión tres, luego una base. Si $a = 2$, el tercer vector es suma de los dos primeros, que siguen siendo independientes; estos dos forman una base del espacio generado. El análisis conserva el caso excepcional en lugar de dividir por $a - 2$ antes de decidir si es cero.

8. En $\mathbb{F}_2$, el tercer vector es suma de los dos primeros. Éstos son independientes porque la primera entrada de una relación anula el primer coeficiente y la tercera anula el segundo. Su espacio generado consta de $000, 110, 011, 101$ y tiene dimensión dos. Sobre $\mathbb{R}$, una relación con coeficientes a, b, c produce $a + c = 0$, $a + b = 0$, $b + c = 0$. Las dos primeras dan $b = c = -a$ y la tercera da $-2a = 0$, luego todos son cero. La misma lista es entonces base de $\mathbb{R}^3$. La diferencia está en que $2 = 0$ en $\mathbb{F}_2$.

9. Una base compleja es $((1, 0), (0, 1))$. Una base real es $((1, 0), (i, 0), (0, 1), (0, i))$: los coeficientes reales reconstruyen por separado las partes real e imaginaria de las dos entradas, y esa reconstrucción es única. Las dimensiones son dos y cuatro, respectivamente. El único vector $(1, i)$ sólo genera sobre $\mathbb{C}$ los pares (z, iz); por ejemplo, $(0, 1)$ no tiene esa forma, pues la primera entrada obligaría a $z = 0$. El número de entradas de un vector no es el número de vectores de la lista.

10. Los vectores de W son $(a, a + b, b)$ y satisfacen $y = x + z$. El vector e_2 no satisface esa ecuación y, como W tiene dimensión dos, añadirlo a su base produce una base de $\mathbb{R}^3$. Por tanto, $\text{span}(e_2)$ es complemento. Otro vector exterior es $(1, 0, 1)$, porque $0 \neq 1 + 1$. Para cualquiera de esos vectores c, la igualdad $tc \in W$ obliga a $t = 0$, y la lista de dos generadores de W junto con c genera el ambiente por independencia y tamaño. Esto comprueba las dos condiciones de complemento.

11. La base usual $E = (e_1, \ldots, e_n)$ tiene n vectores, porque la igualdad de entradas da existencia y unicidad de representación. Sea B otra base. El intercambio, comparando la independencia de B con la generación por E, impide que B tenga más de n vectores; una base infinita también queda excluida tomando $n + 1$ de sus elementos. Si B tiene m vectores, la comparación inversa entre E independiente y B generadora da $n \leq m$. Por tanto $m = n$. Las dos comparaciones son el uso decisivo del intercambio.

12. Si la lista es base, la generación da existencia para cada vector. Dos representaciones de un mismo vector, al restarse, dan una relación nula; la independencia obliga a que sus coeficientes coincidan. Recíprocamente, la existencia para cada vector implica generación. La unicidad aplicada al cero compara cualquier relación nula con la relación cuyos coeficientes son todos cero, y prueba independencia. Para $\{0\}$ la lista vacía da una única representación, la suma vacía; la lista (0) no la da, porque cualquier coeficiente produce cero.

13. Si una lista independiente maximal no generara V, habría un vector exterior a su espacio generado y podríamos añadirlo conservando la independencia, contradicción. Así, es base. Si una lista generadora minimal fuera dependiente, una relación no trivial permitiría despejar un vector con coeficiente no nulo, retirarlo y mantener la generación, otra contradicción. Recíprocamente, a una base no puede añadirse un vector preservando independencia, pues todos los vectores ya son combinaciones de ella; tampoco puede retirarse un vector manteniendo generación, pues ese vector quedaría expresado por los restantes y produciría dependencia.

14. Cada inclusión estricta aumenta la dimensión al menos en uno, por el teorema 7.5. Por ello $\dim W_r \geq \dim W_0 + r \geq r$, mientras que $\dim W_r \leq n$, y resulta $r \leq n$. La cadena $\{0\} \subsetneq \operatorname{span}(e_1) \subsetneq \cdots \subsetneq \operatorname{span}(e_1, \ldots, e_n)$ alcanza n inclusiones estrictas. Cuando $n = 0$, queda sólo $\{0\}$ y la cota sigue siendo exacta.

15. Las inclusiones $U, W \subseteq U + W$ dan la cota inferior. La inclusión $U + W \subseteq V$ da la cota n, y reunir bases de U y W da una lista generadora de longitud $\dim U + \dim W$, por lo que la dimensión de la suma no supera ese número. Grassmann muestra que $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$ equivale a $\dim(U \cap W) = 0$, es decir, a $U \cap W = \{0\}$. Esta condición puede cumplirse sólo si la suma de dimensiones no supera n.

16. Al despejar en Grassmann y usar $\dim(U+W) \leq n$ obtenemos $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) \geq \dim U + \dim W - n$. Para alcanzar la cota en $\mathbb{R}^5$, tomamos $U = \operatorname{span}(e_1, e_2, e_3)$ y $W = \operatorname{span}(e_2, e_3, e_4, e_5)$. Su suma contiene los cinco vectores usuales y su intersección es $\operatorname{span}(e_2, e_3)$, de dimensión $2 = 3 + 4 - 5$.

17. Los vectores comunes se incluyen una única vez en la lista conjunta; pero eso por sí solo no prueba independencia. La extensión permite que cualquier relación entre los bloques nuevos produzca un vector de la intersección, que ya está generado por el bloque común. La independencia de cada base extendida elimina entonces los coeficientes de los bloques nuevos. Si $U \cap W = \{0\}$ y una relación es $\sum a_i u_i + \sum b_j w_j = 0$, el vector $\sum a_i u_i = -\sum b_j w_j$ pertenece a la intersección y es cero. La independencia en cada espacio anula separadamente los dos grupos de coeficientes. Así, la concatenación de sus bases es base de la suma.

18. Fijada una base $(b_1, \ldots, b_n)$, cada elección de n coeficientes de $\mathbb{F}_q$ produce un vector $\sum a_i b_i$. Hay q^n elecciones. La generación asegura que no falta ningún vector y la independencia asegura que no contamos dos veces el mismo. Por el mismo razonamiento un subespacio de dimensión k tiene q^k elementos, de modo que fuera de él quedan $q^n - q^k$. Para $n = 0$, $q^0 = 1$ cuenta correctamente el único vector cero.

19. Si $a_k \neq 0$, el despeje de §7.2 muestra que la lista reemplazada sigue generando. Como tiene $n = \dim V$ vectores, es base. Si $a_k = 0$, el vector v pertenece al espacio generado por los b_i con $i \neq k$, así que toda la lista reemplazada queda en ese subespacio. Este no contiene a b_k, por la independencia de la base original, y por tanto no puede generar V. Esto prueba también la necesidad de la condición.

20. La columna original genera la recta $y = x$; $(1, 0)$ no pertenece a ella y no puede ser su base. Las operaciones de fila preservan las relaciones entre columnas, pero no preservan el espacio de columnas como subconjunto fijo del ambiente. La regla correcta es buscar las posiciones de pivote en la matriz reducida y tomar las columnas de la matriz original en esas posiciones. Aquí hay una sola posición, por lo que la base puede ser $((2, 2))$. La reducción permite decidir independencia y generación, sin autorizar a sustituir la recta original por su imagen.

21. La lista (e_1, e_2) es independiente en $\mathbb{R}^3$, pero no produce e_3. La lista $(e_1, e_2, e_3, e_1 + e_2)$ genera $\mathbb{R}^3$, pero es dependiente porque el cuarto vector es suma de los dos primeros. Si la lista tiene exactamente tres vectores, una de las propiedades sí basta por la proposición 7.4. Sin la condición de tamaño, la independencia sólo garantiza ausencia de redundancia y la generación sólo garantiza cobertura del espacio.

22. Tomemos $L_1 = \operatorname{span}(1, 0)$, $L_2 = \operatorname{span}(0, 1)$ y $L_3 = \operatorname{span}(1, 1)$. Dos cualesquiera son rectas distintas y su intersección es cero; su suma conjunta es $\mathbb{R}^2$. La fórmula ingenua sumaría tres dimensiones y restaría intersecciones de dimensión cero, dando tres en lugar de dos. Al aplicar Grassmann sucesivamente aparece $(L_1 + L_2) \cap L_3 = L_3$, que tiene dimensión uno, aunque $(L_1 \cap L_3) + (L_2 \cap L_3) = \{0\}$. Esa falta de distributividad identifica el paso que la imitación de conjuntos no puede justificar.

23. El subespacio $W = t\mathbb{R}[t]$ consta de los polinomios con término constante cero. La lista $(t, t^2, t^3, \ldots)$ es una base, por la unicidad de coeficientes y la finitud de cada polinomio, mientras que $\mathbb{R}[t]$ tiene base $(1, t, t^2, \ldots)$. Ambas se enumeran por los naturales, pero $1 \notin W$. La finitud falta en el criterio de igualdad de dimensiones bajo inclusión; una familia numerable puede recibir un elemento adicional y seguir siendo numerable.

24. Una combinación finita de los e_j sólo puede tener entradas no nulas entre los índices de los vectores usados, por lo que tiene soporte finito. Recíprocamente, si una sucesión tiene soporte

finito J, se escribe exactamente como $\sum_{j\in J} x_j e_j$. El espacio generado es, por tanto, el de todas las sucesiones de soporte finito. La sucesión constante uno no pertenece a él, así que la familia no genera el espacio de todas las sucesiones. Escribir una suma infinita de e_j cambiaría la operación algebraica admitida en la definición.

25. Todo complemento tiene dimensión uno. Si $C = \operatorname{span}(a, b)$ y $b = 0$, entonces $C \subseteq W$, lo que contradice la intersección nula para una recta no nula. Por ello $b \neq 0$ y podemos normalizar el generador a $(a/b, 1)$. Así, todos los complementos son $C_c = \operatorname{span}(c, 1)$, con $c \in \mathbb{R}$. La descomposición es $(x, y) = (x - cy, 0) + y(c, 1)$. La segunda entrada fija de manera única el coeficiente y, y la primera fija el sumando de W; además, cada C_c tiene intersección cero con W. Esto acredita existencia, exhaustividad y unicidad.

26. La intersección es $\operatorname{span}(e_2, e_3)$: pertenecer a U anula la cuarta entrada y pertenecer a W anula la primera. Desde la base común (e_2, e_3), añadimos e_1 para obtener una base de U y e_4 para obtener una de W. La lista conjunta (e_2, e_3, e_1, e_4) es una permutación de la base usual, luego es base de la suma, que es $\mathbb{R}^4$. Grassmann da $4 = 3 + 3 - 2$.

27. Para $k = 0$, elegimos $W = \operatorname{span}(e_3, e_4)$; las coordenadas separadas dan intersección cero y suma de dimensión cuatro. Para $k = 1$, tomamos $W = \operatorname{span}(e_2, e_3)$: la intersección es $\operatorname{span}(e_2)$ y la suma tiene base (e_1, e_2, e_3), dimensión tres. Para $k = 2$, elegimos $W = U$ y ambas operaciones dan dimensión dos. En los tres casos se verifica $\dim(U + W) = 4 - k$.

28. Para $p = a + bt + ct^2 + dt^3$, las condiciones son $a = 0$ y $b + c + d = 0$. Por tanto $p = c(t^2 - t) + d(t^3 - t)$; esos dos polinomios son independientes al comparar los coeficientes de grados dos y tres. Una base de W es $(t^2 - t, t^3 - t)$. Podemos tomar como complemento $C = \operatorname{span}(1, t)$. Para un polinomio general, la identidad

$$p = c(t^2 - t) + d(t^3 - t) + a + (b + c + d)t$$

muestra la descomposición. Un polinomio lineal que se anula en 0 y 1 es cero, así que $W \cap C = \{0\}$ y la descomposición es única.

29. En $\mathcal{T}$ las posiciones posibles son $(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3)$; las seis matrices E_{ij} correspondientes forman una base por comparación de entradas. Las tres posiciones diagonales forman una base de $\mathcal{D}$, de dimensión tres. El espacio $C = \operatorname{span}(E_{12}, E_{13}, E_{23})$ es un complemento: cualquier triangular superior se separa de manera única en su parte diagonal y su parte estrictamente superior. La separación de posiciones prueba tanto la suma completa como la intersección nula.

30. Los polinomios formales tienen base $(1, t, t^2)$ y dimensión tres. Una función en un conjunto de dos elementos queda determinada por sus valores en $0, 1$; las funciones δ_0, δ_1 que valen uno en su índice y cero en el otro forman una base, por lo que el espacio de funciones tiene dimensión dos. El polinomio $t^2 + t$ es formalmente no nulo, pero vale cero tanto en 0 como en 1 en $\mathbb{F}_2$. Así, pasar de polinomios a funciones puede identificar objetos distintos, y no conserva automáticamente la independencia de las potencias formales.

31. Escribamos cada vector de $\mathcal{C}$ en la base $\mathcal{B}$ y fijemos la posición correspondiente a b. Si todos tuvieran coeficiente cero en esa posición, toda combinación de $\mathcal{C}$ pertenecería a $\operatorname{span}(\mathcal{B} \setminus \{b\})$. Como $\mathcal{C}$ genera, también b pertenecería a ese espacio, contradiciendo la independencia de $\mathcal{B}$. Existe, por tanto, $c \in \mathcal{C}$ con coeficiente de b no nulo. Ese vector no puede pertenecer a $\mathcal{B} \setminus \{b\}$, cuyos coeficientes en dicha posición son cero, ni puede ser b, porque $b \notin \mathcal{C}$. Luego $c \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{B}$, y el ejercicio 19 prueba que el reemplazo da una base.

32. Añadir $v \notin W$ a una base de W conserva la independencia y produce n vectores, luego una base de V. En consecuencia, $V = W + \operatorname{span}(v)$. Si $av \in W$ y $a \neq 0$, entonces $v = a^{-1}(av) \in W$, contradicción; la intersección es cero. Si X es un subespacio con $W \subseteq X \subseteq V$, o bien $X = W$, o bien contiene un vector exterior a W y el argumento anterior da $X = V$. No hay subespacios intermedios propios.

33. Tome una base Z de $U \cap W$ y extiéndala a bases $Z \cup A_0$ de U y $Z \cup B_0$ de W. Defina $A = \operatorname{span}(A_0)$ y $B = \operatorname{span}(B_0)$. La prueba de Grassmann muestra que la lista formada por Z, A_0, B_0 es base de $U + W$. Agrupando las coordenadas según esos tres bloques obtenemos la existencia de $z + a + b$. Si hubiera dos descomposiciones, al restarlas y expresar cada diferencia en su bloque se obtendría una relación en la base conjunta. La independencia anula todas las coordenadas, por lo que coinciden los tres sumandos. El argumento incluye cualquier bloque vacío.

34. Para el primer vector hay $q^n - 1$ elecciones, pues debe ser no nulo. Tras elegir k vectores independientes, su espacio generado tiene q^k elementos por el ejercicio 18. El siguiente debe estar fuera de él, lo que da $q^n - q^k$ elecciones y garantiza que la lista crezca conservando independencia. Al llegar a n vectores, la proposición 7.4 asegura que es base. El número total de bases ordenadas es

$$\prod_{k=0}^{n-1} (q^n - q^k).$$

Para $n = 0$, el producto vacío vale uno y cuenta la única base vacía. En $\mathbb{F}_2^3$ obtenemos $(8-1)(8-2)(8-4) = 168$. El orden es parte del conteo: distintas permutaciones de una misma base aparecen como listas diferentes.

35. En una relación $a + b(t+1) + c(t+1)^2 = 0$, el coeficiente de t^2 da $c = 0$, después el de t da $b = 0$ y finalmente $a = 0$. Esto funciona en cualquier característica, pues los coeficientes principales de los tres polinomios son uno y sus grados son distintos. La lista es base en todos los cuerpos. En la segunda lista, todos los polinomios tienen coeficiente de t igual a cero, por lo que nunca generan $P_2(\mathbb{F})$. Si la característica es distinta de dos, 1 y $t^2 + 1$ son independientes y generan el mismo espacio que la terna, pues $t^2 - 1 = (t^2 + 1) - 2$. En característica dos, los dos últimos polinomios coinciden; $1, t^2 + 1$ siguen siendo independientes. En ambos casos el espacio generado tiene dimensión dos, aunque la relación concreta entre los generadores cambia.

36. Cada denominador es no nulo porque los nodos son distintos. Al evaluar, $L_j(a_i) = 0$ si $i \neq j$, mientras que $L_j(a_j) = 1$. Una relación $\sum_j c_j L_j = 0$ evaluada en a_i da $c_i = 0$ para cada i, de modo que la lista es independiente. Contiene $d+1$ polinomios en un espacio de dimensión $d+1$, luego es base. Si $p = \sum_j c_j L_j$, la evaluación vuelve a dar $c_i = p(a_i)$ y obtenemos $p(t) = \sum_j p(a_j) L_j(t)$. No se requiere un teorema de raíces para esta prueba, sólo independencia y tamaño; sí se requiere que el cuerpo contenga los $d+1$ nodos distintos.

37. La recurrencia determina sucesivamente cada entrada a partir de las dos anteriores. Definamos u mediante datos iniciales $(1, 0)$ y v mediante $(0, 1)$. Sus primeras entradas son $u = (1, 0, 2, 2, 6, 10, \ldots)$ y $v = (0, 1, 1, 3, 5, 11, \ldots)$. Las combinaciones lineales satisfacen la misma recurrencia, de modo que el conjunto de soluciones es un subespacio. Si una solución tiene datos iniciales (a, b), la diferencia con $au + bv$ tiene dos entradas iniciales cero; la recurrencia prueba por inducción que todas sus entradas son cero. Así, u, v generan. Una relación entre ellos se anula ya al examinar las dos entradas iniciales, por lo que son independientes y la dimensión es dos. Para $(3, -1)$ la sucesión es $3u - v = (3, -1, 5, 3, 13, 19, \ldots)$, y sus primeras entradas verifican el patrón.

38. En U se tiene $x_1 = -x_2 - x_3$ y las otras cuatro entradas son libres; una base es $(-1, 1, 0, 0, 0), (-1, 0, 1, 0, 0), e_4, e_5$. En W, podemos despejar $x_3 = -x_4 - x_5$; una base es $e_1, e_2, (0, 0, -1, 1, 0), (0, 0, -1, 0, 1)$. La lectura de los cuatro parámetros en cada caso prueba independencia además de generación, así que ambos tienen dimensión cuatro. En la intersección, con $x_2 = s$, $x_4 = t$, $x_5 = r$, obtenemos

$$x = (-s + t + r, s, -t - r, t, r) = s(-1, 1, 0, 0, 0) + t(1, 0, -1, 1, 0) + r(1, 0, -1, 0, 1).$$

Las entradas segunda, cuarta y quinta prueban que estos tres vectores son independientes. La intersección tiene dimensión tres y Grassmann da $\dim(U + W) = 4 + 4 - 3 = 5$. Por tanto la suma es $\mathbb{R}^5$ y admite la base usual.

39. Tome $w \in W$ y su descomposición única $w = u + c$ respecto de $V = U + C$. Como $u \in U \subseteq W$, se tiene $c = w - u \in W$; además $c \in C$, luego $w \in U + (W \cap C)$. La inclusión contraria se sigue de que ambos sumandos están en W. La intersección $U \cap (W \cap C)$ es cero, porque está contenida en $U \cap C$. Por tanto la descomposición es única y Grassmann da $\dim W = \dim U + \dim(W \cap C)$. La inclusión $U \subseteq W$ se usó al asegurar que $w - u$ permanecía en W.

40. Tome $U = \operatorname{span}(e_1, e_2)$ y $W = \operatorname{span}(e_1 + e_2, e_3)$ en $\mathbb{R}^3$. Las bases indicadas son disjuntas como conjuntos, pero sus cuatro vectores satisfacen $(e_1 + e_2) - e_1 - e_2 = 0$. La independencia separada no impide relaciones que mezclan ambos grupos. Se tiene $U \cap W = \operatorname{span}(e_1 + e_2)$ y la dimensión de la suma es $2 + 2 - 1 = 3$. La hipótesis exacta para la conclusión aditiva es $U \cap W = \{0\}$. Bajo ella, una relación entre ambos bloques da un vector perteneciente a la intersección, que debe ser cero; después la independencia de cada base anula sus propios coeficientes. Que las bases sean disjuntas sólo evita repetir elementos literalmente, sin eliminar las dependencias entre ellos.

Lecturas y referencias

El intercambio y sus consecuencias para bases y dimensión pueden contrastarse con Friedberg, Insel y Spence, *Linear Algebra*, 5.ª edición, §1.6, y con Hoffman y Kunze, *Linear Algebra*, 2.ª edición, §2.3. Nathaniel Johnston, *Advanced Linear and Matrix Algebra* (2021), §§1.1.3 y 1.2.1, ofrece ejemplos de bases de matrices y polinomios y el paso a las coordenadas. Axler, *Linear Algebra Done Right*, 4.ª edición, §§2B–2C, desarrolla extracción, extensión y dimensión de una suma. Las formulaciones clásicas se presentan aquí con demostraciones propias adaptadas a los prerrequisitos del tomo; los ejercicios y sus soluciones se integran en este capítulo.

Capítulo 8

Transformaciones lineales

Un dispositivo recibe dos señales que podemos ajustar por separado y produce una salida formada por dos números. Al activar únicamente la primera señal con intensidad uno, obtenemos $u = (2, 1)$; al activar únicamente la segunda, obtenemos $v = (-1, 2)$. Si duplicar una señal duplica su contribución y combinar señales suma sus contribuciones, una entrada (x, y) debe producir $xu + yv = (2x - y, x + 2y)$. Dos mediciones determinan entonces la respuesta a cualquier entrada, incluso a intensidades negativas o fraccionarias.

Esas dos mediciones no bastan para demostrar que el dispositivo se comporte así. La regla $F(x, y) = (2x - y + xy, x + 2y)$ coincide con la anterior sobre las dos entradas usuales $(1, 0)$ y $(0, 1)$, pero en $(1, 1)$ produce $(2, 3)$ en lugar de $(1, 3)$. El término xy describe una interacción que no se revela cuando una de las señales está apagada. Conocer las respuestas sobre una base determina la transformación completa cuando sabemos que ésta respeta las combinaciones lineales; si todavía no conocemos esa propiedad, las respuestas aisladas sólo son datos parciales.

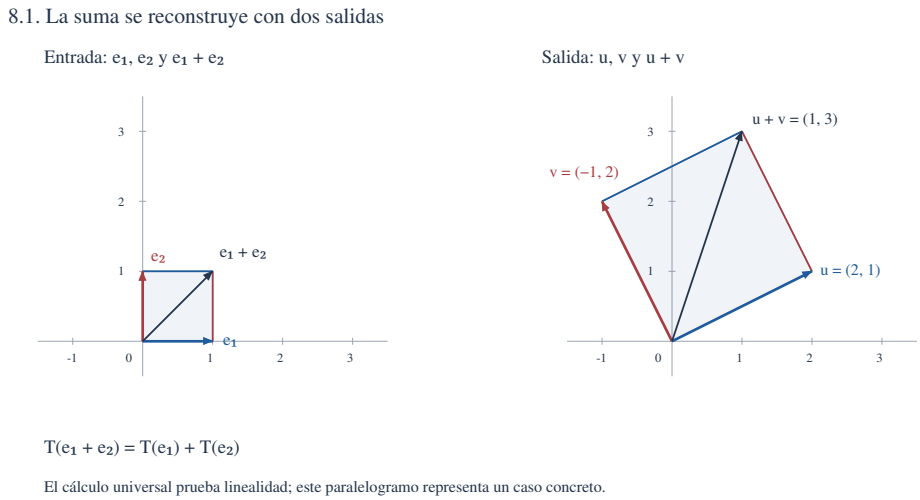


Figura 8.1. La regla $T(x, y) = (2x - y, x + 2y)$ reconstruye todas sus salidas mediante las imágenes de las entradas usuales. La figura representa esta regla concreta; no certifica el comportamiento de una función desconocida a partir de unas pocas mediciones.

Trabajaremos con espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $\mathbb{F}$. Usaremos las bases y combinaciones de C04–C07 y las operaciones con funciones del tomo I. Los ejemplos numéricos son reales salvo indicación contraria. No se presupone cálculo diferencial: la derivación de polinomios que aparecerá más adelante se definirá mediante sus coeficientes.

8.1. Conservar las combinaciones

Definición 8.1 (transformación lineal). Sean V, W espacios vectoriales sobre $\mathbb{F}$. Una función $T : V \to W$ es **lineal** si para todos $x, y \in V$ y $a \in \mathbb{F}$ se cumplen $T(x + y) = T(x) + T(y)$ y $T(ax) = aT(x)$. La primera propiedad se llama **aditividad** y la segunda **homogeneidad**. Cuando el dominio y el codominio coinciden, hablaremos también de un **operador lineal** sobre ese espacio.

Las operaciones de entrada se efectúan en V y las de salida en W; sus vectores pueden ser objetos de clases distintas. La fórmula no exige que T conserve longitudes, ángulos, productos ni todas las operaciones que podamos definir sobre esos objetos. Exige dos compatibilidades precisas con la estructura vectorial.

La regla de la apertura es lineal porque, al sustituir $a(x,y)+b(s,t)$, obtenemos

$$\begin{aligned} T(ax+bs, ay+bt) &= (2ax+2bs-ay-bt, ax+bs+2ay+2bt) \\ &= a(2x-y, x+2y) + b(2s-t, s+2t). \end{aligned}$$

El cálculo tiene coeficientes y entradas arbitrarios. Comprobar la misma igualdad sólo para dos vectores particulares no justificaría los cuantificadores de la definición.

Proposición 8.1 (superposición). Una función $T : V \to W$ es lineal si y sólo si $T(ax+by) = aT(x)+bT(y)$ para todos $x, y \in V$ y $a, b \in \mathbb{F}$. En ese caso $T(0_V) = 0_W$, $T(-x) = -T(x)$ y, para cualquier lista finita de vectores y escalares,

$$T\left(\sum_{j=1}^{r} a_j x_j\right) = \sum_{j=1}^{r} a_j T(x_j).$$

Demostración. Si T es lineal, primero aplicamos aditividad a $ax+by$ y después homogeneidad a cada sumando. En sentido contrario, tomar $a = b = 1$ da aditividad; tomar $b = 0$ da homogeneidad, porque $0T(y) = 0_W$.

La aditividad aplicada a $0_V + 0_V$ da $T(0_V) = T(0_V) + T(0_V)$; al cancelar un sumando en W, obtenemos $T(0_V) = 0_W$. La homogeneidad con escalar -1 da la afirmación sobre opuestos. Para una suma de $r+1$ términos, separamos el último, usamos aditividad y aplicamos al bloque anterior la fórmula para r términos. La inducción, comenzando por un término, prueba la fórmula finita. Para la suma vacía, ambos miembros son cero por lo que acabamos de demostrar. □

La condición $T(0) = 0$ sirve para descartar muchas funciones, pero no basta para probar linealidad: $f(x) = x^2$ sobre $\mathbb{R}$ lleva cero a cero y, sin embargo, $f(1+1) = 4 \neq 2 = f(1)+f(1)$. Una sola falla basta para refutar la definición, mientras que una prueba positiva debe controlar todos los vectores y escalares.

La función cero $0_{V,W} : V \to W$, que envía cada vector al cero de W, es lineal porque ambos miembros de las igualdades requeridas son cero. La identidad $I_V(x) = x$ también lo es porque deja las operaciones intactas. Si el dominio es $\{0\}$, existe una sola transformación lineal hacia W, pues su valor en cero está obligado. Si el codominio es $\{0\}$, existe igualmente una sola función y es lineal.

El cuerpo no puede omitirse. La conjugación $C : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $C(z) = \overline{z}$, respeta las sumas y la multiplicación por escalares reales, luego es lineal al considerar $\mathbb{C}$ como espacio real. Como transformación de espacios complejos, falla la homogeneidad: $C(i \cdot 1) = -i$, mientras que $iC(1) = i$. La misma función, con las mismas entradas y salidas, cambia de estatuto cuando cambia el cuerpo de escalares.

8.2. Construir una transformación a partir de una base

La superposición permite recuperar una transformación ya conocida a partir de los valores que toma en una base. Para convertir esa observación en un procedimiento de construcción necesitamos comprobar además que cualquier elección de esos valores produce una función lineal bien definida.

Teorema 8.2 (prescripción sobre una base). Sea $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ una base de V y sean $w_1, \dots, w_n$ vectores cualesquiera de W. Existe una única transformación lineal $T : V \to W$ tal que $T(b_j) = w_j$ para cada j.

Demostración. Cada $x \in V$ admite una única representación $x = \sum_j a_j b_j$. Esa unicidad permite definir una función mediante la regla

$$T(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j w_j.$$

No hemos supuesto que los w_j sean independientes ni que generen W. Una vez fijados los coeficientes únicos de x, la suma de salida existe en W aunque algunos de esos vectores sean cero o coincidan entre sí.

Debemos comprobar que la función construida es lineal. Si $x = \sum_j a_j b_j$ e $y = \sum_j c_j b_j$, la unicidad de coordenadas identifica los coeficientes de $\alpha x + \beta y$ como $\alpha a_j + \beta c_j$. Por la propia regla de construcción,

$$T(\alpha x + \beta y) = \sum_j (\alpha a_j + \beta c_j) w_j = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

La proposición 8.1 prueba la linealidad. Para $x = b_k$, sus coeficientes son uno en la posición k y cero en las demás, así que $T(b_k) = w_k$.

Finalmente, cualquier transformación lineal S con los valores prescritos debe satisfacer $S(x) = \sum_j a_j S(b_j) = \sum_j a_j w_j = T(x)$ para todo x. Ésta es igualdad de funciones, lo que demuestra la unicidad. Si la base es vacía, $V = \{0\}$ y la suma vacía construye la única transformación lineal posible. □

Por ejemplo, consideremos la base $b_1 = (1, 1)$, $b_2 = (1, -1)$ de $\mathbb{R}^2$ y los valores $T(b_1) = (1, 2, 0)$, $T(b_2) = (0, 1, 1)$. Puesto que $(x, y) = \frac{x+y}{2} b_1 + \frac{x-y}{2} b_2$, obtenemos

$$T(x, y) = \left(\frac{x + y}{2}, \frac{3x + y}{2}, \frac{x - y}{2} \right).$$

La entrada está en un plano y la salida en un espacio de tres coordenadas. No hay dificultad en cambiar de tipo de objeto: si en la misma base prescribiéramos $S(b_1) = 1 + t$ y $S(b_2) = t^2$, construiríamos la transformación $S(x, y) = \frac{x+y}{2}(1 + t) + \frac{x-y}{2} t^2$ con codominio $P_2(\mathbb{R})$.

En particular, dos transformaciones lineales que coinciden sobre una base coinciden sobre todo el dominio. El argumento funciona incluso con una lista generadora redundante, siempre que ambas funciones sean ya lineales: se expresa cada vector mediante los generadores y se aplica superposición. La cuestión de existencia requiere más cuidado cuando los datos se prescriben sobre una lista dependiente.

8.3. Datos redundantes y compatibilidad

Supongamos que queremos prescribir los valores sobre $u = (1, 0)$, $v = (0, 1)$ y $z = (1, 1)$. Como $z = u + v$, cualquier transformación lineal debe satisfacer $T(z) = T(u) + T(v)$. Si elegimos los tres valores libremente podemos violar esa obligación y hacer imposible la construcción. Las relaciones lineales de la entrada imponen las correspondientes relaciones en la salida.

Teorema 8.3 (prescripción sobre generadores). Sea $(v_1, \dots, v_r)$ una lista que genera V, y fijemos $w_1, \dots, w_r \in W$. Existe una transformación lineal $T : V \to W$ con $T(v_j) = w_j$ si y sólo si se cumple la siguiente condición para todos los escalares $a_1, \dots, a_r$:

$$\sum_{j=1}^{r} a_j v_j = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^{r} a_j w_j = 0.$$

Cuando existe, la transformación es única.

Demostración. Si existe T, aplicarla a una relación nula y usar superposición produce exactamente la relación nula de salida. Esto prueba la necesidad.

Supongamos que la condición se cumple. Dado $x \in V$, elegimos una expresión $x = \sum_j c_j v_j$ y proponemos $T(x) = \sum_j c_j w_j$. La generación asegura que existe al menos una expresión, pero la dependencia permite que haya varias. Para que la propuesta defina una función debemos demostrar que todas dan la misma salida. Si también $x = \sum_j d_j v_j$, entonces $\sum_j (c_j - d_j) v_j = 0$. La hipótesis da $\sum_j (c_j - d_j) w_j = 0$, de modo que las dos sumas de salida coinciden. La regla es, por tanto, independiente de la representación elegida.

Para verificar la linealidad, tomamos representaciones de x e y; la combinación de sus coeficientes representa a $\alpha x + \beta y$. Como la regla ya está bien definida, podemos usar esa representación y obtener $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$. Tomar la representación de v_j con un coeficiente uno y los demás cero da el valor prescrito w_j. La unicidad se sigue de que cualquier transformación lineal con esos valores debe aplicar a cada representación de x la misma regla de superposición. □

La condición pide conservar todas las relaciones. Sobre la lista $u, v, u + v$ basta comprobar $w_3 = w_1 + w_2$, porque cualquier relación de entrada tiene coeficientes $(-c, -c, c)$: las dos entradas de $au + bv + c(u + v) = 0$ fuerzan $a = b = -c$. Si, por ejemplo, $w_1 = (2, 1)$ y $w_2 = (-1, 2)$, la única elección compatible para w_3 es $(1, 3)$. Elegir $(2, 3)$ no define otra transformación lineal; produce datos incompatibles.

Cuando los generadores no llenan el dominio, los valores pueden dejar libertad incluso si son compatibles. Si sólo prescribimos $T(e_1) = (1, 0)$ en $\mathbb{R}^2$, podemos elegir arbitrariamente $T(e_2)$ y completar por el teorema 8.2. En general, una transformación lineal dada sobre un subespacio de un espacio finito se extiende al espacio completo: extendemos una base del subespacio a una del ambiente y elegimos los valores de los vectores añadidos. La extensión queda determinada por esas nuevas elecciones.

8.4. Transformaciones entre objetos distintos

El producto matricial proporciona una familia familiar. Si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ es fija, la función $T_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$, $T_A(x) = Ax$, es lineal porque $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$, por las reglas de C03. Recíprocamente, una transformación lineal entre estos espacios se escribe $T(x) = \sum_j x_j T(e_j)$; al colocar las columnas $T(e_j)$ en una matriz obtenemos exactamente un producto Ax. Para bases arbitrarias la construcción requiere llevar un control separado de las coordenadas de entrada y salida; ese estudio se reserva a C12.

En el espacio de todas las funciones $X \to \mathbb{F}$, fijar $a \in X$ produce la **evaluación** $E_a(f) = f(a)$. Es lineal porque $(\alpha f + \beta g)(a) = \alpha f(a) + \beta g(a)$. El vector de entrada puede ser una función completa y la salida un solo escalar. En particular, $E_a : P_d(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ evalúa polinomios formales. Aunque polinomios distintos puedan dar la misma función sobre un cuerpo finito, la evaluación en un punto sigue siendo una función bien definida y lineal.

La transposición $\tau : M_{m\times n}(\mathbb{F}) \to M_{n\times m}(\mathbb{F})$ también es lineal: la entrada (i, j) de $(\alpha A + \beta B)^{\mathsf{T}}$ es $\alpha a_{ji} + \beta b_{ji}$, igual a la entrada correspondiente de $\alpha A^{\mathsf{T}} + \beta B^{\mathsf{T}}$. Aquí el orden de las dimensiones del dominio y el codominio cambia, pero las operaciones siguen siendo compatibles.

En $\mathbb{F}[t]$ definimos la **derivación formal** por

$$D\left(\sum_{k=0}^{d} a_k t^k\right) = \sum_{k=1}^{d} k a_k t^{k-1}.$$

El entero k en esta fórmula significa la suma de k copias de la unidad del cuerpo. La suma es finita y el resultado es otro polinomio; para una constante da cero. Al sumar dos polinomios, podemos completar sus listas de coeficientes con ceros hasta un mismo grado y calcular

$$D(\alpha p + \beta q) = \sum_{k\geq 1} k(\alpha a_k + \beta b_k) t^{k-1} = \alpha Dp + \beta Dq,$$

donde sólo hay un número finito de términos no nulos. La linealidad está demostrada algebraicamente. En $\mathbb{F}_2[t]$, por ejemplo, $D(t^2) = 2t = 0$, aunque t^2 no sea constante. Las propiedades familiares de la derivada real no se transportan todas al cambiar el cuerpo.

Fijar un polinomio q produce otro operador lineal, $M_q(p) = qp$: la distributividad da $q(\alpha p + \beta r) = \alpha qp + \beta qr$. Esta afirmación mantiene fijo q. La función $p \mapsto p^2$ no es en general lineal, pues en ella cambian ambos factores; sobre $\mathbb{R}$, el polinomio constante 1 ya da $(2 \cdot 1)^2 = 4 \neq 2 \cdot 1^2$. Volveremos al comportamiento especial del cuadrado en característica dos en los ejercicios.

8.5. Sumar transformaciones y contar sus parámetros

Podemos considerar simultáneamente todas las transformaciones lineales entre dos espacios fijos. Para sumar dos de ellas usamos las operaciones del codominio en cada punto de entrada.

Definición 8.2 (espacio de transformaciones). Denotamos por $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ el conjunto de transformaciones lineales de V en W. Para S, T en ese conjunto y $a \in \mathbb{F}$, definimos $(S + T)(x) = S(x) + T(x)$ y $(aT)(x) = aT(x)$ para todo $x \in V$. Cuando $V = W$, también escribimos $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$.

Proposición 8.4. Con esas operaciones, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$.

Demostración. Debemos verificar primero que las operaciones permanecen dentro del conjunto. Para $x, y \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, la linealidad de S y T da

$$\begin{aligned}(S + T)(\alpha x + \beta y) &= \alpha S(x) + \beta S(y) + \alpha T(x) + \beta T(y)\\ &= \alpha(S + T)(x) + \beta(S + T)(y).\end{aligned}$$

El reordenamiento usa la conmutatividad de la suma en W. Para un escalar fijo a, el mismo cálculo da $(aT)(\alpha x+\beta y)=\alpha(aT)(x)+\beta(aT)(y)$.

Las leyes vectoriales restantes se verifican evaluando en un x arbitrario y usando las de W: por ejemplo, $((R+S)+T)(x)=(R(x)+S(x))+T(x)=R(x)+(S(x)+T(x))=(R+(S+T))(x)$, por lo que las funciones son iguales. La conmutatividad, las dos distributividades, la asociatividad del producto de escalares y la acción de la unidad se comprueban del mismo modo mediante las correspondientes identidades en W. La función cero es el neutro aditivo y la función $x\mapsto -T(x)$ es el opuesto de T. Quedan verificadas las leyes de espacio vectorial. □

Exigir un dominio y un codominio comunes permite que la suma tenga sentido. No podemos sumar sin más una función $V\to W$ y otra $W\to U$: ni sus argumentos ni sus valores tienen por qué pertenecer a los mismos espacios. La composición, que estudiaremos después, sí enlazará transformaciones con esos tipos.

Teorema 8.5 (dimensión del espacio de transformaciones). Si $\dim V=n$ y $\dim W=m$ son finitas, entonces $\dim \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)=mn$.

Demostración. Elijamos bases $(b_1,\dots,b_n)$ de V y $(c_1,\dots,c_m)$ de W. Por el teorema 8.2, para cada pareja (i,j) existe una transformación E_{ij} cuyo valor en b_j es c_i y cuyo valor en los demás vectores de la base de V es cero. Estas funciones son los candidatos a base de Hom.

Si $T:V\to W$ es lineal, escribimos cada uno de sus valores prescritos como $T(b_j)=\sum_i a_{ij}c_i$. La transformación $\sum_{i,j} a_{ij}E_{ij}$ tiene esos mismos valores en cada b_j, por lo que coincide con T en todo V. Esto prueba que los E_{ij} generan Hom.

Para verificar su independencia, supongamos que $\sum_{i,j} d_{ij}E_{ij}$ es la función cero. Al evaluar en un b_k fijo, todos los términos con $j\neq k$ desaparecen y obtenemos $\sum_i d_{ik}c_i=0$. La independencia de la base de W anula cada d_{ik}. Como podemos hacer esto para todos los k, se anulan todos los coeficientes. Por tanto, las mn funciones E_{ij} forman una base. Si alguno de los dos espacios es nulo, Hom contiene sólo la función cero y la base descrita es vacía, coherentemente con $mn=0$. □

Para $V=\mathbb{R}^2$ y $W=\mathbb{R}^3$, una transformación tiene dos valores básicos de tres coeficientes cada uno; Hom tiene dimensión seis. Estos seis parámetros pertenecen al espacio de funciones lineales, no al espacio de entradas ni al de salidas. Las funciones E_{ij} de la prueba dependen de las bases elegidas; el número mn permanece igual por la invariancia de dimensión demostrada en C07.

8.6. Componer: el orden de las operaciones

Proposición 8.6 (composición y leyes algebraicas). Si $T:U\to V$ y $S:V\to W$ son lineales, su composición $S\circ T:U\to W$ es lineal. La composición es asociativa y tiene como identidades las funciones identidad de cada espacio. Además, distribuye sobre sumas de transformaciones de tipos compatibles y respeta la multiplicación por escalares.

Demostración. Aplicamos primero T y después S:

$$(S\circ T)(\alpha x+\beta y)=S(\alpha T(x)+\beta T(y))=\alpha S(T(x))+\beta S(T(y)).$$

La asociatividad se verifica sobre cada vector: $R(S(T(x)))$ es el valor tanto de $(R\circ S)\circ T$ como de $R\circ(S\circ T)$. Para $T:U\to V$, las identidades correctas son $I_V\circ T=T=T\circ I_U$.

Si $S_1,S_2:V\to W$, entonces $((S_1+S_2)\circ T)(x)=S_1(T(x))+S_2(T(x))$, que da una distributividad. Si $T_1,T_2:U\to V$, la otra usa la aditividad de S: $(S\circ(T_1+T_2))(x)=S(T_1(x)+T_2(x))=S(T_1(x))+S(T_2(x))$. La homogeneidad de S da $S\circ(aT)=a(S\circ T)$, y la definición puntual da $(aS)\circ T=a(S\circ T)$. Todas son igualdades de funciones porque se verifican en cada entrada. □

Es frecuente escribir ST en lugar de $S\circ T$; en esa notación la operación situada a la derecha actúa primero. Incluso cuando ambas composiciones están definidas, el orden puede cambiar el resultado. En $\mathbb{F}[t]$, sean D la derivación formal y $M(p)=tp$. Para cada monomio t^k,

$$DM(t^k)=(k+1)t^k,\qquad MD(t^k)=kt^k.$$

Para $k=0$, la segunda igualdad significa $M(D1)=M(0)=0$; no hace falta escribir una potencia de exponente negativo. Restando y usando linealidad sobre las sumas finitas que forman los polinomios, obtenemos $DM-MD=I$. La identidad vale en cualquier característica, pues $(k+1)-k=1$ en todo cuerpo. En particular, D y M no conmutan.

La resta de operadores y la composición cumplen funciones distintas en esta fórmula. $(D-M)(p)$ resta dos polinomios de salida; $DM(p)$ introduce el polinomio $M(p)$ como entrada de D. Confundirlas destruye el tipo de cálculo que acaba de producir la identidad.

8.7. Proyecciones algebraicas

Los complementos construidos en C07 permiten definir transformaciones sin comenzar por una fórmula de coordenadas. Supongamos que W y C son subespacios de V, con $V = W + C$ y $W \cap C = \{0\}$. Cada $x \in V$ se escribe de manera única como $x = w + c$; podemos conservar el sumando de W y descartar el de C.

Proposición 8.7 (proyección según un complemento). La regla $P(w + c) = w$ define un operador lineal sobre V. Sus valores pertenecen a W, fija cada vector de W, anula cada vector de C y satisface $P^2 = P$.

Demostración. La unicidad de la descomposición garantiza que el valor no depende de una elección. Si $x = w+c$ e $y = w'+c'$, entonces $\alpha x+\beta y = (\alpha w+\beta w')+(\alpha c+\beta c')$ es su descomposición en los dos subespacios. Por tanto, $P(\alpha x + \beta y) = \alpha w + \beta w' = \alpha P(x) + \beta P(y)$. Para $w \in W$, la descomposición es $w = w + 0$ y $P(w) = w$; para $c \in C$ es $c = 0 + c$ y $P(c) = 0$. Como $P(x) \in W$, volver a aplicar P no lo cambia, de donde $P(P(x)) = P(x)$ para todo x. $\square$

Sobre $W = \operatorname{span}(1, 0)$ y $C_a = \operatorname{span}(a, 1)$ en $\mathbb{R}^2$, la descomposición de C07 da $P_a(x, y) = (x-ay, 0)$. Todos estos operadores proyectan sobre la misma recta, pero lo hacen descartando direcciones distintas. Para $a = 1$, el punto $(3, 2)$ se envía a $(1, 0)$; para $a = 0$, se envía a $(3, 0)$. La palabra «proyección» no exige perpendicularidad en esta construcción.

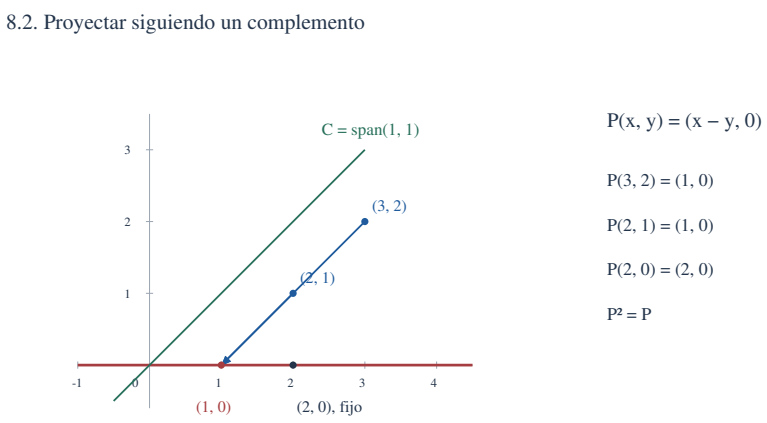


Figura 8.2. Las flechas entre puntos y sus proyecciones siguen rectas paralelas a $C_1 = \operatorname{span}(1, 1)$. La igualdad $P^2 = P$ expresa que los puntos del eje horizontal ya están fijos después de la primera aplicación.

8.8. Traslaciones y aplicaciones afines

La función $x \mapsto 3x + 2$ tiene por gráfica una recta, pero no es una transformación lineal de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ porque no lleva cero a cero. Podemos conservar su parentesco con las transformaciones lineales distinguiendo la parte que depende de la entrada de un desplazamiento fijo de la salida.

Definición 8.3 (aplicación afín). Una función $f : V \to W$ es **afín** si existe una transformación lineal $T : V \to W$ y un vector fijo $b \in W$ tales que $f(x) = T(x) + b$ para todo $x \in V$.

Proposición 8.8. En una aplicación afín, $b = f(0)$ y $T(x) = f(x)-f(0)$, por lo que la parte lineal y el desplazamiento son únicos. Una función es afín si y sólo si conserva todas las combinaciones afines finitas, es decir,

$$f\left(\sum_{j=1}^{r} a_j x_j\right) = \sum_{j=1}^{r} a_j f(x_j) \quad \text{siempre que} \quad \sum_{j=1}^{r} a_j = 1.$$

Una aplicación afín es lineal si y sólo si $f(0) = 0$.

Demostración. Si $f(x) = T(x) + b$, evaluar en cero da $f(0) = b$ y despejar da la fórmula única para T. En una combinación cuyos coeficientes suman uno, calculamos

$$\sum_j a_j f(x_j) = \sum_j a_j T(x_j) + \left(\sum_j a_j\right) b = T\left(\sum_j a_j x_j\right) + b,$$

que es el valor de f en la combinación.

Recíprocamente, supongamos que se conservan todas esas combinaciones y definamos $g(x) = f(x) - f(0)$. Los coeficientes $1, 1, -1$ de los vectores $x, y, 0$ suman uno en cualquier cuerpo. Aplicar la hipótesis da $f(x+y) = f(x) + f(y) - f(0)$, de donde $g(x+y) = g(x) + g(y)$. Los coeficientes $a, 1-a$ de los vectores $x, 0$ también suman uno y dan $f(ax) = af(x) + (1-a)f(0)$, es decir, $g(ax) = ag(x)$. Así g es lineal y $f = g + f(0)$ es afín. Finalmente, si $f(0) = 0$, la descomposición afín es su parte lineal; si f es lineal, la proposición 8.1 obliga a $f(0) = 0$. □

Sobre espacios reales, una combinación $x + t(y - x)$ recorre una recta y, para $0 \le t \le 1$, el segmento entre x e y. Una aplicación afín satisface $f(x + t(y - x)) = f(x) + t(f(y) - f(x))$. Si $f(y) = f(x)$, toda esa recta se envía a un punto; en caso contrario, su imagen es una recta. Por eso la afirmación informal «las rectas se transforman en rectas» necesita admitir el colapso y tampoco caracteriza por sí sola la linealidad: las traslaciones llevan rectas a rectas y pueden mover el origen.

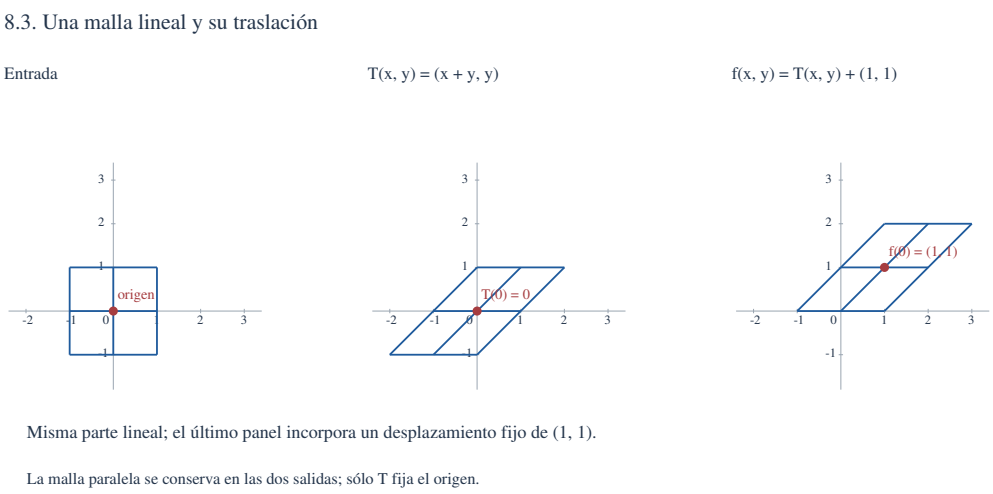


Figura 8.3. La misma parte lineal transforma una malla en los dos paneles de salida. El desplazamiento fijo conserva las combinaciones cuyos coeficientes suman uno; para una suma sin esa restricción aparecerían dos copias del desplazamiento en lugar de una.

La diferencia se reconoce también al restar salidas: $f(x) - f(y) = T(x - y)$. Una traslación se cancela en las diferencias, pero permanece en los valores absolutos. Al pasar de ecuaciones homogéneas a no homogéneas ya habíamos encontrado esa separación entre direcciones lineales y un punto de partida; la noción de aplicación afín la expresa ahora para funciones entre espacios.

8.9. Ejercicios

Los cálculos iniciales fijan los tipos de entrada y salida. Los problemas posteriores piden construir transformaciones, justificar que una regla está bien definida y estudiar qué cambia al variar una hipótesis. Salvo indicación contraria, los espacios y escalares son reales.

Reconocer y calcular. **1.** Determine cuáles son lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$: $T_1(x, y) = (x - 2y, 3x)$, $T_2(x, y) = (x - 2y + 1, 3x)$ y $T_3(x, y) = (x - 2y, xy)$. Pruebe cada afirmación o dé un testigo de falla.

2. Una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ satisface $T(1, 1) = (1, 2, 0)$ y $T(1, -1) = (0, 1, 1)$. Halle $T(3, 1)$ y la fórmula de $T(x, y)$.

3. Construya la transformación lineal $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ con $T(1) = (1, 0)$, $T(t) = (0, 1)$ y $T(t^2) = (1, -1)$. Calcule $T(2 - 3t + 4t^2)$.

4. Determine si existen transformaciones lineales $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con $T(e_1) = (2,1)$, $T(e_2) = (-1,2)$ y, respectivamente, $T(e_1+e_2) = (1,3)$ o $T(e_1+e_2) = (2,3)$.

5. Para $E_2 : P_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, calcule $E_2(1-2t+3t^2-t^3)$. Pruebe la linealidad de la evaluación e indique en qué dominio tiene sentido preguntar si también preserva productos; conteste allí la pregunta.

6. Calcule la derivada formal de $p = 1+2t+3t^2+4t^3$ sobre $\mathbb{R}$ y de su reducción de coeficientes sobre $\mathbb{F}_2$. Explique la diferencia.

7. Pruebe que la transposición es lineal sobre cualquier cuerpo. Defina la transposición conjugada mediante $(A^\dagger)_{ij} = \overline{a_{ji}}$ y decida si es lineal sobre $\mathbb{C}$ y sobre $\mathbb{R}$.

8. Sean $S(x,y) = (x+y, y)$ y $T(x,y) = (x, 2y)$. Calcule $S+T$, $2S-T$, ST y TS, e indique en qué entrada se distingue el orden de composición.

9. En $\mathbb{R}^2$, halle la proyección sobre el eje horizontal según el complemento $\operatorname{span}(2,1)$. Verifique su linealidad, $P^2 = P$ y el valor de $P(5,2)$.

10. Descomponga $f(x,y) = (x+2y+3, -y+1)$ en su parte lineal y su desplazamiento. Calcule $f(0)$ y compruebe la identidad $f(x) - f(y) = T(x-y)$ usando vectores generales.

Probar y controlar hipótesis. 11. Pruebe que dos transformaciones lineales que coinciden en una lista generadora coinciden en todo el espacio. Explique por qué no hace falta independencia.

12. Sea V de dimensión uno sobre $\mathbb{F}$ con base (b). Describa todas las transformaciones lineales $V \to W$. Deduzca que toda transformación lineal $\mathbb{F} \to \mathbb{F}$ es multiplicación por un escalar fijo.

13. En el teorema 8.2, separe la función de generación de la función de independencia. Indique cuál garantiza que la propuesta alcanza cada entrada y cuál garantiza que no hay dos salidas propuestas para una entrada.

14. Muestre que $T(0) = 0$ no basta para probar linealidad. Dé además una función $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que se anule en e_1, e_2 pero no sea la transformación cero.

15. Si $T : \mathbb{Q}^n \to \mathbb{Q}^m$ es aditiva, pruebe que es lineal sobre $\mathbb{Q}$. No suponga homogeneidad de antemano.

16. Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Determine qué ocurre con homogeneidad para escalares no negativos y para escalares arbitrarios. Localice también una falla de aditividad.

17. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal biyectiva. Pruebe directamente que su función inversa $T^{-1} : W \to V$ es lineal, sin usar matrices.

18. Un cálculo afirma que $S \circ (T_1 + T_2) = S \circ T_1 + S \circ T_2$ para funciones cualesquiera. Identifique la hipótesis utilizada en la prueba correcta y dé un contraejemplo cuando falla.

19. Sean $S, T : V \to V$ lineales. Pruebe que $S - T$ es lineal y que $ST - TS$ también lo es. ¿Deben coincidir esas dos operaciones?

20. Describa explícitamente las seis transformaciones elementales que forman una base de $\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ para las bases usuales y exprese $T(x,y) = (2x-y, x+3y, 4y)$ mediante ellas.

Construir transformaciones y contraejemplos. 21. Determine todos los $c \in \mathbb{R}$ para los cuales existe $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lineal con $T(1,0) = 1$, $T(1,1) = 2$, $T(2,1) = c$. Dé la transformación cuando exista.

22. Sea $W = \operatorname{span}((1,1,0),(0,1,1)) \subseteq \mathbb{R}^3$. Construya todas las extensiones lineales a $\mathbb{R}^3$ de la función lineal prescrita por $S(1,1,0) = 1$, $S(0,1,1) = 2$.

23. Para $u = (1,0,0)$, $v = (0,1,0)$ y $w = u+v$ en $\mathbb{R}^3$, prescriba salidas escalares $1, 2, 3$. Explique por qué son compatibles y por qué no determinan una única transformación sobre todo $\mathbb{R}^3$. Describa todas.

24. Construya el operador lineal sobre $P_2(\mathbb{R})$ que satisface $T(1) = 1$, $T(t) = t+1$ y $T(t^2) = t^2+2t+1$. Reconozca una regla de sustitución y calcule $T(2t^2 - t + 3)$.

25. En $\mathbb{F}_2[t]$, pruebe que $Q(p) = p^2$ es lineal sobre $\mathbb{F}_2$. Muestre que la misma regla sobre $\mathbb{F}_3[t]$ no es aditiva.

26. En el espacio de sucesiones $(x_j)_{j \ge 0}$ sobre $\mathbb{F}$, defina $L(x_0, x_1, \ldots) = (x_1, x_2, \ldots)$ y $R(x_0, x_1, \ldots) = (0, x_0, x_1, \ldots)$. Pruebe que son lineales y calcule LR y RL.

27. Dé una aplicación afín $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que no sea lineal y una transformación lineal que envíe una recta completa a un punto. Explique qué falla en usar «rectas a rectas» como definición de linealidad.

28. Pruebe que una aplicación afín real conserva puntos medios. Para $f(x) = 3x + 2$, compare $f((x + y)/2)$ con $(f(x) + f(y))/2$ y compare $f(x + y)$ con $f(x) + f(y)$.

29. Sean $f(x) = T(x) + b$ y $g(y) = S(y) + c$ aplicaciones afines de tipos compatibles. Determine la parte lineal y el desplazamiento de $g \circ f$. Dé un ejemplo donde el orden de dos traslaciones y una transformación lineal cambie el resultado.

30. Halle todas las funciones reales lineales que satisfacen $T(2) = 6$, y todas las funciones reales afines que satisfacen $f(2) = 6$, $f(3) = 8$. Explique la diferencia en cantidad de datos.

Integrar y transferir. 31. Sea $W \subseteq V$ y $\dim V < \infty$. Pruebe que cualquier transformación lineal $S : W \to U$ admite una extensión lineal a V. Si $W \neq V$ y $U \neq \{0\}$, pruebe que la extensión no es única.

32. Sean $\dim V = n$, $\dim W = m$ sobre $\mathbb{F}_q$. Cuente las transformaciones lineales $V \to W$. Si se prescriben valores arbitrarios en k vectores independientes, ¿cuántas satisfacen esos valores? Incluya espacios nulos.

33. Sobre $\mathbb{F}[t]$, pruebe por comparación de coeficientes la regla formal $D(pq) = (Dp)q + p(Dq)$. Deduzca $DM_q - M_qD = M_{Dq}$ para cualquier polinomio fijo q.

34. Describa todos los operadores lineales $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ que conmutan con la derivación formal D. Trabaje sobre $1, t, t^2$ y exprese el resultado como combinación de I, D, D^2.

35. Sean $v_1, \ldots, v_r$ generadores de V y $R_0 \subseteq \mathbb{F}^r$ el conjunto de sus relaciones. Pruebe que R_0 es subespacio. Muestre que para verificar la compatibilidad del teorema 8.3 basta comprobar las relaciones de una base de R_0.

36. Una transformación lineal $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ debe satisfacer $T(1) = (1, 0)$, $T(t) = (0, 1)$, $T(1 + t + t^2) = (2, 3)$ y $T(1 + t) = (1, 1)$. Determine si existe, calcule T y explique cómo controla los datos redundantes el teorema 8.3.

37. Sea $\mathcal{B}$ una base algebraica infinita de V. Asigne a cada $b \in \mathcal{B}$ un vector arbitrario $w_b \in W$. Pruebe que existe una única transformación lineal con esos valores. Explique por qué no intervienen sumas infinitas ni un nuevo teorema de existencia de bases.

38. Se ha observado que una función real coincide con $x \mapsto 2x$ sobre un conjunto finito de entradas. ¿Certifica esa prueba su linealidad? Para mostrar el límite de cualquier prueba finita de ese tipo, dado un conjunto finito $A \subseteq \mathbb{R}$, construya una función no lineal que coincida con $x \mapsto 2x$ en todos los puntos de A y también en cero.

39. Sea $P : V \to V$ lineal y $P^2 = P$. Defina $W = \{x : P(x) = x\}$ y $C = \{x : P(x) = 0\}$. Pruebe que son subespacios complementarios y que P es precisamente la proyección sobre W según C, sin suponer dimensión finita.

40. Sobre un cuerpo de característica dos, no está definida la expresión $(x + y)/2$. Rehaga la prueba de que conservar todas las combinaciones afines implica ser afín usando combinaciones de dos y de tres puntos. Explique por qué la prueba del texto funciona también en esa característica.

8.10. Soluciones razonadas

1. Para T_1, cada componente es una combinación fija de las entradas; al sustituir $a(x, y) + b(s, t)$ se obtiene $aT_1(x, y) + bT_1(s, t)$ por distributividad, luego es lineal. En T_2, el vector cero se envía a $(1, 0)$, lo que descarta la linealidad. En T_3, las entradas e_1, e_2 tienen salidas $(1, 0), (-2, 0)$, cuya suma es $(-1, 0)$, pero $T_3(e_1 + e_2) = (-1, 1)$. Falla la aditividad. Cada refutación usa un testigo explícito; la prueba positiva usa entradas arbitrarias.

2. La base de entrada es $b_1 = (1, 1)$, $b_2 = (1, -1)$ y $(x, y) = \frac{x+y}{2} b_1 + \frac{x-y}{2} b_2$. La superposición da $T(x, y) = ((x + y)/2, (3x + y)/2, (x - y)/2)$. Para $(3, 1)$, los coeficientes son $2, 1$, de modo que $T(3, 1) = 2(1, 2, 0) + (0, 1, 1) = (2, 5, 1)$. Sustituir $(3, 1)$ en la fórmula confirma el resultado.

3. La lista $(1, t, t^2)$ es base. Por el teorema 8.2, los valores elegidos definen una única transformación y su fórmula es $T(a + bt + ct^2) = a(1, 0) + b(0, 1) + c(1, -1) = (a + c, b - c)$. En el polinomio pedido obtenemos $(2 + 4, -3 - 4) = (6, -7)$. La construcción ya prueba linealidad; también puede verificarse directamente que la fórmula respeta combinaciones de coeficientes.

4. Los dos primeros valores determinan una transformación por la base usual, con fórmula $T(x, y) = x(2, 1) + y(-1, 2) = (2x - y, x + 2y)$. Su valor en $e_1 + e_2$ debe ser $(1, 3)$, luego la primera prescripción es compatible y la segunda es imposible. La relación de entrada $e_1 + e_2 - (e_1 + e_2) = 0$,

escrita con las tres posiciones de la lista, exige que se reste de la suma de las dos primeras salidas exactamente la tercera.

5. Sustituir $t = 2$ da $1-4+12-8 = 1$. Para polinomios arbitrarios, $E_2(ap+bq) = (ap+bq)(2) = ap(2) + bq(2)$, luego la evaluación es lineal. También se cumple $(pq)(2) = p(2)q(2)$, de modo que la evaluación preserva productos cuando el dominio los admite. El producto de dos elementos de P_3 puede salir de P_3; por eso la afirmación sobre productos se entiende en $\mathbb{R}[t]$, o en los pares cuyo producto permanezca en P_3. La linealidad, por sí misma, no había exigido esta compatibilidad adicional.

6. Sobre $\mathbb{R}$, $Dp = 2 + 6t + 12t^2$. Al reducir los coeficientes de p módulo dos queda $\overline{p} = 1 + t^2$, cuya derivada formal es $0 + 2t = 0$ en $\mathbb{F}_2[t]$. También la reducción de $2 + 6t + 12t^2$ da cero. La regla formal es compatible con la reducción, pero los enteros pares se anulan en el cuerpo; de ahí que un polinomio no constante pueda tener derivada cero.

7. Comparar entradas da $(aA + bB)^{\mathsf{T}} = aA^{\mathsf{T}} + bB^{\mathsf{T}}$ para escalares del cuerpo, por lo que la transposición es lineal. Para la transposición conjugada se obtiene $(aA+bB)^{\dagger} = \overline{a}A^{\dagger} + \overline{b}B^{\dagger}$. Cuando a, b son reales, coincide con la igualdad requerida y la regla es real lineal. Sobre $\mathbb{C}$ falla: con una matriz no nula A, $(iA)^{\dagger} = -iA^{\dagger} \neq iA^{\dagger}$. Por ejemplo, basta la matriz de una entrada (1).

8. La suma es $(S+T)(x,y) = (2x+y, 3y)$ y $(2S-T)(x,y) = (x+2y, 0)$. Componer en el orden escrito da $ST(x,y) = S(x,2y) = (x+2y, 2y)$, mientras que $TS(x,y) = T(x+y, y) = (x+y, 2y)$. En $(0,1)$ las salidas son $(2,2)$ y $(1,2)$, respectivamente. Sumar las salidas de dos funciones y aplicar una función después de otra son operaciones diferentes.

9. La descomposición es $(x,y) = (x-2y, 0) + y(2,1)$, por lo que $P(x,y) = (x-2y, 0)$. La fórmula respeta combinaciones lineales por distributividad. Al volver a aplicarla, la segunda entrada ya es cero y obtenemos $P(x-2y, 0) = (x-2y, 0)$; así $P^2 = P$. Finalmente, $P(5,2) = (1,0)$. Las direcciones descartadas no son perpendiculares al eje horizontal.

10. El desplazamiento es $b = f(0) = (3,1)$ y la parte lineal es $T(x,y) = (x+2y, -y)$. Para entradas $u = (x,y)$, $v = (s,t)$, la resta da $f(u) - f(v) = (x - s + 2(y-t), -(y-t)) = T(u-v)$. Las constantes se cancelan en la diferencia, aunque impiden que f sea lineal porque $f(0) \neq 0$.

11. Sea $v_1, \ldots, v_r$ una lista generadora donde T y S coinciden. Para cualquier x existe una expresión $x = \sum_j a_j v_j$, y entonces $T(x) = \sum_j a_j T(v_j) = \sum_j a_j S(v_j) = S(x)$. No hace falta que la expresión sea única: estamos evaluando dos funciones ya bien definidas y lineales mediante una expresión disponible. La independencia era necesaria para la construcción libre de valores, no para comparar funciones existentes sobre generadores.

12. Cada entrada se escribe de manera única como ab con $a \in \mathbb{F}$. Elegido cualquier $w \in W$, la fórmula $T(ab) = aw$ define una transformación lineal, y toda transformación tiene esa forma con $w = T(b)$. Para $V = W = \mathbb{F}$ y base (1), se obtiene $T(x) = xT(1) = cx$. El escalar c es único y puede ser cero; no se requiere invertibilidad.

13. La generación asegura que para cada x existen coeficientes con $x = \sum_j a_j b_j$; por ello la regla de salida propuesta alcanza todo el dominio. La independencia garantiza la unicidad de esos coeficientes, de modo que no hay dos instrucciones de salida que deban compararse. En una lista dependiente todavía podría definirse una transformación, pero haría falta comprobar compatibilidad entre representaciones, como en el teorema 8.3. Si la lista no genera, la propuesta sólo define valores sobre su espacio generado.

14. La función $x \mapsto x^2$ se anula en cero pero no es aditiva, pues $4 \neq 1 + 1$ al comparar $x = y = 1$. Para la segunda petición, $F(x,y) = xy$ se anula tanto en e_1 como en e_2 y toma el valor uno en $(1,1)$. Coincide con la función cero sobre una base sin coincidir en todo el espacio, porque F no es lineal. La hipótesis de linealidad no puede suprimirse del criterio de igualdad sobre una base.

15. La aditividad da $T(0) = 0$ por cancelación y $T(-x) = -T(x)$. Sumar x repetidamente da $T(kx) = kT(x)$ para enteros positivos; los opuestos extienden la identidad a todos los enteros. Si $r \neq 0$ es entero, aplicarla a x/r produce $T(x) = rT(x/r)$, por lo que $T(x/r) = T(x)/r$ en el codominio racional. Para $a = s/r \in \mathbb{Q}$, resulta $T(ax) = sT(x/r) = aT(x)$. Junto con aditividad, es la linealidad sobre $\mathbb{Q}$. El argumento alcanza los escalares racionales; no demuestra por sí solo homogeneidad para otros cuerpos.

16. Para $a \geq 0$, se cumple $|ax| = a|x|$. Para $a = -1$ y $x = 1$, el primer miembro vale uno y el segundo vale -1, así que la homogeneidad falla al admitir todos los escalares reales. También falla

aditividad en $x = 1$, $y = -1$: $|1 + (-1)| = 0$, pero $|1| + |-1| = 2$. Comprobar sólo intensidades no negativas no prueba la definición sobre un cuerpo que incluye los negativos.

17. Dados $u, v \in W$, la sobreyectividad proporciona $x, y \in V$ con $u = T(x)$ y $v = T(y)$. La linealidad da $au + bv = T(ax + by)$. Al aplicar la inversa, que existe por biyectividad, obtenemos $T^{-1}(au + bv) = ax + by = aT^{-1}(u) + bT^{-1}(v)$. Esto prueba linealidad. La inyectividad asegura que las preimágenes empleadas por la inversa son únicas; la sobreyectividad asegura que existen para todas las entradas de W.

18. El paso $S(T_1(x) + T_2(x)) = S(T_1(x)) + S(T_2(x))$ usa aditividad de S. Si elegimos funciones reales $S(z) = z^2$ y $T_1 = T_2 = I$, el miembro izquierdo es $4x^2$ y el derecho es $2x^2$; difieren para $x = 1$. No se necesita linealidad de T_1, T_2 para ese paso concreto, pero sí que sus valores puedan sumarse en el dominio de S. Para que toda la igualdad viva en Hom con las operaciones del capítulo, tomamos transformaciones lineales de tipos compatibles.

19. El espacio Hom contiene $S + (-1)T = S - T$, por la proposición 8.4. Las composiciones ST y TS son lineales por la proposición 8.6, y su diferencia también lo es. No son la misma operación: si $S = I$ y $T = 0$ sobre un espacio no nulo, $S - T = I$, mientras que $ST - TS = 0$. El primero resta dos valores; el segundo compara dos órdenes de aplicación.

20. Para $i = 1, 2, 3$, definimos $E_{i1}(x, y) = xe_i$ y $E_{i2}(x, y) = ye_i$, con e_i ahora en el codominio $\mathbb{R}^3$. Son las seis funciones del teorema 8.5 y forman una base de Hom. La transformación pedida es $2E_{11} - E_{12} + E_{21} + 3E_{22} + 4E_{32}$; el coeficiente de E_{31} es cero. Evaluar en e_1 da $(2, 1, 0)$ y en e_2 da $(-1, 3, 4)$, y estos valores verifican la expresión por la base del dominio.

21. Los vectores $(1, 0)$ y $(1, 1)$ son independientes y forman una base. Como $(2, 1) = (1, 0) + (1, 1)$, la única salida compatible es $c = 1 + 2 = 3$. La función resultante tiene $T(e_1) = 1$ y $T(e_2) = T(1, 1) - T(1, 0) = 1$, luego $T(x, y) = x + y$. Esta fórmula alcanza todos los datos cuando $c = 3$ y muestra existencia además de la condición necesaria.

22. Sea $u = (1, 1, 0)$ y $v = (0, 1, 1)$. La lista (u, v, e_2) es base: en una relación, las entradas primera y tercera anulan los coeficientes de u, v, y después la segunda anula el de e_2. Escojamos libremente $T(e_2) = a \in \mathbb{R}$. Entonces $T(e_1) = 1 - a$ y $T(e_3) = 2 - a$, por lo que todas las extensiones tienen la forma $T_a(x, y, z) = (1 - a)x + ay + (2 - a)z$. Cada fórmula es lineal y satisface los datos; toda extensión aparece al tomar $a = T(e_2)$. La libertad corresponde a la dirección añadida a la base del subespacio.

23. La única clase de relaciones entre u, v, w viene de $w = u + v$, y las salidas cumplen $3 = 1 + 2$. Por tanto definen una transformación sobre el plano generado por e_1, e_2. No generan $\mathbb{R}^3$, de modo que el valor en e_3 no está determinado. Elegido $a \in \mathbb{R}$, obtenemos $T_a(x, y, z) = x + 2y + az$. Todas estas transformaciones cumplen los datos y son distintas cuando cambia a, pues se distinguen en e_3.

24. Los tres valores sobre la base usual definen un único operador. Para $p = a + bt + ct^2$, su valor es $a+b(t+1)+c(t^2+2t+1) = p(t+1)$. La sustitución por un polinomio fijo respeta las combinaciones lineales y preserva aquí el grado máximo dos. En el polinomio pedido, $2(t+1)^2-(t+1)+3 = 2t^2+3t+4$. Se puede comprobar el mismo resultado sumando las tres imágenes prescritas con los coeficientes $3, -1, 2$.

25. En característica dos, la conmutatividad del producto da $(p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2 = p^2 + q^2$. Los únicos escalares de $\mathbb{F}_2$ son cero y uno, y $Q(ap) = aQ(p)$ para ambos, luego Q es lineal sobre ese cuerpo. En $\mathbb{F}_3[t]$, tomar $p = q = 1$ da $Q(1 + 1) = 2^2 = 1$, mientras que $Q(1) + Q(1) = 2$. La aditividad falla. La afirmación sobre homogeneidad del primer caso usa que los escalares pertenecen precisamente a $\mathbb{F}_2$, no sólo que el cuerpo tenga característica dos.

26. La suma y el producto por escalares de sucesiones se efectúan entrada por entrada. Desplazar los índices respeta ambas operaciones, al igual que insertar un cero inicial, por lo que L y R son lineales. Las composiciones son $LR(x_0, x_1, \ldots) = (x_0, x_1, \ldots)$ y $RL(x_0, x_1, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$. Así $LR = I$, pero $RL \neq I$, como se ve en $(1, 0, 0, \ldots)$. La segunda composición es una proyección que descarta la primera entrada. No se han usado sumas infinitas: las operaciones son definiciones punto a punto.

27. La traslación $f(x, y) = (x + 1, y)$ es afín con parte lineal identidad y desplazamiento $(1, 0)$; no es lineal porque mueve el cero. La transformación $P(x, y) = (x, 0)$ envía el eje vertical completo al punto cero. Por tanto, una definición basada sólo en imágenes de rectas excluiría proyecciones

lineales si exigiera rectas no degeneradas, y admitiría traslaciones no lineales si se limitara a conservar rectas. La definición mediante combinaciones controla ambos casos.

28. Los coeficientes $1/2, 1/2$ suman uno en $\mathbb{R}$, luego una aplicación afín satisface $f((x+y)/2) = (f(x)+f(y))/2$. Para $f(x) = 3x+2$, ambos miembros valen $3(x+y)/2+2$. En cambio, $f(x+y) = 3x+3y+2$ y $f(x)+f(y) = 3x+3y+4$. La diferencia de dos unidades procede de contar el desplazamiento dos veces al sumar salidas. Conservar puntos medios es una consecuencia de afinidad; aquí no se afirma un recíproco sin otras hipótesis.

29. Sustituyendo, $g(f(x)) = S(T(x)+b)+c = ST(x)+S(b)+c$. La parte lineal es ST y el desplazamiento es $S(b)+c$. Para un ejemplo de orden, sean $T(x) = 2x$ en $\mathbb{R}^2$ y las traslaciones $\tau_1(x) = x+e_1$, $\tau_2(x) = x+e_2$. Entonces $\tau_2\tau_1 T(x) = 2x+e_1+e_2$, mientras que $T\tau_2\tau_1(x) = 2x+2e_1+2e_2$. Las dos traslaciones conmutan entre sí; al atravesar el operador T, su desplazamiento se duplica y el resultado cambia.

30. Una transformación real lineal de la recta es $T(x) = ax$, y $T(2) = 6$ obliga a $a = 3$, por lo que hay exactamente una. Una función afín tiene forma $f(x) = ax+b$. Los datos dan $2a+b = 6$, $3a+b = 8$; restar produce $a = 2$ y después $b = 2$. La función es $f(x) = 2x+2$. En el caso lineal sólo se elige el valor sobre una base; el caso afín tiene además un desplazamiento independiente que requiere otro dato para determinarlo.

31. Elija una base de W y extiéndala a una base de V por C07. Conserve en la primera parte los valores dados por S y elija cualquier salida para los vectores añadidos. El teorema 8.2 construye una transformación en V, y el ejercicio 11 prueba que coincide con S sobre W porque coincide en su base. Si $W \neq V$, hay al menos un vector añadido; si $U \neq \{0\}$, podemos asignarle cero en una extensión y un vector no nulo en otra, manteniendo iguales las demás elecciones. Las dos extensiones se distinguen en ese vector. Si no hay vectores añadidos o el codominio es nulo, esa libertad desaparece.

32. Cada uno de los n vectores de una base de V puede enviarse libremente a cualquiera de los q^m vectores de W. El teorema 8.2 garantiza que cada elección da exactamente una transformación y que elecciones distintas dan transformaciones distintas. Hay, por tanto, q^{mn}. Si se han fijado valores en k vectores independientes, los extendemos a una base y quedan $n-k$ elecciones libres; el número es $q^{m(n-k)}$. No hay condición de compatibilidad adicional porque los primeros vectores son independientes. Cuando $n = 0$ o $m = 0$, la fórmula da uno, como corresponde a la única transformación cero; necesariamente $k = 0$ si el dominio es nulo.

33. Escribamos $p = \sum_i a_i t^i$, $q = \sum_j b_j t^j$, con sumas finitas. En el producto, cada par de monomios aporta $a_i b_j t^{i+j}$; al derivarlo aporta $(i+j)a_i b_j t^{i+j-1}$ cuando $i+j \geq 1$. Separar el factor $i+j$ en sus dos sumandos distribuye esa contribución entre $i a_i b_j t^{i-1+j}$ y $j a_i b_j t^{i+j-1}$, correspondientes a $(Dp)q$ y $p(Dq)$. Los términos con índice cero en el factor derivado se omiten, por lo que no se introduce t^{-1}. Sumar todos los pares prueba la regla en cualquier característica. En consecuencia, $D(qp) - qDp = (Dq)p$, es decir, $DM_q - M_q D = M_{Dq}$ como igualdad de operadores.

34. Primero, $D(T1) = T(D1) = 0$. En $P_2(\mathbb{R})$ esto obliga a $T1 = a$ constante, porque la derivada de $r+st+ut^2$ es $s+2ut$. Después, $D(Tt) = T(1) = a$, así que $Tt = b+at$ para alguna constante b. Finalmente, $D(Tt^2) = T(2t) = 2b+2at$, lo que obliga a $Tt^2 = c+2bt+at^2$. Los tres parámetros a, b, c son libres: por prescripción sobre la base definen un operador, y las igualdades verificadas prueban $DT = TD$ sobre esa base y, por linealidad, en todo el espacio. Como $D^2(t^2) = 2$, la expresión es $T = aI + bD + (c/2)D^2$. Las divisiones por dos y el criterio de derivada nula se usan aquí sobre $\mathbb{R}$.

35. La lista nula de coeficientes pertenece a R_0. Si $a, b \in R_0$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, se tiene $\sum_j (\alpha a_j + \beta b_j)v_j = \alpha \sum_j a_j v_j + \beta \sum_j b_j v_j = 0$, por lo que R_0 es subespacio de $\mathbb{F}^r$. Tiene una base finita por C07. Si las salidas propuestas anulan las relaciones de esa base, anulan cualquier combinación de ellas: para $a = \sum_\ell c_\ell r^{(\ell)}$, la suma $\sum_j a_j w_j$ es $\sum_\ell c_\ell \sum_j r_j^{(\ell)} w_j = 0$. La condición de compatibilidad queda verificada para todas las relaciones. El recíproco es inmediato porque los vectores de una base de relaciones son relaciones particulares.

36. Los polinomios $1, t, 1+t+t^2$ forman una base: en una relación, el coeficiente de t^2 anula el tercer escalar y después los otros dos se anulan. El cuarto vector $1+t$ es la suma de los dos primeros. Su salida propuesta $(1,1)$ es justamente $(1,0)+(0,1)$, así que respeta la relación y los datos son compatibles. El valor de t^2 debe ser $(2,3)-(1,0)-(0,1) = (1,2)$. Por tanto,

$T(a+bt+ct^2) = (a+c, b+2c)$. La fórmula verifica los cuatro datos. Como los primeros tres forman una base, toda relación entre los cuatro generadores es múltiplo de la ya comprobada; el ejercicio 35 explica por qué no quedan obligaciones ocultas.

37. Por definición de base algebraica, cada x tiene una representación única con soporte finito, $x = \sum_{b\in J} a_b b$ para algún conjunto finito $J \subseteq \mathcal{B}$. Definimos $T(x) = \sum_{b\in J} a_b w_b$. Añadir posiciones con coeficiente cero no altera la salida, y la independencia de la base garantiza que dos representaciones tienen los mismos coeficientes después de reunir sus soportes finitos. La suma de dos vectores sólo requiere la unión de dos soportes finitos, y el cálculo del teorema 8.2 prueba linealidad. La superposición obliga a la misma fórmula para cualquier transformación con los valores prescritos, lo que prueba unicidad. La base ya se entrega como hipótesis; no se construye una base de un espacio arbitrario ni se admite una suma infinita de salidas.

38. Un conjunto finito de pruebas no controla todas las entradas reales. Elijamos $c \notin A \cup \{0\}$ y definamos $f(x) = 2x$ para $x \neq c$, pero $f(c) = 2c + 1$. Coincide con la regla lineal en todos los puntos pedidos y en cero. No es lineal: elegimos d distinto de 0 y c; entonces ni d ni $c - d$ son c, y $f(d) + f(c - d) = 2c$, mientras que $f(d + (c - d)) = f(c) = 2c + 1$. Tenemos una falla explícita de aditividad fuera de los datos de control. La construcción se hace para cada conjunto finito fijado; no se afirma que una misma función distinta de $2x$ coincida con él en todas las entradas reales.

39. Ambos conjuntos contienen cero. Si $x, y \in W$, entonces $P(ax+by) = aP(x)+bP(y) = ax+by$, así que W es subespacio; si $x, y \in C$, la misma cuenta da cero y prueba que C es subespacio. Para cualquier v, la igualdad $v = P(v) + (v - P(v))$ da una suma con primer término en W, pues $P^2(v) = P(v)$, y segundo en C, pues $P(v - P(v)) = P(v) - P^2(v) = 0$. Si $z \in W \cap C$, entonces $z = P(z) = 0$, así que la intersección es nula. La descomposición es única y P conserva exactamente su primer sumando. No se usó una base ni una cota de dimensión.

40. Definimos $g(x) = f(x) - f(0)$. Para homogeneidad usamos los dos puntos $x, 0$ y coeficientes $a, 1 - a$, cuya suma es uno: $f(ax) = af(x) + (1 - a)f(0)$, luego $g(ax) = ag(x)$. Para aditividad usamos $x, y, 0$ con coeficientes $1, 1, -1$, cuya suma sigue siendo uno; la conservación da $f(x + y) = f(x) + f(y) - f(0)$ y, al restar $f(0)$, resulta $g(x + y) = g(x) + g(y)$. En característica dos, $-1 = 1$ y $1 + 1 + 1 = 1$, por lo que esa combinación de tres puntos sigue siendo válida. No se ha dividido por dos. La igualdad completa para combinaciones afines, y no una fórmula de puntos medios inexistente, es la hipótesis que permite el argumento.

Lecturas y referencias

La definición, los ejemplos y la prescripción sobre una base pueden contrastarse con Hoffman y Kunze, *Linear Algebra*, 2.ª edición, §3.1; Friedberg, Insel y Spence, *Linear Algebra*, 5.ª edición, §2.1, desarrolla estos temas junto con núcleo e imagen, que aquí se reservan a C09. Nathaniel Johnston, *Advanced Linear and Matrix Algebra* (2021), §1.2.3, compara transformaciones sobre vectores, matrices y polinomios. Axler, *Linear Algebra Done Right*, 4.ª edición, §3A, estudia el espacio de transformaciones, la prescripción sobre una base y la composición. La prueba de dimensión de Hom se construye directamente con transformaciones elementales; la representación matricial sistemática aparecerá en C12.

Capítulo 9

Núcleo, imagen y rango-nulidad

Una medición registra la suma de dos cantidades y, por separado, una tercera. Su regla es $T(x, y, z) = (x + y, z)$. Las entradas $(2, 0, 1)$ y $(0, 2, 1)$ dan la misma salida $(2, 1)$, y podemos desplazarnos de una a otra sin cambiar lo observado: aumentar la primera cantidad y disminuir la segunda en la misma medida deja intactas ambas mediciones. Las entradas compatibles con esa salida forman toda la recta $(2, 0, 1) + t(1, -1, 0)$.

La dirección $(1, -1, 0)$ se reconoce porque su propia salida es cero. En cambio, cualquier par (a, b) puede aparecer como resultado de la medición, ya que $T(a, 0, b) = (a, b)$. En esta transformación, una dirección de entrada queda oculta mientras dos direcciones de salida pueden variar libremente. La igualdad $3 = 1 + 2$ sugiere un balance que debemos justificar para transformaciones entre espacios cualesquiera, incluidos los que están formados por polinomios, matrices o funciones.

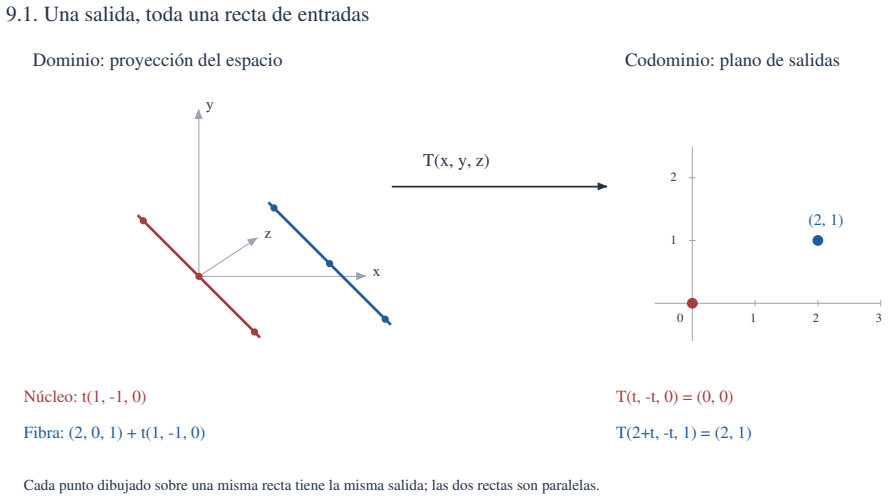


Figura 9.1. Trasladar una entrada en la dirección $(1, -1, 0)$ no cambia su salida. La proyección utilizada para dibujar el dominio tridimensional conserva incidencias y paralelismo, sin representar sus ángulos o longitudes espaciales.

Trabajaremos sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ común al dominio y al codominio. Los ejemplos numéricos son reales salvo indicación contraria. Se presuponen la eliminación de C01–C03, las bases de C07 y la linealidad de C08. Las afirmaciones sobre dimensiones enteras llevarán una hipótesis de finitud; las nociones de núcleo e imagen no la necesitan.

9.1. Qué se pierde y qué se alcanza

Definición 9.1 (núcleo e imagen). Para una transformación lineal $T : V \to W$, su **núcleo** y su **imagen** son

$$\ker T = \{x \in V : T(x) = 0_W\}, \qquad \operatorname{im} T = \{T(x) : x \in V\}.$$

El núcleo es un conjunto de entradas; la imagen es un conjunto de salidas. Aunque una matriz represente ambos cálculos, los dos objetos viven en espacios diferentes. En la transformación de la apertura, $\ker T = \{(t, -t, 0) : t \in \mathbb{R}\}$ está en $\mathbb{R}^3$, mientras que $\operatorname{im} T = \mathbb{R}^2$ está en el codominio.

Proposición 9.1. El núcleo de $T : V \to W$ es un subespacio de V y su imagen es un subespacio de W.

Demostración. Como $T(0_V) = 0_W$, el núcleo contiene 0_V. Si $x, y \in \ker T$ y $a, b \in \mathbb{F}$, la linealidad da $T(ax + by) = aT(x) + bT(y) = 0_W$, así que el núcleo es cerrado por combinaciones lineales.

La imagen contiene $0_W = T(0_V)$. Si u, v pertenecen a la imagen, existen entradas x, y con $T(x) = u$, $T(y) = v$. Para escalares a, b, tenemos $au + bv = T(ax + by)$, de modo que la combinación también pertenece a la imagen. Los criterios de subespacio de C05 completan ambas verificaciones. □

Encontrar una imagen exige demostrar qué salidas se obtienen y que no falta ninguna de las que declaramos posibles. Por ejemplo, para $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $S(x, y, z) = (x + y, z, x + y + z)$, toda salida (a, b, c) satisface $c = a + b$. Recíprocamente, si se cumple esa ecuación, la entrada $(a, 0, b)$ produce (a, b, c). Por tanto, $\operatorname{im} S$ es exactamente el plano $c = a + b$, aunque el codominio sea todo $\mathbb{R}^3$.

Una función es **sobreyectiva** si su imagen coincide con su codominio. La regla anterior no es sobreyectiva hacia $\mathbb{R}^3$, pero sí lo es si elegimos como codominio el plano $c = a + b$. El núcleo y las salidas alcanzadas permanecen iguales; cambia la afirmación de sobreyectividad porque ésta compara las salidas con el codominio declarado.

Proposición 9.2 (imágenes de generadores). Si una lista $(v_1, \dots, v_r)$ genera V, entonces $\operatorname{im} T = \operatorname{span}(T(v_1), \dots, T(v_r))$.

Demostración. Cada imagen $T(v_j)$ pertenece a $\operatorname{im} T$, que es subespacio, de modo que contiene todo el espacio generado por ellas. En sentido contrario, cualquier elemento de la imagen es $T(x)$ y podemos escribir $x = \sum_j a_j v_j$. La superposición de C08 da $T(x) = \sum_j a_j T(v_j)$, que pertenece al espacio generado indicado. □

Las imágenes de una base generan la imagen de la transformación, pero pueden dejar de ser independientes. Una proyección puede enviar uno de sus vectores a cero o dos vectores distintos a la misma salida. Para obtener una base de la imagen debemos extraerla de la lista de salidas, como en C07, o escoger con cuidado una base del dominio que tenga en cuenta el núcleo.

9.2. Reconocer la inyectividad mirando el cero

Una función es inyectiva cuando dos entradas con la misma salida necesariamente coinciden. Para una transformación lineal, la diferencia entre dos entradas con la misma salida pertenece al núcleo: $T(x) = T(y)$ equivale a $T(x - y) = 0$. Esa observación convierte una comparación entre todas las parejas de entradas en una pregunta sobre las entradas que producen cero.

Teorema 9.3. Una transformación lineal $T : V \to W$ es inyectiva si y sólo si $\ker T = \{0_V\}$.

Demostración. Si T es inyectiva y $x \in \ker T$, entonces $T(x) = 0_W = T(0_V)$ obliga a $x = 0_V$. La inclusión contraria ya se conoce, por lo que el núcleo es exactamente $\{0_V\}$.

Supongamos ahora que el núcleo sólo contiene al cero. Si $T(x) = T(y)$, la linealidad da $T(x - y) = 0_W$, así que $x - y \in \ker T$ y, por la hipótesis, $x - y = 0_V$. En consecuencia, $x = y$ y T es inyectiva. □

La finitud de dimensión no intervino. Tampoco basta que el núcleo sea pequeño en un sentido informal: un solo vector no nulo del núcleo proporciona ya dos entradas distintas, ese vector y el cero, con una misma salida. Sobre un cuerpo finito, esas coincidencias siguen existiendo aunque las fibras sólo contengan un número finito de puntos.

Si T es inyectiva, envía cualquier lista independiente a una lista independiente. En efecto, una relación $\sum_j a_j T(v_j) = 0$ implica $T(\sum_j a_j v_j) = 0$; el núcleo trivial da $\sum_j a_j v_j = 0$ y la independencia de la lista original anula todos los coeficientes. El recíproco puede reconocerse en listas de un solo vector: si ningún vector no nulo puede enviarse a cero, el núcleo es trivial.

9.3. Rango y nulidad: construir las dos partes de una base

Definición 9.2. Cuando los subespacios correspondientes tienen dimensión finita, el **rango** de T es $\operatorname{rg} T = \dim(\operatorname{im} T)$ y su **nulidad** es $\operatorname{nul} T = \dim(\ker T)$.

Si V es de dimensión finita, su núcleo es finito por C07 y su imagen está generada por las imágenes de una base finita, por la proposición 9.2. En ese caso ambas cantidades están definidas, incluso si el codominio W tiene dimensión infinita.

Teorema 9.4 (rango-nulidad). Si $T : V \to W$ es lineal y $\dim V = n < \infty$, entonces

$$\dim V = \operatorname{nul} T + \operatorname{rg} T.$$

Demostración. Comenzamos por una base $(u_1, \dots, u_k)$ del núcleo y la extendemos hasta una base $(u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_r)$ de V. Tenemos $n = k + r$. Los vectores del primer bloque desaparecen bajo T; probaremos que las imágenes del segundo bloque forman una base de la imagen. Esa elección es lo que permitirá contar sin confundir generadores con vectores independientes.

Si $x = \sum_i a_i u_i + \sum_j b_j v_j$, al aplicar T queda $T(x) = \sum_j b_j T(v_j)$, porque $T(u_i) = 0$. Por tanto, las imágenes $T(v_1), \dots, T(v_r)$ generan $\operatorname{im} T$.

Supongamos que satisfacen una relación $\sum_j c_j T(v_j) = 0$. La linealidad nos dice que $z = \sum_j c_j v_j$ pertenece al núcleo. Como los u_i forman una base de ese núcleo, podemos escribir también $z = \sum_i d_i u_i$. Al igualar las dos expresiones obtenemos

$$\sum_{j=1}^{r} c_j v_j - \sum_{i=1}^{k} d_i u_i = 0.$$

Ésta es una relación en la base completa del dominio. Su independencia anula todos los c_j y d_i. Las imágenes del segundo bloque son, por tanto, independientes y forman una base de la imagen. Su dimensión es r, mientras que la del núcleo es k, de donde $\operatorname{rg} T + \operatorname{nul} T = r + k = n$.

Si $k = 0$ o $r = 0$, el bloque correspondiente es vacío y los mismos argumentos valen con sumas vacías. Esto incluye al espacio nulo, a la transformación cero y a las transformaciones inyectivas. □

Para la medición inicial, una base adaptada del dominio es $((1,-1,0),(1,0,0),(0,0,1))$. El primer vector genera el núcleo; los dos restantes se envían a $(1,0)$ y $(0,1)$, que forman una base de la imagen. Hemos hecho explícita la descomposición $3 = 1 + 2$ sin atribuir significado de dimensión a un simple conteo de ejemplos.

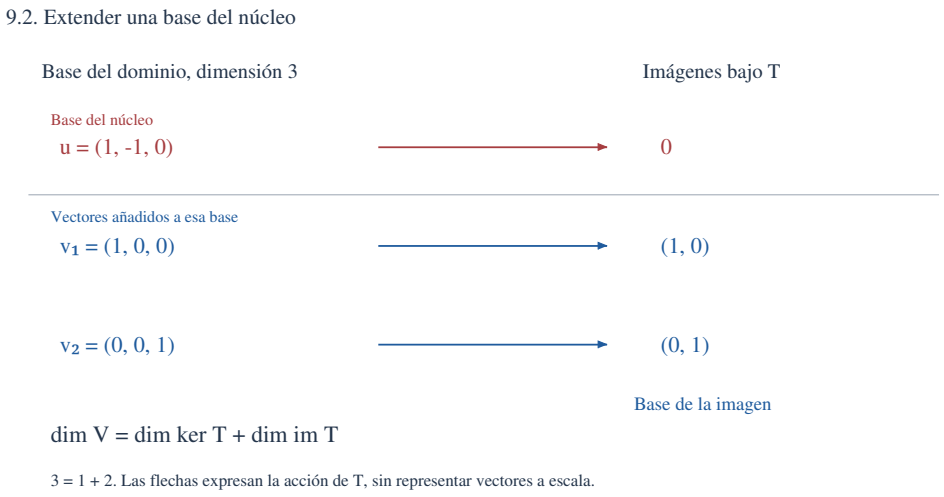


Figura 9.2. Los bloques tienen funciones distintas: un vector básico se anula y las otras dos imágenes son independientes. Las flechas representan la aplicación de T, no la posición geométrica de tres vectores en un mismo plano.

La derivación formal $D : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ ofrece otro ejemplo. La condición $D(a+bt+ct^2+dt^3) = b + 2ct + 3dt^2 = 0$ fuerza $b = c = d = 0$, de modo que el núcleo es el espacio de constantes, de dimensión uno. La imagen es $P_2(\mathbb{R})$: no se producen términos de grado tres y todo $a + bt + ct^2$ se obtiene derivando $at + (b/2)t^2 + (c/3)t^3$. El rango es tres y $4 = 1 + 3$. Las divisiones por dos y tres son válidas aquí sobre $\mathbb{R}$; sobre otros cuerpos debemos volver a examinar los coeficientes.

9.4. Existencia y unicidad bajo restricciones de dimensión

El teorema permite reconocer obstáculos antes de calcular. Si V, W son finitos, la imagen es un subespacio de W, de modo que $\operatorname{rg} T \le \dim W$; rango-nulidad también da $\operatorname{rg} T \le \dim V$. Si $\dim V > \dim W$, resulta $\operatorname{nul} T \ge \dim V - \dim W > 0$, por lo que ninguna transformación lineal

$V \to W$ puede ser inyectiva. Si $\dim V < \dim W$, ninguna puede ser sobreyectiva porque su imagen tiene dimensión demasiado pequeña.

Corolario 9.5. Para una transformación lineal entre dos espacios de la misma dimensión finita, son equivalentes: ser inyectiva, ser sobreyectiva y ser biyectiva.

Demostración. Escribamos $\dim V = \dim W = n$. Si T es inyectiva, el núcleo tiene dimensión cero y rango-nulidad da $\operatorname{rg} T = n$. La imagen es un subespacio de W con toda su dimensión, luego coincide con W por C07 y T es sobreyectiva. Si T es sobreyectiva, su rango es n y rango-nulidad da nulidad cero; el núcleo es entonces el subespacio nulo y el teorema 9.3 prueba inyectividad. La biyectividad reúne ambas propiedades. □

La igualdad de dimensiones y su finitud son necesarias en esta conclusión. La inclusión $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $J(x, y) = (x, y, 0)$, es inyectiva sin ser sobreyectiva; la medición de la apertura es sobreyectiva sin ser inyectiva. En el espacio de todas las sucesiones, el desplazamiento a la derecha $R(x_0, x_1, \ldots) = (0, x_0, x_1, \ldots)$ es inyectivo pero no alcanza una sucesión con primera entrada uno. El desplazamiento a la izquierda $L(x_0, x_1, \ldots) = (x_1, x_2, \ldots)$ alcanza toda sucesión, pero pierde la primera entrada. Estos operadores de C08 actúan sobre un mismo espacio infinito y separan las dos propiedades.

Las mismas ideas aclaran los sistemas cuadrados de C03: para $A \in M_n(\mathbb{F})$, si $Ax = 0$ sólo admite la solución nula, entonces T_A es inyectiva y, por el corolario, cada sistema $Ax = b$ tiene exactamente una solución. No basta esta afirmación para matrices rectangulares sin comparar sus dimensiones.

9.5. Todas las soluciones de una misma salida

Para $w \in W$, la **fibra** de T sobre w es el conjunto $T^{-1}(\{w\}) = \{x \in V : T(x) = w\}$. La notación designa una preimagen de conjunto; no supone que T tenga función inversa.

Teorema 9.6 (fibras como traslaciones). La fibra sobre w es vacía si $w \notin \operatorname{im} T$. Si $T(p) = w$, entonces

$$T^{-1}(\{w\}) = p + \ker T = \{p + u : u \in \ker T\}.$$

Demostración. No pertenecer a la imagen significa precisamente que no existe una entrada con esa salida. Si existe p y $T(x) = w = T(p)$, entonces $T(x - p) = 0$, por lo que $x - p \in \ker T$ y $x \in p + \ker T$. Recíprocamente, para $u \in \ker T$ se tiene $T(p + u) = T(p) + T(u) = w$, de modo que $p + u$ pertenece a la fibra. Las dos inclusiones prueban la igualdad. □

El punto particular p no es único si el núcleo es no trivial. Elegir otro punto p' de la misma fibra no cambia la traslación como conjunto, porque $p' - p \in \ker T$. Todas las fibras no vacías tienen las mismas direcciones y la misma cantidad de parámetros independientes, dada en dimensión finita por $\operatorname{nul} T$.

En la apertura, sobre (a, b) podemos elegir $p = (a, 0, b)$ y obtener $(a + t, -t, b)$ para todas las soluciones. Para la transformación $S(x, y, z) = (x + y, z, x + y + z)$ de §9.1, la salida (a, b, c) tiene fibra vacía cuando $c \neq a + b$ y, cuando es compatible, tiene la misma familia $(a + t, -t, b)$. El núcleo regula la unicidad; la imagen regula la existencia.

Si $w \neq 0$, una fibra no vacía no contiene el cero y no es un subespacio vectorial con las operaciones heredadas. Es un subespacio afín, una traslación del núcleo. Sobre un cuerpo finito de q elementos, si la nulidad es k, cada fibra no vacía contiene exactamente q^k entradas: la traslación $u \mapsto p + u$ es una correspondencia biyectiva con el núcleo. Esta afirmación sustituye a «hay infinitas soluciones» cuando el cuerpo es finito.

9.6. La misma dimensión en filas y columnas

Para $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$, el producto Ax es la combinación de sus columnas con coeficientes dados por las entradas de x. Por tanto, $\operatorname{im} T_A$ es el **espacio de columnas** de A y $\ker T_A$ es el espacio de soluciones de $Ax = 0$. Llamamos **espacio de filas** al subespacio de $\mathbb{F}^n$ generado por las filas de A. Su dimensión y la del espacio de columnas se llaman, respectivamente, rango por filas y rango por columnas.

Teorema 9.7. Los rangos por filas y por columnas de una matriz son iguales al número de pivotes de su forma escalonada reducida. Ese número es también $\operatorname{rg} T_A$. En particular, $\operatorname{rg}(A^{\mathsf{T}}) = \operatorname{rg} A$.

Demostración. Sea R la forma reducida de A y sea r su número de pivotes. Cada operación elemental de fila sustituye filas por combinaciones de las anteriores; por ello el espacio de filas nuevo está contenido en el anterior. La operación inversa proporciona la inclusión contraria, así que el espacio de filas se conserva. Las r filas no nulas de R generan su espacio de filas y son independientes: en la columna de pivote correspondiente a cada una, una relación entre ellas se reduce al coeficiente de esa fila. El rango por filas de A es, por tanto, r.

La proposición 7.6 de C07 prueba que las columnas **originales** de A situadas en las posiciones de pivote forman una base de su espacio de columnas. Luego el rango por columnas también es r. Como ese espacio es $\operatorname{im} T_A$, el rango de la transformación es el mismo. Finalmente, las columnas de A^{T} son las filas de A, de modo que el rango por columnas de A^{T} coincide con el rango por filas de A, y ambos son iguales a $\operatorname{rg} A$. $\square$

Los dos espacios no son iguales como conjuntos: están en $\mathbb{F}^m$ y $\mathbb{F}^n$, respectivamente, y pueden tener incluso distinto número de entradas por vector. El teorema afirma igualdad de dimensiones. Tampoco afirma que las operaciones de fila conserven el espacio de columnas; conservan sus relaciones de dependencia y las posiciones que permiten seleccionar una base en las columnas originales.

Consideremos el sistema $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} a \\ b_0 \\ c \end{pmatrix}.$$

La tercera fila de coeficientes es suma de las dos primeras. Reducir la matriz ampliada produce la última ecuación $0 = c - a - b_0$, de modo que la imagen está formada por las columnas (a, b_0, c) con $c = a + b_0$. Las dos primeras columnas originales forman una base de la imagen, el rango es dos y la nulidad es $4 - 2 = 2$. Tomando $x_3 = s$, $x_4 = t$, la solución general compatible es

$$x = (a, b_0, 0, 0) + s(-1, -1, 1, 0) + t(-2, 1, 0, 1).$$

La eliminación muestra los parámetros y rango-nulidad justifica su número. Con cuatro incógnitas y sólo dos condiciones independientes, una salida compatible no puede determinar una entrada única.

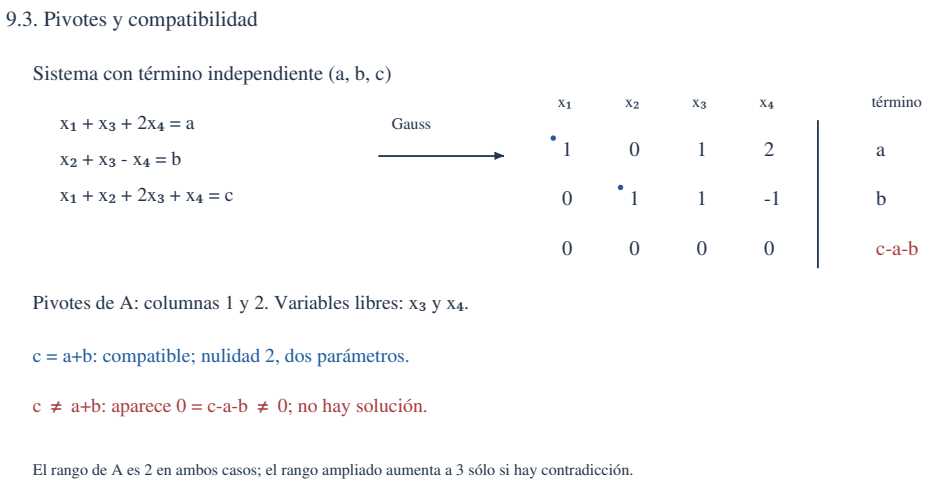


Figura 9.3. En el dibujo, b abrevia b_0. Los pivotes que cuentan el rango pertenecen a la matriz de coeficientes. Si $c - a - b_0 \neq 0$, aparece un pivote adicional en la última columna ampliada que certifica incompatibilidad, sin aumentar el rango de A.

9.7. Restringir una transformación y componerla

Si $U \subseteq V$ es un subespacio, la **restricción** $T|_U : U \to W$ usa la misma regla de T, pero sólo acepta entradas de U. Sigue siendo lineal; su núcleo es $U \cap \ker T$ y su imagen es $T(U)$.

Proposición 9.8 (restricción y rango de una composición). Si U tiene dimensión finita, entonces

$$\dim T(U) = \dim U - \dim(U \cap \ker T).$$

Si $T : X \to V$ y $S : V \to W$ tienen rangos finitos, se cumple $\operatorname{rg}(ST) \le \min(\operatorname{rg} S, \operatorname{rg} T)$. Si además $\dim V = m < \infty$, entonces

$$\operatorname{rg}(ST) \ge \operatorname{rg} T + \operatorname{rg} S - m.$$

Demostración. La primera identidad es rango-nulidad aplicado a $T|_U$, con el núcleo y la imagen que acabamos de identificar.

Para la composición, $\operatorname{im}(ST) = S(\operatorname{im} T)$. Esta imagen está contenida en $\operatorname{im} S$, lo que da una cota superior. Aplicar la primera identidad a la restricción de S al subespacio finito $\operatorname{im} T$ da también

$$\operatorname{rg}(ST) = \operatorname{rg} T - \dim(\operatorname{im} T \cap \ker S) \le \operatorname{rg} T.$$

Si V tiene dimensión m, entonces $\dim \ker S = m - \operatorname{rg} S$. La intersección no puede superar esa dimensión, de modo que la igualdad anterior da la cota inferior anunciada. □

La pérdida adicional al aplicar S depende de qué parte de las salidas de T cae en el núcleo de S. Si esa intersección es cero, la composición conserva todo el rango de T, aunque S pueda anular direcciones que nunca se alcanzan desde T. Si, en cambio, la imagen completa de T está dentro del núcleo de S, la composición es cero.

9.8. Diseñar una transformación con núcleo e imagen dados

Los subespacios obtenidos al estudiar una transformación también pueden usarse como datos de un problema de construcción. No basta escoger un núcleo y una imagen de tamaños arbitrarios: rango-nulidad relaciona sus dimensiones.

Teorema 9.9 (construcción con datos estructurales). Sea V de dimensión finita, $K \subseteq V$ un subespacio y $I \subseteq W$ un subespacio finito. Existe una transformación lineal $T : V \to W$ con $\ker T = K$ e $\operatorname{im} T = I$ si y sólo si $\dim K + \dim I = \dim V$.

Demostración. La necesidad es rango-nulidad. Para probar suficiencia, tomamos una base $(u_1, \dots, u_k)$ de K y la extendemos a una base $(u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_r)$ de V. La igualdad de dimensiones dice que $r = \dim I$; elijamos una base $(w_1, \dots, w_r)$ de I. Por C08 existe una única transformación con $T(u_i) = 0$ y $T(v_j) = w_j$ sobre esa base elegida.

Su imagen es I, porque esas imágenes generan exactamente I. Si $x = \sum_i a_i u_i + \sum_j b_j v_j$ y $T(x) = 0$, entonces $\sum_j b_j w_j = 0$. La independencia de los w_j fuerza $b_j = 0$ para todo j, por lo que $x \in K$. La inclusión $K \subseteq \ker T$ ya se deduce de los valores prescritos. Así, el núcleo es exactamente K. La construcción admite bloques vacíos y funciona también para rango cero o núcleo trivial. □

Por ejemplo, para construir $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ con núcleo $K = \operatorname{span}(1, 1, 0)$ e imagen toda $\mathbb{R}^2$, completamos ese generador con e_2, e_3. Les asignamos salidas $0, (1, 0), (0, 1)$, respectivamente. Como $(x, y, z) = x(1, 1, 0) + (y - x)e_2 + ze_3$, resulta $T(x, y, z) = (y - x, z)$. Otras bases y otras asignaciones independientes pueden dar transformaciones diferentes con los mismos subespacios; el teorema garantiza existencia, sin afirmar una elección canónica.

9.9. Ejercicios

Los problemas comienzan con descripciones de núcleos, imágenes y fibras; después piden construir pruebas, detectar errores y diseñar transformaciones. Todos requieren justificación. Los espacios son reales salvo indicación contraria.

Calcular y representar. 1. Para $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x + y, z)$, encuentre bases del núcleo y de la imagen, rango y nulidad. Describa la fibra sobre $(2, 1)$ usando dos soluciones particulares distintas.

2. Para $S(x, y, z) = (x + y, z, x + y + z)$, determine núcleo, imagen y fibras sobre $(1, 2, 3)$ y $(1, 2, 4)$. Distinga imagen y codominio.

3. Considere $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Halle bases de sus espacios de filas y columnas y de las soluciones de $Ax = 0$. Resuelva $Ax = (2, 1, 3)^{\mathsf{T}}$ y decida qué sucede con $Ax = (2, 1, 4)^{\mathsf{T}}$.

4. Sea $E : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$, $E(p) = (p(0), p(1))$. Determine núcleo, imagen, rango, nulidad y todos los polinomios con $E(p) = (2, 5)$.

5. Para $D : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$, determine núcleo e imagen y resuelva $Dp = 2 + 6t$. Repita el cálculo de núcleo e imagen sobre $\mathbb{F}_2$ y compare las dimensiones.

6. Sea $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $P(x, y) = (x - 2y, 0)$. Calcule núcleo, imagen y todas las fibras. Explique geométricamente cuáles son vacías.

7. Para $T_a(x, y, z) = (x + y, z, x + y + az)$, determine rango y nulidad según $a \in \mathbb{R}$. ¿Hay algún valor para el cual sea inyectiva o sobreyectiva hacia $\mathbb{R}^3$?

8. Sea $T_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T_a(x, y) = (x + ay, ax + y)$. Determine para qué valores de a es biyectiva y describa núcleo e imagen en los valores excepcionales.

9. Calcule núcleo, imagen, rango y nulidad de la identidad y de la transformación cero $V \to W$, con $\dim V = n < \infty$. Incluya los casos $V = \{0\}$ y $W = \{0\}$ donde tengan sentido.

10. Sobre $\mathbb{F}_2$, halle la cantidad de soluciones de $x + y + z = 1$ y enumérelas. Compare con el número de soluciones de la ecuación homogénea asociada.

Reconstruir y aplicar pruebas. 11. Pruebe que $T(x) = T(y)$ equivale a $x - y \in \ker T$, y deduzca que dos fibras no vacías son iguales o disjuntas.

12. Si $T : V \to W$ es lineal y $U \subseteq V$, $Y \subseteq W$ son subespacios, pruebe que $T(U)$ y $T^{-1}(Y)$ son subespacios. Distinga el segundo conjunto de una fibra sobre un vector no nulo.

13. Pruebe que una transformación lineal es inyectiva si y sólo si envía cada lista independiente a una lista independiente. No suponga dimensión finita.

14. En la prueba de rango-nulidad, explique por qué una relación entre las imágenes de los vectores añadidos produce un vector del núcleo y por qué la independencia de la base completa anula sus coeficientes. ¿Qué faltaría si sólo se demostrara generación de la imagen?

15. Si $\dim V = 5$ y $\dim W = 3$, determine los valores posibles del rango y de la nulidad de una transformación lineal $V \to W$. Construya un ejemplo para cada rango posible.

16. Para $T : V \to W$ con dimensiones finitas n, m, pruebe que la existencia de una transformación inyectiva exige $n \leq m$ y la de una sobreyectiva exige $n \geq m$. Pruebe también que esas condiciones son suficientes para construir alguna transformación del tipo pedido.

17. Pruebe que $\ker T = V$ equivale a que T sea la transformación cero, y que también equivale a $\operatorname{im} T = \{0\}$. ¿Se necesita finitud?

18. Un estudiante cuenta los pivotes de la matriz ampliada de un sistema incompatible como rango de la matriz de coeficientes. Dé un ejemplo mínimo que muestre el error y formule el criterio correcto de consistencia mediante imagen.

19. Si $S : V \to W$ y $T : U \to V$ son lineales, pruebe $\ker T \subseteq \ker(ST)$ e $\operatorname{im}(ST) \subseteq \operatorname{im} S$. Dé ejemplos donde ambas inclusiones sean estrictas.

20. Si $\dim V = n$, pruebe que dos operadores sobre V con $ST = I$ también satisfacen $TS = I$. Identifique dónde se usa la dimensión finita.

Construir y contrastar. 21. Construya $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con núcleo $\operatorname{span}(1, 1, 0)$ e imagen $\operatorname{span}(e_1, e_3)$. Verifique ambos espacios exactamente.

22. ¿Puede existir $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ con núcleo de dimensión tres e imagen de dimensión dos? Si no, modifique sólo la dimensión del núcleo y construya un ejemplo que conserve la imagen $\operatorname{span}(e_1, e_2)$.

23. Construya dos operadores distintos sobre $\mathbb{R}^2$ con el mismo núcleo y la misma imagen. Compruebe que esos subespacios no determinan una transformación única.

24. Dé dos matrices con igual rango y distinto núcleo; después, dos con igual núcleo y distinta imagen. Justifique cada comparación.

25. Restrinja $T(x, y, z) = (x + y, z)$ al subespacio $U = \{z = 0\}$. Determine $U \cap \ker T$, $T(U)$ y verifique la fórmula de restricción de la proposición 9.8.

26. Para los desplazamientos L, R de sucesiones de C08, calcule núcleos e imágenes. Explique por qué no se puede usar el corolario 9.5 y compruebe otra vez $LR = I$, $RL \neq I$.

27. Sea $C : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ dado por $C(A) = AB - BA$, donde $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Encuentre bases de núcleo e imagen y verifique rango-nulidad.

28. Para la derivación formal en $P_3(\mathbb{F}_3)$, determine núcleo e imagen. Compare con $P_3(\mathbb{R})$ y localice la condición que falla en afirmar que sólo se anulan las constantes.

29. Sea $E : P_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$, $E(p) = (p(0), p(1), p(2))$. Determine rango y nulidad; dé una base del núcleo y explique por qué toda terna es alcanzable sin resolver un sistema general desde cero.

30. Para $T(x, y) = (x, 0)$ y salida $w = (1, 0)$, un argumento llama «núcleo trasladado» a la fibra y concluye que es subespacio. Describa la fibra, refute esa conclusión y explique qué propiedad geométrica sí conserva.

Integrar y transferir. 31. Sean $T : X \to V$ y $S : V \to W$ con rangos finitos. Pruebe que $\operatorname{rg}(ST) = \operatorname{rg} T$ si y sólo si $\operatorname{im} T \cap \ker S = \{0\}$. Interprete el resultado como inyectividad de una restricción.

32. Construya dos pares de operadores S, T sobre $\mathbb{R}^3$ con $\operatorname{rg} S = \operatorname{rg} T = 2$, tales que $\operatorname{rg}(ST)$ valga uno en el primer par y dos en el segundo. Compare con las dos cotas de la proposición 9.8.

33. Para $T : V \to W$ con $\dim V < \infty$ y un subespacio $Y \subseteq \operatorname{im} T$, pruebe $\dim T^{-1}(Y) = \dim \ker T + \dim Y$ sin usar espacios cociente.

34. Si $A, B : V \to W$ son lineales de rango finito, pruebe $\operatorname{rg}(A+B) \le \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B$. Dé un ejemplo de desigualdad estricta y explique por qué no se sigue una fórmula de igualdad por defecto.

35. Sea $P : V \to V$ lineal, $P^2 = P$ y $\dim V < \infty$. Pruebe que $V = \ker P + \operatorname{im} P$ con intersección cero y determine núcleo, imagen y rango de $I - P$.

36. Sea $T : V \to V$ con $\dim V = n$ y $T^2 = 0$. Pruebe que $\operatorname{im} T \subseteq \ker T$ y $\operatorname{rg} T \le \lfloor n/2 \rfloor$. Construya un ejemplo que alcance la cota para cada n.

37. Si $T : V \to W$ es lineal sobre $\mathbb{F}_q$, con $\dim V = n$ y rango r, determine el número de salidas alcanzables y el de entradas que producen cada una. Deduzca un recuento completo de las entradas y trate las salidas no alcanzables.

38. Sea $K \subseteq V$, $\dim V = n$, $\dim K = k$, y sea W de dimensión $n - k$. Construya una transformación sobreyectiva con núcleo K. Si $K = \{0\}$, justifique además la unicidad de la preimagen de cada salida, sin afirmar unicidad de la transformación construida.

39. Sean $T, S : V \to W$ con $\ker T = \ker S$ y $\operatorname{im} T = \operatorname{im} S = I$. Pruebe que la regla $F(Tx) = Sx$ define una transformación lineal biyectiva $F : I \to I$ y satisface $S = FT$. No suponga que T es invertible ni use cocientes.

40. Un argumento afirma que rango-nulidad prueba «rango más nulidad igual a la dimensión del codominio». Refútelo con una transformación rectangular y reconstruya la igualdad correcta desde una base adaptada. Explique qué hipótesis adicional haría coincidir ambas dimensiones ambientales.

9.10. Soluciones razonadas

1. Para anular la salida se requiere $x + y = 0$ y $z = 0$, luego $\ker T = \operatorname{span}(1, -1, 0)$ tiene nulidad uno. Toda salida (a, b) proviene de $(a, 0, b)$, de modo que la imagen es $\mathbb{R}^2$, con base usual y rango dos. Sobre $(2, 1)$ podemos elegir $p = (2, 0, 1)$ o $p' = (0, 2, 1)$. Las parametrizaciones son $p + t(1, -1, 0)$ y $p' + s(1, -1, 0)$; coinciden al tomar $s = t + 2$. Ambas describen exactamente las entradas cuya suma de primeras dos coordenadas es dos y cuya tercera coordenada es uno.

2. Anular las primeras dos componentes exige $x + y = 0$, $z = 0$; la tercera queda automáticamente anulada. El núcleo tiene base $((1, -1, 0))$. Las salidas satisfacen $c = a + b$ y toda terna con esa propiedad se obtiene desde $(a, 0, b)$. Por tanto, la imagen tiene base $((1, 0, 1), (0, 1, 1))$, rango dos y nulidad uno. La fibra de $(1, 2, 3)$ es $(1, 0, 2) + t(1, -1, 0)$, mientras que la de $(1, 2, 4)$ es vacía. El codominio declarado sigue siendo $\mathbb{R}^3$; la imagen sólo ocupa un plano dentro de él.

3. Al restar las dos primeras filas de la tercera obtenemos una fila cero, y las primeras dos ya tienen pivotes en las posiciones uno y dos. Una base del espacio de filas es $((1, 0, 1, 2), (0, 1, 1, -1))$; sus posiciones de pivote prueban independencia. Una base del espacio de columnas se toma en la matriz original: $((1, 0, 1), (0, 1, 1))$. El homogéneo tiene base $((-1, -1, 1, 0), (-2, 1, 0, 1))$, pues sus coeficientes se leen en las entradas libres tercera y cuarta. Para $(2, 1, 3)^{\mathsf{T}}$ la condición de compatibilidad se cumple y todas las soluciones son $(2, 1, 0, 0) + s(-1, -1, 1, 0) + t(-2, 1, 0, 1)$. Para $(2, 1, 4)^{\mathsf{T}}$, la última ecuación reducida es $0 = 1$ y no hay solución.

4. Si $p = a + bt + ct^2$, entonces $E(p) = (a, a + b + c)$. Su núcleo exige $a = 0$, $b = -c$, luego tiene base $(t^2 - t)$ y nulidad uno. Una salida (u, v) se alcanza mediante $p = u + (v - u)t$, por lo que la imagen es $\mathbb{R}^2$ y el rango es dos. Para $(2, 5)$ elegimos $p_0 = 2 + 3t$; todas las soluciones son $p = 2 + 3t + c(t^2 - t)$. La familia conserva los dos valores evaluados y añade exactamente los polinomios que se anulan en ambos puntos.

5. Sobre $\mathbb{R}$, el núcleo son las constantes y la imagen es $P_2(\mathbb{R})$, de dimensiones uno y tres. Resolver $Dp = 2 + 6t$ da $p = a + 2t + 3t^2$, con a libre. Sobre $\mathbb{F}_2$, para $p = a + bt + ct^2 + dt^3$ se obtiene $Dp = b + dt^2$ porque $2 = 0$ y $3 = 1$. Así, el núcleo tiene base $(1, t^2)$ y la imagen base $(1, t^2)$, aunque uno sea un subespacio de entradas y el otro de salidas. Rango y nulidad son dos; se verifica $4 = 2+2$. La reducción de la ecuación real tiene salida cero, y sus soluciones binarias son justamente el núcleo.

6. La condición $x - 2y = 0$ da $\ker P = \operatorname{span}(2, 1)$. La imagen es el eje horizontal, porque $P(a, 0) = (a, 0)$ y toda salida tiene segunda componente cero. Ambos espacios tienen dimensión uno. Una salida (a, b) tiene fibra vacía si $b \neq 0$; si $b = 0$, la fibra es $(a, 0) + t(2, 1)$. Son rectas paralelas al núcleo. La fibra del cero coincide con el núcleo y las demás rectas no pasan por el origen.

7. Las primeras dos componentes de la salida se anulan sólo si $x + y = 0$ y $z = 0$, independientemente de a. Por ello el núcleo siempre es $\operatorname{span}(1, -1, 0)$ y la nulidad siempre vale uno. Las salidas tienen la forma $(u, v, u + av)$, generadas por $(1, 0, 1)$ y $(0, 1, a)$; son independientes al mirar las primeras dos entradas. El rango vale dos para todo a. Ningún valor da inyectividad ni sobreyectividad hacia $\mathbb{R}^3$. El parámetro cambia el plano imagen, pero no su dimensión.

8. En el homogéneo, $x = -ay$ y la segunda ecuación queda $(1 - a^2)y = 0$. Si $a \neq \pm 1$, el núcleo es trivial y el corolario 9.5 da biyectividad. También podemos resolver cualquier salida (u, v) con $y = (v - au)/(1 - a^2)$ y $x = (u - av)/(1 - a^2)$, lo que verifica existencia y unicidad. Para $a = 1$, $T_1(x, y) = (x + y, x + y)$, su núcleo tiene base $((1, -1))$ y su imagen base $((1, 1))$. Para $a = -1$, el núcleo tiene base $((1, 1))$ y la imagen base $((1, -1))$. En ambos casos excepcionales rango y nulidad valen uno. El análisis por casos precede a la división por $1 - a^2$.

9. La identidad sobre V tiene núcleo $\{0\}$ e imagen V, por lo que su nulidad es cero y su rango n. La transformación cero $V \to W$ tiene núcleo V e imagen $\{0_W\}$, de modo que su nulidad es n y su rango cero. Si $V = \{0\}$, ambos números valen cero y la única transformación es inyectiva; es sobreyectiva sólo si también $W = \{0\}$. Si el codominio es nulo y el dominio no, la función cero es sobreyectiva pero no inyectiva. La identidad sólo se considera con dominio y codominio iguales.

10. La aplicación $T : \mathbb{F}_2^3 \to \mathbb{F}_2$ dada por la suma de entradas es sobreyectiva, pues $T(1, 0, 0) = 1$. Su núcleo tiene dimensión dos por rango-nulidad y contiene $000, 110, 101, 011$. La fibra sobre uno contiene $100, 010, 001, 111$, cuatro soluciones. Es la traslación del núcleo por 100, por lo que tiene el mismo número de elementos. La existencia de variables libres no implica infinitud cuando el cuerpo sólo tiene dos elementos.

11. Por linealidad, $T(x) = T(y)$ equivale a $T(x - y) = 0$, que es precisamente $x - y \in \ker T$. Si dos fibras sobre u y v comparten un punto x, su salida es a la vez u y v, de modo que $u = v$ y las fibras coinciden. Si sus salidas son distintas no comparten ningún punto. En términos de traslaciones, un punto común fuerza que la diferencia de los dos puntos particulares pertenezca al núcleo y, por tanto, que describan el mismo conjunto.

12. La imagen $T(U)$ contiene cero. Si $a = T(u)$, $b = T(v)$ con $u, v \in U$, cualquier combinación $\alpha a + \beta b = T(\alpha u + \beta v)$ vuelve a pertenecer a $T(U)$ porque U es subespacio. Para la preimagen, $T(0) = 0 \in Y$, así que es no vacía; si x, z están en ella, $T(\alpha x + \beta z) = \alpha T(x) + \beta T(z) \in Y$. Por eso $T^{-1}(Y)$ es subespacio de V. Una fibra sobre un vector no nulo es preimagen de un singleton que no contiene cero; si es no vacía, no contiene el cero del dominio y no es subespacio.

13. Si T es inyectiva y $v_1, \ldots, v_r$ es independiente, una relación nula entre sus imágenes da $T(\sum_j a_j v_j) = 0 = T(0)$. La inyectividad obliga a $\sum_j a_j v_j = 0$ y la independencia anula los coeficientes. Recíprocamente, para cualquier vector $v \neq 0$, la lista (v) es independiente. Si todas esas listas conservan independencia, $T(v) \neq 0$. No hay, por tanto, elementos no nulos del núcleo y el teorema 9.3 da inyectividad. Los argumentos sólo usan relaciones finitas y no requieren una base del espacio.

14. Si $\sum_j c_j T(v_j) = 0$, la superposición permite reunir la suma como $T(\sum_j c_j v_j) = 0$. Así, $\sum_j c_j v_j$ es un vector del núcleo y admite una expresión mediante su base u_i. Al restar ambas expresiones aparece una relación en la base completa (u_i, v_j), cuya independencia obliga a que

todos los c_j sean cero. Probar sólo generación daría una lista de r generadores de la imagen y la cota $\operatorname{rg} T \leq r$; todavía podría contener redundancias, por lo que no justificaría la igualdad de dimensiones que exige rango-nulidad.

15. El rango puede ser $r = 0, 1, 2, 3$; no puede superar la dimensión tres del codominio. Rango-nulidad obliga a nulidad $5 - r$, es decir, $5, 4, 3, 2$, respectivamente. Para construir ejemplos, fijamos bases $v_1, \ldots, v_5$ y w_1, w_2, w_3 y prescribimos $T(v_j) = w_j$ para $j \leq r$, $T(v_j) = 0$ para $j > r$. La imagen tiene base $(w_1, \ldots, w_r)$ y el núcleo base $(v_{r+1}, \ldots, v_5)$ por independencia de las salidas no nulas. Esto realiza cada valor, incluido $r = 0$ mediante una lista vacía de imágenes básicas.

16. Si T es inyectiva, su nulidad es cero y su rango n, que no puede superar m. Si es sobreyectiva, el rango es m y no puede superar n. Para suficiencia, elegimos bases. Cuando $n \leq m$, enviamos los n vectores básicos de V a los primeros n de una base de W; la independencia de esas salidas hace trivial el núcleo. Cuando $n \geq m$, enviamos los primeros m vectores de una base de V a toda la base de W y los restantes a cero. La imagen es todo W. Las mismas construcciones con bases vacías tratan dimensiones cero.

17. Si el núcleo es V, cada entrada se envía a cero, que es la definición de transformación cero. Si T es cero, su imagen sólo contiene cero y contiene ese valor. Si la imagen es $\{0\}$, toda salida es cero y, por tanto, cada entrada pertenece al núcleo. Ninguna parte usa dimensión; basta interpretar los dos conjuntos y recordar que V contiene al menos el vector cero.

18. La ecuación $0x = 1$ tiene matriz de coeficientes (0), de rango cero, y ampliada $(0 \mid 1)$, de rango uno. Su pivote está en la columna del término independiente y certifica una contradicción. La regla correcta es que $Ax = b$ es consistente si y sólo si $b \in \operatorname{im} T_A$, el espacio de columnas de A. Equivalentemente, añadir b como columna no aumenta la dimensión del generado: $\operatorname{rg}(A \mid b) = \operatorname{rg} A$. La igualdad de rangos se justifica por ese criterio de generación, no contando el pivote ampliado como si fuera de A.

19. Si $T(x) = 0$, entonces $S(T(x)) = S(0) = 0$, luego $x \in \ker(ST)$. Toda salida $S(T(x))$ es además una salida de S, por lo que pertenece a su imagen. Para que ambas inclusiones sean estrictas en un mismo ejemplo, tome en $\mathbb{R}^2$ $T(x, y) = (x, 0)$ y $S(x, y) = (0, y)$. Entonces $ST = 0$. El núcleo de T es el eje vertical, estrictamente contenido en todo $\mathbb{R}^2 = \ker(ST)$, y $\operatorname{im}(ST) = \{0\}$ está estrictamente contenido en el eje vertical $\operatorname{im} S$.

20. De $ST = I$ se deduce que T es inyectiva: si $T(x) = T(y)$, aplicar S da $x = y$. Como es un operador sobre un espacio de dimensión finita, el corolario 9.5 lo hace sobreyectivo. Dado cualquier $v \in V$, elegimos x con $v = T(x)$. Entonces $TS(v) = TST(x) = T(x) = v$, y por ello $TS = I$. La finitud se usó únicamente al pasar de inyectividad a sobreyectividad de T. Los desplazamientos de sucesiones muestran por qué ese paso no es válido en general.

21. Definimos $T(x, y, z) = (y - x, 0, z)$. Su núcleo exige $y = x$, $z = 0$, de modo que es exactamente $\operatorname{span}(1, 1, 0)$. Toda salida tiene segunda entrada cero y cualquier $(a, 0, b)$ se obtiene desde $(0, a, b)$, así que la imagen es exactamente $\operatorname{span}(e_1, e_3)$. No basta comprobar que los generadores del núcleo se anulan y que dos salidas se alcanzan: las dos verificaciones anteriores prueban también que no hay más vectores en el núcleo ni salidas fuera del subespacio pedido.

22. Las dimensiones propuestas sumarían $3 + 2 = 5$, que no es la dimensión cuatro del dominio. Por rango-nulidad es imposible. Para mantener rango dos debemos cambiar la nulidad a dos. La regla $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, 0)$ tiene núcleo $\operatorname{span}(e_3, e_4)$ en el dominio e imagen $\operatorname{span}(e_1, e_2)$ en el codominio. Así realiza exactamente las nuevas dimensiones y la imagen requerida.

23. Tome $T(x, y) = (x, 0)$ y $S(x, y) = (2x, 0)$. En ambas, el núcleo es el eje vertical y la imagen es el eje horizontal, porque el factor dos no se anula sobre $\mathbb{R}$. Son operadores diferentes, pues $T(1, 0) = (1, 0)$ y $S(1, 0) = (2, 0)$. Los subespacios registran qué se anula y qué se alcanza, pero no determinan cómo cada entrada concreta recorre las salidas.

24. Las matrices fila $(1\ 0)$ y $(0\ 1)$ tienen rango uno, pero sus núcleos son el eje vertical y el horizontal, respectivamente. Para conservar el núcleo y cambiar la imagen, tomamos $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ambas se anulan exactamente cuando la primera entrada es cero; sus imágenes son los ejes horizontal y vertical, distintos. En los dos ejemplos la igualdad de un invariante no obliga a igualdad de los subespacios restantes.

25. El subespacio U es el plano horizontal $z = 0$, de dimensión dos. Como el núcleo de T ya es $\operatorname{span}(1, -1, 0)$, su intersección con U tiene dimensión uno. Las salidas de entradas en U son $(x+y, 0)$, que forman todo el eje horizontal de $\mathbb{R}^2$, de dimensión uno. Se verifica $\dim T(U) = 2 - 1 = 1$. Al restringir el dominio, una dirección que antes contribuía a la imagen, la de la tercera coordenada, ya no está disponible.

26. Para $L(x_0, x_1, \ldots) = (x_1, x_2, \ldots)$, el núcleo es $\operatorname{span}(e_0)$ y la imagen es todo el espacio de sucesiones: basta anteponer un cero para hallar una preimagen. Para $R(x_0, x_1, \ldots) = (0, x_0, x_1, \ldots)$, el núcleo es trivial y la imagen es el subespacio de sucesiones con primera entrada cero. El espacio de todas las sucesiones tiene listas independientes de cualquier longitud, por lo que no es de dimensión finita y no se aplica el corolario 9.5. Se verifica $LR = I$, mientras que $RL(x_0, x_1, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$, distinto de la identidad cuando $x_0 \neq 0$.

27. Para $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, el cálculo de los dos productos da $AB - BA = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{pmatrix}$. Se anula exactamente en las matrices diagonales, cuyo espacio tiene base (E_{11}, E_{22}). Toda matriz con diagonal cero se obtiene eligiendo b como su entrada superior y c como el negativo de la inferior; por tanto la imagen tiene base (E_{12}, E_{21}). Rango y nulidad son dos y su suma es cuatro, la dimensión de $M_2(\mathbb{R})$. La linealidad se deduce de la distributividad de los productos con B fijo.

28. En $\mathbb{F}_3$, $D(a + bt + ct^2 + dt^3) = b + 2ct$, porque el coeficiente tres del último término se anula. Como dos es invertible en ese cuerpo, el núcleo tiene base $(1, t^3)$ y la imagen base $(1, t)$. Ambas dimensiones son dos. Sobre $\mathbb{R}$, el núcleo sólo tiene base (1) y la imagen $(1, t, t^2)$, de dimensiones uno y tres. La afirmación de que un coeficiente ka_k nulo fuerza $a_k = 0$ requiere que k sea no nulo en el cuerpo, condición que falla para $k = 3$ sobre $\mathbb{F}_3$.

29. Los polinomios de Lagrange para los nodos $0, 1, 2$ pertenecen a $P_2(\mathbb{R})$ y tienen salidas e_1, e_2, e_3, respectivamente; el ejercicio 36 de C07 ya construyó esa base por evaluación. Luego E es sobreyectiva, tiene rango tres y, como el dominio tiene dimensión cuatro, nulidad uno. El polinomio no nulo $q = t(t-1)(t-2)$ se anula en los tres nodos, de modo que pertenece al núcleo. Una lista independiente de un vector en un espacio de dimensión uno es base, así que (q) es la base buscada. La dimensión justifica que no faltan otras direcciones del núcleo.

30. La fibra es $\{(1, t) : t \in \mathbb{R}\} = (1, 0) + \operatorname{span}(0, 1)$. No contiene el cero; tampoco es cerrada por suma, pues $(1, 0) + (1, 0) = (2, 0)$ queda fuera. Por tanto no es subespacio vectorial. Sí es una recta afín paralela al núcleo, con las mismas direcciones de diferencias entre sus puntos. La palabra «trasladado» describe una relación geométrica, sin conservar automáticamente las operaciones de subespacio.

31. La identidad de la proposición 9.8 da $\operatorname{rg}(ST) = \operatorname{rg} T - \dim(\operatorname{im} T \cap \ker S)$. La igualdad de rangos equivale a que la intersección tenga dimensión cero, es decir, a que sólo contenga al cero. Esa intersección es el núcleo de $S|_{\operatorname{im} T}$. Por el teorema 9.3, su anulación equivale a la inyectividad de la restricción. La composición conserva el rango de T exactamente cuando S no identifica dos salidas distintas que T pueda alcanzar.

32. Tome primero $T(x, y, z) = (x, y, 0)$ y $S(x, y, z) = (0, y, z)$. Ambos tienen rango dos, pero $ST(x, y, z) = (0, y, 0)$ tiene rango uno. Para el segundo par, tome $S = T$ igual a la proyección $(x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$; entonces $ST = T$ y el rango de la composición es dos. Las cotas dan $2 + 2 - 3 = 1 \leq \operatorname{rg}(ST) \leq 2$, y los ejemplos alcanzan ambos extremos. La posición de los subespacios, no sólo las dimensiones individuales, decide el valor dentro de ese intervalo.

33. El conjunto $X = T^{-1}(Y)$ es subespacio por el ejercicio 12 y tiene dimensión finita al estar en V. La restricción $T|_X : X \to Y$ es sobreyectiva: cada $y \in Y$ pertenece por hipótesis a la imagen de T y cualquier preimagen suya está en X. Su núcleo es todo $\ker T$, porque $0 \in Y$ y, por tanto, el núcleo de T ya está contenido en X. Rango-nulidad para esa restricción da $\dim X = \dim \ker T + \dim Y$. Se aplicó el teorema a un dominio distinto; no se ha formado un cociente.

34. Para cada x, $(A + B)x = Ax + Bx$ pertenece a $\operatorname{im} A + \operatorname{im} B$. Así, $\operatorname{im}(A + B)$ está contenida en esa suma, cuya dimensión es a lo sumo $\operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B$ por C07. Esto prueba la desigualdad. Sobre $\mathbb{R}$, el ejemplo $A = I$ y $B = -I$ en un espacio de dimensión uno da rango cero para $A + B$, frente a suma de rangos dos. La cancelación de las salidas y las intersecciones de los subespacios impiden deducir igualdad por un simple recuento de dos listas generadoras.

35. Para cualquier v, escribimos $v = (v - Pv) + Pv$. El primer sumando está en $\ker P$ porque $P(v - Pv) = Pv - P^2v = 0$ y el segundo pertenece a $\operatorname{im} P$. Si z está en ambos, $z = Pu$ para algún u y $Pz = 0$; pero $Pz = P^2u = Pu = z$, luego $z = 0$. Además, $(I - P)v = 0$ equivale a $v = Pv$, que equivale a $v \in \operatorname{im} P$; así $\ker(I - P) = \operatorname{im} P$. Toda salida de $I - P$ está en $\ker P$ y cada $u \in \ker P$ satisface $(I-P)u = u$, por lo que $\operatorname{im}(I-P) = \ker P$. En consecuencia, $\operatorname{rg}(I-P) = \operatorname{nul} P = n - \operatorname{rg} P$.

36. Si $y = T(x)$, entonces $T(y) = T^2(x) = 0$, de modo que $\operatorname{im} T \subseteq \ker T$. Al tomar dimensiones, $r = \operatorname{rg} T \le \operatorname{nul} T = n - r$, luego $2r \le n$ y $r \le \lfloor n/2 \rfloor$. Para alcanzar la cota, fije una base $(e_1, \dots, e_n)$ y escriba $r = \lfloor n/2 \rfloor$. Prescriba $T(e_{r+j}) = e_j$ para $1 \le j \le r$ y $T(e_i) = 0$ en las posiciones restantes. La imagen tiene base $(e_1, \dots, e_r)$ y todos esos vectores se anulan al volver a aplicar T, por lo que $T^2 = 0$ y el rango es r. La construcción incluye $n = 0, 1$, cuando $r = 0$ y la transformación es cero.

37. La imagen tiene q^r elementos por C07. Rango-nulidad da dimensión $n - r$ para el núcleo, que contiene q^{n-r} elementos. Cada salida alcanzable tiene una fibra que es traslación de ese núcleo, así que recibe exactamente q^{n-r} entradas. Las salidas distintas tienen fibras disjuntas y toda entrada pertenece a la fibra de su propia salida; por tanto, el recuento total es $q^r q^{n-r} = q^n$, como corresponde al tamaño de V. Una salida fuera de la imagen recibe cero entradas y no se cuenta entre las q^r alcanzables.

38. Tome una base $(u_1, \dots, u_k)$ de K y extiéndala a una base $(u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_{n-k})$ de V. Escoja una base $(w_1, \dots, w_{n-k})$ de W y prescriba $T(u_i) = 0$, $T(v_j) = w_j$. La prescripción de C08 da una función lineal; las salidas básicas generan W y una combinación se anula sólo si todos sus coeficientes de los v_j son cero, de modo que el núcleo es exactamente K. Si $K = \{0\}$, el teorema 9.3 da inyectividad y, junto con sobreyectividad, cada salida tiene una preimagen única. Esto no elimina la libertad en elegir las bases y las salidas básicas que producen distintas transformaciones.

39. Para cada $y \in I$ existe x con $T(x) = y$, así que la regla propone un valor en todo su dominio. Si también $T(x') = y$, entonces $x - x' \in \ker T = \ker S$ y $S(x) = S(x')$, lo que prueba buena definición. Para $y = T(x)$, $z = T(v)$, tenemos $ay + bz = T(ax + bv)$; por la regla, $F(ay + bz) = S(ax + bv) = aF(y) + bF(z)$. Si $F(Tx) = 0$, entonces $Sx = 0$, luego $x \in \ker S = \ker T$ y $Tx = 0$, así que F es inyectiva por núcleo trivial. Dado $z \in I = \operatorname{im} S$, escribimos $z = Sx = F(Tx)$, lo que prueba sobreyectividad. Finalmente, para todo x, $F(Tx) = Sx$ expresa exactamente $S = FT$. No se ha usado una inversa de T ni elegido una preimagen única.

40. La transformación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x + y, z)$ tiene rango dos y nulidad uno, cuya suma es tres y no dos. En una base adaptada del dominio, un bloque de k vectores genera el núcleo y un segundo bloque de r vectores tiene imágenes que forman una base de la imagen. Los dos bloques juntos forman una base de V, por lo que $k + r = \dim V$. El codominio puede contener salidas no alcanzadas y no es el espacio donde se contó esa base. Si además V, W tienen la misma dimensión finita, sus dimensiones ambientales coinciden numéricamente; la igualdad fundamental sigue contando una base del dominio.

Lecturas y referencias

Friedberg, Insel y Spence, *Linear Algebra*, 5.ª edición, §2.1, y Hoffman y Kunze, *Linear Algebra*, 2.ª edición, §3.1, desarrollan núcleo, imagen y el teorema de dimensión mediante extensión de una base. En Hoffman y Kunze, el teorema 3 de esa sección compara los rangos por filas y columnas. Axler, *Linear Algebra Done Right*, 4.ª edición, §3B, separa inyectividad, sobreyectividad y el teorema fundamental de aplicaciones lineales. Nathaniel Johnston, *Advanced Linear and Matrix Algebra* (2021), §1.2.4, contrasta estas propiedades en ejemplos de operadores y en dimensión infinita. Las pruebas de este capítulo usan directamente bases, relaciones y eliminación; no presuponen la teoría de cocientes o la dualidad.

Capítulo 10

Isomorfismos y coordenadas

Un desplazamiento del plano puede describirse dando cuánto avanzamos en dirección horizontal y cuánto en dirección vertical. También podemos elegir otras dos direcciones independientes y dar las cantidades que debemos recorrer en ellas. Para llegar a $(4, 2)$, por ejemplo, sirven tres pasos en la dirección $(1, 1)$ y uno en la dirección $(1, -1)$, porque

$$(4, 2) = 3(1, 1) + (1, -1).$$

Si elegimos en cambio las direcciones $(1, 0)$ y $(1, 1)$, llegamos al mismo punto con dos pasos en cada una. Aparecen así tres pares de números: $(4, 2)$, $(3, 1)$ y $(2, 2)$. Cada uno contiene toda la información necesaria para recuperar el desplazamiento, siempre que sepamos qué direcciones se utilizaron y en qué orden.

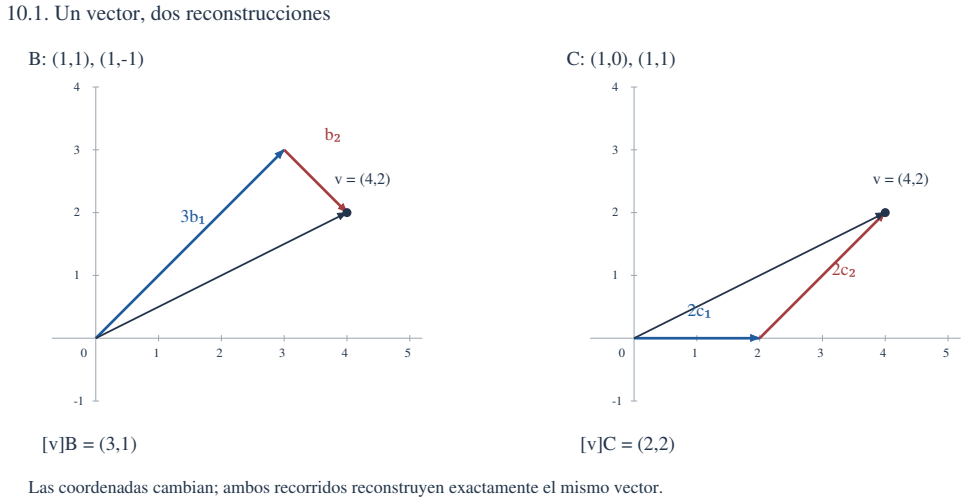


Figura 10.1. Las dos construcciones terminan en el mismo punto. Los segmentos auxiliares muestran las sumas de múltiplos de los vectores básicos; las coordenadas son coeficientes de esas sumas, sin exigir perpendicularidad ni vectores de longitud uno.

Esta posibilidad se extiende a los espacios de polinomios o matrices: una base permite sustituir cada objeto por una lista de coeficientes y reconstruirlo sin pérdida. Debemos demostrar que esa sustitución respeta las operaciones, averiguar qué propiedades podemos estudiar mediante ella y aprender a convertir una descripción en otra. En particular, una matriz de cambio de coordenadas sólo queda determinada cuando indicamos qué coordenadas recibe y cuáles entrega.

Todos los espacios que comparemos serán sobre un mismo cuerpo $\mathbb{F}$, salvo cuando se examine expresamente un cambio del cuerpo de escalares. Se presuponen las bases de C07, las transformaciones de C08 y los resultados de C09. Las bases de dimensión finita se escribirán como listas ordenadas y las coordenadas como columnas. Para $n = 0$, $\mathbb{F}^0$ es el espacio de la única lista vacía y su base es vacía.

10.1. Una correspondencia que conserva las operaciones

En C09, una transformación lineal biyectiva garantizaba que cada salida tuviera exactamente una preimagen. Esa correspondencia permite llevar un cálculo de un espacio a otro: si conocemos las imágenes de dos vectores, conocemos también la imagen de cualquier combinación lineal de

ellos. Para recuperar el resultado en el espacio inicial necesitamos que la función inversa conserve igualmente esas combinaciones.

Definición 10.1 (isomorfismo). Un **isomorfismo de espacios vectoriales** sobre $\mathbb{F}$ es una transformación $T : V \to W$ que es lineal y biyectiva. Si existe tal transformación, decimos que V y W son isomorfos y escribimos $V \cong W$.

La palabra se refiere aquí a la estructura vectorial sobre el cuerpo indicado. Los espacios pueden estar formados por objetos diferentes; la correspondencia debe conservar suma y multiplicación por escalares y permitir volver desde cada objeto de llegada.

Proposición 10.1 (inversa y composición). La inversa de un isomorfismo es lineal. La identidad es un isomorfismo y la composición de dos isomorfismos también lo es. Si $T : V \to W$ y $S : W \to Z$ son isomorfismos, entonces $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$.

Demostración. Sean $y, z \in W$ y $a, b \in \mathbb{F}$. La sobreyectividad y la inyectividad de T proporcionan entradas únicas x, u tales que $T(x) = y$ y $T(u) = z$. Por linealidad,

$$T(ax + bu) = ay + bz.$$

La entrada que produce $ay + bz$ es, por tanto, $ax + bu$; la unicidad de la preimagen da $T^{-1}(ay + bz) = aT^{-1}(y) + bT^{-1}(z)$. Esto demuestra la linealidad de la inversa sin hipótesis de dimensión.

La identidad conserva las operaciones y es biyectiva. La composición es lineal por C08, inyectiva porque la igualdad de dos salidas permite cancelar primero S y después T, y sobreyectiva porque una salida en Z puede levantarse primero a W y luego a V. Finalmente, aplicar $T^{-1}S^{-1}$ después de ST, o ST después de $T^{-1}S^{-1}$, da las identidades respectivas por asociatividad y las igualdades de inversas. Esto prueba la fórmula. □

En particular, ser isomorfos es una relación reflexiva, simétrica y transitiva entre espacios sobre el mismo cuerpo: identidad, inversa y composición justifican cada propiedad. No se sigue que los espacios sean iguales como conjuntos, ni que haya una sola correspondencia entre ellos.

Por ejemplo, la regla $\Phi(a + bt + ct^2 + dt^3) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ define un isomorfismo $P_3(\mathbb{F}) \to M_2(\mathbb{F})$. La suma y el producto por un escalar se traducen entrada por entrada, y la regla inversa lee las cuatro entradas como coeficientes. No hemos afirmado que se conserve la multiplicación de polinomios o matrices. De hecho, P_3 ni siquiera es cerrado por multiplicación de polinomios: $t^3t^3 = t^6$ queda fuera. Una estructura adicional requiere condiciones adicionales sobre la correspondencia.

10.2. Codificar y reconstruir un vector

Sea $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ una base ordenada de V. Por C07, cada $v \in V$ admite una expresión única

$$v = x_1b_1 + \cdots + x_nb_n.$$

La generación asegura que podemos escribirla; la independencia asegura que no hay dos listas de coeficientes para el mismo vector. Son las dos condiciones que necesitamos para usar esos coeficientes como una descripción completa.

Definición 10.2 (coordenadas). La columna $[v]_{\mathcal{B}} = (x_1, \dots, x_n)^{\mathsf{T}}$ es el **vector de coordenadas de v en la base $\mathcal{B}$**. Denotamos por $c_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{F}^n$ la función $c_{\mathcal{B}}(v) = [v]_{\mathcal{B}}$ y por $s_{\mathcal{B}} : \mathbb{F}^n \to V$ la función de reconstrucción $s_{\mathcal{B}}(x) = \sum_j x_jb_j$.

Teorema 10.2 (isomorfismo de coordenadas). Las funciones $c_{\mathcal{B}}$ y $s_{\mathcal{B}}$ son isomorfismos inversos. En particular,

$$[av + bw]_{\mathcal{B}} = a[v]_{\mathcal{B}} + b[w]_{\mathcal{B}} \qquad (a, b \in \mathbb{F};\ v, w \in V).$$

Demostración. Si $v = \sum_j x_jb_j$ y $w = \sum_j y_jb_j$, los axiomas del espacio vectorial dan $av + bw = \sum_j (ax_j + by_j)b_j$. Como la expresión en una base es única, la columna de ese vector es precisamente $ax + by$. Así, $c_{\mathcal{B}}$ es lineal.

La reconstrucción seguida de la lectura de coordenadas devuelve x, porque $s_{\mathcal{B}}(x)$ está expresado en la base con esos coeficientes. En el otro sentido, leer los coeficientes de un vector y reconstruirlo devuelve el vector inicial. Por tanto, $c_{\mathcal{B}}s_{\mathcal{B}} = I_{\mathbb{F}^n}$ y $s_{\mathcal{B}}c_{\mathcal{B}} = I_V$. Las funciones son biyectivas e inversas; la proposición 10.1 prueba también la linealidad de $s_{\mathcal{B}}$, que puede comprobarse directamente

distribuyendo las sumas. Para $n = 0$, la suma vacía reconstruye el único vector cero y las mismas afirmaciones siguen siendo válidas. □

Con la base usual de $\mathbb{F}^n$, el vector y su columna de coordenadas tienen las mismas entradas. En otros espacios el tipo de objeto cambia: un polinomio pasa a una columna, o una matriz de dos por dos pasa a una columna de cuatro entradas. La notación conserva la base para que podamos regresar al objeto.

En la apertura, con $\mathcal{B} = ((1,1),(1,-1))$, resolver $a(1,1) + b(1,-1) = (x,y)$ sobre $\mathbb{R}$ da

$$[(x,y)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} (x+y)/2 \\ (x-y)/2 \end{pmatrix}.$$

Si $\mathcal{C} = ((1,0),(1,1))$, la expresión $u(1,0) + v(1,1) = (u+v, v)$ da $[(x,y)]_{\mathcal{C}} = (x-y, y)^{\mathsf{T}}$. Para $(4,2)$ aparecen las columnas $(3,1)^{\mathsf{T}}$ y $(2,2)^{\mathsf{T}}$ anunciadas. Las fórmulas son lineales porque los coeficientes se suman y escalan como lo hacen los vectores reconstruidos; la demostración anterior explica por qué ocurrirá con cualquier base.

El orden forma parte de la información. Si intercambiamos los dos vectores de $\mathcal{B}$, la columna de $(4,2)$ pasa a $(1,3)^{\mathsf{T}}$. Una base como conjunto sigue siendo la misma, pero su uso como lista de instrucciones ha cambiado.

10.3. Qué información podemos trasladar

Un isomorfismo permite estudiar relaciones lineales en cualquiera de los dos espacios. La razón no se limita a que conserve una suma: su inyectividad impide que una combinación no nula desaparezca al transportarla.

Proposición 10.3 (transporte de relaciones y subespacios). Si $T : V \to W$ es un isomorfismo, entonces, para una lista finita $v_1, \dots, v_r$ y escalares a_j,

$$\sum_j a_j v_j = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_j a_j T(v_j) = 0.$$

En consecuencia, T conserva independencia y envía una base de V a una base de W. Para subespacios $U, H \subseteq V$, las imágenes son subespacios y

$$T(U+H) = T(U) + T(H), \qquad T(U \cap H) = T(U) \cap T(H).$$

Si U tiene dimensión finita, $\dim T(U) = \dim U$.

Demostración. La implicación directa de la equivalencia se obtiene aplicando linealidad; para la inversa, la suma de imágenes es $T(\sum_j a_j v_j)$ y el núcleo trivial obliga a que el vector interior sea cero. Por ello una lista tiene sólo relaciones triviales exactamente cuando su imagen las tiene. Si la lista genera V, su imagen genera W: para $w \in W$ elegimos una preimagen y expresamos ésta con los generadores. Se transportan, por tanto, las dos condiciones de una base.

Las imágenes de subespacios son subespacios por C09. Cada vector de $U + H$ tiene la forma $u + h$, y su imagen $T(u) + T(h)$ pertenece a la suma de imágenes. Recíprocamente, cualquier suma de esa forma es $T(u+h)$, lo que prueba la primera igualdad.

Una imagen de un vector en $U \cap H$ pertenece a ambas imágenes. Para la inclusión contraria, si $w = T(u) = T(h)$ con $u \in U$ y $h \in H$, la inyectividad da $u = h$, de modo que ese vector pertenece a la intersección. Finalmente, una base finita de U se transporta a una base de $T(U)$ por el mismo argumento de relaciones y generación, y conserva su longitud. □

En particular, para averiguar si varios polinomios son independientes podemos leer sus coeficientes en una base fija y aplicar eliminación a esas columnas. La condición de usar una misma base es esencial. Las columnas $(1,0)^{\mathsf{T}}$ de dos vectores, leídas cada una en una base diferente, no permiten compararlos: cada columna sólo dice «el primer vector de mi base».

Teorema 10.4 (clasificación en dimensión finita). Dos espacios vectoriales de dimensión finita sobre un mismo cuerpo son isomorfos si y sólo si tienen la misma dimensión. Todo espacio de dimensión n es isomorfo a $\mathbb{F}^n$.

Demostración. Si existe un isomorfismo, la proposición 10.3 transporta una base del dominio a una base del codominio, con la misma longitud. Las dimensiones coinciden.

Supongamos ahora que $\dim V = \dim W = n$. Elegimos bases ordenadas $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ y $\mathcal{D} = (d_1, \dots, d_n)$. La regla

$$\sum_j x_j b_j \longmapsto \sum_j x_j d_j$$

está bien definida porque cada entrada tiene coeficientes únicos. Es la composición $s_{\mathcal{D}} c_{\mathcal{B}}$ de dos isomorfismos y, por tanto, un isomorfismo. Para $n = 0$, la única función entre los dos espacios nulos satisface las mismas propiedades. La última afirmación es el teorema 10.2. □

Este resultado clasifica espacios con su estructura vectorial; no selecciona una identificación preferida. $P_2(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^3$ admiten, por ejemplo, el isomorfismo que lee coeficientes. También admiten $p \mapsto (p(0), p(1), p(2))$: es lineal y toda terna se alcanza mediante los polinomios de interpolación

$$\ell_0(t) = \frac{(t-1)(t-2)}{2}, \qquad \ell_1(t) = -t(t-2), \qquad \ell_2(t) = \frac{t(t-1)}{2}.$$

Cada ℓ_j vale uno en su nodo y cero en los otros dos, de modo que una terna (u, v, w) se reconstruye como $u\ell_0 + v\ell_1 + w\ell_2$. La independencia se comprueba evaluando una combinación nula en los tres nodos. Esta base está adaptada a los valores evaluados y su lectura de coordenadas es justamente la evaluación. Las dos identificaciones codifican los mismos polinomios con datos diferentes.

10.4. Convertir coordenadas sin cambiar el vector

Sean $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ y $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$ dos bases de V. Si ya tenemos $[v]_{\mathcal{B}}$, podemos reconstruir v y después leerlo en $\mathcal{C}$. La composición $c_{\mathcal{C}} s_{\mathcal{B}}$ hace exactamente ese recorrido. Queremos realizarlo mediante una sola multiplicación matricial.

Definición 10.3 (matriz de transición de coordenadas). La matriz que convierte coordenadas de $\mathcal{B}$ en coordenadas de $\mathcal{C}$ es

$$P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \big([b_1]_{\mathcal{C}} \ \cdots \ [b_n]_{\mathcal{C}} \big).$$

El subíndice se lee desde la derecha: recibe una columna en $\mathcal{B}$ y entrega una columna en $\mathcal{C}$. El nombre usual «matriz de cambio de base» se utilizará con este significado preciso de conversión de coordenadas.

Teorema 10.5 (fórmula de transición y unicidad). Para todo $v \in V$,

$$[v]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} [v]_{\mathcal{B}}.$$

Ésta es la única matriz con esa propiedad. Es invertible y su inversa es $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}$.

Demostración. Escribimos $v = \sum_j x_j b_j$. Por linealidad de las coordenadas,

$$[v]_{\mathcal{C}} = \sum_j x_j [b_j]_{\mathcal{C}}.$$

El producto de una matriz por una columna combina sus columnas con los coeficientes de esa columna. La expresión anterior es, por definición, $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} x$, y $x = [v]_{\mathcal{B}}$. Esto explica por qué colocamos las coordenadas de los b_j como columnas.

Si una matriz Q cumpliera la fórmula para todo vector, podríamos aplicarla a $v = b_j$. En ese caso $[b_j]_{\mathcal{B}} = e_j$, y Qe_j es la columna j de Q. Tendría que ser $[b_j]_{\mathcal{C}}$, así que todas sus columnas estarían determinadas y $Q = P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$.

Convertir de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ y volver devuelve las coordenadas iniciales. Por tanto, $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} x = x$ para toda columna x, pues toda columna corresponde a un vector por el teorema 10.2. Aplicando la misma observación en el otro orden obtenemos ambos productos identidad. Eso demuestra la invertibilidad y la fórmula de la inversa. □

Para las bases de la apertura, $b_1 = (1, 1) = c_2$ y $b_2 = (1, -1) = 2c_1 - c_2$. De aquí obtenemos

$$P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

La primera matriz envía $(3, 1)^{\mathsf{T}}$ a $(2, 2)^{\mathsf{T}}$, mientras que la segunda devuelve $(3, 1)^{\mathsf{T}}$. Los vectores b_1, b_2 se expresaron en la base de llegada para construir la primera matriz. Expresar los c_j en

$\mathcal{B}$ construiría la conversión inversa. Este examen de una columna básica permite detectar una dirección equivocada antes de efectuar un cálculo extenso.

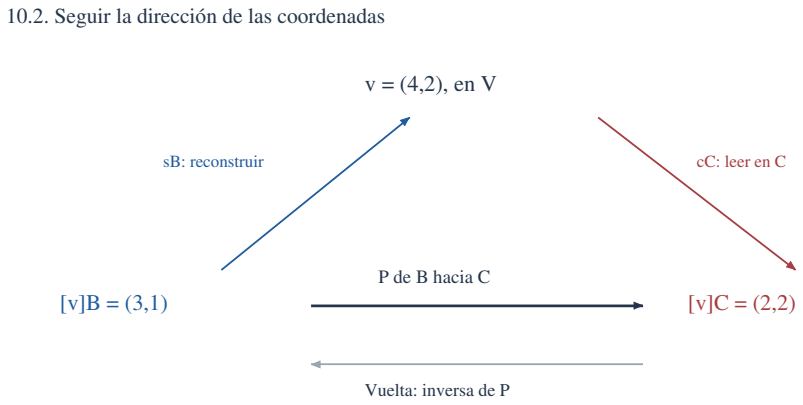


Figura 10.2. Los dos recorridos desde $[v]_{\mathcal{B}}$ hasta $[v]_{\mathcal{C}}$ coinciden: reconstruir y volver a leer, o multiplicar por la matriz de transición. Las columnas básicas determinan esa matriz de manera única.

Cambiar la descripción y aplicar una transformación al vector son operaciones distintas. En $\mathbb{R}^2$, la misma matriz numérica puede multiplicar una columna de coordenadas para convertirla, o definir una función sobre vectores escritos en la base usual. La operación que estamos realizando se reconoce por los tipos de entrada y salida. En el cálculo anterior el vector geométrico continúa siendo $(4, 2)$.

10.5. Encadenar cambios y calcularlos por eliminación

Con tres bases podemos llegar a la descripción final pasando por una intermedia. El orden del producto se determina siguiendo ese recorrido.

Proposición 10.6 (leyes de transición). Para bases ordenadas $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ de un mismo espacio finito,

$$P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}} = I, \qquad P_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{B}} = P_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}} P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}.$$

Demostración. Las columnas de $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}$ son $[b_j]_{\mathcal{B}} = e_j$, así que forman la identidad. Para la segunda igualdad, aplicamos sucesivamente el teorema 10.5:

$$[v]_{\mathcal{D}} = P_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}}[v]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}} P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}}.$$

La unicidad de la matriz de transición identifica el producto con $P_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{B}}$. No se ha intercambiado el orden de factores: la matriz de la derecha realiza el primer cambio. □

Para calcular todas las columnas de una transición conviene elegir una base de referencia $\mathcal{E}$. Escribimos $S_{\mathcal{B}}$ para la matriz cuyas columnas son $[b_j]_{\mathcal{E}}$ y $S_{\mathcal{C}}$ para la que contiene los $[c_j]_{\mathcal{E}}$. Ambas son invertibles por el teorema 10.5, pues son las transiciones hacia $\mathcal{E}$.

Proposición 10.7 (cálculo simultáneo). Con la notación anterior,

$$P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = S_{\mathcal{C}}^{-1} S_{\mathcal{B}}.$$

La eliminación por filas aplicada a $(S_{\mathcal{C}} \mid S_{\mathcal{B}})$ hasta obtener identidad en el bloque izquierdo produce $(I \mid P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}})$.

Demostración. Cada columna desconocida $p_j = [b_j]_{\mathcal{C}}$ debe satisfacer $S_{\mathcal{C}} p_j = [b_j]_{\mathcal{E}}$: reconstruir desde sus coordenadas en $\mathcal{C}$ debe dar las coordenadas de b_j en $\mathcal{E}$. Reuniendo esas ecuaciones obtenemos $S_{\mathcal{C}} P = S_{\mathcal{B}}$ y multiplicar a la izquierda por la inversa da la fórmula.

Una sucesión de operaciones elementales equivale a multiplicar ambos bloques a la izquierda por un producto E de matrices elementales, según C03. Si transforma $S_{\mathcal{C}}$ en I, entonces $E S_{\mathcal{C}} = I$ y

$E = S_{\mathcal{C}}^{-1}$. El bloque derecho se transforma en $ES_{\mathcal{B}} = S_{\mathcal{C}}^{-1}S_{\mathcal{B}} = P$, como queríamos. La invertibilidad del bloque izquierdo garantiza que la eliminación puede llegar a identidad. □

Para el ejemplo plano, con referencia usual,

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

El bloque derecho recupera la transición de $\mathcal{B}$ hacia $\mathcal{C}$. Invertir el orden de los bloques iniciales daría la transición contraria; la barra ampliada conserva la información sobre los sistemas que estamos resolviendo.

También podemos partir de una matriz invertible y preguntar qué elección de base representa. La respuesta aclara el alcance de estas matrices.

Teorema 10.8 (construir una base desde una transición). Fijada una base ordenada $\mathcal{C}$ de V, toda matriz invertible $P \in M_n(\mathbb{F})$ determina una única base ordenada $\mathcal{B}$ para la cual $P = P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$. Sus vectores son $b_j = s_{\mathcal{C}}(Pe_j)$.

Demostración. Las columnas Pe_j forman una base de $\mathbb{F}^n$, porque la multiplicación por una matriz invertible es un isomorfismo por C03. El isomorfismo $s_{\mathcal{C}}$ transporta esa base a una base de V por la proposición 10.3. Por construcción, las coordenadas de su vector j son Pe_j, así que su matriz de transición es P. Si hubiera otra base con esa matriz, su vector j tendría las mismas coordenadas en $\mathcal{C}$ y la unicidad de reconstrucción obligaría a que fuera b_j. □

La base de llegada debe estar fijada. Si sólo conocemos los números de P, sin una base de referencia, no podemos recuperar vectores concretos de un espacio abstracto.

10.6. Un polinomio descrito desde otro centro

En $P_2(\mathbb{F})$, consideremos $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ y $\mathcal{C}_h = (1, t-h, (t-h)^2)$, donde $h \in \mathbb{F}$. Para expresar $p = a + bt + ct^2$ en la segunda lista, escribimos $t = (t-h) + h$ y distribuimos:

$$p = (a + bh + ch^2) + (b + 2ch)(t-h) + c(t-h)^2.$$

Por tanto,

$$[p]_{\mathcal{C}_h} = \begin{pmatrix} 1 & h & h^2 \\ 0 & 1 & 2h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

La lista $\mathcal{C}_h$ es efectivamente una base. Sus columnas en $\mathcal{E}$ forman la matriz

$$S_{\mathcal{C}_h} = \begin{pmatrix} 1 & -h & h^2 \\ 0 & 1 & -2h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que es invertible: la resolución desde la última ecuación hacia la primera tiene solución única para cualquier término independiente. El teorema 10.8 identifica así una base antes de interpretar las columnas de coordenadas en ella.

Para $h = 1$, $p = 2 + 3t + t^2$ se describe como $6 + 5(t-1) + (t-1)^2$. Los números $(2, 3, 1)$ se refieren a potencias de t; $(6, 5, 1)$ a potencias de $t - 1$. Podemos verificar la conversión expandiendo la segunda expresión y recuperando la primera. Esta comprobación ayuda cuando un signo en el centro amenaza con invertir el cambio.

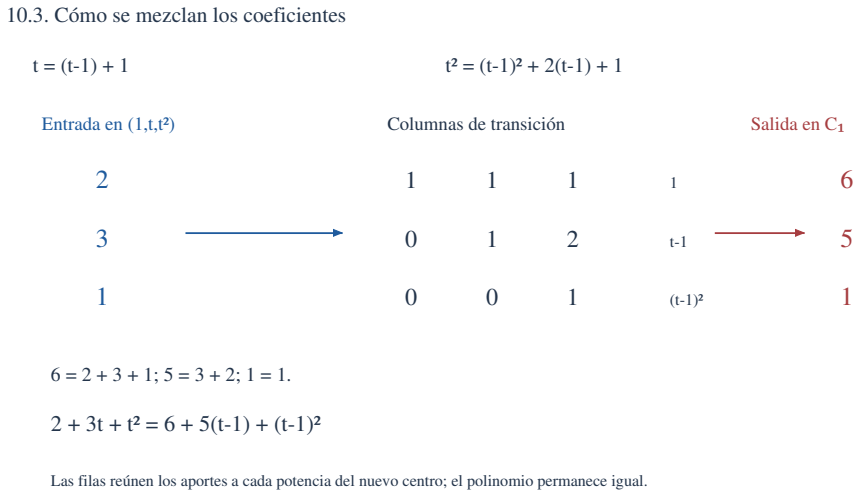


Figura 10.3. Las dos expresiones representan el mismo polinomio. La transición combina coeficientes según las identidades $t = (t-1)+1$ y $t^2 = (t-1)^2 + 2(t-1) + 1$; no modifica los valores de la función representada.

Estas fórmulas se obtuvieron distribuyendo productos y siguen siendo válidas en característica dos. Allí $2h = 0$, pero los unos de la diagonal no desaparecen y la lista trasladada sigue siendo una base. En contraste, la base plana $((1,1),(1,-1))$ de la apertura falla en característica dos, porque sus dos vectores coinciden. El cuerpo debe examinarse en cada construcción, incluso cuando la notación parezca familiar.

10.7. Coordenadas para un subespacio y límites de una identificación

Supongamos que $U \subseteq V$ está generado por $u_1, \dots, u_r$ y fijemos una base $\mathcal{B}$ de V. La linealidad de las coordenadas da

$$c_{\mathcal{B}}(U) = \operatorname{span}([u_1]_{\mathcal{B}}, \dots, [u_r]_{\mathcal{B}}).$$

Proposición 10.9 (cambiar las coordenadas de un subespacio). Para dos bases $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ y un subespacio $U \subseteq V$,

$$c_{\mathcal{C}}(U) = P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\, c_{\mathcal{B}}(U),$$

donde el miembro derecho es la imagen del subespacio de coordenadas bajo multiplicación por P. Su dimensión es la de U y una base se obtiene convirtiendo las columnas de coordenadas de cualquier base de U.

Demostración. Cada elemento de la izquierda es $[u]_{\mathcal{C}}$ para algún $u \in U$, y por el teorema 10.5 es $P[u]_{\mathcal{B}}$; esa igualdad prueba ambas inclusiones de conjuntos. La restricción de $c_{\mathcal{B}}$ a U es un isomorfismo de U sobre su imagen. Las dimensiones y las bases se conservan por la proposición 10.3; lo mismo ocurre con la multiplicación por P, que es invertible. $\square$

Por ejemplo, el plano $U = \{(x,y,z) : z = x + y\} \subseteq \mathbb{R}^3$ tiene base $u_1 = (1,0,1)$, $u_2 = (0,1,1)$. La función $(a,b) \mapsto a u_1 + b u_2 = (a, b, a+b)$ es un isomorfismo $\mathbb{R}^2 \to U$, y las coordenadas de $(2,-3,-1)$ en esa base son $(2,-3)^{\mathsf{T}}$. No hay una matriz de transición entre esta base de dos vectores de U y la base usual de tres vectores de $\mathbb{R}^3$: son bases de espacios distintos. La matriz rectangular con columnas u_1, u_2 reconstruye un vector de U dentro del ambiente, pero no es una transición cuadrada de bases del mismo espacio.

El cuerpo de escalares también forma parte de la estructura. La correspondencia $a + bi \mapsto (a,b)$ es un isomorfismo entre $\mathbb{C}$, considerado como espacio real, y $\mathbb{R}^2$. En cambio, $\mathbb{C}$ tiene dimensión uno sobre $\mathbb{C}$ y no es isomorfo como espacio complejo a $\mathbb{C}^2$. Incluso una función biyectiva que respete sumas puede fallar para los escalares elegidos: la conjugación es real lineal, pero no compleja lineal, ya que $\overline{i \cdot 1} = -i \neq i\overline{1}$.

La construcción de coordenadas tiene además un límite de soporte. Para el espacio de todos los polinomios $\mathbb{F}[t]$, la lista $(1, t, t^2, \dots)$ proporciona coeficientes únicos, pero cada polinomio utiliza

sólo un número finito de ellos. Su espacio de coordenadas es el de las sucesiones de soporte finito $\mathbb{F}^{(\mathbb{N}_0)}$, con operaciones entrada por entrada. No es el espacio de todas las sucesiones: $(1,1,1,\dots)$ no codifica un polinomio. La aplicación que lleva un polinomio a su sucesión de coeficientes es lineal, inyectiva y sobreyectiva hacia ese espacio de soporte finito; la reconstrucción es una suma finita. No necesitamos elegir bases de espacios arbitrarios para justificar este ejemplo explícito.

10.8. Ejercicios

Las bases se entienden ordenadas y las coordenadas son columnas. Todos los cálculos son reales salvo indicación contraria. Justifique las respuestas y compruebe las conversiones reconstruyendo el objeto.

Calcular y reconstruir. **1.** Para $\mathcal{B} = ((1,1),(1,-1))$, calcule $[(4,2)]_{\mathcal{B}}$ y reconstruya el vector desde la columna $(2,-3)^{\mathsf{T}}$.

2. En $\mathcal{C} = ((1,0),(1,1))$, determine las coordenadas de $(4,2)$ y del vector cuyas coordenadas en $\mathcal{B}$ del ejercicio 1 son $(2,-3)^{\mathsf{T}}$.

3. Halle las dos transiciones entre $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$. Verifique ambos productos identidad y convierta $(2,-3)^{\mathsf{T}}$ de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.

4. En $P_2(\mathbb{R})$, calcule las coordenadas de $2+3t+t^2$ en $\mathcal{C}_1 = (1, t-1, (t-1)^2)$ y compruebe por expansión.

5. Un polinomio tiene coordenadas $(4,-2,3)^{\mathsf{T}}$ en $\mathcal{C}_1$. Halle sus coordenadas en $(1,t,t^2)$.

6. Para $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, escriba sus coordenadas en $(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})$ y en $(E_{11},E_{21},E_{12},E_{22})$. Dé la matriz que convierte la primera columna en la segunda.

7. Para el plano $U = \{z = x + y\}$, pruebe que $((1,0,1),(0,1,1))$ es una base de U y halle las coordenadas de $(2,-3,-1)$.

8. En $\mathbb{C}$ como espacio real, use las bases $(1,i)$ y $(1+i, 1-i)$. Halle ambas columnas de $3+i$ y las transiciones entre ellas.

9. Determine para qué $a \in \mathbb{R}$ la lista $((1,a),(a,1))$ es una base de $\mathbb{R}^2$. Para los valores admisibles, halle las coordenadas de (x,y) y trate por separado los valores excepcionales.

10. En $\mathbb{F}_2^2$, pruebe que $((1,1),(0,1))$ es una base y calcule las coordenadas de $(1,0)$. ¿Es una base $((1,1),(1,-1))$ sobre ese mismo cuerpo?

Demostrar y controlar las hipótesis. **11.** Demuestre directamente que la inversa de una transformación lineal biyectiva es lineal. Indique en qué pasos utiliza sobreyectividad e inyectividad.

12. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, es biyectiva. Explique por qué no es un isomorfismo de espacios reales.

13. Pruebe que un isomorfismo conserva exactamente las relaciones lineales de una lista finita. Deduzca la conservación de independencia y de dimensión de subespacios finitos.

14. Sean V, W de dimensión n y $\mathcal{B}$ una base de V. Para una transformación lineal $T : V \to W$, pruebe que T es un isomorfismo si y sólo si la lista $T(\mathcal{B})$ es una base de W.

15. Construya un isomorfismo explícito $P_3(\mathbb{F}) \to M_2(\mathbb{F})$ y su inversa. ¿La existencia de este isomorfismo permite identificar sin más las multiplicaciones de ambos espacios?

16. Determine si la conjugación $z \mapsto \bar{z}$ es un isomorfismo de $\mathbb{C}$ como espacio real y como espacio complejo. Explique por qué el cuerpo debe figurar en la respuesta.

17. Describa el isomorfismo de coordenadas del espacio nulo. ¿Puede un espacio no nulo ser isomorfo a él?

18. Pruebe las identidades de imágenes de suma e intersección bajo un isomorfismo. Muestre con una transformación no inyectiva que la igualdad para intersecciones puede fallar.

19. Un cálculo arma Q con columnas $[c_j]_{\mathcal{B}}$ y luego usa $[v]_{\mathcal{C}} = Q[v]_{\mathcal{B}}$. Diagnostique la dirección y refute la fórmula con las bases de la apertura y un vector básico.

20. Pruebe la ley de composición de transiciones y deduzca que recorrer un ciclo $\mathcal{B} \to \mathcal{C} \to \mathcal{D} \to \mathcal{B}$ produce identidad. Declare el orden exacto del producto.

Construir y contrastar representaciones. **21.** Tome $\mathcal{B} = ((1,1),(1,-1))$, $\mathcal{C} = ((1,0),(1,1))$ y $\mathcal{D} = ((1,0),(0,1))$. Calcule la transición de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{D}$ pasando por $\mathcal{C}$ y compruebe cada columna.

22. En $\mathbb{R}^3$, sean $\mathcal{C} = ((1,0,0),(1,1,0),(0,1,1))$ y $\mathcal{B} = ((1,1,1),(1,0,1),(0,1,1))$. Calcule $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ mediante una matriz ampliada y convierta $(1,2,-1)^{\mathsf{T}}$ desde $\mathcal{B}$.

23. Fije $\mathcal{C} = ((1,0),(1,1))$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Construya la única base $\mathcal{B}$ con $P = P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ y compruebe independencia.

24. ¿Puede la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ser una transición de bases de un mismo espacio bidimensional? Explique qué falla al reconstruir sus columnas con una base fijada.

25. En $P_2(\mathbb{R})$, use $\mathcal{C}_h = (1, t-h, (t-h)^2)$. Halle la transición de $\mathcal{C}_1$ a $\mathcal{C}_2$ y convierta la columna $(6,5,1)^{\mathsf{T}}$.

26. Pruebe que $\mathcal{C}_h$ es base de $P_2(\mathbb{F})$ para cualquier cuerpo. Escriba la transición desde $(1,t,t^2)$ y su inversa en característica dos.

27. Construya el isomorfismo de evaluación $E : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ en $0,1,2$. Halle la preimagen de $(1,2,5)$ y la matriz que convierte coeficientes usuales en valores evaluados.

28. Considere la misma regla $p \mapsto (p(0),p(1),p(2))$ sobre $\mathbb{F}_2$. Determine núcleo e imagen en $P_2(\mathbb{F}_2)$ y explique por qué el argumento real de interpolación ya no da un isomorfismo hacia $\mathbb{F}_2^3$.

29. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^2$ generado por $(1,1)$. Halle sus subespacios de coordenadas en las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ de la apertura y compruebe la proposición 10.9.

30. La columna $(1,0)^{\mathsf{T}}$ aparece en dos cálculos, uno con base $\mathcal{B}$ y otro con base $\mathcal{C}$. ¿Prueba que los vectores originales son iguales? Dé la condición exacta para que esas dos columnas sí representen el mismo vector, y un contraejemplo concreto.

Integrar y transferir. **31.** Si $\mathcal{B} = (b_1,\dots,b_n)$ y $\mathcal{C} = (b_{\sigma(1)},\dots,b_{\sigma(n)})$ para una permutación σ, determine la columna j de $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$. Explique por qué la matriz inversa también tiene una sola entrada uno por fila y columna.

32. Si $\mathcal{C} = (\lambda_1 b_1,\dots,\lambda_n b_n)$ con cada $\lambda_j \neq 0$, halle ambas transiciones. ¿Qué sucede si algún escalar es cero?

33. Sean $T, S : V \to W$ isomorfismos. Pruebe que $S^{-1}T$ es un automorfismo de V y que $T = S(S^{-1}T)$. Explique cómo expresa la libertad en elegir una identificación entre dos espacios.

34. Pruebe que fijar una base $\mathcal{C}$ de V establece una biyección entre sus bases ordenadas y las matrices invertibles de orden n. Determine qué matriz corresponde a $\mathcal{C}$ y trate $n = 0$.

35. Escriba $R(h) = \begin{pmatrix} 1 & h & h^2 \\ 0 & 1 & 2h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pruebe $R(k)R(h) = R(h+k)$ sobre cualquier cuerpo e interprete la igualdad mediante centros sucesivos de coordenadas polinómicas. Deduzca la inversa.

36. Para una lista de polinomios de grado a lo sumo dos y una base fija $\mathcal{B}$ de $P_2(\mathbb{F})$, pruebe que el rango de la matriz de sus columnas de coordenadas es la dimensión del espacio que generan los polinomios. ¿Por qué cambia la matriz, pero no ese rango, si cambiamos la base común?

37. Pruebe que el espacio $\mathbb{F}[t]$ es isomorfo a $\mathbb{F}^{(\mathbb{N}_0)}$. Muestre por qué la misma función de coeficientes no es sobreyectiva hacia el espacio de todas las sucesiones.

38. Sea $\dim V = n$ sobre $\mathbb{F}_q$. Cuente las bases ordenadas de V y deduzca la cantidad de matrices invertibles $n \times n$. Incluya $n = 0$.

39. Sean $U, H \subseteq V$ subespacios finitos e $T : V \to W$ un isomorfismo. Muestre que los datos de dimensión de $U, H, U \cap H, U + H$ se conservan. Aplique la observación a un problema de intersección de polinomios codificado con columnas, sin definir ninguna operación entre polinomios distinta de suma y producto por escalares.

40. Un estudiante recibe $[v]_{\mathcal{B}}$ y desea $[v]_{\mathcal{C}}$. Enumera las columnas de $S_{\mathcal{B}}$ y $S_{\mathcal{C}}$ en una referencia común, pero usa $S_{\mathcal{B}}^{-1}S_{\mathcal{C}}$. Corrija el procedimiento, explique qué calcula realmente esa matriz y diseñe una comprobación con vectores básicos que detecte el error.

10.9. Soluciones razonadas

1. Las ecuaciones $a+b=4$, $a-b=2$ dan $a=3$, $b=1$, por lo que la columna es $(3,1)^{\mathsf{T}}$. La reconstrucción desde $(2,-3)^{\mathsf{T}}$ es $2(1,1)-3(1,-1)=(-1,5)$. Los números de una columna sólo se interpretan después de asociarlos a los vectores básicos en su orden.

2. Como $u(1,0)+v(1,1)=(u+v,v)$, las coordenadas de (x,y) son $(x-y,y)^{\mathsf{T}}$. Resultan $(2,2)^{\mathsf{T}}$ para $(4,2)$ y $(-6,5)^{\mathsf{T}}$ para $(-1,5)$, reconstruido en el ejercicio anterior. En ambos casos sumar los dos coeficientes da la primera entrada ambiental y el segundo coeficiente da la segunda.

3. Las columnas de $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ son $(0,1)^{\mathsf{T}}$ y $(2,-1)^{\mathsf{T}}$. La matriz es $P=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$. Su inversa es $Q=\begin{pmatrix}1/2 & 1\\ 1/2 & 0\end{pmatrix}$, pues multiplicar en ambos órdenes da diagonal $(1,1)$ y entradas fuera de la diagonal cero. En particular, $P(2,-3)^{\mathsf{T}}=(-6,5)^{\mathsf{T}}$, que reconstruye $-6(1,0)+5(1,1)=(-1,5)$. La matriz inversa entrega $Q(-6,5)^{\mathsf{T}}=(2,-3)^{\mathsf{T}}$.

4. Sustituimos $t=(t-1)+1$: $2+3t+t^2=6+5(t-1)+(t-1)^2$. Las coordenadas son $(6,5,1)^{\mathsf{T}}$. Al expandir, el término constante es $6-5+1=2$, el coeficiente de t es $5-2=3$ y el de t^2 es uno. Se recupera el polinomio inicial completo.

5. Reconstruimos $p=4-2(t-1)+3(t-1)^2$. La expansión es $p=4-2t+2+3t^2-6t+3=9-8t+3t^2$, así que la columna usual es $(9,-8,3)^{\mathsf{T}}$. El signo del centro interviene dos veces en el término lineal; leer sólo los números originales como coeficientes de $1,t,t^2$ produciría otro polinomio.

6. En la primera base, la columna es $(5,-1,2,4)^{\mathsf{T}}$; en la segunda, $(5,2,-1,4)^{\mathsf{T}}$. La matriz de conversión es $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$: intercambia las entradas segunda y tercera. Sus columnas se obtienen leyendo cada unidad matricial de la primera lista en la segunda. Aplicarla dos veces devuelve la columna inicial, de modo que es su propia inversa.

7. Todo vector del plano se escribe $(x,y,x+y)=x(1,0,1)+y(0,1,1)$, lo que prueba generación. Una combinación nula tiene primeras dos entradas $a=0$ y $b=0$, de modo que los generadores son independientes. Son una base de U y las coordenadas del vector pedido son $(2,-3)^{\mathsf{T}}$, pues $2+(-3)=-1$ en su tercera entrada.

8. En $(1,i)$ la columna de $3+i$ es $(3,1)^{\mathsf{T}}$. Escribir $a(1+i)+b(1-i)=(a+b)+(a-b)i$ da $a=2$, $b=1$. La transición desde $(1+i,1-i)$ hacia $(1,i)$ es $\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$ y la contraria es $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$. Los coeficientes son reales, como exige el cuerpo declarado; sus productos dan identidad.

9. Resolver $u+av=x$, $au+v=y$ da $(1-a^2)v=y-ax$. Si $a\neq 1,-1$, obtenemos $v=(y-ax)/(1-a^2)$ y $u=(x-ay)/(1-a^2)$; cada vector tiene representación única y la lista es base. Si $a=1$, los dos vectores coinciden y sólo generan la recta $y=x$. Si $a=-1$, son opuestos y sólo generan $y=-x$. En ambos casos excepcionales hay dependencia y no puede asignarse una columna única a todos los vectores del plano. La división se efectúa después de excluir esos valores.

10. En $\mathbb{F}_2$, $a(1,1)+b(0,1)=(a,a+b)$. Para obtener (x,y) debemos tomar $a=x$, $b=y+x$, una elección única. Para $(1,0)$ las coordenadas son $(1,1)^{\mathsf{T}}$. En la otra lista, $-1=1$, por lo que sus dos vectores son iguales y la lista es dependiente. La apariencia de las fórmulas reales no garantiza una base al cambiar de característica.

11. Dados y,z en el codominio, la sobreyectividad permite escribirlos como Tx,Tu. La linealidad da $T(ax+bu)=ay+bz$. La inyectividad garantiza que esa preimagen es única, por lo que $T^{-1}(ay+bz)=ax+bu=aT^{-1}y+bT^{-1}z$. Se ha probado la identidad para todos los escalares y vectores, que es la linealidad buscada. No interviene dimensión finita.

12. Aunque cada real tiene una única raíz cúbica real, f no conserva sumas: $f(1+1)=8$ mientras que $f(1)+f(1)=2$. Tampoco conserva todos los productos por escalares, pues $f(2\cdot 1)=8\neq 2f(1)$. La biyectividad sólo asegura una correspondencia de conjuntos; falta conservar la estructura vectorial.

13. Si $\sum_j a_j v_j=0$, aplicar T da la relación correspondiente en las imágenes. Si la suma de imágenes es cero, la linealidad permite reunirla como $T(\sum_j a_j v_j)=0$; la inyectividad obliga a que el argumento sea cero. Así se conservan exactamente las relaciones y, en particular, la ausencia de

relaciones no triviales. Una base finita de un subespacio genera su imagen y conserva independencia; ambas bases tienen la misma longitud, que da igualdad de dimensiones.

14. Un isomorfismo envía una base a una base por la proposición 10.3. Recíprocamente, si las imágenes de la base $\mathcal{B} = (b_j)$ forman una base de W, cualquier salida $w = \sum_j a_j T(b_j)$ proviene de $\sum_j a_j b_j$, lo que da sobreyectividad. Si $T(\sum_j a_j b_j) = 0$, la independencia de las imágenes anula todos los coeficientes, y el núcleo es trivial. C09 da inyectividad; junto con linealidad ya supuesta, obtenemos el isomorfismo.

15. La función $a + bt + ct^2 + dt^3 \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tiene inversa $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a + bt + ct^2 + dt^3$. Ambas reglas respetan suma y escalares entrada por entrada. No se deduce compatibilidad con productos: P_3 no es cerrado bajo el producto usual de polinomios. Aun para productos que permanezcan dentro, no hay garantía: la imagen de 1 es E_{11} y la de t es E_{12}, mientras que la de $t \cdot 1$ es E_{12} pero $E_{12}E_{11} = 0$. La correspondencia clasifica la estructura vectorial.

16. La conjugación conserva sumas y satisface $\overline{rz} = r\bar{z}$ para $r \in \mathbb{R}$. Es su propia inversa, así que es un isomorfismo real. Para el escalar complejo i, $\overline{i \cdot 1} = -i$ pero $i\bar{1} = i$; por eso no es compleja lineal y no es un isomorfismo complejo. El mismo conjunto y la misma función se están examinando con dos estructuras de escalares diferentes.

17. La base vacía del espacio nulo asigna al cero la única columna de longitud cero; la reconstrucción usa una suma vacía y devuelve cero. Esa función entre conjuntos de un elemento es lineal y biyectiva. Un espacio no nulo contiene un vector distinto de cero, de modo que la única transformación hacia el espacio nulo no es inyectiva. Tampoco puede ser isomorfo a éste en dimensión infinita: la obstrucción ya se ve en el núcleo.

18. Las imágenes de sumas son sumas de imágenes porque $T(u+h) = Tu+Th$; cada representación en cualquiera de los dos lados produce una en el otro. Para una intersección, $T(U \cap H)$ siempre está contenido en $T(U) \cap T(H)$. Si un elemento del segundo conjunto tiene representaciones $Tu = Th$, la inyectividad da $u = h \in U \cap H$ y prueba la otra inclusión. Si falta inyectividad, tome $T(x, y) = x$, $U = \operatorname{span}(1, 0)$ y $H = \operatorname{span}(1, 1)$. La intersección de los subespacios de entrada es cero, cuya imagen es cero, pero ambas imágenes son $\mathbb{R}$ y su intersección también lo es.

19. Las columnas descritas forman $Q = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$, por lo que convierten en el sentido contrario al pretendido. Con las bases de la apertura, $Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$. Para $v = b_1 = (1, 1)$ tenemos $[v]_{\mathcal{B}} = e_1$ y $[v]_{\mathcal{C}} = (0, 1)^{\mathsf{T}}$, pero $Qe_1 = (1/2, 1/2)^{\mathsf{T}}$. La fórmula correcta usa Q^{-1} cuando la entrada está en $\mathcal{B}$. Probarla sobre el primer vector básico ya revela el error.

20. Convertir sucesivamente da $[v]_{\mathcal{D}} = P_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}} P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} [v]_{\mathcal{B}}$. La unicidad prueba la ley de composición. Para el ciclo completo el producto es $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{D}} P_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}} P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = I$. Su factor derecho realiza el primer cambio y el izquierdo el último. Cambiar el orden altera los recorridos que representan los factores.

21. La transición de $\mathcal{C}$ a la usual es $S_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, y la de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ es $P = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Su producto en ese orden es $S_{\mathcal{C}} P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Las columnas son exactamente $b_1 = (1, 1)^{\mathsf{T}}$ y $b_2 = (1, -1)^{\mathsf{T}}$ en la base usual. Esto confirma el resultado columna por columna sin depender sólo de la ley abstracta.

22. La matriz ampliada inicial tiene bloques $S_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $S_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Primero efectuamos $R_2 \leftarrow R_2 - R_3$ y después $R_1 \leftarrow R_1 - R_2$ con la fila ya actualizada, en ambos bloques. El izquierdo queda en identidad y el derecho en

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como P tiene rango tres por eliminación, las columnas de $S_{\mathcal{B}} = S_{\mathcal{C}} P$ también forman una base, comprobando la premisa para $\mathcal{B}$. Convertir $(1, 2, -1)^{\mathsf{T}}$ da $(5, -2, 2)^{\mathsf{T}}$. En $\mathcal{C}$ se reconstruye $(3, 0, 2)$; en $\mathcal{B}$, $b_1 + 2b_2 - b_3 = (3, 0, 2)$, la misma salida geométrica.

23. La primera columna indica $b_1 = c_1 = (1, 0)$ y la segunda $b_2 = 2c_1 + c_2 = (3, 1)$. Una combinación $a(1, 0) + b(3, 1) = 0$ exige $b = 0$ al mirar la segunda entrada, y luego $a = 0$. Ambos

vectores son independientes y generan el plano, pues $(x, y) = (x - 3y)b_1 + yb_2$. La base es única porque sus dos vectores tienen coordenadas prescritas en $\mathcal{C}$.

24. La segunda columna de la matriz es dos veces la primera, así que no es invertible y no puede ser una transición. Al reconstruirlas en una base fija, la segunda salida vuelve a ser dos veces la primera por linealidad. Los vectores reconstruidos son dependientes y no forman una base bidimensional. El fallo se detecta sin determinantes y sobre cualquier cuerpo; en característica dos la segunda columna es cero y la dependencia persiste.

25. Si ponemos $u = t - 1$, entonces $t - 2 = u - 1$. La transición es la misma conversión de potencias hacia un centro desplazado una unidad: $P_{\mathcal{C}_2 \leftarrow \mathcal{C}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Aplicada a $(6, 5, 1)^{\mathsf{T}}$ da $(12, 7, 1)^{\mathsf{T}}$. En efecto, $2 + 3t + t^2 = 12 + 7(t-2) + (t-2)^2$. Expandir produce constante $12 - 14 + 4 = 2$, término lineal $7 - 4 = 3$ y coeficiente cuadrático uno.

26. Si $a + b(t - h) + c(t - h)^2 = 0$, el coeficiente de t^2 fuerza $c = 0$, después el de t fuerza $b = 0$ y el constante fuerza $a = 0$. La lista es independiente y tiene tres vectores en un espacio de dimensión tres, por lo que es base. La transición usual hacia ella es $R(h) = \begin{pmatrix} 1 & h & h^2 \\ 0 & 1 & 2h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En característica dos se reduce a $\begin{pmatrix} 1 & h & h^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y es su propia inversa, pues en el cuadrado las entradas fuera de diagonal aparecen dos veces y se anulan. Esto coincide con $R(-h)$ porque $-h = h$ en ese cuerpo.

27. Para $p = a + bt + ct^2$, la evaluación produce $(a, a + b + c, a + 2b + 4c)^{\mathsf{T}}$. Su matriz desde coeficientes usuales es $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Restar la primera fila de las otras y luego dos veces la segunda actualizada de la tercera deja pivotes $1, 1, 2$, todos no nulos sobre $\mathbb{R}$. La evaluación es lineal y biyectiva. Para $(1, 2, 5)$ las ecuaciones dan $a = 1$, $b + c = 1$, $2b + 4c = 4$, de donde $c = 1$, $b = 0$ y $p = 1 + t^2$. La inversa general se expresa con los tres polinomios ℓ_j del texto. Como los valores evaluados son las coordenadas en (ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2), la matriz V es también la transición hacia esa base desde la usual.

28. En $\mathbb{F}_2$ los nodos 0 y 2 son iguales, por lo que la salida es $(a, a + b + c, a)$. Se alcanza exactamente el plano de ternas con primera y tercera entradas iguales: dados u, v, el polinomio $u + (u + v)t$ produce (u, v, u). El núcleo exige $a = 0$, $b = c$ y tiene base $(t + t^2)$; su dimensión es uno y el rango dos. La interpolación real utilizaba tres nodos distintos y división por dos, condiciones que aquí fallan. La misma expresión numérica no define un isomorfismo hacia $\mathbb{F}_2^3$.

29. El generador de U es b_1, por lo que $c_{\mathcal{B}}(U) = \operatorname{span}(1, 0)$. Como $b_1 = c_2$, en la otra base resulta $c_{\mathcal{C}}(U) = \operatorname{span}(0, 1)$. Multiplicar por $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ envía $(a, 0)^{\mathsf{T}}$ a $(0, a)^{\mathsf{T}}$, y lleva exactamente la primera recta de coordenadas a la segunda. El subespacio original sigue siendo la misma recta geométrica y ambas descripciones tienen dimensión uno.

30. En cada base la columna representa su primer vector: b_1 y c_1, respectivamente. Las dos columnas representan el mismo vector si y sólo si $b_1 = c_1$, o equivalentemente si $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} e_1 = e_1$. Con las bases de la apertura, $b_1 = (1, 1)$ y $c_1 = (1, 0)$ son distintos. Igualdad numérica de columnas sin una base común no da igualdad de objetos.

31. El vector b_j aparece en la posición $\sigma^{-1}(j)$ de $\mathcal{C}$, así que la columna j de la transición es $e_{\sigma^{-1}(j)}$. Como σ es una permutación, esas columnas recorren todos los vectores usuales una vez: hay un uno en cada fila y columna. La inversa deshace la permutación y su columna j es $e_{\sigma(j)}$. Ambas matrices representan la misma reconstrucción con los coeficientes reordenados.

32. Escribir $v = \sum_j x_j b_j = \sum_j (x_j / \lambda_j)(\lambda_j b_j)$ da $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \operatorname{diag}(\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1})$. La inversa es $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Si algún escalar es cero, la lista $\mathcal{C}$ contiene un vector nulo y deja de ser base; tampoco puede dividirse por ese escalar ni formar la transición invertible.

33. Un automorfismo es un isomorfismo de un espacio sobre sí mismo. La proposición 10.1 muestra que $S^{-1}T : V \to V$ es un isomorfismo, con inversa $T^{-1}S$. Por asociatividad, $S(S^{-1}T) = (SS^{-1})T = T$. Toda identificación T se obtiene así de una identificación elegida S precedida por

un automorfismo del dominio. La existencia de muchas transformaciones invertibles del dominio explica por qué conocer sólo las dimensiones no fija una identificación única.

34. A cada base $\mathcal{B}$ le asignamos $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$. Es invertible por el teorema 10.5. La aplicación es inyectiva porque sus columnas determinan las coordenadas y, con ellas, cada vector de $\mathcal{B}$. Es sobreyectiva por el teorema 10.8, que reconstruye una base desde toda matriz invertible. La propia $\mathcal{C}$ corresponde a identidad. Para $n = 0$ hay una sola base, la vacía, y una sola matriz de orden cero, cuya multiplicación actúa como identidad en el espacio de la columna vacía. Es invertible con inversa ella misma y mantiene la biyección.

35. Multiplicar da diagonal uno, entrada $(1, 2)$ igual a $h + k$, entrada $(2, 3)$ igual a $2h + 2k$, y entrada $(1, 3)$ igual a $h^2 + 2kh + k^2 = (h + k)^2$. Las otras entradas son cero. Por tanto el producto es $R(h + k)$ en cualquier característica. Cambiar desde potencias de t a potencias de $t - h$ aplica $R(h)$; pasar luego a potencias de $(t - h) - k$ aplica $R(k)$. El resultado debe describir potencias de $t - (h + k)$, de acuerdo con la ley de transiciones. Como $R(0) = I$, la inversa es $R(-h)$.

36. Sea U el generado por los polinomios. La linealidad del isomorfismo de coordenadas hace que $c_{\mathcal{B}}(U)$ sea el espacio de columnas de la matriz indicada. La proposición 10.3 da igualdad de dimensiones entre ese subespacio y U; C09 identifica la dimensión del espacio de columnas con el rango. Al cambiar de base, todas las columnas se multiplican a la izquierda por una misma transición invertible. Esa función transporta el subespacio de columnas mediante un isomorfismo, así que su dimensión permanece igual. Es importante convertir todas las columnas con la misma base y la misma dirección.

37. Asociamos a $p = \sum_{j=0}^{m} a_j t^j$ la sucesión $(a_0, \ldots, a_m, 0, 0, \ldots)$. La unicidad de coeficientes hace bien definida la función y prueba inyectividad. Las operaciones de polinomios suman y escalan coeficientes, así que la función es lineal. Toda sucesión de soporte finito se reconstruye mediante una suma finita de monomios y, por tanto, la función es sobreyectiva hacia $\mathbb{F}^{(\mathbb{N}_0)}$. Si ampliamos el codominio a todas las sucesiones, la sucesión de unos no se alcanza: ningún polinomio tiene infinitos coeficientes no nulos. Esa misma regla sigue siendo inyectiva pero deja de ser un isomorfismo hacia el codominio ampliado.

38. Hay $q^n - 1$ elecciones para el primer vector, pues debe ser no nulo. Elegidos j vectores independientes, su generado tiene q^j elementos por unicidad de las coordenadas en ese subespacio. El siguiente vector puede ser cualquiera de los $q^n - q^j$ que quedan fuera; elegirlo preserva independencia. Al completar n elecciones obtenemos una base por C07. Por tanto, el número es $\prod_{j=0}^{n-1}(q^n - q^j)$. La biyección del ejercicio 34 da el mismo número para matrices invertibles de orden n. Para $n = 0$, el producto vacío vale uno y cuenta la base vacía y la matriz de orden cero.

39. La proposición 10.3 da $T(U \cap H) = T(U) \cap T(H)$ y $T(U + H) = T(U) + T(H)$, y conserva dimensión en cada uno de esos subespacios finitos. Un ejemplo concreto en $P_2(\mathbb{R})$ es $U = \operatorname{span}(1, t)$, $H = \operatorname{span}(1, t^2)$. En la base usual sus columnas generan respectivamente los planos $\operatorname{span}(e_1, e_2)$ y $\operatorname{span}(e_1, e_3)$, cuya intersección es $\operatorname{span}(e_1)$ y cuya suma es todo $\mathbb{R}^3$. Al reconstruir se obtiene $U \cap H = \operatorname{span}(1)$ y $U + H = P_2(\mathbb{R})$; las dimensiones son $2, 2, 1, 3$. Sólo se utilizaron relaciones lineales y reconstrucción de coeficientes.

40. Debemos reconstruir las coordenadas de referencia con $S_{\mathcal{B}}$ y después leerlas en $\mathcal{C}$ con $S_{\mathcal{C}}^{-1}$; la matriz correcta es $S_{\mathcal{C}}^{-1} S_{\mathcal{B}}$. La propuesta $S_{\mathcal{B}}^{-1} S_{\mathcal{C}}$ convierte en la dirección opuesta, de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$. Para comprobar un candidato P, verifique que $S_{\mathcal{C}} P e_j = S_{\mathcal{B}} e_j$ para cada vector usual e_j. Si falla una columna, el procedimiento es incorrecto; si se cumplen todas, las matrices son iguales y la fórmula vale para cualquier columna. En la apertura, el candidato incorrecto envía e_1 a $(1/2, 1/2)^{\mathsf{T}}$, cuando las coordenadas de b_1 en $\mathcal{C}$ son $(0, 1)^{\mathsf{T}}$.

Lecturas y referencias

Johnston, *Advanced Linear and Matrix Algebra* (2021), §§1.2.1–1.2.2 y 1.3.1, desarrolla coordenadas, transiciones e isomorfismos; su lista de erratas corrige expresamente una dirección de subíndice en la prueba de transición de la p. 31. Friedberg, Insel y Spence, *Linear Algebra*, 5.ª edición, §§2.4–2.5, distingue inversas, isomorfismos y conversión de coordenadas. Hoffman y Kunze, *Linear Algebra*, 2.ª edición, §§2.4 y 3.3, explica la dependencia de una base ordenada y la identificación de espacios por coordenadas. Axler, *Linear Algebra Done Right*, 4.ª edición, §3D, ofrece el contraste estructural mediante invertibilidad y clasificación por dimensión. Las demostraciones y los ejemplos

se desarrollaron para este capítulo con las dependencias ya disponibles; la representación general de transformaciones y sus cambios de matriz se estudiará en C12.

Capítulo 11

Sumas directas y espacios cociente

Un instrumento registra sólo la segunda coordenada de una entrada (x, y). Las entradas $(4, 2)$, $(0, 2)$ y $(-3, 2)$ producen la misma lectura. La información que falta puede variar en la dirección horizontal: sumar cualquier vector de $U = \text{span}(1, 0)$ deja intacta la lectura. En C09 describimos ese conjunto de entradas como una fibra, la recta $(0, 2) + U$.

Podemos organizar esta situación de dos maneras. Si queremos reconstruir la entrada, separamos $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$ y conservamos ambas componentes. Si sólo importa la lectura, reunimos en un mismo objeto todas las entradas que difieren por un vector de U. Ese objeto será una clase completa de entradas, no un punto elegido de la recta.

La elección de $(0, 2)$ como representante es cómoda, pero no obligatoria. La recta oblicua $C = \text{span}(1, 1)$ también corta cada fibra horizontal en un solo punto: la fibra de lectura dos contiene el punto $(2, 2)$ de C. Usarla para reconstruir cambia la descomposición a $(x, y) = (x - y, 0) + (y, y)$. La clase de entradas compatibles sigue siendo la misma; la elección de una componente que la represente ha cambiado.

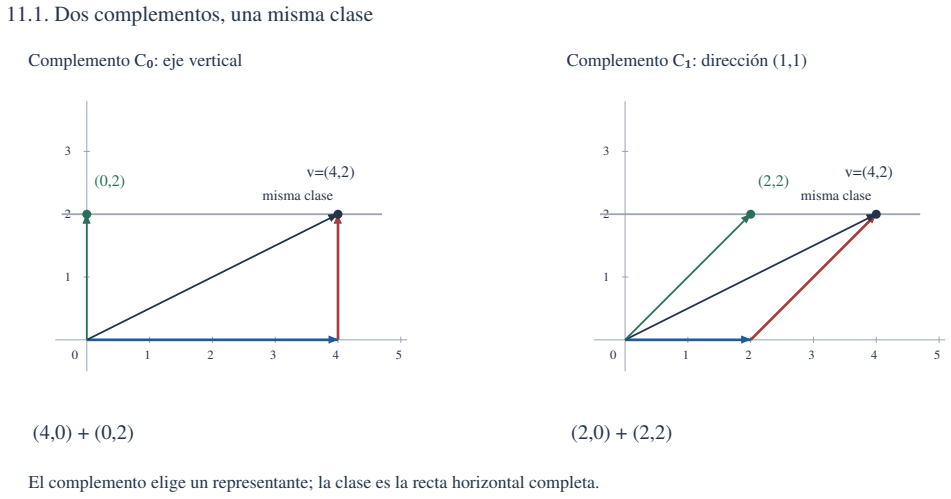


Figura 11.1. Los puntos $(0, 2)$ y $(2, 2)$ son representantes de la misma clase horizontal. Elegir un complemento determina cuál se usa; formar la clase no exige esa elección.

Las sumas directas darán condiciones para descomponer vectores de manera única. Los cocientes permitirán conservar sólo la información que permanece al ignorar un subespacio. La relación entre ambas construcciones explicará por qué podemos calcular con representantes sin convertir la elección de uno de ellos en parte de la definición.

Trabajamos sobre un mismo cuerpo $\mathbb{F}$. Las transformaciones e isomorfismos son los de C08–C10. La construcción de clases retoma la equivalencia de T1 C08 y las fibras de C09; volveremos a demostrar las propiedades que necesitamos. Se indicará finitud cuando se utilicen bases finitas o dimensiones enteras. No se presupone producto interno.

11.1. Descomponer sin ambigüedad

Si U y W son subespacios de V, su suma $U + W$ está formada por los vectores $u + w$. La existencia de esa expresión está incluida en la definición de la suma. La unicidad requiere una condición adicional: una dirección compartida por ambos subespacios puede trasladarse de una componente a la otra sin cambiar el total.

Definición 11.1 (suma directa interna). Decimos que $U + W$ es una **suma directa** y escribimos $U \oplus W$ si cada vector de la suma admite una única expresión $u+w$, con $u \in U$ y $w \in W$. La afirmación $V = U \oplus W$ exige además que $U + W = V$.

Teorema 11.1 (criterio de suma directa). La suma $U+W$ es directa si y sólo si $U \cap W = \{0\}$. Para una familia finita de subespacios $U_1, \dots, U_m$, la expresión $v = u_1 + \cdots + u_m$ es única en su suma si y sólo si una igualdad $u_1 + \cdots + u_m = 0$, con $u_j \in U_j$, obliga a que todos los u_j sean cero.

Demostración. Si $U \cap W = \{0\}$ y $u + w = u' + w'$, al reagrupar obtenemos $u - u' = w' - w$. El miembro izquierdo pertenece a U y el derecho a W, por lo que su valor común debe ser cero. Así, $u = u'$ y $w = w'$. En sentido contrario, si $z \in U \cap W$, el cero admite las expresiones $0 + 0$ y $z + (-z)$. La unicidad fuerza $z = 0$.

Para una familia finita, dos expresiones de un mismo vector, al restarse, producen una expresión de cero mediante las diferencias de sus componentes. Si toda expresión de cero es trivial, esas diferencias se anulan y las componentes son únicas. Recíprocamente, la unicidad aplicada al vector cero compara cualquier expresión suya con $0 + \cdots + 0$ y obliga a que todas las componentes se anulen. □

En una suma directa de varias componentes escribimos $U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$. Para tres o más subespacios no basta que se corten por parejas sólo en cero. En $\mathbb{R}^2$, las rectas $\operatorname{span} e_1$, $\operatorname{span} e_2$ y $\operatorname{span}(e_1 + e_2)$ tienen intersecciones por parejas nulas, pero $e_1 + e_2 - (e_1 + e_2) = 0$ es una relación con componentes no nulas en las tres rectas. Su suma no es directa. El criterio controla una relación conjunta y no únicamente las intersecciones de dos en dos.

Si las componentes tienen bases finitas, concatenar esas bases genera la suma. En una relación nula entre sus vectores, agrupamos los términos de cada subespacio. La directitud anula cada grupo, y la independencia de la base correspondiente anula después cada coeficiente. La concatenación es, por tanto, una base y la dimensión de una suma directa finita es la suma de las dimensiones de sus componentes.

Una descomposición puede estar sugerida por la forma de los objetos. En $P_3(\mathbb{F})$, cada polinomio se separa de manera única como $(a + ct^2) + (bt + dt^3)$; los subespacios generados por $(1, t^2)$ y por (t, t^3) forman una suma directa. Esta separación por exponentes funciona incluso en característica dos, pues no necesita dividir por dos ni interpretar paridad de funciones mediante $p(-t)$.

11.2. Mantener separadas las componentes: la suma externa

Antes de sumar dos vectores podemos guardarlos en posiciones distintas de una pareja. Eso permite distinguir sus procedencias aunque los espacios originales coincidan.

Definición 11.2 (suma directa externa finita). Para espacios $V_1, \dots, V_m$ sobre $\mathbb{F}$, su **suma directa externa finita** es el espacio de tuplas $V_1 \times \cdots \times V_m$, con suma y producto por escalares componente a componente. Cuando importe distinguirla de una suma interna, escribiremos $\bigoplus_{j=1}^{m} {}^{\text{ext}} V_j$.

Para una familia finita, este objeto coincide con el producto cartesiano provisto de las operaciones indicadas. No se está definiendo aquí una suma de una familia infinita; allí la condición de soporte finito tendría que hacerse explícita.

Proposición 11.2 (componentes externas y suma interna). Las operaciones anteriores hacen del producto finito un espacio vectorial. Si todos los V_j tienen dimensión finita, su dimensión es $\sum_j \dim V_j$. Si $U_j \subseteq V$, la función

$$\sigma : U_1 \times \cdots \times U_m \longrightarrow U_1 + \cdots + U_m, \qquad \sigma(u_1, \dots, u_m) = \sum_j u_j,$$

es lineal y sobreyectiva, y es un isomorfismo si y sólo si la suma interna es directa.

Demostración. Las operaciones son cerradas porque lo son en cada componente. Las identidades de asociatividad, conmutatividad y distributividad se verifican en cada posición usando las del espacio correspondiente; dos tuplas son iguales exactamente cuando lo son todas sus componentes. El cero es la tupla de ceros y el opuesto de (v_j) es $(-v_j)$; la compatibilidad de dos escalares y la acción del escalar uno también se verifican posición por posición. Se cumplen así todos los axiomas.

Elegimos una base en cada componente finita e insertamos cada vector básico en su posición, con ceros en las restantes. Estas tuplas generan, pues cualquier tupla se reconstruye expandiendo

cada componente. Son independientes: en una relación nula, cada posición da una relación en la base de esa componente, y todos sus coeficientes se anulan. La longitud de la base obtenida es la suma de las longitudes.

La función σ es lineal al distribuir las sumas y es sobreyectiva por definición de suma de subespacios. Su núcleo contiene exactamente las tuplas cuyas componentes suman cero. Por el teorema 11.1, ese núcleo es trivial exactamente cuando la suma interna es directa. C09 identifica núcleo trivial con inyectividad; junto con la sobreyectividad, esto prueba la afirmación sobre isomorfismos. □

Por ejemplo, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ siempre conserva dos posiciones distintas. En cambio, sumar dentro de $\mathbb{R}$ dos copias del propio $\mathbb{R}$ mediante $(a, b) \mapsto a + b$ pierde información: $(1, -1)$ está en el núcleo. La suma externa existe sin una condición de independencia; identificarla con una suma dentro de un ambiente necesita comprobar esa condición.

En dimensión finita, la proposición y rango-nulidad dan también un criterio numérico: $U_1 + \cdots + U_m$ es directa si y sólo si su dimensión es $\sum_j \dim U_j$. La sobreyectividad de σ hace que la igualdad de dimensiones equivalga a nulidad cero. Este criterio utiliza la dimensión de la suma efectiva, no la del espacio ambiente salvo que ambas coincidan.

11.3. Complementos y proyecciones

Un complemento de U en V es un subespacio C para el cual $V = U \oplus C$. Su función es completar las direcciones de U hasta permitir reconstruir cualquier vector sin ambigüedad.

Teorema 11.3 (existencia finita de complementos). Si V tiene dimensión finita y $U \subseteq V$ es subespacio, existe un complemento C de U. Todo complemento tiene dimensión $\dim V - \dim U$.

Demostración. Elegimos una base $(u_1, \ldots, u_k)$ de U y la extendemos por C07 a una base $(u_1, \ldots, u_k, c_1, \ldots, c_r)$ de V. Sea $C = \operatorname{span}(c_1, \ldots, c_r)$. La base completa genera, de modo que $U + C = V$. Si un vector está en $U \cap C$, sus dos expresiones en los bloques de la base producen, al restarse, una relación en la base completa; su independencia fuerza que todos los coeficientes sean cero. La intersección es nula y la suma es directa. Como $\dim C = r$ y $k + r = \dim V$, obtenemos la fórmula. Para cualquier otro complemento, concatenar bases de las dos componentes da la misma fórmula de dimensión. Los bloques vacíos incluyen $U = \{0\}$ y $U = V$. □

La extensión de una base no determina un complemento único. Para el eje horizontal U de la apertura, cada $C_a = \operatorname{span}(a, 1)$, con $a \in \mathbb{R}$, es un complemento, porque

$$(x, y) = (x - ay, 0) + (ay, y)$$

es una descomposición en las dos componentes y su intersección es cero. Cambiar a cambia la componente elegida y conserva el subespacio que decidimos separar.

Teorema 11.4 (proyecciones algebraicas). Si $V = U \oplus C$, la regla $P(u + c) = u$ define una transformación lineal con $P^2 = P$, imagen U y núcleo C. Recíprocamente, si $P : V \to V$ es lineal y $P^2 = P$, entonces $V = \operatorname{im} P \oplus \ker P$. La transformación $I - P$ proyecta sobre $\ker P$ siguiendo $\operatorname{im} P$.

Demostración. La unicidad de la descomposición hace que la regla tenga un único valor para cada entrada. Si $v = u + c$ y $v' = u' + c'$, entonces $av + bv' = (au + bu') + (ac + bc')$ es la descomposición en los mismos subespacios. Por tanto, $P(av + bv') = aP(v) + bP(v')$. La regla fija todos los vectores de U y anula los de C. Esto prueba que su imagen es exactamente U, que su núcleo es exactamente C y que volver a aplicar P deja el resultado fijo.

Para la recíproca, escribimos $v = Pv + (v - Pv)$. El primer sumando está en la imagen y el segundo en el núcleo, pues $P(v - Pv) = Pv - P^2 v = 0$. Si z está en ambos, $z = Px$ para algún x y $Pz = 0$; pero $Pz = P^2 x = Px = z$, por lo que $z = 0$. La suma es directa por el teorema 11.1. En esa descomposición, $(I - P)v = v - Pv$ conserva la componente del núcleo y anula la de la imagen, lo que prueba la última afirmación. □

El teorema no necesita finitud ni perpendicularidad. En la familia anterior, $P_a(x, y) = (x - ay, 0)$ es una proyección sobre el eje horizontal siguiendo una dirección que suele ser oblicua. Las proyecciones ortogonales se estudiarán cuando haya un producto interno; la identidad $P^2 = P$ ya tiene significado puramente algebraico.

11.4. Una clase reúne todas las entradas indistinguibles

Fijemos un subespacio $U \subseteq V$. Diremos que v y w son equivalentes módulo U cuando $v - w \in U$, y escribiremos $v \sim_U w$. La diferencia expresa exactamente qué cambio entre entradas estamos ignorando. Para el eje horizontal, $(x, y) \sim_U (x', y')$ equivale a $y = y'$.

Proposición 11.5 (clases módulo un subespacio). La relación $\sim_U$ es de equivalencia. La clase de v es $v + U = \{v + u : u \in U\}$. Se cumple

$$v + U = w + U \quad \Longleftrightarrow \quad v - w \in U.$$

Dos clases son iguales o disjuntas, y cada vector pertenece a una única clase.

Demostración. Tenemos $v - v = 0 \in U$, lo que prueba reflexividad. Si $v - w \in U$, su opuesto $w - v$ también está en U, así que la relación es simétrica. Si además $w - z \in U$, la suma $(v - w) + (w - z) = v - z$ pertenece a U, lo que prueba transitividad.

Un vector w pertenece a la clase de v si $w - v \in U$; esto equivale a escribir $w = v + u$ con $u \in U$. La clase es, por tanto, la traslación indicada. Si $v - w \in U$, cualquier $v + u$ se escribe $w + ((v - w) + u)$ y pertenece a $w + U$; invertir los papeles prueba igualdad. Si las clases son iguales, v pertenece a $w + U$ porque $v = v + 0$, y de ahí $v - w \in U$.

Si dos clases comparten un punto z, existen $u, u' \in U$ con $z = v + u = w + u'$, de modo que $v - w = u' - u \in U$ y las clases son iguales. Cada vector pertenece a su clase, y la igualdad o disjunción impide que pertenezca a dos clases distintas. □

Definición 11.3 (conjunto cociente y proyección). El **cociente** V/U es el conjunto de clases $\{v + U : v \in V\}$. La función $\pi_U : V \to V/U$, $\pi_U(v) = v + U$, se llama **proyección canónica** o aplicación cociente. Escribiremos $[v] = v + U$ cuando el subespacio sea inequívoco.

Hay dos niveles de objetos. El vector v pertenece a V; su clase $[v]$ es un elemento de V/U y, a la vez, un subconjunto de V. El subespacio U entero es la clase $[0]$. Al pasar al cociente, todos sus vectores quedan reunidos en ese único elemento. Una clase distinta puede tener muchos representantes aunque, como elemento del cociente, sea un solo vector una vez que definamos las operaciones.

Para $U = \operatorname{span}(1, 0) \subseteq \mathbb{R}^2$, la clase de $(4, 2)$ es toda la recta horizontal de altura dos, no sólo el punto $(0, 2)$. Podemos nombrarla usando cualquiera de sus puntos: $(4, 2)+U = (0, 2)+U = (2, 2)+U$. La igualdad de estas expresiones no afirma igualdad de sus representantes; afirma que todos producen el mismo conjunto.

El conjunto cociente no se obtiene quitando los puntos de U. La clase cero sigue presente, y las demás clases reúnen puntos que permanecen distintos en el espacio original. Tampoco está formado por un subconjunto de puntos escogidos de antemano. La elección de representantes será una herramienta de cálculo que tendremos que controlar.

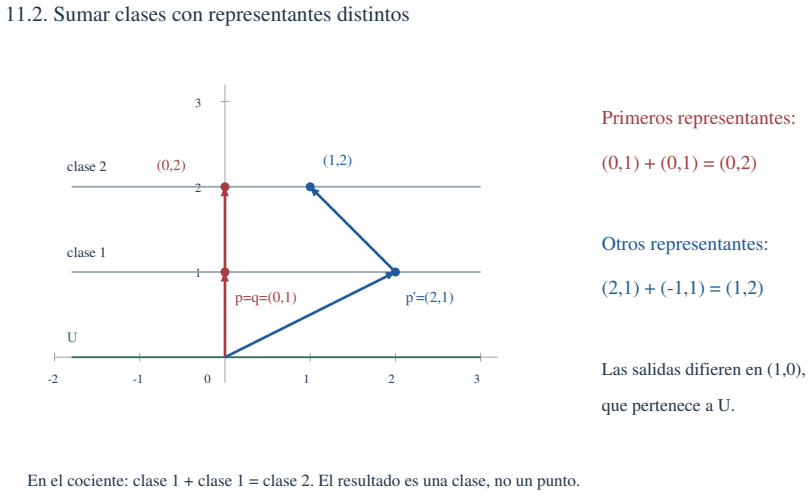


Figura 11.2. Cada recta completa es un elemento del cociente. Dos elecciones de representantes para las clases de altura uno dan sumas de puntos distintas, situadas en una misma clase de altura dos.

11.5. Operar con clases: el problema de los representantes

Queremos sumar las informaciones que contienen dos clases. La regla natural consiste en elegir una entrada de cada una, sumarlas y tomar la clase del resultado. Para que esa regla sea una función sobre clases, el resultado tiene que ser independiente de las entradas elegidas. La cuestión aparece antes de verificar cualquier axioma de espacio vectorial: una operación ambigua ni siquiera permitiría formular los axiomas.

Teorema 11.6 (estructura vectorial del cociente). Las reglas

$$(v+U)+(w+U)=(v+w)+U, \qquad \lambda(v+U)=(\lambda v)+U$$

están bien definidas y hacen de V/U un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$. Su cero es U y el opuesto de $v+U$ es $(-v)+U$. La aplicación π_U es lineal y sobreyectiva, con núcleo U.

Demostración. Cambiemos ambos representantes: supongamos $v'=v+u$ y $w'=w+u'$ con $u,u'\in U$. Entonces

$$(v'+w')-(v+w)=u+u'\in U.$$

Por la proposición 11.5, ambas sumas pertenecen a la misma clase. Para un escalar λ, la diferencia $\lambda v'-\lambda v=\lambda u$ también está en U, de modo que la clase del múltiplo tampoco depende del representante. Se utilizan aquí las dos clausuras de subespacio, por suma y por escalares. Cada regla entrega una clase de un vector de V, así que es cerrada en V/U.

Verifiquemos los axiomas con $\alpha=[v]$, $\beta=[w]$ y $\gamma=[z]$. La conmutatividad y la asociatividad se heredan mediante

$$\alpha+\beta=[v+w]=[w+v]=\beta+\alpha, \qquad (\alpha+\beta)+\gamma=[(v+w)+z]=[v+(w+z)]=\alpha+(\beta+\gamma).$$

El elemento $[0]=U$ satisface $[v]+[0]=[v]$, y $[v]+[-v]=[0]$ da el opuesto aditivo. Para escalares a,b, las cuatro identidades restantes son

$$\begin{aligned} 1[v]&=[v],\\ a(b[v])&=[a(bv)]=[(ab)v]=(ab)[v],\\ a([v]+[w])&=[a(v+w)]=[av+aw]=a[v]+a[w],\\ (a+b)[v]&=[(a+b)v]=[av+bv]=a[v]+b[v]. \end{aligned}$$

Con ello se cumplen todos los axiomas vectoriales. La definición de las operaciones da directamente $\pi_U(av+bw)=a\pi_U(v)+b\pi_U(w)$, así que la proyección es lineal. Toda clase tiene un representante y, por tanto, pertenece a su imagen. Finalmente, $\pi_U(v)$ es el cero del cociente si y sólo si $v+U=U$, lo que por la proposición 11.5 equivale a $v\in U$. Su núcleo es exactamente U. □

En el ejemplo plano, elijamos $(0,1)$ y $(0,1)$ como representantes de dos clases de altura uno: su suma es $(0,2)$. Si elegimos en cambio $(2,1)$ y $(-1,1)$, obtenemos $(1,2)$. Los resultados en V son distintos y sus clases coinciden. La operación del cociente devuelve esa clase común; no exige que todas las sumas de representantes sean el mismo punto.

Al multiplicar una clase por cero obtenemos siempre la clase U, aunque ésta contenga muchos vectores de V. La operación sobre clases no debe confundirse con multiplicar un subconjunto por cero como conjunto de puntos: ese producto de conjuntos sería $\{0\}$, mientras que el cero del espacio cociente es U. La regla $0(v+U)=(0v)+U=U$ especifica cuál operación estamos usando.

Una fórmula con representantes también puede fallar. La propuesta $f((x,y)+U)=x$ no define una función sobre el cociente horizontal: $(0,1)$ y $(2,1)$ representan la misma clase y producirían valores cero y dos. En cambio, $g((x,y)+U)=y$ sí está bien definida. La información conservada debe ser constante a lo largo de cada clase.

La proyección canónica tiene dominio V y codominio V/U. La identidad $P^2=P$ del teorema 11.4 correspondía a un operador de V sobre sí mismo; componer π_U consigo misma exigiría que sus clases fueran entradas del dominio original, lo que no forma parte de esta construcción. Si elegimos un complemento, podemos llevar cada clase a su representante en él y obtener entonces un operador de V. Ese paso incorpora la elección del complemento.

11.6. Bases del cociente y representantes elegidos

La notación de las clases puede resultar menos familiar que una columna. Una base adaptada a U permite calcular en el cociente sin perder de vista qué significan sus elementos.

Teorema 11.7 (base y dimensión del cociente). Sea $(u_1, \dots, u_k, c_1, \dots, c_r)$ una base de V cuyo primer bloque es una base de U. Entonces $(c_1 + U, \dots, c_r + U)$ es una base de V/U. En particular, si V es finito,

$$\dim(V/U) = \dim V - \dim U.$$

Demostración. Para $v = \sum_i a_i u_i + \sum_j b_j c_j$, tomar clases anula el primer bloque porque cada u_i pertenece a U. Así, $v + U = \sum_j b_j (c_j + U)$ y las clases propuestas generan el cociente.

Si una combinación de esas clases es cero, entonces $(\sum_j b_j c_j) + U = U$. Eso significa que $\sum_j b_j c_j \in U$, por lo que también se expresa como $\sum_i a_i u_i$. Restar las dos expresiones produce una relación en la base completa; su independencia obliga a que todos los b_j sean cero. Las clases son independientes, y la lista es una base. Su longitud es $r = \dim V - k$. Si $r = 0$, la lista vacía es base del cociente nulo; si $k = 0$, todas las clases son singletons y permanece toda la base. □

También podríamos aplicar rango-nulidad a la proyección: su núcleo es U y su imagen todo V/U. La prueba con una base explica además qué clases forman una base y cómo escribir sus coordenadas.

Por ejemplo, sea $V = P_3(\mathbb{F})$ y $U = \operatorname{span}(1, t)$. La clase de $a + bt + ct^2 + dt^3$ depende sólo de c, d. Las clases $t^2 + U, t^3 + U$ forman una base y la clase tiene columna $(c, d)^{\mathsf{T}}$ en ella. El representante $ct^2 + dt^3$ es el que pertenece al complemento $\operatorname{span}(t^2, t^3)$. Elegir otro complemento cambiaría ese representante, sin alterar la clase ni el espacio cociente.

Proposición 11.8 (un complemento representa el cociente). Un subespacio $C \subseteq V$ es complemento de U si y sólo si la restricción $\pi_U|_C : C \to V/U$ es un isomorfismo.

Demostración. Si $V = U \oplus C$, cada $v = u + c$ satisface $v + U = c + U$, por lo que la restricción alcanza todas las clases. Si dos vectores $c, c' \in C$ producen la misma clase, su diferencia pertenece a $U \cap C = \{0\}$, luego coinciden. La restricción es lineal por serlo π_U, y por tanto es un isomorfismo.

Recíprocamente, si la restricción es sobreyectiva, para cada v hay $c \in C$ con $v + U = c + U$; entonces $v - c \in U$ y $V = U + C$. Su inyectividad implica que el único $c \in C$ con clase cero es cero, de modo que $U \cap C = \{0\}$. La suma es directa. □

El cociente está definido a partir de V y U sin escoger C. El isomorfismo hacia un complemento concreto utiliza la elección de ese complemento. En el plano, la clase de altura y se representa por (ay, y) en C_a, y esa representación varía con a. En general, V/U es un espacio de clases; un complemento permite realizarlo mediante vectores de V, pero no lo convierte en ese subconjunto por definición.

11.7. Qué transformaciones pueden calcularse desde una clase

Supongamos que queremos aplicar $T : V \to W$ a una entrada conocida sólo módulo U. Conocer su clase significa que podemos reemplazar v por $v+u$ con $u \in U$. La linealidad da $T(v+u) = T(v)+T(u)$, por lo que el resultado será independiente del reemplazo exactamente cuando T anule todas las direcciones de U.

Teorema 11.9 (propiedad universal del cociente). Para una transformación lineal $T : V \to W$, existe una transformación lineal $\overline{T} : V/U \to W$ con $T = \overline{T}\pi_U$ si y sólo si $U \subseteq \ker T$. Cuando existe, es única y está dada por $\overline{T}(v + U) = T(v)$.

Demostración. Si la factorización existe y $u \in U$, entonces $\pi_U(u) = 0_{V/U}$, de modo que $T(u) = \overline{T}(0_{V/U}) = 0_W$. Así, $U \subseteq \ker T$ es necesario.

Supongamos esa inclusión. Proponemos la fórmula del enunciado, pero debemos comprobarla sobre cualquier representante: si $v + U = v' + U$, tenemos $v - v' \in U \subseteq \ker T$, luego $T(v) - T(v') = T(v - v') = 0$. La fórmula tiene un valor único en cada clase. Para escalares a, b, las operaciones del cociente y la linealidad de T dan

$$\overline{T}\big(a(v + U) + b(w + U)\big) = T(av + bw) = aT(v) + bT(w).$$

Por tanto, $\overline{T}$ es lineal y satisface $\overline{T}\pi_U(v) = T(v)$ para toda entrada. Cualquier función que satisfaga esa igualdad debe tomar el valor $T(v)$ en la clase $v + U$; como todas las clases tienen representante, no queda ningún valor libre y la función es única. □

La palabra «universal» resume una condición que permite reconocer todas las transformaciones que pasan por el cociente. La demostración proporciona una prueba práctica de buena definición: variar el representante produce una diferencia en U, que la transformación debe anular.

Para el eje horizontal, $T(x, y) = 3y$ anula U y define $\overline{T}((x, y)+U) = 3y$. La función $S(x, y) = x+y$ no lo anula, porque $S(1, 0) = 1$, y no puede evaluarse conociendo sólo la clase horizontal. En la familia de complementos, elegir un representante permitiría aplicar S a ese punto, pero el valor dependería del complemento elegido; no sería una factorización de la función original S a través de todas sus entradas.

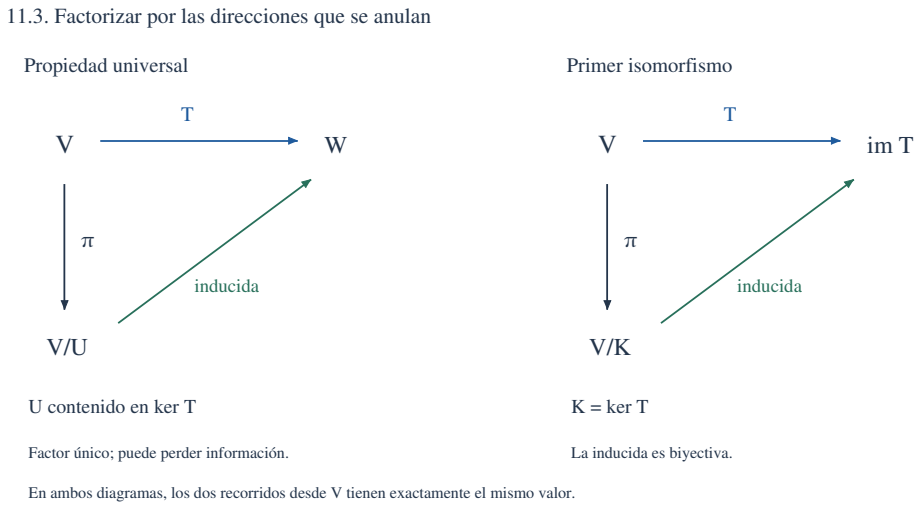


Figura 11.3. La factorización obliga a que T sea constante en cada clase. Cuando se identifican exactamente las entradas con la misma salida, la aplicación inducida es un isomorfismo hacia la imagen.

11.8. Reunir exactamente las entradas con la misma salida

En C09 probamos que $T(v) = T(w)$ equivale a $v - w \in \ker T$. Por tanto, las fibras no vacías de T son precisamente las clases módulo su núcleo. El cociente por el núcleo convierte cada fibra completa en una entrada y elimina así las coincidencias entre entradas distintas.

Teorema 11.10 (primer teorema de isomorfismo). Si $T : V \to W$ es lineal, la regla

$$\widetilde{T} : V/\ker T \longrightarrow \operatorname{im} T, \qquad \widetilde{T}(v + \ker T) = T(v),$$

es un isomorfismo. No se requiere dimensión finita.

Demostración. La propiedad universal con $U = \ker T$ proporciona una aplicación bien definida y lineal. Sus valores pertenecen a $\operatorname{im} T$, y cada elemento de esa imagen es $T(v)$ para alguna entrada, por lo que la regla es sobreyectiva hacia el codominio indicado. Si $\widetilde{T}(v + \ker T) = 0$, entonces $T(v) = 0$ y $v \in \ker T$; su clase es, por tanto, la clase cero. El núcleo de $\widetilde{T}$ es trivial y C09 da inyectividad. Esto prueba el isomorfismo. □

La imagen, y no necesariamente el codominio original, es el destino donde obtenemos sobreyectividad. Para $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + y, z, x + y + z)$, el núcleo es $\operatorname{span}(1, -1, 0)$ y la imagen es el plano $\{(a, b, c) : c = a + b\}$. El cociente bidimensional se identifica con ese plano mediante la regla del teorema, no con todo $\mathbb{R}^3$.

Si conocemos la salida $(a, b, a + b)$, una clase que le corresponde es $(a, 0, b) + \ker T$; todos sus representantes producen la misma salida. Escoger el representante con segunda coordenada cero proporciona una función inversa escrita con un complemento concreto. La clase inversa está determinada por T sin esa elección: es la fibra completa de la salida.

Para la derivación $D : P_3(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$, el núcleo son las constantes y la imagen todo P_2. El isomorfismo inducido asocia a cada polinomio, módulo constantes, su derivada. La inversa lleva

$a + bt + ct^2$ a la clase de $at + (b/2)t^2 + (c/3)t^3$. Añadir una constante no cambia esa clase. Las divisiones y la identificación del núcleo se apoyan en el cuerpo real; en característica positiva hay que recalcularlas como en C09.

11.9. Subespacios que sobreviven al paso al cociente

Si un subespacio contiene U, reúne clases completas: junto con un vector v contiene todos los $v + u$. Esto permite organizar los subespacios del cociente mediante subespacios del espacio original.

Proposición 11.11 (correspondencia de subespacios). Los subespacios de V/U están en correspondencia biyectiva, preservando inclusiones, con los subespacios H de V que contienen U. Las reglas son $H \mapsto \pi_U(H) = H/U$ y $Y \mapsto \pi_U^{-1}(Y)$. Si V es finito, $\dim(H/U) = \dim H - \dim U$.

Demostración. La imagen de un subespacio bajo una aplicación lineal es subespacio. La preimagen de un subespacio también lo es: contiene cero, y si dos vectores tienen imágenes en Y, cualquier combinación lineal tiene imagen en Y. Además, la preimagen contiene U porque todos sus vectores tienen imagen cero.

Si H contiene U, entonces $\pi_U^{-1}(\pi_U(H)) = H$. Una inclusión es inmediata; para la otra, si $v + U = h + U$ con $h \in H$, entonces $v - h \in U \subseteq H$ y $v \in H$. Por otro lado, $\pi_U(\pi_U^{-1}(Y)) = Y$ porque π_U es sobreyectiva: cada clase de Y tiene un representante cuya imagen vuelve a ser esa clase. Las reglas son inversas. Imágenes y preimágenes preservan las inclusiones pertinentes, y la fórmula de dimensión es el teorema 11.7 aplicado a H y su subespacio U. $\square$

La condición de contener U no puede suprimirse de esa correspondencia. En el plano de la apertura, todos los complementos C_a tienen imagen igual a todo V/U, aunque sean rectas distintas. Al tomar la preimagen de esa imagen obtenemos V, no la recta elegida. Para un subespacio arbitrario C, lo que reaparece tras proyectar y tomar preimagen es $C + U$.

11.10. Ejercicios

Los espacios son reales salvo indicación contraria. Distinga siempre un representante, su clase y una coordenada de esa clase en una base elegida. Las pruebas deben comprobar buena definición cuando propongan reglas sobre clases.

Descomponer y calcular clases. 1. Descomponga $(4, 2)$ según el eje horizontal y, respectivamente, el eje vertical o la recta $\operatorname{span}(1, 1)$. Compruebe unicidad en cada caso.

2. En $\mathbb{R}^3$, tome $U = \{z = 0\}$ y $C = \operatorname{span}(1, 1, 1)$. Pruebe $\mathbb{R}^3 = U \oplus C$ y descomponga $(2, -1, 3)$.

3. Separe $2 - 3t + 5t^2 + t^3$ en sus componentes en $\operatorname{span}(1, t^2)$ y $\operatorname{span}(t, t^3)$. Indique por qué funciona sobre cualquier cuerpo al interpretar los coeficientes en él.

4. Para $P_a(x, y) = (x - ay, 0)$, determine imagen, núcleo, cuadrado y la proyección complementaria. Calcule ambas componentes de $(4, 2)$ para $a = 2$.

5. Para $U = \operatorname{span}(1, 0) \subseteq \mathbb{R}^2$, describa las clases de $(4, 2)$ y $(-1, 2)$, su suma como elementos del cociente, su opuesto y el producto de una de ellas por cero.

6. En $\mathbb{R}^3/U$, con $U = \operatorname{span}(1, 1, 0)$, decida si $(2, 3, 4)$ y $(-1, 0, 4)$ representan la misma clase. Halle un representante único con primera coordenada cero y una base del cociente.

7. En $P_3(\mathbb{R})/\operatorname{span}(1, t)$, halle las coordenadas de la clase de $2 - 3t + 5t^2 + t^3$ en la base de clases de t^2, t^3. Describa todos sus representantes.

8. En $\mathbb{F}_2^2$, sea $U = \operatorname{span}(1, 1)$. Enumere todas las clases y su tabla de suma. Dé una base del cociente.

9. Construya una base de la suma externa $P_1(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$ y exprese $(2 - 3t, (4, 1))$ mediante ella.

10. Para $T(x, y, z) = (x + y, z)$, describa el isomorfismo del primer teorema y la clase que corresponde a $(2, 3)$. Distinga esa clase de una solución particular.

Reconstruir pruebas y diagnosticar errores. 11. Pruebe que $U + W$ es directa si y sólo si la única expresión de cero como $u + w$ es $0 + 0$. Relacione el criterio con la intersección.

12. Construya tres rectas con intersecciones nulas por parejas cuya suma no sea directa. Identifique una relación conjunta no trivial.

13. Demuestre que $v + U$ es un subespacio de V si y sólo si $v \in U$. ¿Cuántas clases son subespacios de V?

14. Reconstruya el control de buena definición de la suma y del producto por escalares en V/U. Señale exactamente qué propiedades de U intervienen.

15. Refute la propuesta $f((x,y)+U)=x$ para el cociente horizontal. Encuentre una regla lineal no nula de ese cociente hacia $\mathbb{R}$ que sí esté bien definida.

16. Describa $V/\{0\}$ y V/V, sus ceros y las proyecciones respectivas. Construya el isomorfismo natural entre el primero y V.

17. Pruebe que una proyección lineal idempotente descompone V en imagen y núcleo sin suponer dimensión finita. Halle imagen y núcleo de $I-P$.

18. En la prueba de la base del cociente, explique por qué una combinación de representantes perteneciente a U produce una relación en la base completa. ¿Bastaría comprobar que sus clases generan?

19. Pruebe las dos direcciones de la propiedad universal y la unicidad de la aplicación inducida. Distinga dónde se usa linealidad y dónde sobreyectividad de la proyección.

20. Para $T(x,y,z)=(x+y,z,x+y+z)$, un argumento afirma que $\mathbb{R}^3/\ker T$ es isomorfo a todo el codominio $\mathbb{R}^3$ mediante la regla inducida. Diagnostique y corrija la afirmación.

Construir complementos y aplicaciones inducidas. 21. Cada clase horizontal contiene exactamente un punto de $G=\{(y^2,y):y\in\mathbb{R}\}$. ¿Es G un complemento vectorial del eje horizontal? Examine la linealidad de la selección de ese representante.

22. Clasifique todos los complementos del eje horizontal en $\mathbb{R}^2$ y las proyecciones sobre ese eje. Muestre por qué no hay un complemento elegido sólo por la definición de suma directa.

23. En $M_2(\mathbb{F})$, sea U el subespacio de matrices diagonales. Construya un complemento, una base del cociente y un isomorfismo explícito del cociente hacia $\mathbb{F}^2$.

24. Pruebe que toda matriz cuadrada se descompone de manera única como suma de una simétrica y una antisimétrica si la característica no es dos. Explique qué falla en característica dos con un ejemplo de orden dos.

25. Sea $U=\operatorname{span}(1,1,1)\subseteq\mathbb{R}^3$. Determine cuáles de las reglas $f([(x,y,z)])=x-y$, $g([(x,y,z)])=x+y+z$ están bien definidas. Construya un isomorfismo del cociente hacia $\mathbb{R}^2$.

26. Para $E:P_3(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^2$, $E(p)=(p(0),p(1))$, determine núcleo y describa el isomorfismo inducido, su inversa en términos de clases y un complemento del núcleo.

27. Para la derivación en $P_3(\mathbb{F}_2)$, determine el núcleo y la imagen, una base del cociente por el núcleo y el isomorfismo inducido. No utilice integración con división por enteros nulos.

28. Sea $T(x,y,z)=(x,z)$ y $U=\operatorname{span}(0,1,0)$. Factorice T por V/U. Repita la pregunta con $U'=\operatorname{span}(1,0,0)$ y explique la diferencia.

29. Para subespacios $C,U\subseteq V$, pruebe $\pi_U^{-1}(\pi_U(C))=C+U$. Deduzca la condición exacta para recuperar C con ambas operaciones.

30. En $\mathbb{R}^3$, tome $U=\operatorname{span}e_1$ y $H=\operatorname{span}(e_1,e_2+e_3)$. Dé una base de H/U y calcule su preimagen por la proyección. Describa una clase no nula de ese subespacio del cociente.

Integrar y transferir. 31. Si $U\subseteq\ker T$, pruebe que la aplicación inducida $\overline{T}:V/U\to W$ es inyectiva si y sólo si $U=\ker T$, y que es sobreyectiva si y sólo si T lo es.

32. Para subespacios $A,B\subseteq V$, construya y pruebe el isomorfismo $A/(A\cap B)\cong(A+B)/B$ mediante una regla sobre clases. No suponga dimensión finita.

33. Si $U\subseteq H\subseteq V$, construya el isomorfismo $(V/U)/(H/U)\cong V/H$. Verifique buena definición y describa el núcleo de la aplicación intermedia $V/U\to V/H$.

34. Sea V finito y $T:V\to W$ sobreyectiva. Construya una función lineal $s:W\to V$ con $Ts=I_W$ usando un complemento de $\ker T$. Pruebe que toda función lineal con esa propiedad determina un complemento mediante su imagen.

35. Suponga $V=U\oplus C$. Para una aplicación lineal $L:C\to U$, pruebe que $G_L=\{L(c)+c:c\in C\}$ es un complemento de U. Demuestre que todo complemento de U se obtiene así de una única L.

36. Si V tiene dimensión n sobre $\mathbb{F}_q$ y U dimensión k, cuente las clases de V/U, los representantes de cada clase y los complementos de U. Justifique la fórmula para complementos usando el ejercicio 35.

37. Para $T:V\to W$ lineal, muestre que su gráfica $\Gamma_T=\{(v,Tv):v\in V\}$ es un subespacio de $V\times W$ y un complemento de $\{0\}\times W$. Determine una descomposición explícita de (v,w).

38. En $\mathbb{F}[t]$, sea U el subespacio de polinomios con término constante cero. Pruebe que el cociente es isomorfo a $\mathbb{F}$, aunque el dominio y U sean infinitos. Explique por qué no debe escribirse la resta de dimensiones como una resta de enteros infinitos.

39. Muestre que enviar $S : V/U \to W$ a $S\pi_U$ establece un isomorfismo entre $\mathrm{Hom}(V/U, W)$ y $\{T \in \mathrm{Hom}(V, W) : U \subseteq \ker T\}$. Si V, W son finitos, calcule la dimensión de este último espacio.

40. Un procedimiento dice «quitar U de V y elegir un punto de cada recta restante produce el cociente como subespacio». Refútelo con el ejemplo horizontal; reconstruya el cociente correcto y precise qué condición adicional sobre un conjunto de representantes lo convierte en un complemento lineal.

11.11. Soluciones razonadas

1. Con el eje vertical, $(4, 2) = (4, 0) + (0, 2)$; con la recta oblicua, $(4, 2) = (2, 0) + (2, 2)$. En el primer caso la primera coordenada determina la componente horizontal y la segunda la vertical. En el segundo, una componente oblicua (a, a) debe tener $a = 2$ para aportar la segunda coordenada, y la horizontal restante es $(2, 0)$. Las intersecciones de los dos pares de subespacios son cero y cada par genera el plano, lo que confirma unicidad por el criterio general.

2. La identidad $(x, y, z) = (x - z, y - z, 0) + z(1, 1, 1)$ prueba generación. Una componente de la recta que pertenezca al plano tiene tercera coordenada cero, de modo que su escalar es cero; la intersección es nula y la suma directa. Para $(2, -1, 3)$ obtenemos $(-1, -4, 0) + (3, 3, 3)$. La tercera coordenada determina el escalar de la recta, lo que también muestra directamente la unicidad.

3. Las componentes son $2 + 5t^2$ y $-3t + t^3$. Si una suma de un polinomio con sólo exponentes pares y otro con sólo exponentes impares es cero, todos los coeficientes deben anularse por unicidad de coeficientes formales. Por eso la separación es única sobre cualquier cuerpo; se interpretan $2, -3, 5$ en ese cuerpo, y alguno puede convertirse en cero sin afectar el argumento por posiciones de exponentes.

4. La imagen es el eje horizontal porque $P_a(x, 0) = (x, 0)$ y toda salida tiene segunda coordenada cero. El núcleo exige $x = ay$, luego es $C_a = \mathrm{span}(a, 1)$. Aplicar P_a a $(x - ay, 0)$ devuelve el mismo vector, así que $P_a^2 = P_a$. La complementaria es $(I - P_a)(x, y) = (ay, y)$. Para $a = 2$, $P_2(4, 2) = (0, 0)$ y $(I - P_2)(4, 2) = (4, 2)$, coherente con que la entrada pertenece a C_2.

5. Ambas clases son la recta $\{(s, 2) : s \in \mathbb{R}\}$ porque la diferencia de los representantes es horizontal. Su suma es la clase de $(3, 4)$, es decir, toda la recta de altura cuatro; se obtendría la misma clase sumando otros representantes. El opuesto de cualquiera es la recta de altura menos dos. Multiplicar por cero en el cociente devuelve U, la clase cero. Esa clase es un elemento del cociente aunque, como subconjunto del plano, contenga infinitos puntos.

6. La diferencia es $(3, 3, 0) = 3(1, 1, 0)$, por lo que las clases coinciden. Restar $x(1, 1, 0)$ de (x, y, z) da el representante $(0, y - x, z)$; es único porque dos representantes con primera entrada cero sólo pueden diferir en un múltiplo de $(1, 1, 0)$ si ese múltiplo es cero. En el caso dado, el representante es $(0, 1, 4)$. Las clases de e_2, e_3 forman una base del cociente, pues $((1, 1, 0), e_2, e_3)$ es una base adaptada del dominio.

7. La columna es $(5, 1)^{\mathsf{T}}$. Todos los representantes son $5t^2 + t^3 + a + bt$, con $a, b \in \mathbb{R}$ arbitrarios. El polinomio original corresponde a $a = 2$, $b = -3$. Añadir elementos de U cambia exactamente los coeficientes que desaparecen al tomar clases; ninguna elección de ellos modifica los dos coeficientes de la columna del cociente.

8. La clase cero es $A = \{(0, 0), (1, 1)\}$ y la otra es $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$. Sus sumas son $A + A = A$, $A + B = B + A = B$ y $B + B = A$, como se comprueba sumando representantes y tomando la clase. Los múltiplos por cero y uno son los impuestos por el cuerpo. La lista de un vector (B) es base, ya que su único múltiplo no nulo es B y alcanza la única clase no nula. El cociente tiene dimensión uno y dos elementos, no cuatro clases.

9. Una base es $((1, (0, 0)), (t, (0, 0)), (0, (1, 0)), (0, (0, 1)))$. La tupla pedida se expresa con coeficientes $(2, -3, 4, 1)$ en ese orden. La expansión existe por las bases de cada posición y es única porque una relación nula obliga por separado a anular los coeficientes del polinomio y los de la pareja real. La dimensión de la suma externa es $2 + 2 = 4$.

10. El núcleo es $K = \mathrm{span}(1, -1, 0)$, pues anular la salida exige $x + y = 0$, $z = 0$. Toda salida (a, b) se alcanza desde $(a, 0, b)$. El isomorfismo es $[(x, y, z)] \mapsto (x + y, z)$ desde $\mathbb{R}^3/K$ hacia $\mathbb{R}^2$;

diferencias en K no cambian la salida y una clase que produce cero es precisamente K. La inversa de $(2,3)$ es la clase $(2,0,3)+K$, con representantes $(2+s,-s,3)$. El punto $(2,0,3)$ es una solución particular, mientras que la clase contiene todas las soluciones.

11. Si sólo la expresión trivial representa cero, dos descomposiciones iguales producen al restarse una expresión de cero y sus componentes deben coincidir. Si la expresión es única para todos los vectores, lo es para cero y debe ser la trivial. Además, cualquier $z \in U \cap W$ daría $z+(-z)=0$, lo que fuerza $z=0$. Recíprocamente, una igualdad $u+w=0$ da $u=-w \in U \cap W$; si la intersección es nula, ambas componentes son cero. Los tres criterios son equivalentes.

12. Tome las rectas generadas por e_1, e_2, e_1+e_2 en $\mathbb{R}^2$. Dos de ellas tienen direcciones no proporcionales y sólo comparten cero. Sin embargo, $e_1+e_2+(-e_1-e_2)=0$ es una relación con una componente no nula en cada recta. El vector cero tiene así una representación no trivial y la suma no es directa. La tercera recta ya está contenida en la suma de las dos primeras, lo que localiza la dependencia que las intersecciones por parejas no detectan.

13. Si $v+U$ es subespacio, contiene cero; por tanto $0=v+u$ para algún $u \in U$, y $v=-u \in U$. Si $v \in U$, la proposición 11.5 da $v+U=U$, que sí es subespacio. Sólo una clase, la clase cero, es un subespacio del ambiente. Las demás son traslaciones afines de U y no contienen el cero del ambiente.

14. Si $v'=v+u$ y $w'=w+u'$ con $u,u' \in U$, entonces $(v'+w')-(v+w)=u+u' \in U$. La clausura por suma garantiza que la clase del resultado no cambia. Para el producto por a, $av'-av=au \in U$ utiliza clausura por escalares. El cero y los opuestos de U permiten interpretar la igualdad de clases y las diferencias, ya justificadas en la relación de equivalencia. Estas comprobaciones se hacen antes de usar los axiomas del cociente, para que las operaciones tengan un valor determinado.

15. Los representantes $(0,1)$ y $(2,1)$ tienen la misma clase horizontal y la regla propuesta entrega cero y dos. No es una función bien definida. En cambio, $g((x,y)+U)=y$ está bien definida porque una diferencia horizontal obliga a igualdad de segundas coordenadas. La regla es lineal por las operaciones del cociente y no nula porque la clase de $(0,1)$ se envía a uno. También sería válido cualquier múltiplo escalar no nulo de esa lectura.

16. En $V/\{0\}$ cada clase es el singleton $\{v\}$; el cero es $\{0\}$ y la proyección envía v a ese singleton. La regla $\{v\} \mapsto v$ está bien definida por unicidad del elemento y es lineal, biyectiva e inversa de la proyección. En V/V hay una sola clase, todo V; ése es su cero y la proyección es la función cero hacia el espacio de un elemento. Ambas descripciones incluyen el caso $V=\{0\}$.

17. Para todo v, la igualdad $v=Pv+(v-Pv)$ separa un elemento de la imagen y uno del núcleo porque $P(v-Pv)=0$. Si $z=Pu$ y $Pz=0$, la idempotencia da $z=P^2u=Pz=0$, de modo que la intersección es nula. No se utilizaron bases ni dimensiones. Además, $(I-P)v$ siempre está en $\ker P$ y cada $u \in \ker P$ se fija por $I-P$, luego su imagen es $\ker P$. La igualdad $(I-P)v=0$ equivale a $v=Pv$, es decir, a pertenecer a $\operatorname{im} P$, que es su núcleo.

18. Una relación nula de clases significa $(\sum_j b_j c_j)+U=U$, de donde $\sum_j b_j c_j \in U$. Ese vector tiene también una expresión $\sum_i a_i u_i$ en la base de U. La diferencia entre ambas expresiones es una relación en la base completa (u_i, c_j), cuya independencia fuerza todos los b_j a cero. La generación por sí sola sólo daría una lista posiblemente redundante y una cota superior para la dimensión; faltaría la independencia que asegura que las clases forman una base.

19. Si $T=S\pi_U$ con S lineal, todo $u \in U$ tiene imagen $T(u)=S(0)=0$, así que la inclusión en el núcleo es necesaria. Si $U \subseteq \ker T$, la diferencia de dos representantes de una clase se anula bajo T, lo que permite definir $S(v+U)=T(v)$ sin ambigüedad. La linealidad de T y las operaciones sobre clases prueban la linealidad de S. La igualdad $S\pi_U=T$ se verifica en cada vector. Finalmente, la sobreyectividad de π_U obliga a cualquier factor a tomar esos valores en todas las clases; prueba unicidad sin requerir una base ni dimensión finita.

20. Todas las salidas satisfacen $c=a+b$, de modo que la regla inducida no alcanza, por ejemplo, $(0,0,1)$. El núcleo tiene dimensión uno y el cociente dimensión dos; tampoco podría ser isomorfo a un espacio tridimensional. La afirmación correcta es $\mathbb{R}^3/\operatorname{span}(1,-1,0) \cong \{(a,b,a+b) : a,b \in \mathbb{R}\}$ mediante $[(x,y,z)] \mapsto (x+y, z, x+y+z)$. Es lineal, bien definida e inyectiva y alcanza precisamente ese plano.

21. La altura y determina exactamente un punto de G, así que sí hay una selección única por clase. Pero G no es subespacio: $(1,1)$ está en G y su doble $(2,2)$ no está, pues el punto de altura

dos de G es $(4,2)$. La selección s tampoco es lineal: $s(2[(0,1)]) = (4,2)$ y $2s([(0,1)]) = (2,2)$. Tener un representante por clase no basta para obtener un complemento vectorial; además, el conjunto elegido debe ser subespacio, o equivalentemente la selección debe ser lineal.

22. Un complemento debe tener dimensión uno y contener un vector (r,s) con $s \neq 0$, pues de otro modo sería el eje horizontal. Normalizando ese vector obtenemos $(a,1)$ con $a = r/s$, y el complemento es $C_a = \operatorname{span}(a,1)$. La descomposición de cualquier (x,y) es $(x-ay,0)+(ay,y)$, por lo que la proyección sobre el eje es $P_a(x,y) = (x-ay,0)$. El parámetro a determina la recta de manera única y valores distintos dan complementos distintos. La definición no selecciona un valor de a; una elección preferida necesitaría datos adicionales.

23. El complemento puede ser $C = \operatorname{span}(E_{12}, E_{21})$, las matrices de diagonal cero. Toda matriz se separa de manera única en su diagonal y su parte fuera de diagonal, verificándolo entrada por entrada. Las clases $E_{12}+U, E_{21}+U$ forman una base del cociente. La regla $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + U \mapsto (b,c)$ está bien definida porque sumar una diagonal no cambia esas entradas. Es lineal, alcanza cualquier pareja y sólo se anula en la clase de las diagonales; es un isomorfismo hacia $\mathbb{F}^2$ sobre cualquier cuerpo.

24. Si $2 \neq 0$ en el cuerpo, escribimos $A = (A + A^{\mathsf{T}})/2 + (A - A^{\mathsf{T}})/2$. La primera parte es simétrica y la segunda antisimétrica al transponerlas. Una matriz en ambos subespacios cumple $M = M^{\mathsf{T}} = -M$, de donde $2M = 0$ y $M = 0$, así que la descomposición es única. En característica dos, $-M = M$, de modo que simetría y antisimetría definidas por $M^{\mathsf{T}} = -M$ coinciden. Su intersección contiene matrices no nulas, como E_{11}, y su suma no contiene E_{12} en orden dos porque ésta no es simétrica. No hay la suma directa anunciada ni puede utilizarse división por dos.

25. Sumar (a,a,a) deja $x-y$ fijo, así que f está bien definida; en cambio, la suma de coordenadas aumenta en $3a$, y g falla sobre $\mathbb{R}$. Un isomorfismo es $F([(x,y,z)]) = (y-x, z-x)$. Es constante sobre las clases y lineal. Cualquier pareja (r,s) se alcanza con $(0,r,s)$; si la pareja es cero, $x = y = z$ y el representante pertenece a U, de modo que su clase es cero. Su inversa envía (r,s) a $(0,r,s)+U$. La condición de cuerpo real importa para la refutación de g.

26. Escribir $p = a + bt + ct^2 + dt^3$ da $E(p) = (a, a+b+c+d)$. El núcleo exige $a = 0$, $b = -c-d$, por lo que tiene base $(t^2 - t, t^3 - t)$ y dimensión dos. Toda pareja (u,v) se alcanza con $u + (v-u)t$, así que la imagen es $\mathbb{R}^2$. El isomorfismo inducido lleva $p + \ker E$ a $(p(0), p(1))$ y su inversa lleva (u,v) a la clase de $u + (v-u)t$. El subespacio P_1 es un complemento del núcleo: la reconstrucción anterior alcanza cada clase, y un polinomio de grado a lo sumo uno que se anule en cero y uno es cero. Se verifica así tanto generación como intersección nula.

27. En $\mathbb{F}_2$, $D(a + bt + ct^2 + dt^3) = b + dt^2$. El núcleo es $K = \operatorname{span}(1, t^2)$ y la imagen $\operatorname{span}(1, t^2)$. Sus expresiones coinciden como subespacios del espacio de polinomios, pero desempeñan papeles distintos. Las clases de t, t^3 forman una base del cociente por K. El isomorfismo inducido envía $b(t+K) + d(t^3+K)$ a $b + dt^2$, y su inversa lleva $b + dt^2$ a $bt + dt^3 + K$. Las identidades se verifican derivando y no requieren dividir por dos ni por tres.

28. El núcleo de T es exactamente $U = \operatorname{span}(0,1,0)$. La factorización existe y está dada por $\overline{T}((x,y,z)+U) = (x,z)$; la diferencia de representantes sólo cambia y y no modifica el resultado. Es un isomorfismo hacia $\mathbb{R}^2$. Para U', el vector e_1 se anula en el cociente pero $T(e_1) = (1,0) \neq 0$, así que U' no está contenido en el núcleo y la factorización no puede existir. Elegir un representante especial no corrige ese fallo para la transformación original.

29. Si v tiene la misma clase que algún $c \in C$, entonces $v - c \in U$ y $v \in C + U$. Recíprocamente, $v = c + u$ da $\pi_U(v) = \pi_U(c)$, de modo que pertenece a la preimagen de la imagen. Esto prueba la igualdad. Recuperamos C exactamente cuando $C + U = C$, condición equivalente a $U \subseteq C$. La condición puede comprobarse aplicando la igualdad al vector cero de C: la preimagen siempre contiene todo U.

30. Todo vector de H es $ae_1 + b(e_2+e_3)$ y su clase es $b((e_2+e_3)+U)$. La clase de e_2+e_3 no es cero porque ese vector no pertenece a U; forma una base de H/U. Su preimagen es exactamente H por la correspondencia, o directamente porque pertenecer a la imagen equivale a que las coordenadas segunda y tercera sean iguales. Una clase no nula es $(0,1,1)+U = \{(a,1,1) : a \in \mathbb{R}\}$.

31. Si la inducida es inyectiva y $v \in \ker T$, la clase $v + U$ se envía a cero y debe ser la clase cero, luego $v \in U$. Junto con la inclusión supuesta obtenemos igualdad de núcleos. Si $U = \ker T$, una clase que se anula tiene representante en U y es cero, lo que da inyectividad. Las imágenes de T y

de $\overline{T}$ coinciden porque cada clase tiene representante y $T = \overline{T}\pi_U$. Por tanto, una es todo W si y sólo si lo es la otra. La conclusión no requiere finitud.

32. Definimos $F(a + (A \cap B)) = a + B$ con $a \in A$. Si dos representantes difieren en $A \cap B$, también difieren en B, por lo que sus clases de salida coinciden; la regla está bien definida. Respeta combinaciones lineales por las operaciones de cociente. Toda clase de $(A + B)/B$ tiene un representante $a + b$, cuya clase es $a + B$, así que la regla es sobreyectiva. Si $a + B = B$, entonces $a \in B$ y, como $a \in A$, pertenece a $A \cap B$; la clase de entrada es cero. Es inyectiva y prueba el isomorfismo. El destino es un cociente del espacio $A + B$ por su subespacio B.

33. La aplicación $F : V/U \to V/H$, $F(v + U) = v + H$, está bien definida porque una diferencia en U también está en H. Es lineal y sobreyectiva. Su núcleo está formado por las clases con representante en H, es decir, por H/U. El primer teorema de isomorfismo produce $(V/U)/(H/U) \cong V/H$. Explícitamente, la regla es $(v+U)+(H/U) \mapsto v+H$. Si dos representantes de esa clase doble difieren en H/U, su diferencia puede escribirse como $h + U$ con $h \in H$; entonces $v - v' - h \in U \subseteq H$ y $v + H = v' + H$. Esta comprobación hace visible la buena definición en los dos niveles.

34. Sea $K = \ker T$ y elijamos $V = K \oplus C$ por el teorema 11.3. La restricción $T|_C : C \to W$ es sobreyectiva porque cada $v = k + c$ tiene salida $T(c)$, y es inyectiva porque $C \cap K = 0$. Su inversa lineal, seguida de la inclusión $C \subseteq V$, define s con $Ts = I_W$. Recíprocamente, si s es lineal y $Ts = I$, es inyectiva. Para cualquier v, escribimos $v = (v - sTv) + sTv$; el primer sumando está en K y el segundo en la imagen de s. Si $s(w) \in K$, entonces $w = T(s(w)) = 0$ y $s(w) = 0$. La intersección es nula y la imagen de s es un complemento.

35. La regla $c \mapsto L(c) + c$ es lineal, luego su imagen G_L es subespacio. Para $v = u + c$ podemos escribir $v = (u - L(c)) + (L(c) + c)$, lo que prueba $V = U + G_L$. Si $L(c) + c \in U$, entonces $c \in U \cap C$ y $c = 0$; la intersección es nula. Recíprocamente, sea D otro complemento. La proyección $q : V \to C$ siguiendo U restringida a D es un isomorfismo: alcanza cada c al descomponerlo según $U \oplus D$ y tiene núcleo $D \cap U = 0$. Para cada c sea $d(c) = (q|_D)^{-1}(c)$ y defina $L(c) = d(c) - c$. La igualdad $q(d(c) - c) = 0$ asegura $L(c) \in U$, y L es lineal. Entonces $D = G_L$. La unicidad del representante de cada clase en D fuerza unicidad de $d(c)$ y de L.

36. El cociente tiene dimensión $n - k$, por lo que contiene q^{n-k} clases. Cada clase es traslación de U y contiene q^k representantes; las clases particionan las q^n entradas. Fije un complemento C, de dimensión $n - k$. Por el ejercicio 35, los complementos de U están en biyección con las aplicaciones lineales $C \to U$. Elegida una base de C, cada uno de sus $n - k$ vectores puede recibir cualquiera de los q^k valores de U, y C08 garantiza una única aplicación por asignación. El número es $(q^k)^{n-k} = q^{k(n-k)}$. Para $k = 0$ o $k = n$ da uno, como corresponde a los únicos complementos posibles.

37. La gráfica contiene $(0, 0)$ y una combinación $a(v, Tv)+b(v', Tv') = (av+bv', T(av+bv'))$ vuelve a estar en ella, por linealidad de T. Toda pareja se descompone como $(v, w) = (v, Tv) + (0, w - Tv)$. Si una pareja de la gráfica tiene primera componente cero, es $(0, T0) = (0, 0)$; la intersección con $\{0\} \times W$ es nula. Es una suma directa interna dentro del producto externo, sin requerir finitud ni que T sea inyectiva.

38. La evaluación constante $E(p) = p(0)$ es lineal y sobreyectiva hacia $\mathbb{F}$ porque alcanza cada escalar mediante el polinomio constante. Su núcleo es exactamente U. El primer teorema da el isomorfismo $p + U \mapsto p(0)$, cuya inversa asocia a un escalar la clase de ese polinomio constante. Los monomios muestran que tanto $\mathbb{F}[t]$ como U tienen listas independientes de cualquier longitud, de modo que no tienen dimensión entera finita. La fórmula de resta finita no se aplica a dos símbolos de infinitud: el cociente tiene aquí dimensión uno por el isomorfismo explícito. La suma $\mathbb{F}[t] = U \oplus \operatorname{span}(1)$ también lo hace visible.

39. El conjunto de transformaciones que anulan U es subespacio de $\operatorname{Hom}(V, W)$ porque una combinación lineal de ellas vuelve a anularlo. La regla $\Phi(S) = S\pi_U$ es lineal al evaluar combinaciones en cada v. Es inyectiva: si $S\pi_U = 0$, toda clase tiene representante y S debe anularse en todo V/U. Es sobreyectiva hacia el subespacio indicado por existencia de la factorización universal. Su inversa es, por tanto, la asignación del factor único. Si $\dim V = n$, $\dim U = k$ y $\dim W = m$, C08 da $\dim \operatorname{Hom}(V/U, W) = m(n - k)$; el isomorfismo transporta esa dimensión al subespacio de transformaciones. No se ha introducido espacio dual ni una representación matricial general.

40. Quitar U elimina justamente los puntos de la clase cero y produce un conjunto que no contiene el cero del ambiente, así que no es un subespacio. El cociente correcto conserva esa clase y tiene como elementos todas las rectas horizontales, incluida la altura cero. Un punto elegido de cada clase puede servir para nombrarla, pero la selección parabólica del ejercicio 21 muestra que el conjunto resultante no tiene por qué ser subespacio ni la selección lineal. Un conjunto de representantes es un complemento lineal exactamente cuando es subespacio y contiene un único punto de cada clase. La existencia de un punto en cada clase da generación con U; la unicidad y la presencia del cero dan intersección nula. La proposición 11.8 identifica entonces la selección con la inversa de la restricción de π_U.

Lecturas y referencias

Axler, *Linear Algebra Done Right*, 4.ª edición, §3E, desarrolla productos, clases, operaciones y la aplicación inducida por una transformación. Hoffman y Kunze, *Linear Algebra*, 2.ª edición, apéndice A.4, relaciona el cociente con complementos y demuestra el isomorfismo con la imagen de una transformación sobreyectiva. Johnston, *Advanced Linear and Matrix Algebra* (2021), tema 1.B.1, aporta el contraste entre suma interna, relaciones de componentes y bases concatenadas; aquí se conserva el enfoque algebraico sin requerir ortogonalidad. Friedberg, Insel y Spence, *Linear Algebra*, 5.ª edición, §1.3, ejercicios 23–31, y §2.1, ejercicio 42, trata suma directa, cociente, buena definición y proyección. Esos pasajes precisan la cobertura de la fuente, antes registrada sólo parcialmente en la matriz del proyecto. Las pruebas, los ejemplos concretos y las soluciones de este capítulo se redactaron para APM.

Capítulo 12

Matrices de transformaciones y cambio de base

La transformación $T(x, y) = (x + 2y, y)$ deja fijos los vectores horizontales y desplaza cada punto en una cantidad horizontal que depende de su altura. En la base usual del plano, sus columnas son $(1, 0)$ y $(2, 1)$, las imágenes de los dos vectores básicos. Podemos recuperar toda la transformación a partir de ellas: la entrada $(x, y) = xe_1 + ye_2$ se convierte en $xT(e_1) + yT(e_2)$.

Si medimos los vectores usando la base $\mathcal{B}' = ((1, 0), (0, 2))$, el segundo vector básico se transforma en $(4, 2) = 4(1, 0) + (0, 2)$. Las columnas pasan a ser $(1, 0)$ y $(4, 1)$. La regla sobre los puntos del plano permanece intacta, aunque una de las entradas de su matriz se ha duplicado. Para la misma entrada física $v = (1, 2)$ obtenemos

$$[v]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad [T(v)]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad [v]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad [T(v)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dos cálculos distintos describen la misma entrada y la misma salida. El cambio de matriz registra el cambio de unidades con que describimos ambas. La dificultad consiste en mantener juntas esas elecciones: una columna sin su base de salida y un vector de números sin su base de entrada dejan incompleta la información.

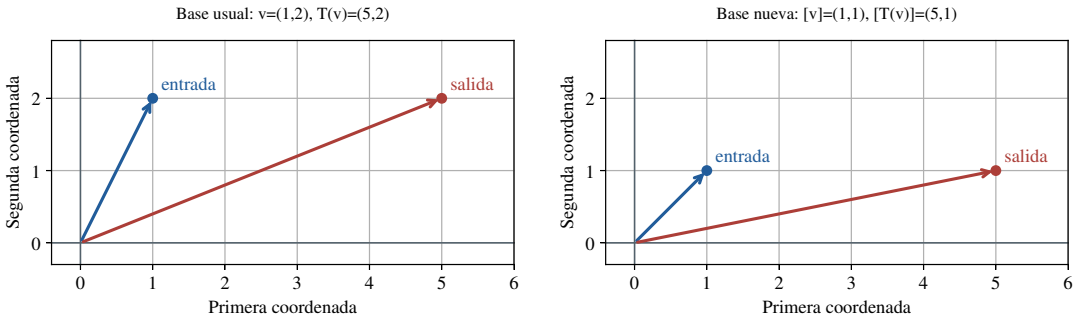


Figura 12.1. Cada panel utiliza sus propias coordenadas. La segunda coordenada cambia de dos a uno porque el segundo vector básico se duplica; las flechas describen los mismos vectores del espacio original.

Trabajaremos sobre un cuerpo conmutativo $\mathbb{F}$, con espacios de dimensión finita y bases ordenadas. Las coordenadas serán columnas. Los ejemplos con fracciones se entienden sobre $\mathbb{R}$ salvo indicación contraria. Utilizaremos la determinación de una aplicación por sus valores en una base (C08), núcleo e imagen (C09), los isomorfismos de coordenadas y matrices de transición (C10), y las descomposiciones de C11. No necesitaremos determinantes ni valores propios.

12.1. Las imágenes de una base se convierten en columnas

Sean $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ una base de V y $\mathcal{C} = (c_1, \ldots, c_m)$ una base de W. Para describir $T : V \to W$ basta conocer los vectores $T(b_j)$, pero esos vectores todavía pertenecen a W. Al escribirlos en la base $\mathcal{C}$ obtenemos números que podemos organizar en una matriz.

Definición 12.1. La **matriz de T respecto de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$** es

$$[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \big([T(b_1)]_{\mathcal{C}} \ \cdots \ [T(b_n)]_{\mathcal{C}}\big).$$

Tiene m filas y n columnas. La base a la derecha de la flecha corresponde al dominio; la de la izquierda, al codominio. Si $V = W$ y se emplea una misma base $\mathcal{B}$ para ambos, abreviamos $[T]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}$.

La entrada a_{ij} de esta matriz es el coeficiente de c_i en $T(b_j)$. El índice de columna indica qué vector se transforma; el de fila, en qué dirección del codominio se mide su imagen. Esta lectura explica la forma rectangular sin exigir que V y W sean espacios de tuplas.

Teorema 12.1 (identidad de representación). Si $A = [T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$, entonces

$$[T(v)]_{\mathcal{C}} = A[v]_{\mathcal{B}} \qquad (v \in V).$$

Es la única matriz con esta propiedad. Recíprocamente, toda matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ representa una única transformación $V \to W$ con las bases fijadas.

Demostración. Escribamos $v = \sum_j x_j b_j$. La linealidad de T y del isomorfismo de coordenadas da

$$[T(v)]_{\mathcal{C}} = \sum_{j=1}^{n} x_j [T(b_j)]_{\mathcal{C}}.$$

El producto de una matriz por una columna es la combinación de sus columnas con esos coeficientes, de modo que el último miembro es $A[v]_{\mathcal{B}}$. Si otra matriz cumple la misma identidad, aplicarla a $v = b_j$ muestra que su columna j debe ser $[T(b_j)]_{\mathcal{C}}$; queda probada la unicidad.

Para construir T a partir de A, interpretamos la columna j como coordenadas de un vector $w_j \in W$ y asignamos $T(b_j) = w_j$. C08 proporciona una única extensión lineal a todo V. La definición de matriz recupera exactamente A. □

Si $\kappa_{\mathcal{B}}(v) = [v]_{\mathcal{B}}$ y $\kappa_{\mathcal{C}}(w) = [w]_{\mathcal{C}}$, el teorema expresa

$$L_A = \kappa_{\mathcal{C}} \circ T \circ \kappa_{\mathcal{B}}^{-1}, \qquad L_A(x) = Ax.$$

Esta igualdad de funciones explica en qué sentido una matriz representa una transformación: permite transportar el problema a columnas, hacer allí el cálculo y reconstruir la salida en W.

Por ejemplo, consideremos la derivación formal $D : P_2(\mathbb{R}) \to P_1(\mathbb{R})$, dada por $D(a + bt + ct^2) = b + 2ct$. Para $\mathcal{B} = (1, t, t^2)$ y $\mathcal{C} = (1, t)$,

$$[D]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La primera columna es cero porque la derivada formal de 1 es cero; la última contiene las coordenadas de $2t$. Al multiplicar por $(a, b, c)^{\mathsf{T}}$ obtenemos $(b, 2c)^{\mathsf{T}}$, que describe el polinomio de salida en una base distinta y de otra longitud. La matriz no tiene por qué ser cuadrada. Tampoco estamos suponiendo resultados de cálculo diferencial: D se definió como una operación algebraica en coeficientes.

Si alguno de los espacios es el espacio cero, su base es la lista vacía. Adoptamos matrices de tamaño $m \times 0$ o $0 \times n$ y sumas vacías; la identidad de representación sigue describiendo la única aplicación posible cuando el dominio es cero, y la aplicación nula cuando el codominio es cero.

12.2. Componer exige que coincidan las coordenadas intermedias

Sean $T : V \to W$ y $S : W \to Z$. Si conocemos $[v]_{\mathcal{B}}$, la matriz de T produce coordenadas en $\mathcal{C}$. Para aplicar después la matriz de S, ésta debe recibir coordenadas en esa misma base de W. La compatibilidad de tamaños sólo controla la cantidad de números; el nombre de la base controla su significado.

Teorema 12.2 (operaciones y composición). Fijadas bases $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ de V, W, Z, se cumplen

$$[\alpha T + \beta U]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \alpha[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} + \beta[U]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}, \qquad [S \circ T]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{B}} = [S]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}},$$

donde $T, U : V \to W$. Además, $[I_V]_{\mathcal{B}} = I_n$. Si T es un isomorfismo,

$$[T^{-1}]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = ([T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}})^{-1}.$$

Demostración. La columna j de la matriz de $\alpha T + \beta U$ se obtiene tomando coordenadas de $\alpha T(b_j) + \beta U(b_j)$; la linealidad de las coordenadas da la primera fórmula. Para la composición, aplicamos dos veces el teorema 12.1:

$$[S(T(v))]_{\mathcal{D}} = [S]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}}[T(v)]_{\mathcal{C}} = [S]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}}.$$

La unicidad de representación identifica la matriz del compuesto. Las imágenes $I_V(b_j) = b_j$ tienen coordenadas e_j, de donde resulta I_n. Al representar $T^{-1}T = I_V$ y $TT^{-1} = I_W$ obtenemos ambos productos identidad, y por tanto la fórmula de la inversa. □

La correspondencia $T \mapsto [T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ es así un isomorfismo entre los espacios vectoriales $\operatorname{Hom}(V,W)$ y $M_{m\times n}(\mathbb{F})$. Su biyectividad procede del teorema 12.1 y su linealidad del 12.2. En particular, $\dim \operatorname{Hom}(V,W) = mn$: las matrices con una única entrada uno forman una base, y cada una corresponde al mapa que lleva un vector básico a un vector básico prescrito y anula los demás.

Cuando se representa un operador usando una misma base, la compatibilidad está asegurada para cualquier número de composiciones. De $[T^2]_{\mathcal{B}} = A^2$ y una inducción resulta $[T^k]_{\mathcal{B}} = A^k$ para todo entero $k \geq 0$. Si entrada y salida usan bases distintas, multiplicar la matriz por sí misma carece en general de esa interpretación, incluso si es cuadrada.

12.3. Cambiar dos bases: seguir la entrada y la salida

C10 construyó la matriz $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}$ cuyas columnas son $[b'_j]_{\mathcal{B}}$. Satisface

$$[v]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}[v]_{\mathcal{B}'}.$$

Es también la matriz de la identidad cuando el dominio se describe en $\mathcal{B}'$ y el codominio en $\mathcal{B}$. Para evitar ambigüedades, fijaremos $P = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}$ y $Q = P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}'}$. Ambas matrices convierten coordenadas nuevas en antiguas.

Para calcular la salida en las bases nuevas, primero convertimos la entrada nueva en antigua mediante P, aplicamos $A = [T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ y convertimos la salida antigua en nueva mediante Q^{-1}. Esta sucesión determina el orden de los factores.

Teorema 12.3 (cambio de bases). Con las convenciones anteriores,

$$A' = [T]_{\mathcal{C}'\leftarrow\mathcal{B}'} = Q^{-1}AP.$$

Demostración. Para cada $v \in V$,

$$[T(v)]_{\mathcal{C}'} = Q^{-1}[T(v)]_{\mathcal{C}} = Q^{-1}A[v]_{\mathcal{B}} = Q^{-1}AP[v]_{\mathcal{B}'}.$$

El teorema 12.1 identifica $Q^{-1}AP$ como la matriz pedida. □

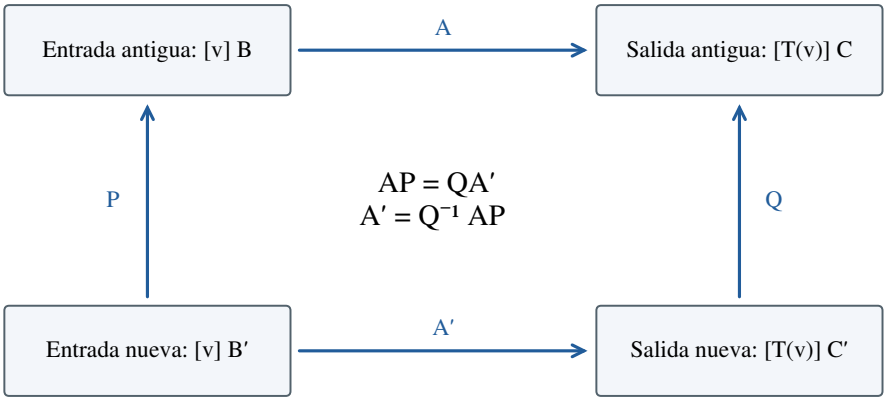


Figura 12.2. Las rutas desde la entrada nueva hasta la salida antigua dan $AP = QA'$. Despejar A' equivale a convertir la salida por Q^{-1}.

En el ejemplo de la derivación, cambiemos a $\mathcal{B}' = (1, 1+t, (1+t)^2)$ y $\mathcal{C}' = (1, 1+t)$. Los vectores nuevos escritos en las bases antiguas dan

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matriz final coincide numéricamente con la inicial. La comprobación directa explica esa coincidencia: $D(1) = 0$, $D(1+t) = 1$ y $D((1+t)^2) = 2(1+t)$. La forma de la regla de derivación se conserva al trasladar la variable, aunque las bases sean otras. Una matriz igual no obliga a que las bases coincidan; una matriz diferente tampoco obliga a que la transformación cambie.

Si sólo cambia la base del dominio, la fórmula se reduce a $A' = AP$. Cada columna nueva es la imagen de una combinación de vectores básicos antiguos. Si sólo cambia la base del codominio, resulta $A' = Q^{-1}A$: los vectores imagen siguen siendo los mismos y sólo cambia cómo se describen. Confundir estos dos actos lleva a colocar inversas donde no corresponden.

12.4. Un operador en dos bases: semejanza

Cuando $T : V \to V$ se representa con una misma base a ambos lados, cambiar esa base obliga a usar la misma transición en entrada y salida. La fórmula general se especializa con $Q = P$.

Definición 12.2. Dos matrices $A, A' \in M_n(\mathbb{F})$ son **semejantes** si existe $P \in M_n(\mathbb{F})$ invertible tal que $A' = P^{-1}AP$.

Proposición 12.4. Las matrices de un mismo operador en dos bases son semejantes. Recíprocamente, si $A' = P^{-1}AP$ y $A = [T]_{\mathcal{B}}$, existe una base $\mathcal{B}'$ tal que $P = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}$ y $A' = [T]_{\mathcal{B}'}$. La semejanza es una relación de equivalencia.

Demostración. La primera afirmación es el teorema 12.3 con igual transición en ambos espacios. Para la recíproca, definimos b'_j como el vector cuyas coordenadas en $\mathcal{B}$ son la columna j de P. Como P es invertible, sus columnas son una base de $\mathbb{F}^n$; el isomorfismo de coordenadas las transporta a una base de V. Su matriz de transición es P, y el teorema de cambio de bases da A'.

La reflexividad usa $P = I$. Si $A' = P^{-1}AP$, entonces $A = PA'P^{-1}$, que da simetría. Si además $A'' = R^{-1}A'R$, sustituyendo se obtiene $A'' = (PR)^{-1}A(PR)$; la invertibilidad de PR prueba transitividad. $\square$

La cizalla inicial tiene matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El orden se puede comprobar con $v = (1, 2)$, cuyas coordenadas nuevas son $(1, 1)^{\mathsf{T}}$. El producto por la matriz nueva da $(5, 1)^{\mathsf{T}}$ y la reconstrucción mediante P devuelve $(5, 2)^{\mathsf{T}} = T(v)$. La expresión PAP^{-1} correspondería a la convención inversa para la transición; con nuestro P no representa el cambio pedido.

Un ejemplo distinto muestra por qué vale la pena buscar una base adecuada. Sea $T(x, y) = (y, x)$ y tomemos $b'_1 = (1, 1)$, $b'_2 = (1, -1)$. Sobre $\mathbb{R}$ forman una base, y sus imágenes son $T(b'_1) = b'_1$, $T(b'_2) = -b'_2$. Por ello

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad [T]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La base separa dos comportamientos que la fórmula inicial mezclaba: una dirección permanece fija y la otra invierte su signo. Esta construcción requiere que $2 \neq 0$ en el cuerpo; en característica dos los dos vectores propuestos coinciden y dejan de ser una base.

12.5. El rango y los sistemas sobreviven al cambio de descripción

El núcleo de A está formado por columnas, mientras que el núcleo de T está formado por vectores de V. El isomorfismo de coordenadas permite compararlos sin confundirlos.

Proposición 12.5. Para $A = [T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$,

$$\kappa_{\mathcal{B}}(\ker T) = \ker L_A, \qquad \kappa_{\mathcal{C}}(\operatorname{im} T) = \operatorname{im} L_A.$$

En particular, $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} T$ y $\operatorname{nul} A = \dim \ker T$. Multiplicar una matriz a izquierda o derecha por una matriz invertible conserva su rango.

Demostración. La identidad $T(v) = 0$ equivale a $[T(v)]_{\mathcal{C}} = 0$, que por representación equivale a $A[v]_{\mathcal{B}} = 0$. La biyectividad de $\kappa_{\mathcal{B}}$ da la primera igualdad. Cada vector de la imagen de T es $T(v)$ y su columna es $A[v]_{\mathcal{B}}$; como las coordenadas de v recorren todo $\mathbb{F}^n$, obtenemos la segunda igualdad. Los isomorfismos preservan dimensión por C10.

Si P es invertible, las columnas Px recorren todo el dominio de A, de modo que $\operatorname{im}(AP) = \operatorname{im} A$. Si R es invertible, $\operatorname{im}(RA) = R(\operatorname{im} A)$ tiene la misma dimensión. Esto prueba la última afirmación. □

Para $A' = Q^{-1}AP$, las fórmulas más precisas son

$$\ker A' = P^{-1}(\ker A), \qquad \operatorname{im} A' = Q^{-1}(\operatorname{im} A).$$

Los subespacios de columnas pueden cambiar de posición; sus dimensiones permanecen. También se conserva toda la información de una ecuación $T(v) = w$. Si $b = [w]_{\mathcal{C}}$ y $b' = [w]_{\mathcal{C}'} = Q^{-1}b$, las soluciones de $Ax = b$ corresponden biyectivamente a las de $A'x' = b'$ mediante $x = Px'$. Cambiar la matriz y mantener sin conversión el término independiente puede producir un problema distinto.

12.6. Dos bases independientes permiten una forma más simple

Una transformación rectangular no admite una misma base de entrada y salida. Incluso para un operador podemos decidir usar bases distintas. Esa libertad es mayor que la permitida por semejanza.

Definición 12.3. Dos matrices del mismo tamaño $m \times n$ son **equivalentes por dos bases** si $A' = Q^{-1}AP$ para matrices invertibles P y Q de órdenes n y m. Esta equivalencia permite operaciones invertibles de filas y de columnas; es más amplia que la equivalencia por filas de C02.

Teorema 12.6 (clasificación por rango). Si $T : V \to W$ tiene rango r, existen bases de V y W en las que su matriz es

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m \times n}.$$

Dos matrices del mismo tamaño son equivalentes por dos bases si y sólo si tienen igual rango.

Demostración. Tomemos una base $k_1, \ldots, k_{n-r}$ del núcleo y extendámosla con vectores $u_1, \ldots, u_r$ hasta una base de V, usando rango-nulidad. Las imágenes $T(u_1), \ldots, T(u_r)$ forman una base de la imagen: cualquier v se expresa mediante los u_i y los k_j, y al aplicar T desaparecen los últimos; si una combinación de $T(u_i)$ se anula, la combinación correspondiente de u_i pertenece al núcleo, y la independencia de la base extendida anula sus coeficientes.

Ordenamos la base del dominio como $(u_1, \ldots, u_r, k_1, \ldots, k_{n-r})$. Extendemos $(T(u_1), \ldots, T(u_r))$ a una base de W. Las primeras r columnas de la matriz son entonces los primeros vectores usuales y todas las demás columnas son cero. Es exactamente J_r.

Si dos matrices son equivalentes, la proposición 12.5 les da igual rango. Si tienen el mismo rango, ambas pueden llevarse a la misma J_r. Invirtiendo el cambio de bases de una y componiéndolo con el de la otra se obtiene una equivalencia entre ambas. □

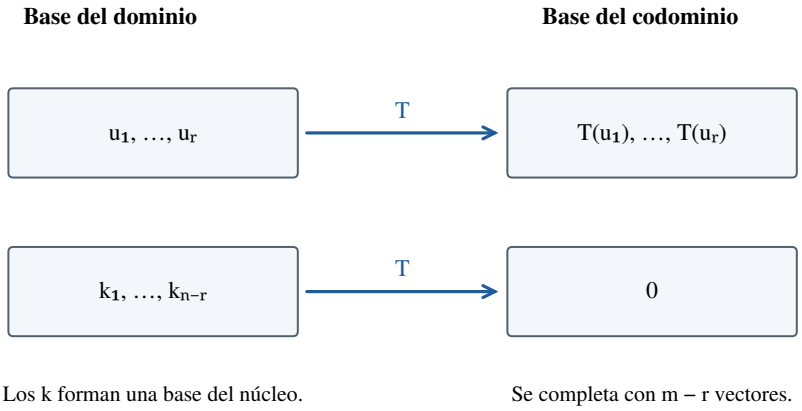


Figura 12.3. El bloque identidad procede de elegir como vectores básicos de salida las imágenes de los primeros vectores de entrada. El bloque cero procede del núcleo. El esquema registra dimensiones y correspondencias, sin sugerir ortogonalidad.

Para $T(x, y, z) = (x + y, y + z)$, elegimos $u_1 = e_1$, $u_2 = e_3$ y $k = (-1, 1, -1)$. El vector k genera el núcleo y los tres son independientes: en $au_1 + bu_2 + ck = 0$, la segunda coordenada da $c = 0$ y después $a = b = 0$. Sus imágenes son $e_1, e_2, 0$, por lo que la matriz en esas bases es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La clasificación por rango resuelve completamente la equivalencia por dos bases. No resuelve la semejanza. Sobre $\mathbb{R}$, I_2 y $2I_2$ tienen rango dos y son equivalentes por dos bases, pero cualquier conjugado de I_2 sigue siendo I_2. La libertad de modificar la base de salida con independencia de la de entrada borra información que un operador conserva al iterarse.

12.7. Una suma diagonal que no depende de la base

La cizalla cambió una entrada fuera de la diagonal; el intercambio de coordenadas cambió incluso sus entradas diagonales. En ambos ejemplos la suma de la diagonal permaneció. Para demostrar que sucede con cualquier cambio de base necesitamos una propiedad que relacione esa suma con el producto matricial.

Definición 12.4. La **traza** de $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$ es $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Para $n = 0$ la suma vale cero.

Lema 12.7 (intercambio de dos factores). Si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y $B \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$, entonces

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$

Demostración. La entrada diagonal i de AB es $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}$. Por tanto,

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} b_{ji}a_{ij} = \operatorname{tr}(BA).$$

Se reordenan sumas finitas y se usa la conmutatividad de escalares. No se afirma que las matrices AB y BA sean iguales: pueden tener tamaños distintos. □

Teorema 12.8 (traza de un operador). Si $A' = P^{-1}AP$, entonces $\operatorname{tr} A' = \operatorname{tr} A$. Por consiguiente, para un operador $T : V \to V$ está bien definido

$$\operatorname{tr} T = \operatorname{tr}[T]_{\mathcal{B}},$$

con cualquier base $\mathcal{B}$ de V. La traza es lineal y satisface $\operatorname{tr}(ST) = \operatorname{tr}(TS)$ para operadores de V.

Demostración. Aplicamos el lema a los dos factores $P^{-1}A$ y P:

$$\operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr}(PP^{-1}A) = \operatorname{tr} A.$$

La proposición 12.4 asegura que dos elecciones de base producen matrices semejantes, de donde resulta la independencia. Sumar las diagonales de $\alpha A+\beta B$ da $\alpha\,\mathrm{tr}\,A+\beta\,\mathrm{tr}\,B$; los teoremas 12.1–12.2 trasladan esta propiedad a operadores. La última identidad procede del lema y de la fórmula de composición en una misma base. □

La invariancia exige una misma base para entrada y salida. La identidad de $\mathbb{R}$ tiene matriz (1) usando la misma base, pero tiene matriz (2) si el vector básico de entrada es 2 y el de salida es 1. La traza de esa representación mixta no es la traza del operador. También sería ilegítimo definirla para una matriz rectangular tomando sólo las posiciones diagonales disponibles y esperar las mismas propiedades de invariancia.

La traza tampoco clasifica la semejanza. Las matrices 0_2 y $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ tienen traza cero y rangos distintos. Incluso agregar el rango no basta: I_2 y $\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ tienen ambos traza dos y rango dos sobre $\mathbb{R}$, mientras todo conjugado de I_2 es I_2. Un invariante proporciona una obstrucción: si difiere, no hay semejanza. La coincidencia de un invariante no asegura que exista un cambio de base.

En característica positiva la traza es un elemento del cuerpo. Si $E^2=E$, C11 da $V=\mathrm{im}\,E\oplus\ker E$. En una base adaptada, $[E]=\mathrm{diag}(I_r,0)$, de modo que $\mathrm{tr}\,E=r\,1_{\mathbb{F}}$. Sobre $\mathbb{R}$ recupera el rango entero. Sobre $\mathbb{F}_p$ sólo registra su residuo módulo p; la identidad de $\mathbb{F}_p^p$ tiene traza cero y rango p. La definición es válida en ambos casos, pero su capacidad para distinguir dimensiones cambia.

12.8. Descomposiciones que producen bloques

Una suma directa $V=U\oplus K$ permite concatenar bases. Si un operador preserva ambos subespacios, sus columnas correspondientes a U no tienen componente en K, y las correspondientes a K no tienen componente en U. Esa observación convierte la descomposición de C11 en un cálculo por bloques.

Proposición 12.9. Sea $V=U\oplus K$ y supongamos que $T(U)\subseteq U$ y $T(K)\subseteq K$. En la base concatenada $\mathcal{B}=(\mathcal{U},\mathcal{K})$,

$$[T]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}A&0\\0&D\end{pmatrix},\qquad A=[T|_U]_{\mathcal{U}},\quad D=[T|_K]_{\mathcal{K}}.$$

Además, $\mathrm{rg}\,T=\mathrm{rg}(T|_U)+\mathrm{rg}(T|_K)$ y $\mathrm{tr}\,T=\mathrm{tr}(T|_U)+\mathrm{tr}(T|_K)$.

Demostración. Las inclusiones del enunciado anulan las componentes cruzadas de las imágenes de cada vector básico, dando los dos bloques cero. La imagen es $T(U)+T(K)$; como los sumandos están contenidos en U y K, su intersección es cero y sus dimensiones se suman. La diagonal de la matriz por bloques concatena las de A y D, lo que prueba la fórmula de traza. □

Si únicamente se cumple $T(U)\subseteq U$, el bloque inferior izquierdo es cero y el superior derecho puede ser no nulo. Por ejemplo, la cizalla preserva el eje horizontal, pero lleva e_2 a $2e_1+e_2$; el eje vertical no permanece dentro de sí mismo. Este bloque cruzado mide una interacción que una descomposición arbitraria no elimina.

El proyector oblicuo $E(x,y)=(x-y,0)$ tiene imagen horizontal y núcleo $\mathrm{span}(1,1)$. En la base $((1,0),(1,1))$ su matriz es $\mathrm{diag}(1,0)$: la primera dirección se conserva y la segunda se anula. La elección de la base hace legible la descomposición que ya existía en el operador. Esa posibilidad de adaptar las coordenadas a su comportamiento explica la utilidad de la semejanza; rango y traza permiten comprobar que algunas propiedades atraviesan todas esas descripciones.

12.9. Ejercicios

Los problemas siguientes usan coordenadas columna. Una matriz sin bases indicadas actúa entre los espacios usuales del tamaño correspondiente. Se trabaja sobre $\mathbb{R}$ salvo que se indique otro cuerpo.

Ejercicio 1 — Columnas y salida. Sea $T(x,y)=(2x-y,x+3y)$. Escribe su matriz usual y calcula $T(2,-1)$ mediante ella.

Ejercicio 2 — Una base de salida distinta. Para el mapa del ejercicio 1 usa la base usual de entrada y $\mathcal{C}=((1,1),(0,1))$ de salida.

Ejercicio 3 — Reconstruir el mapa. En $P_1(\mathbb{R})$ toma $\mathcal{B} = (1, 1+t)$; en $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{C} = ((1,0),(1,1))$. La matriz de T es $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Encuentra $T(a+bt)$.

Ejercicio 4 — Evaluar polinomios. Sea $E : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$, $E(p) = (p(0), p(1), p(-1))$. Representa E en bases usuales y determina su núcleo.

Ejercicio 5 — Composición rectangular. Toma $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcula BA y AB e indica los espacios en que actúan.

Ejercicio 6 — La identidad entre bases. Para $\mathcal{B} = ((1,1),(1,-1))$ encuentra $[I]_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$ y $[I]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}$.

Ejercicio 7 — Invertir con bases. El mapa del ejercicio 1 es un isomorfismo. Encuentra la matriz de su inversa en bases usuales.

Ejercicio 8 — Cambiar sólo la entrada. Para $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $\mathcal{B}' = ((1,1),(1,0))$, mantén la base usual de salida y calcula la nueva matriz.

Ejercicio 9 — Cambiar sólo la salida. Para el mismo A, mantén la entrada usual y usa $\mathcal{C}' = ((1,0),(1,1))$ de salida.

Ejercicio 10 — Cambiar ambas bases. Combina las bases nuevas de los ejercicios 8 y 9. Verifica la salida de $v = (2,1)$ en ambos sistemas.

Ejercicio 11 — El orden de las inversas. En la cizalla inicial se propone $A_{\text{nueva}} = PAP^{-1}$ con $P = \operatorname{diag}(1,2)$. Localiza el error y proporciona una entrada que lo detecte.

Ejercicio 12 — Componer con una base intermedia distinta. Sean $A = [T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$, $B = [S]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}'}$ y $R = P_{\mathcal{C}'\leftarrow\mathcal{C}}$. Encuentra la matriz de ST.

Ejercicio 13 — Potencias con representación mixta. En $V = \mathbb{R}$, representa la identidad usando entrada (2) y salida (1). Explica por qué elevar esa matriz al cuadrado no representa su segunda iteración con las mismas bases mixtas.

Ejercicio 14 — Una matriz que simplifica un operador. Para $T(x,y) = (3x+y, x+3y)$ usa $\mathcal{B} = ((1,1),(1,-1))$. Calcula $[T]_{\mathcal{B}}$ y una fórmula para T^k.

Ejercicio 15 — Rango y núcleo en nuevas coordenadas. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Encuentra AP, su núcleo y su imagen; compáralos con los de A.

Ejercicio 16 — Convertir el término independiente. Sea $A = I_2$, $Q = \operatorname{diag}(2,1)$ y $P = I_2$. Compara $Ax = (2,3)^{\mathsf{T}}$ con su ecuación correctamente convertida y con la ecuación que conserva erróneamente el mismo término independiente.

Ejercicio 17 — Construir bases para el rango. Para $T(x,y,z) = (x+y, y+z)$, construye explícitamente las matrices P, Q que llevan su matriz usual a J_2.

Ejercicio 18 — Equivalencia sin semejanza. Demuestra que I_2 y $2I_2$ son equivalentes por dos bases y no semejantes.

Ejercicio 19 — La misma traza no basta. Da dos matrices reales 2×2 con igual rango e igual traza que no sean semejantes. Justifica la última afirmación.

Ejercicio 20 — Traza rectangular. Para las matrices A, B del ejercicio 5, comprueba la identidad de trazas sin confundir los tamaños de AB y BA.

Ejercicio 21 — Permutar tres factores. Para matrices cuadradas del mismo orden demuestra $\operatorname{tr}(ABC) = \operatorname{tr}(BCA) = \operatorname{tr}(CAB)$. ¿Puede permutarse cualquier pareja?

Ejercicio 22 — Conmutadores. Para $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ demuestra que $AB - BA$ tiene traza cero. Deduce que sobre $\mathbb{R}$, para $n \geq 1$, no puede cumplirse $AB - BA = I_n$.

Ejercicio 23 — Un funcional de rango uno. Sean $u \in \mathbb{F}^n$ y $\varphi(x) = \sum_j a_j x_j$. Para $T(x) = \varphi(x)u$, calcula su matriz, traza y rango.

Ejercicio 24 — Proyectores oblicuos. Para $E(x,y) = (x-y, 0)$ calcula su matriz usual, una base en que sea diagonal y su traza.

Ejercicio 25 — La característica altera la lectura de la traza. En $\mathbb{F}_2^2$ estudia la traza, rango e idempotencia de I_2. Explica qué afirmación real deja de poder inferirse.

Ejercicio 26 — Bloques e interacción. En la descomposición $\mathbb{R}^3 = \operatorname{span}(e_1, e_2) \oplus \operatorname{span}(e_3)$, estudia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. ¿Qué sumandos preserva?

Ejercicio 27 — Una base del espacio de mapas. Para bases $\mathcal{B} = (b_j)_{j=1}^n$, $\mathcal{C} = (c_i)_{i=1}^m$, define $F_{ij}(b_k) = \delta_{jk} c_i$. Demuestra que los F_{ij} forman una base de $\operatorname{Hom}(V, W)$.

Ejercicio 28 — Por qué hace falta una base. Se propone representar un mapa de $\mathbb{R}^2$ usando la lista $(e_1, e_2, e_1 + e_2)$ de entrada. Explica qué falla en las coordenadas y qué condición deben satisfacer las tres imágenes prescritas.

Ejercicio 29 — Clasificación de todas las matrices de rango uno. Demuestra que una matriz no nula $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ tiene rango uno si y sólo si $A = uv^{\mathsf{T}}$ con u, v no nulos.

Ejercicio 30 — Semejanza y potencias. Si $B = P^{-1}AP$, demuestra que $B^k = P^{-1}A^kP$ para $k \geq 0$. Deduce la invariancia de $\operatorname{rg}(A^k)$ y $\operatorname{tr}(A^k)$.

Ejercicio 31 — Rangos iguales, cuadrados distintos. Construye dos matrices 2×2 del mismo rango que sean equivalentes por dos bases pero cuyos cuadrados tengan rangos distintos.

Ejercicio 32 — Traslación de polinomios. Para $S : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$, $S(p)(t) = p(t + 1)$, calcula su matriz en $(1, t, t^2)$ y la matriz de S^k.

Ejercicio 33 — Un mapa desde un cociente. En $V = \mathbb{R}^3$ toma $U = \operatorname{span}(1, 1, 1)$ y $T(x, y, z) = (x - z, y - z)$. Representa el isomorfismo inducido $\overline{T} : V/U \to \mathbb{R}^2$ en una base explícita de clases.

Ejercicio 34 — Complementos y elecciones. En el ejercicio 33 utiliza el complemento $K = \operatorname{span}(e_1, e_2)$ para elegir representantes. Después usa $K' = \operatorname{span}((2, 1, 1), (1, 2, 1))$. ¿Cambia la matriz obtenida con las clases de esos generadores?

Ejercicio 35 — Intercambio en característica dos. En $\mathbb{F}_2^2$ considera $T(x, y) = (y, x)$. ¿Existe una base en que su matriz sea diagonal?

Ejercicio 36 — Todas las bases que conservan una matriz. Sea $A = \operatorname{diag}(1, 2)$ sobre $\mathbb{R}$. Encuentra todas las matrices invertibles P tales que $P^{-1}AP = A$.

Ejercicio 37 — Reconocer una proyección sin resolver un sistema. Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$ con $A^2 = A$. Demuestra que es semejante a $\operatorname{diag}(I_r, 0)$, donde $r = \operatorname{rg} A$.

Ejercicio 38 — Traza como caracterización lineal. Sea $f : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ lineal y supongamos $f(AB) = f(BA)$ para todas A, B. Demuestra que existe $c \in \mathbb{F}$ con $f(A) = c \operatorname{tr} A$.

Ejercicio 39 — Dos operadores conjugados por un isomorfismo. Sean $T : V \to V$, $S : W \to W$ y un isomorfismo $F : V \to W$ con $FT = SF$. Demuestra que sus matrices en cualesquiera bases son semejantes y tienen igual rango y traza.

Ejercicio 40 — Reconstrucción integral. Define $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ por $T(p) = p(0)\,1 + p(1)\,t$. Calcula su matriz en $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ y en $\mathcal{B} = (1, t, t^2 - t)$; halla núcleo, imagen, rango y traza. Comprueba el cambio de base.

12.10. Soluciones

Solución 1. Las imágenes de e_1, e_2 son $(2, 1)$ y $(-1, 3)$, de modo que $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. El producto $A(2, -1)^{\mathsf{T}} = (5, -1)^{\mathsf{T}}$ da $T(2, -1) = (5, -1)$. La comprobación directa sustituye en ambas componentes y produce la misma salida.

Solución 2. Para escribir (a, b) en $\mathcal{C}$ resolvemos $(a, b) = a(1, 1) + (b - a)(0, 1)$. Así, $[T(e_1)]_{\mathcal{C}} = (2, -1)^{\mathsf{T}}$ y $[T(e_2)]_{\mathcal{C}} = (-1, 4)^{\mathsf{T}}$. La matriz es $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Sus columnas son coordenadas de las imágenes, y no sus coordenadas usuales.

Solución 3. La entrada se escribe $(a - b)1 + b(1 + t)$ y tiene coordenadas $(a - b, b)^{\mathsf{T}}$. El producto da $(a + b, 3a + b)^{\mathsf{T}}$ en $\mathcal{C}$. Al reconstruir, $T(a + bt) = (a + b)(1, 0) + (3a + b)(1, 1) = (4a + 2b, 3a + b)$. El último paso es indispensable para responder en coordenadas usuales.

Solución 4. Las imágenes de $1, t, t^2$ son $(1,1,1), (0,1,-1), (0,1,1)$, respectivamente. La matriz es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Si su producto por $(a,b,c)^{\mathsf{T}}$ es cero, la primera fila da $a = 0$ y las otras dan $b + c = -b + c = 0$. Sumar y restar, usando $2 \neq 0$, da $b = c = 0$. Por tanto el núcleo es trivial.

Solución 5. $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ y $B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Por multiplicación, $BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ actúa en $\mathbb{R}^3$, mientras $AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ actúa en $\mathbb{R}^2$. Las dos composiciones son legítimas y diferentes; que sus trazas sean ambas tres se explica por el lema 12.7.

Solución 6. La primera matriz tiene como columnas los vectores de $\mathcal{B}$: $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. La segunda es $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, pues $P^2 = 2I$. La identidad tiene matriz identidad cuando las bases de ambos lados coinciden; aquí se están convirtiendo coordenadas.

Solución 7. Resolver $u = 2x - y$, $v = x + 3y$ da $x = (3u + v)/7$, $y = (-u + 2v)/7$. La matriz inversa es $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Multiplicarla a izquierda y derecha por A da I_2, lo que comprueba tanto la fórmula como la biyectividad sin determinantes.

Solución 8. La transición nueva a usual es $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Resulta $AP = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Sus columnas son $T(1,1) = (1,4)$ y $T(1,0) = (2,1)$, comprobación directa que también fija el lado del producto.

Solución 9. $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Por tanto $Q^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. En efecto, $(2,1) = (1,0) + (1,1)$ y $(-1,3) = -4(1,0) + 3(1,1)$.

Solución 10. $A' = Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. La entrada tiene coordenadas nuevas $(1,1)^{\mathsf{T}}$, y su salida tiene coordenadas $(-2,5)^{\mathsf{T}}$. Reconstruir en $\mathcal{C}'$ da $-2(1,0) + 5(1,1) = (3,5)$, que coincide con $T(2,1)$. Quedan controladas la matriz, la entrada y la reconstrucción.

Solución 11. Con la convención del capítulo, P recibe coordenadas nuevas, por lo que actúa primero, a la derecha. La fórmula correcta es $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. La fórmula propuesta da $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Para la entrada nueva $(0,1)^{\mathsf{T}}$, que representa $(0,2)$, ésta produciría $(1,1)^{\mathsf{T}}$ en vez de $(4,1)^{\mathsf{T}}$. Al reconstruir se obtendría $(1,2)$ en lugar de $(4,2)$.

Solución 12. La entrada en $\mathcal{B}$ se convierte por A en coordenadas $\mathcal{C}$; R convierte esas coordenadas en las que recibe B. Por tanto $[ST]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{B}} = BRA$. La comprobación consiste en aplicar la identidad a una columna arbitraria $[v]_{\mathcal{B}}$: el producto devuelve $[S(T(v))]_{\mathcal{D}}$.

Solución 13. La matriz mixta es (2). La segunda iteración sigue siendo la identidad y tiene la misma matriz mixta (2), mientras el cuadrado numérico es (4). Entre dos aplicaciones debe convertirse la salida en la base (1) a la entrada en (2), mediante (1/2). El producto correcto es (2)(1/2)(2) = (2).

Solución 14. $T(1,1) = 4(1,1)$ y $T(1,-1) = 2(1,-1)$, así que $[T]_{\mathcal{B}} = \operatorname{diag}(4,2)$. Como $(x,y) = \frac{x+y}{2}(1,1) + \frac{x-y}{2}(1,-1)$, para $k \geq 0$ resulta $T^k(x,y) = \frac{4^k(x+y)}{2}(1,1) + \frac{2^k(x-y)}{2}(1,-1)$. No hace falta multiplicar repetidamente matrices llenas.

Solución 15. $AP = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tiene núcleo $\operatorname{span}(-2,1)$ e imagen $\operatorname{span}(1,0)$. El núcleo de A es $\operatorname{span}(-1,1)$; aplicar P^{-1} a ese generador da $(-2,1)$. La imagen permanece igual porque el cambio sólo afecta al dominio. Ambos rangos son uno.

Solución 16. $A' = Q^{-1} = \operatorname{diag}(1/2, 1)$. El término convertido es $b' = (1,3)^{\mathsf{T}}$, de modo que la solución sigue siendo $x = (2,3)^{\mathsf{T}}$. Si se escribe $A'x = (2,3)^{\mathsf{T}}$, la solución pasa a $(4,3)^{\mathsf{T}}$. Se habría cambiado el vector de salida solicitado al dejar intacta su columna de números.

Solución 17. Sirven $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, con columnas $e_1, e_3, (-1,1,-1)$, y $Q = I_2$. La independencia de las columnas se comprobó en §12.6. El producto directo es $AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; las dos primeras columnas identifican una base de la imagen y la última se anula.

Solución 18. Eligiendo $P = 2I_2$ y $Q = I_2$ se obtiene $Q^{-1}I_2P = 2I_2$. Para semejanza, en cambio, $R^{-1}I_2R = I_2$ para toda R invertible. Como $2I_2 \neq I_2$ sobre $\mathbb{R}$, no existe tal semejanza. El argumento no depende de calcular trazas.

Solución 19. Sirven I_2 y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ambas son invertibles y tienen traza dos. Toda matriz semejante a I_2 es I_2, mientras $B \neq I_2$. La comparación prueba que ni siquiera el par de invariantes rango-traza es completo.

Solución 20. Las diagonales de BA son $1, 1, 1$, según el producto del ejercicio 5, cuya suma es tres; las de AB son $2, 1$, también de suma tres. Por tanto $\operatorname{tr}(BA) = \operatorname{tr}(AB) = 3$. La identidad iguala escalares de matrices de tamaños tres y dos; no afirma igualdad de matrices.

Solución 21. Aplicar el lema a A y BC da la primera igualdad; aplicarlo otra vez a B y CA da la segunda. Una permutación arbitraria no está autorizada. Por ejemplo, con $A = E_{12}$, $B = E_{21}$ y $C = E_{11}$ en orden dos, $ABC = E_{11}$ tiene traza uno, mientras $ACB = 0$ tiene traza cero.

Solución 22. La linealidad y el lema dan $\operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) = 0$. Si fuera I_n sobre $\mathbb{R}$, su traza sería $n > 0$, contradicción. En característica positiva el argumento sólo excluye la igualdad cuando $n\,1_{\mathbb{F}} \neq 0$; el caso restante requiere otro examen.

Solución 23. La columna j es $a_j u$, de modo que la matriz es $u(a_1, \ldots, a_n)$. Su diagonal suma $\sum_j a_j u_j = \varphi(u)$. Si $u = 0$ o $\varphi = 0$, el rango es cero. Si ambos son no nulos, existe v con $\varphi(v) \neq 0$; al escalarlo se obtiene w con $\varphi(w) = 1$. Entonces $T(w) = u$, y la imagen, contenida en $\operatorname{span} u$, es exactamente esa recta: el rango es uno.

Solución 24. La matriz usual es $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. La base $((1,0),(1,1))$ separa imagen y núcleo. Las imágenes de esos vectores son ellos mismos y cero, respectivamente, por lo que la matriz nueva es $\operatorname{diag}(1,0)$. Ambas matrices tienen traza uno; el proyector tiene rango uno.

Solución 25. $I_2^2 = I_2$, su rango es dos y su traza es $1 + 1 = 0$ en $\mathbb{F}_2$. Por ello traza cero no obliga a rango cero para un idempotente en este cuerpo. La fórmula general $\operatorname{tr} E = r\,1_{\mathbb{F}}$ permanece válida; identificar ese escalar con el entero r sin atender a la característica es el error.

Solución 26. Las dos primeras columnas están en $U = \operatorname{span}(e_1, e_2)$, que sí se preserva. La tercera imagen es $(2,3,4)$, fuera de $K = \operatorname{span} e_3$, así que K no se preserva. El bloque inferior izquierdo es cero y el superior derecho es la columna $(2,3)^{\mathsf{T}}$. La matriz es triangular por bloques, sin ser diagonal por bloques.

Solución 27. Cada F_{ij} existe por extensión desde la base. Su matriz es la unidad matricial con uno en (i,j). Si $[T] = (a_{ij})$, las imágenes de cada b_k muestran que $T = \sum_{i,j} a_{ij} F_{ij}$, por lo que generan. En una relación nula, aplicar a b_k da $\sum_i \alpha_{ik} c_i = 0$; la independencia de $\mathcal{C}$ anula todos los coeficientes. Son, pues, una base de mn elementos.

Solución 28. La lista es generadora pero dependiente. Un vector tiene múltiples ternas de coeficientes: cero se representa tanto por $(0,0,0)$ como por $(1,1,-1)$. Si se prescriben imágenes w_1, w_2, w_3, la extensión es posible exactamente cuando $w_3 = w_1 + w_2$. La necesidad viene de aplicar linealidad a la relación; la suficiencia se obtiene definiendo el mapa por las imágenes de e_1, e_2. Las tres columnas no parametrizan libremente todos los mapas como lo haría una base.

Solución 29. Si tiene rango uno, elige una columna no nula u. Cada columna es un múltiplo $v_j u$, porque la imagen es la recta que genera u. Así $A = u(v_1, \ldots, v_n)$ y $v \neq 0$. Recíprocamente, en esa factorización todas las columnas están en $\operatorname{span} u$ y alguna es no nula, pues $v \neq 0$. La imagen tiene entonces dimensión uno. No aparece conjugación: v^{T} es sólo una fila de escalares.

Solución 30. Para $k = 0$, ambos lados son identidad. Si la fórmula vale en k, multiplicar por B cancela los factores centrales PP^{-1} y da $B^{k+1} = P^{-1}A^{k+1}P$. La inducción cubre todos los exponentes. Las proposiciones 12.5 y el teorema 12.8 aplicados a cada potencia dan los invariantes. La cancelación exige la relación de semejanza; una equivalencia por dos bases no la garantiza.

Solución 31. Toma $A = \operatorname{diag}(1,0)$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ambas tienen rango uno y $B = AP$ con $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Sin embargo, $A^2 = A$ tiene rango uno y $B^2 = 0$ tiene rango cero. Por el ejercicio 30 tampoco pueden ser semejantes. La iteración detecta información que la equivalencia por dos bases pierde.

Solución 32. Las imágenes básicas son $1, t+1, t^2+2t+1$, por lo que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Componer k traslaciones da $S^k(p)(t) = p(t+k)$ para $k \geq 0$, por inducción sobre la sustitución. Sus columnas proporcionan $A^k = \begin{pmatrix} 1 & k & k^2 \\ 0 & 1 & 2k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. La fórmula se comprueba también multiplicando las matrices de las traslaciones por k y por uno.

Solución 33. $\ker T = U$ y T es sobreyectiva porque $T(a,b,0) = (a,b)$. Por C11 induce un isomorfismo. Las clases $e_1 + U, e_2 + U$ generan: $(x,y,z) + U = (x-z)e_1 + (y-z)e_2 + U$. Son independientes porque $(a,b,0) \in U$ obliga a $a = b = 0$. Sus imágenes son e_1, e_2, así que la matriz del isomorfismo inducido en esa base y la usual es I_2.

Solución 34. Los generadores de K producen $e_1 + U, e_2 + U$. Los de K' son $e_1 + (1,1,1)$ y $e_2 + (1,1,1)$, así que producen las mismas clases. Además, si una combinación de esos generadores pertenece a U, aplicar T da sus coeficientes iguales a cero; por dimensión, K' es un complemento. La matriz sigue siendo I_2: han cambiado los representantes, no la base del cociente.

Solución 35. Si una diagonal D fuera semejante a $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, satisfaría $D^2 = I$, porque $A^2 = I$. En $\mathbb{F}_2$ los únicos escalares son cero y uno, y $d^2 = 1$ obliga a $d = 1$. Por tanto $D = I$, lo que obligaría a $A = I$ al deshacer la semejanza, contradicción. La base real usada en §12.4 no se puede trasladar a este cuerpo.

Solución 36. La condición equivale a $AP = PA$. Si $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, comparar entradas da $b = 2b$ y $2c = c$, luego $b = c = 0$. Las entradas diagonales quedan libres, con $a, d \neq 0$ para invertibilidad. Así todas y sólo las matrices diagonales invertibles conservan numéricamente esta representación.

Solución 37. Para cualquier v, escribimos $v = Av + (v - Av)$. El primer término pertenece a la imagen y el segundo al núcleo porque $A(v - Av) = Av - A^2 v = 0$. Si $w = Au$ está también en el núcleo, $0 = Aw = A^2 u = Au = w$. La suma es directa. En una base de la imagen seguida de una del núcleo, A actúa como identidad y cero, respectivamente, dando la semejanza buscada. Es una sola base en ambos lados, por lo que la conclusión es más fuerte que equivalencia por rango.

Solución 38. Para $i \neq j$, $E_{ii}E_{ij} = E_{ij}$ y $E_{ij}E_{ii} = 0$, luego $f(E_{ij}) = 0$. También $E_{ij}E_{ji} = E_{ii}$ y $E_{ji}E_{ij} = E_{jj}$, así que $f(E_{ii}) = f(E_{jj})$. Tomando $c = f(E_{11})$, la expansión de cualquier matriz en unidades da $f(A) = c\sum_i a_{ii}$. Para $n = 1$ la conclusión procede directamente de linealidad; para $n = 0$ el espacio sólo contiene cero y puede tomarse $c = 0$. No se divide por n, de modo que funciona en cualquier característica.

Solución 39. Fijemos bases $\mathcal{B}$ de V y $\mathcal{C}$ de W. Con $A = [T]_{\mathcal{B}}$, $B = [S]_{\mathcal{C}}$ y $R = [F]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$, la identidad da $RA = BR$. Como R es invertible, $B = RAR^{-1}$. Es una semejanza con transición R^{-1} en la definición. Los invariantes ya demostrados dan igualdad de rango y traza. Los espacios pueden ser diferentes: el isomorfismo transporta también la acción de los operadores.

Solución 40. Las imágenes usuales son $1+t, t, t$, por lo que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Para la nueva base, $T(1) = 1+t$, $T(t) = t$ y $T(t^2 - t) = 0$, así que $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La transición es $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; multiplicar da $AP = PB$. El núcleo exige $a = 0$ y $b + c = 0$, de donde $\ker T = \operatorname{span}(t^2 - t)$. La imagen es P_1, de dimensión dos, pues $1 + t, t$ son independientes. El rango es dos y la traza es dos

en ambas matrices. La base nueva expone el núcleo como última dirección sin diagonalizar la acción sobre la imagen.

Lecturas y referencias

Para contrastar la representación de aplicaciones y el cambio de bases, pueden consultarse Johnston, *Advanced Linear and Matrix Algebra*, §1.2; Friedberg, Insel y Spence, *Linear Algebra*, §§2.2–2.5; y Hoffman–Kunze, *Linear Algebra*, §3.4. Axler, *Linear Algebra Done Right*, §§3C–3D y comienzo de §8D, ofrece otra presentación de la correspondencia entre matrices y operadores y de la invariancia de la traza. La parte inicial sobre traza puede leerse sin utilizar la teoría espectral que la rodea en ese libro.

Capítulo 13

Determinantes

Una cizalla del plano puede deformar un cuadrado hasta convertirlo en un paralelogramo sin cambiar su área. La transformación $S(x, y) = (x + 2y, y)$, que acompañó nuestro estudio del cambio de base, lleva los lados $(1, 0)$ y $(0, 1)$ a $(1, 0)$ y $(2, 1)$. La figura resultante sigue teniendo base uno y altura uno. En cambio, $D(x, y) = (3x, 2y)$ convierte el mismo cuadrado en un rectángulo de área seis. El rango de ambos operadores es dos; ese invariante distingue si el plano se aplasta, pero no cuánto cambia su área.

También podemos intercambiar los dos ejes mediante $R(x, y) = (y, x)$. El cuadrado conserva su área y cambia la orientación de su par de lados: el primer vector, seguido del segundo, recorre las direcciones en el orden contrario. Buscaremos un número que registre a la vez la escala de las áreas y ese signo. Para las tres transformaciones anteriores serán, respectivamente, 1, 6 y -1.

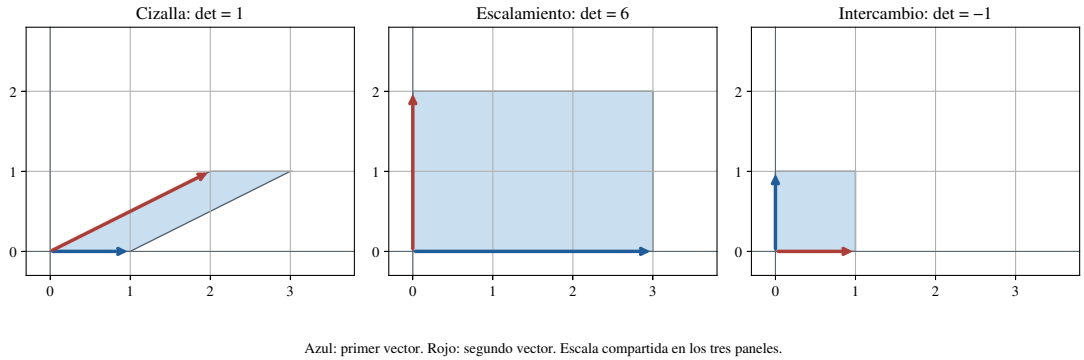


Figura 13.1. Las flechas azul y roja corresponden al primer y al segundo vector básico, en ese orden. Los ejes mantienen la misma escala en los tres paneles. El signo distingue el orden de los lados, mientras el valor absoluto mide el área.

En dimensión dos aparece la expresión $ad - bc$ para las columnas (a, b) y (c, d). Podríamos tomarla como receta y buscar fórmulas análogas de mayor tamaño; resultará más fértil averiguar qué propiedades permiten reconstruirla. La construcción algebraica funcionará sobre cualquier cuerpo conmutativo $\mathbb{F}$. La interpretación mediante áreas, signos positivos y negativos se reservará a $\mathbb{R}$.

Utilizaremos las operaciones matriciales, independencia y bases, rango y representación de operadores de C03–C12. No se presupone teoría de grupos ni de formas multilineales: desarrollaremos el vocabulario que hace falta. Los ejemplos con números racionales se entienden sobre $\mathbb{R}$, salvo indicación contraria.

13.1. Linealidad en una columna, con las otras fijas

Para $u = (a, b)$ y $v = (c, h)$ consideremos $d(u, v) = ah - bc$. Si reemplazamos u por $\alpha u + \beta w$ y mantenemos v, la distributividad da $d(\alpha u + \beta w, v) = \alpha d(u, v) + \beta d(w, v)$. Ocurre lo mismo al variar únicamente v. Pero si multiplicamos ambas columnas por un mismo escalar t, el resultado se multiplica por t^2. La distinción importa: esta función no es una aplicación lineal del espacio de matrices al cuerpo.

Además, $d(u, u) = 0$ y $d(e_1, e_2) = 1$. La primera igualdad expresa que dos lados iguales producen una figura aplastada; la segunda fija la unidad con la que medimos. Esas propiedades tienen sentido en cualquier dimensión aunque ya no podamos dibujar los vectores.

Definición 13.1. Una función $d : (\mathbb{F}^n)^n \to \mathbb{F}$ es **multilineal** si es lineal en cada uno de sus n argumentos manteniendo fijos los demás. Es **alternante** si su valor es cero cuando dos argumentos son iguales. Diremos que está **normalizada** si $d(e_1, \dots, e_n) = 1$.

Cada argumento será una columna. Multilinealidad exige, para cada posición j,

$$d(v_1, \dots, \alpha u + \beta w, \dots, v_n) = \alpha d(v_1, \dots, u, \dots, v_n) + \beta d(v_1, \dots, w, \dots, v_n).$$

Sólo cambia la posición indicada. Si se modifican dos columnas simultáneamente, hay que expandir en ambas posiciones y aparecen términos cruzados. Para una columna cero, la linealidad en esa posición obliga a que el valor sea cero.

Lema 13.1 (consecuencias de la alternancia). Para una función multilineal alternante, intercambiar dos argumentos cambia el valor por su opuesto. Añadir a un argumento un múltiplo de otro deja el valor intacto. Si los n argumentos son linealmente dependientes, el valor es cero.

Demostración. Fijemos todas las posiciones salvo dos y pongamos en ambas $u + w$. Por alternancia el valor es cero. Al expandir en las dos posiciones, los términos con u, u y con w, w desaparecen; quedan el valor con u, w y el valor con w, u, cuya suma es cero. Así, el intercambio cambia el signo.

Si reemplazamos v_j por $v_j + c v_k$, con $k \neq j$, la expansión produce el valor original más c veces otro valor en el que v_k ocupa dos posiciones. Este último es cero por alternancia, lo que prueba la segunda afirmación.

Para la tercera, una relación no trivial $\sum_j \lambda_j v_j = 0$ tiene algún $\lambda_k \neq 0$. Podemos despejar $v_k = -\sum_{j \neq k} (\lambda_j / \lambda_k) v_j$. Al sustituir esta combinación en la posición k y expandir, cada término tiene un argumento repetido y se anula. □

La prueba del intercambio es válida incluso en característica dos, donde $-x = x$. La conversa requiere cuidado: allí una función que permanece igual al intercambiar dos argumentos no tiene por qué anularse cuando éstos coinciden. Por ejemplo, $b(u, v) = u_1 v_1$ sobre $\mathbb{F}_2^2$ es bilineal y satisface $b(v, u) = -b(u, v)$, pero $b(e_1, e_1) = 1$. Por eso la definición de alternancia se hizo mediante repetición de argumentos.

En orden dos ya podemos reconstruir la expresión inicial. Expandir $d(a e_1 + b e_2, c e_1 + h e_2)$ deja sólo los términos $ah\, d(e_1, e_2)$ y $bc\, d(e_2, e_1)$. La normalización y el lema dan $ah - bc$. En orden mayor tendremos la misma expansión, pero habrá que organizar los órdenes posibles de los vectores básicos.

13.2. Contar los intercambios sin depender del camino

Una permutación de $\{1, \dots, n\}$ es una biyección de ese conjunto consigo mismo. Podemos escribirla como una lista $\sigma(1), \dots, \sigma(n)$ que contiene cada número una vez. Una **inversión** es un par de posiciones $i < j$ para el cual $\sigma(i) > \sigma(j)$. Su número, denotado $N(\sigma)$, cuenta los pares que aparecen en orden contrario al natural.

Definición 13.2. El **signo** de una permutación es el entero $\operatorname{sgn} \sigma = (-1)^{N(\sigma)}$. Cuando se usa como escalar de $\mathbb{F}$, se interpreta como $1_{\mathbb{F}}$ o $-1_{\mathbb{F}}$.

Lema 13.2. Intercambiar dos posiciones adyacentes de una permutación cambia su signo. Intercambiar dos posiciones cualesquiera también cambia su signo. Toda permutación puede ordenarse mediante intercambios adyacentes, y cualquier función multilineal alternante satisface

$$d(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = (\operatorname{sgn} \sigma)\, d(e_1, \dots, e_n).$$

Además, $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn} \sigma$.

Demostración. Al intercambiar dos entradas vecinas, cambia únicamente la condición de inversión del par que forman. Para cualquier otra entrada, el número total de inversiones que mantiene con esas dos se conserva. Por tanto N aumenta o disminuye en uno. Un intercambio entre posiciones $i < j$ puede realizarse moviendo la entrada de i hasta j mediante $j - i$ intercambios adyacentes y moviendo después la entrada originalmente situada en j hasta i mediante $j - i - 1$ intercambios. Son $2(j - i) - 1$, un número impar, de modo que también cambia el signo.

Si la lista no está ordenada, tiene una pareja adyacente invertida: si todas las parejas vecinas estuvieran en orden creciente, toda la lista lo estaría. Intercambiar esa pareja reduce N en uno. Repitiendo llegamos a la lista usual después de $N(\sigma)$ intercambios. Aplicar el lema 13.1 en cada

paso da la fórmula para d. No necesitamos escoger un camino canónico: cada intercambio cambia la paridad de N, así que todo camino entre los mismos órdenes tiene la misma paridad.

Por último, una inversión $i<j$ con $\sigma(i)>\sigma(j)$ corresponde a la inversión de σ^{-1} situada en las posiciones $\sigma(j)<\sigma(i)$: sus imágenes son $j>i$. Esta correspondencia es biyectiva, por lo que las dos permutaciones tienen igual número de inversiones y el mismo signo. $\square$

Por ejemplo, la lista $(3,1,2)$ tiene dos inversiones y signo positivo. La lista $(2,1,3)$ tiene una y signo negativo. El signo se ha construido contando pares de enteros, sin usar previamente determinantes ni resultados de teoría de grupos.

13.3. Existencia, unicidad y fórmula de Leibniz

Si las columnas de A son $v_1,\dots,v_n$, cada una se expresa como $v_j=\sum_i a_{ij}e_i$. Expandir una función multilineal en todas las posiciones produce n^n términos indexados por listas de índices de fila. Cuando la función es alternante, desaparece cualquier lista que repita un índice. Las restantes son las permutaciones.

Teorema 13.3 (caracterización del determinante). Para cada $n\geq 1$ existe una única función multilineal, alternante y normalizada de las n columnas de una matriz de orden n. Se llama **determinante**, y viene dada por

$$\det A=\sum_{\sigma\in S_n}(\operatorname{sgn}\sigma)\prod_{j=1}^{n}a_{\sigma(j),j},$$

donde S_n es el conjunto de permutaciones de $\{1,\dots,n\}$. Más generalmente, toda función multilineal alternante d satisface $d(v_1,\dots,v_n)=d(e_1,\dots,e_n)\det A$.

Demostración. Comencemos por lo que las propiedades obligan a hacer. La expansión descrita antes del enunciado es

$$d(v_1,\dots,v_n)=\sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n}a_{i_j j}\right)d(e_{i_1},\dots,e_{i_n}).$$

Los términos con índices repetidos son cero. Para los restantes, el lema 13.2 identifica el último factor con $(\operatorname{sgn}\sigma)d(e_1,\dots,e_n)$. Esto demuestra la fórmula general y la unicidad en el caso normalizado. Todavía no demuestra que las propiedades puedan satisfacerse: debemos comprobar la existencia.

Definamos una función mediante la suma de Leibniz. Cada producto utiliza exactamente una entrada de cada columna, así que al variar una sola columna es lineal en ella; la suma finita conserva esa propiedad. En la identidad, todo producto se anula salvo el de la permutación identidad, que vale uno. Falta la alternancia.

Supongamos iguales las columnas j y k. Emparejamos cada permutación σ con la permutación obtenida al intercambiar sus valores en esas dos posiciones. Son permutaciones distintas, los productos correspondientes son iguales porque las columnas coinciden, y sus signos son opuestos por el lema 13.2. Cada pareja suma cero. Esta cancelación funciona también en característica dos: un término y su opuesto siempre suman cero. Por tanto la función definida es alternante, y su existencia queda probada. $\square$

Para orden uno la fórmula dice $\det(a)=a$. Adoptamos además $\det I_0=1$ para la matriz vacía de orden cero; la convención de producto vacío uno hará que las expansiones por menores funcionen también en orden uno.

En orden dos recuperamos $\det\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}=ad-bc$. En orden tres las seis permutaciones dan

$$\det\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}=aei+bfg+cdh-ceg-bdi-afh.$$

La fórmula permite reconstruir los signos y comprender qué sumamos. Su número de términos crece como $n!$, por lo que no será nuestro método habitual de cálculo en órdenes grandes. La caracterización por columnas da herramientas más económicas.

13.4. Trasponer, triangularizar y llevar la cuenta de las operaciones

Proposición 13.4 (transposición y operaciones elementales). Para toda matriz cuadrada, $\det A^{\mathsf{T}} = \det A$. El determinante es, por tanto, multilineal y alternante también en las filas. En filas o columnas, un intercambio multiplica el determinante por -1, multiplicar una de ellas por c multiplica el determinante por c, y añadir un múltiplo de otra no lo cambia.

Demostración. Aplicar Leibniz a A^{T} produce productos $\prod_j a_{j,\sigma(j)}$. Si ponemos $i = \sigma(j)$, ese producto se reescribe como $\prod_i a_{\sigma^{-1}(i),i}$. La aplicación $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ recorre todas las permutaciones y conserva su signo por el lema 13.2. La suma resultante es $\det A$.

Las propiedades de columnas pasan a las filas por transposición. El intercambio y la adición se demostraron en el lema 13.1, y el efecto de escalar una posición es la multilinealidad. □

Proposición 13.5 (matrices triangulares). El determinante de una matriz triangular superior o inferior es el producto de sus entradas diagonales.

Demostración. Para una matriz triangular superior, un término no nulo de Leibniz sólo puede usar entradas con $\sigma(j) \le j$. Para $j = 1$ esto obliga a $\sigma(1) = 1$; después, para $j = 2$ obliga a $\sigma(2) = 2$, pues el valor uno ya se utilizó. Continuando, sólo queda la identidad. Su producto es $a_{11} \cdots a_{nn}$. El caso triangular inferior se obtiene trasponiendo. □

Al triangularizar A mediante eliminación, cada operación debe acompañarse de su efecto sobre el determinante. Si sólo usamos adiciones de múltiplos de otras filas y s intercambios, la matriz triangular U satisface $\det U = (-1)^s \det A$. Como el inverso de $(-1)^s$ es él mismo, $\det A = (-1)^s \prod_j u_{jj}$. Si además escalamos filas por factores no nulos $c_1, \dots, c_k$, aparece el factor adicional $\prod_\ell c_\ell$ en $\det U$ y hay que dividir por él al recuperar $\det A$.

Por ejemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Se intercambiaron las dos primeras filas y después se hicieron $R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1$ y $R_3 \leftarrow R_3 - R_2$. El producto diagonal final es ocho, y el único intercambio da $\det A = -8$. Reducir hasta la identidad también permitiría calcularlo, pero obligaría a registrar normalizaciones adicionales sin aportar información necesaria.

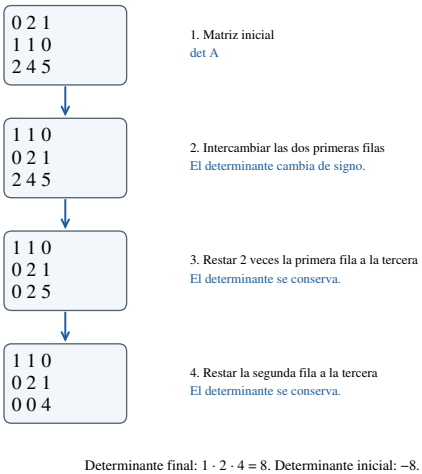


Figura 13.2. La cuenta distingue el determinante de la matriz inicial del de la matriz que aparece durante el algoritmo. Los pivotes pertenecen a la última matriz, cuyo determinante se obtiene mediante su diagonal.

13.5. Componer multiplica los determinantes

Sean A y B matrices de orden n, con columnas de B iguales a $v_1, \dots, v_n$. Las columnas de AB son $Av_1, \dots, Av_n$. Esta observación convierte una propiedad del producto matricial en una aplicación de la unicidad ya demostrada.

Teorema 13.6 (multiplicatividad). Para $A, B \in M_n(\mathbb{F})$,

$$\det(AB) = (\det A)(\det B).$$

Demostración. Fijemos A y definamos $d_A(v_1, \dots, v_n) = \det(Av_1, \dots, Av_n)$. Como la aplicación $v \mapsto Av$ es lineal, d_A es multilineal. Si se repiten dos argumentos, sus imágenes también se repiten, de modo que es alternante. Su valor en $(e_1, \dots, e_n)$ es $\det A$. La afirmación general del teorema 13.3 da

$$\det(Av_1, \dots, Av_n) = (\det A)\det(v_1, \dots, v_n).$$

El miembro izquierdo es $\det(AB)$ y el segundo factor del derecho es $\det B$. No se ha supuesto que ninguno sea distinto de cero. □

Teorema 13.7 (invertibilidad). Para una matriz cuadrada sobre $\mathbb{F}$, son equivalentes: $\det A \neq 0$, las columnas de A forman una base, $\operatorname{rg} A = n$ y A es invertible. Si es invertible, $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

Demostración. Si las columnas son dependientes, el lema 13.1 da $\det A = 0$. Por contraposición, determinante no nulo implica columnas independientes; al haber n columnas en $\mathbb{F}^n$, forman una base. C07 y C09 identifican esta condición con rango n, y C03–C09 con invertibilidad, mediante la aplicación $x \mapsto Ax$.

Si A es invertible, la multiplicatividad aplicada a $AA^{-1} = I$ da $(\det A)\det(A^{-1}) = 1$. Ninguno de los factores puede ser cero, y al dividir obtenemos la fórmula. Se cierra así el ciclo de equivalencias. □

El determinante añade un criterio escalar a resultados que ya conocíamos por sistemas y dimensión. Una matriz rectangular puede tener rango máximo e incluso una inversa por un lado; el determinante definido aquí corresponde a matrices cuadradas y no sustituye esas distinciones.

Tampoco se puede usar linealidad para sumar matrices completas. Para $n \geq 2$, $\det(2I_n) = 2^n$ sobre $\mathbb{R}$, mientras $\det I_n + \det I_n = 2$. El ejemplo $n = 2$ ya muestra la falla. Al sumar matrices se suman todas sus columnas a la vez, y la multilinealidad produce términos mezclados. En cambio, de esa misma propiedad sí se deduce $\det(cA) = c^n \det A$, porque se ha multiplicado cada una de las n columnas por c.

13.6. El determinante de un operador y el de dos descripciones

C12 mostró que un cambio de base de un operador transforma A en $P^{-1}AP$. La multiplicatividad permite seguir los tres factores.

Proposición 13.8 (invariancia por semejanza). Si $A' = P^{-1}AP$ con P invertible, entonces $\det A' = \det A$. Por tanto, para un operador $T : V \to V$ de dimensión finita está bien definido $\det T = \det[T]_{\mathcal{B}}$ usando una misma base $\mathcal{B}$ en entrada y salida. Además, $\det(ST) = (\det S)(\det T)$.

Demostración. La multiplicatividad y el teorema 13.7 dan

$$\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det A \det P = (\det P)^{-1}\det A \det P = \det A.$$

Dos bases producen matrices semejantes por C12, lo que prueba la independencia. Representar una composición en una misma base y aplicar el teorema 13.6 da la última afirmación. □

Si se cambian las bases de entrada y salida de manera independiente, aunque tengan la misma dimensión, la fórmula es distinta. Para $A' = Q^{-1}AP$,

$$\det A' = \frac{\det P}{\det Q}\det A.$$

Así, el valor escalar puede cambiar con una representación mixta. La propiedad de ser cero se conserva, pues $\det P$ y $\det Q$ son no nulos; esto concuerda con la invariancia del rango. La identidad de $\mathbb{R}$ tiene matriz (1) usando una misma base y matriz (2) usando el vector 2 como base de entrada y el vector 1 como base de salida. Su determinante como operador es uno.

La traza y el determinante son invariantes distintos. En orden dos, $\operatorname{diag}(1, 4)$ y $\operatorname{diag}(2, 3)$ tienen la misma traza cinco y determinantes cuatro y seis, por lo que no son semejantes. Aun la coincidencia de ambos invariantes puede ser insuficiente: I_2 y $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ tienen traza dos y determinante uno, pero todo conjugado de I_2 es él mismo.

13.7. Menores, cofactores y una inversa explícita

La eliminación permite calcular un determinante sin desplegar sus $n!$ términos. Otra organización útil reúne los términos según la entrada que utilizan de una fila o columna. Esto produce determinantes de menor tamaño y prepara una fórmula de inversa.

Definición 13.3. Para $A \in M_n(\mathbb{F})$, $A_{\widehat{ij}}$ es la matriz obtenida suprimiendo la fila i y la columna j, sin cambiar el orden de las restantes. El **cofactor** de a_{ij} es $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{\widehat{ij}}$. La **adjugata** es la transpuesta de la matriz de cofactores: $(\operatorname{adj} A)_{ij} = C_{ji}$.

Se llama menor asociado a esa supresión al determinante $\det A_{\widehat{ij}}$. También se habla de menores de otros tamaños, tomando submatrices cuadradas con las filas y columnas elegidas en su orden original. La adjugata no es la transpuesta de A y tampoco es el operador adjunto asociado a un producto interno.

Teorema 13.9 (expansión por cofactores). Fijando una columna j o una fila i se tiene, respectivamente,

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}, \qquad \det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}.$$

Demostración. Agrupemos los términos de Leibniz según $\sigma(j) = i$, es decir, según la fila escogida en la columna fija j. El factor a_{ij} se mantiene común. Al borrar esa fila y esa columna, las elecciones restantes recorren las permutaciones de la submatriz.

Hay que comparar sus signos. Si L valores menores que i aparecen antes de la posición j en la lista de σ, las inversiones que involucran esa posición son $(j-1-L)+(i-1-L) = i+j-2-2L$. Las otras inversiones son exactamente las de la permutación reducida, pues borrar y renumerar conservando el orden no cambia las comparaciones. El factor de signo perdido es, por tanto, $(-1)^{i+j}$. La suma del grupo vale $a_{ij}(-1)^{i+j} \det A_{\widehat{ij}}$. Sumar sobre i prueba la expansión por la columna j. La expansión por filas se obtiene aplicando la de columnas a A^{T} y usando la proposición 13.4 en los menores. $\square$

Por ejemplo, en $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ la segunda fila sólo tiene una entrada no nula. La expansión da $\det A = 3 \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 3(8-1) = 21$. La elección de fila evitó calcular dos menores que se multiplicarían por cero.

Teorema 13.10 (identidades de la adjugata). Para toda matriz A de orden $n \geq 1$,

$$A \operatorname{adj} A = \operatorname{adj} A \, A = (\det A) I_n.$$

Si $\det A \neq 0$, entonces $A^{-1} = (\det A)^{-1} \operatorname{adj} A$.

Demostración. La entrada (i,j) de $A \operatorname{adj} A$ es $\sum_k a_{ik} C_{jk}$. Si $i = j$, es la expansión por la fila j y vale $\det A$. Si $i \neq j$, reemplacemos la fila j de A por la fila i. Los cofactores de esa fila no cambian, porque al calcularlos la fila reemplazada se suprime. La suma anterior es el determinante de esa matriz con dos filas iguales y vale cero. Esto prueba $A \operatorname{adj} A = (\det A) I$.

La entrada (i,j) de $\operatorname{adj} A \, A$ es $\sum_k C_{ki} a_{kj}$. Para $i = j$ es la expansión por la columna i. Para $i \neq j$, es la expansión por esa misma columna después de reemplazarla por la columna j; los menores no cambian y las dos columnas iguales anulan el determinante. Resulta el segundo producto. Si $\det A \neq 0$, dividir ambas identidades por ese escalar produce una inversa por ambos lados. $\square$

En orden dos,

$$\operatorname{adj} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

La posición transpuesta de los cofactores es la que hace que el producto reconstruya las expansiones adecuadas. Sobre cuerpos de cualquier característica la identidad de productos sigue siendo válida, incluso cuando el determinante es cero; lo que queda prohibido en ese caso es dividir por él.

13.8. Sistemas y bloques: elegir cuánto calcular

La fórmula de la inversa proporciona una expresión para cada incógnita de un sistema cuadrado invertible. Podemos obtenerla de manera más directa usando las columnas y ver así qué problema resuelve.

Corolario 13.11 (regla de Cramer). Si A es invertible y $Ax = b$, sea $A_j(b)$ la matriz obtenida reemplazando la columna j por b. Entonces

$$x_j = \frac{\det A_j(b)}{\det A} \qquad (1 \le j \le n).$$

Demostración. Si las columnas de A son v_i, la ecuación es $b = \sum_i x_i v_i$. Expandir el determinante de $A_j(b)$ en la posición reemplazada produce términos con columnas repetidas para todo $i \neq j$. Sólo queda $x_j \det A$. Dividir por $\det A \neq 0$ da la fórmula. □

Para el sistema $2x + y = 5$, $x - y = 1$, el determinante de la matriz de coeficientes es -3. Reemplazar la primera columna da determinante -6, y reemplazar la segunda da -3. Por tanto $x = 2$, $y = 1$, lo que también se comprueba en las ecuaciones. La regla produce fórmulas útiles cuando interesan las dependencias algebraicas de las incógnitas; para calcular un sistema grande, reutilizar una eliminación suele ahorrar el trabajo de evaluar un determinante por incógnita.

Cuando $\det A = 0$, Cramer deja de ser una fórmula para la solución. Ni siquiera el hecho de que todos los determinantes reemplazados sean cero asegura compatibilidad: para $A = 0_2$ y $b = (1, 0)^{\mathsf{T}}$, todos ellos son cero y el sistema es imposible. Las herramientas de rango y eliminación de C01–C09 siguen decidiendo ese problema.

Proposición 13.12 (triangularidad por bloques). Si B y D son matrices cuadradas de órdenes r y s, respectivamente, entonces

$$\det \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} = (\det B)(\det D).$$

También vale la fórmula para la disposición triangular inferior. No se requiere que los bloques diagonales sean invertibles.

Demostración. En las primeras r columnas, las entradas situadas en las últimas s filas son cero. Por tanto, un término de Leibniz no nulo debe escoger para esas columnas r filas distintas entre las primeras r, es decir, todas ellas. Las últimas s columnas quedan obligadas a usar las últimas s filas. Las permutaciones que sobreviven se separan en una permutación de cada bloque diagonal, y no hay inversiones entre ambos grupos porque toda fila del primero precede a toda fila del segundo. Sus signos y productos se multiplican; la suma factoriza como $\det B \det D$. El caso inferior se obtiene trasponiendo. □

El bloque C no influye en esa fórmula, pero su posición sí. Para cuatro bloques cuadrados del mismo orden, la fórmula $\det \begin{pmatrix} B & C \\ E & D \end{pmatrix} = \det(BD - CE)$ puede fallar: los bloques son matrices y su producto no es conmutativo. La prueba anterior se apoyaba en ceros que restringían las permutaciones.

13.9. Área, orientación y pérdida de dimensión

La construcción algebraica permite justificar la interpretación que abrió el capítulo. Para $u = (a, b)$ y $v = (c, d)$ reales, el área del paralelogramo que determinan es $|ad - bc|$. Si $a \neq 0$, podemos reemplazar v por $w = v - (c/a)u = (0, d - bc/a)$. Este desplazamiento del segundo lado en la dirección del primero conserva base y altura respecto de la recta que contiene a u, por lo que conserva el área. El paralelogramo de lados u y w tiene un lado vertical de longitud $|d - bc/a|$ y distancia horizontal entre sus lados verticales igual a $|a|$. Su área es $|a|\,|d - bc/a| = |ad - bc|$. Si $a = 0$, el primer lado es vertical y la misma cuenta directa da $|b|\,|c| = |ad - bc|$. El caso $u = 0$ queda incluido y da área cero.

El signo de $ad - bc$ define la orientación del par independiente respecto del orden usual (e_1, e_2). Intercambiar los lados cambia ese signo y mantiene el área. Dos lados dependientes tienen determinante cero y no determinan orientación de una base. Para toda transformación real de matriz A,

$$\det(Au, Av) = (\det A)\det(u, v).$$

Es la multiplicatividad aplicada a la matriz con columnas u, v. Al tomar valores absolutos, cada paralelogramo ve multiplicada su área por $|\det A|$. Si el determinante es negativo se invierte además la orientación; si es cero, todas esas áreas pasan a cero.

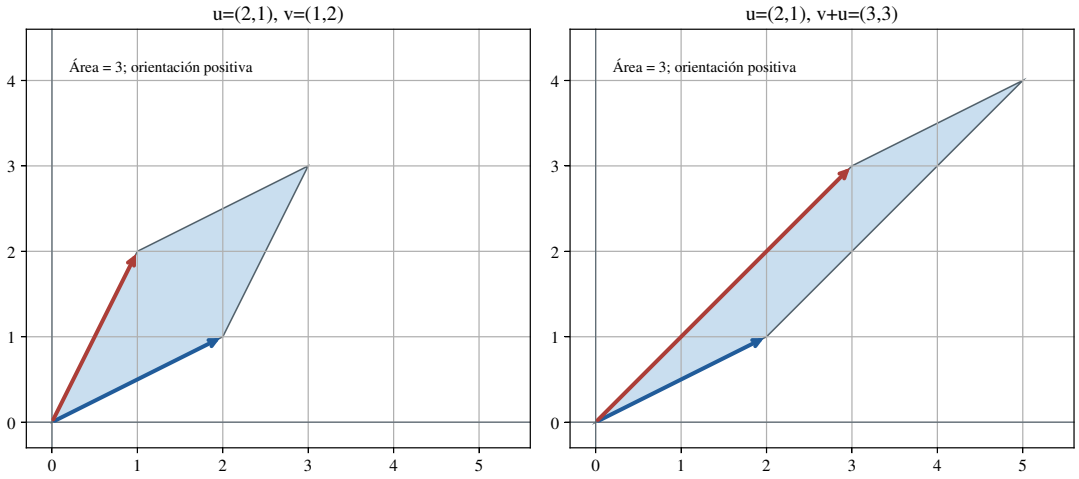


Figura 13.3. El segundo lado se desplaza a lo largo de una dirección paralela al primero. El área permanece en tres. La invariancia por adición de columnas tiene aquí una realización geométrica concreta.

En $\mathbb{R}^n$ se llama **volumen orientado algebraico** de una lista de n vectores al determinante de su matriz de columnas en la base usual. Esta denominación prolonga las propiedades que acabamos de verificar en el plano; no presupone una teoría de medida en dimensión arbitraria. Su valor cero equivale a dependencia y todo operador lo multiplica por un mismo factor. La distinción entre conservar dimensión y conservar volumen queda visible incluso sin figuras: $\operatorname{diag}(3, 2)$ tiene rango completo y multiplica las áreas por seis, mientras la cizalla tiene también rango completo y las conserva.

13.10. Ejercicios

Se trabaja sobre $\mathbb{R}$ en los ejercicios numéricos, salvo que se indique otro cuerpo. Los argumentos generales se refieren a un cuerpo conmutativo $\mathbb{F}$. Todas las matrices cuyos determinantes aparecen son cuadradas.

Ejercicio 1 — Un cálculo que se comprueba. Calcula el determinante de $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ y comprueba que sus columnas son independientes.

Ejercicio 2 — Triangularidad. Calcula $\det \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ y explica por qué las entradas fuera de la diagonal no intervienen.

Ejercicio 3 — Seguir operaciones. Una matriz real A de orden tres tiene determinante cinco. Se intercambian sus primeras dos filas, se multiplica después la tercera fila por -2 y se suma a la segunda tres veces la primera. ¿Cuál es el determinante final?

Ejercicio 4 — Eliminación suficiente. Calcula $\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ por eliminación, registrando el efecto de cada operación.

Ejercicio 5 — Escoger una expansión. Calcula el determinante de $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ y sus tres cofactores de la segunda fila.

Ejercicio 6 — Parámetros y rango. Para $A_t = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{pmatrix}$, determina los valores reales de t para los que es invertible y calcula el rango en los restantes.

Ejercicio 7 — Un error de linealidad. Refuta sobre $\mathbb{R}$ la afirmación $\det(A+B) = \det A + \det B$ en orden dos. Explica qué términos omitió ese razonamiento.

Ejercicio 8 — Una columna y todas las columnas. Si A es de orden cuatro y $\det A = 3$, compara el efecto de multiplicar sólo la segunda columna por dos con el de multiplicar toda la matriz por dos.

Ejercicio 9 — Inversiones. Determina los signos de las listas $(4,2,1,3)$ y $(3,1,4,2)$ y los determinantes de las matrices que tienen como columnas los vectores básicos en esos órdenes.

Ejercicio 10 — Orden invertido. La matriz J tiene columnas $e_n, e_{n-1}, \ldots, e_1$. Calcula $\det J$. Deduce el determinante de una matriz cuya única diagonal posiblemente no nula es la secundaria.

Ejercicio 11 — Un cálculo en característica dos. En $\mathbb{F}_2$, calcula el determinante y la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 12 — Antisimetría y alternancia. Construye sobre $\mathbb{F}_2^2$ una función bilineal b con $b(v,u) = -b(u,v)$ que no sea alternante. ¿Por qué no existe tal ejemplo cuando la característica es distinta de dos?

Ejercicio 13 — Una normalización diferente. Sea d una función multilineal alternante de las columnas de matrices de orden $n \geq 1$, con $d(e_1, \ldots, e_n) = c$. Demuestra que $d(A) = c \det A$, incluso si $c = 0$.

Ejercicio 14 — Transpuesta e inversa. Para $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcula $\det A$, A^{-1} y $\det(A^{\mathsf{T}}A)$.

Ejercicio 15 — Potencias. Demuestra que $\det(A^k) = (\det A)^k$ para todo entero $k \geq 0$. Extiende la fórmula a enteros negativos cuando A es invertible.

Ejercicio 16 — Dos invariantes insuficientes. Da dos matrices de orden dos con la misma traza y el mismo determinante que no sean semejantes. Demuestra que no lo son.

Ejercicio 17 — Dos bases independientes. Sean $A = \operatorname{diag}(2,3)$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $Q = \operatorname{diag}(3,1)$. Calcula el determinante de $A' = Q^{-1}AP$ por la fórmula de cambio de bases y comprueba el resultado directamente.

Ejercicio 18 — Magnitud del determinante. Para cada $n \geq 1$, muestra que hay matrices reales invertibles de orden n con determinante positivo tan pequeño como se quiera. ¿Puede deducirse el rango a partir de un umbral positivo fijo para ese determinante?

Ejercicio 19 — Una familia próxima a la dependencia. Estudia $A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+\varepsilon \end{pmatrix}$: determinante, inversa cuando existe y comportamiento de las columnas en $\varepsilon = 0$.

Ejercicio 20 — Cofactores colocados correctamente. Calcula la matriz de cofactores y la adjugata de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Comprueba ambos productos de la identidad de adjugata.

Ejercicio 21 — Adjugata de una matriz singular. Calcula la adjugata de $A = \operatorname{diag}(1,1,0)$ y explica por qué determinante cero no implica adjugata cero.

Ejercicio 22 — Dos direcciones perdidas. Si A es de orden $n \geq 2$ y $\operatorname{rg} A \leq n-2$, demuestra que $\operatorname{adj} A = 0$.

Ejercicio 23 — El rango mediante menores. Demuestra que el rango de una matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ es el mayor orden de un menor no nulo. Para rango cero adopta el menor vacío de orden cero y valor uno.

Ejercicio 24 — Una sola dirección perdida. Si A es de orden $n \geq 2$ y rango $n-1$, demuestra que su adjugata tiene rango uno y que su imagen es $\ker A$.

Ejercicio 25 — Trasponer la adjugata. Demuestra $\operatorname{adj}(A^{\mathsf{T}}) = (\operatorname{adj} A)^{\mathsf{T}}$, incluyendo matrices singulares.

Ejercicio 26 — Adjugata de un producto invertible. Si A, B son invertibles del mismo orden, prueba que $\operatorname{adj}(AB) = \operatorname{adj} B \operatorname{adj} A$.

Ejercicio 27 — Cramer y sustitución. Resuelve $3x + y = 7$, $2x - y = 3$ mediante Cramer y comprueba la solución en el sistema.

Ejercicio 28 — Cramer fuera de sus hipótesis. Construye un sistema cuadrado incompatible con $\det A = 0$ y $\det A_j(b) = 0$ para todas las columnas reemplazadas. Explica por qué no contradice Cramer.

Ejercicio 29 — Bloques singulares. Calcula $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ justificando por qué no necesitas invertir ningún bloque.

Ejercicio 30 — Eliminar un bloque. Para bloques de tamaños compatibles, con B cuadrado invertible y D cuadrado, demuestra $\det \begin{pmatrix} B & C \\ E & D \end{pmatrix} = \det B \det(D - EB^{-1}C)$.

Ejercicio 31 — Una fórmula escalar que falla para bloques. Sean $B = I_2$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $D = \operatorname{diag}(2, 3)$. Compara $\det \begin{pmatrix} B & C \\ E & D \end{pmatrix}$ con $\det(BD - CE)$.

Ejercicio 32 — Una perturbación de rango uno. Para columnas $u, v \in \mathbb{F}^n$, con $n \geq 1$, demuestra $\det(I_n + uv^{\mathsf{T}}) = 1 + v^{\mathsf{T}}u$.

Ejercicio 33 — Actualizar una matriz invertible. Si A es invertible y u, v son columnas, deduce una fórmula para $\det(A + uv^{\mathsf{T}})$ y decide exactamente cuándo es invertible la matriz actualizada.

Ejercicio 34 — Antisimetría de orden impar. Si $A^{\mathsf{T}} = -A$, el orden n es impar y $\operatorname{char} \mathbb{F} \neq 2$, demuestra que A es singular. Da un contraejemplo en característica dos si sólo se conserva la igualdad $A^{\mathsf{T}} = -A$.

Ejercicio 35 — Una condición de conservación. Sea A real y $A^{\mathsf{T}}A = I_n$. Demuestra que $\det A$ es uno o menos uno. Refuta la conversa en orden dos.

Ejercicio 36 — Área y orientación. Para $u = (2, 1)$ y $v = (1, 2)$ calcula el área y la orientación antes y después de aplicar $S(x, y) = (x + 2y, y)$ y después de aplicar $R(x, y) = (y, x)$. Trata ambas transformaciones por separado.

Ejercicio 37 — Inversas enteras. Sea A una matriz de entradas enteras. Demuestra que admite inversa con entradas enteras si y sólo si $\det A = 1$ o -1.

Ejercicio 38 — Bloques fuera de la diagonal. Para B, C cuadrados del mismo orden $r \geq 1$, demuestra $\det \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix} = (-1)^r \det B \det C$, sin exigir invertibilidad.

Ejercicio 39 — Traza dentro de un determinante polinómico. Para $A \in M_n(\mathbb{F})$, $n \geq 1$, estudia el polinomio $f(t) = \det(I_n + tA)$. Demuestra que su término constante es uno, su coeficiente de t es $\operatorname{tr} A$ y su coeficiente de t^n es $\det A$. No supongas que su grado sea siempre n.

Ejercicio 40 — Vandermonde e interpolación. Para $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$, con $n \geq 1$, demuestra $\det V = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$, donde $V_{ij} = a_j^{i-1}$. Deduce cuándo los valores de un polinomio de grado menor que n en esos puntos determinan sus coeficientes de manera única.

13.11. Soluciones

Solución 1. La fórmula de orden dos da $\det A = 3 \cdot 1 - (-2) \cdot 4 = 11$. También se puede comprobar la independencia sin usar ese criterio: si $3x - 2y = 0$ y $4x + y = 0$, la segunda ecuación da $y = -4x$, y la primera da $11x = 0$. Sobre $\mathbb{R}$, esto obliga a $x = y = 0$. Las dos vías concuerdan.

Solución 2. La matriz es triangular superior, de modo que su determinante es $2(-3)5 = -30$. La proposición 13.5 demuestra que toda permutación distinta de la identidad debe escoger alguna entrada situada debajo de la diagonal, que es cero. La independencia del resultado respecto de $7, -1, 4$ procede de esos ceros, no de una regla para matrices arbitrarias.

Solución 3. El intercambio lleva el determinante a -5. Escalar la tercera fila por -2 lo lleva a 10, y la adición final lo conserva. El resultado es diez. Es necesario aplicar las reglas a las matrices que se van obteniendo: el factor de la adición no multiplica el determinante, porque la fila de origen permanece también en otra posición y el término adicional tiene dos filas iguales.

Solución 4. Intercambiamos las dos primeras filas y obtenemos $\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&2\\4&3&1\end{pmatrix}$; su determinante es el opuesto del buscado. Las operaciones $R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1$ y después $R_3 \leftarrow R_3 - R_2$ dan $\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&2\\0&0&-1\end{pmatrix}$. Ambas conservan el determinante, cuyo valor final es -2. Deshacer el único cambio de signo da determinante inicial dos. No hubo que normalizar los pivotes.

Solución 5. El menor de la entrada central es $\begin{pmatrix}2&1\\1&4\end{pmatrix}$, de determinante siete, y su signo es positivo. Los otros menores de esa fila son $\begin{pmatrix}0&1\\0&4\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}2&0\\1&0\end{pmatrix}$, ambos de determinante cero. Por tanto $(C_{21}, C_{22}, C_{23}) = (0, 7, 0)$ y la expansión da $3 \cdot 7 = 21$. La segunda fila evita términos no nulos adicionales.

Solución 6. El determinante es $t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$. Por el teorema 13.7, es invertible exactamente cuando $t \neq 1, -1$. Para $t = 1$, las dos columnas coinciden y son no nulas, de modo que el rango es uno. Para $t = -1$, una columna es la opuesta de la otra y ninguna es cero, por lo que el rango también es uno. El determinante cero por sí solo sólo daba rango menor que dos; el examen de las columnas decide cuánto disminuye.

Solución 7. Con $A = B = I_2$, el determinante de la suma es cuatro, mientras la suma de determinantes es dos. Si las columnas son a_1, a_2 y b_1, b_2, la expansión correcta es $\det(a_1{+}b_1, a_2{+}b_2) = \det(a_1, a_2) + \det(a_1, b_2) + \det(b_1, a_2) + \det(b_1, b_2)$. Se habían omitido los dos términos mezclados. En el ejemplo ambos valen uno.

Solución 8. Escalar una sola columna multiplica el determinante por dos y produce seis. Escalar toda la matriz escala sus cuatro columnas, por lo que produce $2^4 \cdot 3 = 48$. La multilinealidad se aplica una vez en el primer caso y cuatro veces en el segundo.

Solución 9. En $(4, 2, 1, 3)$, el cuatro contribuye tres inversiones y el dos contribuye una: hay cuatro en total y el signo es positivo. En $(3, 1, 4, 2)$, el tres contribuye dos y el cuatro una: hay tres y el signo es negativo. Por el lema 13.2 y la normalización, los determinantes de las respectivas matrices de columnas son uno y menos uno.

Solución 10. Cada par de posiciones es una inversión, así que hay $n(n-1)/2$ y $\det J = (-1)^{n(n-1)/2}$. Si las entradas de la diagonal secundaria, leídas de arriba abajo, son $c_1, \ldots, c_n$, la matriz es $\operatorname{diag}(c_1, \ldots, c_n)J$. La multiplicatividad da determinante $(-1)^{n(n-1)/2} \prod_i c_i$, aun cuando alguno de los factores sea cero.

Solución 11. El determinante es $1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1 = 1$ en este cuerpo. La adjugata es $\begin{pmatrix}0&-1\\-1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$; como el determinante es uno, ésta es la inversa. Los dos productos con A son identidad usando $1 + 1 = 0$. El cambio de signo se vuelve invisible, pero la no nulidad sigue detectando invertibilidad.

Solución 12. Sirve $b(u, v) = u_1 v_1$: es lineal en cada variable, es simétrica y el opuesto coincide con el original en característica dos, pero $b(e_1, e_1) = 1$. Si la característica es distinta de dos y se cumple el cambio de signo, tomar $u = v$ da $2b(u, u) = 0$. El escalar dos es entonces invertible y fuerza $b(u, u) = 0$ para todo u. Esa última división es la que falla en el ejemplo.

Solución 13. Expandimos cada columna en la base usual. Las listas de índices repetidos se anulan y una lista de índices distintos aporta el signo de su permutación por el valor c. La suma completa es $c \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn}\sigma) \prod_j a_{\sigma(j),j} = c \det A$. No se divide por c; en particular, si $c = 0$, la función entera es cero. Esto también muestra por qué normalizar distingue un elemento entre todos sus múltiplos.

Solución 14. El determinante es $2 - 1 = 1$ y la adjugata da $A^{-1} = \begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$. La transposición conserva el determinante y la multiplicatividad da $\det(A^{\mathsf{T}}A) = (\det A)^2 = 1$. Directamente $A^{\mathsf{T}}A = \begin{pmatrix}5&3\\3&2\end{pmatrix}$ tiene determinante $10 - 9 = 1$.

Solución 15. En $k = 0$, ambos lados valen uno, interpretando la potencia cero del escalar como el producto vacío, incluso si $\det A = 0$. La multiplicatividad y una inducción dan $\det(A^{k+1}) = \det(A^k)\det A = (\det A)^{k+1}$. Si A es invertible y $k = -m$ con $m > 0$, aplicamos el caso positivo a A^{-1} y usamos $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$. Sin invertibilidad las potencias negativas de la matriz no están definidas.

Solución 16. Tomamos I_2 y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ambas tienen traza dos y determinante uno. Para cualquier P invertible, $P^{-1}I_2P = I_2$, mientras $B \neq I_2$. Por tanto no son semejantes. La prueba sirve sobre cualquier cuerpo, incluida característica dos, donde ambas trazas son cero.

Solución 17. Los determinantes de A, P, Q son seis, dos y tres. Por tanto $\det A' = (2/3)6 = 4$. El producto directo da $A' = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, cuyo producto diagonal es cuatro. No hay semejanza: las transiciones de entrada y salida son diferentes, y el determinante ha cambiado.

Solución 18. Para $\varepsilon > 0$, $A_\varepsilon = \operatorname{diag}(\varepsilon, 1, \ldots, 1)$ tiene inversa $\operatorname{diag}(\varepsilon^{-1}, 1, \ldots, 1)$ y determinante ε. Dado cualquier umbral positivo, podemos escoger un determinante menor sin perder rango. Por tanto ningún umbral positivo fijo reemplaza al criterio exacto $\det A = 0$. La afirmación es algebraica; no propone un procedimiento para decidir rango con datos aproximados.

Solución 19. El determinante es ε. Para $\varepsilon \neq 0$, la fórmula de adjugata da $A_\varepsilon^{-1} = \varepsilon^{-1}\begin{pmatrix} 1+\varepsilon & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. El producto devuelve identidad porque las entradas diagonales del producto antes de dividir son ε y las cruzadas cero. En $\varepsilon = 0$ las dos columnas coinciden y son no nulas: el rango baja de dos a uno. La diferencia de columnas es $(0, \varepsilon)^{\mathsf{T}}$ y exhibe cómo se pierde la segunda dirección.

Solución 20. La matriz de cofactores es $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, y su transpuesta es $\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. Como $\det A = 4 - 3 = 1$, la adjugata es la inversa. Multiplicar en ambos órdenes da I_2. Sin trasponer C, las sumas del producto no coincidirían con las expansiones por la fila o columna apropiada.

Solución 21. Todos los cofactores son cero salvo $C_{33} = \det I_2 = 1$. Por tanto $\operatorname{adj} A = \operatorname{diag}(0, 0, 1)$ y es no nula, aunque $\det A = 0$. Cada columna de la adjugata está en el núcleo de A, como obliga $A \operatorname{adj} A = 0$. La anulación de un producto no exige que uno de los factores sea la matriz cero.

Solución 22. Cualquier submatriz obtenida suprimiendo una fila y una columna tiene rango a lo sumo $\operatorname{rg} A$: escoger columnas restringe el dominio y escoger coordenadas de salida aplica una proyección, y ninguna operación aumenta el rango. Su tamaño es $n - 1$ y su rango es menor que $n - 1$, de modo que su determinante es cero. Todos los cofactores se anulan y por tanto también su transpuesta, la adjugata. Para $n = 2$ la hipótesis fuerza $A = 0_2$, coherentemente.

Solución 23. Un menor no nulo de orden k da una submatriz invertible. Sus k columnas son independientes después de restringir a las filas escogidas; por ello las columnas completas correspondientes también son independientes y $\operatorname{rg} A \geq k$. Para la otra dirección, sea $r = \operatorname{rg} A > 0$ y escojamos r columnas independientes. La matriz rectangular B que forman tiene rango de columnas r y, por la igualdad de rangos de filas y columnas de C09, posee r filas independientes. Esas filas, cada una de longitud r, forman una matriz cuadrada invertible: el menor correspondiente es no nulo. Cuando $r = 0$, todas las entradas son cero, y ningún menor de orden positivo puede ser no nulo. La convención vacía cubre ese caso.

Solución 24. Por el ejercicio 23 existe un menor no nulo de orden $n - 1$, que es, salvo signo, un cofactor. Por tanto la adjugata no es cero. Como $\det A = 0$, la identidad de adjugata da $A \operatorname{adj} A = 0$, de donde $\operatorname{im}(\operatorname{adj} A) \subseteq \ker A$. Rango-nulidad da $\dim \ker A = 1$. Una imagen no nula contenida en esa recta es la recta entera, y el rango de la adjugata es uno.

Solución 25. Suprimir la fila i y columna j de A^{T} produce la transpuesta de la matriz obtenida suprimiendo la fila j y columna i de A. Los dos determinantes son iguales. Por ello $C_{ij}(A^{\mathsf{T}}) = C_{ji}(A)$, pues $(-1)^{i+j} = (-1)^{j+i}$. Al trasponer las matrices de cofactores obtenemos la identidad pedida. No usamos inversas, así que el argumento incluye el caso singular y también orden uno.

Solución 26. La fórmula de inversa equivale a $\operatorname{adj} A = (\det A)A^{-1}$ para A invertible. Entonces $\operatorname{adj}(AB) = \det(AB)(AB)^{-1} = (\det A)(\det B)B^{-1}A^{-1} = \operatorname{adj} B \operatorname{adj} A$. Los determinantes son escalares y pueden moverse entre los factores. La identidad también tiene versiones más generales, pero esta prueba sólo acredita el caso invertible solicitado.

Solución 27. La matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ tiene determinante $-3 - 2 = -5$. Reemplazar la primera columna por $(7, 3)^{\mathsf{T}}$ da determinante $-7 - 3 = -10$; reemplazar la segunda da $3 \cdot 3 - 2 \cdot 7 = -5$. Así $x = 2$, $y = 1$. Las sustituciones dan $3(2) + 1 = 7$ y $2(2) - 1 = 3$. El denominador no nulo justifica la unicidad.

Solución 28. Tomamos $A = 0_2$ y $b = (1, 1)^{\mathsf{T}}$. El sistema exigiría $0 = 1$ en ambas filas y es incompatible. Reemplazar una columna deja la otra cero, por lo que ambos determinantes reemplazados son cero; también $\det A = 0$. El corolario 13.11 exige invertibilidad y por tanto no se aplica. La expresión $0/0$ no da una incógnita ni un criterio de compatibilidad.

Solución 29. La matriz es triangular superior por bloques. El bloque superior izquierdo $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ tiene determinante cero y el inferior derecho $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ tiene determinante seis. La proposición 13.12 da determinante cero. Su prueba sólo utiliza la posición de los ceros y la suma de Leibniz; no exige que B o D tengan inversa.

Solución 30. Multiplicamos a la izquierda por $L = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -EB^{-1} & I \end{pmatrix}$. Es triangular inferior por bloques y su determinante es uno. El producto es $LM = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D - EB^{-1}C \end{pmatrix}$, porque el bloque inferior izquierdo es $-EB^{-1}B + E = 0$. La multiplicatividad da $\det(LM) = \det M$ y la fórmula triangular por bloques da el resultado. El orden $EB^{-1}C$ queda fijado por el producto; permutarlo sin una hipótesis adicional no está permitido.

Solución 31. El ejercicio 30 da para la matriz de cuatro bloques el valor $\det(D - EC)$. Como $EC = \operatorname{diag}(0, 1)$, ese determinante es $2(3 - 1) = 4$. En cambio, $CE = \operatorname{diag}(1, 0)$ y $\det(BD - CE) = (2 - 1)3 = 3$. Los dos valores difieren. Se ha reemplazado indebidamente el orden de dos factores que no conmutan; la fórmula de orden dos para entradas escalares no se traslada así a bloques.

Solución 32. La columna j es $e_j + v_j u$. Expandimos por multilinealidad. El término que escoge todos los e_j es uno. Todo término que escoja u en dos o más posiciones se anula por alternancia. Si sólo se escoge en la posición j, el término es $v_j \det(e_1, \dots, u, \dots, e_n) = v_j u_j$: al expandir $u = \sum_i u_i e_i$, sólo sobrevive $i = j$. Sumar esos n términos da $1 + \sum_j v_j u_j$. La prueba no supone que u o v sean no nulos.

Solución 33. Se factoriza $A + uv^{\mathsf{T}} = A(I + A^{-1}uv^{\mathsf{T}})$. Por multiplicatividad y el ejercicio 32, $\det(A + uv^{\mathsf{T}}) = (\det A)(1 + v^{\mathsf{T}}A^{-1}u)$. El primer factor es no nulo, así que la actualización es invertible si y sólo si $1 + v^{\mathsf{T}}A^{-1}u \neq 0$. El escalar puede anularse incluso cuando los datos de la perturbación son no nulos; la fórmula decide ese caso sin exigir una nueva eliminación completa.

Solución 34. La transposición y la homogeneidad dan $\det A = \det A^{\mathsf{T}} = \det(-A) = (-1)^n \det A = -\det A$. Así $2 \det A = 0$, y la característica permite dividir por dos: $\det A = 0$. En característica dos, la matriz de orden uno (1) cumple $A^{\mathsf{T}} = A = -A$ y tiene determinante uno. La condición de diagonal cero no está incluida en la igualdad propuesta y no puede añadirse implícitamente.

Solución 35. Tomando determinantes, $1 = \det(A^{\mathsf{T}}A) = (\det A)^2$, de donde $\det A \in \{1, -1\}$ en $\mathbb{R}$. La conversa falla para $A = \operatorname{diag}(2, 1/2)$: su determinante es uno, pero $A^{\mathsf{T}}A = \operatorname{diag}(4, 1/4) \neq I_2$. Conservar área no exige conservar todas las direcciones con sus longitudes; una se alarga mientras otra se acorta.

Solución 36. El determinante inicial es $4 - 1 = 3$: área tres y orientación positiva. La cizalla tiene determinante uno, por lo que conserva ambos datos. Directamente $Su = (4, 1)$ y $Sv = (5, 2)$ dan $8 - 5 = 3$. El intercambio tiene determinante menos uno: $Ru = (1, 2)$ y $Rv = (2, 1)$ dan $1 - 4 = -3$. El área sigue siendo tres y la orientación pasa a negativa. Son dos imágenes separadas del par original, como pide el enunciado.

Solución 37. Si la inversa tiene entradas enteras, sus determinantes y el de A son enteros, pues Leibniz sólo usa sumas y productos de enteros. Su producto es uno, así que ambos son uno o menos uno. Recíprocamente, cada cofactor de A es entero. Si $\det A = \pm 1$, la fórmula $A^{-1} = (\det A)^{-1} \operatorname{adj} A$ produce entradas enteras. Podemos razonar dentro de $\mathbb{Q}$ y verificar después esa integridad; no se ha supuesto que los enteros formen un cuerpo.

Solución 38. Intercambiamos el grupo de las primeras r filas con el grupo de las últimas r, conservando el orden dentro de cada grupo. Cada fila del primer grupo cruza a cada fila del segundo, lo que requiere r^2 intercambios adyacentes. Se obtiene $\operatorname{diag}(C, B)$, cuyo determinante es $\det C \det B$. Por tanto el determinante original es $(-1)^{r^2} \det C \det B = (-1)^r \det B \det C$, pues $r^2 - r$ es par. La prueba funciona aunque uno de los bloques sea singular.

Solución 39. La columna j es $e_j + t a_j$, donde a_j es la columna j de A. La multilinealidad produce un polinomio de grado a lo sumo n. El término constante escoge todos los e_j y vale uno. Para un término de grado uno se escoge una sola columna $t a_j$; expandirla en la base usual deja sólo su componente a_{jj}, pues las demás repiten una columna básica. Sumando sobre j, el coeficiente es $\sum_j a_{jj} = \operatorname{tr} A$. Escoger $t a_j$ en todas las posiciones produce $t^n \det A$. Si ese coeficiente es cero, el grado baja: con $A = 0$ resulta el polinomio constante uno. Sobre cuerpos finitos se habla de coeficientes formales, no de recuperar un polinomio a partir de sus valores como función.

Solución 40. Si se repiten dos a_j, se repiten dos columnas y el determinante es cero; el producto también es cero. Supongamos distintos los puntos y usemos inducción en n. Para $n = 1$ el determinante y el producto vacío son uno. Fijemos $a_1, \dots, a_{n-1}$ distintos y reemplacemos la última columna por $(1, z, \dots, z^{n-1})^{\mathsf{T}}$. El determinante resultante es un polinomio $g(z)$ de grado a lo sumo $n - 1$. Se anula en cada a_i porque allí repite una columna. La división de un polinomio por $z - a_i$ deja como resto su valor en a_i, de modo que cada raíz permite extraer ese factor. Al extraerlo, las otras raíces se conservan: para $a_j \neq a_i$, la igualdad $0 = (a_j - a_i) q(a_j)$ fuerza $q(a_j) = 0$. Así pueden extraerse sucesivamente todos los factores y $g(z)$ es múltiplo de $\prod_{i<n} (z - a_i)$. Su coeficiente de z^{n-1} es el cofactor de la entrada final: signo $(-1)^{2n} = 1$ y menor V_{n-1}. Como ambos polinomios tienen grado a lo sumo $n - 1$, queda $g(z) = \det V_{n-1} \prod_{i<n} (z - a_i)$. Evaluar en $z = a_n$ y aplicar la inducción prueba la fórmula. La matriz que lleva los coeficientes de p a $(p(a_1), \dots, p(a_n))$ es V^{T}. Es invertible exactamente cuando los puntos son distintos, y en ese caso cualquier lista de valores determina un único polinomio de grado menor que n. Si hay repetición, la matriz singular impide esa unicidad global y hay listas de valores incompatibles.

Lecturas y referencias

Hoffman–Kunze, *Linear Algebra*, §§5.2–5.4, desarrolla el determinante mediante funciones alternantes; Friedberg, Insel y Spence, *Linear Algebra*, capítulo 4, permite contrastar ese enfoque con la construcción recursiva por cofactores y las operaciones elementales. Johnston, *Advanced Linear and Matrix Algebra*, apéndice A.1.5, reúne la lectura geométrica, las permutaciones y las propiedades matriciales. En este capítulo la justificación algebraica de multiplicatividad es independiente de la interpretación geométrica.

Capítulo 14

Valores propios y vectores propios

La transformación $T(x, y) = (3x + y, x + 3y)$ mezcla las dos coordenadas de una entrada. Sin embargo, hay vectores para los que su acción se vuelve particularmente sencilla: $T(1, 1) = (4, 4) = 4(1, 1)$ y $T(1, -1) = (2, -2) = 2(1, -1)$. En cada una de esas direcciones basta multiplicar por un número. Como los dos vectores forman una base de $\mathbb{R}^2$, cualquier entrada puede descomponerse en esas componentes y transformarse escalándolas por separado.

C12 mostró cómo cambia una matriz al escoger otra base. El ejemplo sugiere un criterio para escogerla: buscar vectores cuya imagen sea un múltiplo de ellos mismos. Antes de confiar en ese procedimiento necesitamos saber si existen, cómo encontrarlos y cuántas direcciones independientes pueden proporcionar. Una rotación de un cuarto de vuelta ya presenta una dificultad: ningún vector real no nulo queda sobre la recta que generaba. La respuesta dependerá tanto de la transformación como del cuerpo en que trabajemos.

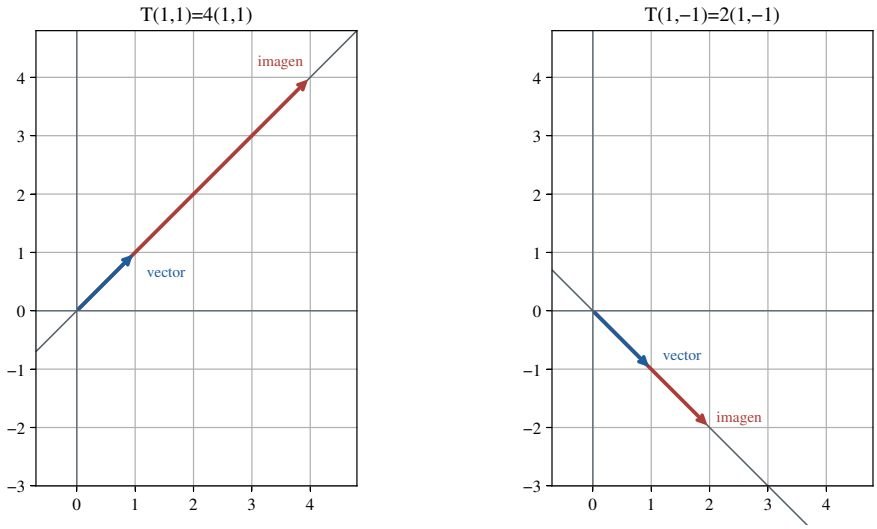


Figura 14.1. Las flechas de cada panel comienzan en el origen y representan un vector y su imagen. Las dos direcciones señaladas se conservan como rectas. Para un vector fuera de ellas, la imagen puede cambiar de dirección.

Trabajaremos con operadores $T : V \to V$ sobre un cuerpo conmutativo $\mathbb{F}$. Indicaremos cuándo se necesita que la dimensión sea finita; las matrices serán cuadradas y las coordenadas, columnas. Usaremos núcleos y rango de C09, bases de C07, representación y semejanza de C12, y determinantes de C13. Las raíces y sus multiplicidades se recuperan del tomo I, C24–C26. Cuando invoquemos el teorema fundamental del álgebra conservará el estatuto que tiene en §26.15: resultado externo admitido, cuya demostración no se ha dado en estos tomos.

14.1. Una recta en la que el operador sólo escala

Definición 14.1. Un escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ es un **valor propio** de T si existe $v \in V$, $v \neq 0$, tal que $T(v) = \lambda v$. Ese vector es un **vector propio** asociado a λ. Se llama **espacio propio** asociado al escalar λ al conjunto

$$E_\lambda(T) = \{v \in V : T(v) = \lambda v\}.$$

También se usan los nombres *autovalor*, *autovector* y *autoespacio*. El conjunto de valores propios en $\mathbb{F}$ se denotará $\operatorname{spec}_{\mathbb{F}}(T)$, o simplemente $\operatorname{spec}(T)$ cuando el cuerpo esté fijado. En este capítulo,

espectro se refiere a ese conjunto algebraico en dimensión finita; no presupone las nociones de análisis funcional.

La restricción $v \neq 0$ distingue información del operador: la igualdad $T(0) = \lambda 0$ vale para todo escalar y no permite seleccionar ninguno. En cambio, el valor propio cero está permitido. Se presenta exactamente cuando un vector no nulo se anula al aplicar T.

Proposición 14.1. Para todo escalar λ, $E_\lambda(T) = \ker(T - \lambda I)$ y es un subespacio. El escalar es un valor propio si y sólo si ese subespacio es distinto de $\{0\}$. Cada vector propio determina un único valor propio. Una recta $L \subseteq V$ satisface $T(L) \subseteq L$ si y sólo si está generada por un vector propio.

Demostración. Reescribir $T(v) = \lambda v$ como $(T - \lambda I)v = 0$ da la identidad con el núcleo; el resultado de subespacio procede de C09. La condición de ser valor propio exige que ese núcleo contenga un vector no nulo. Si $T(v) = \lambda v = \mu v$ con $v \neq 0$, entonces $(\lambda - \mu)v = 0$; si los escalares fueran distintos, dividir por su diferencia obligaría a $v = 0$. Así, $\lambda = \mu$.

Si $L = \operatorname{span} v$ con $v \neq 0$ y $T(L) \subseteq L$, existe λ con $T(v) = \lambda v$. Recíprocamente, esa igualdad da $T(cv) = c\lambda v \in L$ para todo $c \in \mathbb{F}$, de modo que la recta se preserva. □

El espacio propio contiene al cero, aunque éste no sea vector propio. Para λ fijo, toda combinación lineal de vectores de E_λ permanece allí. Si tomamos vectores correspondientes a valores diferentes, esa conclusión deja de estar disponible: para el operador inicial, $(1,1)+(1,-1) = (2,0)$ tiene imagen $(6,2)$, que no es un múltiplo de $(2,0)$.

Sobre los reales, $\lambda > 1$ alarga los vectores de esa recta; $0 < \lambda < 1$ los acorta; $\lambda = 1$ los fija; $\lambda = 0$ los anula; y $\lambda < 0$ invierte su sentido además de cambiar su longitud por el factor $|\lambda|$. Este lenguaje de orden y longitud corresponde a $\mathbb{R}$. La ecuación de la definición sigue teniendo sentido sobre cuerpos que no poseen ese orden.

14.2. Encontrar primero el escalar y después el espacio

Para una matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$, buscar $Av = \lambda v$ parece un sistema en el que tanto el vector como el escalar son desconocidos. Fijar provisionalmente λ lo convierte en el sistema homogéneo $(A - \lambda I)v = 0$. Los capítulos anteriores permiten decidir cuándo tiene soluciones no triviales: exactamente cuando la matriz es singular, o equivalentemente cuando su determinante se anula.

Podemos organizar todos esos determinantes en un polinomio. La letra t será una indeterminada: en la matriz $tI - A$ aparecen polinomios, y la fórmula de Leibniz de C13 produce un polinomio en t. Esta escritura no requiere construir un nuevo espacio de vectores propios con coordenadas polinomiales. Al evaluar en $t = \lambda$ volvemos a una matriz sobre $\mathbb{F}$.

Definición 14.2. El **polinomio característico** de A es

$$\chi_A(t) = \det(tI_n - A).$$

Para un operador en un espacio de dimensión finita, definiremos χ_T mediante una matriz en una misma base de entrada y salida, una vez comprobada su independencia de esa elección. En orden cero se adopta $\chi(t) = 1$.

Las identidades de determinantes que utilizaremos con entradas polinomiales se justifican por los mismos argumentos de expansión de C13: multilinealidad, alternancia, multiplicatividad y fórmula de bloques emplean sumas, productos y signos, sin dividir por entradas. Esos argumentos siguen siendo válidos para los polinomios con coeficientes en $\mathbb{F}$. Así podemos probar identidades de polinomios directamente, sin inferirlas sólo de sus valores; esta precaución importa sobre cuerpos finitos, donde dos polinomios distintos pueden definir la misma función.

Teorema 14.2 (criterio característico). Para $n \geq 1$, χ_A es mónico de grado n. Un escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ es valor propio de A si y sólo si $\chi_A(\lambda) = 0$. Para tal escalar, sus vectores propios son exactamente los elementos no nulos de $\ker(A - \lambda I)$. El coeficiente de t^{n-1} es $-\operatorname{tr} A$ y el término constante es $(-1)^n \det A$.

Demostración. Cada entrada de $tI - A$ es un polinomio de grado a lo sumo uno. En Leibniz, el término de la permutación identidad es $\prod_i (t - a_{ii})$, cuyo término de grado n es t^n. Una permutación distinta de la identidad mueve al menos dos posiciones: si moviera sólo una, dejaría sin imagen o con imagen repetida uno de los índices y no sería biyectiva. En esas posiciones se escogen entradas fuera de la diagonal, que son constantes. Cada término restante tiene grado a lo sumo $n - 2$. Por

tanto, el coeficiente principal es uno y el coeficiente de t^{n-1} procede sólo del producto diagonal: es $-\sum_i a_{ii} = -\operatorname{tr} A$. Para $n = 1$ la única permutación es la identidad y el cálculo sigue siendo válido.

Evaluar la fórmula de Leibniz en $t = \lambda$ da $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$. Este escalar es cero exactamente cuando $\lambda I - A$ tiene un núcleo no trivial, por C13 y C09. Ese núcleo coincide con $\ker(A - \lambda I)$, y sus elementos no nulos son los vectores propios por definición. Finalmente, $\chi_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \det A$. □

En orden dos se obtiene $\chi_A(t) = t^2 - (\operatorname{tr} A)t + \det A$. La convención $\det(tI - A)$ fija el coeficiente principal en uno. Algunas fuentes usan $\det(A - tI) = (-1)^n \chi_A(t)$; tienen las mismas raíces y multiplicidades, pero no siempre los mismos signos de los coeficientes.

Una vez encontradas las raíces que pertenecen al cuerpo de trabajo, todavía falta resolver un sistema para cada una. El determinante identifica los escalares; no entrega por sí solo una base de los núcleos. Tampoco indica que todos esos espacios sean rectas.

14.3. La matriz cambia, las direcciones del espacio permanecen

Proposición 14.3. Si $B = P^{-1}AP$ con P invertible, entonces $\chi_B = \chi_A$ y, para cada $\lambda \in \mathbb{F}$,

$$E_\lambda(B) = P^{-1} E_\lambda(A).$$

Por consiguiente, el polinomio característico, el conjunto de valores propios y las dimensiones de sus espacios propios no dependen de la base usada para representar un operador.

Demostración. La identidad $tI - B = P^{-1}(tI - A)P$ y la multiplicatividad del determinante dan

$$\chi_B(t) = \det(P^{-1}) \det(tI - A) \det P = \chi_A(t),$$

porque $\det(P^{-1}) \det P = 1$. Es una igualdad de polinomios por los argumentos de expansión ya precisados.

Para los espacios, $Bx = \lambda x$ equivale, al multiplicar por P, a $A(Px) = \lambda(Px)$. Así, $x \in E_\lambda(B)$ si y sólo si $Px \in E_\lambda(A)$. La transformación P es un isomorfismo entre ambos subespacios, por lo que sus dimensiones coinciden. C12 identifica dos matrices de un mismo operador precisamente mediante esa semejanza. □

Esta proposición permite escribir χ_T sin ambigüedad. Los vectores de V que son propios no cambian por elegir otra base; cambian sus columnas de coordenadas. La afirmación de que matrices semejantes tienen «los mismos vectores propios» como columnas sería, en general, falsa: la correspondencia es P^{-1}.

Para el operador de la apertura,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \chi_A(t) = (t-3)^2 - 1 = (t-4)(t-2).$$

Para $\lambda = 4$, el sistema $(A - 4I)v = 0$ se reduce a $-x + y = 0$, por lo que $E_4 = \operatorname{span}(1, 1)$. Para $\lambda = 2$, se reduce a $x + y = 0$, y $E_2 = \operatorname{span}(1, -1)$. Los vectores usados al comienzo han aparecido como bases de núcleos, y sus múltiplos no nulos son todos los vectores propios. En la base formada por ellos, la matriz es $\operatorname{diag}(4, 2)$. La sencillez de esa representación se explica por la acción sobre los vectores básicos.

14.4. Los valores distintos separan componentes

Dos rectas propias asociadas a valores distintos sólo se cortan en cero, pues un vector no nulo no puede tener dos valores propios. Para tres o más subespacios, C11 advirtió que las intersecciones por parejas no bastan para probar que su suma sea directa. Necesitamos controlar una relación conjunta.

Teorema 14.4 (independencia de espacios propios). Si $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ son valores propios distintos de T, la suma $E_{\lambda_1}(T) + \cdots + E_{\lambda_k}(T)$ es directa. En particular, al escoger en cada espacio propio una familia finita independiente, concatenar esas familias produce una familia independiente.

Demostración. Probaremos por inducción en k que una igualdad $w_1 + \cdots + w_k = 0$, con $w_i \in E_{\lambda_i}$, obliga a que todos los w_i sean cero. Para $k = 1$ la afirmación es inmediata. Supongamos probado el resultado para $k - 1$. Aplicar T a la igualdad multiplica la componente w_i por λ_i.

Queremos eliminar una componente para obtener una relación a la que se aplique la inducción; restamos λ_k veces la igualdad original y obtenemos

$$\sum_{i=1}^{k-1} (\lambda_i - \lambda_k) w_i = 0.$$

Cada sumando sigue perteneciendo al espacio propio correspondiente. La hipótesis inductiva obliga a $(\lambda_i - \lambda_k)w_i = 0$ para $i < k$. Las diferencias son no nulas, por lo que $w_i = 0$ para esos índices, y la relación original da también $w_k = 0$.

Para la segunda afirmación, agrupamos una relación entre los vectores concatenados según su espacio propio. La directitud obliga a que cada grupo sea cero; la independencia dentro del grupo anula todos sus coeficientes. □

La prueba no requiere dimensión finita y admite que alguno de los w_i sea cero. Lo que exige es que los valores propios sean distintos. Dos vectores del mismo espacio propio pueden ser dependientes; escogerlos arbitrariamente no garantiza una familia independiente.

Corolario 14.5. En un espacio de dimensión n, un operador tiene a lo sumo n valores propios distintos. Si tiene exactamente n, escoger un vector propio por cada valor produce una base. Más generalmente, para sus valores propios distintos λ_i,

$$\sum_i \dim E_{\lambda_i}(T) \le n.$$

Demostración. Una elección de un vector propio no nulo por cada valor distinto es independiente por el teorema 14.4, de modo que su longitud es a lo sumo n. Si alcanza n, es una base por C07. Para la última desigualdad, elegimos una base en cada espacio propio: su concatenación es independiente y su longitud es la suma indicada. □

La cota también procede del grado del polinomio característico, pero el argumento de independencia informa sobre los vectores. Tener pocos valores propios no significa tener pocos vectores propios: para $T = 3I$ en $\mathbb{R}^2$, sólo aparece el valor tres y todo vector no nulo es propio. Sobre un cuerpo finito, incluso el número de vectores de un espacio propio es finito; su dimensión es la medida que permite comparar ambos contextos.

14.5. Una raíz repetida no cuenta por sí sola las direcciones

Comparemos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ambas tienen polinomio característico $(t-3)^2$. Para A, todo el plano es $E_3(A)$. Para B, la ecuación $(B - 3I)(x, y) = (y, 0) = 0$ obliga a $y = 0$, de modo que $E_3(B) = \operatorname{span} e_1$. La raíz aparece dos veces en ambos polinomios, pero sólo la primera matriz proporciona dos direcciones propias independientes.

Definición 14.3. La **multiplicidad algebraica** de un valor propio λ es su multiplicidad como raíz de χ_T: el mayor entero $a \ge 1$ para el que $(t-\lambda)^a$ divide a $\chi_T(t)$. Su **multiplicidad geométrica** es $g = \dim E_\lambda(T)$.

La primera se calcula en una factorización de polinomios; la segunda, resolviendo un sistema homogéneo. En el ejemplo, $a = 2$ para ambas matrices, mientras $g = 2$ para A y $g = 1$ para B.

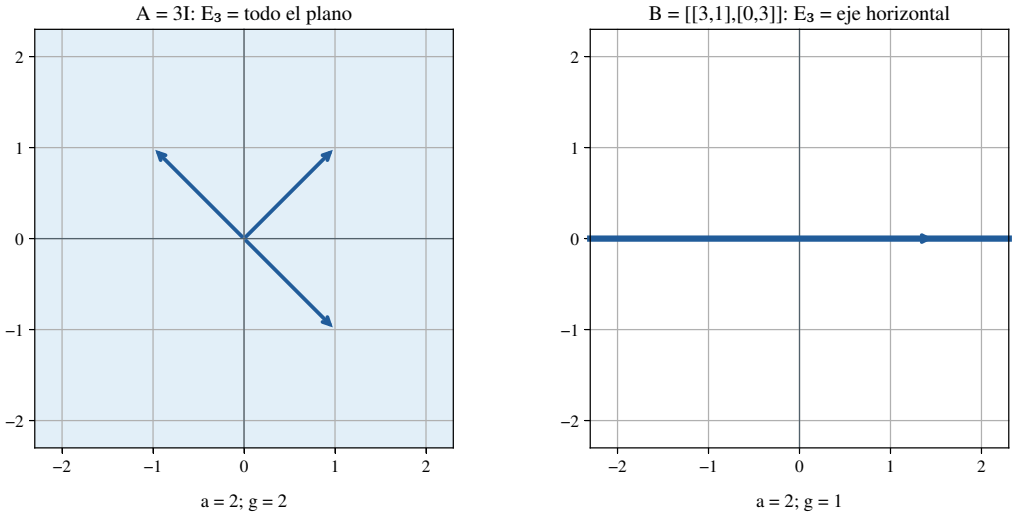


Figura 14.2. El sombreado representa E_3 dentro de la región de plano visible. En el primer panel el subespacio continúa como todo $\mathbb{R}^2$; en el segundo continúa como una recta. La multiplicidad algebraica es dos en ambos casos.

Teorema 14.6 (comparación de multiplicidades). Si λ es un valor propio de un operador en dimensión finita, sus multiplicidades satisfacen $1 \le g \le a$.

Demostración. Existe un vector propio no nulo, por lo que $g \ge 1$. Tomemos una base $v_1, \dots, v_g$ de E_λ y extendámosla a una base de V. Como $T(v_i) = \lambda v_i$ para los primeros g vectores, su matriz tiene forma

$$[T] = \begin{pmatrix} \lambda I_g & C \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Los vectores añadidos pueden tener imágenes con componentes en el espacio propio; por eso no afirmamos que C sea cero. La fórmula de determinante triangular por bloques de C13 se aplica a

$$tI - [T] = \begin{pmatrix} (t-\lambda) I_g & -C \\ 0 & tI - D \end{pmatrix}$$

y da $\chi_T(t) = (t-\lambda)^g \det(tI - D)$. Así, la potencia g del factor divide el característico, y la multiplicidad máxima a es al menos g. Si $g = n$, el bloque D es vacío y su determinante es uno, según la convención de C13. $\square$

Para una raíz simple, $a = 1$ obliga a $g = 1$. Para una raíz doble hay que determinar si el núcleo tiene dimensión uno o dos: la factorización sola no lo decide. Tampoco es legítimo declarar $g = a$ después de contar parámetros de manera informal; rango-nulidad proporciona la comprobación $g = n - \operatorname{rg}(A - \lambda I)$.

Por ejemplo, para

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

se tiene $\chi_C(t) = (t-3)^2(t+1)$. El sistema para tres obliga a $y = z = 0$, de modo que $E_3 = \operatorname{span} e_1$ tiene dimensión uno. Para menos uno obliga a $x = y = 0$, y $E_{-1} = \operatorname{span} e_3$. Sus espacios propios suman una dimensión total de dos dentro de un espacio de dimensión tres. El vector e_2 no se recupera combinando vectores propios de esos dos espacios. La raíz doble ha registrado una repetición algebraica que no se convirtió en una segunda dirección propia.

14.6. Cambiar de cuerpo cambia la pregunta

Consideremos $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Su polinomio característico es $t^2 + 1$. Sobre $\mathbb{R}$ no tiene raíces y por tanto no hay valores propios. Sobre $\mathbb{C}$, la misma matriz de números define un operador de $\mathbb{C}^2$ y aparecen las raíces i y $-i$:

$$R \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \qquad R \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Los vectores de estas columnas no pertenecen a $\mathbb{R}^2$. Al pasar al cuerpo complejo ampliamos las entradas permitidas y la noción de múltiplo escalar; no hemos descubierto una recta real que la rotación conserve.

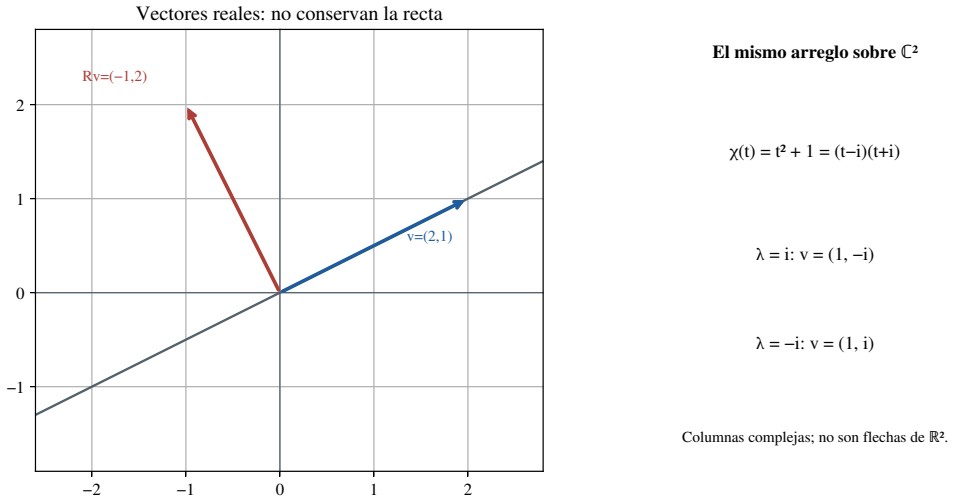


Figura 14.3. El panel geométrico representa vectores reales; el panel algebraico da columnas de $\mathbb{C}^2$, que no se dibujan como flechas del mismo plano real. El cambio de cuerpo queda explícito.

La dependencia también se observa entre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$. La matriz $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ tiene característico $t^2 - 2$. No posee valores propios racionales; sobre los reales tiene $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$. En cuerpos de característica positiva pueden, además, juntarse raíces que eran distintas en otros cuerpos: sobre $\mathbb{F}_2$, $t^2+1 = (t+1)^2$. La matriz del cuarto de vuelta, reducida a ese cuerpo, se convierte en $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y sólo tiene el valor propio uno, con espacio propio $\operatorname{span}(1, 1)$.

Para matrices reales hay una relación precisa entre las raíces complejas no reales.

Proposición 14.7 (conjugación). Si A tiene entradas reales y $Av = \lambda v$ para $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, entonces $A\overline{v} = \overline{\lambda}\,\overline{v}$. Los valores propios complejos no reales aparecen en pares conjugados con iguales multiplicidades algebraicas y geométricas.

Demostración. Conjugar la ecuación conserva las entradas de A y transforma productos y sumas en los de sus conjugados. Se obtiene la igualdad indicada, con $\overline{v} \neq 0$. La conjugación lleva E_λ a $E_{\overline{\lambda}}$ y es su propia inversa. Si $v_1, \dots, v_g$ es una base del primero, una relación $\sum_j c_j \overline{v}_j = 0$, al conjugar, da $\sum_j \overline{c}_j v_j = 0$ y obliga a todos los coeficientes a ser cero. Cualquier vector del segundo se obtiene conjugando una combinación del primero, de modo que los conjugados forman una base y las dimensiones son iguales.

El polinomio χ_A tiene coeficientes reales, porque se construye con sumas y productos de entradas reales. Si $\chi_A(t) = (t - \lambda)^a q(t)$ con $q(\lambda) \neq 0$, conjugar sus coeficientes produce $\chi_A(t) = (t - \overline{\lambda})^a \overline{q}(t)$, donde $\overline{q}(\overline{\lambda}) = \overline{q(\lambda)} \neq 0$. La multiplicidad de la raíz conjugada es también a. $\square$

Corolario 14.8 (existencia sobre los complejos). Admitiendo el teorema fundamental del álgebra de T1 §26.15, todo operador sobre un espacio complejo de dimensión finita positiva tiene al menos un valor propio. Su polinomio característico se descompone completamente en factores lineales complejos. Todo operador real de dimensión finita impar tiene al menos un valor propio real.

Demostración. En dimensión compleja $n \geq 1$, el característico es un polinomio complejo no constante. El TFA admitido da una raíz, que es un valor propio por el teorema 14.2; la extracción sucesiva de factores da la descomposición completa, como en T1 §26.15.

Para un operador real de dimensión impar, consideremos su matriz como matriz compleja. Las raíces no reales se agrupan en pares conjugados de igual multiplicidad por la proposición 14.7. Si no hubiera ninguna raíz real, la suma de todas las multiplicidades sería par. Esa suma es el grado impar del característico, contradicción. Una raíz real produce un núcleo real no trivial por el teorema 14.2 aplicado sobre $\mathbb{R}$. □

La dimensión positiva no puede omitirse: el espacio cero tiene característico uno y carece de vectores propios. La finitud tampoco: en $\mathbb{C}[t]$, la multiplicación $S(p) = tp$ no tiene valores propios. Si $p \neq 0$, el grado de tp es uno mayor que el de p, mientras que λp tiene el mismo grado cuando $\lambda \neq 0$; para $\lambda = 0$ sería el polinomio cero y tampoco puede coincidir con tp. La existencia sobre $\mathbb{C}$ depende de las hipótesis que hicieron posible construir un característico de grado finito.

14.7. Qué cuentan la traza y el determinante

Cuando el característico se descompone en factores lineales en el cuerpo de trabajo, podemos listar sus raíces repitiendo cada una según su multiplicidad algebraica. Esta lista puede contener n elementos aun cuando los espacios propios no proporcionen una base.

Proposición 14.9. Si $\chi_T(t) = \prod_{j=1}^{n} (t - \lambda_j)$ con $\lambda_j \in \mathbb{F}$, repitiendo raíces según su multiplicidad algebraica, entonces

$$\operatorname{tr} T = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j, \qquad \det T = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j.$$

Para dimensión cero se interpretan la suma vacía como cero y el producto vacío como uno.

Demostración. En dimensión positiva, el coeficiente de t^{n-1} del producto es $-\sum_j \lambda_j$, y su término constante es $(-1)^n \prod_j \lambda_j$. El teorema 14.2 identifica esos mismos coeficientes con $-\operatorname{tr} T$ y $(-1)^n \det T$. Compararlos da ambas identidades. En dimensión cero son las convenciones para traza y determinante de la matriz vacía. □

La matriz C de §14.5 tiene raíces $3, 3, -1$ contadas con multiplicidad algebraica. La suma es cinco y el producto es menos nueve, que coinciden con su traza y determinante. El hecho de que E_3 sólo tenga dimensión uno no cambia ese conteo. Tampoco podemos omitir las raíces no reales al hacer esas cuentas. Para $\operatorname{diag}(2, I_2 + R)$, donde R es el bloque de rotación de §14.6, las raíces complejas son $2, 1 + i, 1 - i$. Su suma y su producto valen cuatro, como la traza y el determinante. Conservar sólo la raíz real dos daría dos en ambas cuentas y perdería la contribución del par conjugado.

14.8. Seguir una dirección propia en otras operaciones

Una vez conocida una dirección propia, componer el operador consigo mismo no obliga a volver a resolver un sistema para esa dirección: cada aplicación repite el mismo factor. También podemos sumar un múltiplo de la identidad o invertir un operador invertible.

Proposición 14.10. Si $T(v) = \lambda v$ con $v \neq 0$, entonces

$$(aT + bI)(v) = (a\lambda + b)v, \qquad T^k(v) = \lambda^k v \quad (k \geq 1).$$

Si T es invertible, $\lambda \neq 0$ y $T^{-1}(v) = \lambda^{-1} v$. En dimensión finita, T es invertible si y sólo si cero no es un valor propio. Para $a \neq 0$, se tiene la igualdad de conjuntos

$$\operatorname{spec}(aT + bI) = \{a\lambda + b : \lambda \in \operatorname{spec}(T)\}.$$

Demostración. La linealidad da la primera igualdad. Para las potencias, el caso $k = 1$ es la hipótesis y, si la igualdad vale en k, entonces $T^{k+1}(v) = T(\lambda^k v) = \lambda^{k+1} v$. Si T es invertible, no puede anular un vector no nulo; por eso $\lambda \neq 0$. Aplicar T^{-1} a $T(v) = \lambda v$ da $v = \lambda T^{-1}(v)$ y la fórmula del inverso.

La condición de no tener cero como valor propio equivale a núcleo trivial, y en dimensión finita un endomorfismo inyectivo es invertible por C09. Para el conjunto de valores de $aT + bI$, la primera

igualdad da una inclusión. Recíprocamente, si $(aT + bI)(w) = \mu w$ con $w \neq 0$ y $a \neq 0$, al despejar obtenemos $T(w) = ((\mu - b)/a)w$. Esto da la otra inclusión. $\square$

Las afirmaciones sobre un mismo vector no deben invertirse sin examen. Para $A = \operatorname{diag}(2, -2)$, $A^2 = 4I$ y todo vector no nulo es propio de A^2; el vector $(1, 1)$ no es propio de A. La elevación al cuadrado ha reunido dos valores distintos. Para un operador invertible, en cambio, aplicar la misma prueba a T^{-1} muestra que todos sus valores propios son los inversos de los de T.

Los vectores propios pueden ser objetos distintos de flechas. En $P_2(\mathbb{R})$ consideremos $L(p) = tD(p)$, con derivación formal de polinomios. Para $p = a + bt + ct^2$ se obtiene $L(p) = bt + 2ct^2$.

Las ecuaciones de coeficientes de $L(p) = \lambda p$ son $\lambda a = 0$, $(1 - \lambda)b = 0$ y $(2 - \lambda)c = 0$. Los valores propios son cero, uno y dos, y sus espacios propios son, respectivamente, las rectas generadas por $1, t, t^2$. La base de monomios registra una descomposición por grado en la que el operador sólo multiplica cada componente. Resolver la ecuación de vectores propios ha reconocido esa estructura a partir de la acción sobre los polinomios.

14.9. Ejercicios

Los cálculos numéricos se realizan sobre $\mathbb{R}$ salvo indicación contraria. En los problemas generales se trabaja en dimensión finita sobre $\mathbb{F}$, excepto cuando se indique explícitamente otro dominio. Toda mención a una multiplicidad geométrica se refiere a la dimensión de un espacio propio, no al número de sus vectores.

Ejercicio 1 — Comprobar una dirección. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Comprueba si $(1, 1)$, $(1, -1)$ y $(1, 0)$ son vectores propios y determina sus valores cuando corresponda.

Ejercicio 2 — Una matriz triangular con valores distintos. Encuentra el polinomio característico, los valores propios y bases de los espacios propios de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 3 — El valor cero. Para $E(x, y, z) = (x, 0, 0)$, calcula todos sus valores propios y espacios propios, con sus multiplicidades algebraicas y geométricas.

Ejercicio 4 — Una matriz sin valores propios reales. Estudia $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sobre $\mathbb{R}$ y sobre $\mathbb{C}$. Da bases de todos los espacios propios no triviales.

Ejercicio 5 — Una raíz doble. Para $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, determina χ_B y las dos multiplicidades de su valor propio. ¿Cuántos vectores propios independientes puedes escoger?

Ejercicio 6 — Escalar todo el espacio. Sea V de dimensión $n \geq 1$ sobre $\mathbb{F}$ y $T = cI_V$. Encuentra su espectro, característico y multiplicidades.

Ejercicio 7 — Completar un cálculo de orden tres. Para $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, determina espectro, espacios propios y multiplicidades. Compara sus dimensiones con tres.

Ejercicio 8 — Signo del característico. Para $A = \operatorname{diag}(1, 2, 4)$, escribe $\det(tI - A)$ y $\det(A - tI)$ y explica qué datos comparten.

Ejercicio 9 — Coordenadas de una dirección propia. Para $A = \operatorname{diag}(2, 3)$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula $B = P^{-1}AP$ y sus espacios propios. Verifica la correspondencia $P^{-1}E_\lambda(A)$.

Ejercicio 10 — Leer traza y determinante. Si una matriz real de orden cuatro tiene característico $(t - 2)^2(t + 1)(t - 4)$, determina su traza y determinante. ¿Puedes determinar las dimensiones de todos sus espacios propios?

Ejercicio 11 — Sumar vectores propios. Sean u, v vectores propios no nulos asociados a valores distintos λ, μ. Demuestra que $u + v$ no es un vector propio.

Ejercicio 12 — Las intersecciones por parejas no bastan. Explica por qué $E_\lambda \cap E_\mu = \{0\}$ para valores distintos no alcanza por sí solo a demostrar la directitud de la suma de tres espacios propios. Identifica qué aporta la prueba del teorema 14.4.

Ejercicio 13 — Una raíz simple. Demuestra que si λ es raíz simple del característico, el espacio propio asociado es una recta, aunque la matriz no sea triangular en la base dada.

Ejercicio 14 — No confundir espacio y vectores. ¿Por qué el conjunto de vectores propios asociados a un valor fijo no es un subespacio, mientras E_λ sí lo es? Trata también el caso de $\mathbb{F}_2$.

Ejercicio 15 — El espacio cero. Determina el espectro y el característico del único operador del espacio cero. Comprueba que su invertibilidad no contradice el criterio sobre el valor propio cero.

Ejercicio 16 — La condición finita. En $\mathbb{F}[t]$ define $S(p) = tp$. Demuestra que no tiene valores propios sobre ningún cuerpo y decide si es inyectivo y sobreyectivo.

Ejercicio 17 — De racionales a reales. Estudia $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sobre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$. Encuentra los espacios propios reales.

Ejercicio 18 — Una familia sobre un cuerpo finito. Reduce $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a $\mathbb{F}_2$. Calcula el característico, su espectro y las multiplicidades. Cuenta los vectores propios.

Ejercicio 19 — Una raíz doble con parámetro. Para $A_s = \begin{pmatrix} 2 & s \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $s \in \mathbb{R}$, estudia cómo cambia el espacio propio mientras el característico permanece fijo.

Ejercicio 20 — Tres valores distintos. Sea T un operador de dimensión tres con valores propios distintos a, b, c en el cuerpo de trabajo. Demuestra que una elección de un vector propio por valor forma una base y escribe la matriz correspondiente.

Ejercicio 21 — Trasponer. Prueba que A y A^{T} tienen el mismo característico y las mismas multiplicidades algebraicas y geométricas. ¿Deben coincidir sus espacios propios como conjuntos?

Ejercicio 22 — Las raíces de una triangular. Para una matriz triangular, demuestra que los valores propios son exactamente los escalares que aparecen en su diagonal y que sus repeticiones cuentan multiplicidades algebraicas. Explica por qué no cuentan siempre las geométricas.

Ejercicio 23 — Comprobar un residual. Una matriz de orden tres tiene $\chi_A(t) = (t-1)^2(t-4)$. Alguien afirma que $\dim E_1 = 3$. Localiza dos maneras de descartar esa afirmación.

Ejercicio 24 — Una traslación de valores propios. Determina el espectro y los espacios propios de $S = 3T - 5I$ a partir de los de T. Explica qué ocurriría si el coeficiente tres fuese cero en el cuerpo.

Ejercicio 25 — Invertir. Para $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, encuentra el espectro de A^{-1} y sus espacios propios sin resolver dos sistemas nuevos.

Ejercicio 26 — Potencias que juntan direcciones. Para $A = \operatorname{diag}(2, -2)$, calcula A^2 y compara sus vectores propios con los de A. ¿La condición de ser propio de una potencia implica ser propio del operador?

Ejercicio 27 — Un cuadrado sin raíces reales que lo expliquen. Encuentra una matriz real A tal que A^2 tenga un valor propio que no sea el cuadrado de ningún valor propio real de A.

Ejercicio 28 — Polinomios como vectores. En $P_3(\mathbb{R})$ define $L(p) = tD(p)$ mediante derivación formal. Encuentra χ_L, todos los espacios propios y sus dimensiones.

Ejercicio 29 — El mismo operador formal en otro cuerpo. Repite el ejercicio 28 en $P_3(\mathbb{F}_2)$. Calcula multiplicidades y cuenta los vectores propios de cada valor.

Ejercicio 30 — Derivación formal. En $P_2(\mathbb{R})$ considera $D(p) = p'$. Encuentra sus valores propios y las multiplicidades del único valor que aparezca. Explica por qué no tiene el mismo comportamiento que $p \mapsto tp'$.

Ejercicio 31 — Raíces complejas y datos reales. Para $A = \operatorname{diag}(2, C)$ con $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcula sus raíces complejas y comprueba la traza y el determinante mediante ellas. ¿Basta conservar la raíz real?

Ejercicio 32 — Un espacio propio real y complejo. Sea A real y λ real. Demuestra que $E_\lambda(A \text{ sobre } \mathbb{C}) = \{x + iy : x, y \in E_\lambda(A \text{ sobre } \mathbb{R})\}$ y que la dimensión compleja del primero es la dimensión real del segundo.

Ejercicio 33 — Valores opuestos y traza cero. Construye una matriz real de traza cero que no tenga el valor propio cero. Construye otra de traza cero cuyo único valor propio sea cero.

Ejercicio 34 — Una sola raíz no significa matriz escalar. Construye un operador real de dimensión tres cuyo único valor propio sea siete y cuyo espacio propio tenga dimensión uno. Justifica ambos datos.

Ejercicio 35 — Todos los vectores no nulos son propios. Sea V de dimensión finita positiva y supón que todo vector no nulo es propio de T, permitiendo inicialmente valores diferentes para vectores distintos. Demuestra que $T = cI$ para un único escalar c.

Ejercicio 36 — Una permutación cíclica. Sobre $\mathbb{C}^3$, sea $S(x, y, z) = (z, x, y)$. Determina el característico, todos los espacios propios y una base formada por vectores propios. Puedes usar una raíz cúbica de la unidad $\omega \neq 1$.

Ejercicio 37 — El ciclo en característica tres. Estudia la misma matriz del ejercicio 36 sobre $\mathbb{F}_3$. Compara sus multiplicidades con el resultado complejo.

Ejercicio 38 — Un operador de rango uno. Sean $n \geq 2$, $u, v \in \mathbb{F}^n$ no nulos y $T(x) = (v^{\mathsf{T}}x)u$. Con $c = v^{\mathsf{T}}u$, determina el característico, los valores propios y sus multiplicidades para $c \neq 0$ y para $c = 0$.

Ejercicio 39 — Dos operadores que conmutan. Sean S, T operadores sobre un espacio complejo de dimensión finita positiva y supón $ST = TS$. Demuestra que tienen algún vector propio común. Explica por qué la misma afirmación puede fallar sobre $\mathbb{R}$.

Ejercicio 40 — Una familia con raíces que se reúnen. Para $A_s = \begin{pmatrix} 2 & s & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix}$, con $s \in \mathbb{R}$, determina todas las multiplicidades algebraicas y geométricas según el parámetro. Calcula también traza y determinante y verifica las cuentas por raíces.

14.10. Soluciones

Solución 1. Los productos son $(4, 4)$, $(2, -2)$ y $(3, 1)$. Los dos primeros son cuatro y dos veces la entrada correspondiente. El último no puede ser múltiplo de $(1, 0)$ porque su segunda coordenada es uno. Así, los dos primeros vectores son propios de valores cuatro y dos; el tercero no es propio. Basta una coordenada incompatible para descartar una dirección.

Solución 2. La triangularidad da $\chi_A = (t - 2)(t - 3)$. Para dos, $(A - 2I)(x, y) = (y, y)$, de donde $E_2 = \operatorname{span}(1, 0)$. Para tres, la ecuación es $-x + y = 0$, de donde $E_3 = \operatorname{span}(1, 1)$. Estos dos vectores son independientes y forman una base. Los vectores propios de cada valor son todos los múltiplos no nulos del generador indicado.

Solución 3. La matriz es $\operatorname{diag}(1, 0, 0)$ y $\chi_E = (t - 1)t^2$. Para uno, $E_1 = \operatorname{span} e_1$, con ambas multiplicidades uno. Para cero, $E_0 = \operatorname{span}(e_2, e_3)$, con ambas multiplicidades dos. No hay otras raíces del característico. Cero es un valor propio porque hay vectores no nulos que el operador anula; el vector cero no se convierte por ello en vector propio.

Solución 4. El característico es $t^2 + 1$. No tiene raíces reales, así que el espectro real es vacío. Sobre $\mathbb{C}$ las raíces son $i, -i$, y los sistemas dan $E_i = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}(1, -i)$ y $E_{-i} = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}(1, i)$. Por ejemplo $R(1, -i) = (i, 1) = i(1, -i)$. Las raíces son simples, de modo que ambas multiplicidades son uno para cada raíz.

Solución 5. Se tiene $\chi_B = (t - 5)^2$. El sistema $(B - 5I)(x, y) = (2y, 0) = 0$ exige $y = 0$, y por tanto $E_5 = \operatorname{span} e_1$. La multiplicidad algebraica es dos y la geométrica uno. Se puede escoger un vector propio independiente, pero no dos: todos están sobre la misma recta. La no nulidad de dos vectores no los hace independientes.

Solución 6. La igualdad $cv = \lambda v$ para $v \neq 0$ obliga a $\lambda = c$. Ese valor sí aparece, con $E_c = V$. La matriz es cI_n y $\chi_T = (t - c)^n$. La multiplicidad algebraica y la geométrica son ambas n. El resultado vale también para $c = 0$ y en característica positiva, donde el escalar $\operatorname{tr} T = nc$ podría ser cero sin que T lo sea.

Solución 7. El característico es $(t - 2)^2(t + 1)$. En $\lambda = 2$, las ecuaciones dan $y = 0$, $z = 0$ y x libre: $E_2 = \operatorname{span} e_1$, con $a = 2, g = 1$. En $\lambda = -1$, dan $3x + y = 0$ y $3y = 0$, luego $x = y = 0$ y $E_{-1} = \operatorname{span} e_3$, con $a = g = 1$. La suma de las dimensiones es dos. Los espacios se suman directamente, pero no generan todo $\mathbb{R}^3$.

Solución 8. El primero es $(t-1)(t-2)(t-4) = t^3 - 7t^2 + 14t - 8$. El segundo es su opuesto porque el orden es impar: $-t^3 + 7t^2 - 14t + 8$. Comparten raíces y sus multiplicidades, pues multiplicar un

polinomio por un escalar no nulo no cambia ninguno de esos datos. Nuestra convención elige el primero para que sea mónico.

Solución 9. El producto da $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Para dos, su espacio propio es $\operatorname{span} e_1$; para tres, es $\operatorname{span}(-1, 1)$. Se tiene $P^{-1}e_1 = e_1$ y $P^{-1}e_2 = (-1, 1)$, exactamente los generadores encontrados. El espacio de columnas propio para tres ha cambiado, aunque el valor propio y su dimensión permanecen.

Solución 10. Las raíces con multiplicidad son $2, 2, -1, 4$, cuya suma es siete y cuyo producto es menos dieciséis. Por tanto la traza es siete y el determinante -16. Las raíces simples menos uno y cuatro tienen espacios propios de dimensión uno. Para dos sólo sabemos $1 \leq g_2 \leq 2$; ambas posibilidades ocurren, usando un bloque $2I_2$ o $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ junto a los otros dos bloques escalares. El característico no decide entre ellas.

Solución 11. El teorema 14.4 hace independientes a u, v, de modo que $u + v \neq 0$. Si $T(u + v) = \nu(u + v)$, al restar obtenemos $(\lambda - \nu)u + (\mu - \nu)v = 0$. La independencia obliga a $\lambda = \nu = \mu$, contradiciendo la distinción. En cambio, sumar vectores de un mismo espacio propio sí permanece en él, aunque la suma podría ser cero y entonces no sería vector propio.

Solución 12. Tres rectas $\operatorname{span} e_1$, $\operatorname{span} e_2$, $\operatorname{span}(e_1 + e_2)$ en un plano se cortan por parejas sólo en cero y tienen una relación conjunta no trivial. Así, la afirmación de intersecciones no es un criterio suficiente para tres subespacios. El teorema 14.4 usa además la acción del mismo operador: aplicar $T - \lambda_3 I$ elimina la tercera componente y deja una relación entre las otras dos con factores no nulos. Es esa estructura adicional la que fuerza directitud.

Solución 13. Ser raíz de χ_T garantiza que λ es valor propio, luego $g \geq 1$. La comparación de multiplicidades da $g \leq a = 1$, y por tanto $g = 1$. Es una afirmación intrínseca: el teorema se prueba extendiendo una base del espacio propio, sin exigir que la matriz original sea triangular. Una base de esa recta consta de un solo vector no nulo.

Solución 14. El conjunto de vectores propios es $E_\lambda \setminus \{0\}$ y excluye al cero, que todo subespacio debe contener. Además, para un vector propio v, también $-v$ es propio y su suma es cero. Sobre $\mathbb{F}_2$ se cumple $-v = v$, y $v + v = 0$ da la misma falla. Añadir el cero produce precisamente el núcleo de $T - \lambda I$, que sí es un subespacio.

Solución 15. No hay vectores no nulos y el espectro es vacío. Su matriz es vacía y el característico es uno. El único mapa del espacio cero es su identidad y es invertible, siendo él mismo su inversa. El escalar cero no es valor propio, así que la equivalencia de 14.10 sigue siendo correcta. La existencia sobre los complejos requería dimensión positiva.

Solución 16. Para $p \neq 0$, tp tiene grado $\deg p + 1$. No puede ser λp: para $\lambda \neq 0$ el grado sería $\deg p$, y para $\lambda = 0$ el resultado sería cero. No hay valores propios. Si $tp = 0$, la misma comparación obliga a $p = 0$, luego S es inyectivo. No es sobreyectivo porque el polinomio constante uno no es múltiplo de t. Así, no tener el valor propio cero garantiza inyectividad, pero fuera de dimensión finita no garantiza invertibilidad.

Solución 17. El característico es $t^2 - 2$. No tiene raíces racionales: si $(p/q)^2 = 2$ con fracción reducida, $p^2 = 2q^2$ fuerza que p sea par y después que q también lo sea, contradicción. Sobre $\mathbb{R}$ las raíces son $\pm\sqrt{2}$. Para cualquiera de ellas, $v = (\lambda, 1)$ cumple $Av = (2, \lambda) = \lambda(\lambda, 1)$. Cada raíz es simple y su espacio propio es la recta real generada por ese vector. No son rectas de $\mathbb{Q}^2$.

Solución 18. La matriz es $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y el característico es $t^2 + 1 = (t + 1)^2$. El único valor propio es uno. La ecuación $Rv = v$ exige que las dos coordenadas coincidan, de modo que $E_1 = \{(0, 0), (1, 1)\}$ tiene dimensión uno. La multiplicidad algebraica es dos y la geométrica uno; sólo hay un vector propio no nulo. El número de vectores no debe confundirse con el número de dimensiones o con la multiplicidad de una raíz.

Solución 19. Siempre $\chi_{A_s} = (t - 2)^2$. La ecuación propia para dos es $sy = 0$. Si $s = 0$, no impone restricciones y $E_2 = \mathbb{R}^2$, con $g = 2$. Si $s \neq 0$, exige $y = 0$ y $E_2 = \operatorname{span} e_1$, con $g = 1$. La multiplicidad algebraica es dos para todo el parámetro. La dimensión puede cambiar en un valor excepcional aunque todas las raíces y sus multiplicidades algebraicas se conserven.

Solución 20. Los tres vectores elegidos son no nulos y sus valores son distintos, por lo que son independientes según 14.4. En dimensión tres forman una base. Si se ordenan como (v_a, v_b, v_c), sus

imágenes tienen coordenadas $(a,0,0)$, $(0,b,0)$ y $(0,0,c)$, respectivamente. La matriz es $\operatorname{diag}(a,b,c)$. La condición de valores distintos es suficiente para esta elección, pero no necesaria para que exista una base de vectores propios: la identidad tiene una aunque sólo posea el valor uno.

Solución 21. Se tiene $tI - A^{\mathsf{T}} = (tI - A)^{\mathsf{T}}$, y el determinante de una transpuesta no cambia, así que los característicos coinciden. Esto iguala multiplicidades algebraicas. Para cualquier λ, las matrices $A - \lambda I$ y su transpuesta tienen igual rango por C09 §9.6; rango-nulidad iguala las dimensiones de sus núcleos y por tanto las multiplicidades geométricas. Los conjuntos pueden ser distintos: para $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $E_2(A) = \operatorname{span} e_1$, mientras $E_2(A^{\mathsf{T}}) = \operatorname{span}(1,-1)$.

Solución 22. La matriz $tI - A$ conserva la triangularidad, de modo que $\chi_A = \prod_i (t - a_{ii})$. Sus raíces son las entradas diagonales, y la multiplicidad de una de ellas es su número de apariciones en ese producto. Los espacios propios dependen también de las entradas fuera de la diagonal. Por ejemplo, $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ tiene dos apariciones de dos, pero su núcleo desplazado sólo permite una dirección propia.

Solución 23. La comparación de multiplicidades impone $\dim E_1 \leq 2$, que ya contradice la afirmación. Además, si E_1 fuera todo el espacio, A actuaría como identidad en cada vector y sería I en cualquier base. Su característico sería $(t-1)^3$, distinto del dado. Ambas vías usan información completa; encontrar un vector de E_1 sólo probaría una cota inferior uno.

Solución 24. Cuando $3 \neq 0$, para cada valor λ de T corresponde $3\lambda - 5$ de S y $E_{3\lambda-5}(S) = E_\lambda(T)$: basta despejar $T(v) = ((\mu+5)/3)v$ en la ecuación de S. La transformación de escalares es biyectiva y no se pierde ningún valor. En característica tres el operador es $-5I = I$; si la dimensión es positiva, su único valor propio es uno y su espacio propio es todo V. La división por tres no estaría permitida.

Solución 25. Los valores propios de A son dos y tres, con espacios $\operatorname{span} e_1$ y $\operatorname{span}(1,1)$. La inversa tiene valores $1/2$ y $1/3$ en esos mismos espacios. No hay otros: si $A^{-1}v = \mu v$, la invertibilidad obliga a $\mu \neq 0$ y aplicar A da $Av = \mu^{-1}v$. El argumento establece tanto la inclusión directa como la exhaustividad.

Solución 26. Se tiene $A^2 = 4I$, cuyo espacio propio para cuatro es todo $\mathbb{R}^2$. En cambio, para A los espacios son $E_2 = \operatorname{span} e_1$ y $E_{-2} = \operatorname{span} e_2$. El vector $(1,1)$ es propio de A^2 y no de A. La afirmación sobre una potencia sólo garantiza que un vector que ya era propio permanece propio; su conversa falla cuando dos factores de escala se vuelven iguales al elevarlos.

Solución 27. La rotación $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ no tiene valores propios reales. Sin embargo, $A^2 = -I_2$ tiene el valor propio menos uno y todo vector no nulo es propio. No puede provenir de un valor real de A, porque no existe ninguno; tampoco menos uno es cuadrado real. Al trabajar sobre $\mathbb{C}$, los valores $i, -i$ sí tienen cuadrado menos uno. La elección de cuerpo es parte de la afirmación que se intenta probar.

Solución 28. Para $p = a + bt + ct^2 + dt^3$ se obtiene $L(p) = bt + 2ct^2 + 3dt^3$. En la base $(1, t, t^2, t^3)$ la matriz es $\operatorname{diag}(0,1,2,3)$, de modo que $\chi_L = t(t-1)(t-2)(t-3)$. Las cuatro raíces son simples y cada espacio propio es la recta generada por el monomio de exponente correspondiente: $1, t, t^2, t^3$. También se deduce comparando cada coeficiente de $L(p) = \lambda p$.

Solución 29. Los escalares dos y tres se reducen a cero y uno, por lo que la matriz diagonal es $\operatorname{diag}(0,1,0,1)$. El característico es $t^2(t-1)^2$. El espacio E_0 es $\operatorname{span}(1, t^2)$ y E_1 es $\operatorname{span}(t, t^3)$, ambos de dimensión dos. Cada uno tiene $2^2 = 4$ elementos y tres vectores propios no nulos. En este caso las multiplicidades algebraicas y geométricas son dos para ambos valores, aunque las raíces hayan coincidido al cambiar la característica.

Solución 30. La matriz de D en $(1, t, t^2)$ es $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, con característico t^3. El único valor propio es cero y E_0 es la recta de polinomios constantes, porque $D(a + bt + ct^2) = b + 2ct$ se anula exactamente si $b = c = 0$. Por tanto $a = 3$ y $g = 1$. Multiplicar después por t conserva el grado de cada monomio no constante y produce los factores de escala uno y dos; derivar solo disminuye el grado.

Solución 31. El bloque C tiene característico $(t-1)^2+1$, cuyas raíces son $1+i, 1-i$. El otro bloque aporta dos, así que las tres raíces son $2, 1+i, 1-i$. Su suma es cuatro y su producto es $2(1+i)(1-i)=4$. La matriz tiene traza $2+1+1=4$ y determinante $2\det C=4$. Conservar sólo la raíz real daría dos tanto en la suma como en el producto, por lo que perdería información.

Solución 32. Escribir $v=x+iy$ en $(A-\lambda I)v=0$ separa partes real e imaginaria, pues la matriz es real: ambas deben pertenecer al núcleo real. Eso prueba la igualdad de conjuntos. Si $u_1,\dots,u_g$ es una base real del núcleo, genera el núcleo complejo porque las expansiones de x e y se reúnen con coeficientes complejos. Una relación compleja entre los u_j, separada en partes real e imaginaria, da dos relaciones reales y obliga a todos sus coeficientes a cero. Así, los mismos vectores constituyen una base compleja de longitud g.

Solución 33. La matriz $\operatorname{diag}(1,-1)$ tiene traza cero y valores propios uno y menos uno, ambos no nulos. La matriz $N=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ tiene traza cero y característico t^2, con único valor propio cero. Su espacio propio es $\operatorname{span} e_1$. La traza es una suma con multiplicidades y puede anularse por cancelación o porque todos sus sumandos sean cero; no decide si el operador es singular.

Solución 34. Sirve $A=\begin{pmatrix}7&1&0\\0&7&1\\0&0&7\end{pmatrix}$. Su característico triangular es $(t-7)^3$, así que no hay otro valor propio. La ecuación $(A-7I)(x,y,z)=(y,z,0)=0$ obliga a $y=z=0$; el espacio propio es la recta $\operatorname{span} e_1$. La entrada superior no nula muestra además que $A\neq 7I$. Tener una sola raíz no determina cómo actúa el operador fuera de ese espacio propio.

Solución 35. En dimensión uno, escoger un generador no nulo fija c y la linealidad da el resultado. En dimensión al menos dos, tomemos una base $(e_1,\dots,e_n)$, con $T(e_i)=c_ie_i$. Para $i\neq j$, el vector e_i+e_j es no nulo y propio por hipótesis, de modo que $c_ie_i+c_je_j=d(e_i+e_j)$ para algún d. La independencia obliga a $c_i=d=c_j$. Todos los c_i coinciden con un escalar c; expandir cualquier vector en la base da $T=cI$. Su unicidad resulta aplicando la igualdad a un vector no nulo. El argumento vale incluso sobre $\mathbb{F}_2$.

Solución 36. La matriz es $\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ y $\chi_S=t^3-1=(t-1)(t-\omega)(t-\omega^2)$. Las tres raíces son distintas en $\mathbb{C}$. Para cualquiera de ellas λ, el vector $(1,\lambda^2,\lambda)$ satisface $S(v)=(\lambda,1,\lambda^2)=\lambda v$, usando $\lambda^3=1$. Su espacio propio tiene dimensión uno por simplicidad. Los tres generadores así obtenidos son independientes por 14.4 y forman la base solicitada. La construcción explícita de las raíces cúbicas del tomo I basta para este ejemplo.

Solución 37. En característica tres, $t^3-1=(t-1)^3$. Sólo aparece el valor propio uno. La ecuación $(z,x,y)=(x,y,z)$ obliga a $x=y=z$, por lo que $E_1=\operatorname{span}(1,1,1)$ tiene dimensión uno. La multiplicidad algebraica es tres y la geométrica uno. El cambio no proviene de una nueva eliminación numérica sobre los complejos: el cuerpo modifica la factorización y las relaciones entre escalares.

Solución 38. La imagen es $\operatorname{span} u$ y el núcleo es el hiperplano $K=\{x : v^{\mathsf T}x=0\}$, de dimensión $n-1$. Si $c\neq 0$, $T(u)=cu$ y $u\notin K$, así que $V=\operatorname{span} u\oplus K$. En una base adaptada la matriz es $\operatorname{diag}(c,0,\dots,0)$. El característico es $(t-c)t^{n-1}$; $E_c=\operatorname{span} u$ y $E_0=K$, con multiplicidades algebraicas y geométricas uno y $n-1$, respectivamente. Si $c=0$, entonces $u\in K$. Extiende u a una base de K y escoge w con $v^{\mathsf T}w=1$, posible porque el funcional no es cero. Añadir w completa una base del espacio. T anula todos los vectores de K y envía w a u, así que su matriz sólo tiene una entrada uno en la posición $(1,n)$ y es triangular con diagonal cero. Su característico es t^n, su único valor propio es cero y su espacio propio es K, de multiplicidad geométrica $n-1$ y algebraica n. No se necesitó dividir por la indeterminada del característico.

Solución 39. Por el corolario 14.8, que usa el TFA admitido, T tiene un valor propio λ y un espacio propio $E_\lambda\neq 0$. Si $w\in E_\lambda$, entonces $T(Sw)=S(Tw)=\lambda Sw$, de modo que S lleva ese subespacio dentro de sí mismo. La restricción de S a E_λ es un operador complejo de dimensión finita positiva; 14.8 vuelve a dar un vector propio no nulo w de esa restricción. Es propio de S y, al pertenecer a E_λ, también de T. Sobre $\mathbb{R}$, la identidad y la rotación de un cuarto de vuelta conmutan, pero esta última no tiene ningún vector propio real. El argumento no afirma que exista una base común de vectores propios.

Solución 40. El característico es $(t-2)^2(t-s)$. Si $s \notin \{0,2\}$, para dos las ecuaciones $sy = 0$ y $(s-2)z = 0$ dan $E_2 = \operatorname{span} e_1$, con $a = 2, g = 1$. Para s, la ecuación de la segunda fila $(2-s)y = 0$ fuerza $y = 0$ y después la primera fuerza $x = 0$, así que $E_s = \operatorname{span} e_3$, con $a = g = 1$. Si $s = 0$, la matriz es $\operatorname{diag}(2,2,0)$: $E_2 = \operatorname{span}(e_1, e_2)$ tiene $a = g = 2$, y $E_0 = \operatorname{span} e_3$ tiene $a = g = 1$. Si $s = 2$, sólo aparece dos, de multiplicidad algebraica tres; la única restricción de $A_2 - 2I$ es $2y = 0$, por lo que $E_2 = \operatorname{span}(e_1, e_3)$ tiene dimensión dos. En todos los casos la traza es $4 + s$ y el determinante $4s$, coincidentes con suma y producto de la lista $2, 2, s$. Cuando las raíces se reúnen en $s = 2$, sus multiplicidades algebraicas se suman, pero la dimensión se obtiene resolviendo el núcleo correspondiente.

Lecturas y referencias

Hoffman–Kunze, *Linear Algebra*, §6.2, sitúa los valores propios en el problema de representar operadores; Friedberg, Insel y Spence, *Linear Algebra*, §§5.1–5.2, desarrolla espacios propios y comparación de multiplicidades. Axler, *Linear Algebra Done Right*, comienzo de §5A, ofrece la lectura por rectas preservadas e independencia de vectores propios. Johnston, *Advanced Linear and Matrix Algebra*, apéndice A.1.6, permite contrastar los cálculos y la terminología. Para raíces complejas y el estatuto admitido del TFA, véase el tomo I de APM, §§26.14–26.15.

Capítulo 15

Polinomios de operadores y teorema de Cayley–Hamilton

La transformación $T(x, y) = (3x + y, x + 3y)$ de C14 tiene matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Para aplicarla cien veces podríamos empezar a multiplicar matrices, aunque las primeras cuentas ya muestran una manera de abreviar el trabajo: $A^2 = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} = 6A - 8I$. Multiplicar esta identidad por A da $A^3 = 6A^2 - 8A = 28A - 48I$. Cada nueva potencia puede reducirse a una combinación de las dos matrices iniciales. El exponente crece; el espacio en que hacemos las cuentas sigue teniendo dimensión dos.

La relación se escribe $A^2 - 6A + 8I = 0$. El polinomio $t^2 - 6t + 8$ es justamente el característico calculado en C14. Hay dos cuestiones distintas en esa coincidencia: justificar por qué el característico siempre produce una relación entre las potencias y determinar si puede haber una relación de grado menor. Para $3I_2$, por ejemplo, el característico es $(t - 3)^2$, pero la igualdad $3I_2 - 3I_2 = 0$ ya corresponde al polinomio $t - 3$. El tamaño de una matriz fija el grado del característico; las relaciones entre sus potencias pueden comenzar antes.

Trabajaremos sobre un cuerpo conmutativo $\mathbb{F}$, con operadores $T : V \to V$ y composición como producto. Declararemos cuándo la dimensión debe ser finita y positiva. Recuperamos de C12 la representación de composiciones, de C13 los determinantes y la adjugata, y de C14 el característico $\chi_T(t) = \det(tI - A)$. La letra t denota una indeterminada. Los argumentos de división y Bézout se desarrollan aquí sobre $\mathbb{F}$ para que también puedan usarse en característica positiva.

15.1. Evaluar un polinomio en una transformación

Para $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_d t^d$, la expresión $p(T)$ debe enviar un vector v a $a_0 v + a_1 T(v) + \cdots + a_d T^d(v)$. Cada sumando vive en el mismo espacio, y la suma define un operador lineal. El término constante actúa multiplicando la entrada: el operador que le corresponde es $a_0 I_V$. Escribir $T^2 - 6T + 8$ omitiría ese tipo de objeto; la escritura completa es $T^2 - 6T + 8I_V$.

Definición 15.1. Para un polinomio $p(t) = \sum_{j=0}^{d} a_j t^j$, se define su **evaluación en** T por $p(T) = \sum_{j=0}^{d} a_j T^j$, donde $T^0 = I_V$. El polinomio cero se evalúa en el operador cero. Se dice que p **anula a** T cuando $p(T) = 0$ como operador, es decir, cuando $p(T)v = 0$ para todo $v \in V$. Para una matriz cuadrada se usa la misma definición, con $A^0 = I$.

La condición universal importa incluso en un plano. Sea $N(x, y) = (y, 0)$. Se tiene $N(e_1) = 0$, pero $N(e_2) = e_1 \neq 0$; el polinomio t anula al primer vector al evaluarse en N, sin anular al operador. En cambio, $N^2 = 0$, porque la primera aplicación deja toda entrada sobre el eje horizontal y la segunda la envía a cero. La identidad se verifica sobre cualquier (x, y), o sobre los dos vectores de una base, usando linealidad.

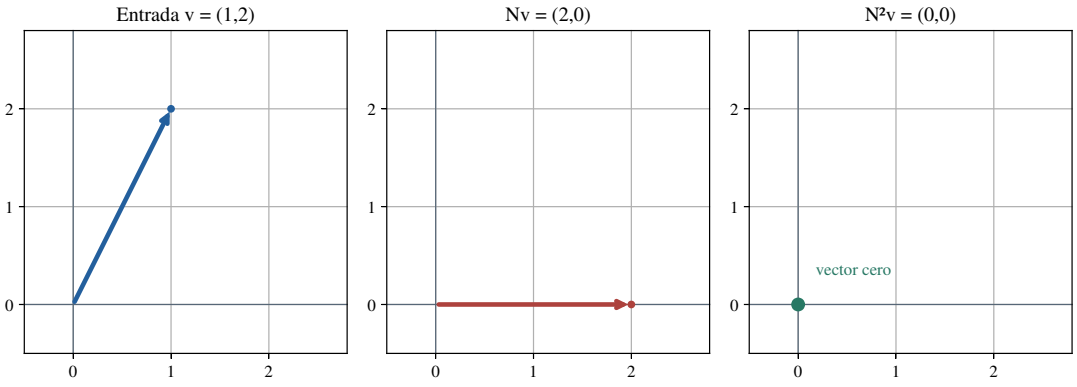


Figura 15.1. Las flechas representan la entrada y sus imágenes desde el origen. El último resultado es el vector cero, marcado por un punto; no hay una flecha de longitud positiva que lo represente. El cálculo dibujado es una instancia de la identidad $N^2(x, y) = (0, 0)$.

Proposición 15.1 (reglas de evaluación). Para $p, q \in \mathbb{F}[t]$ y $c \in \mathbb{F}$,

$$(p+q)(T) = p(T) + q(T), \qquad (cp)(T) = cp(T), \qquad (pq)(T) = p(T)q(T), \qquad 1(T) = I_V.$$

En particular, dos polinomios del mismo operador conmutan. Si S conmuta con T, entonces S conmuta con cada $p(T)$.

Demostración. Las reglas para suma y múltiplo escalar resultan agrupando los coeficientes de cada potencia. Si $p = \sum_i a_i t^i$ y $q = \sum_j b_j t^j$, la distributividad de la composición y $T^i T^j = T^{i+j}$ dan

$$p(T)q(T) = \sum_{i,j} a_i b_j T^{i+j} = (pq)(T).$$

El producto pq es igual a qp, así que las dos evaluaciones conmutan. Para la última afirmación, una inducción a partir de $ST = TS$ da $ST^j = T^j S$ para cada $j \geq 0$; distribuir S sobre la combinación lineal prueba $Sp(T) = p(T)S$. □

El argumento funciona porque todas las potencias proceden de un mismo operador. No autoriza a desarrollar $(S+T)^2$ como $S^2 + 2ST + T^2$ si $ST \neq TS$: en general aparecen los dos términos ST y TS. Más adelante tendremos que distinguir también la evaluación de polinomios con coeficientes escalares de una pretendida sustitución en expresiones cuyos coeficientes sean matrices arbitrarias.

Las reglas permiten evaluar productos factorizados. Para la matriz inicial, $p(t) = (t-4)(t-2)$ produce $p(A) = (A - 4I)(A - 2I)$. En la base propia de C14, cada factor anula una de las dos direcciones, y el producto anula ambas. Podemos comprobarlo sin cambiar de base: el producto desarrollado es $A^2 - 6A + 8I = 0$. En cada interpretación, la igualdad sigue siendo una afirmación sobre el operador entero.

Proposición 15.2 (coordenadas y vectores propios). Si $A = [T]_{\mathcal{B}}$, entonces $[p(T)]_{\mathcal{B}} = p(A)$. Si $B = P^{-1}AP$, se tiene $p(B) = P^{-1}p(A)P$. Si $T(v) = \lambda v$ con $v \neq 0$, entonces $p(T)v = p(\lambda)v$.

Demostración. C12 da $[T^j]_{\mathcal{B}} = A^j$, incluido $j = 0$, y respeta combinaciones lineales; sumarlas prueba la primera igualdad. Para la segunda, $B^j = P^{-1}A^jP$ por cancelación de los factores consecutivos PP^{-1}, mientras $I = P^{-1}IP$ trata el término constante. La tercera usa $T^j v = \lambda^j v$ de C14 y la misma suma. □

La tercera igualdad detecta una condición necesaria para anular un operador: todo valor propio debe ser raíz de cualquier polinomio que lo anule. La condición no es suficiente. Para $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ el único valor propio es tres, pero $B - 3I \neq 0$. El polinomio $t - 3$ se anula en ese valor y en todos sus vectores propios, mientras deja una acción no nula sobre e_2. Para anular B hace falta, al menos, recuperar la relación $(B - 3I)^2 = 0$.

15.2. La primera relación entre las potencias

Supongamos $\dim V = n \geq 1$. En una base, los operadores se representan mediante matrices de orden n, cuyo espacio tiene dimensión n^2: las matrices con una sola entrada uno y las demás cero

forman una base. Por consiguiente, la lista $I, T, T^2, \dots, T^{n^2}$ es dependiente. Una relación no trivial entre sus términos proporciona un polinomio no nulo que anula a T. Dividir sus coeficientes por el principal permite hacerlo mónico. Esta primera cota de grado garantiza existencia sin usar el teorema de Cayley–Hamilton que queremos demostrar.

Definición 15.2. El **polinomio mínimo** de un operador en dimensión finita es el polinomio mónico de menor grado que lo anula; se denota $m_T(t)$. Su unicidad se probará enseguida. Para el espacio cero adoptamos $m_T = 1$: allí $I_V = 0$ y el polinomio constante uno ya anula al único operador. Si $V \neq \{0\}$, ningún polinomio constante no nulo lo anula, porque $cI_V(v) = cv \neq 0$ para $c \neq 0$ y $v \neq 0$. Así, en dimensión positiva $\deg m_T \geq 1$.

Necesitamos la división polinómica sobre el cuerpo elegido. Si $f, g \in \mathbb{F}[t]$ y $g \neq 0$, se puede restar a f un múltiplo monomial de g que elimine su término principal: si sus términos principales son at^r y bt^s, con $r \geq s$, se resta $(a/b)t^{r-s}g$. El resto parcial tiene menor grado. Repetir termina, porque los grados no negativos descienden, y produce $f = qg + r$, donde $r = 0$ o $\deg r < \deg g$. Para la unicidad, dos divisiones darían $(q - q')g = r' - r$. Si $q \neq q'$, el miembro izquierdo tiene grado al menos $\deg g$, y el derecho es cero o tiene grado menor. La contradicción obliga a $q = q'$ y $r = r'$. La posibilidad de dividir por b es el punto en que se usa que los coeficientes forman un cuerpo.

Teorema 15.3 (todos los polinomios anuladores). Para un operador en dimensión finita,

$$p(T) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad m_T \mid p.$$

El polinomio mínimo es único. Dos polinomios dan el mismo operador al evaluarse si y sólo si su diferencia es múltiplo de m_T.

Demostración. Sea m un polinomio mónico de menor grado que anule a T. Dividimos $p = qm + r$ con $r = 0$ o $\deg r < \deg m$. Si $p(T) = 0$, las reglas de evaluación dan $r(T) = 0$. Un resto no nulo podría normalizarse dividiendo por su coeficiente principal, y produciría un polinomio mónico anulador de grado menor que m. Por la elección de m, eso es imposible; luego $r = 0$ y $m \mid p$. Recíprocamente, si $p = qm$, entonces $p(T) = q(T)m(T) = 0$.

Si m' fuera otro mínimo mónico, $m \mid m'$ y ambos tienen el mismo grado; difieren por un escalar. Como ambos son mónicos, ese escalar es uno. Finalmente, $p(T) = q(T)$ equivale a $(p - q)(T) = 0$, de modo que la primera parte se aplica a su diferencia. En el espacio cero, $m = 1$ divide a todos los polinomios y todas las evaluaciones son el operador cero, de acuerdo con el enunciado. □

El adjetivo mínimo se refiere al grado, y la normalización mónica elimina la ambigüedad por escalares. No se refiere al número de términos ni al tamaño de los coeficientes. Para una matriz no escalar de orden dos que satisface una relación mónica cuadrática, esa relación ya es su mínimo: un mínimo lineal $t - c$ obligaría a que la matriz fuera cI.

Podemos buscar m_A con sistemas lineales, sin factorizar el característico. Para $d = 1, 2, \dots$, se pregunta si existen $a_0, \dots, a_{d-1}$ tales que $a_0 I + \cdots + a_{d-1}A^{d-1} = -A^d$. Cada entrada da una ecuación escalar. El primer sistema compatible entrega el mínimo, pues un anulador de menor grado habría dado una relación en un paso anterior. Para $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ no hay relación de grado uno, y el paso dos entrega $m_A = t^2 - 6t + 8$.

Proposición 15.4 (raíces del mínimo). En dimensión finita, un escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ es valor propio de T si y sólo si $m_T(\lambda) = 0$. En consecuencia, m_T y χ_T tienen las mismas raíces en el cuerpo de trabajo, aunque sus multiplicidades pueden ser distintas.

Demostración. Si $v \neq 0$ y $T(v) = \lambda v$, la proposición 15.2 da $0 = m_T(T)v = m_T(\lambda)v$; el escalar debe ser cero. Recíprocamente, si $m_T(\lambda) = 0$, el teorema del factor da $m_T(t) = (t - \lambda)q(t)$, con q de grado menor. La minimalidad obliga a $q(T) \neq 0$, así que existe w con $u = q(T)w \neq 0$. Evaluar la factorización da $(T - \lambda I)u = 0$; por tanto, u es un vector propio. C14 identifica las raíces de χ_T con esos mismos valores. El espacio cero no aporta raíces ni vectores propios y satisface también la afirmación. □

Para una rotación real de un cuarto de vuelta, $R^2 = -I$ y R no es escalar, por lo que $m_R = t^2 + 1$. El mínimo no tiene raíces reales, pero sigue describiendo una relación entre operadores. Pasar a los complejos factoriza el mismo polinomio como $(t - i)(t + i)$. Su cálculo no ha requerido encontrar los vectores propios ni suponer que el polinomio se descomponga en el cuerpo inicial.

15.3. Una identidad para todas las matrices

En orden dos, el característico es $t^2 - (\operatorname{tr} A)t + \det A$. Cayley–Hamilton afirma que $A^2 - (\operatorname{tr} A)A + (\det A)I = 0$. Comprobar las cuatro entradas para $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ permite ver las cancelaciones sin buscar raíces; la dificultad general consiste en organizar esas cancelaciones para cualquier orden.

La adjugata de C13 ofrece una identidad previa: $(tI - A)\operatorname{adj}(tI - A) = \chi_A(t)I$. Sus entradas son polinomios escalares y la igualdad se obtiene por cofactores, con los argumentos de sumas y productos ya precisados en C14. La tentación es escribir inmediatamente $t = A$. Esa sustitución requiere cuidado: la expresión es una matriz de polinomios, no un único polinomio con coeficientes escalares. Después de agrupar sus potencias de t, los coeficientes son matrices, y una regla de evaluación no se vuelve multiplicativa para coeficientes arbitrarios. Podemos evitar ese obstáculo comparando los coeficientes antes de formar las potencias de A.

Teorema 15.5 (Cayley–Hamilton). Para todo operador de un espacio de dimensión finita,

$$\chi_T(T) = 0.$$

En particular, $m_T \mid \chi_T$ y $\deg m_T \le \dim V$. En dimensión positiva, $1 \le \deg m_T \le \dim V$.

Demostración. Elegimos una base y escribimos $A = [T]$. Supongamos primero que su orden es $n \ge 1$. Cada cofactor de $tI - A$ es un determinante de orden $n-1$, por lo que tiene grado a lo sumo $n-1$. Existen matrices constantes $C_0, \dots, C_{n-1}$ tales que

$$B(t) = \operatorname{adj}(tI - A) = \sum_{j=0}^{n-1} t^j C_j.$$

Para $n = 1$ el cofactor es el determinante vacío, igual a uno, así que la misma escritura es válida. Escribimos $\chi_A(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k t^k$, con $c_n = 1$. La identidad $(tI - A)B(t) = \chi_A(t)I$, al comparar coeficientes, da

$$C_{k-1} - AC_k = c_k I \qquad (0 \le k \le n),$$

donde ponemos $C_{-1} = 0$ y $C_n = 0$. Las ecuaciones de los extremos dicen $-AC_0 = c_0 I$ y $C_{n-1} = I$. Multiplicamos la ecuación de índice k por A^k a la izquierda y sumamos:

$$\sum_{k=0}^{n} c_k A^k = \sum_{k=0}^{n} A^k C_{k-1} - \sum_{k=0}^{n} A^{k+1} C_k = 0.$$

La primera suma empieza efectivamente en $k = 1$, y la segunda termina en $k = n-1$; cambiar $j = k-1$ en la primera las hace idénticas. No se intercambió el orden de ninguna matriz. El miembro izquierdo es $\chi_A(A)$, que por 15.2 representa a $\chi_T(T)$. Así queda probado que este operador es cero.

En dimensión cero, $\chi_T = 1$ y $1(T) = I_V = 0$, por lo que el enunciado también se cumple. El teorema 15.3 aplicado al anulador χ_T da la divisibilidad. Como χ_T es mónico de grado n, se obtiene la cota. $\square$

La prueba conserva su forma en característica dos y no exige raíces en el cuerpo. También muestra qué debía justificarse detrás de la frase «sustituir la matriz en su característico»: las cancelaciones se producen entre coeficientes matriciales en un orden concreto. Evaluar el determinante como si sus entradas permanecieran escalares después de esa sustitución confundiría objetos de tamaños diferentes.

Si $\chi_T = \prod_i (t - \lambda_i)^{a_i}$ se descompone en el cuerpo de trabajo, la divisibilidad y 15.4 dan $m_T = \prod_i (t - \lambda_i)^{r_i}$ con $1 \le r_i \le a_i$. Ningún factor lineal puede desaparecer del mínimo, pero su exponente puede bajar. En la matriz $\operatorname{diag}(3, 3, -1)$ el mínimo es $(t-3)(t+1)$; en $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ es $(t-3)^2(t+1)$, porque el producto de los dos factores simples deja una entrada superior no nula. Son las dos maneras de actuar sobre la componente repetida que C14 había empezado a distinguir.

15.4. Calcular con restos

Sea $d = \deg m_T \geq 1$. Dividir $p = qm_T + r$, con $\deg r < d$ o $r = 0$, da $p(T) = r(T)$. Podemos reemplazar cualquier potencia elevada por el resto de la división de t^k entre m_T. La igualdad se conserva para sumas y productos: después de multiplicar dos restos, se vuelve a reducir. Esta descripción explica por qué el problema inicial nunca exigió abandonar las combinaciones de I y A.

Corolario 15.6 (dimensión de los polinomios de T). Denotemos por $\mathbb{F}[T]$ el conjunto de todos los operadores $p(T)$. Si $V \neq \{0\}$, la lista $I, T, \ldots, T^{d-1}$, con $d = \deg m_T$, es una base de ese espacio, de dimensión d. Cada operador de $\mathbb{F}[T]$ tiene un único representante polinómico de grado menor que d, admitiendo el polinomio cero.

Demostración. Los restos de división prueban que la lista genera. Una relación no trivial entre sus términos daría un polinomio anulador no nulo de grado menor que d, contradiciendo la definición del mínimo. Por tanto, la lista es independiente. Si dos restos representaran el mismo operador, su diferencia sería un anulador de grado menor que d y tendría que ser cero. □

En dimensión cero, $\mathbb{F}[T] = \{0\}$ tiene base vacía y dimensión cero, igual al grado de $m_T = 1$; el resto de cualquier división por uno es cero. La evaluación respeta sumas, productos e identidad por 15.1, de modo que $\mathbb{F}[T]$ tiene además una multiplicación conmutativa heredada de los operadores. No hace falta desarrollar una teoría de anillos cociente para realizar estas cuentas: dos polinomios representan el mismo operador cuando difieren por un múltiplo del mínimo.

Para la matriz inicial sobre $\mathbb{R}$, $m_A = (t-4)(t-2)$. El resto de t^k tiene forma $\alpha_k t + \beta_k$ y debe tomar los valores 4^k y 2^k en cuatro y dos. Resolver $4\alpha_k + \beta_k = 4^k$, $2\alpha_k + \beta_k = 2^k$ da

$$A^k = \frac{4^k - 2^k}{2} A + (2^{k+1} - 4^k) I \qquad (k \geq 0).$$

La interpolación encuentra el resto porque los dos nodos son distintos: un polinomio de grado menor que dos queda determinado por sus valores en ellos. No se puede trasladar ese paso sin cambios a un mínimo con raíz doble. Si $N^2 = 0$ y $N \neq 0$, el mínimo es t^2; el valor de $\alpha t + \beta$ en cero sólo informa de β y no determina α. La división polinómica sigue funcionando en ambos casos.

Para $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, la reducción es aún más corta: $R^2 = -I$ implica $R^3 = -R$, $R^4 = I$, y las potencias se repiten con período cuatro sobre $\mathbb{R}$. Así, $R^{2026} = -I$ porque $2026 = 4 \cdot 506 + 2$. El resto de t^{2026} módulo $t^2 + 1$ es -1, y esa cuenta evita cualquier matriz intermedia.

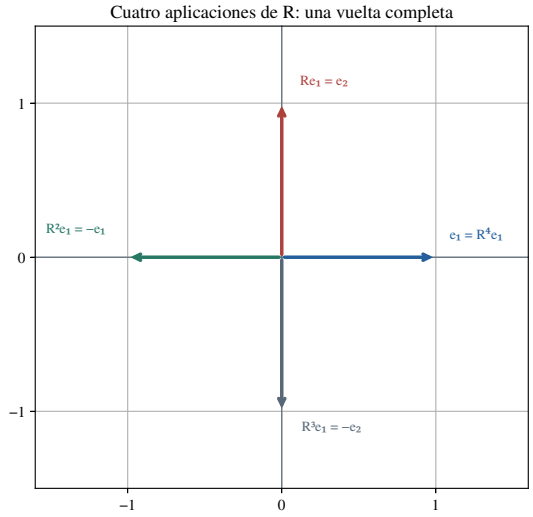


Figura 15.2. Se dibuja la órbita de un vector real. La identidad $R^2 = -I$, comprobada como matriz, explica el ciclo de todos los vectores y permite reducir cualquier exponente; la sola periodicidad de una entrada no probaría esa identidad universal.

También podemos trabajar sin raíces del mínimo. Para $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ se cumple $F^2 = F + I$. Si definimos los números $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ y $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$ para $k \geq 1$, una inducción da $F^k = f_k F + f_{k-1} I$ para $k \geq 1$: al multiplicar por F aparecen $f_k(F + I) + f_{k-1}F = f_{k+1}F + f_k I$.

La relación cuadrática entre matrices produce la misma recurrencia que organiza los coeficientes. Por ejemplo, $F^{10} = 55F + 34I$.

15.5. Bézout e inversas polinómicas

Una relación anuladora cuyo término constante no sea cero permite despejar la identidad. Si $m_T(t) = t^d + a_{d-1}t^{d-1} + \cdots + a_1 t + a_0$ y $a_0 \neq 0$, entonces

$$T(T^{d-1} + a_{d-1}T^{d-2} + \cdots + a_1 I) = -a_0 I.$$

El factor entre paréntesis conmuta con T, por lo que dividirlo por $-a_0$ proporciona una inversa por ambos lados. Si $a_0 = 0$, 15.4 dice que cero es valor propio y T no es invertible. La fórmula abarca todos los operadores invertibles de dimensión finita positiva:

$$T^{-1} = -a_0^{-1}(T^{d-1} + a_{d-1}T^{d-2} + \cdots + a_1 I).$$

Para $d = 1$, el paréntesis es simplemente I. En la matriz inicial, $a_0 = 8$ y la fórmula entrega $A^{-1} = (6I - A)/8$, resultado verificable multiplicando por A y usando $A^2 = 6A - 8I$. Una fórmula semejante para $p(T)^{-1}$ exige resolver una cuestión polinómica más general: encontrar u tal que up difiera de uno por un múltiplo de m_T.

Lema 15.7 (Bézout polinómico). Si $f, g \in \mathbb{F}[t]$ no son ambos cero, existe un único divisor común mónico h que es múltiplo de cualquier otro divisor común. Además, existen $u, v \in \mathbb{F}[t]$ tales que $h = uf + vg$. Se llama **máximo común divisor** de f, g y se escribe $\gcd(f, g)$. En particular, son **coprimos**, es decir, $\gcd(f, g) = 1$, si y sólo si alguna combinación $uf + vg$ es uno.

Demostración. Entre las combinaciones no nulas $af + bg$ elegimos una de menor grado y la hacemos mónica, multiplicando ambos coeficientes por un escalar. La llamamos $h = uf + vg$. Dividimos $f = qh + r$. El resto es otra combinación de f y g, pues $r = (1 - qu)f - qvg$; si fuera no nulo tendría grado menor que h, contradiciendo su elección. Por tanto, $h \mid f$, y dividir g de la misma manera prueba $h \mid g$. Cualquier divisor común divide cada combinación y, en particular, divide a h.

Si h' cumpliera esas propiedades y fuera mónico, cada uno dividiría al otro; el grado y el coeficiente principal fuerzan $h = h'$. Cuando una combinación es uno, ningún divisor común puede tener grado positivo; el divisor común mónico es uno. La implicación recíproca es la identidad que acabamos de construir. □

La demostración garantiza la identidad; las divisiones sucesivas permiten calcularla. Se divide f entre g, después g entre el resto y se continúa mientras el resto no sea cero. Cada división conserva los divisores comunes del par; el último resto no nulo, normalizado, es el máximo común divisor. Sustituir hacia atrás expresa ese resto como combinación del par inicial. Los grados descienden y el proceso termina sobre cualquier cuerpo.

Teorema 15.8 (invertir una evaluación). Si $\dim V$ es finita y positiva, entonces

$$p(T) \text{ es invertible} \quad \Longleftrightarrow \quad \gcd(p, m_T) = 1.$$

Cuando $up + vm_T = 1$, su inversa es $u(T)$; el representante de esa inversa de grado menor que $\deg m_T$ es único.

Demostración. Evaluar una identidad de Bézout da $u(T)p(T) = I$. Como los polinomios de T conmutan, también $p(T)u(T) = I$, y $u(T)$ es la inversa.

Para la otra dirección, supongamos que $h = \gcd(p, m_T)$ tiene grado positivo. Escribimos $p = hk$ y $m_T = hq$. El grado de q es menor que el de m_T, y q es no nulo, por lo que $q(T) \neq 0$. Sin embargo,

$$p(T)q(T) = k(T)h(T)q(T) = k(T)m_T(T) = 0.$$

Si $p(T)$ fuese invertible, multiplicar por su inversa obligaría a $q(T) = 0$, contradicción. Por tanto, invertibilidad implica que el máximo común divisor sea uno. La unicidad del resto representativo procede de 15.6. □

Para la rotación real y $p(t) = t + 1$, la identidad $\frac{1}{2}(1 - t)(t + 1) + \frac{1}{2}(t^2 + 1) = 1$ da $(R + I)^{-1} = (I - R)/2$. Para $p(t) = t^2 + 1$, en cambio, el máximo común divisor con m_R es $t^2 + 1$ y la evaluación es cero. El criterio funciona aunque el mínimo no tenga raíces en el cuerpo. En característica dos,

la primera identidad no está disponible: al reducir la misma matriz se tiene $m_R = (t+1)^2$, y $R + I$ es singular. El denominador dos advertía una diferencia real en el problema, no un inconveniente de escritura.

15.6. Lo que una entrada permite reconstruir

Una relación $p(T)v = 0$ puede contener menos información que $p(T) = 0$. Para $A = \operatorname{diag}(2, 3)$ y $v = e_1$, el polinomio $t - 2$ anula a esa entrada y no ve la segunda coordenada. La diferencia desaparece si las imágenes sucesivas de v alcanzan a generar todo el espacio.

Proposición 15.9 (comprobar una relación). Un polinomio p anula a T si y sólo si $p(T)$ anula a cada vector de una base. Si $v, Tv, \dots, T^{n-1}v$ es una base de un espacio de dimensión $n \geq 1$, entonces basta comprobar $p(T)v = 0$. En ese caso, $m_T = \chi_T$.

Demostración. Un operador lineal que es cero sobre una base es cero sobre toda combinación de sus elementos; la implicación recíproca es inmediata. Para la segunda afirmación, si $p(T)v = 0$, la conmutación da $p(T)T^j v = T^j p(T)v = 0$ para cada vector de la base indicada. Por la primera parte, $p(T) = 0$.

Ningún polinomio no nulo de grado menor que n puede anular a v: lo haría mediante una relación no trivial entre los primeros n vectores de esa base. Así, $\deg m_T \geq n$. Cayley–Hamilton da $\deg m_T \leq n$ y $m_T \mid \chi_T$; al ser ambos mónicos de grado n, son iguales. □

Para $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, los vectores e_2 y $Fe_2 = e_1$ forman una base. La relación $F^2 e_2 = Fe_2 + e_2$ ya determina $F^2 - F - I = 0$ en todo el espacio por 15.9. Una trayectoria y su relación de recurrencia han bastado, porque sus dos entradas iniciales constituyen una base. Para $3I_2$, cualquier trayectoria de un vector no nulo permanece en una sola recta; allí la igualdad $m_T = \chi_T$ falla y la hipótesis de generación identifica la información que falta.

F(a,b) = (a+b,a): trayectoria de e_2

k	0	1	2	3	4
primera coordenada	0	1	1	2	3
segunda coordenada	1	0	1	1	2

$v_0 = e_2$, $v_1 = e_1$ forman una base; $v_{k+2} = v_{k+1} + v_k$

Figura 15.3. Las columnas se presentan en una tabla para conservar sus valores exactos. La relación entre cada tres columnas es $v_{k+2} = v_{k+1} + v_k$. El hecho de que v_0, v_1 formen una base permite convertir la recurrencia observada y comprobada en una relación del operador completo.

La operación de reducir potencias a restos vuelve así al problema inicial con un criterio de verificación. Una cuenta sobre un vector produce una relación local; una cuenta sobre una base la convierte en identidad de operadores. Cuando una sola trayectoria contiene esa base, la recurrencia que describe su evolución ya recoge el polinomio mínimo completo.

15.7. Ejercicios

Los cálculos numéricos se realizan sobre $\mathbb{R}$ salvo indicación contraria. Los operadores generales actúan en dimensión finita positiva sobre $\mathbb{F}$, excepto cuando el enunciado declare otro espacio. Las identidades que se pidan deben comprobarse como identidades de operadores; una prueba sobre vectores de una base es suficiente, mientras que una sola entrada requiere una hipótesis adicional.

Ejercicio 1 — Evaluar con el término constante. Para $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $p(t) = t^2 - 2t + 1$, calcula $p(A)$ y verifica su acción sobre $(1, -1)$.

Ejercicio 2 — Reducir una potencia. Para la matriz del ejercicio 1, calcula A^5 como combinación de A e I y escribe sus entradas.

Ejercicio 3 — Una potencia de una rotación. Para $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, encuentra su mínimo y calcula $R^{2026} + R^{2027}$.

Ejercicio 4 — Una transformación que se anula al repetirla. Sea $N(x, y) = (y, 0)$. Determina χ_N, m_N y el resto representativo de $p(N)$ para $p(t) = t^7 + 3t^2 - 5t + 4$.

Ejercicio 5 — Una raíz repetida en el mínimo. Para $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, encuentra m_B y una fórmula para B^k, $k \geq 0$.

Ejercicio 6 — Repeticiones diagonales. Para $A = \operatorname{diag}(2, 2, 5)$, determina el característico, el mínimo y la dimensión de $\mathbb{R}[A]$.

Ejercicio 7 — Constantes y dimensión cero. Encuentra los mínimos del operador cero y de la identidad en dimensión positiva. Repite la pregunta en el espacio cero.

Ejercicio 8 — Reconocer una evaluación mal escrita. Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alguien interpreta $p(t) = t^2 + 2$ como $A^2 + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Corrige la cuenta y explica qué acción tiene el término constante.

Ejercicio 9 — Conservar una identidad al cambiar de base. Sea $A = \operatorname{diag}(2, 3)$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula $B = P^{-1}AP$ y comprueba que $(B - 2I)(B - 3I) = 0$. ¿Por qué $m_A = m_B$?

Ejercicio 10 — La recurrencia de Fibonacci. Para $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, determina m_F y calcula F^{10} mediante la recurrencia del capítulo.

Ejercicio 11 — Raíces que no bastan. Da una matriz A y un polinomio p que se anule en todos los valores propios de A pero satisfaga $p(A) \neq 0$. Explica qué inferencia falla.

Ejercicio 12 — Un característico, dos mínimos. Construye dos matrices reales de orden dos con el mismo característico y distintos mínimos.

Ejercicio 13 — Un mínimo, dos característicos. Construye dos matrices reales del mismo orden con el mismo mínimo y distintos característicos.

Ejercicio 14 — Dos invariantes que aún no clasifican. En dimensión cuatro, construye N_1, N_2 con $\chi_{N_1} = \chi_{N_2}$ y $m_{N_1} = m_{N_2}$ que no sean semejantes. Puedes imponer $N_i^2 = 0$ y usar el rango.

Ejercicio 15 — Una entrada insuficiente. Para $A = \operatorname{diag}(2, 3)$ y $v = e_1$, encuentra un polinomio mónico de menor grado que satisfaga $p(A)v = 0$. Compáralo con m_A.

Ejercicio 16 — Una trayectoria que sí determina el mínimo. Sea $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Usa la trayectoria de e_1 para encontrar m_C, χ_C y C^{2026}.

Ejercicio 17 — Derivar polinomios reales. Para la derivación formal D en $P_3(\mathbb{R})$, calcula m_D, χ_D y la dimensión de $\mathbb{R}[D]$.

Ejercicio 18 — Derivar en característica dos. Repite el ejercicio 17 en $P_3(\mathbb{F}_2)$. ¿Cambian el mínimo y el característico?

Ejercicio 19 — El mínimo y la transposición. Demuestra que A y A^{T} tienen el mismo polinomio mínimo sobre cualquier cuerpo.

Ejercicio 20 — La primera dependencia de matrices. Explica por qué el primer grado d para el que A^d pertenece a $\operatorname{span}(I, A, \ldots, A^{d-1})$ entrega el mínimo. ¿Puedes sustituir esas matrices por $v, Av, \ldots$ para cualquier $v \neq 0$?

Ejercicio 21 — El obstáculo de los coeficientes matriciales. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Para matrices de polinomios define $E_A(\sum_j C_j t^j) = \sum_j C_j A^j$. Compara $E_A((tI)B)$ con $E_A(tI)E_A(B)$ y explica la cautela en la prueba de Cayley–Hamilton.

Ejercicio 22 — La prueba de orden dos. Para $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, escribe $\operatorname{adj}(tI - A)$, identifica C_0, C_1 y reconstruye la cancelación de 15.5.

Ejercicio 23 — Una inversa de grado uno. Para $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, calcula su inversa como polinomio en A y verifícala sin eliminación.

Ejercicio 24 — Una inversa que depende del cuerpo. Para la rotación R del ejercicio 3, calcula $(I + R)^{-1}$ sobre $\mathbb{R}$ mediante Bézout. Decide si la matriz reducida $I + R$ es invertible sobre $\mathbb{F}_2$.

Ejercicio 25 — Desplazar antes de invertir. Sea $a \in \mathbb{F}$ y escribe $m_T(t) = (t-a)q(t)+m_T(a)$. Si $m_T(a) \neq 0$, encuentra $(T - aI)^{-1}$. Explica qué pasa si $m_T(a) = 0$.

Ejercicio 26 — Bézout sin factorizar raíces. Para $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, encuentra $(F + I)^{-1}$ mediante una identidad entre $t + 1$ y $t^2 - t - 1$.

Ejercicio 27 — Un factor común impide invertir. Para $A = \operatorname{diag}(2, 3)$ y $p = t^2 - 4$, decide si $p(A)$ es invertible. Exhibe el vector que detecta el problema y contrasta con el criterio de Bézout.

Ejercicio 28 — Una serie geométrica finita. Supón $N^r = 0$ con $r \geq 1$. Demuestra que $I - N$ es invertible y da una inversa que valga sobre cualquier cuerpo, incluso en dimensión infinita.

Ejercicio 29 — Una potencia que borra información. Sea $N \neq 0$ con $N^2 = 0$ y $U = I + N$. Calcula U^k para $k \geq 1$ y determina su mínimo según que el escalar $k \cdot 1_{\mathbb{F}}$ sea cero o no.

Ejercicio 30 — Polinomio formal y función. En $\mathbb{F}_q$, con q primo, el polinomio $p(t) = t^q - t$ vale cero en cada escalar del cuerpo. ¿Se sigue que $p(A) = 0$ para toda matriz cuadrada sobre ese cuerpo?

Ejercicio 31 — Ampliar un cuerpo sin cambiar el mínimo. Sea $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}$ una extensión de cuerpos y A una matriz con entradas en $\mathbb{F}$. Demuestra que su mínimo calculado sobre $\mathbb{K}$ es el mismo polinomio que sobre $\mathbb{F}$. Puedes usar eliminación.

Ejercicio 32 — Mismo mínimo, distinto espectro. Usa la rotación de un cuarto de vuelta para mostrar que una ampliación de cuerpo puede cambiar el espectro aunque conserve el mínimo.

Ejercicio 33 — El criterio de raíces para una inversa. Sobre un espacio complejo de dimensión finita positiva, demuestra que $p(T)$ es invertible si y sólo si $p(\lambda) \neq 0$ para todo valor propio λ de T. Explicita el uso del TFA.

Ejercicio 34 — Conmutar no obliga a ser un polinomio. Demuestra que todo $p(T)$ conmuta con T. Da un ejemplo en que un operador S conmute con T pero no sea un polinomio de T.

Ejercicio 35 — Componer polinomios. Prueba que $p(q(T)) = (p \circ q)(T)$. Si m_T divide a $h(q(t))$, ¿qué puedes afirmar sobre el mínimo de $q(T)$? Aplica la idea a $R^2 = -I$.

Ejercicio 36 — Sumar dos operadores que se anulan al repetirlos. Supón $S^r = 0$, $T^s = 0$ y $ST = TS$, con $r, s \geq 1$. Prueba $(S + T)^{r+s-1} = 0$. Muestra que la conmutación no puede suprimirse.

Ejercicio 37 — Evaluar en un operador de rango uno. Sean $n \geq 2$, $u, v \in \mathbb{F}^n$ no nulos y $T(x) = (v^{\mathsf{T}}x)u$. Con $c = v^{\mathsf{T}}u$, determina m_T y una fórmula para $p(T)$ en los casos $c \neq 0$ y $c = 0$.

Ejercicio 38 — Certificar una pareja imposible de anuladores. ¿Puede un operador en dimensión positiva satisfacer simultáneamente $f(T) = 0$ y $g(T) = 0$ si f, g son coprimos? Si $f(T)v = g(T)v = 0$, ¿qué puede decirse de v?

Ejercicio 39 — Los valores propios de una evaluación. Para T complejo de dimensión finita positiva, demuestra $\operatorname{spec}(p(T)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \operatorname{spec}(T)\}$. Trata el caso constante y explica por qué la igualdad puede fallar sobre $\mathbb{R}$.

Ejercicio 40 — Un parámetro cambia la relación mínima. Para $A_s = \begin{pmatrix} 2 & s & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix}$ y $s \in \mathbb{R}$, determina m_{A_s} en todos los casos. Para $s \neq 0$, encuentra una fórmula polinómica para A_s^{-1} que funcione en todos esos casos, aunque su grado no sea siempre el menor posible.

15.8. Soluciones

Solución 1. Como $A^2 = 6A - 8I$, se obtiene $p(A) = 4A - 7I = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. Su producto por $(1, -1)$ es $(1, -1)$. C14 da $A(1, -1) = 2(1, -1)$, y $p(2) = 1$, de modo que $p(A)(1, -1) = p(2)(1, -1)$. El término constante de p aporta I, no una matriz cuyas cuatro entradas sean uno.

Solución 2. La identidad $A^2 = 6A - 8I$ da sucesivamente $A^3 = 28A - 48I$, $A^4 = 120A - 224I$ y $A^5 = 496A - 960I$. Por tanto, $A^5 = \begin{pmatrix} 528 & 496 \\ 496 & 528 \end{pmatrix}$. En cada paso se multiplica por A y se vuelve a reducir la potencia cuadrática; no se supone que una regla observada en dos exponentes continúe sin justificación.

Solución 3. La igualdad $R^2 = -I$ muestra que $t^2 + 1$ anula a R. Como R no es escalar, ningún mónico lineal lo anula; luego $m_R = t^2 + 1$. Los exponentes son congruentes con dos y tres módulo cuatro, respectivamente, así que la suma es $-I - R = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. La reducción procede de la identidad matricial $R^4 = I$.

Solución 4. La matriz es $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; su característico es t^2. Se tiene $N \neq 0$ y $N^2 = 0$, de modo que el mínimo es t^2: el único candidato lineal compatible con la raíz cero sería t, que no anula a N. Todas las potencias de exponente al menos dos desaparecen y $p(N) = 4I - 5N$. El resto es $4 - 5t$, único entre los de grado menor que dos.

Solución 5. Escribimos $B = 3I + N$ con $N \neq 0$ y $N^2 = 0$. El mínimo es $(t - 3)^2$, pues ese polinomio anula y uno lineal exigiría que B fuese escalar. Para $k \geq 1$, la expansión de potencias de los factores conmutantes deja $B^k = 3^k I + k3^{k-1}N$, ya que todos los términos con N^j, $j \geq 2$, son cero. Para $k = 0$, $B^0 = I$. La fórmula puede verificarse por inducción: el coeficiente de N en el paso siguiente es $3^k + k3^k = (k + 1)3^k$.

Solución 6. La triangularidad da $\chi_A = (t - 2)^2(t - 5)$. La evaluación diagonal de $(t - 2)(t - 5)$ es cero, y todo anulador debe tener dos y cinco como raíces. Por el teorema del factor, ambos factores distintos lo dividen conjuntamente; por tanto, $m_A = (t - 2)(t - 5)$. Su grado es dos y $\mathbb{R}[A]$ tiene base I, A, aunque las matrices sean de orden tres.

Solución 7. En dimensión positiva, el operador cero está anulado por t y ningún constante no nulo lo anula, así que su mínimo es t. Para la identidad, el mismo argumento con $t - 1$ da $m_I = t - 1$. En el espacio cero, ambos operadores coinciden y $I_V = 0$; el polinomio mónico de menor grado que los anula es uno. El grado cero corresponde a una diferencia de hipótesis, no a una excepción a la divisibilidad.

Solución 8. La evaluación correcta es $A^2 + 2I = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. El polinomio constante dos debe multiplicar cada entrada vectorial por dos; eso lo hace $2I$. La matriz propuesta enviaría (x, y) a $(2x + 2y, 2x + 2y)$, una transformación diferente. Por ejemplo, aplicada a e_1 produce $(2, 2)$ en vez de $(2, 0)$.

Solución 9. Se obtiene $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Los factores son $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; su producto es cero. En general, $p(B) = P^{-1}p(A)P$, de modo que p anula a una matriz si y sólo si anula a la otra. La colección de anuladores y su mínimo mónico coinciden. Aquí es $(t - 2)(t - 3)$, pues las dos raíces deben aparecer.

Solución 10. Se verifica $F^2 = F + I$ y F no es escalar, por lo que $m_F = t^2 - t - 1$. La sucesión definida en el texto tiene $f_9 = 34$ y $f_{10} = 55$, obtenidos sumando términos consecutivos desde cero y uno. La fórmula demostrada da $F^{10} = 55F + 34I = \begin{pmatrix} 89 & 55 \\ 55 & 34 \end{pmatrix}$. La relación de grado dos basta aunque el exponente sea diez.

Solución 11. Sirven $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $p = t - 3$. El único valor propio es tres y $p(3) = 0$, mientras $p(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$. La fórmula $p(A)v = p(\lambda)v$ sólo controla los vectores propios. Aquí pertenecen a la recta generada por e_1 y no forman una base del plano; la imagen de e_2 sigue siendo no nula.

Solución 12. Tomamos $A = 3I_2$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Ambas tienen característico $(t-3)^2$. El mínimo de A es $t-3$, porque $A - 3I = 0$. Para B, esa evaluación es no nula y su cuadrado sí es cero; el mínimo es $(t-3)^2$. La multiplicidad en el característico no fija por sí sola el primer grado anulador.

Solución 13. En orden tres sirven $A = \operatorname{diag}(2,2,3)$ y $B = \operatorname{diag}(2,3,3)$. Sus mínimos son $(t-2)(t-3)$: el producto anula cada entrada diagonal y las dos raíces son necesarias. Sus característicos son $(t-2)^2(t-3)$ y $(t-2)(t-3)^2$, que son diferentes. El mínimo registra qué factores hacen falta para anular, sin recuperar siempre el conteo completo de sus multiplicidades en el característico.

Solución 14. Definimos $N_1(e_2) = e_1$ y cero sobre los otros vectores de la base usual. Definimos $N_2(e_2) = e_1$, $N_2(e_4) = e_3$ y cero sobre e_1, e_3. Sus matrices son triangulares con diagonal cero; ambas tienen característico t^4. Son no nulas y sus cuadrados son cero, así que sus mínimos son t^2. Sus rangos son uno y dos. La semejanza conserva el rango, al multiplicar por matrices invertibles a ambos lados; luego no son semejantes. No se necesita una clasificación de formas canónicas para distinguirlas.

Solución 15. Como $Av = 2v$, el polinomio $t-2$ anula a v. Ningún constante no nulo puede hacerlo porque $v \neq 0$, de modo que es el mínimo para esa entrada. En cambio, $m_A = (t-2)(t-3)$ y $(A-2I)e_2 = e_2 \neq 0$. La trayectoria de e_1 sólo genera su propia recta y no satisface la hipótesis de base de 15.9.

Solución 16. Se tiene $Ce_1 = e_2$, $C^2e_1 = e_3$ y $C^3e_1 = 2e_1$. Los tres primeros vectores son una base, así que 15.9 convierte la última igualdad en $C^3 = 2I$. Ningún anulador de grado menor que tres puede anular a e_1, pues daría una relación entre esa base. Por tanto, $m_C = t^3 - 2$, y 15.9 da también $\chi_C = t^3 - 2$. Como $2026 = 3 \cdot 675 + 1$, se obtiene $C^{2026} = 2^{675}C$. No fue necesario calcular las raíces cúbicas de dos.

Solución 17. En la base $1, t, t^2, t^3$, D es triangular con diagonal cero, así que $\chi_D = t^4$. Además, $D^4 = 0$ y $D^3(t^3) = 6 \neq 0$. Como m_D divide a t^4, sólo puede ser t^r con $0 \leq r \leq 4$; la no anulación del cubo obliga a $r = 4$. Así, $m_D = t^4$ y $\mathbb{R}[D]$ tiene dimensión cuatro, con base I, D, D^2, D^3. La derivación usada es formal; no presupone cálculo de funciones.

Solución 18. La matriz sigue siendo triangular con diagonal cero, por lo que el característico sigue siendo t^4. En este cuerpo, $D(1) = 0$, $D(t) = 1$, $D(t^2) = 0$ y $D(t^3) = t^2$, pues dos es cero y tres es uno. De esas cuatro imágenes se deduce $D^2 = 0$, mientras $D \neq 0$. Luego $m_D = t^2$ y $\mathbb{F}_2[D]$ tiene dimensión dos. La cuenta $D^3(t^3) = 6$ ya no permite la conclusión real porque seis es cero.

Solución 19. Para cada j, $(A^j)^{\mathsf{T}} = (A^{\mathsf{T}})^j$; aunque la transposición invierta el orden de un producto, aquí todos los factores son A. Por linealidad, $p(A)^{\mathsf{T}} = p(A^{\mathsf{T}})$. Así, $p(A) = 0$ implica $p(A^{\mathsf{T}}) = 0$, y trasponer otra vez da la implicación recíproca. Ambas matrices tienen los mismos anuladores y, por unicidad del mínimo mónico, el mismo mínimo.

Solución 20. La relación entrega un anulador mónico de grado d. Si existiera otro de grado menor, despejar su término principal expresaría una potencia anterior mediante sus precedentes, contradiciendo la elección del primer grado. Los coeficientes de la relación son únicos porque las potencias anteriores son independientes. Para una entrada arbitraria el procedimiento sólo encuentra una relación local: en $A = \operatorname{diag}(2,3)$ y $v = e_1$ aparece ya $Av = 2v$, aunque $A \neq 2I$. Se necesita una trayectoria que genere el espacio para usar 15.9.

Solución 21. En la expresión polinómica $(tI)B = Bt$, el coeficiente de t es B, de modo que la evaluación definida da $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. En cambio, $E_A(tI)E_A(B) = AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Por tanto, esa evaluación no es multiplicativa para coeficientes matriciales arbitrarios. El hecho de que t conmute formalmente con B no obliga a A a conmutar con B. La prueba de 15.5 compara coeficientes y cancela sumas en un orden fijo; no invoca una multiplicatividad falsa.

Solución 22. La adjugata es $\begin{pmatrix} t-d & b \\ c & t-a \end{pmatrix} = tI + C_0$, donde $C_0 = \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix} = A - (a+d)I$ y $C_1 = I$. Los coeficientes de $(tI - A)(tI + C_0) = \chi_A(t)I$ dan $C_0 - A = -(a+d)I$ y $-AC_0 = (ad-bc)I$. Sustituir la primera en la segunda produce $-A^2 + (a+d)A = (ad-bc)I$, o $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = 0$. Todas las identidades valen también en característica dos, interpretando los signos en el cuerpo.

Solución 23. El mínimo es $(t-2)(t-3) = t^2 - 5t + 6$, y por tanto $A^2 - 5A + 6I = 0$. Reordenar da $A(5I - A) = 6I$. Los factores conmutan, por lo que $A^{-1} = (5I - A)/6 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/6 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$. El producto en ambos órdenes es I por la misma identidad anuladora. No se dividió por una matriz desconocida.

Solución 24. La identidad $\frac{1}{2}(1-t)(1+t) + \frac{1}{2}(t^2+1) = 1$ evaluada en R da $(I+R)^{-1} = (I-R)/2$. En $\mathbb{F}_2$, el mínimo de la rotación reducida es $t^2 + 1 = (t+1)^2$: la matriz no es escalar y cumple esa relación. Entonces $\gcd(t+1, m_R) = t + 1 \neq 1$, así que $I + R$ es singular. Directamente, $I + R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y anula a $(1, 1)$.

Solución 25. Evaluar la división da $0 = (T - aI)q(T) + m_T(a)I$. Por consiguiente, $(T - aI)^{-1} = -q(T)/m_T(a)$, con inversa en ambos lados por conmutación. Si $m_T(a) = 0$, 15.4 dice que a es valor propio, de modo que $T - aI$ tiene núcleo no trivial y no es invertible. La evaluación del resto constante decide si es legítimo dividir por él.

Solución 26. La cuenta $(2 - t)(t + 1) + (t^2 - t - 1) = 1$ es una identidad polinómica. Al evaluarla y usar $m_F(F) = 0$, resulta $(2I - F)(F + I) = I$. Ambos factores conmutan, así que $(F + I)^{-1} = 2I - F = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. No intervienen las raíces irracionales de $t^2 - t - 1$. La identidad, cuyos coeficientes son enteros, se conserva al reducirlos en cualquier cuerpo.

Solución 27. Se tiene $p(A) = \operatorname{diag}(0, 5)$, que anula a $e_1 \neq 0$. Por tanto, es singular. El mínimo es $(t - 2)(t - 3)$ y $\gcd(t^2 - 4, m_A) = t - 2$, de grado positivo. El factor común corresponde aquí al valor propio dos, aunque el criterio de 15.8 no exige que todo factor común tenga una raíz en el cuerpo.

Solución 28. La identidad polinómica $(1 - t)(1 + t + \cdots + t^{r-1}) = 1 - t^r$ se verifica cancelando los términos consecutivos. Evaluarla da $(I - N)(I + N + \cdots + N^{r-1}) = I$. Las potencias de N conmutan y el producto en el orden contrario es el mismo; luego la suma es la inversa. La prueba sólo usa una relación finita, así que no necesita dimensión finita ni convergencia de una serie.

Solución 29. Por inducción, $(I + N)^k = I + kN$: al multiplicar $I + kN$ por $I + N$ queda $I + (k + 1)N$, porque $N^2 = 0$. Si $k \cdot 1_{\mathbb{F}} = 0$, entonces $U^k = I$ y su mínimo es $t - 1$. Si ese escalar no es cero, $kN \neq 0$, su cuadrado es cero y U^k no es escalar: si $kN = cI$, al cuadrar se obtendría $c^2 I = 0$, por lo que $c = 0$, contradicción. Por tanto, el mínimo es $(t - 1)^2$. El exponente puede reducir la relación mínima en característica positiva.

Solución 30. No. Para $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, se tiene $N^2 = 0$ y $N \neq 0$. Como $q \geq 2$, $N^q = 0$ y $p(N) = -N \neq 0$, también cuando $q = 2$. La función escalar es cero, pero el polinomio formal no es cero ni es múltiplo de $m_N = t^2$, porque su coeficiente lineal es menos uno. La evaluación matricial depende del polinomio formal.

Solución 31. Para cada d, una relación mónica $A^d + \sum_{j<d} a_j A^j = 0$ es un sistema lineal en los a_j, con coeficientes y término independiente en $\mathbb{F}$. La reducción por filas puede hacerse dentro de $\mathbb{F}$. Si el sistema fuese incompatible allí, contendría una fila $0 = 1$, que seguiría siendo incompatible en $\mathbb{K}$. Si es compatible sobre $\mathbb{K}$, es compatible sobre $\mathbb{F}$: en su forma reducida basta fijar las variables libres en cero y resolver las pivote. Por tanto, el primer grado compatible coincide en ambos cuerpos. El mínimo sobre $\mathbb{F}$ es un anulador mónico de ese grado también sobre $\mathbb{K}$; la unicidad prueba la igualdad de polinomios. Reducir una matriz módulo un primo no es una extensión de cuerpos y no está cubierto por el argumento.

Solución 32. La matriz real R tiene mínimo $t^2 + 1$, porque $R^2 = -I$ y no es escalar. Sobre $\mathbb{R}$ el polinomio no tiene raíces y el espectro es vacío. Al considerar sus entradas dentro de $\mathbb{C}$, el mínimo sigue siendo $t^2 + 1$ por el ejercicio 31, pero sus raíces son i y $-i$. Por 15.4 ése es el espectro complejo. Se ha cambiado el conjunto de escalares permitidos, no los coeficientes del mínimo.

Solución 33. El TFA admitido en T1 §26.15 factoriza completamente m_T en factores lineales complejos. Sus raíces son los valores propios por 15.4. Si p comparte alguna raíz, ambos polinomios tienen un factor lineal común y no son coprimos. Recíprocamente, un máximo común divisor de grado positivo tiene una raíz compleja por el TFA, que es raíz de ambos. Así, no compartir raíces

equivale a $\gcd(p, m_T) = 1$; 15.8 concluye. Sobre $\mathbb{R}$ la ausencia de raíces reales comunes no basta: para R y $p = t^2 + 1$ no hay valores propios reales que comprobar, pero $p(R) = 0$.

Solución 34. Cada potencia T^j conmuta con T, así que la distributividad prueba la afirmación para su combinación lineal. Para el recíproco, tomamos $T = I$ en $\mathbb{R}^2$ y $S = \operatorname{diag}(1, 2)$. Cualquier operador conmuta con I, pero $p(I) = p(1)I$ es siempre escalar, y S no lo es. La colección de operadores que conmutan con T puede ser mayor que $\mathbb{F}[T]$.

Solución 35. Si $p(t) = \sum_j a_j t^j$, entonces $p(q(T)) = \sum_j a_j (q(T))^j$. Por la regla del producto, $(q(T))^j = (q(t)^j)(T)$, y sumar da $(\sum_j a_j q(t)^j)(T) = (p \circ q)(T)$. Si $m_T \mid h(q(t))$, esa evaluación es cero, por lo que h anula al operador $q(T)$ y $m_{q(T)} \mid h$. Para $R^2 = -I$, tomamos $q = t^2$, $h = t + 1$; entonces $h(q) = t^2 + 1 = m_R$. El mínimo de R^2 es $t + 1$ en dimensión positiva. No se obtiene reemplazando sin más la variable de m_R por t^2.

Solución 36. La conmutación permite la expansión binomial, demostrable por inducción con distributividad: cada término de grado $r + s - 1$ es un múltiplo escalar de $S^i T^{r+s-1-i}$. Si $i \geq r$, se anula el primer factor; si $i < r$, el otro exponente es al menos s y se anula el segundo. La suma completa es cero, cualquiera sea la característica. Sin conmutación, en $\mathbb{R}^2$ sirven $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: ambos cuadrados son cero, pero $(S + T)^2 = I$. La suma es invertible y ninguna potencia positiva es cero.

Solución 37. Componer da $T^2 = cT$. Si $c \neq 0$, el núcleo de v^{T} tiene dimensión $n - 1 \geq 1$ y aporta el valor propio cero; además $T(u) = cu$ aporta c. Ambos factores distintos deben aparecer, mientras $t(t - c)$ ya anula. Luego $m_T = t(t - c)$. El resto de p es $\alpha t + \beta$, con $\beta = p(0)$ y $\alpha = (p(c) - p(0))/c$, por evaluación en los dos nodos. Si $c = 0$, $T^2 = 0$ y $T \neq 0$ porque el funcional no nulo toma algún valor no cero. Así, $m_T = t^2$. Si $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots$, la fórmula es $p(T) = a_0 I + a_1 T$. No se puede obtener a_1 usando sólo $p(0)$.

Solución 38. Por Bézout, $uf + wg = 1$ para ciertos polinomios u, w. Evaluar en T daría $I = u(T)f(T) + w(T)g(T) = 0$, contradicción en un espacio no nulo. Si la anulación se conoce sólo sobre v, aplicar la misma identidad a esa entrada produce $v = u(T)f(T)v + w(T)g(T)v = 0$. Por tanto, los núcleos de $f(T)$ y $g(T)$ se cortan sólo en cero. El razonamiento no afirma todavía una descomposición del espacio.

Solución 39. Si $Tv = \lambda v$ con $v \neq 0$, entonces $p(T)v = p(\lambda)v$, lo que da una inclusión. Para la otra, sea μ un valor propio de $p(T)$. Si $p = c$ es constante, $p(T) = cI$ tiene espectro $\{c\}$; T tiene al menos un valor propio por C14 y el TFA admitido, por lo que también la imagen de su espectro es $\{c\}$. Si p no es constante, el TFA factoriza $p(t) - \mu = a \prod_j (t - \alpha_j)$ con $a \neq 0$. Si ninguno de los α_j fuera valor propio de T, todos los factores $T - \alpha_j I$ serían invertibles, y también su producto $p(T) - \mu I$, contradiciendo la elección de μ. Algún α_j es valor propio y $p(\alpha_j) = \mu$. Sobre $\mathbb{R}$, la rotación R no tiene valores propios, pero $R^2 = -I$ tiene el valor menos uno; para $p = t^2$ el segundo conjunto es vacío y el primero no.

Solución 40. El característico de C14 es $(t - 2)^2(t - s)$. Si $s \notin \{0, 2\}$, el mínimo debe contener los factores de dos y s. El candidato $(t - 2)(t - s)$ deja al evaluarse una entrada $(1, 2)$ igual a $s(2 - s) \neq 0$; por divisibilidad del característico, el mínimo es $(t - 2)^2(t - s)$. Si $s = 0$, la matriz es $\operatorname{diag}(2, 2, 0)$ y el mínimo es $t(t - 2)$. Si $s = 2$, $A_2 = 2I + N$ con $N \neq 0$, $N^2 = 0$, y el mínimo es $(t - 2)^2$. Expandir el característico da $t^3 - (s + 4)t^2 + (4s + 4)t - 4s$. Para $s \neq 0$, Cayley–Hamilton entrega $A_s[A_s^2 - (s + 4)A_s + (4s + 4)I] = 4sI$, por lo que $A_s^{-1} = [A_s^2 - (s + 4)A_s + (4s + 4)I]/(4s)$. Los factores conmutan y la verificación vale en ambos órdenes. En $s = 2$ puede reducirse a grado uno usando el mínimo; en $s = 0$ la matriz es singular y la división por $4s$ no es posible.

Lecturas y referencias

Hoffman–Kunze, *Linear Algebra*, §6.3, desarrolla los polinomios anuladores y el mínimo. Friedberg, Insel y Spence, *Linear Algebra*, §5.4 y §7.3, ofrece una prueba de Cayley–Hamilton por trayectorias generadoras y el tratamiento del mínimo mediante división. Axler, *Linear Algebra Done Right*, §5B, relaciona el mínimo con dependencias entre potencias y con sus raíces. Johnston, *Advanced Linear and Matrix Algebra*, §2.1, muestra aplicaciones a potencias e inversas; su prueba mediante Schur

usa herramientas posteriores a las disponibles aquí. La demostración de este capítulo compara coeficientes en la identidad de la adjugata y conserva su validez sobre cualquier cuerpo.

Capítulo 16

Diagonalización

La matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ envía (x, y) a $(2x + y, 3y)$. En las coordenadas usuales, la segunda componente interviene en las dos salidas. Sin embargo, $A(1, 0) = 2(1, 0)$ y $A(1, 1) = 3(1, 1)$, de modo que una entrada escrita como $a(1, 0) + b(1, 1)$ se transforma en $2a(1, 0) + 3b(1, 1)$. En esa base la mezcla de coordenadas desaparece. Las dos direcciones no forman un ángulo recto, y esa circunstancia no impide usarlas como ejes de coordenadas.

C14 permitió encontrar direcciones propias y comparar sus dimensiones; C15 mostró que las potencias de un operador obedecen relaciones polinómicas. Esas dos descripciones se encuentran en el problema de diagonalizar: decidir si hay suficientes direcciones propias para representar todas las entradas y, cuando las hay, construir una base con ellas. Una raíz repetida en el característico puede corresponder a un espacio propio amplio, como sucede con $3I$, o a una sola recta, como sucede con $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. La repetición por sí sola deja abierta la pregunta.

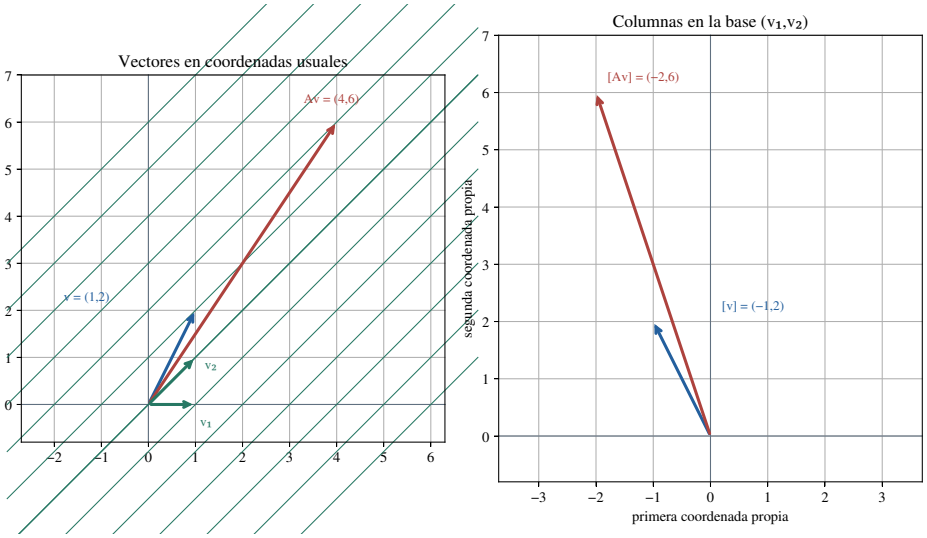


Figura 16.1. La entrada $v = (1, 2)$ tiene coordenadas $(-1, 2)$ en la base propia, y $Av = (4, 6)$ tiene coordenadas $(-2, 6)$. El panel de coordenadas representa columnas relativas a esa base; sus ángulos en el papel no son los ángulos entre los vectores originales.

Trabajaremos en un espacio V de dimensión finita sobre un cuerpo conmutativo $\mathbb{F}$. Todos los valores propios y factores lineales que aparezcan en un criterio se entienden en ese cuerpo. Usamos la semejanza de C12, la independencia de espacios propios y las multiplicidades de C14, y la evaluación y el mínimo de C15. El espacio cero se considera diagonalizable mediante su base vacía; los argumentos que requieren elegir un valor propio se formularán en dimensión positiva.

16.1. Una base en la que cada vector se transforma por separado

Definición 16.1. Un operador T es **diagonalizable sobre** $\mathbb{F}$ si existe una base de V en la que su matriz es diagonal. Una matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ es diagonalizable sobre $\mathbb{F}$ si existen P invertible y D diagonal, ambas sobre $\mathbb{F}$, tales que $P^{-1}AP = D$.

Las columnas de una matriz de representación son las coordenadas de las imágenes de los vectores de la base. Pedir que la columna j sólo tenga una entrada en la posición j equivale, por tanto, a

pedir que esa imagen sea un múltiplo del vector básico correspondiente. Esta observación traduce la definición en una condición que podemos construir resolviendo núcleos.

Teorema 16.1 (criterio de base propia). Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ todos los valores propios distintos de T en $\mathbb{F}$. Son equivalentes: T es diagonalizable; V tiene una base de vectores propios; $V = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(T)$; y $\sum_{i=1}^{r} \dim E_{\lambda_i}(T) = \dim V$.

Para una matriz, si las columnas de P son una base propia $v_1, \dots, v_n$, en ese orden, entonces

$$AP = PD, \qquad D = \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n),$$

donde $Av_j = \mu_j v_j$; los μ_j pueden repetirse.

Demostración. Una matriz diagonal en la base $v_1, \dots, v_n$ significa $Tv_j = \mu_j v_j$ para cada j. Esto prueba la equivalencia entre diagonalización y base propia, y da la identidad matricial columna a columna. Si la base es propia, cada entrada se escribe como suma de componentes en los espacios propios; su suma es directa por C14, teorema 14.4. Una suma directa igual a V tiene dimensión igual a la suma de las dimensiones de sus sumandos, por C11. Recíprocamente, si esa suma de dimensiones es n, concatenar bases de los espacios propios produce una lista independiente por 14.4, con n elementos; es una base de V. En dimensión cero, la lista y la suma son vacías y cumplen todas las condiciones. □

Para la matriz inicial, las columnas $v_1 = (1, 0)$ y $v_2 = (1, 1)$ dan

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Al usar $A = PDP^{-1}$ sobre una entrada, P^{-1} obtiene sus coordenadas propias, D multiplica cada una por el valor correspondiente y P reconstruye la salida en las coordenadas usuales. Si se permutan las columnas de P, deben permutarse en el mismo orden las entradas de D. Cambiar arbitrariamente una de las dos listas destruye $AP = PD$.

Escoger un vector por valor propio sólo alcanza cuando todos los espacios propios son rectas y hay tantos valores distintos como dimensiones. Para $A = \operatorname{diag}(2, 2, 3)$ hacen falta dos vectores independientes de E_2 y uno de E_3. La cantidad pertinente es la suma de sus dimensiones, no el número de valores propios ni el número total de vectores que podemos escribir dentro de ellos.

16.2. Contar las direcciones que faltan

El característico ofrece un primer control: si una matriz es semejante a $\operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$, entonces su característico es $\prod_j (t - \mu_j)$. Debe **escindirse** sobre $\mathbb{F}$, es decir, descomponerse completamente en factores lineales con raíces en ese cuerpo. Incluso cuando se escinde, aún hay que decidir cuántos vectores independientes aporta cada raíz.

Teorema 16.2 (criterio de multiplicidades). Un operador es diagonalizable sobre $\mathbb{F}$ si y sólo si su característico se escinde sobre $\mathbb{F}$ y, para cada valor propio, su multiplicidad geométrica es igual a su multiplicidad algebraica.

Demostración. Si hay una base propia, el característico se escinde como acabamos de ver. En una representación diagonal, el espacio propio de λ está formado por las columnas cuyas coordenadas sólo pueden ser no nulas en posiciones con entrada diagonal λ. Su dimensión es el número de esas posiciones, que también es la multiplicidad de λ en el característico. Semejanza conserva ambas multiplicidades por C14.

Recíprocamente, si $\chi_T = \prod_i (t - \lambda_i)^{a_i}$ y cada $g_i = \dim E_{\lambda_i}$ vale a_i, entonces $\sum_i g_i = \sum_i a_i = n$. El teorema 16.1 da una base propia. En dimensión cero, el producto es uno y todas las condiciones son vacías. □

El criterio deja una cuenta concreta: para cada raíz repetida se calcula $g_i = n - \operatorname{rg}(A - \lambda_i I)$; las raíces simples ya tienen dimensión propia uno por C14. Si el característico se escinde, el entero $n - \sum_i g_i$ mide cuántos vectores independientes faltan para completar una base propia. No se recuperan escogiendo más múltiplos de los generadores existentes.

Por ejemplo, las matrices

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

tienen característico $(t-2)^2(t-3)$. Para C, el espacio de dos es $\operatorname{span}(e_1, e_2)$ y el de tres es $\operatorname{span}(1,1,1)$. Esos tres generadores forman una base y las multiplicidades coinciden. Para B, los espacios son $\operatorname{span} e_1$ y $\operatorname{span} e_3$; suman sólo dos dimensiones. La entrada superior de la matriz puede tener efectos distintos: en C mezcla componentes asociadas a valores diferentes, mientras que en B actúa dentro de la parte de raíz repetida.

Sobre $\mathbb{R}$, la rotación $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ falla ya en la escisión de t^2+1. Sobre $\mathbb{C}$, tiene dos raíces distintas, i y $-i$, y los vectores $(1,-i)$ y $(1,i)$ forman una base propia. El operador definido por las mismas entradas se diagonaliza en el segundo cuerpo. En cambio, una matriz real con $\chi = (t-3)^2$ y espacio propio de dimensión uno seguirá teniendo ese defecto al considerarla compleja: resolver el mismo sistema no crea una segunda dirección independiente.

16.3. Lo que debe decir el polinomio mínimo

En una base propia, evaluar $p(T)$ equivale a evaluar p sobre cada entrada diagonal. Para anular el operador hay que anular cada valor propio; una sola aparición de cada factor basta, aunque ese valor ocupe muchas posiciones. Por eso $m_{3I} = t-3$ aun en un espacio de dimensión grande. La condición sobre el mínimo tendrá dos partes: que sus factores sean lineales en el cuerpo y que ninguno se repita.

Teorema 16.3 (criterio del mínimo). En dimensión finita positiva, T es diagonalizable sobre $\mathbb{F}$ si y sólo si

$$m_T(t) = \prod_{i=1}^{r} (t - \lambda_i)$$

para escalares $\lambda_i \in \mathbb{F}$ distintos. Equivalentemente, basta que exista un polinomio anulador que sea producto de factores lineales distintos. En dimensión cero se incluye el producto vacío uno.

Demostración. Si hay una base propia y $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ son sus valores distintos, $q(t) = \prod_i (t-\lambda_i)$ anula cada vector de la base por C15, proposición 15.2, y por tanto anula a T. Así, $m_T \mid q$. Cada λ_i debe ser raíz del mínimo por 15.4; al ser distintas, el producto q divide a m_T. Como son mónicos, ambos polinomios coinciden.

Para la recíproca, supongamos que $q(t) = \prod_i (t-\lambda_i)$, con factores distintos, anula a T. Para cada i definimos

$$\ell_i(t) = \prod_{j \neq i} \frac{t - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}.$$

Los denominadores son no nulos. Estos polinomios satisfacen $\ell_i(\lambda_j) = 1$ si $i = j$, y cero en otro caso. El polinomio $\sum_i \ell_i - 1$ tiene grado menor que r y se anula en los r escalares distintos; el teorema de la cota de raíces del tomo I obliga a que sea cero. Por otro lado, $(t-\lambda_i)\ell_i$ es un múltiplo escalar de q. Evaluar ambas identidades da

$$\sum_i \ell_i(T) = I, \qquad (T - \lambda_i I)\ell_i(T) = 0.$$

Para cada v, la primera igualdad escribe $v = \sum_i \ell_i(T)v$ y la segunda sitúa cada sumando en E_{λ_i}. Los espacios propios generan V y su suma es directa por C14, omitiendo los sumandos cero si algún λ_i no es valor propio. Concatenar sus bases produce una base propia por 16.1. Esto prueba a la vez la suficiencia del mínimo indicado y la del anulador más general. Cuando $r = 1$, el producto que define ℓ_1 es vacío e igual a uno, y el mismo argumento da $T = \lambda_1 I$. $\square$

La demostración sólo usa evaluación, raíces de polinomios y la independencia ya probada. No necesita una descomposición de factores con potencias, ni exige el teorema fundamental del álgebra: la escisión es una hipótesis que se comprueba en el cuerpo de trabajo. Sobre los complejos, que

el característico se escinda está garantizado por el TFA admitido de T1 §26.15, pero las raíces repetidas del mínimo pueden seguir impidiendo la diagonalización.

Los dos obstáculos no deben confundirse. La rotación real tiene mínimo t^2+1, sin factores irreducibles repetidos sobre $\mathbb{R}$, pero carece de factores lineales reales. La matriz $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ tiene mínimo $(t-3)^2$: se escinde y repite un factor. Decir solamente que «el mínimo no tiene repeticiones» deja sin controlar el primero de esos casos.

Un anulador puede repetir factores aunque el operador sea diagonalizable: $\chi_{3I_2} = (t-3)^2$ es un ejemplo. El criterio pide que el mínimo tenga factores lineales simples, o que encontremos algún anulador con esa propiedad. Si el anulador conocido los repite, todavía puede existir uno menor que permita decidir favorablemente.

16.4. Recuperar cada componente sin escoger sus coordenadas

En la prueba anterior, $\ell_i(T)v$ es la componente de v en el espacio propio de λ_i. Cuando conocemos la descomposición directa, esa componente está determinada por el vector y el espacio, aunque cambiemos la base elegida dentro de cada sumando. La interpolación entrega así operadores que recuperan componentes sin resolver de nuevo un sistema para cada entrada.

Definición 16.2. Un **proyector** es un operador E que satisface $E^2 = E$. Para un operador diagonalizable, llamaremos **proyector sobre E_{λ_i} según la descomposición propia** al que conserva la componente de ese sumando y anula todas las demás. No se presupone que sea una proyección ortogonal.

Proposición 16.4 (proyectores propios). Si T es diagonalizable y $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ son sus valores distintos, los operadores

$$E_i = \ell_i(T) = \prod_{j \neq i} \frac{T - \lambda_j I}{\lambda_i - \lambda_j}$$

son los proyectores de su descomposición propia. Satisfacen $\operatorname{im} E_i = E_{\lambda_i}$, $\ker E_i = \bigoplus_{j \neq i} E_{\lambda_j}$ y

$$E_i^2 = E_i, \qquad E_i E_j = 0 \ (i \neq j), \qquad \sum_i E_i = I, \qquad T = \sum_i \lambda_i E_i.$$

Estos operadores quedan determinados de manera única por conservar su componente y anular las otras.

Demostración. Para $w \in E_{\lambda_j}$, la evaluación sobre un vector propio da $E_i w = \ell_i(\lambda_j) w$: es w si $i = j$ y cero en otro caso. Cada vector de V tiene una descomposición única $v = \sum_j v_j$ con $v_j \in E_{\lambda_j}$; por linealidad, $E_i v = v_i$. De esa descripción proceden la imagen, el núcleo, la idempotencia y los productos cero. Sumar las componentes recupera v, y sumar $\lambda_i v_i$ recupera Tv, lo que prueba las dos últimas identidades. Cualquier otro operador con la acción prescrita coincide sobre cada sumando y, por tanto, sobre todo V. $\square$

Para $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$,

$$E_2 = 3I - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_3 = A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Una entrada (x, y) se descompone como $(x - y, 0) + (y, y)$. En particular, $(1, 2) = (-1, 0) + (2, 2)$; multiplicar esas dos componentes por dos y tres da $(4, 6)$, como en la apertura. El proyector E_2 envía el vector $(1, 1)$ a cero porque lo quita a lo largo de la otra dirección propia. No coincide con la proyección perpendicular sobre el eje horizontal, que enviaría ese vector a $(1, 0)$.

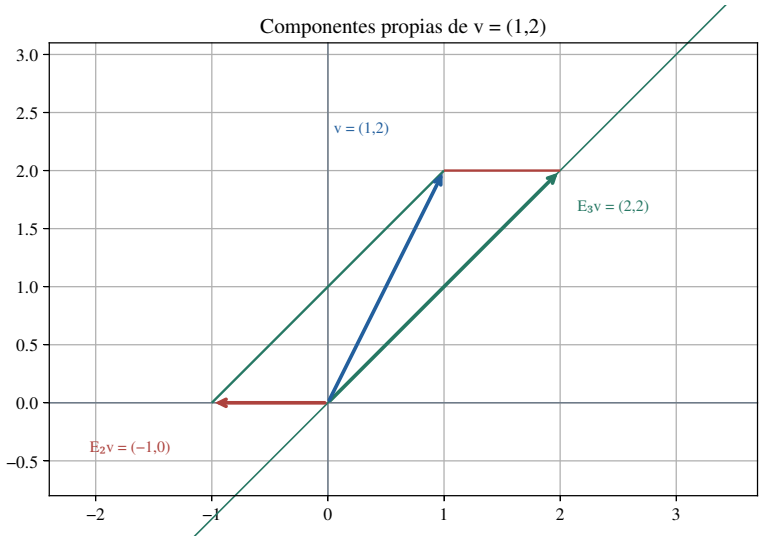


Figura 16.2. Las líneas auxiliares trasladan las componentes sin cambiar sus direcciones. La proyección sobre el eje horizontal se realiza paralelamente a la recta $y = x$; la fórmula $E_2(x, y) = (x - y, 0)$ expresa esa elección.

Proposición 16.5 (evaluar por componentes). Para T diagonalizable y cualquier $p \in \mathbb{F}[t]$,

$$p(T) = \sum_{i} p(\lambda_i) E_i.$$

En particular, $p(T)$ es diagonalizable en la misma base. Su espacio propio asociado a un escalar μ es

$$E_\mu(p(T)) = \bigoplus_{\{i : p(\lambda_i) = \mu\}} E_{\lambda_i}(T).$$

Si $V \neq \{0\}$, su mínimo es el producto de los factores $t - \mu$ para los valores distintos de la lista $p(\lambda_i)$. Si ninguno de esos valores es cero, $p(T)^{-1} = \sum_i p(\lambda_i)^{-1} E_i$.

Demostración. Sobre una componente v_i, $p(T)$ actúa multiplicando por $p(\lambda_i)$, según C15. Aplicar esa acción a $v = \sum_i v_i$ prueba la primera fórmula y que la misma base sigue siendo propia. La ecuación $p(T)v = \mu v$ se convierte en $\sum_i (p(\lambda_i) - \mu) v_i = 0$; la directitud obliga a que cada término sea cero. Sólo pueden persistir componentes con el valor indicado, y cualquiera de sus sumas satisface la ecuación. El criterio del mínimo de 16.3 da la afirmación siguiente, contando cada valor una sola vez. Cuando todos son no nulos, la fórmula propuesta para la inversa multiplica cada componente por el recíproco, y ambos productos son la identidad. □

Por ejemplo, para $T = \operatorname{diag}(2, -2, 3)$ y $p = t^2$, los dos primeros espacios propios se reúnen en el espacio propio de cuatro de T^2; el tercero queda asociado a nueve. La transformación evaluada conserva una base propia, pero puede perder la capacidad de distinguir las componentes originales. En dimensión positiva, $m_{T^2} = (t - 4)(t - 9)$ sobre $\mathbb{R}$, mientras $m_T = (t - 2)(t + 2)(t - 3)$.

16.5. Relaciones sencillas que fuerzan una base propia

La igualdad $E^2 = E$ ya dice que $t(t - 1)$ anula a un proyector. Cero y uno son distintos en cualquier cuerpo, así que 16.3 garantiza su diagonalización. También podemos construir su base sin polinomios de interpolación, a partir de una descomposición que explica su nombre.

Proposición 16.6 (descomposición de un proyector). Si $E^2 = E$, entonces $V = \operatorname{im} E \oplus \ker E$. El operador es la identidad en su imagen y cero en su núcleo; por consiguiente, es diagonalizable. Recíprocamente, un operador diagonalizable cuyos valores propios pertenecen a $\{0, 1\}$ es un proyector.

Demostración. Para cualquier v, escribimos $v = Ev + (v - Ev)$. El primer término pertenece a la imagen y $E(v - Ev) = Ev - E^2 v = 0$ sitúa el segundo en el núcleo. Si $w = Eu$ está en ambos subespacios, entonces $Ew = E^2 u = Eu = w$ y también $Ew = 0$, de modo que $w = 0$. La suma es directa. Una base de la imagen, seguida de una del núcleo, produce la diagonal con unos y ceros.

Para la recíproca, en una base propia cada entrada diagonal satisface $a^2 = a$, y por tanto toda la matriz satisface $E^2 = E$. □

Si $T^2 = I$ y la característica del cuerpo es distinta de dos, el anulador $(t-1)(t+1)$ tiene factores lineales distintos. El operador se diagonaliza con valores entre uno y menos uno, y sus proyectores son $(I+T)/2$ y $(I-T)/2$. En característica dos los dos factores se reúnen. La matriz $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sobre $\mathbb{F}_2$ cumple $U^2 = I$, pero tiene mínimo $(t-1)^2$ y no es diagonalizable. La hipótesis sobre la característica controla la separación de los factores.

Una repetición del característico, en cambio, puede ser compatible con todas las bases necesarias. Compare la familia $U_s = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1+s \end{pmatrix}$ sobre $\mathbb{R}$. Los vectores $(1,0)$ y $(1,1)$ constituyen una base propia para todo s: sus valores son uno y $1+s$, que coinciden cuando $s = 0$, justo cuando $U_0 = I$. La familia $V_s = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+s \end{pmatrix}$ se diagonaliza para $s \neq 0$, con vectores $(1,0)$ y $(1,s)$; en $s = 0$ pierde esa posibilidad y su espacio propio se reduce a una recta.

Dos valores propios se reúnen en s = 0

familia	$s \neq 0$	$s = 0$
$U_s = [[1,s],[0,1+s]]$	valores 1 y 1+s diagonalizable	$U_0 = I$ dim $E_1 = 2$ diagonalizable
$V_s = [[1,1],[0,1+s]]$	valores 1 y 1+s diagonalizable	$V_0 \neq I$ dim $E_1 = 1$ no diagonalizable

Figura 16.3. Se registran los regímenes exactos, sin sugerir una transición numérica aproximada. Que dos valores se reúnan no decide el resultado: hay que controlar también la acción de la matriz y las dimensiones de los espacios propios.

16.6. Escoger una base que sirva para dos operadores

Dos matrices pueden ser diagonalizables por separado sin admitir una misma base propia. Si logramos representarlas diagonalmente en la misma base, sus productos conmutan, porque las matrices diagonales multiplican las entradas posición a posición. La conmutación resulta así necesaria. Para probar que también es suficiente bajo la diagonalizabilidad individual, necesitamos saber cómo se comporta una base propia dentro de un subespacio que el operador preserva.

Lema 16.7 (componentes de un subespacio preservado). Sea T diagonalizable y sea $W \subseteq V$ un subespacio tal que $T(W) \subseteq W$. Entonces

$$W = \bigoplus_i (W \cap E_{\lambda_i}(T)).$$

En particular, W tiene una base formada por vectores propios de T.

Demostración. Si T preserva W, cada potencia lo preserva, incluida la identidad, y también cualquier combinación de ellas. Los proyectores $E_i = \ell_i(T)$ llevan por tanto W dentro de sí mismo. Para $w \in W$, su descomposición $w = \sum_i E_i w$ tiene cada componente tanto en W como en E_{λ_i}. La suma cubre W y es directa porque lo era la suma de los espacios propios de V. Concatenar bases de las intersecciones no nulas da la base pedida. □

El lema no afirma que los vectores de una base propia escogida de antemano que casualmente pertenezcan a W ya generen W. Para $T = I$ en $\mathbb{R}^2$ y $W = \operatorname{span}(1,1)$, el subespacio se preserva y

tiene base propia, pero ninguno de los dos vectores de la base usual está en él. Podemos cambiar de base dentro de un espacio propio cuando su dimensión es mayor que uno.

Definición 16.3. Dos o más operadores sobre V son **simultáneamente diagonalizables sobre** $\mathbb{F}$ si existe una misma base de V en la que todas sus matrices son diagonales.

Teorema 16.8 (dos operadores). Dos operadores diagonalizables sobre $\mathbb{F}$ son simultáneamente diagonalizables sobre $\mathbb{F}$ si y sólo si conmutan.

Demostración. La necesidad procede del producto de matrices diagonales y la representación de composiciones de C12. Para la suficiencia, sean S, T diagonalizables y $ST = TS$. Si $w \in E_\lambda(S)$, entonces $S(Tw) = T(Sw) = \lambda Tw$, por lo que T preserva ese espacio propio. Aplicamos el lema 16.7 a T y a $W = E_\lambda(S)$: se obtiene una base de W formada por vectores propios de T. Todos ellos ya son propios de S, con valor λ. Como S es diagonalizable, sus espacios propios suman directamente todo V; concatenar las bases comunes de esos sumandos produce una base común de V. $\square$

Las dos hipótesis son necesarias. La identidad conmuta con una matriz que no sea diagonalizable y no le aporta una base propia. Por otra parte, $\operatorname{diag}(1,2)$ y $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ son ambas diagonalizables sobre $\mathbb{R}$, pero sus productos difieren en la entrada superior derecha; no hay una base que diagonalice las dos.

Para la matriz inicial $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, tomemos además $B = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Los vectores $(1,0)$ y $(1,1)$ son comunes: B los multiplica por cinco y menos uno. Con el mismo P de §16.1, las diagonales son $(2,3)$ para A y $(5,-1)$ para B. La suma tiene diagonal $(7,2)$ y el producto $(10,-3)$ en esa base. No necesitamos volver a buscar sus vectores propios.

Una misma base para A y B

operador	$v_1 = (1,0)$	$v_2 = (1,1)$
A	2	3
B	5	−1
A+B	7	2
AB	10	−3

Las entradas se emparejan por el mismo vector básico.

Figura 16.4. Cada columna conserva el orden de la base común. Emparejar listas de valores propios elegidas con órdenes independientes no justificaría estas sumas y productos.

Corolario 16.9 (familia finita). Una familia finita de operadores, cada uno diagonalizable sobre $\mathbb{F}$, es simultáneamente diagonalizable si y sólo si sus miembros conmutan por parejas.

Demostración. La necesidad es la misma que para dos operadores. Para la suficiencia, se empieza con la descomposición propia del primer operador y se procede por inducción sobre el número de operadores. Supongamos que los primeros k han descompuesto V en suma directa de sus espacios propios conjuntos, formados por vectores que satisfacen simultáneamente $T_j v = \lambda_j v$ para $1 \le j \le k$. El operador T_{k+1} preserva cada uno: al conmutar con todos los anteriores, conserva cada ecuación. El lema 16.7 descompone ese subespacio en intersecciones con los espacios propios de T_{k+1} y proporciona bases propias allí. Estas nuevas intersecciones siguen siendo suma directa y cubren el sumando previo; juntarlas para todos los sumandos produce la descomposición del paso siguiente. Al terminar, sus bases son comunes a la familia entera. La familia vacía admite cualquier base. $\square$

Proposición 16.10 (conmutación con valores simples). Si T tiene n valores propios distintos en un espacio de dimensión $n \ge 1$, todo operador S que conmuta con T es un polinomio de T; puede representarse de manera única por uno de grado menor que n.

Demostración. Cada espacio propio de T es una recta y esas rectas forman una descomposición de V por C14. La conmutación obliga a S a preservar cada una. En su generador v_i, por tanto, $Sv_i = \mu_i v_i$ para algún $\mu_i \in \mathbb{F}$. El polinomio $p(t) = \sum_i \mu_i \ell_i(t)$ tiene grado menor que n y valores $p(\lambda_i) = \mu_i$. Así, $p(T)$ y S coinciden sobre la base propia y son iguales. Si dos polinomios de grado menor que n representaran a S, su diferencia se anularía en los n valores distintos y sería cero. □

Para el par A, B recién calculado, la interpolación da $p(t) = 17 - 6t$, pues $p(2) = 5$ y $p(3) = -1$. La igualdad $B = 17I - 6A$ explica su conmutación y reconstruye la segunda transformación desde la primera. Si un espacio propio de T tiene dimensión mayor que uno, un operador que conmuta con T puede actuar allí de manera no escalar; los polinomios de T, en cambio, actúan siempre como un escalar sobre esa componente. La posibilidad de recuperar todo operador conmutante mediante interpolación dependía de que cada componente fuera una recta.

16.7. Ejercicios

Los datos numéricos se interpretan sobre $\mathbb{R}$ salvo indicación contraria. Los operadores generales actúan en dimensión finita sobre el cuerpo declarado. Toda diagonalización matricial debe indicar el orden de la base y verificar $AP = PD$; no es suficiente presentar una lista de valores y otra de vectores sin su correspondencia.

Ejercicio 1 — La base propia de una triangular. Diagonaliza $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ indicando P, D y P^{-1}. Comprueba $AP = PD$.

Ejercicio 2 — Una raíz repetida que permite diagonalizar. Diagonaliza $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Determina las dos multiplicidades de cada valor propio.

Ejercicio 3 — Una raíz repetida que lo impide. Decide si $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ es diagonalizable. Determina cuántas dimensiones propias faltan.

Ejercicio 4 — Todos los vectores de un espacio propio. Para $T = cI$ en dimensión $n \geq 1$, describe todas sus bases propias, el mínimo y el característico. ¿Necesita tener n valores propios distintos?

Ejercicio 5 — Una diagonalización compleja. Estudia $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sobre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$. En el segundo cuerpo exhibe la matriz de cambio de base.

Ejercicio 6 — Racionales y reales. Para $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, decide la diagonalizabilidad sobre $\mathbb{Q}$ y sobre $\mathbb{R}$, y construye una base cuando exista.

Ejercicio 7 — Potencias nulas y diagonalización. Si $N^k = 0$ para algún $k \geq 1$, demuestra que N es diagonalizable si y sólo si $N = 0$.

Ejercicio 8 — Trasponer una diagonalización. Demuestra que A es diagonalizable si y sólo si A^{T} lo es. Si $A = PDP^{-1}$, indica un cambio de base para la transpuesta.

Ejercicio 9 — El orden de las columnas. En el ejercicio 1, intercambia las dos columnas de P. ¿Cuál debe ser la nueva diagonal? ¿Puedes multiplicar una columna por un escalar no nulo sin cambiarla?

Ejercicio 10 — Potencias por componentes. Para la matriz del ejercicio 1, encuentra A^k para $k \geq 0$ y escribe A^{10}.

Ejercicio 11 — Una condición suficiente demasiado fuerte. Refuta la afirmación «una matriz de orden tres sólo puede ser diagonalizable si tiene tres valores propios distintos». Sustitúyela por una condición necesaria y suficiente.

Ejercicio 12 — Escisión sin base propia. Da una matriz real cuyo característico se escinda pero que no sea diagonalizable. Compara su mínimo con el característico.

Ejercicio 13 — Un mínimo sin factores repetidos. Explica por qué la condición «el mínimo no repite factores irreducibles» no garantiza diagonalizabilidad sobre el cuerpo de trabajo.

Ejercicio 14 — Decidir desde un mínimo conocido. Un operador real tiene mínimo $(t-2)^2(t-5)$. ¿Es diagonalizable? ¿Cambiar a los complejos puede resolver el defecto?

Ejercicio 15 — Contar dimensiones, no vectores. Una matriz real de orden cinco tiene característico $(t-1)^3(t+2)^2$. Se calculan dos vectores propios independientes para uno y dos para menos dos. ¿Basta para decidir? ¿Qué comprobación falta?

Ejercicio 16 — Equivalencia por filas no es semejanza. La matriz $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ se reduce por filas a I. ¿Prueba eso que es diagonalizable?

Ejercicio 17 — Calcular dos proyectores propios. Para A del ejercicio 1, calcula los proyectores propios mediante interpolación y descompón $v = (1, 2)$. Verifica la reconstrucción de Av.

Ejercicio 18 — La dirección de una proyección. Para $E_2(x, y) = (x - y, 0)$, determina imagen, núcleo y la dirección a lo largo de la cual se proyecta. ¿Es la proyección perpendicular sobre el eje horizontal?

Ejercicio 19 — El proyector complementario. Si $E^2 = E$, prueba que $I - E$ es un proyector, que $E(I - E) = (I - E)E = 0$ y que su imagen y núcleo intercambian los de E.

Ejercicio 20 — Construir a partir de componentes. Sean $E_1, \ldots, E_r$ proyectores con $\sum_i E_i = I$ y $E_i E_j = 0$ para $i \neq j$. Para escalares c_i, prueba que $T = \sum_i c_i E_i$ es diagonalizable. ¿Qué ocurre si algunos c_i coinciden?

Ejercicio 21 — Diagonalizar un proyector oblicuo. Diagonaliza $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e indica su imagen y núcleo.

Ejercicio 22 — La misma involución en dos cuerpos. Para $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, estudia la diagonalización sobre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{F}_2$.

Ejercicio 23 — Una relación cúbica. Supón $T^3 = T$. Demuestra que T es diagonalizable cuando la característica no es dos. Da un contraejemplo en característica dos y aclara el caso de característica tres.

Ejercicio 24 — Contar en un cuerpo pequeño. En $\mathbb{F}_3$, demuestra que T es diagonalizable si y sólo si $T^3 = T$. Cuenta las matrices de orden dos con esa propiedad.

Ejercicio 25 — Valores que se reúnen al evaluar. Para $T = \operatorname{diag}(2, -2, 3)$ sobre $\mathbb{R}$, determina los espacios propios y el mínimo de T^2. Repite para la matriz con esas entradas reducidas a $\mathbb{F}_5$.

Ejercicio 26 — Recuperar un operador desde una evaluación. Supón que T es diagonalizable y que p toma valores distintos sobre los valores propios distintos de T. Demuestra que existe q con $T = q(p(T))$. ¿Qué falla si p reúne dos valores?

Ejercicio 27 — Cuando diagonalizar el cuadrado sí basta. Sea T un operador complejo invertible y supón que T^2 es diagonalizable. Demuestra que T es diagonalizable. ¿Vale el resultado sin invertibilidad o sobre $\mathbb{R}$?

Ejercicio 28 — Descomponer un subespacio preservado. Para $T = \operatorname{diag}(1, 1, 2)$ y $W = \operatorname{span}((1, 1, 0), (0, 0, 1))$, comprueba que T preserva W y encuentra la descomposición del lema 16.7.

Ejercicio 29 — Una base heredada que no sirve. Refuta la afirmación «si T es diagonalizable y preserva W, los vectores de cualquier base propia de V que estén en W forman una base de W».

Ejercicio 30 — Una base común explícita. Para $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, construye una base común y calcula las matrices de $A + B$ y AB en ella.

Ejercicio 31 — Diagonalizables que no conmutan. Para $S = \operatorname{diag}(1, 2)$ y $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, prueba que ambos son diagonalizables y que no admiten una base propia común.

Ejercicio 32 — Conmutación sin diagonalizabilidad individual. Da dos operadores conmutantes que no sean simultáneamente diagonalizables. Identifica la hipótesis que falta en 16.8.

Ejercicio 33 — Cambiar de base dentro de una componente repetida. Sean $S = \operatorname{diag}(2, 2, 3)$ y $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Comprueba que conmutan y construye una base propia común.

Ejercicio 34 — Resolver la conmutación en un caso simple. Para $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, determina todas las matrices $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que conmutan con A y exprésalas como polinomios de A.

Ejercicio 35 — El efecto de una multiplicidad. Construye T diagonalizable y S que conmute con T pero no sea un polinomio de T. Procura que T tenga más de un valor propio.

Ejercicio 36 — Dimensión de los operadores conmutantes. Si T es diagonalizable y sus espacios propios tienen dimensiones $g_1, \dots, g_r$, demuestra que el espacio de operadores que conmutan con T tiene dimensión $\sum_i g_i^2$. Compáralo con $\mathbb{F}[T]$.

Ejercicio 37 — Conmutar con uno no es conmutar por parejas. Da tres operadores diagonalizables S, T, U tales que S conmute con los otros dos, pero los tres no admitan una base común.

Ejercicio 38 — Volver de los complejos a los reales. Para una matriz real A, demuestra que es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$ si y sólo si es diagonalizable sobre $\mathbb{C}$ y todos sus valores propios complejos son reales.

Ejercicio 39 — Sumas y productos sin conmutación. Construye dos proyectores reales E, F tales que ni $E + F$ ni EF sean diagonalizables. Explica por qué no contradicen la diagonalización simultánea.

Ejercicio 40 — Dos parámetros y una base que deja de existir. Para $A_{a,b} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ sobre $\mathbb{R}$, determina exactamente cuándo es diagonalizable y construye una base en esos casos. Encuentra el mínimo y una fórmula para $A_{a,b}^k$ con $k \geq 1$, incluyendo $a = b$.

16.8. Soluciones

Solución 1. Los espacios propios son $E_2 = \operatorname{span}(1,0)$ y $E_3 = \operatorname{span}(1,1)$. Tomamos $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \operatorname{diag}(2,3)$ y $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ambos productos AP y PD son $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. El determinante de P es uno, por lo que las columnas son una base; la igualdad verificada implica $P^{-1}AP = D$.

Solución 2. El característico es $(t-2)^2(t-3)$. Para dos, el sistema impone $z = 0$ y deja libres x, y, así que $E_2 = \operatorname{span}(e_1, e_2)$, con multiplicidades algebraica y geométrica dos. Para tres, las ecuaciones son $-x + z = 0$, $-y + z = 0$, y $E_3 = \operatorname{span}(1,1,1)$ tiene ambas multiplicidades uno. Con esas columnas en ese orden, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es invertible y $CP = P\operatorname{diag}(2,2,3)$, pues cada columna cumple la ecuación propia correspondiente.

Solución 3. El característico es $(t-2)^2(t-3)$. Para dos, $(B - 2I)(x,y,z) = (y,0,z)$, de modo que $E_2 = \operatorname{span} e_1$ tiene dimensión uno. Para tres, se obtiene $y = x = 0$ y $E_3 = \operatorname{span} e_3$. La suma de dimensiones es dos en un espacio de dimensión tres; falta una dimensión propia y no hay base propia. Añadir múltiplos de e_1 no aumenta esa dimensión.

Solución 4. Todo vector no nulo satisface $Tv = cv$, por lo que cualquier base es propia y su matriz ya es cI. El mínimo es $t - c$, mientras el característico es $(t-c)^n$. Sólo tiene el valor propio c, aunque sea diagonalizable para cualquier n. La condición de tener n valores distintos es suficiente y no necesaria.

Solución 5. Sobre $\mathbb{R}$, $t^2 + 1$ no se escinde y no hay diagonalización real. Sobre $\mathbb{C}$, $v_1 = (1, -i)$ tiene valor i y $v_2 = (1, i)$ tiene valor $-i$. La matriz $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$ tiene determinante $2i \neq 0$, y $RP = P\operatorname{diag}(i, -i)$ por esas dos ecuaciones. Así, $P^{-1}RP$ es la diagonal indicada. Las columnas complejas no representan dos rectas propias del plano real.

Solución 6. El mínimo y el característico son $t^2 - 2$: la relación $A^2 = 2I$ y el hecho de no ser escalar prueban el mínimo. No se escinde sobre $\mathbb{Q}$, de modo que no hay diagonalización racional.

Sobre $\mathbb{R}$, las raíces son $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$, distintas. Para cada una, $v_\lambda = (\lambda, 1)$ satisface $Av_\lambda = \lambda v_\lambda$. Las columnas de $P = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ tienen determinante $2\sqrt{2} \neq 0$ y dan diagonal $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Solución 7. Si N es diagonalizable, en una base propia tiene diagonal $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. La igualdad $N^k = 0$ implica $\lambda_j^k = 0$ para cada j, y en un cuerpo eso obliga a $\lambda_j = 0$. Su matriz es cero y el operador también. Recíprocamente, el operador cero es diagonal en cualquier base. En dimensión cero las dos afirmaciones se cumplen. La existencia de raíces del característico no sustituye una base de sus espacios propios.

Solución 8. Trasponer da $A^\mathsf{T} = (P^{-1})^\mathsf{T} D P^\mathsf{T}$, porque $D^\mathsf{T} = D$. Así, $Q = (P^{-1})^\mathsf{T}$ es invertible, su inversa es P^T y $Q^{-1} A^\mathsf{T} Q = D$. Aplicar el mismo argumento otra vez da el recíproco. No se afirma que las columnas propias de A sirvan sin cambios para su transpuesta.

Solución 9. La primera columna nueva es $(1, 1)$ y tiene valor tres; la segunda es $(1, 0)$ y tiene valor dos. La diagonal debe ser $(3, 2)$. Conservar $(2, 3)$ violaría la primera ecuación de $AP = PD$. Multiplicar una columna propia por un escalar no nulo conserva su valor propio y la independencia de la lista; la diagonal correspondiente permanece igual. La base diagonalizante no es única, pero cada columna debe conservar su asociación.

Solución 10. Los proyectores son $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Por 16.5, $A^k = 2^k E_2 + 3^k E_3 = \begin{pmatrix} 2^k & 3^k - 2^k \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$, incluido $k = 0$, cuando la suma es I. Para diez resulta $\begin{pmatrix} 1024 & 58025 \\ 0 & 59049 \end{pmatrix}$. La cuenta mantiene el orden de las dos componentes.

Solución 11. La matriz $\operatorname{diag}(2, 2, 3)$ es diagonal y tiene sólo dos valores distintos. Una condición necesaria y suficiente es que su característico se escinda y que cada espacio propio tenga dimensión igual a la multiplicidad algebraica. Equivalentemente, la suma de las dimensiones de todos sus espacios propios debe ser tres. Las repeticiones son compatibles con una base si el espacio propio correspondiente aporta suficientes vectores independientes.

Solución 12. Para $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, el característico es $(t-1)^2$. La matriz $J - I$ es no nula y su cuadrado es cero, de modo que el mínimo también es $(t-1)^2$. Su espacio propio es $\operatorname{span}(1, 0)$ y no genera el plano. El característico se escinde, pero el mínimo repite un factor y el criterio 16.3 descarta la diagonalización.

Solución 13. Sobre $\mathbb{R}$, la rotación de un cuarto de vuelta tiene mínimo $t^2 + 1$, irreducible y sin repetición de ese factor. No tiene valores propios reales y no puede diagonalizarse allí. El criterio correcto exige factores lineales distintos en el cuerpo. Sobre $\mathbb{C}$, el mismo mínimo se convierte en $(t - i)(t + i)$ y sí satisface la condición. La ausencia de repetición y la escisión son exigencias separadas.

Solución 14. No es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$ porque el mínimo repite $t - 2$. El mínimo no cambia al ampliar el cuerpo, por el ejercicio 31 de C15, que lo demuestra usando sistemas de coeficientes. Sobre $\mathbb{C}$ sigue repitiendo el mismo factor, por lo que tampoco es diagonalizable. La ampliación puede aportar raíces que faltaban, pero aquí todas estaban ya en el cuerpo y el obstáculo persiste.

Solución 15. Esos cuatro vectores son independientes conjuntamente por C14, porque se agrupan en familias independientes de valores distintos. Aún no sabemos si el espacio propio de uno tiene dimensión dos o tres; exhibir dos generadores independientes sólo da una cota inferior. El de menos dos tiene dimensión exactamente dos, pues su multiplicidad algebraica es dos. Falta calcular el núcleo de $A - I$ o su rango. Si su dimensión es tres, habrá base propia; si es dos, la suma de dimensiones será cuatro y no la habrá.

Solución 16. No. Una operación por filas multiplica por una matriz invertible a la izquierda; no impone simultáneamente el factor inverso a la derecha que caracteriza un cambio de base del mismo operador. Aquí J tiene espacio propio de uno igual a $\operatorname{span} e_1$ y mínimo $(t-1)^2$, así que no es diagonalizable. Su equivalencia por filas con I expresa rango completo, no semejanza con una matriz diagonal.

Solución 17. Los polinomios son $\ell_2(t) = (t-3)/(2-3) = 3 - t$ y $\ell_3(t) = t - 2$. Así, $E_2 v = (-1, 0)$ y $E_3 v = (2, 2)$. Su suma es v y sus imágenes al multiplicar por dos y tres suman $2(-1, 0) + 3(2, 2) =$

$(4,6)$. El producto directo da $A(1,2) = (4,6)$, verificando la reconstrucción. Las componentes se obtienen sin elegir coordenadas nuevas para esa entrada.

Solución 18. La imagen es todo el eje horizontal, pues $E_2(a,0) = (a,0)$. El núcleo se obtiene de $x - y = 0$ y es la recta $\operatorname{span}(1,1)$. Las entradas que difieren por un vector de esa recta tienen la misma imagen; ésa es la dirección eliminada. No es la proyección perpendicular usual: ésta conserva la primera coordenada y envía $(1,1)$ a $(1,0)$, mientras $E_2(1,1) = 0$. La idempotencia no impone un ángulo recto.

Solución 19. Expandir da $(I-E)^2 = I - 2E + E^2 = I - E$, incluso en característica dos. Los productos mixtos son $E - E^2 = 0$. Todo vector $(I-E)v$ pertenece a $\ker E$, y si $w \in \ker E$, entonces $(I-E)w = w$, por lo que $\operatorname{im}(I-E) = \ker E$. La igualdad $(I-E)v = 0$ equivale a $v = Ev$, que caracteriza la pertenencia a $\operatorname{im} E$: la inclusión recíproca usa $E^2 = E$. Así, $\ker(I-E) = \operatorname{im} E$.

Solución 20. Cada v es suma de $E_i v$, así que las imágenes generan. Si $\sum_i w_i = 0$ con $w_i \in \operatorname{im} E_i$, aplicar E_j da $w_j = 0$, usando idempotencia y los productos mixtos cero. Por tanto, las imágenes suman directamente todo el espacio. Para w_i en la imagen de E_i, $Tw_i = c_i w_i$; concatenar bases de las imágenes no nulas produce una base propia. Si varios c_i coinciden, sus imágenes se reúnen en un mismo espacio propio y se conserva la base. Los proyectores inicialmente dados pueden separar componentes más pequeñas que los espacios propios finales.

Solución 21. Se tiene $E^2 = E$. Su imagen es $\operatorname{span}(1,0)$ y su núcleo, obtenido de $x + 2y = 0$, es $\operatorname{span}(-2,1)$. La primera recta tiene valor uno y la segunda cero. Con $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $D = \operatorname{diag}(1,0)$, el determinante de P es uno y $EP = PD$. La suma directa imagen–núcleo proporciona la diagonalización sin calcular previamente un determinante característico.

Solución 22. Sobre $\mathbb{R}$, los vectores $(1,1)$ y $(1,-1)$ tienen valores uno y menos uno; son independientes porque el determinante de sus columnas es menos dos. Sobre $\mathbb{F}_2$, ambos vectores coinciden. El mínimo es $(t-1)^2$, pues $S \neq I$ y $(S-I)^2 = 0$. No es diagonalizable allí. La identidad $S^2 = I$ se conserva, pero sus dos factores lineales dejan de ser distintos.

Solución 23. El polinomio $t^3 - t = t(t-1)(t+1)$ anula a T. Sus tres raíces son distintas cuando uno y menos uno son distintos, es decir, cuando la característica no es dos; 16.3 se aplica. En característica tres las raíces cero, uno y menos uno siguen siendo distintas y la conclusión vale. En característica dos, toma $U = I + N$ con $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Se tiene $U^2 = I$ y por tanto $U^3 = U$, pero su mínimo es $(t-1)^2$ y no se diagonaliza.

Solución 24. La suficiencia procede del ejercicio 23. Si T es diagonalizable, cada entrada de la diagonal pertenece a $\{0,1,2\}$ y satisface $a^3 = a$, por lo que también $T^3 = T$. En dimensión dos, las matrices diagonalizables con un solo valor son las tres escalares. Para dos valores distintos hay tres pares no ordenados de valores. El plano sobre $\mathbb{F}_3$ tiene cuatro rectas: sus ocho vectores no nulos se reparten en parejas de múltiplos. Fijado un orden de los dos valores de un par, hay cuatro elecciones para la primera recta y tres para la segunda. Cada pareja de rectas distintas da una descomposición del plano y determina un único operador con los dos valores asignados. Así, hay $3 + 3 \cdot 4 \cdot 3 = 39$ matrices. Las rectas son sus espacios propios y no se cuentan dos veces.

Solución 25. Sobre $\mathbb{R}$, $T^2 = \operatorname{diag}(4,4,9)$, así que $E_4(T^2) = \operatorname{span}(e_1, e_2)$ y $E_9(T^2) = \operatorname{span} e_3$. El mínimo es $(t-4)(t-9)$. En $\mathbb{F}_5$, las entradas de T son dos, tres y tres, y todas sus elevaciones al cuadrado son cuatro. Entonces $T^2 = 4I$, su único espacio propio no nulo es todo el espacio para cuatro, y su mínimo es $t - 4$. Se han reunido valores adicionales por las identidades del cuerpo.

Solución 26. Sean λ_i los valores distintos y $\mu_i = p(\lambda_i)$, distintos por hipótesis. La interpolación sobre los nodos μ_i da un polinomio q con $q(\mu_i) = \lambda_i$. Sobre cada componente propia, $q(p(T))$ actúa por λ_i, igual que T; por tanto, coinciden sobre una base propia. Si $p(\lambda_i) = p(\lambda_j)$ para $\lambda_i \neq \lambda_j$, cualquier polinomio de $p(T)$ actúa por el mismo escalar en esos dos espacios y no puede recuperar las acciones diferentes de T. Por ejemplo, $\operatorname{diag}(2,-2)^2 = 4I$.

Solución 27. El mínimo de T^2 es $\prod_j (t - \mu_j)$ con μ_j distintos y no nulos, porque T^2 es invertible. Por composición de evaluaciones, $\prod_j (t^2 - \mu_j)$ anula a T. Cada μ_j tiene dos raíces cuadradas complejas opuestas y distintas, por ser no nulo; esto usa la teoría de raíces complejas del tomo I. Dos factores correspondientes a distintos μ_j no comparten ninguna raíz, pues sus cuadrados serían iguales. El anulador se escinde en factores lineales distintos, y 16.3 da la diagonalización. Sin

invertibilidad, un $N \neq 0$ con $N^2 = 0$ es un contraejemplo. Sobre $\mathbb{R}$, la rotación R tiene cuadrado $-I$ y es invertible, pero no se diagonaliza sobre ese cuerpo.

Solución 28. La imagen de $(1,1,0)$ es él mismo y la de $(0,0,1)$ es dos veces ese vector, de modo que sus combinaciones permanecen en W. Los espacios propios de T son el plano $z=0$ para uno y la recta del tercer eje para dos. Sus intersecciones con W son $\operatorname{span}(1,1,0)$ y $\operatorname{span}(0,0,1)$. Suman directamente W, y los dos generadores indicados constituyen una base propia para la acción dentro de ese subespacio.

Solución 29. Toma $T = I$ en $\mathbb{R}^2$, la base propia usual (e_1, e_2) y $W = \operatorname{span}(1,1)$. La identidad preserva W, pero ninguno de los dos vectores básicos está en él. Aun así, $(1,1)$ es propio y forma una base de W. El lema permite escoger bases dentro de las intersecciones con los espacios propios; no obliga a extraerlas de una lista fijada de antemano.

Solución 30. Los vectores $(1,0)$ y $(1,1)$ tienen valores $(2,5)$ y $(3,-1)$ para (A,B), respectivamente. Son una base y, con sus columnas en P, las dos diagonales son $(2,3)$ y $(5,-1)$. La suma tiene diagonal $(7,2)$ y el producto $(10,-3)$. En coordenadas usuales, $A+B = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $AB = \begin{pmatrix} 10 & -13 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$; aplicar cada una a las dos columnas confirma los valores calculados.

Solución 31. S es diagonal y T tiene dos valores distintos, uno y dos, así que ambos se diagonalizan. Sin embargo, $ST = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ y $TS = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ son diferentes. Si una misma base los hiciera diagonales, sus matrices conmutarían y también sus representaciones usuales. La contradicción descarta una base común.

Solución 32. Sirven I y $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^2$. Conmutan porque la identidad conmuta con todo operador. El operador N tiene cuadrado cero y es no nulo, por lo que no es diagonalizable según el ejercicio 7. Una base común diagonalizaría también a N por separado, lo cual es imposible. La conmutación necesita acompañarse de la diagonalizabilidad de ambos.

Solución 33. En el plano de las dos primeras coordenadas, S es $2I$, así que conmuta con el bloque superior de T; en la tercera coordenada ambos son escalares, y no hay entradas que mezclen esos dos sectores. Los vectores e_1, $(1,3,0)$ y e_3 son propios de T con valores uno, cuatro y cinco: sobre el segundo se obtiene $(4,12,0)$. También son propios de S, con valores dos, dos y tres. Sus columnas tienen determinante tres y forman una base común. La elección dentro de $E_2(S)$ se adaptó a T.

Solución 34. Comparar AS y SA da $c = 0$ y $d = a + b$; las otras ecuaciones son las mismas o identidades. Así, $S = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$. Se verifica $S = bA + (a-2b)I$, que es un polinomio de grado menor que dos. Sobre las rectas propias de A, los valores de S son a y $a+b$, y la interpolación produce esa misma expresión.

Solución 35. Toma $T = \operatorname{diag}(2,2,3)$ y $S = \operatorname{diag}(1,4,5)$. Ambas son diagonales y conmutan. Sin embargo, cualquier $p(T)$ tiene primeras dos entradas diagonales iguales a $p(2)$, mientras las de S son uno y cuatro. No puede haber igualdad. La repetición permite acciones diferentes dentro de $E_2(T)$, mientras los polinomios de T sólo actúan como un mismo escalar en todo ese espacio.

Solución 36. Si S conmuta con T, preserva cada espacio propio por el cálculo de 16.8. Recíprocamente, si preserva todos, en una componente con valor λ_i se tiene $TSw = \lambda_i Sw = STw$, y por la descomposición directa los operadores conmutan en todo V. Por tanto, podemos escoger independientemente un operador arbitrario en cada espacio propio, sin componentes entre sumandos distintos. Un espacio de dimensión g_i tiene espacio de operadores de dimensión g_i^2, representado por todas sus matrices en una base. La suma da el resultado. En cambio, $\mathbb{F}[T]$ tiene dimensión $\deg m_T = r$ por C15 y 16.3. Los espacios coinciden exactamente cuando todos los g_i son uno, pues entonces ambas dimensiones son r y uno está contenido en el otro.

Solución 37. En $\mathbb{R}^2$, usa $S = I$, $T = \operatorname{diag}(1,2)$ y $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. La identidad conmuta con ambos, y los otros dos son diagonalizables por tener valores distintos. El ejercicio 31 muestra $TU \neq UT$. Una base común para los tres sería en particular común para esos dos, lo cual es imposible. El corolario 16.9 exige conmutación de cada pareja, no sólo con un miembro distinguido.

Solución 38. Una diagonalización real sigue siendo válida sobre $\mathbb{C}$ y su característico es producto de factores con raíces reales, así que la necesidad se cumple. Recíprocamente, la diagonalización compleja hace que el mínimo sobre $\mathbb{C}$ sea producto de factores lineales distintos. Si todas sus raíces son reales, ese producto tiene factores lineales reales distintos. El ejercicio 31 de C15 demuestra que el mínimo no cambia al ampliar $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$. Por consiguiente, el mínimo real ya tiene esa forma y 16.3 da la diagonalización real. Se usó la invariancia del mínimo, no la pretensión de que los vectores propios complejos elegidos fueran reales.

Solución 39. Toma $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sus cuadrados son ellos mismos, así que cada uno es diagonalizable. La suma es $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, con mínimo $(t-1)^2$, y el producto es $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, con mínimo t^2; ninguno se diagonaliza. Se tiene $EF = N$ y $FE = 0$, de modo que no conmutan. La hipótesis que permitiría una misma base para sumas y productos falta.

Solución 40. El característico es $(t-a)^2(t-b)$. Si $a \neq b$, $E_a = \operatorname{span}(e_1, e_3)$ y $E_b = \operatorname{span}(1, b-a, 0)$. Estas tres columnas tienen determinante $-(b-a) \neq 0$ en el orden $e_1, e_3, (1, b-a, 0)$, y la diagonal es (a, a, b). El mínimo es $(t-a)(t-b)$, porque los dos valores aparecen y ese producto anula la matriz. Si $a = b$, la matriz es $aI + N$ con $N \neq 0$, $N^2 = 0$; su mínimo es $(t-a)^2$ y no es diagonalizable. Para $a \neq b$, elevar el bloque superior usando su base propia da entradas diagonales a^k, b^k, a^k y entrada $(1,2)$ igual a $(b^k - a^k)/(b-a)$; las otras son cero. Para $a = b$, la expansión de $aI + N$ da $a^k I + k a^{k-1} N$. Cuando $a = 0$ y $k = 1$, el coeficiente de N se interpreta como uno, conforme a $a^0 = 1$; para $k \geq 2$ el resultado es cero. La desaparición del denominador $b - a$ señala la pérdida de esa base, y la cuenta directa con N proporciona la fórmula del caso coincidente.

Lecturas y referencias

Axler, *Linear Algebra Done Right*, §§5D–5E, reúne los criterios y la diagonalización de operadores conmutantes. Friedberg, Insel y Spence, *Linear Algebra*, §5.2, desarrolla el criterio por multiplicidades y la construcción de bases. Hoffman–Kunze, *Linear Algebra*, §6.4 y final de §6.7, permite contrastar la prueba por el mínimo con la construcción mediante interpolación. Johnston, *Advanced Linear and Matrix Algebra*, comienzo del capítulo 2, vincula la diagonalización con el cambio de coordenadas y el cálculo de potencias. Aquí los proyectores se obtienen directamente de polinomios de interpolación, sin presuponer una descomposición primaria ni un producto interno.

Capítulo 17

Subespacios invariantes, triangularización y formas canónicas

El operador $T(x, y) = (2x + y, 2y)$ no tiene una base propia: su único espacio propio es el eje horizontal. Sin embargo, su acción no carece de organización. Ese eje permanece dentro de sí mismo, y dos entradas con la misma altura vuelven a tener la misma altura después de transformarse. La primera coordenada contiene la mezcla que impide diagonalizar; la segunda permite describir una acción que sigue estando definida cuando olvidamos la posición horizontal.

En la base usual, T tiene matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. La entrada cero inferior significa que transformar un vector del primer eje no produce una componente en el segundo. La entrada uno superior expresa algo diferente: una entrada fuera del eje puede adquirir una componente en él. Conservar un subespacio permite estudiar la acción dentro de él y la acción restante sobre clases, aunque no podamos separar ambas mediante dos subespacios que se conserven por separado.

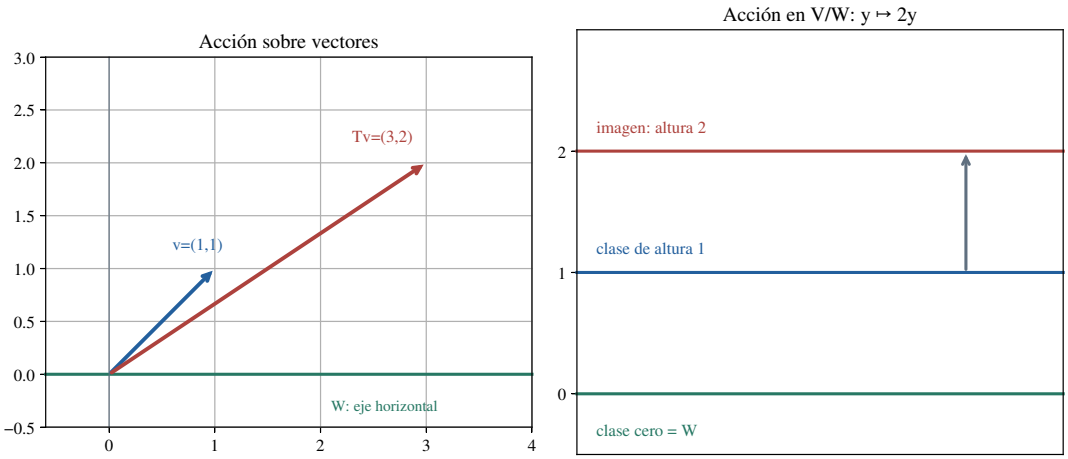


Figura 17.1. El panel izquierdo muestra vectores concretos; el derecho agrupa las entradas por altura. Una clase es una recta horizontal completa, y su imagen queda determinada por la altura, aunque las primeras coordenadas de sus representantes sean distintas.

Trabajaremos sobre un cuerpo conmutativo $\mathbb{F}$ y, salvo indicación contraria, en dimensión finita. Recuperamos los cocientes y bases adaptadas de C11, la representación de C12, el característico de C14, los polinomios de operadores y Bézout de C15, y la diagonalización de C16. La finalidad es encontrar componentes que el operador preserve y precisar qué información contienen. Los bloques obtenidos tendrán bases internas todavía libres: la expresión «formas canónicas» requiere distinguir esas componentes determinadas por el operador de las matrices concretas elegidas para representarlas.

17.1. Mantener una parte del espacio dentro de sí misma

Definición 17.1. Un subespacio $W \subseteq V$ es **invariante bajo** T, o **T-invariante**, si $T(W) \subseteq W$. En ese caso, la **restricción** $T_W : W \to W$ aplica la misma regla que T, con dominio y codominio W. El **operador cociente** se define por

$$\overline{T} : V/W \longrightarrow V/W, \qquad \overline{T}(v + W) = T(v) + W.$$

La inclusión de invariancia puede ser estricta. El operador cero preserva todo subespacio, aunque envíe uno no nulo a $\{0\}$. Una recta invariante está generada por un vector propio, según C14;

en dimensión mayor, el operador puede mezclar las direcciones internas y seguir preservando el subespacio.

Proposición 17.1 (restricción y cociente). La regla para $\overline{T}$ está bien definida si y sólo si W es invariante. Cuando lo es, T_W y $\overline{T}$ son lineales, y para la proyección canónica $\pi : V \to V/W$ se cumple $\pi T = \overline{T}\pi$. Además, todo polinomio de T preserva W, y su restricción y su operador cociente son $p(T_W)$ y $p(\overline{T})$.

Demostración. Dos representantes v, v' dan la misma clase cuando $v - v' \in W$. Sus imágenes dan la misma clase cuando $T(v-v') \in W$. La invariancia garantiza esa implicación. Recíprocamente, si la regla está bien definida, para $w \in W$ las entradas w y cero representan la misma clase, de modo que $T(w) + W = W$ y $T(w) \in W$. La linealidad procede de las operaciones de clases de C11 y de la linealidad de T; la identidad con π es la propia fórmula aplicada a cada entrada.

La invariancia pasa de T a cada potencia por inducción y a combinaciones lineales por ser W subespacio. Restringir una composición de aplicaciones que preservan W equivale a componer sus restricciones. Asimismo, repetir la fórmula de clases da $\overline{T}^{\,j}(v + W) = T^j(v) + W$. Sumar con los coeficientes de p prueba las dos afirmaciones de evaluación, incluido el término constante con la identidad de cada espacio. □

En la apertura, $W = \operatorname{span} e_1$. Dentro de W, T multiplica por dos. Una clase de V/W está determinada por su altura y, y $\overline{T}$ también multiplica esa altura por dos. Las dos acciones son escalares, pero T no es escalar ni diagonalizable. La información sobre cómo una entrada exterior aporta una componente en W no aparece en esas dos acciones consideradas por separado.

No hay contradicción con la propiedad universal de C11. Para que una aplicación $v + W \mapsto T(v)$ tenga valores en V y esté bien definida, se exige $T(W) = 0$. Aquí la salida también es una clase; basta que $T(W)$ quede dentro de W, pues esas diferencias desaparecen al pasar al cociente.

17.2. Los bloques que deja una base adaptada

Sea $(w_1, \dots, w_k, u_1, \dots, u_{n-k})$ una base cuyo primer bloque sea base de W. Las imágenes de los primeros k vectores no tienen componentes en los restantes precisamente cuando W es invariante. Por tanto, la matriz toma la forma

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

El bloque B representa T_W. Las clases $(u_1 + W, \dots, u_{n-k} + W)$ forman una base del cociente por C11, teorema 11.7, y el bloque D representa $\overline{T}$ en ella. El bloque C registra las componentes en W de las imágenes de los vectores añadidos. Que D represente un operador sobre clases no obliga a que $\operatorname{span}(u_1, \dots, u_{n-k})$ sea invariante.

Proposición 17.2 (polinomios de los dos operadores inducidos). Para W invariante,

$$\chi_T = \chi_{T_W}\chi_{\overline{T}}, \qquad m_{T_W} \mid m_T, \qquad m_{\overline{T}} \mid m_T, \qquad m_T \mid m_{T_W} m_{\overline{T}}.$$

Se conservan los convenios $\chi = m = 1$ para un espacio cero.

Demostración. Aplicar el determinante triangular por bloques de C13 a $tI - A$ da la primera igualdad. Si $m_T(T) = 0$, su restricción y su cociente son cero por 17.1; C15 implica que los dos mínimos dividen a m_T.

Para la última divisibilidad, escribamos $p = m_{T_W}$ y $q = m_{\overline{T}}$. La igualdad $q(\overline{T}) = 0$ significa que $q(T)v \in W$ para cada v. Sobre esa imagen, $p(T)$ actúa como $p(T_W) = 0$. Así, $p(T)q(T) = 0$, y $m_T \mid pq$ por C15. El argumento se mantiene si uno de los espacios es cero: su identidad también es el operador cero, y el polinomio mínimo es uno. □

Para el bloque $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, ambos mínimos inducidos son $t-2$, mientras $m_T = (t-2)^2$. No podemos reemplazar la última divisibilidad por una igualdad con el menor múltiplo común: el acoplamiento superior puede exigir repetir un factor. Si la matriz fuera $2I_2$, los dos mínimos inducidos seguirían siendo $t - 2$, pero también el mínimo total sería $t - 2$.

17.3. El subespacio que genera una trayectoria

Si empezamos con v y exigimos que un subespacio que lo contenga sea invariante, ese subespacio debe contener también $Tv, T^2v, \ldots$. El espacio generado por todos ellos es la elección más pequeña posible. C15 utilizó el caso en que una trayectoria ya daba una base de todo el espacio; podemos aplicar la misma idea a la parte alcanzada por una entrada cualquiera.

Definición 17.2. El **subespacio cíclico generado por** v es $Z_T(v) = \operatorname{span}(v, Tv, T^2v, \ldots)$. Para $v = 0$ es el espacio cero.

Teorema 17.3 (base de una trayectoria). Si $v \neq 0$, existe un primer $d \geq 1$ tal que $T^d v$ es combinación de $v, Tv, \ldots, T^{d-1}v$. Esos d vectores forman una base de $Z_T(v)$, que es invariante y mínimo entre los subespacios invariantes que contienen a v. Si

$$T^d v + a_{d-1}T^{d-1}v + \cdots + a_1 Tv + a_0 v = 0,$$

entonces $q_v(t) = t^d + a_{d-1}t^{d-1} + \cdots + a_0$ es el mínimo y el característico de $T_{Z_T(v)}$. Un polinomio p satisface $p(T)v = 0$ si y sólo si $q_v \mid p$.

Demostración. La finitud de dimensión fuerza una primera dependencia, y el primer término v no es cero. Por la elección de d, los términos anteriores son independientes. Su generado Z se preserva: T envía cada término salvo el último al siguiente, y la relación expresa la imagen del último dentro de Z. En consecuencia, todas las potencias posteriores aplicadas a v permanecen en Z, que coincide con $Z_T(v)$. Cualquier subespacio invariante que contenga a v contiene esa trayectoria entera.

La relación anula a v y también a cada $T^j v$, porque $q_v(T)$ conmuta con T^j. Por tanto, anula la restricción entera. Un polinomio no nulo de grado menor que d no puede anular a v, pues daría una dependencia entre la base indicada. Así, q_v es el mínimo. Esa base es una trayectoria de longitud igual a la dimensión de Z, y C15, proposición 15.9, da que mínimo y característico de la restricción coinciden. Finalmente, dividir p entre q_v deja un resto de grado menor que d; si $p(T)v = 0$, el resto también anula a v y debe ser cero. La implicación recíproca usa la regla del producto de evaluaciones. $\square$

En esa base, la matriz de la restricción tiene unos inmediatamente debajo de la diagonal y última columna $(-a_0, \ldots, -a_{d-1})^{\mathsf{T}}$; las demás entradas son cero. Se llama **matriz compañera** de q_v. Para $d = 1$, es la matriz $(-a_0)$. Por ejemplo, si $T(e_1) = e_2$, $T(e_2) = e_3$ y $T(e_3) = 2e_1$, la trayectoria de e_1 da la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y el polinomio $t^3 - 2$ de C15. Encontrar subespacios cíclicos no demuestra todavía que podamos escogerlos como sumandos invariantes complementarios; esa afirmación exigiría otro teorema.

17.4. Una sucesión de subespacios que se conservan

Definición 17.3. Una **bandera completa** de V, con $\dim V = n$, es una sucesión $0 = W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_n = V$ con $\dim W_j = j$. Es invariante si cada W_j lo es. Diremos que T es **triangularizable sobre** $\mathbb{F}$ si tiene una matriz triangular superior en alguna base sobre ese cuerpo.

Proposición 17.4 (bandera y triangularidad). Una base $(v_1, \ldots, v_n)$ representa a T mediante una matriz triangular superior si y sólo si cada $\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_j)$ es invariante. Por tanto, T es triangularizable si y sólo si admite una bandera completa invariante.

Demostración. La matriz es triangular superior si y sólo si la columna j sólo usa las primeras j posiciones, es decir, si $Tv_j \in \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_j)$. Esas inclusiones implican por linealidad que cada generado inicial se preserve, y la invariancia de esos generados incluye las propias inclusiones. Si tenemos una bandera, escogemos sucesivamente $v_j \in W_j \setminus W_{j-1}$; por las dimensiones, sus generados iniciales son los W_j. La base resultante representa a T triangularmente. $\square$

La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

preserva la recta $\operatorname{span} e_1$ y el plano $\operatorname{span}(e_1, e_2)$. El vector e_2 no es propio: su imagen $e_1 + 2e_2$ permanece en el plano, pero no en su propia recta. Una base triangular permite imágenes que utilicen vectores anteriores; una base diagonal sólo permite el vector de la misma posición.

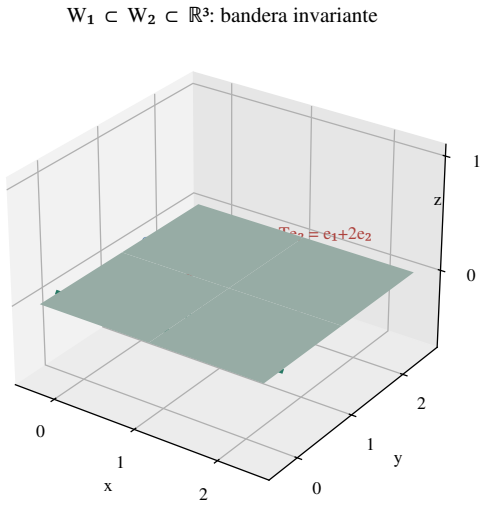


Figura 17.2. Se muestra una región del plano $z = 0$ y de la recta generada por e_1, que continúan fuera del recuadro. Los vectores dibujados ilustran la acción; las imágenes de los generadores prueban las inclusiones de subespacios.

Teorema 17.5 (criterio de triangularización). Son equivalentes: T es triangularizable sobre $\mathbb{F}$; χ_T se escinde sobre $\mathbb{F}$; y m_T se escinde sobre $\mathbb{F}$. Se permiten factores repetidos.

Demostración. Una matriz triangular tiene característico igual al producto de t menos sus entradas diagonales, por C13. Si el característico se escinde, también lo hace su divisor m_T. En efecto, si $dh = \prod_j (t - \alpha_j)$, evaluar en α_1 muestra que d o h tiene esa raíz. El teorema del factor permite extraer $t - \alpha_1$ del factor correspondiente y cancelarlo en la igualdad. Una inducción sobre el número de factores prueba que d se escinde.

Probaremos que un mínimo escindido permite triangularizar por inducción sobre $n = \dim V$. En dimensión cero la base vacía sirve. Si $n > 0$, el mínimo tiene grado positivo y, al escindirse, tiene una raíz $\lambda \in \mathbb{F}$. C15 da un vector propio no nulo v_1. La recta $W = \operatorname{span} v_1$ es invariante, y el mínimo del operador cociente divide a m_T por 17.2; por tanto, también se escinde. La inducción da una base triangular del cociente. Elegimos representantes $v_2, \dots, v_n$ de sus vectores básicos; junto con v_1 forman una base de V por C11. La condición triangular en clases significa que Tv_j difiere de una combinación de $v_2, \dots, v_j$ por un vector de W. Así, $Tv_j \in \operatorname{span}(v_1, \dots, v_j)$ para todo j, y 17.4 termina la prueba. $\square$

Sobre $\mathbb{C}$, el TFA admitido en T1 §26.15 garantiza la escisión del característico, y todo operador de dimensión finita es triangularizable. Sobre $\mathbb{R}$, una rotación de un cuarto de vuelta no lo es. El criterio de C16 exigía además que el mínimo no repitiera factores; la triangularización admite esa repetición.

17.5. Cuándo un complemento también se conserva

Supongamos $V = W \oplus U$. Si ambos sumandos son invariantes, escoger una base en cada uno produce una matriz diagonal por bloques. Si sólo W lo es, puede quedar el bloque superior que ya vimos. La existencia de complementos como espacios vectoriales, probada en C11, no asegura que podamos eliminar ese bloque.

Proposición 17.6 (sumandos invariantes y proyecciones). En una suma directa finita $V = \bigoplus_i W_i$, todos los sumandos son invariantes si y sólo si cada proyección de componentes E_i conmuta con T. En tal caso, con $T_i = T_{W_i}$,

$$\chi_T = \prod_i \chi_{T_i}, \qquad m_T = \operatorname{mcm}(m_{T_1}, \dots, m_{T_r}),$$

donde el menor múltiplo común se toma mónico.

Demostración. Si todos los sumandos se preservan y $v = \sum_i v_i$, entonces $TE_j v = Tv_j = E_j T v$, porque cada Tv_i permanece en su propio sumando. Recíprocamente, si $TE_j = E_j T$ y $w = E_j w \in W_j$, entonces $Tw = E_j T w \in W_j$. La matriz en bases concatenadas es diagonal por bloques, y su determinante característico es el producto indicado.

Un polinomio anula a T si y sólo si anula cada restricción, pues toda entrada es suma de sus componentes. Por C15, esto equivale a ser múltiplo de cada m_{T_i}. El único mónico de menor grado con esa propiedad es su menor múltiplo común, y por la definición del mínimo coincide con m_T. □

Para $T(x, y) = (2x + y, 2y)$ y $W = \operatorname{span} e_1$, cualquier recta complementaria está generada por $u = e_2 + ce_1$. Su imagen es $Tu = 2u + e_1$. No puede ser múltiplo de u, pues comparar la segunda coordenada fijaría el múltiplo en dos y dejaría el término no nulo e_1. Ningún complemento de W es invariante. Aunque el operador cociente tenga dimensión uno, no podemos realizar su acción mediante una recta complementaria preservada dentro del plano.

17.6. Separar factores que no comparten divisores

El mínimo de la matriz A de §17.4 es $(t-2)^2(t+1)$ sobre $\mathbb{R}$. El espacio propio de dos no alcanza a explicar todo el plano de las primeras coordenadas, pero el núcleo de $(A - 2I)^2$ sí lo alcanza. El factor $t + 1$ describe otra componente, y Bézout permitirá separarlas porque no comparte divisor no constante con $(t - 2)^2$.

Un polinomio no constante es **irreducible sobre** $\mathbb{F}$ si no es producto de dos polinomios de grado positivo sobre ese cuerpo. Se normalizan sus coeficientes principales en uno. Para no exigir una teoría anterior de anillos, dejamos explícita la propiedad de factorización que usaremos.

Lema 17.7 (factores irreducibles y productos coprimos). Todo polinomio mónico no constante sobre $\mathbb{F}$ es producto de irreducibles mónicos, de manera única salvo el orden. Si $f_1, \dots, f_r$ son coprimos por parejas y cada f_i divide a h, entonces $\prod_i f_i$ divide a h. El menor múltiplo común mónico de varios polinomios no nulos se obtiene tomando el máximo exponente de cada factor irreducible.

Demostración. La existencia de una factorización procede por inducción sobre el grado: si el polinomio es irreducible, hemos terminado; si no, sus dos factores pueden normalizarse y tienen grados menores, de modo que se factorizan por inducción. Si un irreducible p divide a ab y no divide a a, su máximo común divisor con a es uno: cualquier divisor no constante de p sería un múltiplo escalar de p. Una identidad $up + va = 1$, multiplicada por b, muestra entonces que $p \mid b$. Por ello, si dos productos de irreducibles coinciden, el primer factor de uno divide algún factor del otro y, al ser mónicos irreducibles, ambos factores son iguales. Se cancelan en la igualdad y se repite, lo que prueba la unicidad.

Para dos polinomios coprimos f, g, si $h = fa$ y $g \mid h$, Bézout aplicado a f, g da que $g \mid a$, y por tanto $fg \mid h$. La factorización muestra que el producto de cualquier subfamilia de los f_i sigue siendo coprimo con los restantes, de modo que una inducción prueba la afirmación general. Finalmente, ser múltiplo común equivale a tener para cada irreducible un exponente al menos tan grande como el de cualquiera de los polinomios dados. Tomar esos máximos produce el único mónico de menor grado y prueba la fórmula del menor múltiplo común. □

Teorema 17.8 (núcleos de factores coprimos). Sean $f_1, \dots, f_r$ polinomios mónicos no constantes, coprimos por parejas, tales que $q(T) = 0$ para $q = \prod_i f_i$. Entonces

$$V = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker f_i(T).$$

Los sumandos son invariantes. Si $Q_i = q/f_i$ y se elige u_i con $u_i Q_i + v_i f_i = 1$, la proyección sobre $\ker f_i(T)$ es $E_i = u_i(T)Q_i(T)$.

Demostración. El lema garantiza que Q_i y f_i son coprimos, así que Bézout proporciona la identidad indicada. Pongamos $e_i = u_i Q_i$. Módulo f_i, e_i difiere de uno por un múltiplo de f_i; para $j \neq i$, e_j es múltiplo de f_i. Por tanto, cada f_i divide a $1 - \sum_j e_j$. Como son coprimos por parejas, su producto q divide a ese polinomio. Al evaluar obtenemos $\sum_i E_i = I$.

Además, $f_i e_i = u_i q$, de modo que $f_i(T)E_i = 0$ y E_i lleva cada entrada a $\ker f_i(T)$. Esto prueba que los núcleos generan V. Si $w \in \ker f_i(T)$, la identidad de Bézout da $E_i w = w$; si $w \in \ker f_j(T)$ para $j \neq i$, el factor f_j de e_i da $E_i w = 0$. Aplicar E_i a una relación $\sum_j w_j = 0$ entre esos núcleos

obliga a $w_i = 0$ para cada i. La suma es directa y los E_i son sus proyectores. Finalmente, $f_i(T)$ conmuta con T, así que $f_i(T)w = 0$ implica $f_i(T)Tw = Tf_i(T)w = 0$; cada núcleo es invariante. □

No se exige que cada factor sea lineal ni que q sea el mínimo. Si un factor resulta innecesario para anular a T, su núcleo puede ser cero. Las proyecciones no dependen de los coeficientes de Bézout elegidos: cualquiera de esas elecciones conserva un sumando y anula los otros, y la descomposición directa fija esa acción de manera única.

Teorema 17.9 (descomposición primaria). Sea $V \neq \{0\}$ y sea $m_T = \prod_i p_i^{r_i}$ la factorización del mínimo en irreducibles mónicos distintos, con $r_i \geq 1$. Entonces los subespacios

$$W_i = \ker p_i(T)^{r_i}$$

son no nulos, invariantes y satisfacen $V = \bigoplus_i W_i$. El mínimo de T_{W_i} es exactamente $p_i^{r_i}$. Los proyectores de esa suma son polinomios de T.

Demostración. Las potencias de irreducibles distintos son coprimas por el lema. El teorema 17.8 se aplica a su producto m_T y da la suma y los proyectores. Por definición de W_i, $p_i(T)^{r_i}$ lo anula, por lo que el mínimo m_i de la restricción divide a $p_i^{r_i}$; vale $p_i^{s_i}$ con $0 \leq s_i \leq r_i$, admitiendo $s_i = 0$ si el espacio fuera cero. Como los sumandos son invariantes, 17.6 da $m_T = \operatorname{mcm}(m_1, \dots, m_r) = \prod_i p_i^{s_i}$. La unicidad de factorización obliga a $s_i = r_i$ para cada i. Así, los mínimos tienen la forma afirmada y ninguno de los espacios puede ser cero. □

Estos subespacios se llaman **componentes primarias**. Están definidos como núcleos de polinomios determinados por T, sin elegir una base. En bases concatenadas, la matriz queda diagonal por bloques, uno para cada irreducible. Cambiar una base dentro de un bloque modifica su matriz, pero no el subespacio que representa ni el mínimo de su restricción.

Para la matriz A de §17.4, sobre $\mathbb{R}$ se obtiene

$$W_2 = \ker(A - 2I)^2 = \operatorname{span}(e_1, e_2), \qquad W_{-1} = \ker(A + I) = \operatorname{span}(2, 3, -9).$$

Los dos sumandos son invariantes y complementarios. Al concatenar esas bases, la matriz es $\operatorname{diag}(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, -1)$. El tercer eje usual no era invariante; la nueva recta complementaria sí lo es. El proyector sobre W_{-1} es

$$E_{-1} = \frac{(A - 2I)^2}{9} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2/9 \\ 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E_2 = I - E_{-1}.$$

La fórmula actúa como cero en W_2 y como uno en W_{-1} porque allí $A - 2I$ multiplica por menos tres. Para e_3, las dos componentes son $(2/9, 1/3, 0)$ y $(-2/9, -1/3, 1)$, cuya suma es e_3.

Componentes primarias del ejemplo A

componente	base escogida	componente de e_3
$G_2 = \ker[(A-2I)^2]$	e_1, e_2	(2/9, 1/3, 0)
$G_{-1} = \ker(A+I)$	(2, 3, −9)	(−2/9, −1/3, 1)

Las dos componentes de la última columna suman e_3.

Figura 17.3. Las componentes se presentan con coordenadas exactas. El bloque de dimensión dos contiene una raíz repetida y no está diagonalizado; la descomposición sólo lo separa de la componente del valor menos uno.

Sobre $\mathbb{R}$, una rotación R de un cuarto de vuelta tiene mínimo irreducible $t^2 + 1$, así que toda $\mathbb{R}^2$ constituye una sola componente primaria. La descomposición no obliga a producir rectas reales que no existen. Sobre $\mathbb{C}$, el mismo mínimo se factoriza como $(t - i)(t + i)$ y aparecen dos componentes

lineales. El cuerpo interviene tanto en la triangularización como en los factores con los que se organiza la descomposición primaria.

La factorización cambia con el cuerpo

cuerpo	mínimo de R	componentes primarias
ℝ	t²+1, irreducible	una componente: ℝ², dimensión real 2
ℂ	(t−i)(t+i)	dos componentes de dimensión compleja 1

Sobre ℂ, las rectas están dentro de ℂ², no del plano real.

Figura 17.4. Se comparan subespacios sobre cuerpos distintos. Las dimensiones dos real y uno complejo se refieren a los respectivos cuerpos; no se dibujan columnas de $\mathbb{C}^2$ como rectas del mismo plano real.

17.7. La parte que queda cuando sólo hay una raíz

Definición 17.4. Un operador N es **nilpotente** si $N^r = 0$ para algún entero $r \geq 1$. En un espacio no nulo, su **índice de nilpotencia** es el menor de esos enteros. El operador cero tiene índice uno en dimensión positiva.

Proposición 17.10 (criterios de nilpotencia). En dimensión $n \geq 1$, son equivalentes: N es nilpotente; $m_N = t^r$ para algún $1 \leq r \leq n$; y $\chi_N = t^n$. El exponente r es su índice. Existe una base triangular con diagonal cero y siempre $N^n = 0$.

Demostración. Si $N^k = 0$, el mínimo divide a t^k por C15, así que es una potencia t^r, con $r \geq 1$. La cota $r \leq n$ procede de Cayley–Hamilton. Ese mínimo se escinde, de modo que 17.5 da una matriz triangular. Sus entradas diagonales son valores propios y por C15 son raíces del mínimo; todas son cero. Su característico es entonces t^n. Recíprocamente, si el característico es t^n, Cayley–Hamilton da $N^n = 0$. Finalmente, el criterio de divisibilidad muestra que t^j anula a N exactamente cuando $j \geq r$, lo que identifica el índice. □

Tener sólo cero como valor propio no implica nilpotencia si el característico no se escinde. Sobre $\mathbb{R}$, $\operatorname{diag}(0, R)$ tiene cero como único valor propio real y no es nilpotente, porque sus potencias mantienen el bloque invertible R^k. Lo que debe ser una potencia de t es el mínimo o el característico, no sólo la lista de raíces que vemos dentro del cuerpo.

Corolario 17.11 (componentes cuando el característico se escinde). Supongamos $\chi_T = \prod_i (t - \lambda_i)^{a_i}$ con valores distintos. Si $m_T = \prod_i (t - \lambda_i)^{r_i}$, entonces

$$G_{\lambda_i} = \ker(T - \lambda_i I)^{r_i} = \ker(T - \lambda_i I)^{a_i} = \ker(T - \lambda_i I)^{n}$$

es la componente primaria de λ_i y tiene dimensión a_i. En ella, $T = \lambda_i I + N_i$, donde N_i es nilpotente de índice r_i. Los G_{λ_i} se llaman **espacios propios generalizados**.

Demostración. C15 da $1 \leq r_i \leq a_i \leq n$. La descomposición primaria entrega la suma directa de los primeros núcleos y el mínimo $(t - \lambda_i)^{r_i}$ de cada restricción. Trasladar la variable muestra que el mínimo de $N_i = T_{G_{\lambda_i}} - \lambda_i I$ es t^{r_i}: $h(N_i) = 0$ equivale a que $h(t - \lambda_i)$ sea múltiplo de ese mínimo de la restricción; al poner $u = t - \lambda_i$, esto equivale a $u^{r_i} \mid h(u)$. Por 17.10, N_i es nilpotente de índice r_i.

Sobre otra componente G_{λ_j}, $T - \lambda_i I$ es invertible: los polinomios $t - \lambda_i$ y $(t - \lambda_j)^{r_j}$ son coprimos, y el criterio de C15 se aplica a la restricción. Ninguna potencia de ese operador anula un vector no nulo en ese otro sumando. Sobre la propia componente, toda potencia de exponente al menos r_i es cero. La descomposición directa prueba por tanto la igualdad de los tres núcleos.

La triangularización de N_i con diagonal cero hace que el característico de la restricción de T a G_{λ_i} sea $(t - \lambda_i)^{\dim G_{\lambda_i}}$. Multiplicar esos característicos por 17.6 y comparar con χ_T obliga a $\dim G_{\lambda_i} = a_i$. □

El espacio propio ordinario es el núcleo de la primera potencia y puede ser menor. En el ejemplo de A, $E_2 = \operatorname{span} e_1$ tiene dimensión uno, mientras $G_2 = \operatorname{span}(e_1, e_2)$ tiene dimensión dos, igual a la multiplicidad algebraica. La nilpotencia mide la acción residual de $T - 2I$ dentro de esa componente. Esta reducción proporciona bloques asociados a una sola raíz, sin fijar todavía una base para su parte nilpotente.

17.8. Separar una acción diagonalizable y una nilpotente

Los proyectores primarios son polinomios de T. Por eso conmutan con todo operador que conmute con T, y sus imágenes también son invariantes para esos operadores: si $ST = TS$, entonces $p_i(T)^{r_i} S w = S p_i(T)^{r_i} w = 0$ para $w \in W_i$. Las componentes primarias no dependen de las bases ni de los coeficientes de Bézout escogidos. Cuando los factores son lineales, permiten separar dos acciones de T sobre todo el espacio.

Teorema 17.12 (parte diagonalizable y parte nilpotente). Si m_T se escinde sobre $\mathbb{F}$, existen únicos operadores S, N tales que $T = S + N$, S es diagonalizable sobre $\mathbb{F}$, N es nilpotente y $SN = NS$. Ambos son polinomios de T. Si E_i son los proyectores de sus componentes primarias, entonces

$$S = \sum_i \lambda_i E_i, \qquad N = T - S.$$

Demostración. Si $V = \{0\}$, ambos operadores son cero y las afirmaciones se cumplen. Supongamos $V \neq \{0\}$. Por 17.5 también se escinde el característico, de modo que se aplica 17.11. En cada G_{λ_i}, la fórmula hace que S sea la multiplicación por λ_i y que N sea la parte nilpotente N_i de 17.11. Concatenar bases arbitrarias de esas componentes diagonaliza S. Si $r = \max_i r_i$, $N^r = 0$ en cada sumando y por tanto en todo V. Los proyectores son polinomios de T, de modo que también lo son S, N, y conmutan.

Para la unicidad, supongamos otra escritura $T = S' + N'$ con las mismas propiedades. Como S' y N' conmutan entre sí, ambos conmutan con T, y por ello con sus polinomios S, N. En particular, S y S' son diagonalizables conmutantes; C16 da una base común, en la cual $S - S'$ es diagonal. A su vez, N y N' conmutan y son nilpotentes. Si $N^a = 0$ y $(N')^b = 0$, el desarrollo binomial de $(N' - N)^{a+b-1}$ se anula: cada término contiene una potencia de N al menos a o una de N' al menos b. Así, $N' - N$ es nilpotente. La igualdad $S - S' = N' - N$ dice que el mismo operador es diagonalizable y nilpotente; todas las entradas de su diagonal deben ser cero, de modo que es cero. Se obtiene $S = S'$ y luego $N = N'$. $\square$

Para la matriz A que hemos seguido,

$$S = 2I - 3E_{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se verifica $S + N = A$, $N^2 = 0$ y $SN = NS$. La parte diagonalizable no es, en las coordenadas usuales, la matriz que se obtiene borrando las entradas fuera de la diagonal de A: esa operación no conservaría necesariamente la conmutación. Aquí la fórmula por componentes fija la parte escalar de la acción en cada espacio propio generalizado y deja en N la acción residual que recorre sus direcciones.

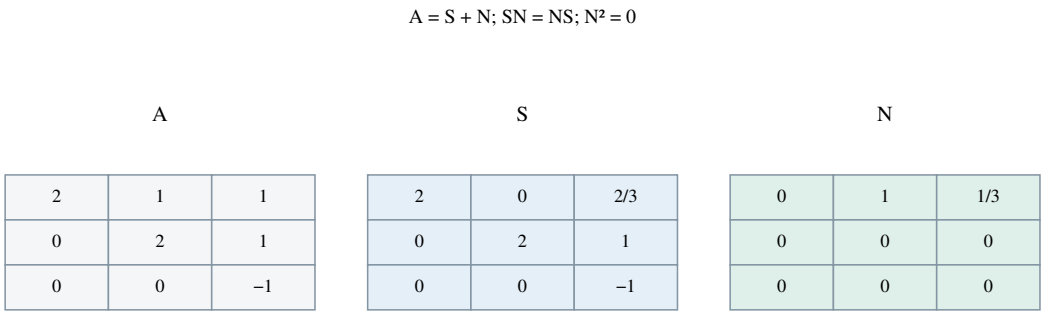


Figura 17.5. Las matrices corresponden a las coordenadas usuales. La construcción mediante los proyectores primarios hace que las dos partes conmuten; borrar las entradas fuera de la diagonal no proporciona en general esa descomposición.

La componente de dos conserva una dirección en la que $T-2I$ todavía actúa y otra en la que ya se anula. Separarla de la componente de menos uno ha permitido aislar esa dificultad sin borrarla. Las componentes y los operadores S, N quedan determinados; la elección de coordenadas dentro de la parte nilpotente permanece abierta.

17.9. Ejercicios

Los ejemplos numéricos se trabajan sobre $\mathbb{R}$ salvo indicación contraria. Las preguntas generales se entienden en dimensión finita; cuando aparezca un índice de nilpotencia o una factorización no vacía del mínimo, el espacio es no nulo. Toda fórmula sobre clases debe comprobarse con independencia del representante. Las matrices de restricción y cociente deben indicar sus bases.

Ejercicio 1 — Comprobar invariancia. Para $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&2&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$, decide si se preservan $\operatorname{span} e_1$, $\operatorname{span}(e_1,e_2)$ y $\operatorname{span} e_3$.

Ejercicio 2 — Calcular dentro y módulo una recta. Para $T(x,y)=(2x+y,2y)$ y $W=\operatorname{span} e_1$, calcula las matrices de T_W y $\overline{T}$ en las bases (e_1) y (e_2+W).

Ejercicio 3 — Una fórmula de clases que falla. Sea $S(x,y)=(y,x)$ y $W=\operatorname{span} e_1$. ¿Define $v+W\mapsto S(v)+W$ un operador en $\mathbb{R}^2/W$?

Ejercicio 4 — Los bloques de una base adaptada. Para A del ejercicio 1 y $W=\operatorname{span}(e_1,e_2)$, encuentra las matrices de restricción y cociente, sus característicos y sus mínimos.

Ejercicio 5 — Un producto que no es el mínimo. Para $T=2I_2$ y $W=\operatorname{span} e_1$, compara m_T con $m_{T_W}m_{\overline{T}}$.

Ejercicio 6 — Un complemento que no puede conservarse. Prueba que $W=\operatorname{span} e_1$ no tiene complemento invariante para $T(x,y)=(2x+y,2y)$.

Ejercicio 7 — Un complemento invariante que sí existe. Para $A=\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}$ y $W=\operatorname{span} e_1$, encuentra un complemento invariante y explica qué ocurre con el bloque de acoplamiento.

Ejercicio 8 — Una trayectoria que sólo alcanza un plano. Para $T=\operatorname{diag}(1,2,3)$ y $v=(1,1,0)$, encuentra $Z_T(v)$, su base de trayectoria y q_v. Compáralo con m_T.

Ejercicio 9 — Una trayectoria que alcanza todo el espacio. Para el mismo T y $v=(1,1,1)$, prueba que $Z_T(v)=\mathbb{R}^3$ y encuentra su polinomio de relación mínima.

Ejercicio 10 — Un polinomio como entrada cíclica. En $P_2(\mathbb{R})$, sea D la derivación formal y $v=t^2$. Encuentra la base de trayectoria y la matriz de la restricción a su subespacio cíclico.

Ejercicio 11 — Leer una bandera desde una matriz. Para $N=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, exhibe una bandera completa invariante. ¿Son propios todos los vectores de la base usual?

Ejercicio 12 — Construir una base triangular. Sea $T(x,y,z)=(y,0,x)$. Encuentra una bandera completa invariante y una base triangular superior.

Ejercicio 13 — El cuerpo y la bandera. Para la rotación real $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, decide si existe una bandera completa invariante sobre $\mathbb{R}$ y sobre $\mathbb{C}$.

Ejercicio 14 — Un único valor real que no controla las potencias. Para $A = \operatorname{diag}(0, R)$, con la rotación del ejercicio 13, encuentra el espectro real, el mínimo y decide si es nilpotente.

Ejercicio 15 — Triangularizar sin diagonalizar. Da un operador triangularizable cuyo mínimo tenga grado tres y que no sea diagonalizable. Justifica ambas conclusiones desde el mínimo.

Ejercicio 16 — Una base triangular de un operador diagonalizable. ¿Puede un operador diagonalizable tener una matriz triangular no diagonal en otra base? Da un ejemplo e identifica la diferencia entre ambas afirmaciones.

Ejercicio 17 — Un vector propio del cociente que no se levanta. Para $T(x, y) = (2x+y, 2y)$ y $W = \operatorname{span} e_1$, la clase $e_2 + W$ es propia de $\overline{T}$. ¿Existe algún representante de ella que sea propio de T?

Ejercicio 18 — Acotar un mínimo por dos operadores inducidos. Si $m_{T_W} = m_{\overline{T}} = t - a$, demuestra que m_T sólo puede ser $t - a$ o $(t - a)^2$ en dimensión positiva. Realiza las dos posibilidades en dimensión dos.

Ejercicio 19 — Bloques repetidos y mínimo. Para $A = \operatorname{diag}(R, R)$ sobre $\mathbb{R}$, calcula característico, mínimo y descomposición primaria. ¿Coinciden sus dos bloques visibles con dos componentes primarias distintas?

Ejercicio 20 — Núcleos, imágenes y conmutación. Si $ST = TS$, demuestra que $\ker S$ e $\operatorname{im} S$ son invariantes bajo T. Aplica el resultado a $S = p(T)$.

Ejercicio 21 — Preservar la imagen no basta. Para $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $E = \operatorname{diag}(1, 0)$, comprueba que T preserva $\operatorname{im} E$ pero $TE \neq ET$. ¿Qué condición falta?

Ejercicio 22 — Bézout con una raíz doble. Encuentra una identidad de Bézout entre $(t - 2)^2$ y $t + 1$. Úsala para obtener los dos proyectores del ejemplo A del capítulo.

Ejercicio 23 — Una base de componentes primarias. Para A del ejercicio 1, calcula G_2, G_{-1} y verifica la matriz en la base $e_1, e_2, (2, 3, -9)$.

Ejercicio 24 — Comparar el primer núcleo y el segundo. Para el mismo A, calcula $\ker(A - 2I)$ y $\ker(A - 2I)^2$ y explica por qué sus dimensiones miden informaciones diferentes.

Ejercicio 25 — Un factor anulador innecesario. Para $T = 2I_3$, aplica 17.8 al polinomio $(t - 2)(t - 3)$. Determina los dos núcleos y explica la diferencia con 17.9.

Ejercicio 26 — Qué ocurre sin coprimalidad. Para $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, toma $f = g = t$. Aunque $(fg)(N) = 0$, ¿se obtiene $V = \ker f(N) \oplus \ker g(N)$?

Ejercicio 27 — Una componente irreducible real. Sea $A = \operatorname{diag}(R, 2)$ sobre $\mathbb{R}$. Encuentra su descomposición primaria y decide si puede triangularizarse sobre ese cuerpo.

Ejercicio 28 — Un irreducible sobre un cuerpo finito. En $\mathbb{F}_2$, estudia $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Determina mínimo, componentes primarias y triangularizabilidad. Calcula A^3.

Ejercicio 29 — Índice de nilpotencia. Para $N(x, y, z) = (y, z, 0)$, encuentra su índice, su mínimo y su característico. Repite para el operador cero en dimensión tres.

Ejercicio 30 — Cuando dejan de crecer los núcleos. Si $\ker T^j = \ker T^{j+1}$ para algún $j \geq 1$, prueba que todos los núcleos posteriores son iguales. Si T es nilpotente, ¿qué implica esa igualdad?

Ejercicio 31 — Dimensiones ordinarias y generalizadas. Para $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, encuentra E_2, G_2, G_{-1} y sus dimensiones. Relaciona cada dimensión con una multiplicidad.

Ejercicio 32 — Una descomposición heredada por un subespacio. Si W es T-invariante y $V = \bigoplus_i W_i$ es la descomposición primaria de T, demuestra $W = \bigoplus_i (W \cap W_i)$.

Ejercicio 33 — Invertir fuera de una componente. Sobre la componente G_4 supón que $T = 4I + N$ y $N^3 = 0$. Encuentra la inversa de $T - I$ y verifica por qué ningún vector no nulo de G_4 puede pertenecer a $\ker(T - I)^k$.

Ejercicio 34 — Independencia de una identidad de Bézout. En 17.8, demuestra que dos elecciones de u_i producen el mismo proyector. Prueba también que $e_i^2 - e_i$ es múltiplo de q, donde $e_i = u_i Q_i$.

Ejercicio 35 — Los polinomios de las dos partes. Si $m_T = \prod_i (t-\lambda_i)^{r_i}$ en dimensión positiva y $T = S + N$ es la descomposición de 17.12, determina m_S y el índice de N.

Ejercicio 36 — Promediar para obtener un complemento invariante. Supón $T^2 = I$, característica distinta de dos y W invariante. Sea P cualquier proyector con imagen W. Demuestra que $E = (P + TPT)/2$ es un proyector con imagen W que conmuta con T, y deduce la existencia de un complemento invariante.

Ejercicio 37 — Triangularizar dos operadores complejos. Si S y T son operadores complejos conmutantes, demuestra que existe una misma base en la que ambos son triangulares superiores, aunque no sean diagonalizables.

Ejercicio 38 — Encontrar una recta dentro de un subespacio. Sea W un subespacio complejo no nulo preservado por T. Demuestra que W contiene una recta invariante. ¿Vale sobre $\mathbb{R}$?

Ejercicio 39 — La conmutación y la unicidad de las partes. Muestra que la unicidad de la escritura $T = S + N$, con S diagonalizable y N nilpotente, puede fallar si se omite $SN = NS$. Usa $T = \operatorname{diag}(1, 2)$.

Ejercicio 40 — Dos componentes con acción residual. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Encuentra su mínimo y sus componentes primarias. Verifica que $E = (A-2I)^2(2A+5I)/27$ proyecta sobre la componente de menos uno y calcula $S = 2I - 3E$ y $N = A - S$.

17.10. Soluciones

Solución 1. Las imágenes son $Ae_1 = 2e_1$, $Ae_2 = e_1 + 2e_2$ y $Ae_3 = e_1 + e_2 - e_3$. La primera recta y el plano de las primeras coordenadas se preservan porque las imágenes de sus generadores permanecen en ellos. La tercera recta no se preserva: Ae_3 tiene componentes no nulas en e_1 y e_2. Basta comprobar generadores por linealidad; una imagen que salga del subespacio basta para refutar la invariancia.

Solución 2. La restricción satisface $T(e_1) = 2e_1$, así que su matriz es (2). En el cociente, $T(e_2) + W = e_1 + 2e_2 + W = 2(e_2 + W)$, y su matriz también es (2). Para un representante $e_2 + ce_1$, la imagen es $2e_2 + (1+2c)e_1$ y su clase sigue siendo $2e_2 + W$. Esto comprueba directamente que la primera coordenada elegida no cambia el resultado en clases.

Solución 3. No. Los vectores cero y e_1 representan la misma clase, pero sus imágenes son cero y e_2, cuyas clases son diferentes porque $e_2 \notin W$. La causa es $S(W) \not\subseteq W$. La linealidad de S no garantiza por sí sola que la regla respete la identificación de representantes.

Solución 4. En la base (e_1, e_2), la restricción tiene matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, con característico y mínimo $(t-2)^2$: $B - 2I$ es no nula y su cuadrado es cero. En la base $(e_3 + W)$, el cociente tiene matriz (-1), con característico y mínimo $t+1$. El característico total es su producto. Los dos mínimos son coprimos y ambos dividen al mínimo total, mientras su producto lo anula por 17.2; luego $m_A = (t-2)^2(t+1)$.

Solución 5. Los tres operadores son multiplicación por dos en sus respectivos espacios no nulos. Por tanto, los tres mínimos son $t-2$. El producto de los dos mínimos inducidos es $(t-2)^2$, que anula a T pero no es su mínimo. La divisibilidad de 17.2 puede ser estricta; cuando hay una suma directa invariante, el mínimo se obtiene por menor múltiplo común.

Solución 6. Cualquier recta complementaria tiene un generador con segunda coordenada no nula; al normalizarlo queda $u = (c, 1) = e_2 + ce_1$. Se tiene $Tu = 2u + e_1$. Si la recta fuera invariante, $Tu = au$ para algún escalar. La segunda coordenada obliga a $a = 2$, y la primera dejaría $e_1 = 0$, contradicción. Los complementos como espacios vectoriales existen, pero ninguno satisface aquí la condición adicional de invariancia.

Solución 7. La recta $U = \operatorname{span}(1, 1)$ es propia de valor tres y complementa a W. En la base $e_1, (1, 1)$ la matriz es $\operatorname{diag}(2, 3)$, sin bloque de acoplamiento. El complemento usual $\operatorname{span} e_2$ no era

invariante, porque $Ae_2 = (1, 3)$. El bloque superior depende de la elección del complemento; aquí puede eliminarse porque existe una elección preservada.

Solución 8. Los vectores $v = (1, 1, 0)$ y $Tv = (1, 2, 0)$ son independientes y generan el plano $z = 0$. La siguiente imagen es $(1, 4, 0) = 3Tv - 2v$, por lo que $q_v = t^2 - 3t + 2 = (t - 1)(t - 2)$. El plano se preserva y contiene la trayectoria entera. El mínimo total es $(t - 1)(t - 2)(t - 3)$; el factor de tres no aparece en esa entrada. La matriz de la restricción en la base de trayectoria es $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, con mínimo y característico q_v.

Solución 9. Las columnas v, Tv, T^2v forman $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$, cuyo determinante es dos. Son una base y la trayectoria alcanza todo el espacio. El característico y el mínimo coinciden por 17.3, y ambos son $(t - 1)(t - 2)(t - 3) = t^3 - 6t^2 + 11t - 6$. En particular, $T^3v = 6T^2v - 11Tv + 6v$. Ninguna relación de menor grado puede existir por la independencia de las tres columnas.

Solución 10. La trayectoria comienza $t^2, 2t, 2, 0$. Los tres términos no nulos son independientes, pues tienen grados distintos y coeficientes principales no nulos; generan todo $P_2(\mathbb{R})$. La primera relación es $D^3v = 0$, así que $q_v = t^3$. En la base $(t^2, 2t, 2)$, las imágenes son el segundo vector, el tercero y cero, y la matriz es $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Esa matriz es triangular inferior en este orden; invertir el orden de la base la hace triangular superior. El teorema cíclico no exige que su orden de trayectoria sea ya el de una bandera superior.

Solución 11. La bandera es $0 \subset \operatorname{span} e_1 \subset \operatorname{span}(e_1, e_2) \subset \mathbb{R}^3$. Las imágenes $Ne_1 = 0$, $Ne_2 = e_1$ y $Ne_3 = e_2$ prueban la invariancia de cada generado inicial. Sólo e_1 es propio entre los tres vectores usuales, con valor cero; las otras dos imágenes no son múltiplos de su entrada. Una base triangular no tiene por qué ser una base propia.

Solución 12. Se tiene $Te_2 = e_1$, $Te_1 = e_3$ y $Te_3 = 0$. La bandera $0 \subset \operatorname{span} e_3 \subset \operatorname{span}(e_3, e_1) \subset V$ se preserva. En la base (e_3, e_1, e_2), las columnas de las imágenes son cero, la primera columna básica y la segunda, de modo que $[T] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. El orden se eligió para que cada imagen usara sólo posiciones anteriores.

Solución 13. Una bandera completa en dimensión dos exige una recta invariante. Sobre $\mathbb{R}$, $t^2 + 1$ no tiene raíces y no hay vectores propios, por lo que no existe tal recta. Sobre $\mathbb{C}$, $(1, -i)$ es propio de valor i y su recta inicia una bandera; al añadir $(1, i)$ se obtiene incluso una base diagonal. La escisión determina la posibilidad de triangularizar y no sólo la de diagonalizar.

Solución 14. El bloque cero de dimensión uno tiene mínimo t y el bloque de rotación mínimo $t^2 + 1$. Por suma directa invariante, $m_A = t(t^2 + 1)$; los factores son coprimos. El único valor propio real es cero, pero A no es nilpotente: para toda potencia positiva el bloque R^k permanece invertible. El característico es también $t(t^2 + 1)$ y no se escinde sobre $\mathbb{R}$. La lista de raíces reales no describe los factores irreducibles restantes.

Solución 15. Sirve N del ejercicio 11. Se tiene $N^3 = 0$ y $N^2e_3 = e_1 \neq 0$, de modo que $m_N = t^3$. Ese polinomio se escinde sobre cualquier cuerpo, así que el operador es triangularizable. Repite un factor lineal, por lo que el criterio de C16 impide diagonalizarlo. La matriz usual ya exhibe triangularidad superior.

Solución 16. La matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ es triangular y no diagonal en la base usual, pero sus valores distintos garantizan diagonalización en la base $(1, 0), (1, 1)$. La primera afirmación se refiere a una representación escogida; la segunda afirma que existe alguna base con representación diagonal. La entrada superior no nula en una base arbitraria no basta para descartar la diagonalizabilidad.

Solución 17. Todos sus representantes son $u = e_2 + ce_1$. La ecuación $Tu = 2u + e_1$ muestra que ninguno es propio de valor dos. Tampoco puede tener otro valor: la segunda coordenada de Tu es dos y la de u es uno, así que cualquier valor propio asociado tendría que ser dos. La ecuación propia en el cociente permite una diferencia en W, mientras que la ecuación en V exige que esa diferencia sea cero.

Solución 18. Por 17.2, $t-a$ divide a m_T y m_T divide a $(t-a)^2$. Los divisores mónicos intermedios son exactamente los dos indicados. La matriz aI_2 realiza el primero. La matriz $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ realiza el segundo porque su diferencia con aI es no nula y tiene cuadrado cero. En ambos ejemplos, $W = \operatorname{span} e_1$ produce las dos acciones inducidas escalares requeridas.

Solución 19. Cada bloque tiene característico y mínimo t^2+1. El característico total es $(t^2+1)^2$ y el mínimo es el menor múltiplo común, t^2+1. Como éste tiene un solo irreducible, la descomposición primaria tiene una única componente: todo $\mathbb{R}^4$. Los dos planos de los bloques son sumandos invariantes, pero no componentes primarias diferentes. La descomposición primaria agrupa todo lo asociado a un mismo irreducible y puede admitir divisiones invariantes internas.

Solución 20. Si $Sw = 0$, entonces $S(Tw) = T(Sw) = 0$, por lo que $Tw \in \ker S$. Si $w = Su$, entonces $Tw = TSu = STu \in \operatorname{im} S$. Los polinomios de T conmutan con T por C15, así que sus núcleos e imágenes se preservan. Este argumento explica directamente la invariancia de los núcleos que aparecen en la descomposición primaria.

Solución 21. La imagen de E es $\operatorname{span} e_1$, que se preserva porque $Te_1 = 2e_1$. Sin embargo, $TE = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $ET = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. El núcleo de E es $\operatorname{span} e_2$ y no se preserva. Para que la proyección conmute se necesita que también se conserve el otro sumando, según 17.6.

Solución 22. Expandir muestra $(t-2)^2 + (5-t)(t+1) = 9$. Dividir por nueve da $1 = (t-2)^2/9 + (5-t)(t+1)/9$. El primer término se anula en la componente de dos y vale uno en la de menos uno, de modo que $E_{-1} = (A-2I)^2/9$. El segundo produce $E_2 = (5I-A)(A+I)/9 = I - E_{-1}$. En cada caso se verifica la acción conservando su propio núcleo y anulando el otro, como prescribe 17.8.

Solución 23. La matriz $(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ tiene núcleo $z = 0$, así que $G_2 = \operatorname{span}(e_1, e_2)$. Resolver $(A+I)v = 0$ da la recta $G_{-1} = \operatorname{span}(2, 3, -9)$. Las columnas de $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$ forman una base, con determinante menos nueve. Las imágenes de esas columnas son $2e_1$, $e_1 + 2e_2$ y menos la tercera columna, de modo que $P^{-1}AP = \operatorname{diag}(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, -1)$. El bloque de dos permanece no diagonal.

Solución 24. Las ecuaciones de $(A-2I)v = 0$ fuerzan primero $z = 0$ y después $y = 0$, así que el núcleo es $\operatorname{span} e_1$, de dimensión uno. El segundo núcleo es el plano $z = 0$, de dimensión dos, por el ejercicio 23. El primero cuenta vectores propios independientes; el segundo recupera la componente primaria completa de dos, cuya dimensión es su multiplicidad algebraica. No todos sus vectores son propios: $(A-2I)e_2 = e_1 \neq 0$.

Solución 25. El núcleo de $T-2I$ es todo el espacio; $T-3I = -I$ es invertible y su núcleo es cero. La suma directa es $V \oplus \{0\}$ y los proyectores son I y cero. El polinomio dado anula, pero no es el mínimo, que es $t-2$. El teorema 17.8 permite factores redundantes y sumandos cero; 17.9 usa exactamente los factores del mínimo y garantiza componentes no nulas.

Solución 26. No. Ambos núcleos son la misma recta $\operatorname{span} e_1$. Su suma sigue siendo esa recta y no cubre el plano; además, no es directa porque su intersección es no nula. La identidad $N^2 = 0$ no separa dos factores iguales mediante Bézout: t y t tienen máximo común divisor t. El teorema requiere coprimalidad por parejas.

Solución 27. El mínimo es $(t^2+1)(t-2)$ porque es el menor múltiplo común de los mínimos de los bloques. Sus factores son irreducibles distintos sobre $\mathbb{R}$. La componente de t^2+1 es el plano de las primeras dos coordenadas, y la de $t-2$ es la tercera recta: sobre el otro bloque cada factor evaluado es invertible. No puede triangularizarse sobre $\mathbb{R}$ porque el mínimo no se escinde en factores lineales. Una forma diagonal por bloques no implica una forma triangular por escalares.

Solución 28. El polinomio $p = t^2+t+1$ no tiene raíces en cero ni en uno y, siendo cuadrático, es irreducible. Se verifica $A^2 = A + I$, así que p anula a A; la matriz no es escalar y su mínimo es p. Hay una sola componente primaria, todo el plano. No se triangulariza sobre $\mathbb{F}_2$ porque p no se

escinde allí. Multiplicar la relación por A da $A^3 = A^2 + A = I$ en característica dos. Tener orden finito como operador invertible no asegura valores propios en el cuerpo.

Solución 29. Las potencias actúan como $N^2(x, y, z) = (z, 0, 0)$ y $N^3 = 0$. Puesto que $N^2 e_3 = e_1 \neq 0$, el índice es tres, el mínimo t^3 y el característico t^3. Para el operador cero de dimensión tres, el índice es uno y el mínimo t, mientras el característico sigue siendo t^3. El grado del característico fija la dimensión y no distingue esos dos índices.

Solución 30. Si $T^{j+2}v = 0$, entonces $Tv \in \ker T^{j+1} = \ker T^j$, por lo que $T^{j+1}v = 0$ y $v \in \ker T^j$. Junto con las inclusiones siempre válidas, esto da $\ker T^{j+2} = \ker T^{j+1}$. Repetir el argumento prueba la estabilidad posterior. Si T es nilpotente, alguna potencia tiene núcleo V; por estabilidad, ya $\ker T^j = V$, es decir, $T^j = 0$. Una igualdad antes de cubrir V no puede ocurrir para un nilpotente.

Solución 31. El característico es $(t-2)^3(t+1)$ y el mínimo $(t-2)^2(t+1)$. La ecuación $(A - 2I)v = 0$ impone $y = 0$ y la cuarta coordenada cero; por tanto, $E_2 = \operatorname{span}(e_1, e_3)$ tiene dimensión dos, la multiplicidad geométrica. La segunda potencia anula todo el primer bloque de tres coordenadas y no la cuarta; así, $G_2 = \operatorname{span}(e_1, e_2, e_3)$ tiene dimensión tres, la multiplicidad algebraica. $G_{-1} = \operatorname{span} e_4$ tiene dimensión uno y coincide con el espacio propio ordinario de menos uno.

Solución 32. Cada proyector primario es un polinomio de T, por lo que preserva W según 17.1. Para $w \in W$, su descomposición $w = \sum_i E_i w$ tiene cada término en W y en la imagen primaria W_i. Eso prueba que las intersecciones generan W. La suma es directa porque cualquier relación entre ellas es también una relación entre los sumandos primarios de V. El argumento no exige que el mínimo se escinda en factores lineales.

Solución 33. La identidad geométrica finita da $(3I + N)^{-1} = \frac{1}{3}I - \frac{1}{9}N + \frac{1}{27}N^2$. Multiplicar por $3I + N$ deja I: los términos lineal y cuadrático se cancelan y el cúbico es cero. La misma cuenta vale en el otro orden. Cualquier potencia de un operador invertible es invertible, así que su núcleo es cero. Este cálculo ilustra por qué las potencias asociadas a un valor distinto no recuperan vectores de otra componente primaria.

Solución 34. Cada elección conserva $\ker f_i(T)$ y anula los demás núcleos; como éstos suman directamente V, ambas evaluaciones coinciden. Polinómicamente, dos elecciones e_i, e_i^* tienen diferencia divisible por f_i porque ambas son congruentes con uno módulo ese factor, y por cada f_j, $j \neq i$, porque ambas contienen Q_i. La coprimalidad obliga a que q divida la diferencia. Asimismo, $e_i^2 - e_i$ es divisible por f_i al ser e_i congruente con uno, y por todos los otros factores al ser congruente con cero. Luego q lo divide. Evaluar esa identidad da directamente la idempotencia.

Solución 35. En cada componente primaria no nula, S multiplica por λ_i, así que es diagonalizable con todos esos valores. Su mínimo es $\prod_i (t - \lambda_i)$ por C16. La restricción de N a la componente i tiene índice r_i, y por tanto $N^r = 0$ para $r = \max_i r_i$. En una componente que alcance el máximo, N^{r-1} no es cero; si r es uno, esa afirmación se refiere a la identidad en un espacio no nulo. Así, el índice global es r. En particular, N es cero exactamente cuando todos los exponentes son uno.

Solución 36. Tanto P como TPT tienen imagen contenida en W: T preserva W. Para $w \in W$, $Pw = w$ y $Tw \in W$, por lo que $TPTw = T(Tw) = w$. Entonces E toma valores en W y es la identidad allí; se deduce $E^2 = E$ e imagen W. Además, $TE = (TP + PT)/2 = ET$, usando $T^2 = I$. Por 17.6, $\ker E$ también es invariante y complementa a W. La división por dos es legítima por hipótesis. En característica dos, el bloque $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es una involución y su primera recta no tiene complemento invariante, por el argumento del ejercicio 6 con a igual a uno.

Solución 37. Procedemos por inducción sobre la dimensión. Si es positiva, S tiene un valor propio por el TFA admitido de T1 §26.15 y C14. Su espacio propio no nulo se preserva por T, porque conmutan. La restricción de T a ese espacio tiene un vector propio, por la misma existencia compleja, y ese vector es propio de ambos. Su recta W es invariante para los dos. En V/W, los operadores inducidos conmutan: aplicar sus composiciones a una clase equivale a aplicar ST o TS y luego tomar la clase. La inducción proporciona una base triangular común del cociente. Levantar sus representantes y anteponer el vector de W produce una base cuyos generados iniciales son invariantes para ambos, como en 17.5. En dimensión cero la base vacía inicia la inducción. No se ha supuesto una base común propia.

Solución 38. La restricción T_W es un operador complejo de dimensión finita positiva. El TFA admitido y el criterio de C14 le dan un vector propio no nulo, cuya recta pertenece a W y es

invariante bajo T. Sobre $\mathbb{R}$ puede fallar: para W igual al plano y T una rotación de un cuarto de vuelta, no hay ninguna recta propia real. La positividad de dimensión y el cuerpo son las hipótesis que permiten el argumento de existencia.

Solución 39. Una escritura es S=T y N=0. Otra es $S^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $N^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. La primera tiene valores distintos y es diagonalizable, la segunda tiene cuadrado cero, y su suma es T. Pero $S^*N^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $N^*S^* = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ son diferentes. Esa escritura no satisface la hipótesis de 17.12, por lo que no contradice su unicidad.

Solución 40. El característico triangular es $(t-2)^2(t+1)^2$. El espacio propio de dos es span e_1, y resolver $(A+I)v = 0$ da una recta: los dos valores tienen multiplicidad geométrica uno y algebraica dos. Por 17.11, cada componente tiene dimensión dos y, si el exponente de su factor en el mínimo fuese uno, la acción allí sería escalar y su espacio propio tendría dimensión dos. Por tanto, ambos exponentes son dos y $m_A = (t-2)^2(t+1)^2$. Se obtiene $G_2 = \operatorname{span}(e_1, e_2)$ y $G_{-1} = \operatorname{span}(u, v)$, donde $u = (-2/9, -1/3, 1, 0)$ y $v = (-1/27, -1/9, 0, 1)$; sustituirlos en $(A+I)^2$ verifica el núcleo y son independientes. El polinomio $e(t) = (t-2)^2(2t+5)/27$ es múltiplo de $(t-2)^2$ y satisface $1 - e(t) = (t+1)^2(7-2t)/27$, así que tiene las congruencias de proyección. Su evaluación es $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2/9 & -1/27 \\ 0 & 0 & -1/3 & -1/9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Luego $S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 & 1/9 \\ 0 & 2 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/3 & -1/9 \\ 0 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La fórmula de proyección hace que S actúe por dos y menos uno en las dos componentes; por ello es diagonalizable. Ambas matrices son polinomios de A y conmutan. Multiplicar N por sí misma da cero, con cancelación de las dos contribuciones a la posición (1,4); N es no nula y tiene índice dos. Así se verifican todas las condiciones de 17.12.

Lecturas y referencias

Hoffman–Kunze, *Linear Algebra*, §§6.4, 6.7–6.8, desarrolla invariancia, sumas preservadas y descomposición primaria. Axler, *Linear Algebra Done Right*, §5C, relaciona triangularidad, generados iniciales y escisión del mínimo; sus ejercicios sobre operadores cociente permiten continuar el vínculo con clases. Friedberg, Insel y Spence, *Linear Algebra*, §5.4, estudia restricciones y subespacios cíclicos. Aquí la triangularización se construye mediante operadores cociente, y la descomposición primaria mediante identidades de Bézout demostradas sobre el cuerpo de trabajo.

Capítulo 18

Forma de Jordan

Para el operador $T(x, y, z) = (2x + y, 2y + z, 2z)$, el único espacio propio es la recta generada por e_1. Con una sola dirección propia no podemos formar una base de tres vectores. Los otros dos vectores usuales, sin embargo, tienen una relación precisa con esa recta: si restamos la parte escalar y escribimos $N = T - 2I$, obtenemos $Ne_3 = e_2$, $Ne_2 = e_1$ y $Ne_1 = 0$. Cada aplicación de N baja un peldaño hasta llegar a cero.

En C17 separamos el espacio en componentes primarias. Sobre la componente correspondiente a λ, el operador toma la forma $\lambda I + N$, con N nilpotente. Queda por organizar esa parte nilpotente. Una base formada por cadenas como la anterior hará visible toda su acción; las longitudes de las cadenas serán la información que no depende de la base elegida.

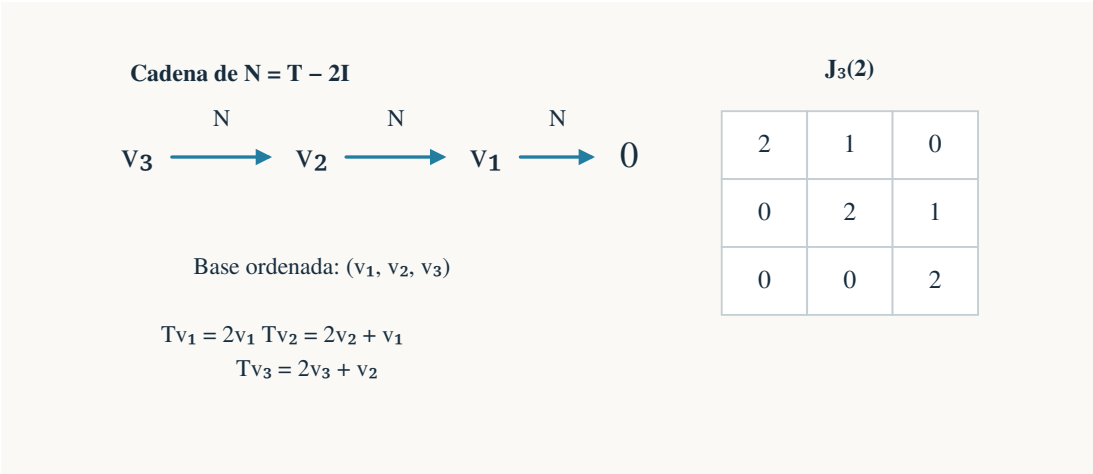


Figura 18.1. Las flechas representan la acción de $N = T - 2I$. Ordenamos la base desde el vector que muere primero hasta el que inicia la trayectoria más larga. Por eso los unos de la matriz quedan encima de la diagonal.

Trabajaremos en dimensión finita sobre un cuerpo conmutativo $\mathbb{F}$. La construcción nilpotente funciona sobre cualquier cuerpo; la forma de Jordan de un operador general exigirá que su característico se escinda en $\mathbb{F}$. Usaremos los núcleos e imágenes de C09 y los cocientes de C11, las matrices de cambio de base de C12, los polinomios de operadores de C15 y la descomposición primaria de C17. Para el espacio cero se admiten la base vacía y la matriz sin bloques, con característico y mínimo iguales a uno.

18.1. Una filtración que cuenta la duración de las trayectorias

Sea $N : V \to V$ nilpotente. Escribamos $K_j = \ker N^j$ para $j \geq 0$, de modo que $K_0 = \{0\}$. Un vector de K_j desaparece después de aplicar N a lo sumo j veces. Tenemos $K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \cdots$, pues $N^j v = 0$ implica $N^{j+1} v = 0$. Si $N^r = 0$, entonces $K_r = V$.

Lema 18.1 (incrementos de los núcleos). Para $j \geq 1$, la regla $v + K_j \mapsto Nv + K_{j-1}$ define una aplicación inyectiva de K_{j+1}/K_j en K_j/K_{j-1}. En consecuencia, si $\kappa_j = \dim K_j$, los incrementos $\kappa_j - \kappa_{j-1}$ forman una sucesión no creciente de enteros no negativos. Si $V \neq 0$ y r es el índice de nilpotencia, las inclusiones hasta K_r son estrictas.

Demostración. Para $v \in K_{j+1}$, se cumple $N^j(Nv) = 0$, de modo que $Nv \in K_j$. Cambiar v por un vector de su misma clase añade un elemento de K_j; su imagen por N pertenece a K_{j-1}. La regla queda bien definida y es lineal. Si su salida es cero, $Nv \in K_{j-1}$, luego $N^j v = 0$ y $v \in K_j$. Su núcleo es cero. Comparar dimensiones de cocientes da la desigualdad entre incrementos.

Si una inclusión $K_{j-1} \subseteq K_j$ fuera igualdad, el incremento correspondiente sería cero y todos los posteriores también. La sucesión no podría volver a crecer. Para $j < r$ esto contradice $K_r = V$ y $N^{r-1} \neq 0$; para $j = r$, la igualdad contradiría directamente $K_{r-1} \neq V$. □

Esta restricción ya descarta datos imposibles. Las nulidades $0, 2, 3, 5$ no pueden ser las primeras de un nilpotente: sus incrementos serían $2, 1, 2$, y el último crecimiento excedería al anterior. Cada nivel nuevo debe encontrar suficiente espacio en el nivel previo para que su imagen quede allí.

18.2. Cadenas y sus primeros vectores

Definición 18.1. Una **cadena nilpotente de longitud** s es una lista $(v_1, \dots, v_s)$ con $v_1 \neq 0$, $Nv_1 = 0$ y $Nv_j = v_{j-1}$ para $2 \leq j \leq s$. Llamaremos v_1 su vector inferior y v_s su cabeza. Una **cadena para T correspondiente a λ** es una cadena nilpotente de $T - \lambda I$.

Partir de una cabeza v con $N^s v = 0$ y $N^{s-1} v \neq 0$ produce la cadena $(N^{s-1}v, \dots, Nv, v)$. Su longitud registra exactamente cuántos pasos necesita esa trayectoria para morir. Al juntar varias cadenas, la independencia de sus vectores inferiores controla todas las alturas.

Lema 18.2 (independencia de cadenas). Los vectores de una familia finita de cadenas nilpotentes son linealmente independientes si y sólo si sus vectores inferiores son linealmente independientes.

Demostración. La necesidad procede de tomar una subfamilia de una familia independiente. Para la suficiencia, consideremos una relación entre todos los vectores de las cadenas y supongamos que tiene algún coeficiente no nulo. Sea j el mayor nivel que aparece con coeficiente no nulo, numerando desde abajo. Aplicar N^{j-1} anula todos los niveles menores y convierte cada vector de nivel j en el inferior de su cadena. Obtenemos una relación entre vectores inferiores independientes. Todos sus coeficientes deben ser cero, en contradicción con la elección de j. □

En particular, una sola cadena siempre es independiente. Dos cabezas independientes, en cambio, pueden conducir al mismo vector inferior. Por ejemplo, si $Ne_2 = e_1$ y $Ne_3 = e_1$, las cabezas e_2, e_3 son independientes, pero las dos cadenas comparten e_1. El criterio mira lo que queda al final de cada trayectoria.

18.3. Construir una base completa de cadenas

Teorema 18.3 (base de cadenas nilpotentes). Todo operador nilpotente de un espacio de dimensión finita admite una base que es unión de cadenas nilpotentes.

Demostración. Inducimos sobre $\dim V$. Para $V = 0$, la base vacía cumple lo pedido. Supongamos $V \neq 0$ y pongamos $W = \operatorname{im} N$. Este subespacio es invariante bajo N y tiene dimensión menor que V: si N fuera sobreyectivo sería inyectivo en dimensión finita, y ninguna potencia suya podría ser cero sobre un espacio no nulo. La restricción a W sigue siendo nilpotente.

Por inducción, W tiene una base de cadenas $(w_{i,1}, \dots, w_{i,s_i})$, con $1 \leq i \leq b$. Cada cabeza w_{i,s_i} pertenece a $\operatorname{im} N$; elegimos $u_i \in V$ tal que $Nu_i = w_{i,s_i}$. Así obtenemos una cadena más larga $(w_{i,1}, \dots, w_{i,s_i}, u_i)$.

Los b vectores inferiores $w_{i,1}$ son independientes y pertenecen a $\ker N$. Completémoslos hasta una base de ese núcleo añadiendo $z_1, \dots, z_c$. Cada z_j forma una cadena de longitud uno. Los vectores inferiores de las cadenas alargadas y de estas nuevas cadenas forman una base de $\ker N$; el lema 18.2 asegura que todos los vectores reunidos son independientes.

Falta contar. La base de W aportó $\dim W$ vectores, los levantamientos añadieron b y la ampliación del núcleo añadió c, donde $b + c = \dim \ker N$. El total es $\operatorname{rg} N + \dim \ker N = \dim V$. La familia independiente es una base. El argumento incluye $N = 0$: en ese caso $W = 0$, no hay cadenas que alargar y toda base de $V = \ker N$ consta de cadenas unitarias. □

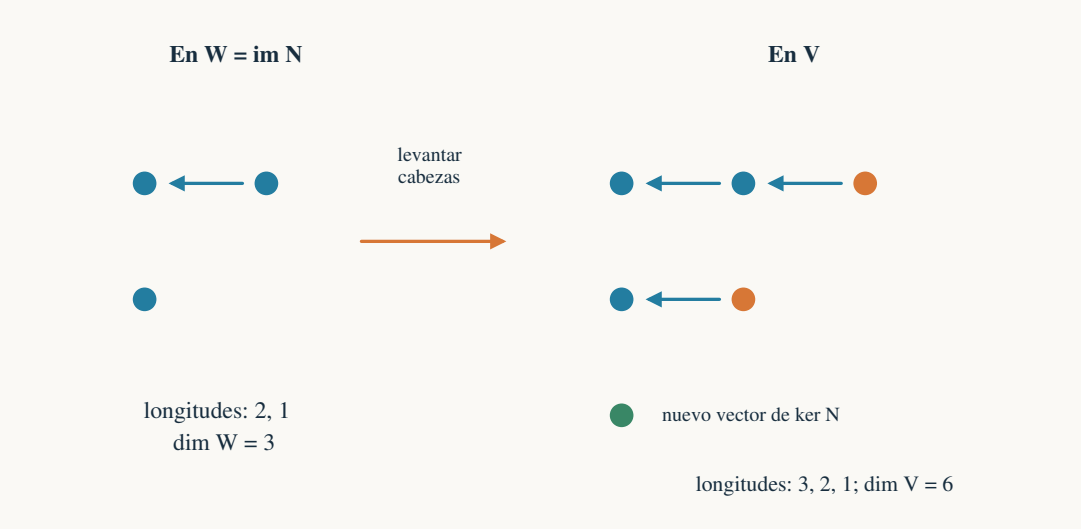


Figura 18.2. Una base de la imagen con longitudes dos y uno se levanta a cadenas de longitudes tres y dos. Un vector inferior adicional completa el núcleo y aporta una cadena unitaria. El espacio del ejemplo tiene dimensión seis.

La demostración da un procedimiento efectivo: calcular una base de la imagen, representar allí la restricción, resolver el problema en dimensión menor, levantar cada cabeza mediante un sistema lineal y completar los vectores inferiores dentro del núcleo. Los levantamientos pueden elegirse libremente entre las soluciones; la independencia se conserva porque depende de los vectores inferiores, que ya estaban fijados.

18.4. La matriz de una cadena

Definición 18.2. El **bloque de Jordan** de tamaño $s \geq 1$ y valor λ es $J_s(\lambda) = \lambda I_s + U_s$, donde U_s tiene unos en las posiciones $(i, i+1)$ y ceros en las restantes. Por ejemplo,

$$J_4(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Si $(v_1, \dots, v_s)$ es una cadena para $T - \lambda I$, entonces $Tv_1 = \lambda v_1$ y $Tv_j = \lambda v_j + v_{j-1}$ para $j > 1$. Escribir esas imágenes por columnas da exactamente $J_s(\lambda)$. El subespacio generado por la cadena es invariante. En el caso nilpotente, el teorema 18.3 descompone V como suma directa de estos subespacios, con bloques $J_s(0)$.

Definición 18.3. Una **base de Jordan** de T es una base que es unión de cadenas correspondientes a valores propios. Su matriz, diagonal por bloques de Jordan, se llama una **forma de Jordan** de T. Se pueden permutar los bloques; cuando se desea fijar su presentación, se agrupan por valor propio y se ordenan sus tamaños de mayor a menor dentro de cada grupo.

Una base de Jordan contiene vectores propios y vectores que llegan a ellos después de aplicar varias veces $T - \lambda I$. No se exige que todos sean propios. Las posiciones de los unos dependen del orden dentro de las cadenas; en este libro el vector inferior va primero.

18.5. Leer las longitudes desde los núcleos

Proposición 18.4 (nulidades y rangos). Si una base de cadenas de N tiene longitudes $s_1, \dots, s_b$, entonces, para todo $j \geq 0$,

$$\kappa_j = \dim \ker N^j = \sum_{i=1}^{b} \min(j, s_i), \qquad \operatorname{rg} N^j = \sum_{i=1}^{b} \max(s_i - j, 0).$$

Más precisamente, una base de $\ker N^j$ consta de los primeros $\min(j, s_i)$ vectores de cada cadena.

Demostración. En una cadena, $N^j v_k$ es cero si $k \leq j$, y es v_{k-j} si $k > j$. Las imágenes no nulas de los vectores de la base son distintas y forman una subfamilia independiente de ella. Por

tanto, una combinación queda en el núcleo exactamente cuando sus coeficientes en los lugares $k > j$ son cero. Esto identifica una base del núcleo y cuenta sus elementos. Los vectores restantes tienen imágenes independientes y forman una base de la imagen; su número da la segunda fórmula. □

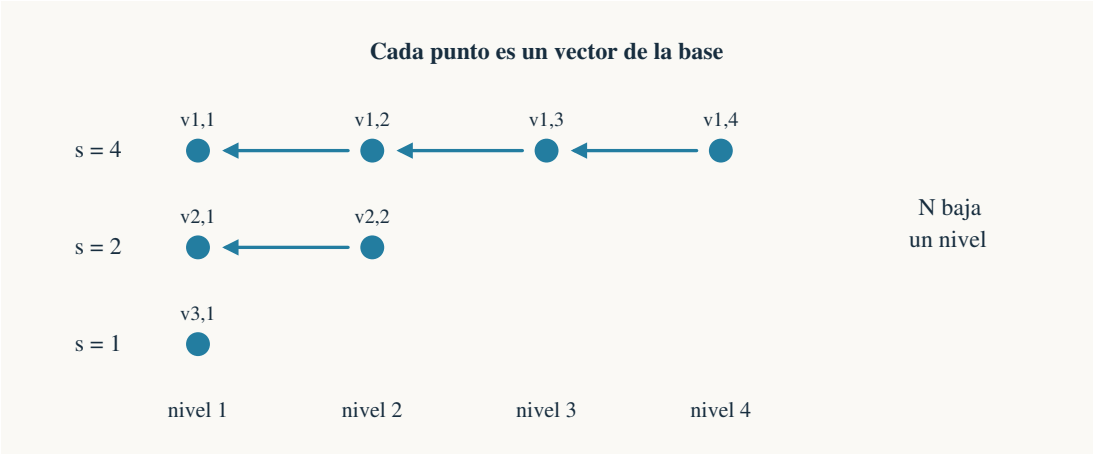


Figura 18.3. Los primeros j niveles contienen una base de $\ker N^j$. Cada cadena que alcanza el nivel j añade exactamente un vector al pasar del núcleo anterior al siguiente.

Corolario 18.5 (recuperación y unicidad de los tamaños). El número b_j de bloques de tamaño al menos j y el número c_j de bloques de tamaño exactamente j son

$$b_j = \kappa_j - \kappa_{j-1}, \qquad c_j = b_j - b_{j+1} = 2\kappa_j - \kappa_{j-1} - \kappa_{j+1} \quad (j \geq 1).$$

Las nulidades determinan, por tanto, todas las longitudes con sus repeticiones. El número total de bloques es κ_1 y, si $V \neq 0$, el mayor tamaño es el índice de nilpotencia.

Demostración. En la diferencia de las fórmulas de 18.4, una cadena aporta uno si $s_i \geq j$ y cero si $s_i < j$. Esto prueba la fórmula de b_j. Restar las cantidades de cadenas que alcanzan los niveles j y $j+1$ cuenta las que terminan en el primero. Los bloques son tantos como sus vectores inferiores, que forman una base del núcleo. Finalmente, N^j es cero precisamente cuando j alcanza todas las longitudes. □

Para las longitudes $4, 2, 1$, las nulidades son $0, 3, 5, 6, 7, 7, \ldots$. Sus incrementos son $3, 2, 1, 1, 0, \ldots$. Hay tres bloques, dos llegan al segundo nivel, uno llega al tercero y ese mismo llega al cuarto. Las diferencias sucesivas dan un bloque de tamaño uno, uno de tamaño dos, ninguno de tamaño tres y uno de tamaño cuatro. La repetición de la nulidad final permite calcular también c_4 sin inventar un crecimiento posterior.

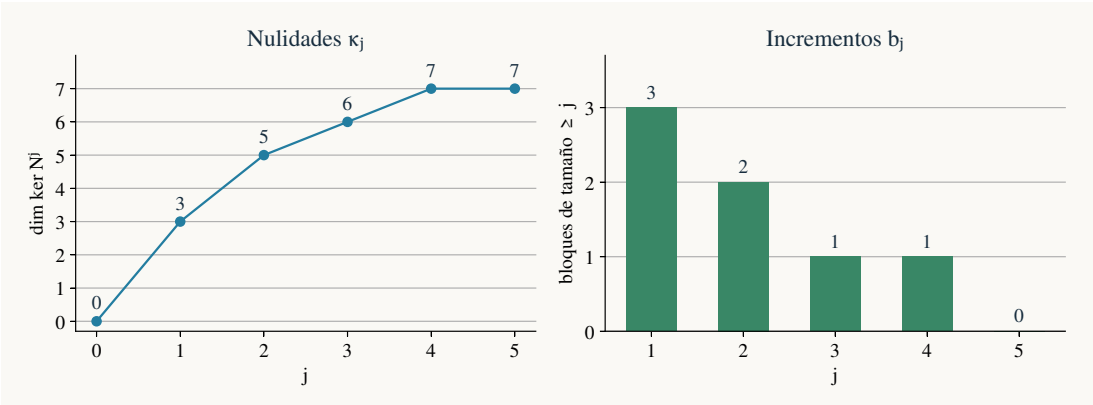


Figura 18.4. Los valores se evalúan en índices enteros. Los incrementos cuentan cadenas que sobreviven hasta cada nivel; sus diferencias cuentan cadenas que terminan allí.

Las bases construidas en 18.3 pueden variar. Los tamaños que producen no varían, porque las dimensiones de los núcleos pertenecen al operador. Ésta es la primera parte de la canonicidad de Jordan.

18.6. Separar valores propios y reunir las cadenas

Teorema 18.6 (existencia de la forma de Jordan). Un operador de dimensión finita admite una forma de Jordan sobre $\mathbb{F}$ si y sólo si su polinomio característico se escinde sobre $\mathbb{F}$.

Demostración. Si existe una forma de Jordan, su matriz es triangular y su característico es el producto de sus factores diagonales $t-\lambda$, de modo que se escinde.

Supongamos ahora que el característico se escinde. C17, corolario 17.11, proporciona la suma directa $V=\bigoplus_\lambda G_\lambda$, donde $G_\lambda=\ker(T-\lambda I)^{r_\lambda}$ y r_λ es el exponente de $t-\lambda$ en el mínimo. Sobre G_λ, el operador $N_\lambda=(T-\lambda I)|_{G_\lambda}$ es nilpotente. Por 18.3 elegimos una base de cadenas de cada N_λ. La suma directa garantiza que reunir todas esas bases da una base de V. La acción de T sobre cada cadena tiene matriz $J_s(\lambda)$, como se comprobó por columnas en 18.4. La matriz total es diagonal por esos bloques. Para el espacio cero la afirmación se cumple con los convenios iniciales. □

Sobre $\mathbb{C}$ la existencia se sigue del teorema fundamental del álgebra, conservando el estatuto de resultado externo admitido en T1, §26.15. Sobre $\mathbb{R}$ puede fallar: la rotación de matriz $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ tiene característico t^2+1, que no se escinde allí. Al extender los escalares a $\mathbb{C}$, esa misma matriz sí tiene forma de Jordan, en este caso diagonal.

Proposición 18.7 (datos de cada valor propio). Supongamos que el característico se escinde y fijemos un valor propio λ. Si sus tamaños de bloque son $s_{\lambda,1},\dots,s_{\lambda,b_\lambda}$, entonces

$$\dim\ker(T-\lambda I)^j=\sum_{i=1}^{b_\lambda}\min(j,s_{\lambda,i}),\qquad a_\lambda=\sum_i s_{\lambda,i},\qquad g_\lambda=b_\lambda,\qquad r_\lambda=\max_i s_{\lambda,i}.$$

Aquí a_λ y g_λ son las multiplicidades algebraica y geométrica, y r_λ es el exponente de $t-\lambda$ en el mínimo. Las diferencias de nulidades de 18.5 recuperan todos los bloques de λ, calculando los núcleos en el espacio completo.

Demostración. En G_λ se aplica 18.4. En una componente G_μ con $\mu\neq\lambda$, la restricción de $T-\lambda I$ es $(\mu-\lambda)I+N_\mu$. Es invertible: al factorizar el escalar no nulo, su inversa es una suma geométrica finita de potencias de $-N_\mu/(\mu-\lambda)$. Todas sus potencias tienen núcleo cero. Por ello el núcleo total recibe contribución sólo de G_λ y se obtiene la primera fórmula.

El característico de un bloque es $(t-\lambda)^s$, por triangularidad, y el producto de los característicos de los bloques da $a_\lambda=\sum_i s_{\lambda,i}$. Para $j=1$, cada bloque correspondiente aporta una dimensión al espacio propio y obtenemos $g_\lambda=b_\lambda$. Por C17, el índice de nilpotencia de N_λ es r_λ; el corolario 18.5 lo identifica con la mayor longitud. □

Así se leen las dos expresiones polinómicas desde los bloques:

$$\chi_T(t)=\prod_\lambda(t-\lambda)^{\sum_i s_{\lambda,i}},\qquad m_T(t)=\prod_\lambda(t-\lambda)^{\max_i s_{\lambda,i}}.$$

La diagonalización corresponde a que todos los tamaños sean uno. Tener un único bloque para un valor propio significa que su multiplicidad geométrica es uno, aunque la algebraica pueda ser grande.

Corolario 18.8 (clasificación por semejanza en el caso escindido). Dos matrices del mismo orden cuyos característicos se escinden son semejantes si y sólo si tienen los mismos valores propios y los mismos tamaños de bloque, con sus repeticiones. Equivalentemente, tienen los mismos valores propios y las mismas nulidades de $(A-\lambda I)^j$ para todo λ propio y $1\le j\le n$.

Demostración. Si $B=P^{-1}AP$, entonces $(B-\lambda I)^j=P^{-1}(A-\lambda I)^jP$, de modo que P lleva un núcleo sobre el otro y sus dimensiones coinciden. Las nulidades determinan los tamaños por 18.5 y 18.7. En la otra dirección, ordenar de igual manera bloques coincidentes produce una matriz J común; si $A=PJP^{-1}$ y $B=QJQ^{-1}$, se obtiene $B=(PQ^{-1})^{-1}A(PQ^{-1})$. Hasta $j=n$ basta: ningún bloque puede superar la dimensión, y después las nulidades permanecen constantes. □

Los datos χ_T, m_T y las multiplicidades geométricas juntos todavía pueden ser insuficientes. Las particiones nilpotentes $(3,3,1)$ y $(3,2,2)$ tienen dimensión siete, tres bloques e índice tres. Ambas dan $\chi=t^7$ y $m=t^3$, pero sus nulidades segundas son cinco y seis. Por 18.8 representan clases de semejanza distintas.

18.7. De los tamaños a una base verificable

Consideremos sobre $\mathbb{Q}$ la matriz

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se tiene $Ne_2 = 2e_1$, $Ne_3 = e_2 + e_4$ y $Ne_1 = Ne_4 = 0$. Por tanto $N^2 e_3 = 2e_1$ y $N^3 = 0$. Los rangos de N, N^2, N^3 son $2, 1, 0$, así que las nulidades son $2, 3, 4$. Los incrementos $2, 1, 1$ anuncian dos bloques, de tamaños tres y uno.

Tomamos la cabeza e_3. Su cadena ordenada es $(2e_1, e_2 + e_4, e_3)$. El vector e_4 pertenece al núcleo y es independiente del inferior $2e_1$; aporta la cadena unitaria restante. Con estas columnas,

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La igualdad $NP = PJ$ expresa, columna por columna, las dos cadenas. Además $\det P = 2 \neq 0$, de modo que $P^{-1}NP = J$. Verificar esa identidad y la invertibilidad de P evita que una lista de tamaños correcta oculte una base mal elegida.

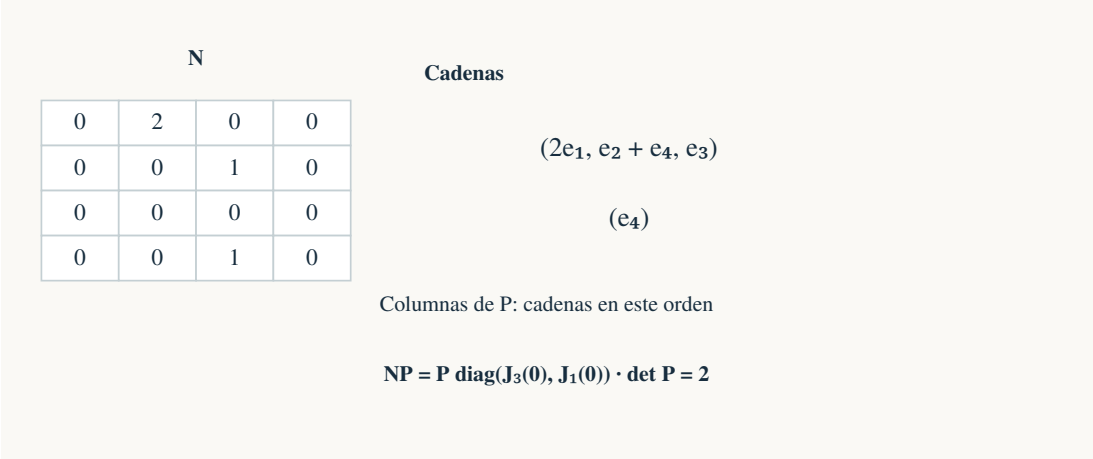


Figura 18.5. La cabeza e_3 aporta tres vectores y e_4 completa el núcleo. Las columnas aparecen en el mismo orden que los bloques de J.

Hay otra construcción útil cuando ya se han calculado todos los núcleos. A una cabeza de longitud j podemos añadir elementos de K_{j-1} sin modificar su vector inferior, y las imágenes por N de cabezas más largas ya suministran parte de K_j. El cociente siguiente separa esas dos redundancias.

Proposición 18.9 (elección compatible de cabezas). Sea N nilpotente en $V \neq 0$, de índice r. Para $1 \leq j \leq r$, pongamos

$$H_j = K_j / (K_{j-1} + N K_{j+1}), \qquad K_{r+1} = V.$$

Se tiene $\dim H_j = c_j$, el número de bloques de tamaño exactamente j. Eligiendo representantes en K_j de una base de cada H_j, y formando con cada representante una cadena de longitud j, se obtiene una base de Jordan de N.

Demostración. El denominador está contenido en K_j, pues $N^{j+1}v = 0$ implica $N^j(Nv) = 0$. Definamos $B_j = \ker N \cap \operatorname{im} N^{j-1}$. La aplicación $K_j \to B_j$, $v \mapsto N^{j-1}v$, es sobreyectiva: si $b = N^{j-1}v$ y $Nb = 0$, entonces $v \in K_j$. Su núcleo es K_{j-1}. Además, lleva NK_{j+1} sobre B_{j+1}: sus imágenes son $N^j u$ para $u \in K_{j+1}$, y éstos son exactamente los elementos de $\ker N \cap \operatorname{im} N^j$. Resulta un isomorfismo

$$H_j \longrightarrow B_j/B_{j+1}, \qquad v + (K_{j-1} + NK_{j+1}) \longmapsto N^{j-1}v + B_{j+1}.$$

En una base de cadenas existente por 18.3, B_j está generado por los vectores inferiores de las cadenas de longitud al menos j. Así $\dim B_j = b_j$ y $\dim H_j = b_j - b_{j+1} = c_j$.

Elijamos los representantes del enunciado. Sus imágenes $N^{j-1}v$ representan una base de B_j/B_{j+1}. En la filtración descendente $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \cdots \supseteq B_{r+1} = 0$, levantar bases de los cocientes sucesivos produce una base de B_1: empezando por el último cociente, cada paso añade vectores independientes módulo el subespacio ya generado y completa el siguiente espacio. Por tanto, todos los vectores inferiores elegidos forman una base de $\ker N$.

Cada cabeza tiene longitud exactamente j, pues su clase no nula impide que esté en K_{j-1}. El lema 18.2 asegura la independencia de todas las cadenas. Aportan $\sum_j jc_j = \dim V$ vectores, porque los c_j ya cuentan los tamaños de una base de cadenas existente. La familia es una base. □

Esta elección exige bases de cocientes, que se calculan extendiendo primero una base de $K_{j-1} + NK_{j+1}$ a una de K_j. No basta tomar cualquier vector que aparezca al ampliar una base de un núcleo: podría ser un tramo de una cadena más larga y repetir una dirección inferior ya utilizada.

Volvamos también al ejemplo de C17,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sus componentes primarias son $G_2 = \operatorname{span}(e_1, e_2)$ y $G_{-1} = \operatorname{span}(u, v)$, donde

$$u = (-2/9, -1/3, 1, 0), \qquad v = (-1/27, -1/9, 0, 1).$$

Las relaciones $(A - 2I)e_1 = 0$, $(A - 2I)e_2 = e_1$, $(A + I)u = 0$ y $(A + I)v = u$ dan dos cadenas. Si $P = (e_1\ e_2\ u\ v)$, entonces $\det P = 1$ y $AP = P \operatorname{diag}(J_2(2), J_2(-1))$. La base primaria anterior queda ahora organizada internamente: cada componente tiene una sola cadena de longitud dos.

18.8. Calcular con un bloque

Proposición 18.10 (evaluación polinómica). Escribamos la identidad formal $p(\lambda + z) = \sum_{j \geq 0} a_j z^j$ en $\mathbb{F}[z]$. Entonces

$$p(J_s(\lambda)) = \sum_{j=0}^{s-1} a_j U_s^j.$$

Demostración. La identidad es un cambio de variable entre polinomios. Evaluarla en U_s sustituye $\lambda + z$ por $\lambda I + U_s = J_s(\lambda)$. Los términos de grado al menos s desaparecen porque $U_s^s = 0$. La evaluación respeta sumas y productos por C15, así que no se necesita una expansión analítica. □

La fórmula conserva sentido en característica positiva sin dividir por factoriales. Cada potencia U_s^j tiene unos en la j-ésima diagonal superior. Por eso el coeficiente a_j ocupa esa diagonal de $p(J_s(\lambda))$. Para $s = 3$, $\lambda = 2$ y $p(t) = t^3$, la expansión $(2 + z)^3 = 8 + 12z + 6z^2 + z^3$ da

$$J_3(2)^3 = 8I + 12U_3 + 6U_3^2 = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 6 \\ 0 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

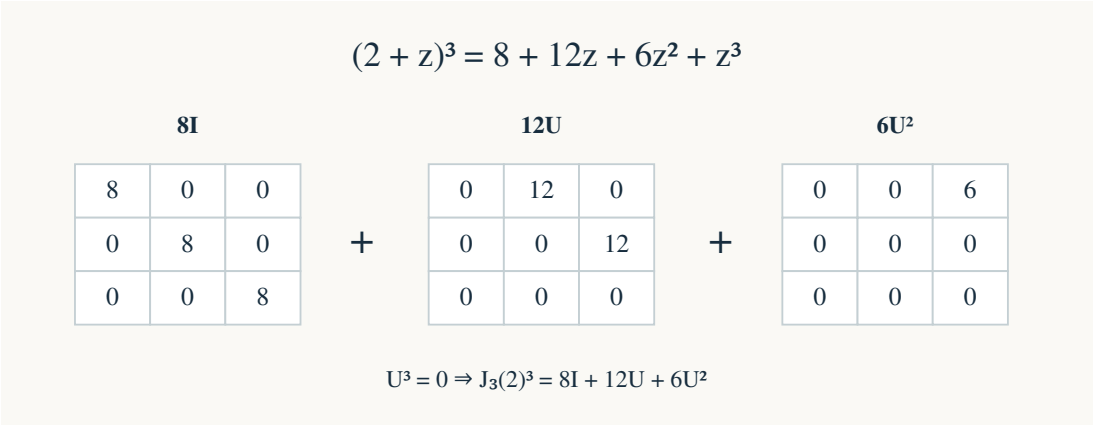


Figura 18.6. Los coeficientes de la expansión formal se colocan por diagonales. La potencia cúbica del desplazamiento es cero y no aporta una cuarta diagonal.

Corolario 18.11 (potencias e inversa). Para $k \geq 0$,

$$J_s(\lambda)^k = \sum_{j=0}^{\min(k,s-1)} \binom{k}{j} \lambda^{k-j} U_s^j.$$

Si $\lambda \neq 0$, el bloque es invertible y

$$J_s(\lambda)^{-1} = \lambda^{-1} \sum_{j=0}^{s-1} (-\lambda^{-1} U_s)^j.$$

Los coeficientes binomiales se interpretan en $\mathbb{F}$; en los exponentes cero se usa $\lambda^0 = 1$, también para $\lambda = 0$.

Demostración. La primera identidad resulta de 18.10 y el binomio para $(\lambda + z)^k$. Para la segunda, pongamos $X = -\lambda^{-1} U_s$. Al multiplicar $I - X$ por $I + X + \cdots + X^{s-1}$ queda $I - X^s = I$. Como $X^s = 0$ y $J_s(\lambda) = \lambda(I - X)$, obtenemos la inversa anunciada. Si $\lambda = 0$, el bloque es nilpotente en dimensión positiva y no es invertible. $\square$

Si $A = PJP^{-1}$, calcular A^k se reduce a calcular cada bloque de J^k y volver mediante PJ^kP^{-1}. La matriz P conserva su importancia: los bloques describen la acción en una base adaptada; para recuperar coordenadas originales hay que realizar el cambio de base.

18.9. Ejercicios y soluciones

Los ejercicios siguen la construcción desde las trayectorias hasta la clasificación y el cálculo. Se mantienen los convenios de orden de cadenas y de escisión del capítulo; cuando cambie el cuerpo se indicará expresamente.

Ejercicio 18.1. Para $N(x, y, z) = (y, z, 0)$, encuentre una cadena que sea base y calcule K_1, K_2, K_3.

Solución 1. Se tiene $Ne_3 = e_2$, $Ne_2 = e_1$ y $Ne_1 = 0$, de modo que (e_1, e_2, e_3) es una cadena y una base. Resolver $N(x, y, z) = 0$ exige $y = z = 0$; por tanto $K_1 = \operatorname{span} e_1$. Como $N^2(x, y, z) = (z, 0, 0)$, resulta $K_2 = \operatorname{span}(e_1, e_2)$. Finalmente $N^3 = 0$ y $K_3 = \mathbb{F}^3$. Las nulidades $1, 2, 3$ corresponden a un único bloque de tamaño tres.

Ejercicio 18.2. Si $N^4 v = 0$ y $N^3 v \neq 0$, demuestre directamente que $v, Nv, N^2 v, N^3 v$ son independientes.

Solución 2. En una relación $a_0 v + a_1 Nv + a_2 N^2 v + a_3 N^3 v = 0$, aplicar N^3 da $a_0 N^3 v = 0$, luego $a_0 = 0$. Aplicar ahora N^2 a la relación restante da $a_1 = 0$; aplicar N da $a_2 = 0$, y queda $a_3 N^3 v = 0$, luego $a_3 = 0$. Ordenados en sentido inverso, estos cuatro vectores forman una cadena de longitud cuatro.

Ejercicio 18.3. Calcule las nulidades de todas las potencias de $J_4(0) \oplus J_2(0) \oplus J_1(0)$.

Solución 3. Cada bloque de tamaño s aporta $\min(j, s)$ a la nulidad de la potencia j. Para $j = 0, 1, 2, 3, 4$ se obtienen respectivamente $0, 3, 5, 6, 7$. Desde $j = 4$ la nulidad es siete, porque los tres bloques ya se anulan. Los rangos correspondientes son $7, 4, 2, 1, 0$, y después cero.

Ejercicio 18.4. Un nilpotente de dimensión nueve tiene nulidades $0, 3, 5, 7, 8, 9, 9, \ldots$. Determine sus bloques.

Solución 4. Los incrementos son $3, 2, 2, 1, 1, 0$. Sus diferencias dan $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $c_3 = 1$, $c_4 = 0$ y $c_5 = 1$. Los tamaños son, por tanto, $5, 3, 1$. Suman nueve; el número de bloques es tres y el mayor tamaño cinco, de acuerdo con la primera nulidad y el índice de estabilización.

Ejercicio 18.5. ¿Puede un nilpotente de dimensión seis tener nulidades $0, 2, 3, 5, 6$?

Solución 5. No. Los incrementos serían $2, 1, 2, 1$. Por 18.1 deben ser no crecientes, pero el tercero aumenta de uno a dos. También la fórmula de bloques exactos daría $c_2 = 2 \cdot 3 - 2 - 5 = -1$, imposible para un número de bloques. No existe tal operador.

Ejercicio 18.6. Un nilpotente de dimensión ocho tiene rango seis y $N^4 = 0$. Determine sus posibles formas de Jordan.

Solución 6. La nulidad de N es dos, así que hay dos bloques. Sus tamaños suman ocho y ninguno supera cuatro. La única posibilidad es $4 + 4$. Por ello la forma es $J_4(0) \oplus J_4(0)$. En particular, las hipótesis fuerzan índice exactamente cuatro y nulidades $2, 4, 6, 8$.

Ejercicio 18.7. En dimensión siete, suponga $N^2 = 0$ y $\operatorname{rg} N = 3$. Encuentre los bloques.

Solución 7. Los bloques tienen tamaños uno o dos. Cada bloque de tamaño dos contribuye uno al rango de N, por lo que hay tres de ellos. Ocupan seis dimensiones y queda un bloque unitario. La forma es $J_2(0)^{\oplus 3} \oplus J_1(0)$ y el núcleo tiene dimensión cuatro, como exige rango–nulidad.

Ejercicio 18.8. Para $J_3(5) \oplus J_2(5) \oplus J_2(-1)$ sobre $\mathbb{Q}$, calcule χ, m y las multiplicidades geométricas.

Solución 8. Los bloques de valor cinco ocupan cinco dimensiones y los de valor menos uno, dos. Así $\chi = (t-5)^5(t+1)^2$. Los mayores tamaños son tres y dos, luego $m = (t-5)^3(t+1)^2$. Hay dos bloques de valor cinco y uno de valor menos uno, de modo que $g_5 = 2$ y $g_{-1} = 1$.

Ejercicio 18.9. En el ejercicio anterior, calcule $\dim \ker(A - 5I)^j$ para $j = 1, 2, 3$ y explique qué ocurre en el bloque de valor -1.

Solución 9. Los dos bloques de cinco aportan $\min(j, 3) + \min(j, 2)$, por lo que las nulidades son $2, 4, 5$. En el bloque de menos uno, $A - 5I = -6I + U_2$ es invertible: su determinante es $36 \neq 0$. Ninguna potencia suya aporta un vector no nulo al núcleo. Desde la tercera potencia la nulidad total permanece en cinco, sin llegar a siete.

Ejercicio 18.10. Pruebe que un operador nilpotente y diagonalizable es cero.

Solución 10. En una base propia, cada valor propio λ cumple $\lambda^r = 0$ porque $N^r = 0$. En un cuerpo esto obliga a $\lambda = 0$. Su matriz diagonal es entonces cero y el operador también. En términos de Jordan, la diagonalización exige bloques unitarios y la nilpotencia exige que todos sus valores sean cero.

Ejercicio 18.11. Para la matriz nilpotente de orden cuatro de §18.7, escriba NP y PJ y compruebe el cambio de base.

Solución 11. Las columnas de P son $2e_1, e_2 + e_4, e_3, e_4$. Aplicar N da $0, 2e_1, e_2 + e_4, 0$. Multiplicar P por $J = J_3(0) \oplus J_1(0)$ produce esas mismas cuatro columnas, por la posición de los unos de J. Ambas matrices son

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $\det P = 2 \neq 0$ sobre $\mathbb{Q}$, la igualdad prueba $P^{-1}NP = J$.

Ejercicio 18.12. Reduzca la matriz N de §18.7 al cuerpo $\mathbb{F}_2$. Determine de nuevo los bloques.

Solución 12. Sobre $\mathbb{F}_2$ se tiene $Ne_2 = 0$ y $Ne_3 = e_2 + e_4$, mientras $Ne_1 = Ne_4 = 0$. La imagen es la recta generada por $e_2 + e_4$, y $N^2 = 0$. Las nulidades son tres y cuatro, con incrementos $3, 1, 0$. Hay un bloque de tamaño dos y dos de tamaño uno. Una base de cadenas es $(e_2 + e_4, e_3, e_1, e_4)$: los inferiores $e_2 + e_4, e_1, e_4$ son independientes en el núcleo. La antigua matriz P tiene determinante cero en este cuerpo y ya no sirve.

Ejercicio 18.13. Dé dos cabezas independientes cuyas cadenas no sean conjuntamente independientes.

Solución 13. En $\mathbb{F}^3$, defina $Ne_2 = Ne_3 = e_1$ y $Ne_1 = 0$. Las cabezas e_2, e_3 son independientes, pero las cadenas (e_1, e_2) y (e_1, e_3) repiten el mismo vector inferior. La relación entre las dos copias de e_1 muestra dependencia. Para obtener una base de cadenas se puede usar (e_1, e_2) y la cadena unitaria $(e_3 - e_2)$, pues $N(e_3 - e_2) = 0$.

Ejercicio 18.14. ¿Determinan el característico y el mínimo la clase de semejanza de un nilpotente? Construya un contraejemplo de dimensión seis.

Solución 14. Las particiones $(3, 3)$ y $(3, 2, 1)$ dan operadores de dimensión seis, característico t^6 y mínimo t^3. Sus nulidades primeras son dos y tres, respectivamente, porque tienen distinto número de bloques. Por ello no son semejantes. Los dos polinomios indican dimensión y mayor tamaño, pero no distribuyen todas las dimensiones entre bloques.

Ejercicio 18.15. Compare las particiones $(3, 3, 1)$ y $(3, 2, 2)$ usando también la multiplicidad geométrica.

Solución 15. Ambas tienen tres bloques, suma siete y tamaño máximo tres: coinciden $\chi = t^7$, $m = t^3$ y $g_0 = 3$. En la segunda potencia, la primera partición da $2 + 2 + 1 = 5$ y la segunda $2+2+2 = 6$. Las nulidades diferentes impiden la semejanza por 18.8. Incluso añadir la multiplicidad geométrica a ambos polinomios deja información sin determinar.

Ejercicio 18.16. Clasifique los nilpotentes de dimensión cuatro, indicando sus sucesiones de nulidades positivas hasta estabilizar.

Solución 16. Las particiones de cuatro son (4), $(3, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 1, 1)$ y $(1, 1, 1, 1)$. Producen, respectivamente, las sucesiones $(1, 2, 3, 4)$, $(2, 3, 4)$, $(2, 4)$, $(3, 4)$ y (4). Cada partición existe tomando la suma de los bloques correspondientes; la unicidad de 18.5 asegura que son cinco clases distintas y que no falta ninguna.

Ejercicio 18.17. Demuestre que un nilpotente de dimensión $n > 0$ tiene un solo bloque si y sólo si $\dim \ker N = 1$.

Solución 17. El número de bloques es exactamente la nulidad primera, por 18.5. Si ésta es uno, hay un solo bloque y su tamaño debe ser n. Recíprocamente, $J_n(0)$ tiene núcleo generado por su primer vector. En ese caso una cabeza de longitud n es un vector cíclico y la lista de sus potencias genera todo el espacio.

Ejercicio 18.18. Si dos matrices tienen las mismas nulidades de todas sus potencias, ¿deben ser semejantes? Considere matrices invertibles.

Solución 18. No en general. Sobre $\mathbb{Q}$, I_2 y $2I_2$ son invertibles, así que todas las potencias de ambas tienen nulidad cero. Sin embargo, sus característicos son $(t-1)^2$ y $(t-2)^2$, por lo que no son semejantes. El criterio del capítulo compara las potencias desplazadas por cada valor propio, además de los valores propios mismos. Para nilpotentes sí bastan las potencias sin desplazar.

Ejercicio 18.19. Pruebe que $\operatorname{rg} N^{j-1} - \operatorname{rg} N^j$ cuenta los bloques de tamaño al menos j.

Solución 19. Por rango–nulidad, la diferencia es $(n - \kappa_{j-1}) - (n - \kappa_j) = \kappa_j - \kappa_{j-1}$. El corolario 18.5 identifica este número con b_j. También puede verse en cada bloque: su rango disminuye en uno mientras el exponente no ha superado su tamaño, y después permanece en cero.

Ejercicio 18.20. En dimensión diez se sabe que los rangos de N, N^2, N^3, N^4 son $6, 3, 1, 0$. Halle los tamaños.

Solución 20. Las nulidades, incluyendo κ_0, son $0, 4, 7, 9, 10$, y después diez. Los incrementos son $4, 3, 2, 1, 0$. Sus diferencias son uno en los tamaños uno, dos, tres y cuatro. La partición es $(4, 3, 2, 1)$, cuya suma es diez; sustituirla en la fórmula de rango devuelve $6, 3, 1, 0$.

Ejercicio 18.21. Para $N = J_3(0) \oplus J_1(0)$, calcule los espacios H_j de 18.9 usando la base de cadenas (v_1, v_2, v_3, z).

Solución 21. Tenemos $K_1 = \operatorname{span}(v_1, z)$, $K_2 = \operatorname{span}(v_1, v_2, z)$ y $K_3 = K_4 = V$. Para $j = 1$, $NK_2 = \operatorname{span} v_1$, así que H_1 tiene base la clase de z. Para $j = 2$, $K_1 + NK_3 = \operatorname{span}(v_1, z, v_2) = K_2$, de modo que $H_2 = 0$. Para $j = 3$, $K_2 + NK_4 = K_2$ y la clase de v_3 es base de H_3. Las dimensiones $1, 0, 1$ cuentan exactamente los bloques.

Ejercicio 18.22. En el ejercicio anterior, reemplace la cabeza v_3 por $v_3 + av_2 + bz$ y el vector unitario z por $z + cv_1$. ¿Se obtiene una base de cadenas para cualesquiera $a, b, c \in \mathbb{F}$?

Solución 22. Sí. La cabeza nueva tiene imágenes $v_2 + av_1$ y v_1, por lo que genera la cadena $(v_1, v_2 + av_1, v_3 + av_2 + bz)$. El vector $z + cv_1$ sigue en el núcleo. Los inferiores $v_1, z + cv_1$ son independientes: en una relación, el coeficiente de z fuerza el segundo coeficiente a cero y luego el

primero a cero. El lema 18.2 da independencia de los cuatro vectores y, por dimensión, forman una base.

Ejercicio 18.23. ¿Por qué tomar una base de K_2/K_1 y convertir cada representante en cabeza de longitud dos puede impedir completar una base de Jordan?

Solución 23. En un bloque $J_3(0)$ con cadena (v_1, v_2, v_3), la clase de v_2 es base de K_2/K_1. Produce la cadena (v_1, v_2). Pero para incluir la dirección de v_3 hay que usar una cadena de longitud tres, cuyo inferior vuelve a ser un múltiplo de v_1; las dos cadenas juntas son dependientes. El cociente correcto para cabezas de longitud exactamente dos es $K_2/(K_1 + NK_3) = 0$, que excluye ese tramo de la cadena más larga.

Ejercicio 18.24. Justifique la igualdad $\sum_{j\ge 1} j c_j = \sum_{j\ge 1} b_j = \dim V$.

Solución 24. Cada bloque de longitud s aporta uno a $b_1, \dots, b_s$, y cero a los restantes; por tanto su aporte total es s. Sumando por bloques resulta $\sum_j b_j = \dim V$. Como $c_j = b_j - b_{j+1}$ y todas las sucesiones terminan en cero, la suma finita $\sum_j j(b_j - b_{j+1})$ se telescopa a $\sum_j b_j$. No hay cuestión de convergencia: sólo hay finitos términos no nulos.

Ejercicio 18.25. Si una sucesión entera empieza en cero, llega a n y permanece allí, y sus incrementos son no negativos y no crecientes, construya un nilpotente de dimensión n con esas nulidades.

Solución 25. Denote por b_j los incrementos y ponga $c_j = b_j - b_{j+1}$. Son enteros no negativos y terminan en cero. Tome c_j bloques $J_j(0)$ para cada j. El telescopado del ejercicio 24 da dimensión $\sum_j j c_j = \sum_j b_j = n$. Por 18.5, los incrementos de las nulidades de esta matriz son exactamente los b_j elegidos; al partir ambas sucesiones de cero, coinciden término a término. Si $n = 0$, se usa la matriz vacía.

Ejercicio 18.26. Si N tiene bloques de longitudes s_i, determine $\dim(\ker N \cap \operatorname{im} N^k)$ para $k \ge 0$.

Solución 26. En una cadena de longitud s, la imagen de N^k está generada por los primeros $\max(s-k, 0)$ vectores. Su intersección con el núcleo contiene el vector inferior exactamente cuando $s \ge k+1$. Las componentes de cadenas forman una suma directa, así que la dimensión buscada es el número de bloques de tamaño al menos $k+1$, esto es $b_{k+1} = \kappa_{k+1} - \kappa_k$.

Ejercicio 18.27. Compruebe las cadenas de valores 2 y -1 del ejemplo mixto de §18.7 calculando Au y Av.

Solución 27. Para $u = (-2/9, -1/3, 1, 0)$ se obtiene $Au = (2/9, 1/3, -1, 0) = -u$. Para $v = (-1/27, -1/9, 0, 1)$ se obtiene $Av = (-5/27, -2/9, 1, -1) = u - v$. Junto con $Ae_1 = 2e_1$ y $Ae_2 = e_1 + 2e_2$, esto prueba las cuatro columnas de $AP = P\,\mathrm{diag}(J_2(2), J_2(-1))$. La matriz $P = (e_1\ e_2\ u\ v)$ es triangular superior con diagonal uno; es invertible.

Ejercicio 18.28. Sobre $\mathbb{R}$, encuentre una base de Jordan para $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Solución 28. Para $N = A - 3I$, se cumple $Ne_2 = 2e_1$ y $Ne_1 = 0$. La cadena $(2e_1, e_2)$ es una base. Así $P = \mathrm{diag}(2, 1)$ tiene determinante dos y $P^{-1}AP = J_2(3)$. La normalización de la cadena convierte el coeficiente dos del acoplamiento en el uno del bloque.

Ejercicio 18.29. Explique por qué la rotación real de §18.6 no tiene forma de Jordan real y encuentre una forma compleja con su base.

Solución 29. El característico es $t^2 + 1$, sin raíces reales; 18.6 impide una forma real. Sobre $\mathbb{C}$, los vectores $v = (1, -i)$ y $w = (1, i)$ satisfacen $Av = iv$ y $Aw = -iw$. La matriz $P = (v\ w)$ tiene determinante $2i \neq 0$. Por ello $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(i, -i)$, que es su forma de Jordan compleja.

Ejercicio 18.30. Calcule $p(J_3(1))$ sobre $\mathbb{Q}$ para $p(t) = t^4 - 2t + 3$.

Solución 30. La expansión es $p(1+z) = 2 + 2z + 6z^2 + 4z^3 + z^4$. Como $U_3^3 = 0$, resulta

$$p(J_3(1)) = 2I + 2U_3 + 6U_3^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

El truncamiento elimina los términos cúbico y cuártico, sin afectar las tres diagonales presentes.

Ejercicio 18.31. En característica dos, calcule $J_3(1)^2$ y $J_3(1)^4$.

Solución 31. Escribiendo $J = I + U$, el binomio y $2 = 0$ dan $J^2 = I + U^2$. Esta matriz no es la identidad, porque U_3^2 tiene un uno en la posición $(1, 3)$. Al volver a elevar al cuadrado,

$(I+U^2)^2 = I + U^4 = I$, pues $U^3 = 0$. En particular, el orden multiplicativo del bloque es cuatro: su cuadrado aún no es uno y su cuarta potencia sí.

Ejercicio 18.32. Calcule $J_3(2)^{-1}$ sobre $\mathbb{Q}$ y verifique el producto.

Solución 32. La suma geométrica finita da $J_3(2)^{-1} = \frac{1}{2}I - \frac{1}{4}U_3 + \frac{1}{8}U_3^2$. Multiplicar por $2I + U_3$ produce I en la diagonal; los coeficientes de U_3 son $-1/2 + 1/2 = 0$ y los de U_3^2, $1/4 - 1/4 = 0$. El término restante es $U_3^3/8 = 0$. La inversa es

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 1/8 \\ 0 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 18.33. Para el operador de la apertura, obtenga una fórmula para $T^k(x,y,z)$ válida para todos los enteros $k \geq 0$.

Solución 33. La matriz es $2I + U_3$. Por 18.11 su potencia es $2^k I + k2^{k-1}U_3 + \binom{k}{2}2^{k-2}U_3^2$. Sobre $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$ esta expresión tiene sentido también para $k = 0, 1$, con sus coeficientes nulos. Como $U_3(x,y,z) = (y,z,0)$ y $U_3^2(x,y,z) = (z,0,0)$, se obtiene $(2^k x + k2^{k-1}y + \binom{k}{2}2^{k-2}z,\ 2^k y + k2^{k-1}z,\ 2^k z)$. Para otro cuerpo debe interpretarse la suma truncada de 18.11, que evita exponentes negativos innecesarios.

Ejercicio 18.34. Si $p(t) = (t-\lambda)^h q(t)$ con $h \geq 0$ y $q(\lambda) \neq 0$, calcule la nulidad de $p(J_s(\lambda))$.

Solución 34. Se tiene $p(J) = U_s^h q(\lambda I + U_s)$. La segunda matriz es $q(\lambda)I$ más un polinomio en U_s sin término constante. Esa parte es nilpotente, así que la matriz es invertible por la suma geométrica finita. Además conmuta con U_s^h. Por ello el producto tiene el mismo rango y la misma nulidad que U_s^h, cuya nulidad es $\min(h, s)$. El argumento incluye $h = 0$ y $h \geq s$.

Ejercicio 18.35. Caracterice los polinomios p que anulan una matriz de Jordan, deduciendo de nuevo la fórmula del mínimo.

Solución 35. En un bloque de tamaño s y valor λ, la expansión $p(\lambda + z) = \sum a_j z^j$ da una matriz con a_j en la diagonal superior j. Se anula exactamente cuando $a_0, \ldots, a_{s-1}$ son cero, equivalencia que también puede expresarse como $(t-\lambda)^s \mid p$. Para anular todos los bloques se necesita la mayor de estas potencias para cada λ. Como los factores de valores distintos son coprimos, el producto de esas potencias divide a p, y ese mismo producto anula todos los bloques. Es el mínimo mónico.

Ejercicio 18.36. Un operador de dimensión siete satisface $\chi = (t-2)^5(t+1)^2$ y $m = (t-2)^3(t+1)^2$ sobre $\mathbb{Q}$. Enumere sus posibles formas de Jordan y diga qué nulidad las distingue.

Solución 36. Para el valor dos, las particiones de cinco con tamaño máximo tres son $(3,2)$ y $(3,1,1)$. Para menos uno, dimensión dos y máximo dos fuerzan (2). Las formas son $J_3(2) \oplus J_2(2) \oplus J_2(-1)$ y $J_3(2) \oplus J_1(2) \oplus J_1(2) \oplus J_2(-1)$. Se distinguen por $\dim \ker(A - 2I)$, que es dos en la primera y tres en la segunda. Esas son todas las opciones porque las particiones enumeradas agotan la dimensión primaria cinco.

Ejercicio 18.37. Demuestre que para un nilpotente de dimensión $n > 0$, las condiciones $m_N = t^n$, existencia de un vector cíclico y un solo bloque son equivalentes.

Solución 37. Si $m_N = t^n$, el mayor bloque tiene tamaño n y ocupa toda la dimensión; hay un solo bloque. Su cabeza genera por potencias todos los vectores de la cadena, así que es cíclica. Si v es cíclico, las potencias de N sobre v generan V. Si su primera potencia nula fuera $N^s v = 0$ con $s < n$, sólo habría a lo sumo s vectores generadores, imposible. Así $N^{n-1}v \neq 0$, el índice es al menos n y, por dimensión o por las longitudes, es exactamente n. Luego $m_N = t^n$.

Ejercicio 18.38. Pruebe que, si N tiene un solo bloque, todo operador que conmuta con N es un polinomio en N.

Solución 38. Sea v una cabeza cíclica, de modo que $v, Nv, \ldots, N^{n-1}v$ es base. Para un operador S que conmuta con N, hay un único polinomio p de grado menor que n tal que $Sv = p(N)v$, al expresar Sv en esa base. Entonces $SN^j v = N^j Sv = N^j p(N)v = p(N)N^j v$ para cada j. Los dos operadores coinciden en una base y por tanto $S = p(N)$. La recíproca también vale porque todo polinomio en N conmuta con N.

Ejercicio 18.39. Considere $A_\varepsilon = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda + \varepsilon \end{pmatrix}$ sobre $\mathbb{R}$. Determine su forma para $\varepsilon \neq 0$ y para $\varepsilon = 0$, y calcule una base propia en el primer caso.

Solución 39. Para $\varepsilon \neq 0$ hay dos valores propios distintos. Los vectores e_1 y $(1,\varepsilon)$ son propios de valores λ y $\lambda+\varepsilon$, porque la segunda imagen es $(\lambda+\varepsilon)(1,\varepsilon)$. La matriz $P_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$ tiene determinante ε y diagonaliza. Para $\varepsilon = 0$, la matriz ya es $J_2(\lambda)$ y sólo tiene una dirección propia. Las dos columnas de P_ε se acercan a la misma dirección cuando ε tiende a cero; la estructura exacta de bloques cambia en el límite.

Ejercicio 18.40. Encuentre la forma de Jordan del cuadrado de un bloque $N = J_s(0)$, para todo $s \geq 1$.

Solución 40. Con la cadena usual $e_1, \ldots, e_s$, el operador N^2 envía e_j a e_{j-2} para $j \geq 3$ y anula e_1, e_2 cuando existen. Los índices impares forman la cadena $(e_1, e_3, e_5, \ldots)$, de longitud $\lceil s/2 \rceil$; los pares forman $(e_2, e_4, e_6, \ldots)$, de longitud $\lfloor s/2 \rfloor$. Juntas son una reordenación de la base. La forma es $J_{\lceil s/2 \rceil}(0) \oplus J_{\lfloor s/2 \rfloor}(0)$, omitiendo el segundo bloque cuando su tamaño es cero. Así se obtiene un solo bloque unitario para $s = 1$ y dos para $s = 2$.

Lecturas y referencias

Friedberg–Insel–Spence, *Linear Algebra*, §§7.1–7.2, desarrolla las cadenas, su construcción desde la imagen y los diagramas que permiten contar bloques. Hoffman–Kunze, *Linear Algebra*, §7.3, presenta la forma de Jordan a partir de descomposiciones cíclicas; su orden de vectores coloca los unos debajo de la diagonal, mientras aquí se coloca primero el vector inferior. Axler, *Linear Algebra Done Right*, §8C, ofrece otra construcción de la base nilpotente; su prueba con un funcional lineal podrá compararse con ésta después de C19. Johnston, *Advanced Linear and Matrix Algebra*, §2.4.1, relaciona las nulidades de potencias con las cantidades de bloques.

Capítulo 19

Espacio dual y transposición

La regla $\ell(x, y) = x + 2y$ asigna un número a cada vector del plano. Los vectores $(2, 1)$ y $(0, 2)$ producen la misma salida, cuatro, porque su diferencia $(2, -1)$ queda anulada por la regla. Si conocemos solamente esa salida, distinguimos unas rectas paralelas de otras, pero perdemos la posición dentro de cada recta. Una ecuación lineal puede verse así como una medición que conserva cierta información del vector y descarta otra.

Hemos usado reglas de esta clase desde los primeros sistemas de ecuaciones. Cada fila de una matriz toma las coordenadas de una entrada y produce una coordenada de su imagen. También extraer un coeficiente de un polinomio, evaluarlo en un punto o tomar la traza de una matriz son aplicaciones lineales con salida escalar. Reunir esas aplicaciones en un espacio permitirá estudiar qué información separa vectores, qué ecuaciones definen un subespacio y cómo se transporta una medición a través de una transformación.

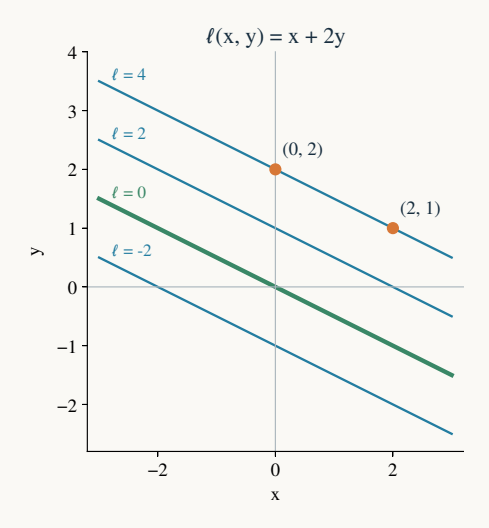


Figura 19.1. Cada recta reúne vectores con la misma salida. La recta de nivel cero es el núcleo. La figura representa un funcional mediante sus valores, sin elegir un vector que lo sustituya.

Salvo indicación expresa, los espacios serán de dimensión finita sobre un cuerpo conmutativo $\mathbb{F}$. Se utilizan la extensión de bases de C07, las aplicaciones lineales de C08, rango–nulidad de C09, los cocientes de C11 y las matrices de C12. La transposición algebraica no requiere producto interno; sobre $\mathbb{C}$ se mantendrá la linealidad compleja, sin introducir conjugaciones. El caso de dimensión cero se incluye con bases vacías.

19.1. Aplicaciones con salida escalar

Definición 19.1. Un **funcional lineal** sobre V es una aplicación lineal $f : V \to \mathbb{F}$. El **espacio dual algebraico** es $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, \mathbb{F})$, con las operaciones puntuales $(f + g)(v) = f(v) + g(v)$ y $(af)(v) = af(v)$.

Las operaciones son las de C08 para espacios de aplicaciones lineales; en particular, una combinación lineal de funcionales vuelve a ser un funcional. La palabra «algebraico» indica que se incluyen todos los funcionales lineales. No hay una topología ni una condición adicional de continuidad en esta definición.

En $\mathbb{F}^n$, cada funcional tiene la forma $f(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$. En efecto, basta escribir $x = \sum_j x_j e_j$ y aplicar linealidad: necesariamente $a_j = f(e_j)$. La fila $(a_1, \dots, a_n)$ representa esa

aplicación en las bases usuales. La aplicación y la fila pertenecen a categorías distintas de objetos: una recibe vectores, la otra registra sus coeficientes después de haber fijado coordenadas.

Para el espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{F})$ de polinomios formales de grado a lo sumo dos, las reglas $c_j(a_0+a_1t+a_2t^2) = a_j$ son funcionales. Para cualquier $a \in \mathbb{F}$, la evaluación $E_a(p) = p(a)$ también lo es. Ninguno de estos ejemplos necesita cálculo. Sobre $\mathbb{C}$, la regla $z \mapsto \overline{z}$ no es un funcional complejo: su valor en i es $-i$, mientras la linealidad compleja exigiría i veces su valor en uno, que sería i.

19.2. La base que lee coordenadas

Fijemos una base ordenada $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$. La unicidad de las coordenadas permite definir una aplicación φ_i que a cada vector le asigna su coordenada i. Sumar vectores o multiplicarlos por escalares realiza esas mismas operaciones sobre sus coordenadas, de modo que cada φ_i es lineal.

Definición 19.2. La **base dual** de $\mathcal{B}$ es la lista $\mathcal{B}^* = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ caracterizada por $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$, donde δ_{ij} vale uno si $i = j$ y cero en caso contrario.

Teorema 19.1 (base dual y reconstrucción). La lista $\mathcal{B}^*$ es una base de V^* y es la única con los valores prescritos. Además,

$$v = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(v)\, v_i, \qquad f = \sum_{i=1}^{n} f(v_i)\, \varphi_i.$$

En particular, $\dim V^* = \dim V$.

Demostración. Si $v = \sum_j x_j v_j$, aplicar un funcional con los valores prescritos da $\sum_j x_j \delta_{ij} = x_i$. Por ello necesariamente es el funcional coordenada ya construido y la primera identidad queda probada. Para la segunda, aplicar f a la primera da $f(v) = \sum_i \varphi_i(v) f(v_i)$ para toda entrada v, que es la igualdad de funcionales anunciada. Así la lista dual genera V^*.

Si $\sum_i a_i \varphi_i = 0$, evaluar en v_j da $a_j = 0$ para cada j. La lista es independiente y, por tanto, una base de longitud n. La demostración incluye $n = 0$: sólo existe el funcional cero sobre el espacio cero. $\square$

Las dos fórmulas reconstruyen objetos diferentes. Los números $\varphi_i(v)$ reconstruyen un vector en la base $\mathcal{B}$; los números $f(v_i)$ reconstruyen un funcional en la base $\mathcal{B}^*$. Para evaluar después, se multiplican esas dos listas y se suman sus productos.

Tomemos en $\mathbb{R}^2$ los vectores $v_1 = (1,1)$ y $v_2 = (1,2)$. Resolver $(x,y) = a(1,1) + b(1,2)$ da $a = 2x - y$ y $b = -x + y$. Por tanto, la base dual es $\varphi_1(x,y) = 2x - y$, $\varphi_2(x,y) = -x + y$. Para $f(x,y) = x + 2y$, los coeficientes duales son $f(v_1) = 3$ y $f(v_2) = 5$: en efecto, $3\varphi_1 + 5\varphi_2 = x + 2y$.

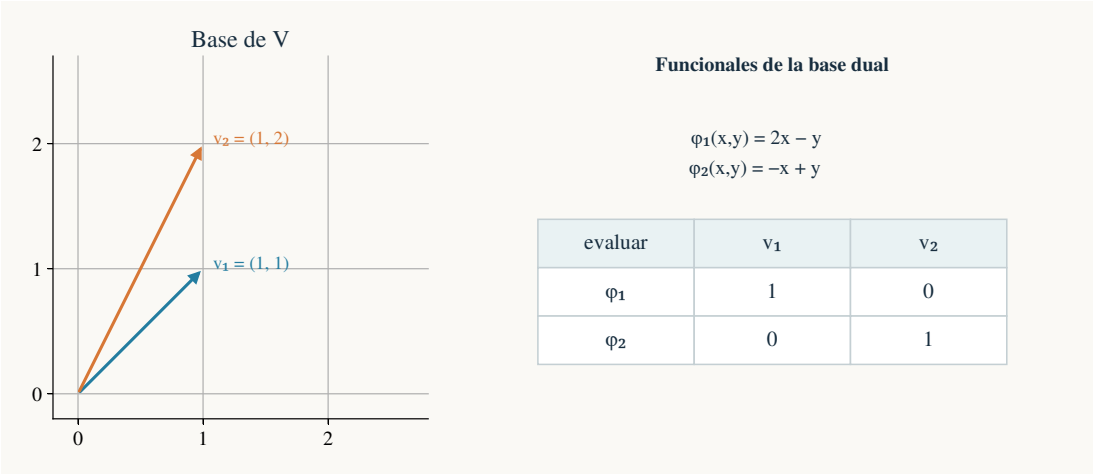


Figura 19.2. Las filas de la inversa producen los funcionales coordenada. La tabla de evaluación es la identidad y verifica a la vez la normalización y el orden de la base dual.

Proposición 19.2 (cambio de base dual). Sean $\mathcal{B} = (v_i)$ y $\mathcal{C} = (w_j)$ bases de V, y sea P la matriz cuyas columnas son $[w_j]_{\mathcal{B}}$, de modo que $[v]_{\mathcal{B}} = P[v]_{\mathcal{C}}$. Si $\mathcal{B}^* = (\varphi_i)$ y $\mathcal{C}^* = (\psi_j)$, entonces

$$\psi_j = \sum_i (P^{-1})_{ji}\, \varphi_i, \qquad [f]_{\mathcal{C}^*} = P^{\mathsf{T}} [f]_{\mathcal{B}^*}.$$

Las columnas de coordenadas de los propios ψ_j en $\mathcal{B}^*$ forman $P^{-\mathsf{T}} = (P^{-1})^{\mathsf{T}}$.

Demostración. La igualdad $[v]_{\mathcal{C}} = P^{-1}[v]_{\mathcal{B}}$ dice que la coordenada j nueva es la fila j de P^{-1} aplicada a las coordenadas antiguas. Esto prueba la primera fórmula. Si $c_i = f(v_i)$, entonces $f(w_j) = \sum_i P_{ij} f(v_i) = \sum_i P_{ij} c_i$, que es la coordenada j de $P^{\mathsf{T}} c$. Finalmente, el coeficiente de φ_i en ψ_j es $(P^{-1})_{ji}$; colocarlo en la fila i, columna j, da la matriz $P^{-\mathsf{T}}$. □

No hay conflicto entre las dos transpuestas: una fórmula cambia las coordenadas de un funcional fijo; la otra registra los funcionales de la nueva base en la antigua. En el ejemplo, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, y sus filas inversas son $(2, -1)$ y $(-1, 1)$. La columna $(1, 2)$ de coeficientes usuales de f se convierte en $(3, 5)$ mediante P^{T}.

19.3. Extender una regla y separar un vector

Un funcional definido sólo en un subespacio prescribe una parte de una medición. En dimensión finita podemos completarla: fijamos sus valores en una base del subespacio y elegimos los que faltan al ampliar esa base. La elección adicional será importante al interpretar los cocientes.

Lema 19.3 (extensión, separación e hiperplanos). Todo funcional sobre un subespacio $U \subseteq V$ se extiende a un funcional sobre V. Si $v \notin U$, existe $f \in V^*$ tal que $f|_U = 0$ y $f(v) = 1$. Los núcleos de funcionales no nulos son exactamente los hiperplanos, es decir, los subespacios de codimensión uno. Dos funcionales no nulos tienen el mismo núcleo si y sólo si uno es un múltiplo escalar no nulo del otro.

Demostración. Elijamos una base de U y ampliémosla a una de V. A los primeros vectores asignamos los valores del funcional dado, y a los restantes valores arbitrarios. C08 garantiza una única aplicación lineal con esos valores; coincide con la original en una base de U y, por tanto, en todo U.

Si $v \notin U$, añadirlo a una base de U conserva la independencia. Podemos incluirlo al ampliar la base, asignarle valor uno, asignar cero a la base de U y, por ejemplo, cero a los demás vectores añadidos. Esto da el separador.

Un funcional no nulo tiene imagen igual a $\mathbb{F}$, pues su imagen es un subespacio no nulo de un espacio de dimensión uno. Rango–nulidad da codimensión uno para su núcleo. Recíprocamente, si U tiene codimensión uno, una base suya se completa con un único vector; el funcional cero en la primera y uno en ese vector tiene núcleo exactamente U.

Sean por último $f, g \neq 0$ con el mismo núcleo. Elijamos u con $f(u) = 1$. Para todo v, el vector $v - f(v)u$ pertenece a $\ker f = \ker g$, luego $g(v) = g(u)f(v)$. Además $g(u) \neq 0$ porque u no pertenece al núcleo común. La recíproca es inmediata al multiplicar por un escalar no nulo. □

El núcleo fija la dirección de los niveles, pero no su escala. Los funcionales $x + 2y$ y $3x + 6y$ anulan la misma recta; sus salidas en cada vector difieren por el factor tres. Por otra parte, un funcional dado sobre una recta del plano admite muchas extensiones: su valor en una dirección complementaria queda libre.

19.4. Las ecuaciones que anulan un subespacio

Definición 19.3. Para un subconjunto $S \subseteq V$, su **anulador** es $S^\circ = \{f \in V^* : f(s) = 0 \text{ para todo } s \in S\}$. Para $L \subseteq V^*$, escribiremos $L_0 = \{v \in V : f(v) = 0 \text{ para todo } f \in L\}$ y lo llamaremos su **preanulador**.

Ambos conjuntos son subespacios: las condiciones de anulación se conservan al sumar y multiplicar por escalares. Además, $S^\circ = (\operatorname{span} S)^\circ$. Es importante conservar el espacio ambiente: U° está en V^*, mientras $(U^\circ)_0$ está en V. El símbolo $\circ$ no representa aquí ortogonalidad para un producto interno.

Teorema 19.4 (dimensión y recuperación). Si $U \subseteq V$ es un subespacio, entonces

$$\dim U^\circ = \dim V - \dim U, \qquad (U^\circ)_0 = U.$$

En particular, los anuladores determinan los subespacios y revierten sus inclusiones: $U \subseteq W$ si y sólo si $W^\circ \subseteq U^\circ$.

Demostración. Extendamos una base $(v_1, \dots, v_k)$ de U a una base $(v_1, \dots, v_n)$ de V. Por 19.1, un funcional tiene expansión $f = \sum_i f(v_i)\varphi_i$. Anula U exactamente cuando los primeros k coeficientes son cero. Por tanto, $(\varphi_{k+1}, \dots, \varphi_n)$ es una base de U°, que da la dimensión.

Cada elemento de U queda anulado por todos los elementos de U°, luego $U \subseteq (U^\circ)_0$. Si $v \notin U$, el separador de 19.3 pertenece a U° y toma valor uno en v, así que $v \notin (U^\circ)_0$. Esto prueba la igualdad. La inclusión $U \subseteq W$ implica directamente $W^\circ \subseteq U^\circ$. Para la recíproca, si todos los funcionales que anulan W anulan también U, entonces $U \subseteq (W^\circ)_0 = W$. $\square$

Para $U = \{(x, y, z) : z = x + y\} \subseteq \mathbb{R}^3$, el funcional $\ell(x, y, z) = -x - y + z$ anula el plano y es no nulo. El anulador tiene dimensión uno, de modo que $U^\circ = \operatorname{span} \ell$. Describir un plano por dos generadores o por una ecuación son dos maneras de fijar la misma información. Para un subespacio de dimensión k en dimensión n, una base de su anulador da exactamente $n - k$ ecuaciones independientes.

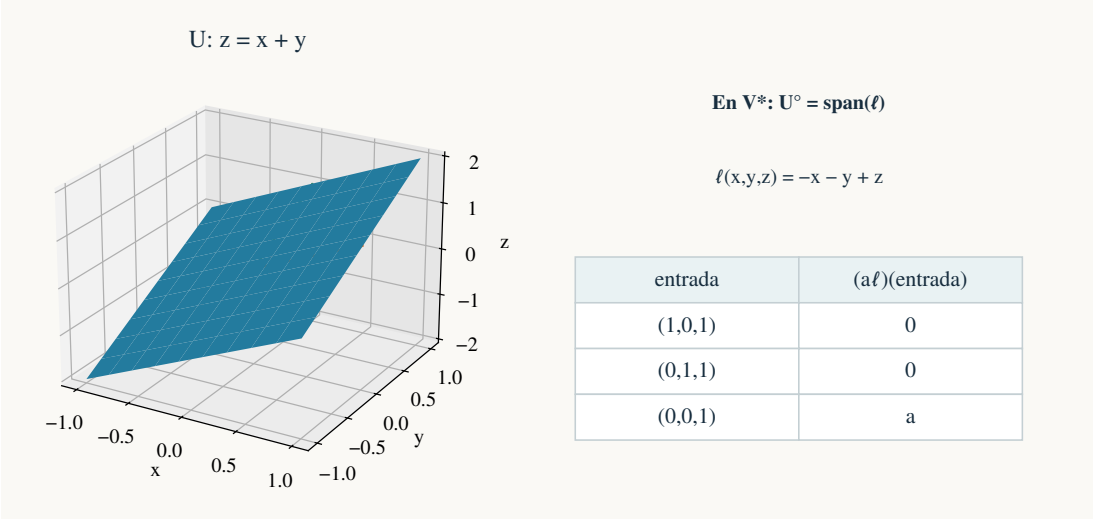


Figura 19.3. El plano pertenece a V y la familia de reglas pertenece a V^*. Se muestran sus fórmulas, sin colocar esas reglas como flechas dentro del plano original.

Proposición 19.5 (sumas e intersecciones). Para subespacios $U, W \subseteq V$,

$$(U + W)^\circ = U^\circ \cap W^\circ, \qquad (U \cap W)^\circ = U^\circ + W^\circ.$$

Demostración. Un funcional anula toda suma $u+w$ exactamente cuando anula ambos sumandos; basta tomar uno de ellos cero para una dirección, y usar linealidad para la otra. Esto prueba la primera igualdad.

Cada suma de un funcional que anula U y otro que anula W anula $U \cap W$, de modo que $U^\circ + W^\circ \subseteq (U \cap W)^\circ$. Para demostrar que no falta nada, pongamos $n = \dim V$ y usemos Grassmann, la primera igualdad y 19.4:

$$\begin{aligned} \dim(U^\circ + W^\circ) &= (n - \dim U) + (n - \dim W) - \dim(U + W)^\circ \\ &= n - \dim U - \dim W + \dim(U + W) \\ &= n - \dim(U \cap W) = \dim(U \cap W)^\circ. \end{aligned}$$

La inclusión entre subespacios de igual dimensión es una igualdad. $\square$

19.5. Transportar una medición hacia la entrada

Sea $T : V \to W$ lineal y sea $g : W \to \mathbb{F}$ un funcional. Si primero aplicamos T y después medimos con g, obtenemos sobre V el funcional $v \mapsto g(Tv)$. La transformación envía vectores hacia W; la composición permite traer las mediciones desde W hasta V.

Definición 19.4. La **aplicación dual**, o **transpuesta algebraica**, de $T : V \to W$ es $T' : W^* \to V^*$, definida por $T'g = g \circ T$. El apóstrofo indica dualidad, no derivación. Se reserva T^* para la notación de adjuntos cuando se introduzcan productos internos.

Proposición 19.6 (linealidad y orden de composición). La aplicación T' es lineal. Para aplicaciones lineales del mismo dominio y codominio, $(aS+bT)' = aS'+bT'$. Si $T: V \to W$ y $S: W \to X$, entonces $(S\circ T)' = T'\circ S'$. Además, $I_V' = I_{V^*}$ y, si T es un isomorfismo, $(T^{-1})' = (T')^{-1}$.

Demostración. La composición $g\circ T$ es lineal, así que pertenece a V^*. Para $g, h \in W^*$, evaluar en v da $T'(ag+bh)(v) = ag(Tv)+bh(Tv)$, que prueba la linealidad de T'. Para la dependencia respecto de T, la linealidad de g da $g(aSv+bTv) = ag(Sv)+bg(Tv)$; las dos aplicaciones duales coinciden en cada funcional y en cada entrada.

Si $h \in X^*$, entonces $(S\circ T)'h = h\circ S\circ T = T'(S'h)$. El orden se invierte porque primero hay que traer h de X a W y después de W a V. La identidad se verifica componiendo con I_V. Finalmente, dualizar $T^{-1}T = I_V$ y $TT^{-1} = I_W$ muestra que $(T^{-1})'$ es una inversa de T' en ambos órdenes. □

Para $T(x,y) = (x, y, x+y)$ y $g(u,v,w) = 2u - v + 3w$, la regla trasladada es $T'g(x,y) = 5x + 2y$. Esta medición en el plano conserva exactamente la salida que se habría obtenido midiendo la imagen en el espacio tridimensional.

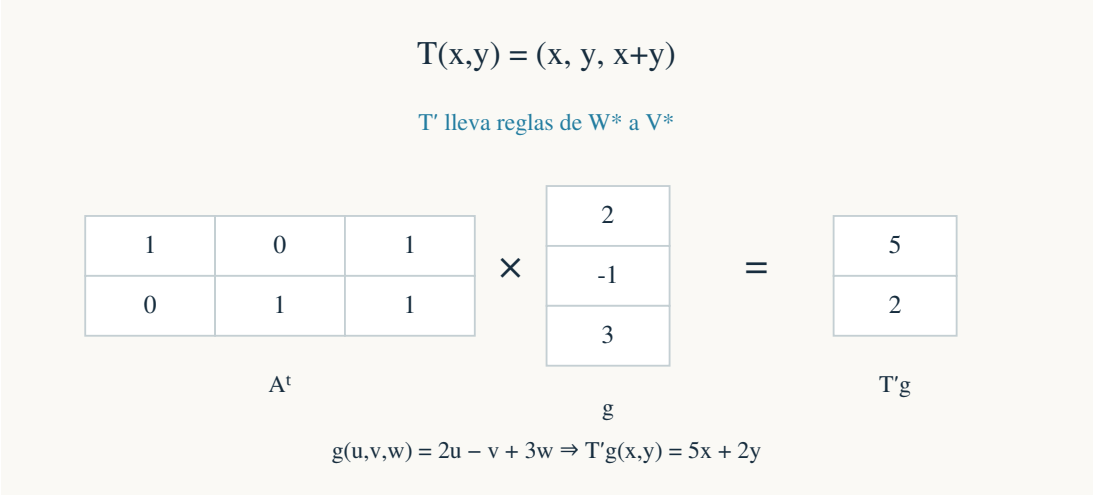


Figura 19.4. La identidad $(T'g)(v) = g(Tv)$ fija tanto el sentido de la aplicación dual como sus valores.

19.6. Por qué aparece una matriz transpuesta

Teorema 19.7 (matriz de la aplicación dual). Si $A = [T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$, donde $\mathcal{B}$ es base de V y $\mathcal{C}$ base de W, entonces

$$[T']_{\mathcal{B}^*\leftarrow\mathcal{C}^*} = A^{\mathsf{T}}.$$

Demostración. Escribamos $\mathcal{B} = (v_i)$, $\mathcal{C} = (w_j)$ y sus bases duales (φ_i) y (ψ_j). El coeficiente de φ_i en $T'\psi_j$ es, por 19.1, su valor en v_i. Ese valor es $\psi_j(Tv_i)$. Como $Tv_i = \sum_k A_{ki}w_k$, resulta $\psi_j(Tv_i) = A_{ji}$. Así la entrada de fila i, columna j de la matriz dual es A_{ji}, exactamente la entrada de A^{T}. □

Si $\dim V = n$ y $\dim W = m$, la matriz A tiene tamaño $m\times n$ y la dual tiene tamaño $n\times m$. La fórmula exige las bases duales correspondientes. Con bases arbitrarias e independientes de V^* y W^* habrá que añadir cambios de base; transponer una tabla no elimina esa dependencia.

Para el ejemplo anterior,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La columna $(2,-1,3)$ representa g en la base dual usual de $\mathbb{R}^3$. Multiplicarla por A^{T} da $(5,2)$, que representa $T'g$. Sobre $\mathbb{C}$ se realiza el mismo cálculo sin conjugaciones. Para $T(z) = iz$, el dual envía $g(z) = az$ al funcional $z \mapsto aiz$; la matriz es (i), no $(-i)$.

La regla $(ST)' = T'S'$ recupera $(BA)^{\mathsf{T}} = A^{\mathsf{T}}B^{\mathsf{T}}$. La inversión del orden matricial expresa la inversión del recorrido de las mediciones.

19.7. Núcleos, imágenes y compatibilidad

Teorema 19.8 (núcleo e imagen del dual). Para $T : V \to W$,

$$\ker T' = (\operatorname{im} T)^\circ, \qquad \operatorname{im} T' = (\ker T)^\circ, \qquad \operatorname{rg} T' = \operatorname{rg} T.$$

En consecuencia, T es sobreyectiva si y sólo si T' es inyectiva, y T es inyectiva si y sólo si T' es sobreyectiva.

Demostración. La condición $T'g = 0$ significa $g(Tv) = 0$ para toda entrada v; equivale a que g anule la imagen de T. Esto prueba la primera igualdad.

Si $f = T'g$, entonces $f(v) = g(Tv) = 0$ cuando $v \in \ker T$, lo que da una inclusión para la segunda. Recíprocamente, sea $f \in (\ker T)^\circ$. Definamos sobre $\operatorname{im} T$ la regla $h(Tv) = f(v)$. Está bien definida: si $Tv = Tv'$, la diferencia $v - v'$ está en el núcleo y $f(v) = f(v')$. La regla es lineal al elegir preimágenes de sumas y múltiplos. Extendamos h a $g \in W^*$ mediante 19.3. Entonces $T'g(v) = g(Tv) = f(v)$ para todo v, y f pertenece a la imagen dual.

Por 19.4, esa imagen tiene dimensión $\dim V - \dim \ker T = \operatorname{rg} T$. La primera igualdad muestra que T' tiene núcleo cero exactamente cuando la imagen de T es todo W. La segunda muestra que T' tiene imagen todo V^* exactamente cuando $\ker T = 0$. Aquí se usan los casos extremos del anulador en 19.4. □

Aplicando 19.7 a una matriz rectangular, recuperamos $\operatorname{rg} A^{\mathsf{T}} = \operatorname{rg} A$. Las filas de A generan los funcionales obtenidos como combinaciones de las coordenadas de la salida. El teorema dice que son precisamente todos los funcionales que anulan el núcleo de A. Esto explica por qué las ecuaciones de un sistema homogéneo determinan el mismo subespacio aunque se reemplacen por otra base del espacio de filas.

Corolario 19.9 (criterio dual de compatibilidad). Para $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{F}^m$, el sistema $Ax = b$ tiene solución si y sólo si $c^{\mathsf{T}}b = 0$ para todo $c \in \ker A^{\mathsf{T}}$. Si es incompatible, existe tal c con $c^{\mathsf{T}}b = 1$.

Demostración. Si $b = Ax$ y $A^{\mathsf{T}}c = 0$, entonces $c^{\mathsf{T}}b = c^{\mathsf{T}}Ax = 0$. Si $b \notin \operatorname{im} A$, el lema 19.3 da un funcional sobre $\mathbb{F}^m$ que anula esa imagen y toma valor uno en b. En las coordenadas duales usuales tiene forma $y \mapsto c^{\mathsf{T}}y$. Anular la imagen significa $A^{\mathsf{T}}c = 0$, y su valor en b da el certificado anunciado. □

Consideremos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Las dos primeras filas son independientes y la tercera es su suma. Por ello $\ker A^{\mathsf{T}}$ está generado por $c = (-1,-1,1)$ y la compatibilidad equivale a $b_3 = b_1 + b_2$. Si se cumple, todas las soluciones son $(b_1 - s - 2t, b_2 - s + t, s, t)$, con $s, t \in \mathbb{F}$. El núcleo tiene base $(-1,-1,1,0)$ y $(-2,1,0,1)$; su anulador está generado por los funcionales de las dos primeras filas. En esta cuenta se ven las dos igualdades de 19.8 y la libertad de una fibra de C09.

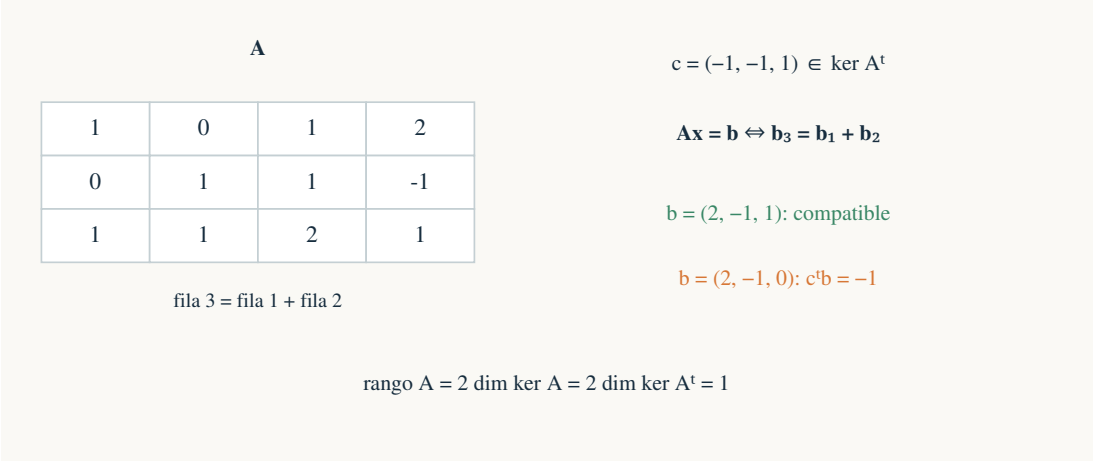


Figura 19.5. La dependencia entre filas obliga a la misma dependencia entre las entradas de b. Una violación se detecta mediante un funcional que anula todas las columnas de A.

19.8. Los funcionales de un cociente

Una regla sobre clases $v+U$ sólo puede depender de la clase, por lo que debe ignorar diferencias que estén en U. Esa exigencia identifica el dual del cociente con el anulador. En cambio, restringir un funcional a U olvida sus valores en las direcciones complementarias.

Teorema 19.10 (cociente y exactitud elemental). Sean $i : U \to V$ la inclusión y $q : V \to V/U$ la proyección. La aplicación $q' : (V/U)^* \to V^*$ es inyectiva y tiene imagen U°. La aplicación $i' : V^* \to U^*$ es la restricción, es sobreyectiva y tiene núcleo U°. Así se obtiene

$$0 \longrightarrow (V/U)^* \xrightarrow{q'} V^* \xrightarrow{i'} U^* \longrightarrow 0.$$

La secuencia es **exacta**: en cada lugar, la imagen de la flecha anterior es el núcleo de la siguiente. En particular, $(V/U)^* \cong U^\circ$ mediante q' y $V^*/U^\circ \cong U^*$ mediante restricción.

Demostración. Si $h \circ q = 0$, la sobreyectividad de q implica $h = 0$, así que q' es inyectiva. Toda composición $h \circ q$ anula U. A la inversa, si f anula U, la fórmula $h(v+U) = f(v)$ está bien definida porque cambiar un representante añade un elemento anulado por f. Es lineal por las operaciones del cociente y satisface $q'h = f$. Esto identifica exactamente su imagen.

Por definición, $i'f = f|_U$. El lema 19.3 garantiza sobreyectividad, y la condición de restricción cero es precisamente $f \in U^\circ$. Las flechas con cero significan inyectividad en el primer extremo y sobreyectividad en el último; la igualdad en el centro es la ya probada. La primera identificación es el isomorfismo de q' con su imagen. La segunda se obtiene del primer teorema de isomorfía de C11 aplicado a la restricción. □

Las extensiones de un funcional fijo $h \in U^*$ forman una familia $f_0 + U^\circ$, una vez elegida una extensión f_0. En efecto, dos extensiones tienen la misma restricción si y sólo si su diferencia anula U. Elegir un complemento de U permite imponer valores cero allí y obtener una extensión concreta. El anulador y las dos aplicaciones del teorema no necesitan ese complemento; la selección de una extensión sí puede depender de él.

19.9. Evaluar un funcional en un vector fijo

El bidual es $V^{**} = (V^*)^*$. Sus elementos reciben funcionales y devuelven escalares. Un vector fijo $v \in V$ produce una regla de esa clase: entregar a cada funcional f su valor $f(v)$. La entrada de esta nueva regla es f, mientras v permanece fijo.

Teorema 19.11 (evaluación bidual). La aplicación

$$\mathrm{ev}_V : V \longrightarrow V^{**}, \qquad \mathrm{ev}_V(v)(f) = f(v),$$

es un isomorfismo. Además, para toda $T : V \to W$ se cumple $T'' \,\mathrm{ev}_V = \mathrm{ev}_W \, T$, donde $T'' = (T')' : V^{**} \to W^{**}$.

Demostración. Para un v fijo, la regla es lineal en f: $(af + bg)(v) = af(v) + bg(v)$. Así $\mathrm{ev}_V(v) \in V^{**}$. Para f fijo, la linealidad $f(av + bw) = af(v) + bf(w)$ muestra que ev_V es lineal como aplicación de v.

Si $v \neq 0$, el separador de 19.3 aplicado al subespacio cero proporciona f con $f(v) = 1$. Por ello $\mathrm{ev}_V(v) \neq 0$, y la evaluación es inyectiva. La dimensión de V^{**} es $\dim V^* = \dim V$ por 19.1; la inyectividad implica sobreyectividad en dimensión finita.

Para la identidad restante, evaluemos ambos lados en un funcional $g \in W^*$. El lado izquierdo vale $\mathrm{ev}_V(v)(T'g) = (T'g)(v) = g(Tv)$. El derecho vale $\mathrm{ev}_W(Tv)(g) = g(Tv)$. Son elementos de W^{**} con los mismos valores en cada entrada y, por tanto, iguales. □

La evaluación se define sin elegir una base. Esa propiedad se conserva al aplicar cualquier transformación, como expresa la última identidad, y da un sentido preciso a llamar **canónica** a esta identificación con el bidual. Un isomorfismo con V^* obtenido enviando una base a su base dual depende, en cambio, de la base elegida. En el plano usual enviaría $(1, 1)$ al funcional $x + y$; usando la base de §19.2 lo enviaría a $2x - y$. Son dos elecciones distintas para el mismo vector.

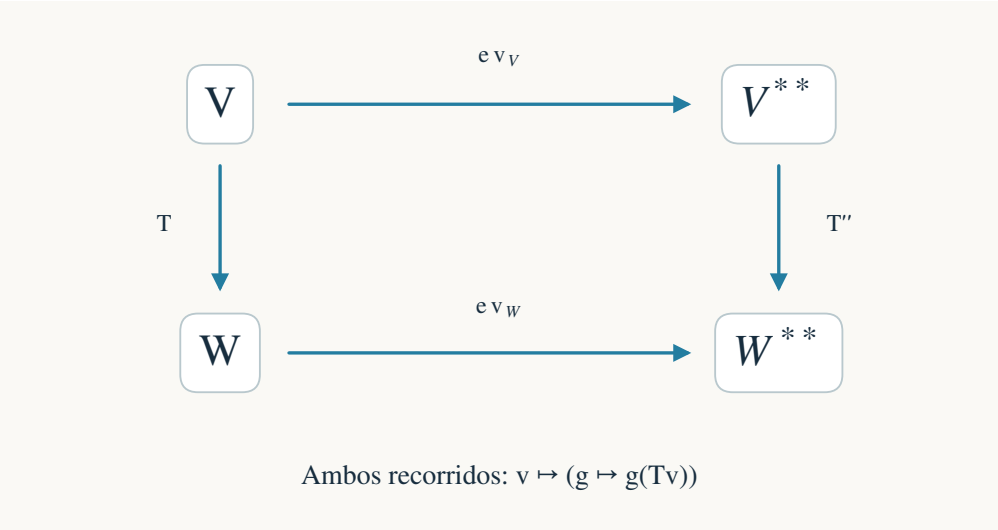


Figura 19.6. Los dos recorridos llevan v a la regla $g \mapsto g(Tv)$. Los espacios de entrada y salida de cada flecha se mantienen explícitos.

Corolario 19.12 (recuperación desde el lado dual). Para un subespacio $L \subseteq V^*$,

$$\dim L_0 = \dim V - \dim L, \qquad (L_0)^\circ = L.$$

Por tanto, $U \mapsto U^\circ$ y $L \mapsto L_0$ son correspondencias inversas entre los subespacios de V y de V^*, que revierten inclusiones.

Demostración. Aplicando 19.4 al espacio V^*, el anulador de L dentro de V^{**} tiene dimensión $\dim V^* - \dim L$. Bajo ev_V, sus elementos corresponden exactamente a los v tales que $f(v) = 0$ para todo $f \in L$, es decir, a L_0. Esto prueba la fórmula de dimensión.

Cada $f \in L$ anula L_0, de modo que $L \subseteq (L_0)^\circ$. Por 19.4, el segundo espacio tiene dimensión $\dim V - \dim L_0 = \dim L$; la inclusión es igualdad. Junto con $(U^\circ)_0 = U$, esto prueba que las dos operaciones son inversas. Ambas revierten inclusiones por sus propias condiciones de anulación. □

19.10. Invariancia y transposición de operadores

Proposición 19.13 (subespacios invariantes y anuladores). Para un operador $T : V \to V$ y un subespacio $U \subseteq V$, se tiene $T(U) \subseteq U$ si y sólo si $T'(U^\circ) \subseteq U^\circ$.

Demostración. Si $T(U) \subseteq U$, para $f \in U^\circ$ y $u \in U$ resulta $(T'f)(u) = f(Tu) = 0$. Por ello $T'f \in U^\circ$. Recíprocamente, supongamos invariante el anulador. Para todo $u \in U$ y $f \in U^\circ$, se tiene $f(Tu) = (T'f)(u) = 0$. Así Tu pertenece a $(U^\circ)_0 = U$ por 19.4, que prueba la invariancia. □

En una base adaptada a U, C17 da $[T] = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$. La base dual tiene como últimos vectores una base de U°. La matriz transpuesta es $\begin{pmatrix} B^{\mathsf{T}} & 0 \\ C^{\mathsf{T}} & D^{\mathsf{T}} \end{pmatrix}$ y preserva precisamente el subespacio generado por esos últimos vectores. Su restricción a U° tiene matriz D^{T}. Esto coincide con dualizar el operador cociente sobre V/U, cuya matriz era D.

Proposición 19.14 (invariantes de un operador y su dual). Los operadores T y T' tienen el mismo característico y el mismo mínimo. Para todo $\lambda \in \mathbb{F}$ y $j \geq 0$,

$$\dim \ker (T' - \lambda I)^j = \dim \ker (T - \lambda I)^j.$$

Si el característico se escinde, tienen los mismos tamaños de bloques de Jordan para cada valor propio. En particular, una matriz con característico escindido es semejante a su transpuesta.

Demostración. Por 19.7 y la invariancia del determinante bajo transposición de C13, $\det(tI - A^{\mathsf{T}}) = \det(tI - A)$. Para todo polinomio p, la linealidad de la dualización y su regla de composición dan $p(T)' = p(T')$: invertir el orden no cambia una potencia de un mismo operador. Una aplicación S es cero si y sólo si S' es cero. Una dirección es inmediata; para la otra, si $Sv \neq 0$, algún funcional separador toma valor uno en Sv, por lo que S' no es cero. Así $p(T) = 0$ si y sólo si $p(T') = 0$, y los mínimos coinciden.

Aplicar la igualdad de rangos de 19.8 a $S = (T - \lambda I)^j$ da igualdad de rangos con $S' = (T' - \lambda I)^j$. Como los dos espacios tienen igual dimensión, rango–nulidad da las nulidades anunciadas. Si el característico se escinde, C18 recupera de ellas los tamaños de cada valor y clasifica por semejanza. $\square$

La hipótesis de escisión corresponde aquí al alcance del argumento por Jordan. Los resultados de rango, característico, mínimo y nulidades anteriores se probaron sobre cualquier cuerpo. La transposición de un bloque superior de Jordan también se puede convertir en el mismo bloque invirtiendo el orden de sus vectores; esa observación será útil en los ejercicios.

19.11. Ejercicios y soluciones

En las fórmulas de coordenadas, los funcionales se representan por columnas de coeficientes en una base dual; su evaluación sobre una columna de coordenadas se escribe $c^{\mathsf{T}} x$. No se conjugan escalares complejos. Los ejemplos numéricos se toman sobre $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$ salvo indicación distinta.

Ejercicio 19.1. Determine cuáles de las reglas $x + 2y$, $x + 2y + 1$ y xy sobre $\mathbb{R}^2$ son funcionales lineales.

Solución 1. La primera respeta sumas y múltiplos al distribuir sus dos términos, luego es lineal. La segunda toma valor uno en el vector cero, lo que impide linealidad. La tercera vale cero en $(1, 0)$ y $(0, 1)$, pero vale uno en su suma $(1, 1)$; falla la aditividad. Tener salida escalar no basta para ser un funcional lineal.

Ejercicio 19.2. Encuentre la base dual de $((1, 1), (1, 2))$ y reconstruya $(3, 4)$ con ella.

Solución 2. Resolver $(x, y) = a(1, 1) + b(1, 2)$ da $a = 2x - y$ y $b = -x + y$. Así $\varphi_1 = 2x - y$ y $\varphi_2 = -x + y$. Evaluarlas en $(3, 4)$ da dos y uno, respectivamente. Por tanto $(3, 4) = 2(1, 1) + (1, 2)$. Las evaluaciones en los dos vectores de la base dan las columnas $(1, 0)$ y $(0, 1)$, que verifican la condición dual.

Ejercicio 19.3. Calcule la base dual de $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 1))$.

Solución 3. La matriz de columnas de la base y su inversa son

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Las filas inversas dan $\varphi_1(x, y, z) = x - y + z$, $\varphi_2(x, y, z) = y - z$ y $\varphi_3(x, y, z) = z$. Evaluar cada fila en las columnas de P produce la identidad, así que la lista es la base dual en el orden pedido.

Ejercicio 19.4. Exprese $f(x, y, z) = 2x - y + 3z$ en la base dual del ejercicio 3.

Solución 4. Los coeficientes son los valores en la base original: $f(1, 0, 0) = 2$, $f(1, 1, 0) = 1$ y $f(0, 1, 1) = 2$. Por ello $f = 2\varphi_1 + \varphi_2 + 2\varphi_3$. Sustituir las fórmulas da $2(x - y + z) + (y - z) + 2z = 2x - y + 3z$, que verifica el resultado sin invertir de nuevo una matriz.

Ejercicio 19.5. Para $f(x,y) = 4x - y$, calcule sus coordenadas duales en la base del ejercicio 2 usando el cambio de base.

Solución 5. Las coordenadas usuales son la columna $(4,-1)$. Para $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, la fórmula da $P^{\mathsf{T}}(4,-1) = (3,2)$. También $f(1,1) = 3$ y $f(1,2) = 2$. Finalmente $3(2x-y) + 2(-x+y) = 4x - y$. Aquí se usa P^{T} para cambiar los coeficientes de un funcional fijo; las filas de P^{-1} construyen la base dual misma.

Ejercicio 19.6. Identifique la base dual de $(1, t, t^2)$ en $\mathcal{P}_2(\mathbb{F})$ y escriba E_a en ella.

Solución 6. Los funcionales coordenada son c_0, c_1, c_2, que extraen cada coeficiente: $c_i(t^j) = \delta_{ij}$. Para $p = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$, evaluar en a da $a_0 + a a_1 + a^2 a_2$. Así $E_a = c_0 + a c_1 + a^2 c_2$. Es una identidad sobre cualquier cuerpo, pues usa polinomios formales y evaluación algebraica.

Ejercicio 19.7. Pruebe sobre $\mathbb{Q}$ que E_0, E_1, E_2 forman una base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{Q})^*$ y encuentre la base de polinomios de la que son duales.

Solución 7. Considere $L_0 = (t-1)(t-2)/2$, $L_1 = -t(t-2)$ y $L_2 = t(t-1)/2$. Sus valores en $0, 1, 2$ forman la identidad: $E_i(L_j) = \delta_{ij}$. Por ello los tres polinomios son independientes, pues evaluar una relación en esos puntos anula cada coeficiente. Son una base de un espacio de dimensión tres. Los funcionales de evaluación son su base dual por 19.1. En particular, cada p se reconstruye como $p(0)L_0 + p(1)L_1 + p(2)L_2$.

Ejercicio 19.8. ¿Pueden las evaluaciones en puntos de $\mathbb{F}_2$ generar todo el dual de $\mathcal{P}_2(\mathbb{F}_2)$?

Solución 8. No. Sólo hay dos puntos y, por tanto, dos funcionales de evaluación, mientras el dual tiene dimensión tres. Además el polinomio formal no nulo $t^2 + t$ se anula en ambos puntos; todas las combinaciones de evaluaciones lo anulan. El funcional que extrae el coeficiente de t^2 toma valor uno en él y no pertenece a ese espacio generado. La distinción entre polinomios formales y sus funciones sobre un cuerpo finito importa aquí.

Ejercicio 19.9. Pruebe que la traza es un funcional no nulo sobre $M_n(\mathbb{F})$ para $n \geq 1$, y determine la dimensión de su núcleo incluso cuando la característica divide a n.

Solución 9. La suma de las entradas diagonales respeta las operaciones matriciales, de modo que la traza es lineal. La matriz unidad E_{11} tiene traza uno, así que el funcional no es cero sobre ningún cuerpo. Su rango es uno y su núcleo tiene dimensión $n^2 - 1$. Aunque $\operatorname{tr} I_n = n$ pueda ser cero en el cuerpo, eso no anula el funcional completo.

Ejercicio 19.10. Encuentre todos los funcionales no nulos sobre $\mathbb{R}^2$ cuyo núcleo sea $x + 2y = 0$, y normalice uno para que tome valor uno en $(1,0)$.

Solución 10. El lema 19.3 dice que son $f(x,y) = a(x + 2y)$ con $a \neq 0$. También se deduce escribiendo un funcional general $bx + cy$ y exigiendo que anule $(2,-1)$: resulta $2b - c = 0$. La normalización $f(1,0) = 1$ fuerza $a = 1$, así que el funcional normalizado es $x + 2y$.

Ejercicio 19.11. Sea $U = \operatorname{span}((1,1,0),(0,1,1))$. Encuentre todas las extensiones del funcional h que toma valores uno y dos en esos generadores, respectivamente.

Solución 11. Los generadores son independientes y los datos definen un funcional sobre U. Una extensión $f(x,y,z) = \alpha x + \beta y + \gamma z$ debe cumplir $\alpha + \beta = 1$ y $\beta + \gamma = 2$. Tomando $\beta = a$, todas son $f = (1-a)x + a y + (2-a)z$, con $a \in \mathbb{F}$. La diferencia de dos elecciones es un múltiplo de $-x + y - z$, que anula ambos generadores. La libertad de las extensiones tiene dimensión uno.

Ejercicio 19.12. Para el subespacio del ejercicio 11, construya un separador que tome valor uno en e_2.

Solución 12. El funcional $\ell(x,y,z) = -x + y - z$ anula $(1,1,0)$ y $(0,1,1)$, luego anula todo U. En cambio, $\ell(e_2) = 1$. Esto prueba a la vez que $e_2 \notin U$ y que ℓ es el separador pedido. Su coeficiente de y fija la normalización, y las condiciones sobre los dos generadores determinan los otros coeficientes.

Ejercicio 19.13. Calcule el anulador del plano $z = x + y$ y recupere el plano como preanulador.

Solución 13. Un funcional $ax + by + cz$ anula todos los vectores $(x, y, x+y)$ si y sólo si $(a+c)x + (b+c)y = 0$ para todo x, y. Esto obliga a $a = b = -c$. El anulador es la recta generada por $-x - y + z$. Su preanulador es el conjunto donde esa regla vale cero, es decir, el plano original. Se comprueba $\dim U + \dim U^\circ = 2 + 1 = 3$.

Ejercicio 19.14. Halle el anulador de $U = \operatorname{span}((1,0,1,0),(0,1,0,1)) \subseteq \mathbb{F}^4$.

Solución 14. Para $f(x) = \sum_i a_i x_i$, las condiciones son $a_1 + a_3 = 0$ y $a_2 + a_4 = 0$. Por tanto $U^\circ = \operatorname{span}(x_1 - x_3, x_2 - x_4)$. Estos dos funcionales son independientes por sus coeficientes de x_1, x_2.

Su núcleo común exige $x_1 = x_3$ y $x_2 = x_4$, que describe exactamente U. El cálculo funciona también en característica dos, interpretando allí los signos.

Ejercicio 19.15. Verifique las dos identidades de 19.5 para $U = \operatorname{span}(e_1, e_2)$ y $W = \operatorname{span}(e_2, e_3)$ en $\mathbb{F}^3$.

Solución 15. Se tiene $U + W = \mathbb{F}^3$ y $U \cap W = \operatorname{span} e_2$. Sus anuladores son $U^\circ = \operatorname{span} z$ y $W^\circ = \operatorname{span} x$, entendiendo x, z como funcionales coordenada. La intersección de estas rectas duales es cero, que coincide con $(U + W)^\circ$. Su suma es $\operatorname{span}(x, z)$, el conjunto de funcionales que anula e_2, y coincide con $(U \cap W)^\circ$.

Ejercicio 19.16. Demuestre que si dos subespacios propios distintos tienen la misma dimensión, existe un funcional que anula uno de ellos y no anula el otro.

Solución 16. Sean $U \neq W$ de igual dimensión. No puede ocurrir $W \subseteq U$, porque una inclusión entre espacios de igual dimensión sería igualdad. Elija $w \in W \setminus U$. El separador de 19.3 anula U y toma valor uno en w, así que no anula todo W. En particular, los anuladores de U y W son distintos. No es necesario construir coordenadas de ambos espacios.

Ejercicio 19.17. Si $f_1, \dots, f_k$ son funcionales independientes en un espacio de dimensión n, pruebe que su núcleo común tiene dimensión $n - k$.

Solución 17. El espacio $L = \operatorname{span}(f_1, \dots, f_k)$ tiene dimensión k. Su preanulador es exactamente $\bigcap_i \ker f_i$, porque anular los generadores equivale a anular todas sus combinaciones. El corolario 19.12 da $\dim L_0 = n - k$. Para una familia dependiente, la misma cuenta usa $\dim L$ en lugar del número de funcionales escritos.

Ejercicio 19.18. ¿Son el anulador U° y el dual U^* el mismo espacio? Use una recta de $\mathbb{F}^3$ para explicar la diferencia.

Solución 18. No. Para $U = \operatorname{span} e_1$, su dual U^* tiene dimensión uno y contiene aplicaciones definidas sólo sobre esa recta. Su anulador en $(\mathbb{F}^3)^*$ tiene dimensión dos y consta de reglas $by + cz$ definidas en todo el espacio que valen cero en la recta. La restricción de cualquier elemento del anulador es el funcional cero de U^*; identificar ambos objetos perdería tanto sus dominios como sus dimensiones.

Ejercicio 19.19. Para $T(x, y, z) = (x + z, 2x - y)$, calcule T' y su matriz en bases duales usuales.

Solución 19. Sea $g(u, v) = au + bv$. Entonces $T'g(x, y, z) = a(x+z) + b(2x-y) = (a+2b)x - by + az$. La columna de salida es $(a + 2b, -b, a)$, y la matriz es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}.$$

La entrada de T' es un funcional sobre el espacio de salida de T, no un vector del dominio original.

Ejercicio 19.20. Calcule los núcleos y las imágenes de T y T' en el ejercicio 19 y compruebe 19.8.

Solución 20. Las ecuaciones del núcleo de T dan $z = -x$ y $y = 2x$, luego $\ker T = \operatorname{span}(1, 2, -1)$. Como las dos filas son independientes, T tiene imagen $\mathbb{F}^2$. Por la fórmula de T', salida cero implica $a = b = 0$, de modo que su núcleo es cero. Su imagen consta de columnas (c_1, c_2, c_3) con $c_1 + 2c_2 - c_3 = 0$: para ellas basta elegir $a = c_3$ y $b = -c_2$. Esa condición es exactamente anular $(1, 2, -1)$. Ambas aplicaciones tienen rango dos, y el núcleo dual es el anulador de todo el codominio.

Ejercicio 19.21. Para $T(x, y) = (x, y, x + y)$ y $S(u, v, w) = (u + w, v - w)$, compruebe la inversión del orden de composición al dualizar.

Solución 21. Las matrices son $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Su producto es $BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Por otro lado, $A^{\mathsf{T}} B^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (BA)^{\mathsf{T}}$. Las dimensiones también fijan el orden: primero S' lleva funcionales de $\mathbb{F}^2$ a $(\mathbb{F}^3)^*$ y después T' los lleva al dual del plano inicial.

Ejercicio 19.22. Para la matriz de tres filas de §19.7, encuentre una base del espacio de filas, una de $\ker A$ y una de $\ker A^{\mathsf{T}}$.

Solución 22. Las dos primeras filas son independientes por sus primeras dos coordenadas, y la tercera es su suma; aquéllas son una base del espacio de filas. Resolver las dos primeras ecuaciones homogéneas con $z = s, w = t$ da $(x, y, z, w) = s(-1, -1, 1, 0) + t(-2, 1, 0, 1)$, una base del núcleo. La

relación única entre las tres filas tiene coeficientes $(-1,-1,1)$, que generan $\ker A^{\mathsf{T}}$. Las dimensiones son dos, dos y uno, respectivamente.

Ejercicio 19.23. Resuelva el sistema de §19.7 con $b = (2,-1,1)$.

Solución 23. La condición $b_3 = b_1 + b_2$ se cumple porque $1 = 2 - 1$. Poniendo $z = s, w = t$, las dos primeras ecuaciones dan $x = 2-s-2t$ e $y = -1-s+t$. La tercera se satisface automáticamente por ser suma de las dos primeras. Todas las soluciones son $(2-s-2t, -1-s+t, s, t)$. La elección $s = t = 0$ produce la solución particular $(2,-1,0,0)$; los coeficientes de s, t son los generadores del núcleo del ejercicio 22.

Ejercicio 19.24. Pruebe la incompatibilidad para $b = (2,-1,0)$ y dé un certificado normalizado con valor uno en b.

Solución 24. La relación de filas exige $0 = 2-1$, que es falsa sobre $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$. El vector $c = (1,1,-1)$ pertenece a $\ker A^{\mathsf{T}}$ porque fila 1 más fila 2 menos fila 3 es cero. Además $c^{\mathsf{T}}b = 2 - 1 - 0 = 1$. Si existiera solución, resultaría $1 = c^{\mathsf{T}}b = c^{\mathsf{T}}Ax = 0$, contradicción. El funcional certificado impide la solución sin resolver para las cuatro incógnitas.

Ejercicio 19.25. Pruebe que un funcional sobre $\mathbb{F}^n$ que se anula en $\ker A$ es combinación lineal de las filas de A.

Solución 25. Sea f tal funcional. Sobre $\operatorname{im} A$, la regla $h(Ax) = f(x)$ está bien definida porque dos preimágenes difieren en un elemento del núcleo. Extendiendo h a todo $\mathbb{F}^m$, obtenemos una fila c^{T} tal que $f(x) = c^{\mathsf{T}}Ax$. Así la fila de coeficientes de f es $c^{\mathsf{T}}A$, una combinación de las filas. Recíprocamente, cualquier combinación de filas se anula en el núcleo porque $Ax = 0$ allí.

Ejercicio 19.26. Demuestre directamente que una aplicación inyectiva $T : V \to W$ tiene dual sobreyectiva.

Solución 26. Dado $f \in V^*$, defina h sobre $\operatorname{im} T$ por $h(Tv) = f(v)$. La inyectividad hace única la preimagen y garantiza buena definición. La regla es lineal porque T respeta combinaciones. Extienda h a $g \in W^*$ por extensión de una base. Entonces $T'g = f$, así que todo funcional del dominio original está en la imagen dual. La extensión puede no ser única cuando la imagen de T es propia.

Ejercicio 19.27. Para $U = \operatorname{span}(1,1) \subseteq \mathbb{F}^2$, describa todos los funcionales sobre V/U y la identificación con U°.

Solución 27. Cada clase de (x,y) tiene representante $(x-y,0)$ al restarle $y(1,1)$. El representante es único, porque $(a,0) \in U$ obliga a $a = 0$. Por tanto el cociente tiene base la clase de $(1,0)$ y sus funcionales son $h_a((x,y)+U) = a(x-y)$. Al componer con q, se obtiene $q'h_a = a(x-y)$, precisamente el anulador de la recta. La fórmula es independiente del representante porque sumar (t,t) no cambia $x-y$.

Ejercicio 19.28. Encuentre todas las extensiones a $\mathbb{R}^2$ del funcional sobre la recta $U = \operatorname{span}(1,1)$ que toma valor tres en $(1,1)$.

Solución 28. Un funcional $f(x,y) = ax + by$ tiene la restricción pedida exactamente cuando $a + b = 3$. Las extensiones son $ax + (3-a)y$ para $a \in \mathbb{R}$. Partiendo de $f_0 = 3y$, la familia se escribe $f_0 + a(x-y)$; la dirección es U°. Si se elige como complemento el eje horizontal, imponer cero allí selecciona $3y$. Si se elige el eje vertical, selecciona $3x$. La diferencia de las extensiones sigue anulando U.

Ejercicio 19.29. Escriba la secuencia exacta de 19.10 para $U = \operatorname{span}(e_1, e_2) \subseteq \mathbb{F}^3$ usando coordenadas.

Solución 29. Identificando el cociente con la tercera coordenada, $q(x,y,z) = z$. Su dual envía un escalar a al funcional az, de columna $(0,0,a)$. La restricción envía (b,c,d) a (b,c), que son los valores sobre e_1, e_2. Así la secuencia es $0 \to \mathbb{F} \to \mathbb{F}^3 \to \mathbb{F}^2 \to 0$, con esas dos reglas. La primera es inyectiva, su imagen es la tercera recta coordenada, ésta es el núcleo de la segunda y la segunda es sobreyectiva. Eso verifica todos los lugares de exactitud.

Ejercicio 19.30. En una base (v_1, v_2), un elemento $L \in V^{**}$ está dado por $L(f) = 2f(v_1) - f(v_2)$. Encuentre el vector que lo representa por evaluación y pruebe su unicidad.

Solución 30. Por linealidad de f, $L(f) = f(2v_1 - v_2)$ para todo f. El vector es $v = 2v_1 - v_2$. Si otro vector w diera los mismos valores, todos los funcionales anularían $v - w$. La separación de 19.3 implica $v - w = 0$. Esto prueba unicidad directamente y coincide con la inyectividad de ev_V.

Ejercicio 19.31. Sea $L \in \mathcal{P}_2(\mathbb{Q})^{**}$ con $L(E_0)=1$, $L(E_1)=2$ y $L(E_2)=5$. Determine el polinomio que representa L.

Solución 31. El polinomio buscado debe tomar valores $1,2,5$ en $0,1,2$. Es $p = 1 + t^2$, como se comprueba sustituyendo. Para demostrar que representa a L en todos los funcionales, use que E_0, E_1, E_2 son una base del dual por el ejercicio 7. Las aplicaciones L y $\mathrm{ev}(p)$ coinciden en los tres elementos de esa base, luego coinciden en todo el dual. La unicidad sigue de 19.11, o de que un polinomio de grado a lo sumo dos con tres raíces distintas es cero.

Ejercicio 19.32. Compare los isomorfismos $V \to V^*$ que envían una base a su base dual para la base usual del plano y para la base del ejercicio 2.

Solución 32. En la base usual, el isomorfismo F envía e_1 a x y e_2 a y, por lo que $F(1,1) = x + y$. En la otra base, el isomorfismo G envía $v_1 = (1,1)$ a $\varphi_1 = 2x - y$, así que $G(1,1) = 2x - y$. Estos funcionales son distintos, por ejemplo al evaluarlos en $(0,1)$ dan uno y menos uno. Cada regla depende de la base con que se construyó, a diferencia de $v \mapsto (f \mapsto f(v))$.

Ejercicio 19.33. Compruebe la identidad de naturalidad de 19.11 para $T(x,y) = (x, y, x+y)$, $v = (1,2)$ y $g(u,v,w) = 2u - v + 3w$.

Solución 33. La imagen del vector es $Tv = (1,2,3)$ y $g(Tv) = 2 - 2 + 9 = 9$. La regla dual es $T'g(x,y) = 5x + 2y$, que toma valor nueve en $(1,2)$. Por definición, evaluar $T''\,\mathrm{ev}(v)$ en g da $\mathrm{ev}(v)(T'g) = 9$, y evaluar $\mathrm{ev}(Tv)$ en g también da nueve. La misma cuenta para una regla arbitraria g constituye la identidad completa del teorema; este ejemplo verifica sus dos recorridos en datos concretos.

Ejercicio 19.34. Para $L = \mathrm{span}(x+y, y+z) \subseteq (\mathbb{F}^3)^*$, calcule L_0 y demuestre explícitamente que $(L_0)^\circ = L$.

Solución 34. Las dos ecuaciones dan $y = -x$ y $z = x$, por lo que $L_0 = \mathrm{span}(1,-1,1)$. Un funcional $ax + by + cz$ anula esa recta si y sólo si $a - b + c = 0$, es decir, $b = a + c$. En tal caso se escribe $a(x+y) + c(y+z)$ y pertenece a L. La recíproca se comprueba anulando el generador. La cuenta da dimensiones dos y uno y funciona en cualquier característica.

Ejercicio 19.35. Sea T de matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $U = \mathrm{span}\, e_1$. Compruebe la invariancia de U y de U°.

Solución 35. Se tiene $Te_1 = 2e_1$, así que U es invariante. Su anulador está generado por los funcionales y, z. El dual envía una columna (a,b,c) a $(2a, a+2b, 3c)$, por transposición. Si $a = 0$, la primera coordenada de salida sigue siendo cero, luego U° es invariante. La restricción a ese anulador tiene matriz $\mathrm{diag}(2,3)$, que es la transpuesta del operador cociente en las clases de e_2, e_3.

Ejercicio 19.36. Pruebe que para $f \neq 0$, el hiperplano $\ker f$ es invariante bajo T si y sólo si $T'f = \lambda f$ para algún escalar λ.

Solución 36. Si $T'f = \lambda f$, entonces para $u \in \ker f$ resulta $f(Tu) = \lambda f(u) = 0$, así que el núcleo es invariante. Recíprocamente, elija v con $f(v) = 1$. Para cualquier x, la diferencia $x - f(x)v$ está en el núcleo; su imagen por T también está allí. Aplicar f da $f(Tx) = f(x) f(Tv)$. Por ello $T'f = \lambda f$ con $\lambda = f(Tv)$. El escalar puede ser cero; no se ha supuesto que T sea invertible.

Ejercicio 19.37. Sea R_s la matriz que invierte el orden de la base usual. Pruebe $R_s^{-1} J_s(\lambda)^{\mathsf{T}} R_s = J_s(\lambda)$.

Solución 37. Se cumple $R_s^{-1} = R_s$, pues invertir dos veces devuelve cada vector a su lugar. La parte escalar λI permanece fija. En la parte nilpotente transpuesta hay un uno en cada posición $(i+1, i)$. La inversión de filas y columnas lleva esa posición a $(s-i, s+1-i)$, que está una posición por encima de la diagonal. Esas son exactamente todas las posiciones de los unos de U_s. Sumando la parte escalar se obtiene la identidad sobre cualquier cuerpo.

Ejercicio 19.38. Pruebe que A es diagonalizable sobre $\mathbb{F}$ si y sólo si A^{T} lo es, sin suponer de antemano que el característico se escinde.

Solución 38. Por C16, la diagonalización equivale a que el mínimo sea producto de factores lineales distintos sobre el cuerpo. La proposición 19.14 prueba que A y su transpuesta tienen el mismo mínimo sin exigir escisión previa. Por tanto cumplen a la vez ese criterio. También puede transponerse directamente $A = PDP^{-1}$ para obtener $A^{\mathsf{T}} = (P^{-1})^{\mathsf{T}} D P^{\mathsf{T}}$, y la recíproca se obtiene transponiendo de nuevo.

Ejercicio 19.39. Demuestre que todo funcional F sobre $M_n(\mathbb{F})$ tiene una expresión única $F(A) = \operatorname{tr}(BA)$ con $B \in M_n(\mathbb{F})$.

Solución 39. Las matrices unidad E_{ij} forman una base. Defina B mediante $B_{ji} = F(E_{ij})$. La identidad $\operatorname{tr}(BE_{ij}) = B_{ji}$ muestra que el funcional $A \mapsto \operatorname{tr}(BA)$ coincide con F en cada elemento de esa base y, por linealidad, en toda matriz. Si dos matrices dieran el mismo funcional, evaluar en cada E_{ij} igualaría sus entradas ji, así que serían iguales. No se ha introducido conjugación ni una positividad; la fórmula es válida en toda característica.

Ejercicio 19.40. Como contraste con la dimensión finita, describa el dual algebraico de $\mathbb{F}[t]$ mediante sucesiones y explique por qué los extractores de coeficientes no forman una base de ese dual.

Solución 40. Un funcional queda determinado por la sucesión arbitraria $a_j = f(t^j)$, $j \geq 0$. Recíprocamente, cualquier sucesión define $f(\sum_{j=0}^{m} c_j t^j) = \sum_{j=0}^{m} c_j a_j$; la suma es finita para cada entrada y da un funcional lineal. Esto identifica el dual con todas las sucesiones de escalares, con operaciones término a término. El extractor de coeficiente c_j corresponde a la sucesión con un uno en la posición j y ceros en las otras. Sus combinaciones lineales finitas sólo dan sucesiones con soporte finito. La evaluación en uno corresponde a $(1, 1, 1, \ldots)$ y no está en ese espacio generado. La prueba finita de base dual no se traslada a una lista infinita de extractores.

Lecturas y referencias

Hoffman–Kunze, *Linear Algebra*, §§3.5–3.7, organiza la relación entre funcionales, anuladores, bidual y transposición. Axler, *Linear Algebra Done Right*, §3F, desarrolla el núcleo y la imagen de la aplicación dual y recupera la igualdad de rangos. Friedberg–Insel–Spence, *Linear Algebra*, §2.6, ofrece cálculos de bases duales y de la matriz transpuesta. Johnston, *Advanced Linear and Matrix Algebra*, §1.3.2, distingue la representación dependiente de una base de la evaluación bidual canónica.

Capítulo 20

Formas bilineales, productos internos y teoremas espectrales

La expresión $2x^2+4xy-y^2$ mezcla dos coordenadas. Al escribirla como $2(x+y)^2-3y^2$, aparecen dos contribuciones de signo opuesto: la mezcla puede desaparecer al cambiar coordenadas, pero la diferencia entre esas dos direcciones permanece. En cambio, para medir longitudes necesitamos una expresión que sea positiva en cada vector no nulo. La posibilidad de escoger coordenadas que respeten esas mediciones dará una precisión nueva a las descomposiciones de los capítulos anteriores.

Una matriz de un operador transforma una entrada; una matriz de una forma recibe dos entradas y produce un escalar. Esas funciones distintas explican sus distintas reglas de cambio de base. Después de estudiar las formas, fijaremos una medición positiva y construiremos bases ortonormales, proyecciones y aproximaciones. Los adjuntos expresarán cómo trasladar un operador de una entrada del producto interno a la otra. El teorema espectral y la descomposición en valores singulares mostrarán hasta dónde se puede simplificar una transformación conservando esa geometría.

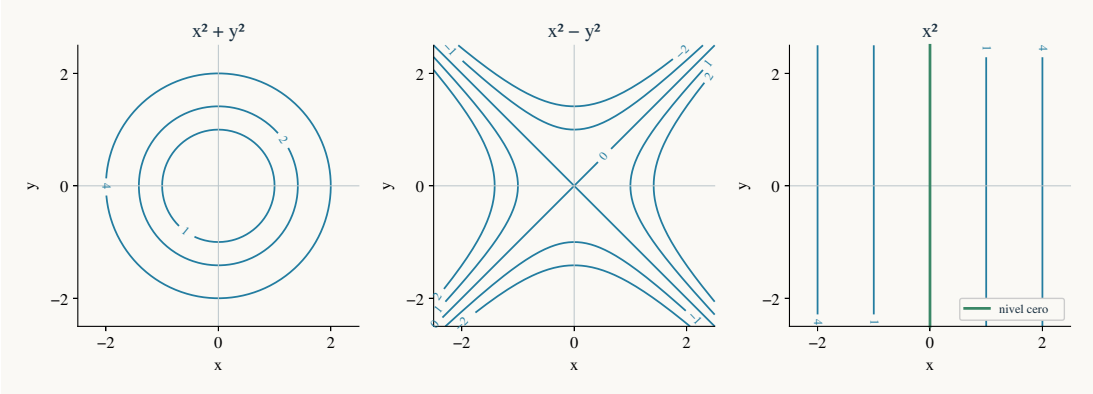


Figura 20.1. La positividad, el cambio de signo y la degeneración producen geometrías diferentes. Los mismos ejes y escalas permiten comparar qué información conserva cada forma.

El capítulo se organiza en cuatro unidades de lectura. En todo el capítulo los espacios serán de dimensión finita. En la primera unidad trabajamos sobre un cuerpo conmutativo, indicando cada restricción de característica; desde la segunda, el cuerpo será $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Sobre $\mathbb{C}$, el producto interno será **lineal en la primera entrada** y conjugado lineal en la segunda. Para matrices escribiremos $A^\dagger = \overline{A}^{\mathsf{T}}$; reservamos T' para el dual algebraico de C19, T^* para el adjunto y A^+ para la pseudoinversa. La existencia de raíces de polinomios complejos conserva el estatuto de resultado externo admitido del TFA en T1, §26.15. Las demostraciones espectrales no usan cálculo ni un argumento de máximos sobre conjuntos compactos.

Primera unidad. Formas y cambios simultáneos de coordenadas

20.1. Dos entradas y una matriz

Definición 20.1. Una **forma bilineal** sobre V es una aplicación $B : V \times V \to \mathbb{F}$ lineal en cada entrada al fijar la otra. Es **simétrica** si $B(v,w) = B(w,v)$ y **alternante** si $B(v,v) = 0$ para todo v. Sus radicales izquierdo y derecho son, respectivamente, los conjuntos de vectores que anulan toda segunda entrada y toda primera entrada. La forma es **no degenerada** si ambos radicales son cero.

Fijada una base $(e_1, \dots, e_n)$, pongamos $M_{ij} = B(e_i, e_j)$. Si x, y son las columnas de coordenadas de v, w, la bilinealidad da $B(v,w) = \sum_{i,j} x_i M_{ij} y_j = x^{\mathsf{T}} M y$. Recíprocamente, cualquier matriz M

define así una forma. El espacio de todas las formas tiene dimensión n^2: sus valores en los n^2 pares de vectores de la base son libres.

Proposición 20.1 (congruencia y radicales). Si P convierte coordenadas nuevas en antiguas, la matriz de la forma en la nueva base es $P^{\mathsf{T}}MP$. El radical izquierdo tiene coordenadas $\ker M^{\mathsf{T}}$ y el derecho, $\ker M$. Ambos tienen dimensión $n - \operatorname{rg} M$. En particular, la forma es no degenerada si y sólo si M es invertible.

Demostración. Sustituir $x = Px'$ e $y = Py'$ en $x^{\mathsf{T}}My$ produce $x'^{\mathsf{T}}P^{\mathsf{T}}MPy'$, que prueba la primera afirmación. Un vector de coordenadas x está en el radical izquierdo si $x^{\mathsf{T}}My = 0$ para todo y, equivalencia que se comprueba en las columnas usuales y da $M^{\mathsf{T}}x = 0$. Análogamente, la condición para el derecho es $My = 0$. C19 iguala los rangos de una matriz y su transpuesta; rango–nulidad da las dimensiones. □

La transformación $M \mapsto P^{\mathsf{T}}MP$ se llama **congruencia**. Se cambia a la vez la base de ambas entradas. Para un operador, en cambio, la regla era $A \mapsto P^{-1}AP$. La semejanza conserva la acción de un operador; la congruencia conserva los valores de una forma al cambiar la descripción de sus dos argumentos.

20.2. Recuperar una forma desde su diagonal

Definición 20.2. Para una forma simétrica B, su **forma cuadrática asociada** es $q(v) = B(v, v)$. Cuando la característica es distinta de dos, estudiaremos las formas cuadráticas mediante esta correspondencia con las formas bilineales simétricas.

Proposición 20.2 (polarización). Si $\operatorname{car}\mathbb{F} \neq 2$ y B es simétrica, entonces

$$B(v, w) = \frac{q(v + w) - q(v) - q(w)}{2}.$$

Para una forma bilineal cualquiera, $B(v, v)$ sólo depende de su parte simétrica $(B(v, w) + B(w, v))/2$.

Demostración. Expandir $B(v + w, v + w)$ da $q(v) + q(w) + B(v, w) + B(w, v)$. La simetría convierte los dos últimos términos en $2B(v, w)$, y se puede dividir por dos. Para la segunda afirmación, las partes simétrica y antisimétrica suman B, y la segunda vale cero cuando sus dos argumentos coinciden. □

La restricción de característica tiene contenido. Sobre $\mathbb{F}_2$, la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ define una forma simétrica no nula cuya diagonal $B(v, v)$ es siempre cero. Además, el polinomio cuadrático formal xy no tiene representación $x^{\mathsf{T}}Mx$ mediante una matriz simétrica de orden dos en característica dos: los términos cruzados se cancelarían. El tratamiento general de formas cuadráticas en esa característica requiere conservar datos adicionales; aquí no se aplicará allí la polarización anterior.

Teorema 20.3 (diagonalización por congruencia). Sobre un cuerpo de característica distinta de dos, toda forma bilineal simétrica admite una base en la que su matriz es diagonal.

Demostración. Inducimos sobre la dimensión. Si la forma es cero, cualquier base sirve; esto incluye el espacio cero. Si no es cero, 20.2 garantiza algún v con $B(v, v) \neq 0$, pues de lo contrario la polarización anularía toda la forma. Para cualquier w, pongamos

$$w_0 = w - \frac{B(w, v)}{B(v, v)} v.$$

Se cumple $B(w_0, v) = 0$. Así $V = \mathbb{F}v + W$, donde $W = \{u : B(u, v) = 0\}$. La suma es directa porque $av \in W$ implica $aB(v, v) = 0$ y, por tanto, $a = 0$. La simetría hace que ambas entradas sean ortogonales entre esos sumandos. La restricción a W es simétrica y $\dim W = n - 1$; por inducción posee una base diagonal. Anteponer v da la base buscada. La posible degeneración de la restricción no afecta a la inducción. □

En el ejemplo inicial, $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y las nuevas coordenadas son $u = x + y$, $v = y$. La matriz que devuelve las antiguas es $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, y $P^{\mathsf{T}}MP = \operatorname{diag}(2, -3)$. Las trazas son uno y menos uno, respectivamente: estas matrices congruentes no son semejantes. El cambio ha simplificado la forma que describen, sin afirmar que representen el mismo operador.

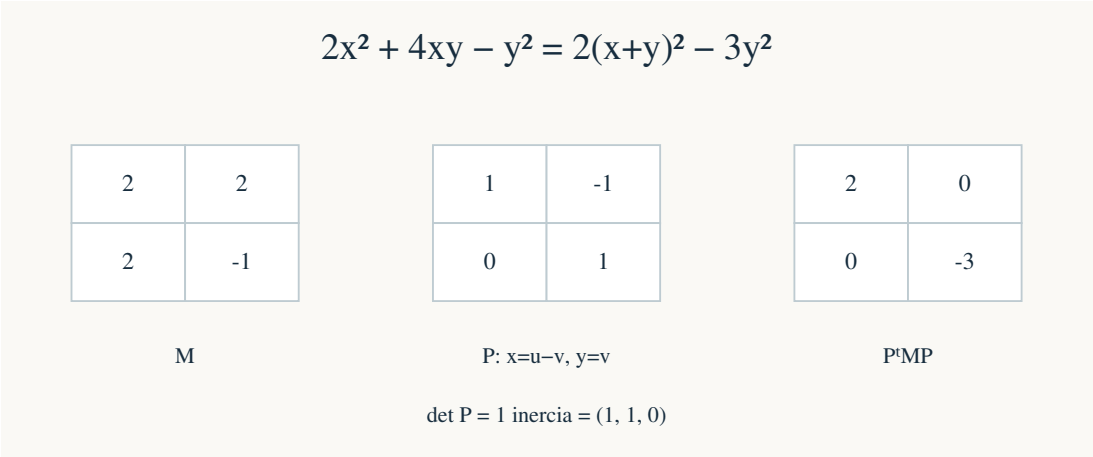


Figura 20.2. La identidad polinómica y el cambio simultáneo de coordenadas expresan el mismo cálculo. Los signos que quedan permiten estudiar la forma sin términos cruzados.

20.3. Cuántas direcciones son positivas

Teorema 20.4 (ley de inercia real). Toda forma simétrica real admite matriz $\operatorname{diag}(I_p, -I_q, 0_z)$, donde $p+q+z=n$. Los tres números están determinados por la forma. Dos formas reales son congruentes si y sólo si tienen el mismo triple (p,q,z).

Demostración. Por 20.3 se obtiene una matriz diagonal. Cada entrada no nula d se normaliza a su signo dividiendo el vector correspondiente por $\sqrt{|d|}$. Ordenar positivos, negativos y ceros produce la matriz anunciada. El número z es la dimensión del radical por 20.1.

Para fijar p sin depender de la base, consideremos cualquier subespacio L donde la forma sea positiva definida. Su proyección sobre las primeras p coordenadas es inyectiva: un vector no nulo de L con todas esas coordenadas cero tendría valor cuadrático no positivo, contradicción. Así $\dim L \le p$. Las primeras p direcciones alcanzan esa dimensión, por lo que p es el máximo de las dimensiones de subespacios positivos. Aplicar el mismo argumento a $-B$ fija q. Estos máximos y el radical se preservan mediante un cambio de base. Finalmente, dos formas con el mismo triple se reducen a la misma matriz, lo que da una congruencia entre ellas. $\square$

Un vector no nulo con $q(v)=0$ se llama **isótropo**. No tiene por qué pertenecer al radical. En $q(x,y)=x^2-y^2$, el vector $(1,1)$ es isótropo, pero el radical es cero. La anulación en una sola entrada diagonal debe distinguirse de anular el emparejamiento con todos los vectores.

20.4. Formas alternantes

De $B(v+w,v+w)=0$ para una forma alternante se deduce $B(v,w)=-B(w,v)$, sobre cualquier cuerpo. En característica dos esto implica simetría, pero sigue siendo necesario exigir diagonal cero. Un bloque alternante básico es $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Teorema 20.5 (pares alternantes). Toda forma alternante de dimensión finita, en cualquier característica, admite una matriz diagonal por bloques formada por bloques $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y un bloque cero. Su rango es par. Si es no degenerada, la dimensión es par.

Demostración. Si $B \neq 0$, elijamos e, f con $B(e,f)=1$, normalizando uno de los vectores. Son independientes: evaluar una relación en e y en f anula sus dos coeficientes. En $H=\operatorname{span}(e,f)$ la forma tiene el bloque anunciado y es no degenerada.

Para cualquier w, el vector $w_H = B(w,f)e - B(w,e)f$ pertenece a H, y $w - w_H$ se anula al emparejarlo con e y con f. La identidad $B(f,e)=-1$ verifica ambas cancelaciones incluso en característica dos. Por tanto, $V = H \oplus H^{\perp_B}$, donde el segundo sumando anula todo H; la suma es directa por la no degeneración en H. La restricción restante es alternante y se repite el argumento en dimensión menor. Cuando la restricción es cero, su espacio aporta el bloque cero y queda en el radical de toda la forma. Cada bloque no nulo tiene rango dos, lo que prueba las dos afirmaciones finales. $\square$

20.5. El caso hermitiano

Definición 20.3. Una **forma hermitiana** sobre un espacio complejo es una aplicación h lineal en la primera entrada, conjugado lineal en la segunda y tal que $h(v,w) = \overline{h(w,v)}$. Representaremos esta forma por $H_{ij} = h(e_j, e_i)$; así $h(v,w) = y^\dagger H x$. Con esta convención, $H^\dagger = H$ y el cambio de base es $H \mapsto P^\dagger H P$.

El orden de los índices se ha elegido para conservar la fórmula habitual con columnas y conjugación. En particular, $h(v,v) = x^\dagger H x$ es real. Para una forma bilineal se conserva la convención de §20.1, sin conjugación.

Teorema 20.6 (polarización e inercia hermitianas). Una forma hermitiana queda determinada por $q(v) = h(v,v)$ mediante

$$h(v,w) = \tfrac{1}{4}\big(q(v+w) - q(v-w) + iq(v+iw) - iq(v-iw)\big).$$

Admite por congruencia hermitiana una matriz $\operatorname{diag}(I_p, -I_q, 0_z)$ con triple único de dimensiones complejas.

Demostración. Si $a = h(v,w)$, las dos primeras evaluaciones tienen diferencia $4\operatorname{Re} a$. Las dos últimas tienen diferencia $4\operatorname{Im} a$: los términos cruzados de $q(v+iw)$ son $-ia + i\overline{a} = 2\operatorname{Im} a$. Esto prueba la fórmula y muestra que una forma no nula posee algún v con $q(v) \neq 0$.

Para ese vector, $q(v)$ es real y no nulo. La resta $w - h(w,v)v/q(v)$ es ortogonal a v por linealidad en la primera entrada. La simetría hermitiana hace ortogonales ambos órdenes. La inducción de 20.3 funciona con esta resta y produce una diagonal real. Se normalizan sus entradas con raíces positivas reales. El argumento de máxima dimensión positiva de 20.4 se aplica ahora a subespacios complejos: una proyección compleja inyectiva acota su dimensión por p. Análogamente se fija q, y z es la dimensión del radical. La fórmula de cambio de base resulta de sustituir $x = Px'$, $y = Py'$ en $y^\dagger H x$. $\square$

Segunda unidad. Geometría ortogonal y aproximación

20.6. Una medición positiva de longitud

Definición 20.4. Sobre $\mathbb{R}$, un **producto interno** es una forma bilineal simétrica positiva definida; sobre $\mathbb{C}$, una forma hermitiana positiva definida. Escribiremos $\langle v, w\rangle$ y definiremos $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$. En coordenadas usuales, $\langle x, y\rangle = y^\dagger x$.

La positividad hace que $\|v\| = 0$ equivalga a $v = 0$. Además $\|av\| = |a|\|v\|$. Si $\langle v, w\rangle = 0$, la expansión del cuadrado da $\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$. Esta identidad de Pitágoras será la herramienta para construir aproximaciones sin recurrir a derivadas.

Teorema 20.7 (Cauchy–Schwarz y norma). Para todos v, w,

$$|\langle v, w\rangle| \le \|v\|\|w\|, \qquad \|v + w\| \le \|v\| + \|w\|.$$

En la primera desigualdad hay igualdad si y sólo si v, w son dependientes. Así $\|\cdot\|$ es una norma.

Demostración. Si $w = 0$, la primera afirmación y su caso de igualdad son inmediatos. Si $w \neq 0$, escribamos $v = aw + u$, donde $a = \langle v, w\rangle / \|w\|^2$. La resta define u con $\langle u, w\rangle = 0$. Pitágoras da $\|v\|^2 = |\langle v, w\rangle|^2/\|w\|^2 + \|u\|^2$, que prueba la desigualdad. Hay igualdad exactamente cuando $u = 0$, es decir, cuando v es múltiplo de w.

Finalmente, $\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle v, w\rangle + \|w\|^2$. Acotar la parte real por el módulo y aplicar la primera desigualdad da $(\|v\| + \|w\|)^2$. Tomar raíces no negativas prueba la desigualdad triangular. Junto con las dos propiedades ya comprobadas, son los axiomas de norma. $\square$

20.7. Construir direcciones ortonormales

Definición 20.5. Dos vectores son **ortogonales** si su producto interno es cero. Una lista es **ortonormal** si $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$. Para un subespacio W, su **complemento ortogonal** es $W^\perp = \{v : \langle v, w\rangle = 0 \text{ para todo } w \in W\}$.

Una lista ortonormal es independiente: evaluar una relación en su vector j extrae el coeficiente j. Sus coeficientes se leen como $\langle v, e_j\rangle$, lo que conserva el sentido de la primera entrada lineal.

Teorema 20.8 (Gram–Schmidt). Para una lista independiente $(v_1, \dots, v_k)$, las reglas

$$u_j = v_j - \sum_{i<j} \langle v_j, e_i \rangle e_i, \qquad e_j = u_j / \|u_j\|$$

producen una lista ortonormal con los mismos subespacios generados iniciales. Toda lista ortonormal puede ampliarse a una base ortonormal.

Demostración. Supongamos construidos los primeros $j-1$ vectores. Evaluar u_j en e_l para $l < j$ da cero: en la suma sobrevive exactamente el término que resta $\langle v_j, e_l \rangle$. Además $u_j \neq 0$, pues de ser cero v_j pertenecería al generado de los anteriores, que por inducción coincide con el de $v_1, \ldots, v_{j-1}$. Por tanto se puede dividir por su norma. El vector e_j tiene norma uno y es ortogonal a los anteriores. La fórmula expresa cada nuevo vector en el generado inicial y permite recuperar v_j a partir de él y los anteriores; los generados coinciden.

Para ampliar una lista ortonormal, ampliémosla primero a una base por C07 y apliquemos el procedimiento. Los vectores iniciales quedan intactos, porque ya son ortogonales y tienen norma uno. □

Para $v_1 = (1,1,0)$ y $v_2 = (1,0,1)$ en $\mathbb{R}^3$, se obtiene $u_1 = v_1$ y $u_2 = (1/2, -1/2, 1)$. La lista resultante es $e_1 = (1,1,0)/\sqrt{2}$, $e_2 = (1,-1,2)/\sqrt{6}$. Se ha restado la componente de v_2 en la primera dirección, conservando el plano generado.

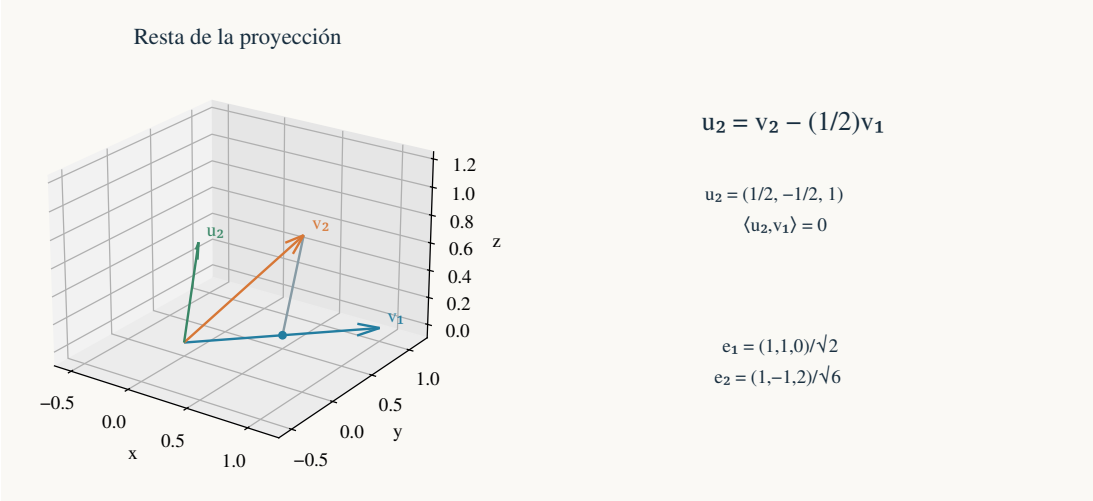


Figura 20.3. La resta crea una segunda dirección perpendicular sin cambiar el plano generado. Normalizar cambia la escala y deja fija esa dirección.

20.8. Proyectar y medir el error

Teorema 20.9 (descomposición y mejor aproximación). Si $(e_1, \ldots, e_k)$ es una base ortonormal de W, entonces

$$P_W v = \sum_{j=1}^{k} \langle v, e_j \rangle e_j, \qquad V = W \oplus W^{\perp}.$$

El operador P_W es lineal, tiene imagen W, núcleo $W^{\perp}$ y cumple $P_W^2 = P_W$. Para $w \in W$,

$$\|v - w\|^2 = \|v - P_W v\|^2 + \|P_W v - w\|^2.$$

Por ello $P_W v$ es la única mejor aproximación a v en W.

Demostración. La resta $v - P_W v$ se anula al emparejarla con cada e_j, luego pertenece a $W^{\perp}$. Si un vector está en $W \cap W^{\perp}$, es ortogonal a sí mismo y debe ser cero. Esto prueba suma directa y unicidad; también demuestra que la fórmula no depende de la base ortonormal elegida. La linealidad procede de la primera entrada del producto, y sobre W la fórmula recupera el propio vector. De ahí se leen imagen, núcleo e idempotencia.

En la descomposición $v - w = (v - P_W v) + (P_W v - w)$, los dos sumandos son ortogonales. Pitágoras da la identidad de error. El segundo término cuadrático se anula exactamente cuando $w = P_W v$, lo que prueba existencia y unicidad del mínimo. □

También se obtiene $\dim W^{\perp} = n - \dim W$ y $(W^{\perp})^{\perp} = W$: hay inclusión de W en el segundo espacio y sus dimensiones coinciden. La identidad $\|v\|^2 = \sum_j |\langle v, e_j\rangle|^2 + \|v - P_W v\|^2$ da la desigualdad de Bessel. Si la lista es una base de V, el residuo es cero y resulta la identidad de Parseval.

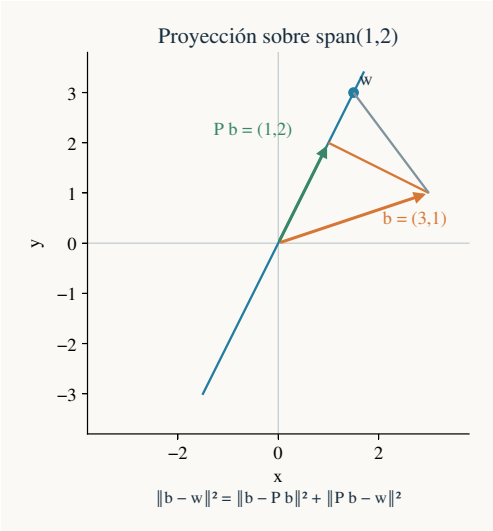


Figura 20.4. Cambiar el punto de la recta añade al residuo perpendicular una componente ortogonal a él. La suma de cuadrados demuestra la propiedad mínima.

20.9. Una factorización que registra la ortogonalización

Teorema 20.10 (QR reducido). Si $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ tiene columnas independientes, entonces $m \geq n$ y existe una factorización única $A = QR$, donde $Q \in \mathbb{F}^{m\times n}$ satisface $Q^{\dagger}Q = I_n$ y $R \in \mathbb{F}^{n\times n}$ es triangular superior con diagonal real positiva.

Demostración. Apliquemos 20.8 a las columnas de A. Cada columna a_j es combinación de $q_1, \ldots, q_j$, de modo que los coeficientes forman una matriz triangular superior. El coeficiente diagonal es $\|u_j\| > 0$ y los anteriores son $\langle a_j, q_i\rangle$. Así $A = QR$ y las columnas ortonormales dan $Q^{\dagger}Q = I_n$.

Si también $A = \widetilde{Q}\widetilde{R}$ con esas propiedades, ambas listas ortonormales generan la imagen de A. La matriz $C = Q^{\dagger}\widetilde{Q} = R\widetilde{R}^{-1}$ es triangular superior y satisface $C^{\dagger}C = I$: sus columnas son las coordenadas de una base ortonormal en otra base ortonormal de la misma imagen. Su primera columna sólo tiene la entrada inicial; norma uno y ortogonalidad de columnas anulan el resto de la primera fila. Repetir en el bloque restante muestra que C es diagonal con entradas de módulo uno. Su diagonal es además positiva, por ser cociente de las diagonales de R y $\widetilde{R}$. Por tanto $C = I$, y las dos factorizaciones coinciden. $\square$

Para las dos columnas del ejemplo de §20.7,

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3/2} \end{pmatrix}.$$

Las identidades $Q^{\dagger}Q = I$ y $QR = A$ verifican el proceso. Si hay dependencia entre columnas, algún residuo de Gram–Schmidt puede ser cero y esta versión de QR con diagonal positiva no se aplica.

20.10. Sistemas que admiten una mejor aproximación

Teorema 20.11 (mínimos cuadrados). Para cualquier matriz A y vector b, existen vectores que minimizan $\|Ax - b\|$. Son exactamente las soluciones de las ecuaciones normales $A^{\dagger}Ax = A^{\dagger}b$. Sus imágenes son el único vector $P_{\operatorname{im} A}b$. El minimizador x es único si y sólo si las columnas de A son independientes. En ese caso,

$$x = (A^{\dagger}A)^{-1}A^{\dagger}b, \qquad Rx = Q^{\dagger}b \quad \text{si } A = QR.$$

Demostración. Por 20.9, la mejor aproximación a b en la imagen de A existe y es su proyección. Al pertenecer a la imagen, tiene alguna preimagen x. El residuo $r = b - Ax$ es ortogonal a todas las columnas exactamente cuando $A^{\dagger} r = 0$, que da las ecuaciones normales. Dos preimágenes de la misma proyección difieren en $\ker A$, por lo que la unicidad equivale a núcleo cero.

La identidad $x^{\dagger} A^{\dagger} A x = \|Ax\|^2$ muestra $\ker(A^{\dagger}A) = \ker A$. Si las columnas son independientes, la matriz cuadrada $A^{\dagger}A$ es invertible y se obtiene la primera fórmula. Sustituir $A = QR$ en las ecuaciones normales da $R^{\dagger} R x = R^{\dagger} Q^{\dagger} b$; cancelar la matriz invertible $R^{\dagger}$ da la segunda. $\square$

Por ejemplo, para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $b = (1, 2, 2)$, las ecuaciones normales son $3a + 3c = 5$, $3a + 5c = 6$. Resulta $(a, c) = (7/6, 1/2)$, con ajuste $(7/6, 5/3, 13/6)$ y residuo $(-1/6, 1/3, -1/6)$. El residuo es ortogonal a ambas columnas y su norma cuadrada es $1/6$.

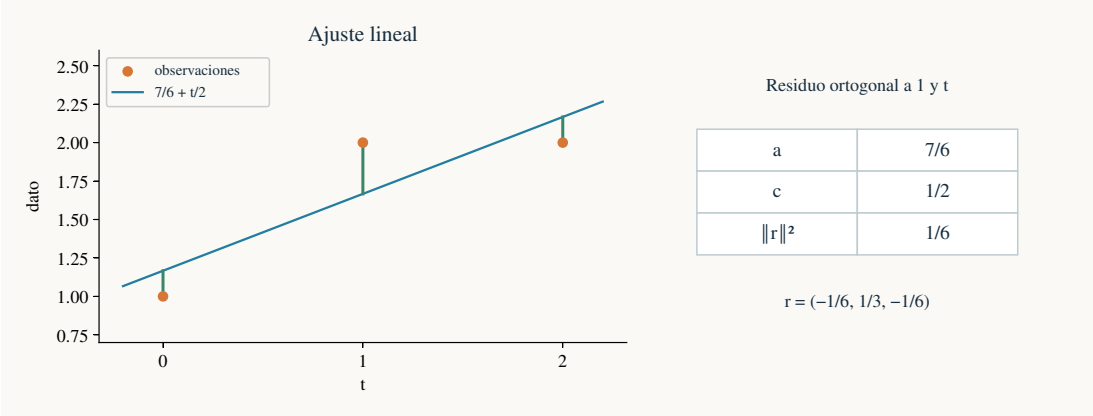


Figura 20.5. Los residuos verticales representan las tres coordenadas del error. La minimización se realiza en el espacio de datos de dimensión tres.

20.11. Representar funcionales usando el producto interno

Teorema 20.12 (representación de Riesz finita). Para cada funcional lineal f existe un único y tal que $f(x) = \langle x, y \rangle$ para todo x. En una base ortonormal (e_j),

$$y = \sum_{j} \overline{f(e_j)}\, e_j .$$

La correspondencia $y \mapsto \langle \cdot\, , y \rangle$ es lineal sobre $\mathbb{R}$ y conjugado lineal sobre $\mathbb{C}$.

Demostración. La fórmula propuesta da $\langle e_i, y \rangle = f(e_i)$, pues el producto conjuga el coeficiente de su segunda entrada. Los dos funcionales coinciden en una base y, por tanto, en todo el espacio. Si dos representantes y, z producen el mismo funcional, se tiene $\langle x, y - z \rangle = 0$ para todo x; tomando $x = y - z$ se obtiene $y = z$. Finalmente, sustituir $ay + bz$ en la segunda entrada conjuga los escalares, lo que prueba la última afirmación. $\square$

En C19 se distinguió la evaluación canónica en el bidual de una identificación de V con V^{*}. Este teorema aporta esa identificación una vez elegido un producto interno y precisa su conjugación compleja. Para $f(z_1, z_2) = z_1 + i z_2$ con el producto usual, el representante es $(1, -i)$: $\langle z, (1, -i) \rangle = z_1 + i z_2$.

Tercera unidad. Adjuntos y teoremas espectrales

20.12. Trasladar el operador entre las dos entradas

Definición 20.6. Para $T : V \to W$ entre espacios con producto interno, su **adjunto** es la aplicación $T^{*} : W \to V$ que satisface $\langle Tx, y \rangle_W = \langle x, T^{*} y \rangle_V$ para todo x, y. Un operador es **autoadjunto** si $T = T^{*}$ y **normal** si $T^{*}T = TT^{*}$.

Teorema 20.13 (existencia y matriz del adjunto). El adjunto existe, es único y es lineal. En bases ortonormales, si T tiene matriz A, su adjunto tiene matriz $A^{\dagger}$. En bases arbitrarias, con matrices de Gram $\Gamma_V = (\langle e_j, e_i \rangle)$ y $\Gamma_W = (\langle f_j, f_i \rangle)$, su matriz es $\Gamma_V^{-1} A^{\dagger} \Gamma_W$.

Demostración. Para y fijo, la regla $x \mapsto \langle Tx, y\rangle$ es un funcional lineal. Por 20.12 tiene un representante único en V; llamémoslo T^*y. Para $ay+bz$, el funcional resultante es $\overline{a}\langle Tx, y\rangle + \overline{b}\langle Tx, z\rangle$, representado por $aT^*y + bT^*z$. La unicidad muestra que T^* es lineal.

En las bases arbitrarias, el producto se escribe $\langle x, y\rangle = y^\dagger \Gamma x$. Estas matrices de Gram son hermitianas positivas definidas: para una columna no nula, su valor cuadrático es la norma cuadrada del vector representado, que es positiva. Son invertibles, porque un vector en el núcleo tendría norma cero. Si C es la matriz del adjunto, su identidad definitoria exige $y^\dagger \Gamma_W A x = y^\dagger C^\dagger \Gamma_V x$ para todos x, y, es decir, $\Gamma_W A = C^\dagger \Gamma_V$. Al conjugar y transponer se obtiene $C = \Gamma_V^{-1} A^\dagger \Gamma_W$. En bases ortonormales ambas matrices de Gram son identidades. La fórmula o la unicidad de los representantes prueba la unicidad del adjunto. □

El dual algebraico de C19 recibe funcionales; el adjunto recibe vectores y usa productos internos. Si $T(z) = iz$ en $\mathbb{C}$, el dual tiene matriz (i) en las bases duales, mientras el adjunto tiene matriz $(-i)$ en la base ortonormal usual. La conjugación responde a la identidad que define al adjunto.

20.13. Núcleos, imágenes y productos de adjuntos

Proposición 20.14. Para composiciones bien definidas se cumple $(ST)^* = T^*S^*$, $(aT + bS)^* = \overline{a}T^* + \overline{b}S^*$ y $(T^*)^* = T$. Además,

$$\ker T^* = (\operatorname{im} T)^\perp, \qquad \operatorname{im} T^* = (\ker T)^\perp, \qquad \ker(T^*T) = \ker T.$$

Demostración. La identidad $\langle STx, z\rangle = \langle Tx, S^*z\rangle = \langle x, T^*S^*z\rangle$ prueba la primera regla por unicidad. Para los escalares se trasladan de la primera a la segunda entrada conjugándolos; sumar las identidades da la segunda. La simetría hermitiana aplicada a la identidad del adjunto muestra que T es adjunto de T^*, lo que prueba la tercera regla.

Un vector y pertenece a $\ker T^*$ exactamente cuando $\langle x, T^*y\rangle = 0$ para todo x, equivalencia que se verifica tomando $x = T^*y$. Por la identidad del adjunto, esto significa $y \perp \operatorname{im} T$. Aplicar el mismo resultado a T^* y tomar complementos ortogonales dobles da la segunda igualdad. Por último, $\langle T^*Tx, x\rangle = \|Tx\|^2$, así que $T^*Tx = 0$ implica $Tx = 0$; la recíproca es inmediata. □

La primera igualdad y 20.9 dan $\operatorname{rg} T^* = \operatorname{rg} T$. Un proyector idempotente es ortogonal exactamente cuando es autoadjunto. Para verlo, la proyección de 20.9 satisface la identidad del adjunto al separar las dos componentes ortogonales. Recíprocamente, si $P^2 = P = P^*$, un vector de su imagen es ortogonal a todo vector de su núcleo, pues $\langle Px, z\rangle = \langle x, Pz\rangle = 0$. La descomposición de C11 entre imagen y núcleo es entonces ortogonal.

20.14. Transformaciones que conservan el producto interno

Una aplicación lineal que conserva normas se llama **isometría**. Un operador $U : V \to V$ se llama **unitario** si $U^*U = UU^* = I$; sobre espacios reales también se dice **ortogonal**. La definición de isometría permite un codominio de dimensión mayor.

Proposición 20.15. Una aplicación $T : V \to W$ es una isometría si y sólo si $T^*T = I_V$. En ese caso conserva productos internos y es inyectiva. Un operador de dimensión finita es una isometría si y sólo si es unitario.

Demostración. La identidad $T^*T = I$ da $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$ y, en particular, igualdad de normas. En la otra dirección, si conserva normas, se conservan las formas cuadráticas del producto interno. Sobre $\mathbb{R}$, la polarización de 20.2 recupera el producto; sobre $\mathbb{C}$, lo hace 20.6. Así $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$ para todos x, y, lo que fuerza $T^*T = I$ por no degeneración. La norma de una imagen sólo puede ser cero si la entrada es cero, de modo que T es inyectiva. Para un operador finito es entonces invertible, y $T^*T = I$ implica $T^* = T^{-1}$, que también da $TT^* = I$. □

20.15. Triangularizar conservando longitudes

Teorema 20.16 (Schur complejo). Todo operador sobre un espacio complejo de dimensión finita tiene una matriz triangular superior en alguna base ortonormal.

Demostración. Inducimos sobre la dimensión, con la base vacía para dimensión cero. En dimensión positiva, el TFA admitido en T1 y C14 proporcionan un vector propio. Lo normalizamos

como e_1 y lo ampliamos a una base ortonormal. La invariancia de su recta hace que la matriz sea $\begin{pmatrix} \lambda & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

El bloque B representa un operador sobre $e_1^{\perp}$: primero se aplica T y luego se proyecta sobre ese subespacio. Esa compresión es lineal, aunque el complemento no sea invariante. Por inducción, un cambio ortonormal dentro del complemento triangulariza B. Extenderlo dejando fijo e_1 triangulariza toda la matriz y conserva ortonormalidad. □

20.16. Cuándo la base ortonormal puede ser propia

Teorema 20.17 (espectral complejo). Un operador complejo es normal si y sólo si posee una base ortonormal de vectores propios. Es autoadjunto exactamente cuando es normal y todos sus valores propios son reales; es unitario exactamente cuando es normal y todos sus valores propios tienen módulo uno.

Demostración. Si es normal, apliquemos 20.16 y escribamos su matriz triangular superior A. Comparar la entrada $(1,1)$ de $A^{\dagger}A$ y $AA^{\dagger}$ da

$$|a_{11}|^2 = |a_{11}|^2 + \sum_{j>1} |a_{1j}|^2.$$

Todos los términos de la suma son no negativos, luego $a_{1j} = 0$ para $j > 1$. Queda una suma de un bloque escalar y un bloque triangular menor, que sigue siendo normal al comparar los productos por bloques. La inducción anula todas las entradas fuera de la diagonal. Recíprocamente, una matriz diagonal conmuta con su conjugada transpuesta; un cambio de base ortonormal conserva la identidad de normalidad.

En la base propia ortonormal, ser autoadjunto equivale a $\lambda = \overline{\lambda}$ en cada entrada, y ser unitario equivale a $|\lambda|^2 = 1$. Los autoadjuntos y los unitarios son normales por sus identidades definitorias, de modo que las equivalencias son completas. □

Teorema 20.18 (espectral real). Un operador real es autoadjunto si y sólo si posee una base ortonormal real de vectores propios. En particular, toda matriz simétrica real admite $A = QDQ^{\mathsf{T}}$ con Q ortogonal y D diagonal real.

Demostración. Escojamos primero una base ortonormal real. Si el operador es autoadjunto, su matriz real A es simétrica. Estudiada sobre $\mathbb{C}$, sigue siendo hermitiana. Tiene un valor propio por el TFA admitido; ese valor es real, pues para un vector propio complejo $z \neq 0$ la identidad $\langle Az, z\rangle = \langle z, Az\rangle$ da $\lambda\|z\|^2 = \overline{\lambda}\|z\|^2$.

Escribamos $z = x + iy$ con x, y reales. Como A y λ son reales, $Ax = \lambda x$ y $Ay = \lambda y$. Al menos uno de esos vectores es no nulo. Normalizarlo da un vector propio real e. Su complemento ortogonal es invariante: para $w \perp e$, se tiene $\langle Tw, e\rangle = \langle w, Te\rangle = 0$. La restricción sigue siendo autoadjunta. Por inducción posee una base ortonormal propia y, al añadir e, se obtiene la de todo el espacio. La recíproca resulta de que una diagonal real coincide con su adjunto en una base ortonormal. □

Por ejemplo, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ tiene ejes propios ortonormales $(1,1)/\sqrt{2}$ y $(1,-1)/\sqrt{2}$, con valores tres y uno. Para su forma cuadrática, la diagonalización ortogonal es además una congruencia, porque $Q^{-1} = Q^{\mathsf{T}}$. Una rotación real de un cuarto de vuelta también es normal, pero no tiene valores propios reales: la normalidad real, por sí sola, no garantiza una base propia real.

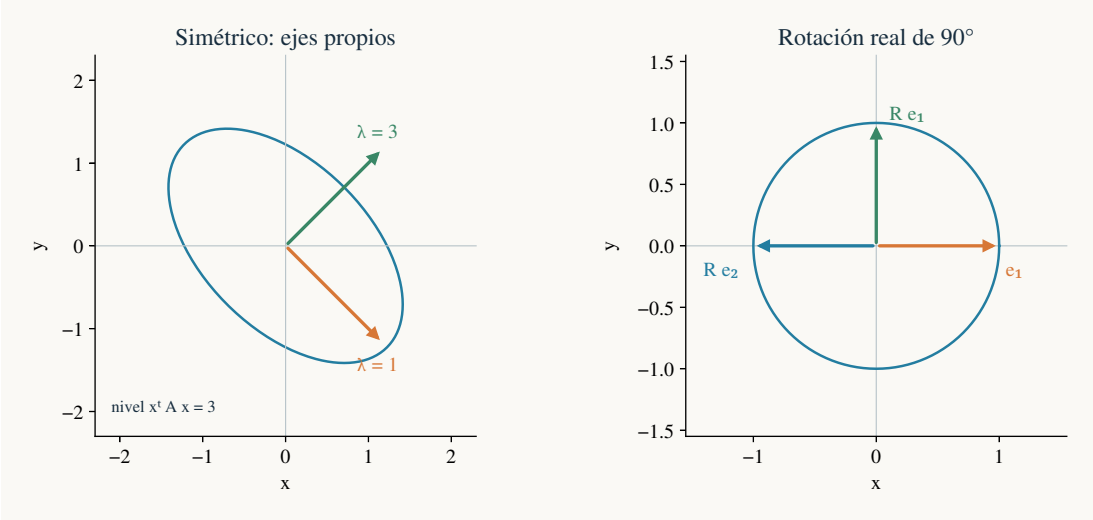


Figura 20.6. La simetría real permite direcciones propias perpendiculares. La rotación conserva longitudes, pero no conserva ninguna recta real.

20.17. Positividad y raíces de operadores

Un operador **positivo semidefinido** será un autoadjunto A con $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ para todo x. Será **positivo definido** si la desigualdad es estricta para $x \neq 0$. La condición de autoadjunción forma parte de esta definición también sobre $\mathbb{R}$.

Teorema 20.19. Un autoadjunto es positivo semidefinido si y sólo si todos sus valores propios son no negativos. Es positivo definido si y sólo si todos son positivos. Todo positivo semidefinido tiene una única raíz cuadrada positiva semidefinida.

Demostración. En una base propia ortonormal, $\langle Ax, x\rangle = \sum_j \lambda_j |x_j|^2$. Las dos caracterizaciones se leen eligiendo una coordenada por vez y sumando. Definir H en esa base mediante $He_j = \sqrt{\lambda_j}\, e_j$ produce un positivo semidefinido con $H^2 = A$.

Para la unicidad, si $K \geq 0$ y $K^2 = A$, entonces K conmuta con A, por ser A su cuadrado. Preserva cada espacio propio E_λ de A. Allí su restricción sigue siendo autoadjunta positiva y tiene una base ortonormal propia. Cada uno de sus valores μ satisface $\mu \geq 0$ y $\mu^2 = \lambda$, luego $\mu = \sqrt{\lambda}$. Por tanto K actúa como $\sqrt{\lambda} I$ en todo E_λ, igual que H. Como esos espacios generan, $K = H$. $\square$

20.18. Varios observables compatibles

Teorema 20.20 (diagonalización ortonormal simultánea). Una familia finita de operadores autoadjuntos que conmutan dos a dos admite una base ortonormal común de vectores propios, sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Demostración. Inducimos sobre el número de operadores. Para uno se aplica el teorema espectral. Diagonalicemos el primero; sus espacios propios correspondientes a valores distintos son ortogonales: si $Tx = \lambda x$, $Ty = \mu y$, con $\lambda \neq \mu$, entonces $\lambda\langle x, y\rangle = \mu\langle x, y\rangle$. Los valores son reales, así que la diferencia no nula obliga a $\langle x, y\rangle = 0$. Cada operador restante preserva esos espacios por conmutación con el primero. Sus restricciones siguen siendo autoadjuntas y conmutan. La inducción da una base ortonormal común en cada espacio propio. Reunirlas produce una base común de todo el espacio. Una familia vacía admite cualquier base ortonormal. $\square$

Cuarta unidad. Valores singulares y síntesis de descomposiciones

20.19. Dos bases ortonormales para una matriz rectangular

Los valores propios exigen el mismo espacio de entrada y de salida. Para una transformación rectangular podemos estudiar T^*T, que sí es un operador sobre el dominio y siempre es positivo semidefinido. Su valor cuadrático es $\|Tx\|^2$, de modo que registra cuánto estira cada dirección.

Definición 20.7. Para $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, sus **valores singulares positivos** son las raíces positivas de los valores propios no nulos de $A^\dagger A$, con multiplicidades. Los ordenamos como $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$.

Cuando usemos una lista matricial completa, se añadirán ceros hasta longitud $\min(m,n)$. El espectro de $A^\dagger A$ puede contener ceros adicionales si $n > m$.

Teorema 20.21 (descomposición en valores singulares). Toda matriz real o compleja admite

$$A = U\Sigma V^\dagger,$$

con $U \in \mathbb{F}^{m\times m}$ y $V \in \mathbb{F}^{n\times n}$ unitarias, y $\Sigma \in \mathbb{F}^{m\times n}$ diagonal rectangular con sus $r = \operatorname{rg} A$ valores singulares positivos y ceros en las otras posiciones. Sobre $\mathbb{R}$, U, V son ortogonales. Equivalentemente,

$$Ax = \sum_{j=1}^{r} \sigma_j \langle x, v_j\rangle u_j.$$

Demostración. La matriz $A^\dagger A$ es autoadjunta y $x^\dagger A^\dagger A x = \|Ax\|^2 \geq 0$. El teorema espectral proporciona una base ortonormal $(v_1,\dots,v_n)$ con $A^\dagger A v_j = \sigma_j^2 v_j$, colocando primero los valores positivos. Para cada uno de ellos definimos $u_j = Av_j/\sigma_j$. Entonces

$$\langle u_i, u_j\rangle = \frac{\langle v_i, A^\dagger A v_j\rangle}{\sigma_i\sigma_j} = \frac{\sigma_j^2\delta_{ij}}{\sigma_i\sigma_j} = \delta_{ij}.$$

Para las restantes direcciones, $\|Av_j\|^2 = 0$, luego $Av_j = 0$. Así las primeras imágenes son independientes y generan toda la imagen de A; su número es $r \leq \min(m,n)$. Ampliemos $(u_1,\dots,u_r)$ a una base ortonormal del codominio. Las matrices de esas bases son U, V, y las igualdades de imágenes por columnas dan $AV = U\Sigma$. Multiplicar por $V^\dagger$ prueba la factorización y la expansión. Si $A = 0$, se eligen cualesquiera bases ortonormales y $\Sigma = 0$; las dimensiones cero se interpretan con las matrices vacías correspondientes. □

Las listas de valores singulares son determinadas por $A^\dagger A$. Las bases no lo son: una dirección puede cambiar de fase, y un valor repetido permite elegir otras bases ortonormales dentro de su espacio propio. La factorización usa dos bases, como la equivalencia de C12, y además conserva longitudes en ambas.

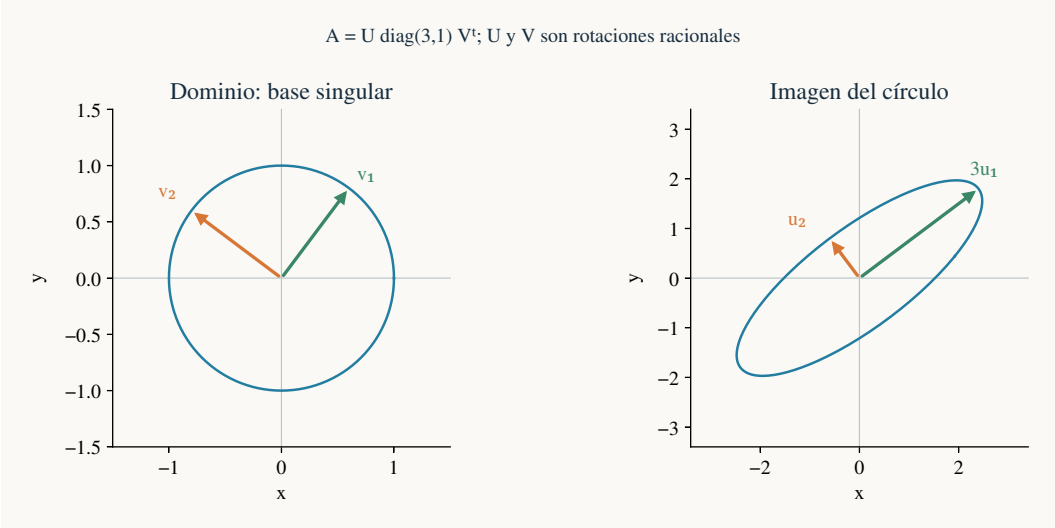


Figura 20.7. Las direcciones singulares del dominio son perpendiculares. Sus imágenes son perpendiculares y sus longitudes son los valores singulares. En el caso degenerado, alguna dirección puede desaparecer.

Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, una dirección singular es $v_1 = (1,1)/\sqrt{2}$, con $\sigma_1 = \sqrt{2}$ e imagen normalizada $u_1 = (1,0,0)$. La dirección $v_2 = (1,-1)/\sqrt{2}$ pertenece al núcleo. Este ejemplo rectangular separa la dirección efectiva de la información que se pierde.

20.20. Los cuatro subespacios y dos normas de matrices

Proposición 20.22. En una SVD completa,

$$\operatorname{im} A = \operatorname{span}(u_1,\dots,u_r), \quad \ker A = \operatorname{span}(v_{r+1},\dots,v_n),$$
$$\operatorname{im} A^\dagger = \operatorname{span}(v_1,\dots,v_r), \quad \ker A^\dagger = \operatorname{span}(u_{r+1},\dots,u_m).$$

Si $n>0$, la norma de operador $\|A\|_2 = \max_{\|x\|=1}\|Ax\|$ existe y es σ_1 cuando $r>0$, y cero cuando $r=0$. La norma de Frobenius satisface $\|A\|_F^2 = \sum_{i,j}|a_{ij}|^2 = \sum_{j=1}^{r}\sigma_j^2$. Ambas son invariantes al multiplicar por matrices unitarias de tamaños adecuados.

Demostración. Las igualdades $Av_j = \sigma_j u_j$ para $j\le r$ y $Av_j = 0$ para $j>r$ identifican imagen y núcleo. Conjugar y transponer la SVD produce las dos igualdades restantes.

Escribiendo un vector unitario en la base (v_j), obtenemos $\|Ax\|^2 = \sum_{j\le r}\sigma_j^2|x_j|^2 \le \sigma_1^2$. La igualdad se alcanza en v_1, lo que demuestra la existencia del máximo sin usar compactitud. Para $A=0$ todo vector unitario da cero. La suma de cuadrados de las entradas es $\operatorname{tr}(A^\dagger A)$; por invariancia de la traza y diagonalización espectral es la suma de sus valores propios, que son los σ_j^2 y los ceros restantes. Las unitarias preservan las normas vectoriales y llevan la esfera unitaria sobre sí misma; esto prueba la primera invariancia. La segunda se sigue de la traza y de $U^\dagger U = I$. □

Para un dominio cero definimos $\|A\|_2 = 0$. La norma de operador mide el mayor estiramiento de una dirección unitaria; la de Frobenius suma las energías de las imágenes de una base ortonormal.

20.21. Invertir las direcciones que sobreviven

Definición 20.8. Dada una SVD, formemos $\Sigma^+ \in \mathbb{F}^{n\times m}$ reemplazando cada $\sigma_j>0$ por $1/\sigma_j$ y conservando ceros, con los tamaños intercambiados. La **pseudoinversa de Moore–Penrose** es $A^+ = V\Sigma^+U^\dagger$.

Teorema 20.23 (caracterización de la pseudoinversa). La matriz A^+ es independiente de la SVD elegida. Es la única $X\in\mathbb{F}^{n\times m}$ que cumple

$$AXA = A, \qquad XAX = X, \qquad (AX)^\dagger = AX, \qquad (XA)^\dagger = XA.$$

Además, $AA^+ = P_{\operatorname{im} A}$ y $A^+A = P_{(\ker A)^\perp}$.

Demostración. En las bases singulares, $\Sigma\Sigma^+$ tiene unos en las primeras r direcciones de salida y ceros en las demás; $\Sigma^+\Sigma$ hace lo mismo en el dominio. Así los dos productos son los proyectores anunciados. Multiplicar las matrices diagonales rectangulares verifica también $AA^+A = A$ y $A^+AA^+ = A^+$, por lo que existe una solución a las cuatro identidades.

Sea X cualquier otra solución. El producto $P = AX$ es idempotente porque $AXAX = (AXA)X = AX$, y es autoadjunto por hipótesis. Su imagen es la de A: está contenida en ella y deja fijo cada Av, pues $AXAv = Av$. Por la caracterización de proyecciones tras 20.14, $P = P_{\operatorname{im} A}$.

El producto $Q = XA$ también es un proyector ortogonal. Su núcleo es $\ker A$: una inclusión es inmediata; si $XAv = 0$, entonces $Av = AXAv = 0$, lo que prueba la otra. Por ello $Q = P_{(\ker A)^\perp}$. El vector Xb pertenece a la imagen de Q, ya que $QX = XAX = X$, y satisface $AXb = P_{\operatorname{im} A}b$. La restricción de A a $(\ker A)^\perp$ es inyectiva; por tanto esas dos condiciones determinan Xb de manera única. También las cumple A^+b, luego $X = A^+$. Toda SVD produce una solución, así que esta unicidad elimina la dependencia de elecciones. □

Corolario 20.24 (mínimos cuadrados de norma mínima). Todos los minimizadores de $\|Ax-b\|$ son $A^+b + z$, con $z\in\ker A$. Entre ellos, A^+b es el único de norma mínima. Si $Ax=b$ es compatible, ésta es su solución de norma mínima. Para columnas independientes, $A^+ = (A^\dagger A)^{-1}A^\dagger$.

Demostración. Por 20.23, la imagen de A^+b es la proyección de b en la imagen, así que minimiza el residuo. Los demás minimizadores tienen esa misma imagen por 20.11 y difieren en el núcleo. Como $A^+b\in(\ker A)^\perp$, Pitágoras da $\|A^+b+z\|^2 = \|A^+b\|^2 + \|z\|^2$. La igualdad de normas ocurre sólo para $z=0$. En el caso compatible, la proyección es el propio b. Para columnas independientes, el minimizador único de 20.11 coincide con A^+b para todo b; las dos matrices son iguales. □

En el ejemplo rectangular de §20.19,

$$A^+ = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para $b = (2, 1, -1)$ se obtiene $A^{+}b = (1, 1)$ y $AA^{+}b = (2, 0, 0)$. El residuo $(0, 1, -1)$ es perpendicular a la imagen de A. Todos los minimizadores son $(1 + t, 1 - t)$, y sus normas cuadradas son $2 + 2t^2$ sobre $\mathbb{R}$.

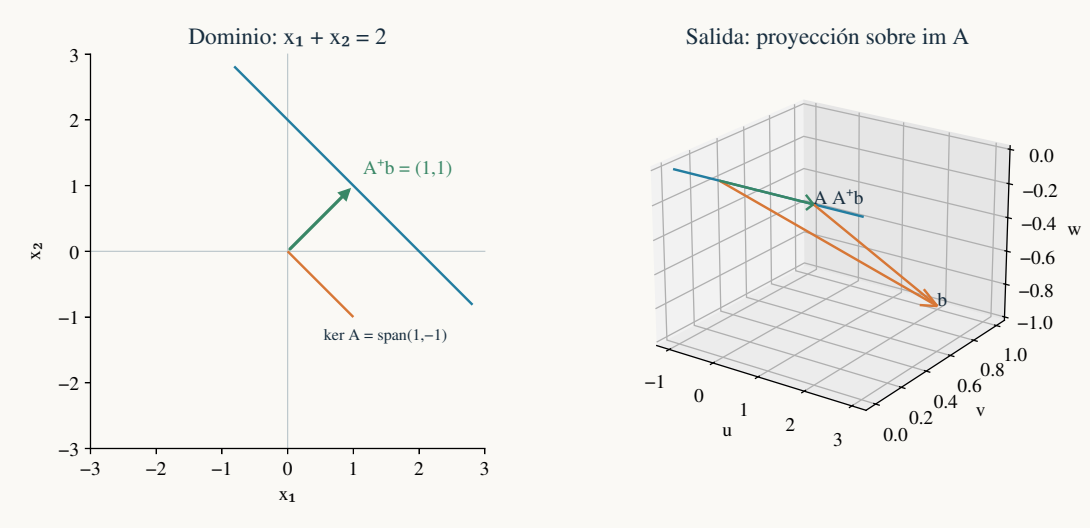


Figura 20.8. En el espacio de salida se proyecta b sobre la imagen. En el dominio, todas las preimágenes de esa proyección forman una recta; la pseudoinversa elige su punto perpendicular al núcleo.

20.22. Conservar las direcciones de mayor efecto

Teorema 20.25 (mejor aproximación de rango acotado, norma de operador). Si $0 \le k < r$ y

$$A_k = \sum_{j=1}^{k} \sigma_j u_j v_j^{\dagger},$$

entonces $\operatorname{rg} A_k = k$ y $\|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1}$. Para toda B de rango a lo sumo k, se cumple $\|A - B\|_2 \ge \sigma_{k+1}$. Para $k \ge r$ se puede tomar $A_k = A$ y el error es cero.

Demostración. La matriz truncada conserva las primeras k imágenes singulares y anula las restantes; por eso su rango es k. La diferencia conserva los valores $\sigma_{k+1}, \dots, \sigma_r$, y 20.22 da su norma.

Para cualquier B de rango a lo sumo k, la restricción de B al espacio $E = \operatorname{span}(v_1, \dots, v_{k+1})$ tiene núcleo no nulo por rango–nulidad. Elijamos allí un vector unitario x con $Bx = 0$. En esas coordenadas, $\|Ax\|^2 = \sum_{j=1}^{k+1} \sigma_j^2 |x_j|^2 \ge \sigma_{k+1}^2$. Así $\|(A - B)x\| = \|Ax\| \ge \sigma_{k+1}$, que da la cota para la norma. El caso $k = 0$ usa el mismo argumento en la primera dirección. Si $k \ge r$, la propia matriz ya tiene rango admisible. $\square$

La afirmación se refiere a la norma de operador. La truncación no tiene por qué ser el único minimizador en esa norma. Los valores singulares miden el precio mínimo de descartar direcciones, mientras sus vectores indican cuáles conserva una aproximación concreta.

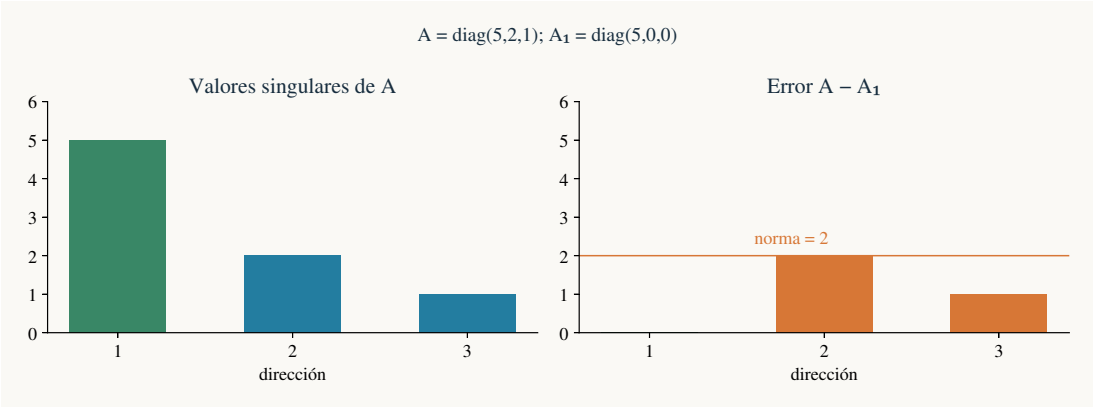


Figura 20.9. Conservar sólo la primera dirección deja como mayor estiramiento del error el segundo valor singular. La cota inferior se prueba frente a cualquier matriz de rango uno, no sólo frente a otras diagonales.

20.23. Separar estiramiento y transporte de direcciones

Teorema 20.26 (descomposición polar rectangular). Para $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, sea $H = (A^\dagger A)^{1/2}$. Existe una única aplicación lineal $W : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ que es cero en $\ker A$, es isometría de $(\ker A)^\perp$ sobre $\operatorname{im} A$ y cumple $A = WH$. En una SVD, $H = V\,\operatorname{diag}(\sigma_1,\dots,\sigma_r,0,\dots,0)V^\dagger$ y $W = \sum_{j=1}^{r} u_j v_j^\dagger$. Si A es cuadrada invertible, W es unitario.

Demostración. La fórmula de H produce un positivo semidefinido cuyo cuadrado es $A^\dagger A$, y 20.19 lo identifica con la raíz única. La fórmula de W envía v_j a u_j para $j \le r$ y a cero para $j > r$. Conserva las normas en el generado de las primeras direcciones, que es $(\ker A)^\perp$, y lo lleva sobre la imagen. Multiplicar sus acciones por las de H da $WHv_j = Av_j$ en cada vector de la base, por lo que $WH = A$.

La restricción de H a $(\ker A)^\perp$ es invertible sobre ese mismo subespacio. Por tanto $WH = A$ determina W allí, mientras la exigencia de anular el núcleo lo determina en el complemento restante. Esto prueba unicidad. Si la matriz es cuadrada invertible, no hay núcleo y la isometría es sobreyectiva; 20.15 la hace unitaria. □

Una aplicación con esa acción isométrica sobre el complemento de su núcleo se llama **isometría parcial**. Para matrices cuadradas singulares se puede ampliar su acción entre los complementos, completando ambas listas ortonormales, y obtener un factor unitario en otra versión polar, pero esa ampliación puede no ser única. La versión del teorema fija la acción cero en el núcleo.

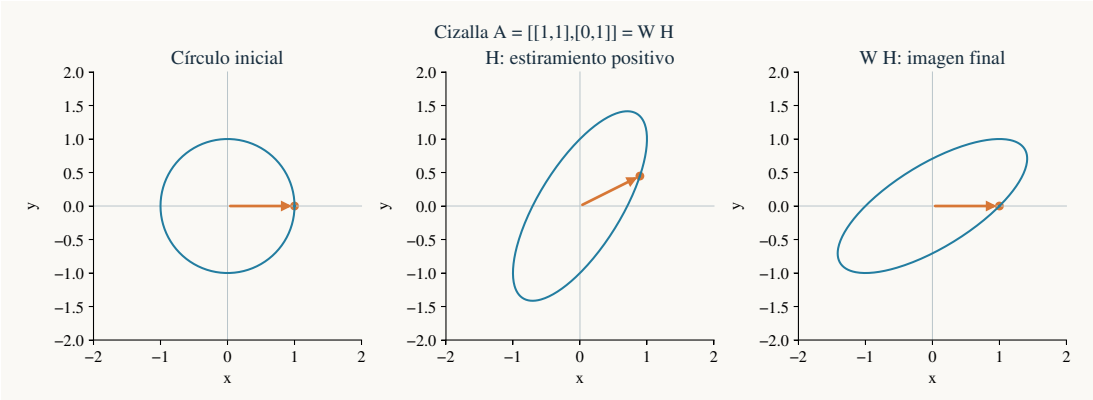


Figura 20.10. El factor positivo deforma el círculo en una elipse; el factor ortogonal transporta esa figura hasta la imagen final. El ejemplo invertible tiene factores únicos.

Ejercicios y soluciones

Las cuatro series corresponden a las unidades del capítulo. Los ejemplos con producto interno se entienden sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, según se indique, y se conserva la linealidad en la primera entrada. Las matrices numéricas sin indicación de cuerpo se estudian sobre $\mathbb{R}$.

Primera serie. Formas. Ejercicio 20.1. Para $B(x,y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 4x_2y_2$, compruebe bilinealidad y encuentre su matriz. ¿Es simétrica?

Solución 1. Cada término es lineal en x al fijar y y lineal en y al fijar x, y la suma conserva ambas propiedades. La matriz es $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, pues su entrada ij es $B(e_i, e_j)$. No es simétrica sobre $\mathbb{R}$: $B(e_1, e_2) = 2$ y $B(e_2, e_1) = 3$. El determinante es menos dos, de modo que la forma no es degenerada.

Ejercicio 20.2. Calcule los radicales de la forma cuya matriz es $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución 2. El radical derecho es $\ker M$: la ecuación $y_1 + 2y_2 = 0$ da la recta generada por $(-2, 1)$. El izquierdo es $\ker M^{\mathsf{T}}$: las ecuaciones exigen $x_1 = 0$, luego es la recta generada por $(0, 1)$. Tienen la misma dimensión uno, pero son subespacios diferentes. Por ejemplo, el vector $(0, 1)$ anula todas las segundas entradas al colocarse a la izquierda y no lo hace al colocarse a la derecha.

Ejercicio 20.3. Verifique la congruencia del ejemplo inicial con $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y explique por qué no es una semejanza.

Solución 3. Para $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, multiplicar da $MP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y después $P^{\mathsf{T}}MP = \operatorname{diag}(2, -3)$. Además $\det P = 1$, por lo que es un cambio de base válido. La traza original es uno y la nueva es menos uno; las matrices no son semejantes. La identidad describe la misma forma mediante $x = u - v$, $y = v$, que produce $2u^2 - 3v^2$.

Ejercicio 20.4. Recupere la forma simétrica asociada a $q(x, y) = 3x^2 + 6xy + 5y^2$ y determine su inercia real.

Solución 4. La matriz simétrica debe tener entradas diagonales tres y cinco, y el término cruzado es dos veces su entrada fuera de la diagonal. Por ello $M = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ y $B(v, w) = 3v_1w_1 + 3v_1w_2 + 3v_2w_1 + 5v_2w_2$. Completar cuadrados da $q = 3(x + y)^2 + 2y^2$. Ambas entradas diagonales son positivas, luego la inercia es $(2, 0, 0)$ y la forma es positiva definida.

Ejercicio 20.5. Diagonalice por congruencia sobre $\mathbb{F}_3$ la matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución 5. Elija la base $v = (1, 1)$, $w = (1, -1)$. Su matriz P tiene determinante $-2 = 1$ en $\mathbb{F}_3$, así que es invertible. Se tiene $B(v, v) = 2$, $B(w, w) = -2 = 1$ y $B(v, w) = 0$. Por tanto $P^{\mathsf{T}}MP = \operatorname{diag}(2, 1)$. El ejemplo muestra que el argumento de 20.3 requiere característica distinta de dos y no exige característica cero.

Ejercicio 20.6. Encuentre la inercia de $2x^2 + 4xy - y^2$ y una base donde su matriz sea $\operatorname{diag}(1, -1)$.

Solución 6. El cambio $x = u - v$, $y = v$ da $2u^2 - 3v^2$. La base correspondiente es $(e_1, -e_1 + e_2)$ y la forma tiene allí diagonal $(2, -3)$. Divida el primer vector por $\sqrt{2}$ y el segundo por $\sqrt{3}$; las entradas se vuelven uno y menos uno. La inercia es $(1, 1, 0)$. Los dos vectores de esa base no necesitan ser ortonormales para el producto usual: la normalización se refiere a la forma estudiada.

Ejercicio 20.7. Dé dos formas simétricas reales de igual rango que no sean congruentes.

Solución 7. Las matrices I_2 y $\operatorname{diag}(1, -1)$ tienen rango dos. La primera tiene inercia $(2, 0, 0)$ y la segunda $(1, 1, 0)$, así que no son congruentes por 20.4. También se ve directamente: la primera toma valores positivos en todo vector no nulo y la segunda toma un valor negativo en e_2; un cambio invertible no puede suprimir esa diferencia.

Ejercicio 20.8. Para $q(x, y, z) = x^2 - y^2$, encuentre un vector isótropo fuera del radical y determine todo el radical.

Solución 8. La matriz es $\operatorname{diag}(1, -1, 0)$ y su núcleo es la recta generada por e_3; al ser simétrica, éste es el radical. El vector $v = (1, 1, 0)$ satisface $q(v) = 0$, pero $B(v, e_1) = 1$, así que no pertenece al radical. El radical exige anular el emparejamiento con toda entrada, una condición más fuerte que ser isótropo.

Ejercicio 20.9. Estudie la forma bilineal compleja de matriz I_2: encuentre un isótropo no nulo y explique por qué no es un producto interno complejo.

Solución 9. El vector $(1, i)$ tiene valor cuadrático $1 + i^2 = 0$ y es no nulo. La matriz es invertible, por lo que la forma sigue siendo no degenerada. Además $B((0, i), (0, i)) = -1$, que impide

positividad, y la segunda entrada es lineal en vez de conjugado lineal. La expresión hermitiana usual sería $|z_1|^2 + |z_2|^2$, que no se anula en un vector no nulo.

Ejercicio 20.10. Una forma alternante real tiene matriz $\operatorname{diag}(2J, 3J)$, donde $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Normalice sus pares.

Solución 10. En la base usual se tiene $B(e_1, e_2) = 2$ y $B(e_3, e_4) = 3$, sin emparejamientos entre los dos bloques. Tome la nueva base $(e_1, e_2/2, e_3, e_4/3)$. Cada emparejamiento indicado se vuelve uno y los inversos valen menos uno; todos los restantes siguen siendo cero. La matriz queda $\operatorname{diag}(J, J)$ y su rango es cuatro. El cambio usa escalares reales no nulos.

Ejercicio 20.11. Demuestre que una forma alternante en dimensión tres es degenerada, también en característica dos.

Solución 11. Por 20.5, el rango de una forma alternante es par en cualquier característica. En dimensión tres sólo puede ser cero o dos, así que su radical tiene dimensión tres o uno por 20.1. En ambos casos es no nulo. El argumento por rango evita dividir por dos, operación que invalidaría una prueba basada sólo en $\det M = \det(-M)$ en característica dos.

Ejercicio 20.12. Explique por qué $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sobre $\mathbb{F}_2$ no es congruente con ninguna diagonal.

Solución 12. La forma es alternante porque $B(v, v) = 2v_1v_2 = 0$ en ese cuerpo. La alternación se conserva por cambio de base. Una matriz diagonal que fuera alternante tendría cada entrada diagonal cero al evaluar en los vectores usuales; sería la matriz cero. Pero M tiene rango dos, y la congruencia conserva el rango por multiplicación con matrices invertibles. La contradicción impide diagonalizarla por congruencia.

Ejercicio 20.13. Para la matriz hermitiana $H = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$, pruebe positividad y encuentre una congruencia diagonal.

Solución 13. Su forma cuadrática es $2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 + i\overline{z}_1z_2 - i\overline{z}_2z_1$. Completar el módulo da $2|z_1 + (i/2)z_2|^2 + (3/2)|z_2|^2$, positivo para toda columna no nula. El cambio $z_1 = u - (i/2)v$, $z_2 = v$ tiene matriz $P = \begin{pmatrix} 1 & -i/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y satisface $P^{\dagger}HP = \operatorname{diag}(2, 3/2)$. La inercia hermitiana es $(2, 0, 0)$.

Ejercicio 20.14. Compruebe la polarización hermitiana para $v = e_1$, $w = e_2$ y la forma del ejercicio 13.

Solución 14. Con la convención $h(v, w) = w^{\dagger}Hv$, se tiene $h(e_1, e_2) = H_{21} = -i$. Los valores cuadráticos son $q(v + w) = q(v - w) = 4$, $q(v + iw) = 2$ y $q(v - iw) = 6$. Sustituirlos en 20.6 da $(4 - 4 + i \cdot 2 - i \cdot 6)/4 = -i$, como se requería. El signo de los términos imaginarios depende de haber fijado la primera entrada lineal.

Ejercicio 20.15. Determine las dimensiones de las formas simétricas y alternantes en dimensión n. ¿Qué estructura escalar tiene el conjunto de matrices hermitianas?

Solución 15. Una matriz simétrica se determina por sus n entradas diagonales y sus $n(n-1)/2$ entradas sobre la diagonal: la dimensión es $n(n+1)/2$. Una matriz alternante tiene diagonal cero y la entrada inferior es la opuesta de la superior, incluso en característica dos; su dimensión es $n(n-1)/2$. Las matrices hermitianas forman un espacio real de dimensión $n + 2 \cdot n(n-1)/2 = n^2$. No forman un espacio complejo: I es hermitiana, pero iI no lo es cuando $n > 0$.

Segunda serie. Geometría ortogonal. Ejercicio 20.16. Para $\langle x, y\rangle = x_1\overline{y}_1 + 4x_2\overline{y}_2$, encuentre una base ortonormal y la norma de $(1, 1)$.

Solución 16. Los vectores usuales son ortogonales, pero sus normas son uno y dos. Por ello $(e_1, e_2/2)$ es una base ortonormal. La norma de $(1, 1)$ es $\sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$. Este producto tiene matriz de Gram $\operatorname{diag}(1, 4)$; cambiar el producto cambia las longitudes aunque se mantengan las coordenadas.

Ejercicio 20.17. Compruebe la ortogonalidad de $(1, i)$ y $(i, 1)$ en $\mathbb{C}^2$ y normalícelos.

Solución 17. El producto usual es $\langle (1, i), (i, 1)\rangle = 1 \cdot (-i) + i \cdot 1 = 0$. Ambos tienen norma $\sqrt{2}$, así que dividirlos por $\sqrt{2}$ produce una base ortonormal. Si se omitiera la conjugación, la expresión diagonal en $(1, i)$ sería $1 + i^2 = 0$, pese a tratarse de un vector no nulo; ésa es una forma bilineal diferente y no mide la norma usual.

Ejercicio 20.18. Complete a una base ortonormal los dos vectores obtenidos por Gram–Schmidt en §20.7.

Solución 18. Los dos primeros son $(1,1,0)/\sqrt{2}$ y $(1,-1,2)/\sqrt{6}$. Un vector ortogonal al primero cumple $x+y=0$; al segundo debe cumplir $x-y+2z=0$. Sustituyendo $y=-x$ resulta $z=-x$. Tome $(1,-1,-1)$, de norma $\sqrt{3}$. Dividirlo por ella da un tercer vector unitario perpendicular a los anteriores, y la lista de tres vectores es una base por independencia ortonormal.

Ejercicio 20.19. Aplique el primer paso de Gram–Schmidt a $(1,0)$ y $(2,0)$. Explique por qué la fórmula no produce dos vectores unitarios.

Solución 19. El primer vector ya es unitario. El segundo residuo es $(2,0)-\langle(2,0),(1,0)\rangle(1,0) = (2,0)-2(1,0)=0$. No se puede normalizar dividiendo por su norma. La hipótesis de independencia ha fallado; basta descartar el segundo vector para obtener una base ortonormal del espacio generado, que es una recta.

Ejercicio 20.20. Proyecte $b=(3,1)$ sobre la recta generada por $(1,2)$ y calcule la distancia.

Solución 20. Para $u=(1,2)$, se tiene $\langle b,u\rangle = 5$ y $\|u\|^2=5$. La proyección es $u=(1,2)$, y el residuo es $(2,-1)$, ortogonal a u porque $2-2=0$. Su norma es $\sqrt{5}$. Para cualquier punto tu de la recta, la identidad de error da $\|b-tu\|^2 = 5+5(1-t)^2$, cuyo mínimo se alcanza únicamente en $t=1$.

Ejercicio 20.21. Proyecte $(1,2,3)$ sobre el plano $x+y+z=0$.

Solución 21. El complemento ortogonal del plano está generado por $n=(1,1,1)$. La componente en esa dirección es $\langle b,n\rangle n/\|n\|^2 = 6n/3 = 2n$. Por ello la proyección sobre el plano es $b-2n = (-1,0,1)$. El residuo $(2,2,2)$ tiene norma cuadrada doce. La suma de las coordenadas de la proyección es cero y el residuo es perpendicular a todo vector del plano, que verifican la descomposición.

Ejercicio 20.22. Verifique la factorización QR de las columnas $(1,1,0)$ y $(1,0,1)$ exhibida en §20.9.

Solución 22. Las columnas de Q tienen norma uno y producto cero, así que $Q^{\dagger}Q = I_2$. La primera columna de QR es $\sqrt{2}q_1 = (1,1,0)$. La segunda es $q_1/\sqrt{2} + \sqrt{3/2}\,q_2 = (1/2,1/2,0)+(1/2,-1/2,1) = (1,0,1)$. La matriz R es triangular y su diagonal es positiva, por lo que satisface todas las condiciones de la versión única del teorema.

Ejercicio 20.23. Muestre que la condición de diagonal positiva en QR no puede omitirse si se quiere unicidad.

Solución 23. Para $A=I_2$ tenemos $Q=I_2$, $R=I_2$. También podemos tomar $\widetilde{Q}=\operatorname{diag}(-1,1)$ y $\widetilde{R}=\operatorname{diag}(-1,1)$: el producto sigue siendo I_2, las columnas de $\widetilde{Q}$ son ortonormales y $\widetilde{R}$ es triangular. Son factorizaciones distintas. La segunda viola exactamente la positividad de la primera entrada diagonal de R.

Ejercicio 20.24. Ajuste por mínimos cuadrados una recta $a+ct$ a $(0,1),(1,2),(2,2)$.

Solución 24. Las ecuaciones normales para las columnas 1 y t son $3a+3c=5$ y $3a+5c=6$. Restarlas da $2c=1$, y luego $a=7/6$. El ajuste es $(7/6,5/3,13/6)$ y el residuo $(-1/6,1/3,-1/6)$. Sus productos con $(1,1,1)$ y $(0,1,2)$ son cero. El error cuadrado es $(1+4+1)/36 = 1/6$. Las dos columnas son independientes, así que los coeficientes obtenidos son únicos.

Ejercicio 20.25. Para $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ y $b=(1,0)$, encuentre todos los minimizadores sin usar una inversa.

Solución 25. Toda imagen tiene forma (s,s) con $s=x_1+x_2$. El error cuadrado es $(s-1)^2+s^2 = 2(s-1/2)^2+1/2$. Se minimiza exactamente cuando $s=1/2$, por lo que los minimizadores son $(t,1/2-t)$. Aunque la imagen óptima $(1/2,1/2)$ es única, sus preimágenes no lo son. Entre éstas, completar cuadrados da $t^2+(1/2-t)^2 = 2(t-1/4)^2+1/8$, mínimo en $(1/4,1/4)$.

Ejercicio 20.26. Resuelva las ecuaciones normales para $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$ y $b=(2,1,1)$. ¿Se puede invertir $A^{\dagger}A$?

Solución 26. Se tiene $A^{\dagger}A=\operatorname{diag}(1,0)$ y $A^{\dagger}b=(2,0)$. Las ecuaciones normales sólo exigen $x_1=2$, dejando x_2 libre. La matriz no es invertible y no se puede usar la fórmula del caso de columnas independientes. Para cualquiera de esos vectores, la imagen es $(2,0,0)$ y el error cuadrado es dos. El vector $(2,0)$ es el único minimizador de norma mínima.

Ejercicio 20.27. Encuentre el representante de Riesz de $f(z_1,z_2)=z_1+iz_2$ y compruebe la conjugación al multiplicar el representante por i.

Solución 27. El representante es $y = (1, -i)$ porque $\langle z, y\rangle = z_1 + iz_2$. Si se sustituye y por iy, entonces $\langle z, iy\rangle = \bar{i}\langle z, y\rangle = -if(z)$. Por tanto la correspondencia del representante al funcional es conjugado lineal. El representante del funcional if sería $-iy$, y no iy.

Ejercicio 20.28. Con el producto del ejercicio 16, represente el funcional complejo $f(z) = z_1 + 2iz_2$.

Solución 28. Necesitamos $\overline{y}_1 = 1$ y $4\overline{y}_2 = 2i$ para que $\langle z, y\rangle = f(z)$. Por tanto $y = (1, -i/2)$. Al sustituir, la segunda contribución es $4z_2(i/2) = 2iz_2$. El representante depende del producto interno: para el usual sería $(1, -2i)$, que es otro vector.

Ejercicio 20.29. Si las columnas de C son una base cualquiera de un subespacio $W \subseteq \mathbb{F}^m$, pruebe $P_W = C(C^\dagger C)^{-1}C^\dagger$.

Solución 29. Las columnas son independientes, así que $C^\dagger C$ es invertible por 20.11. Para cada b, las ecuaciones normales del problema $\min_x \|Cx - b\|$ dan el único coeficiente $x = (C^\dagger C)^{-1}C^\dagger b$. Su imagen Cx es la proyección de b sobre W. Sustituir esa expresión prueba la fórmula de operadores. La unicidad se refiere al vector proyectado y los coeficientes son únicos porque las columnas forman una base.

Ejercicio 20.30. En el espacio real de sucesiones de soporte finito, con producto $\langle x, y\rangle = \sum_j x_j y_j$, pruebe que $f(x) = \sum_j x_j$ no tiene representante de Riesz en ese mismo espacio.

Solución 30. Cada entrada tiene soporte finito, así que la suma de f está definida y es lineal. Si $f(x) = \langle x, y\rangle$ para alguna sucesión de soporte finito y, evaluar en cada vector usual e_j daría $1 = f(e_j) = y_j$. Esto exigiría que todas las entradas de y fueran uno, contradiciendo su soporte finito. El ejemplo explica por qué la existencia demostrada en 20.12 depende de la dimensión finita; no se ha impuesto una estructura de completitud.

Tercera serie. Operadores. Ejercicio 20.31. Para $T(z) = iz$ en $\mathbb{C}$, compare el dual algebraico T' y el adjunto T^*.

Solución 31. Un funcional complejo tiene forma $f(z) = az$. Entonces $T'f(z) = f(iz) = aiz$, por lo que el dual tiene matriz (i) en la base dual usual. Para el adjunto se exige $\langle iz, w\rangle = iz\overline{w} = \langle z, T^*w\rangle$. Esto da $T^*w = -iw$, pues $\overline{-iw} = i\overline{w}$. La matriz adjunta es $(-i)$. Las dos aplicaciones tienen dominios de tipos distintos y obedecen identidades diferentes.

Ejercicio 20.32. Calcule el adjunto de $A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y determine si es normal.

Solución 32. En el producto usual, $A^\dagger = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Los productos son

$$A^\dagger A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 5 \end{pmatrix}, \qquad AA^\dagger = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Son distintos, así que A no es normal. Sus valores propios $i, 2$ son diferentes y garantizan diagonalización ordinaria, pero el teorema espectral impide diagonalizarla mediante una base ortonormal.

Ejercicio 20.33. Para el producto real de Gram $\Gamma = \operatorname{diag}(1, 4)$, encuentre el adjunto del operador de matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Solución 33. La fórmula de 20.13 da $A^* = \Gamma^{-1}A^{\mathsf{T}}\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/4 & 2 \end{pmatrix}$. No coincide con la transpuesta usual, porque la base elegida no es ortonormal para ese producto. Por ejemplo, $\langle Ae_2, e_1\rangle = \langle (1,2), (1,0)\rangle = 1$ y $\langle e_2, A^*e_1\rangle = \langle (0,1), (1,1/4)\rangle = 1$. La identidad completa queda verificada matricialmente por $\Gamma A = (A^*)^{\mathsf{T}}\Gamma$.

Ejercicio 20.34. Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, describa los cuatro subespacios fundamentales y sus relaciones ortogonales.

Solución 34. La imagen es la recta generada por $(1, 0, 0)$ y el núcleo está generado por $(1, -1)$. La adjunta envía (u, v, w) a (u, u), por lo que su imagen es la recta generada por $(1, 1)$ y su núcleo es el plano $u = 0$. Así $\operatorname{im} A^\dagger = (\ker A)^\perp$ en el dominio y $\ker A^\dagger = (\operatorname{im} A)^\perp$ en el codominio. Las dimensiones de los dos ambientes no se confunden.

Ejercicio 20.35. Pruebe que $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es un proyector oblicuo, no ortogonal.

Solución 35. Multiplicar da $P^2 = P$. Su imagen es el eje horizontal y su núcleo la recta generada por $(-1, 1)$. Esas rectas no son perpendiculares, porque el producto de $(1, 0)$ con $(-1, 1)$ es menos uno. También $P^{\mathsf{T}} \neq P$, lo que viola la caracterización de proyección ortogonal. Por ejemplo, $Pe_2 = e_1$, mientras la proyección ortogonal de e_2 sobre el eje horizontal es cero.

Ejercicio 20.36. Muestre que un bloque $J_2(\lambda)$ no es normal para ningún $\lambda \in \mathbb{C}$.

Solución 36. La resta $J_2(\lambda)^\dagger J_2(\lambda) - J_2(\lambda)J_2(\lambda)^\dagger$ es $\operatorname{diag}(-1, 1)$: los términos $|\lambda|^2$ y los términos fuera de la diagonal se cancelan, y los unos del acoplamiento dejan esas dos entradas. La diferencia nunca es cero. El bloque carece de una base propia, en concordancia con que los operadores normales complejos sí la tienen ortonormal.

Ejercicio 20.37. En la prueba de Schur, ¿puede sustituirse la compresión al complemento ortogonal por la restricción? Examine $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y la recta propia $\mathbb{R}e_1$.

Solución 37. El complemento ortogonal está generado por e_2, pero $Ae_2 = e_1 + 2e_2$ no pertenece a esa recta. Por tanto la restricción con codominio en el complemento no está definida como operador sobre él. La compresión sí lo está: primero transforma y después proyecta, enviando e_2 a $2e_2$. El bloque inferior derecho es dos, aunque el complemento no sea invariante. La misma observación vale al estudiar esta matriz sobre $\mathbb{C}$.

Ejercicio 20.38. Diagonalice ortogonalmente $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y escriba su forma cuadrática en los nuevos ejes.

Solución 38. Los vectores $q_1 = (1, 1)/\sqrt{2}$ y $q_2 = (1, -1)/\sqrt{2}$ son ortonormales y satisfacen $Aq_1 = 3q_1$, $Aq_2 = q_2$. Por ello $Q = (q_1 \; q_2)$ cumple $Q^{\mathsf{T}}AQ = \operatorname{diag}(3, 1)$. Si $x = Qu$, la forma vale $3u_1^2 + u_2^2$. Esta vez congruencia y semejanza coinciden porque $Q^{-1} = Q^{\mathsf{T}}$.

Ejercicio 20.39. Estudie la normalidad de la rotación $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sobre $\mathbb{R}$ y diagonalícela sobre $\mathbb{C}$.

Solución 39. Se cumple $R^{\mathsf{T}}R = RR^{\mathsf{T}} = I$, así que es ortogonal y normal. Su característico $t^2 + 1$ no tiene raíces reales y no existe base propia real. Sobre $\mathbb{C}$, los vectores $(1, -i)/\sqrt{2}$ y $(1, i)/\sqrt{2}$ son propios de valores $i, -i$ y son ortonormales: sus productos cruzados se anulan y sus normas son uno. Reunidos en U, dan $U^\dagger RU = \operatorname{diag}(i, -i)$.

Ejercicio 20.40. Sobre $\mathbb{R}$, ¿basta $x^{\mathsf{T}}Ax > 0$ para $x \neq 0$ para que A sea un operador positivo definido según la definición del capítulo?

Solución 40. No. Tome $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. La parte antisimétrica se cancela al evaluar en la diagonal y $x^{\mathsf{T}}Ax = x_1^2 + x_2^2 > 0$ para $x \neq 0$. Sin embargo, $A^{\mathsf{T}} \neq A$, de modo que no es autoadjunto. La definición de operador positivo del capítulo exige esa condición además de la desigualdad. El ejemplo muestra por qué se conserva expresamente en el caso real.

Ejercicio 20.41. Encuentre la raíz cuadrada positiva de $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ y otra raíz que no sea positiva.

Solución 41. En los ejes $(1, 1)/\sqrt{2}$ y $(1, -1)/\sqrt{2}$, los valores propios de A son nueve y uno. Sus raíces positivas son tres y uno, que al volver a la base usual dan $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Su cuadrado es A y sus valores propios son positivos. La matriz $-H$ también tiene cuadrado A, pero es negativa definida. La unicidad de 20.19 se refiere a raíces positivas, no a todas las raíces matriciales.

Ejercicio 20.42. Diagonalice simultáneamente $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Solución 42. Se cumple $B = 5I - A$, así que conmutan y son autoadjuntos. La base ortonormal del ejercicio 38 diagonaliza A con valores tres y uno. En esos mismos vectores, B tiene valores $5 - 3 = 2$ y $5 - 1 = 4$. Por tanto $Q^{\mathsf{T}}AQ = \operatorname{diag}(3, 1)$ y $Q^{\mathsf{T}}BQ = \operatorname{diag}(2, 4)$. La relación polinómica permite verificar la simultaneidad sin resolver un segundo sistema propio.

Ejercicio 20.43. Dé dos autoadjuntos reales sin base propia común.

Solución 43. Tome $A = \operatorname{diag}(1,2)$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Son simétricos, pero $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $BA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ son distintos. Si ambos fueran diagonales en una misma base, conmutarían en esa base y, por semejanza, también en la original. La falta de conmutación impide toda base propia común, incluso sin exigir ortonormalidad.

Ejercicio 20.44. Pruebe que un operador normal nilpotente sobre $\mathbb{C}$ es cero. Extienda la conclusión al caso real.

Solución 44. Sobre $\mathbb{C}$, el teorema espectral da una base ortonormal propia. La nilpotencia obliga a que todo valor propio sea cero, pues su potencia correspondiente debe anularse en el cuerpo. La matriz diagonal es cero. Para un operador real normal, escoja una base ortonormal real y estudie su matriz sobre $\mathbb{C}$; la identidad $A^{\mathsf{T}}A = AA^{\mathsf{T}}$ sigue siendo la identidad de normalidad compleja y la nilpotencia se conserva. La matriz compleja es cero, luego también la real.

Ejercicio 20.45. Demuestre que los espacios propios de valores distintos de un normal complejo son ortogonales.

Solución 45. Por 20.17, escoja una base ortonormal propia. Si $Tx = \lambda x$, al expresar x en esa base sólo pueden aparecer direcciones con valor λ: en cada coordenada se tiene $(\mu_j - \lambda)x_j = 0$. Lo mismo ocurre para un vector y de valor distinto ν. Sus coeficientes se apoyan en grupos disjuntos de la base ortonormal y, por tanto, $\langle x, y\rangle = 0$. El razonamiento abarca valores repetidos dentro de cada grupo.

Cuarta serie. Valores singulares. Ejercicio 20.46. Exhiba una SVD completa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución 46. Tome $U = I_3$, $V = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y Σ de tamaño 3×2 con entrada $\sqrt{2}$ en $(1,1)$ y las demás cero. Las columnas de V son ortonormales. Sus imágenes por A son $\sqrt{2}e_1$ y cero, de modo que $AV = U\Sigma$ y $A = U\Sigma V^{\mathsf{T}}$. La lista matricial de valores singulares es $(\sqrt{2}, 0)$ y el rango es uno.

Ejercicio 20.47. Para $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, determine sus valores singulares, núcleo e imagen. ¿La positividad de todos los valores singulares implica sobreyectividad?

Solución 47. La matriz ya es diagonal rectangular: puede tomarse $U = I_3$, $V = I_2$ y $\Sigma = A$. Los valores singulares son tres y uno, ambos positivos. El núcleo es cero y la imagen es el plano generado por e_1, e_2 del codominio. No es sobreyectiva sobre $\mathbb{R}^3$; queda fuera la dirección e_3. Los valores positivos ocupan todas las direcciones del dominio, lo que asegura inyectividad, sin llenar necesariamente el codominio.

Ejercicio 20.48. Construya una SVD de $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y compare la lista matricial con el espectro de $A^{\mathsf{T}}A$.

Solución 48. En el dominio elija $v_1 = e_2$, $v_2 = e_3$ y $v_3 = e_1$. En el codominio tome $U = I_2$. Entonces $Av_1 = 2e_1$, $Av_2 = e_2$ y $Av_3 = 0$, así que $\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $V = (e_2\ e_3\ e_1)$. Los valores singulares de la lista matricial son $(2,1)$, de longitud dos. El espectro de $A^{\mathsf{T}}A = \operatorname{diag}(0,4,1)$ contiene un cero adicional, correspondiente al núcleo del dominio de dimensión tres.

Ejercicio 20.49. Compare los valores propios y singulares de $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución 49. La matriz es nilpotente y sus dos valores propios son cero. En cambio, $A^{\mathsf{T}}A = \operatorname{diag}(0,9)$, de modo que sus valores singulares son tres y cero. Una SVD toma $U = I_2$, $V = (e_2\ e_1)$ y $\Sigma = \operatorname{diag}(3,0)$. La dirección e_2 se estira hasta $3e_1$, aunque ninguna dirección propia tenga un valor no nulo.

Ejercicio 20.50. Calcule las normas de operador y Frobenius de $\operatorname{diag}(5,2,1)$.

Solución 50. Los valores singulares son cinco, dos y uno. La norma de operador es cinco y se alcanza en e_1. La norma de Frobenius es $\sqrt{25+4+1}=\sqrt{30}$. Para un vector unitario, la imagen tiene norma cuadrada $25|x_1|^2+4|x_2|^2+|x_3|^2\le 25$, que verifica directamente la primera cuenta.

Ejercicio 20.51. Calcule la pseudoinversa de la matriz del ejercicio 46 y verifique las cuatro identidades de Penrose.

Solución 51. Invertir sólo el valor singular positivo da $X=\begin{pmatrix}1/2 & 0 & 0\\ 1/2 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Sus productos son $AX=\operatorname{diag}(1,0,0)$ y $XA=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, ambos simétricos e idempotentes. El primero deja fijas las columnas de A, así que $AXA=A$. El segundo deja fijas las columnas de X, de donde $XAX=X$. Esto verifica las cuatro identidades y, por unicidad, $X=A^{+}$.

Ejercicio 20.52. Para la misma matriz y $b=(2,1,-1)$, encuentre todos los minimizadores y seleccione el de norma mínima.

Solución 52. Una imagen tiene forma $(x_1+x_2,0,0)$. El error cuadrado es $(x_1+x_2-2)^2+2$, que se minimiza cuando $x_1+x_2=2$. Las soluciones son $(1+t,1-t)$. Sus normas cuadradas son $2+2t^2$, así que el único mínimo de norma es $(1,1)=A^{+}b$. El residuo mínimo $(0,1,-1)$ tiene norma $\sqrt{2}$ y es ortogonal a la imagen de A.

Ejercicio 20.53. Para $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, calcule A^{+} y la solución de norma mínima de $Ax=(2,3)$.

Solución 53. Las filas son independientes y $AA^{\mathsf{T}}=\operatorname{diag}(2,1)$. La matriz $X=A^{\mathsf{T}}(AA^{\mathsf{T}})^{-1}$ es

$$X=\begin{pmatrix}1/2 & 0\\ 0 & 1\\ 1/2 & 0\end{pmatrix}.$$

Se tiene $AX=I_2$ y la imagen de X es el complemento de $\ker A=\operatorname{span}(1,0,-1)$. Por ello Xb es la única solución perpendicular al núcleo para todo b; coincide con $A^{+}b$ por 20.24. Para $b=(2,3)$ resulta $(1,3,1)$. Las demás soluciones son $(1+t,3,1-t)$ y añaden $2t^2$ a su norma cuadrada.

Ejercicio 20.54. Calcule la pseudoinversa de la fila compleja $A=\begin{pmatrix}1 & i\end{pmatrix}$ y la solución de norma mínima de $Ax=1$.

Solución 54. Se tiene $AA^{\dagger}=2$, por lo que $A^{+}=\frac{1}{2}(1,-i)^{\mathsf{T}}$. La solución es $x=(1/2,-i/2)$ y satisface $Ax=1/2+i(-i/2)=1$. El núcleo está generado por $(-i,1)$; el producto interno de la solución con ese vector es $i/2-i/2=0$. Su norma cuadrada es $1/2$, mínima entre todas las soluciones. Usar la transpuesta sin conjugación daría $(1/2,i/2)$ y produciría salida cero, mostrando el error.

Ejercicio 20.55. Encuentre la mejor aproximación de rango uno por truncación a $A=\operatorname{diag}(5,2,1)$ y pruebe la optimalidad frente a cualquier matriz de rango uno.

Solución 55. La truncación es $A_1=\operatorname{diag}(5,0,0)$ y la norma del error es dos. Para cualquier B de rango a lo sumo uno, la restricción a $\operatorname{span}(e_1,e_2)$ tiene núcleo no nulo. Elija allí un vector unitario x con $Bx=0$. Entonces $\|(A-B)x\|^2=25|x_1|^2+4|x_2|^2\ge 4$. Toda aproximación tiene error de operador al menos dos, que es el alcanzado por A_1.

Ejercicio 20.56. Muestre que la mejor aproximación de rango uno en norma de operador puede no ser única, incluso si los valores singulares son distintos.

Solución 56. Para $A=\operatorname{diag}(3,1)$ y cualquier $t\in[2,4]$, la matriz $B_t=\operatorname{diag}(t,0)$ tiene rango uno. El error es $\|A-B_t\|_2=\max(|3-t|,1)=1$. El segundo valor singular de A es uno, así que 20.25 prueba que todas son óptimas. Los valores tres y uno son distintos, pero la norma de operador permite modificar la primera entrada dentro de ese intervalo sin aumentar el mayor error.

Ejercicio 20.57. Para $A_\varepsilon=\operatorname{diag}(1,\varepsilon)$ con $0<\varepsilon\le 1$, calcule la norma de la inversa y compare la pseudoinversa con la del límite $\varepsilon=0$.

Solución 57. La matriz es invertible y $A_\varepsilon^{+}=A_\varepsilon^{-1}=\operatorname{diag}(1,1/\varepsilon)$, de norma $1/\varepsilon$. Un cambio δ en la segunda coordenada de b cambia la solución en δ/ε en esa dirección. Para $\varepsilon=0$, la pseudoinversa es $\operatorname{diag}(1,0)$, pues sólo se invierte el valor singular que permanece positivo. La fórmula exacta explica el cambio al perder rango y la amplificación previa de errores de entrada.

Ejercicio 20.58. Verifique la descomposición polar de la cizalla $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $H = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $W = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Solución 58. Multiplicar da $H^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = A^{\mathsf{T}} A$ y $W^{\mathsf{T}} W = I$. Además $WH = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = A$. La forma de la matriz no escalada de H es $2(x + y/2)^2 + (5/2)y^2$, positiva para toda entrada no nula; por ello H es la raíz positiva. La matriz A es invertible, así que su factor polar ortogonal es único y vale W.

Ejercicio 20.59. Calcule los factores polares canónicos de la matriz rectangular del ejercicio 46 y explique en qué subespacio se conserva la norma.

Solución 59. La raíz es $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y el factor parcial es $W = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Se verifican $H^2 = A^{\mathsf{T}} A$ y $WH = A$. La aplicación W anula $(1, -1)$ y envía el vector unitario $(1, 1)/\sqrt{2}$ a e_1, por lo que es una isometría sobre $(\ker A)^{\perp}$. No conserva todas las normas del dominio: un vector no nulo del núcleo desaparece.

Ejercicio 20.60. Para $A = \operatorname{diag}(2, 0)$, compare el factor polar parcial canónico con los factores unitarios posibles.

Solución 60. La raíz positiva es $H = \operatorname{diag}(2, 0)$. El factor canónico de 20.26 es $W = \operatorname{diag}(1, 0)$, que anula el núcleo y es isometría en su complemento. Si se exige un factor unitario sobre todo el plano, tanto $U_1 = I_2$ como $U_2 = \operatorname{diag}(1, -1)$ satisfacen $U_j H = A$. Su acción en la dirección del núcleo no afecta al producto. La unicidad canónica usa la condición de acción cero en el núcleo; no afirma unicidad de toda ampliación unitaria.

Lecturas y referencias

Hoffman–Kunze, *Linear Algebra*, §§10.1–10.3, desarrolla matrices de formas, congruencia, inercia y pares alternantes. Axler, *Linear Algebra Done Right*, §§6A–6C y 7B–7F, ofrece el recorrido de ortogonalidad a espectro y valores singulares. Friedberg–Insel–Spence, *Linear Algebra*, §6.3, relaciona representación de funcionales, adjuntos y mínimos cuadrados. Johnston, *Advanced Linear and Matrix Algebra*, §2.C.1, estudia los proyectores asociados a la pseudoinversa.

Bibliografía

Las lecturas al final de cada capítulo indican las secciones pertinentes y el papel de cada obra. Aquí se reúnen los títulos citados en el tomo. Las dos obras de Johnston son libros distintos.

- Axler, Sheldon. *Linear Algebra Done Right*. 4.ª edición. Springer, 2024.
- Erdman, John M. *Exercises and Problems in Linear Algebra*.
- Friedberg, Stephen H.; Insel, Arnold J.; Spence, Lawrence E. *Linear Algebra*. 5.ª edición. Pearson, 2019.
- Hoffman, Kenneth; Kunze, Ray. *Linear Algebra*. 2.ª edición. Prentice-Hall, 1971.
- Johnston, Nathaniel. *Introduction to Linear and Matrix Algebra*. Springer, 2021. DOI: 10.1007/978-3-030-52811-9.
- Johnston, Nathaniel. *Advanced Linear and Matrix Algebra*. Springer, 2021. DOI: 10.1007/978-3-030-52815-7.
- Strang, Gilbert. *Introduction to Linear Algebra*. 4.ª edición.
- Treil, Sergei. *Linear Algebra Done Wrong*.
- Weintraub, Steven H. *Linear Algebra for the Young Mathematician*.